



OKTATÁSI
HIVATAL

NAT
2020

12

Matematika

tankönyv

Kedves Végzős Olvasónk!

A középiskola utolsó éve áll előtted, karnyújtásnyira tőled az érettségi. Végzősként, az érettségire készülve egyre magasabb nézőpontból tekinthetsz a világra, a természetben előforduló folyamatokra és ezek matematikai modelljeire is. A tankönyvi feladatokat igyekeztünk olyan színesen összeválogatni, hogy az élet sokféle területéhez és többféle tudományhoz kapcsolódjanak. Szeretnénk bemutatni, a matematika milyen módon válaszol a valós élet problémára, és azt, hogy ez a rendszer önmagában is érdekes, nyitottságra nevel, csodálkozást és kérdéseket vált ki.

Ebben a tanévben három új témakör kerül elő.

A leckék tagolása megegyezik az eddigiekkel. A következő típusú részekkel találkozhatasz a könyvben:

BEVEZETŐ, mely általában egy gyakorlati problémán keresztül mutat rá az alkalmazások lehetőségére;

KIDOLGOZOTT FELADAT, mely lépésről lépésre megmutatja a megoldás egy-egy útját;

ELMÉLET, melynek keretében rendszerezzük a matematikai tartalmakat, fogalmakat és tételeket;

FELADAT és **HÁZI FELADAT**, melyek megoldásával elsajátíthatod a szükséges ismereteket.

RÁADÁS, melyben megmutatjuk a tananyag néhány érdekes továbbgondolását és alkalmazását.

A tankönyv második része a rendszerező összefoglalás. Öt témakörbe rendezve találod meg a középiskolai matematikai ismereteket. A könyv végén néhány középszintű próbaérettségi feladatsort találsz.

Ha tartós tankönyved van, amit vissza kell adnod az iskolának a tanév végén, akkor ne írd a tankönyvbe, dolgozz a füzetedben! Táblázatok esetén segítségére lehet egy öntapadós jegyzettömb: egy öntapadós lapot tegyél a táblázat mellé, s arra írhatod az eredményeket.

Kívánunk Neked erre az évre jó munkát, kitartást és sikeres érettségit!

1. TÉRGEOMETRIA

- Testek térfogata és felszíne
Dinnyék, sajtok, fagylaltok
Építkezés és darabolás
Gúlák és kúpok, egészben és csonkán
- Hajlásszögek, síkmetszetek
Lejtők és háztetők
Forgassunk meg egy háromszöget!

2. SOROZATOK

- Számítási sorozatok
Nézőtér és tetőcserepek
A kis Gauss trükkje
- Mértani sorozatok
Kamatos kamat és amortizáció
Rajzolj bele még egyet!
Búzaszemek a sakktáblán

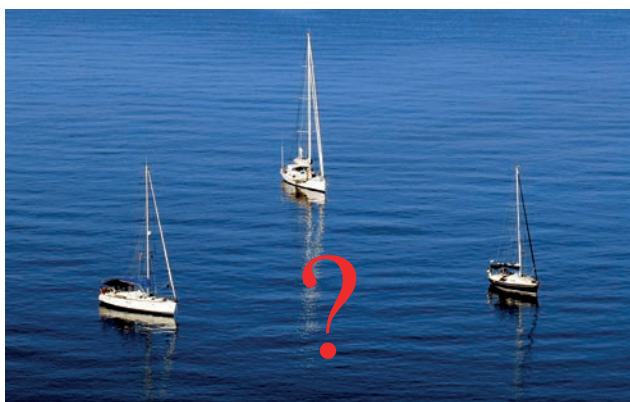
3. STATISZTIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

- Adatsokaságok és jellemzőik
Diagram a dobozban
Osztályok nem csak tanulókból
Szóródás és kockázat
- Események térben és időben
Az eseményeket is össze lehet adni
Független történések
- Mennyire valószínű?
Céltábla és szerencsekerék
Dobókocka, lottó és más érdekes játékok
Részvény és minőségellenőrzés

KIDOLGOZOTT FELADAT

Hétköznapi tárgyakkal (golyókkal, kavicsokkal, pálcikákkal, lapokkal, dobozokkal stb.) készíts modellt a feladat szövegének megfelelően! Mutasd meg, mondd el részletesen társaidnak a megoldásra vonatkozó ötleteidet!

1. Négy hajó úgy helyezkedik el, hogy bármelyik kettő egymástól 40 méter távolságra van. A négy közül három vitorlás. Milyen hajó lehet a negyedik? (A hajókat pontszerűnek tekintjük.)



Megoldás

Először próbáljuk meg a három ismert járműre megoldani a problémát! Ezek a víz felszínén vannak egy 40 m oldalhosszúságú szabályos háromszög csúcspontjaiban.

A negyedik jármű nem helyezhető el ugyanebben a síkban, ezért a vízfelszín fölött vagy alatt tartózkodhat, ezért az csak tengeralattjáró vagy léghajó lehet.

2. Egy pók a szoba egyik sarkából a tőle legtávolabbi sarokba szeretne eljutni. A téglatest alakú helyiség szélessége 2 méter, hosszúsága 4 méter, és magassága 2,5 méter.

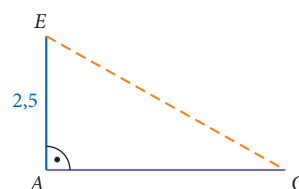
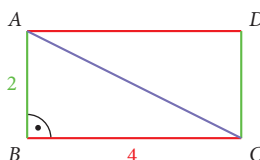
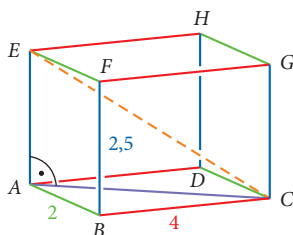
- a) Mekkora a legrövidebb út, ha a pók bárhol, akár a levegőben kifeszített fonálon is haladhat?
b) Mekkora a legrövidebb út, ha a pók csak az oldalfalakon, a plafonon és a padlón mászva tud haladni?

Megoldás

- a) A két pont között a legrövidebb út a pontok által meghatározott szakasz, vagyis ha a pók pl. az E csúcsból a C csúcsba szeretne eljutni, akkor az EC testátló hosszának megfelelő utat kell megtennie (a levegőben hálót szövögetve). Az EC szakasz az ACE derékszögű háromszög átfogója, ezért hosszának meghatározásához szükség van az AC szakasz hosszának ismeretére. Az AC szakasz az $ABCD$ téglalap egyik átlója. Az előbbieket figyelembevételel a Pitagorasz-tétel ABC , majd ACE háromszögekre való felírásával: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, valamint $EC^2 = EA^2 + AC^2$, így $EC^2 = EA^2 + AB^2 + BC^2$. Ez alapján $EC = \sqrt{2,5^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{26,25} \approx 5,12$.

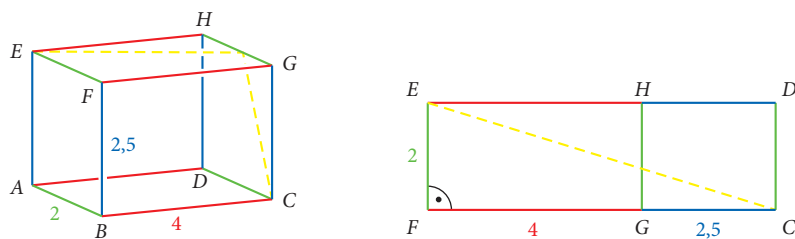
Tehát a legrövidebb út hossza körülbelül 5,12 méter.

Keress még olyan derékszögű háromszögeket, amelyekben ugyancsak átfogó az EC testátló! Végezd el abban a háromszögben is a számításokat!



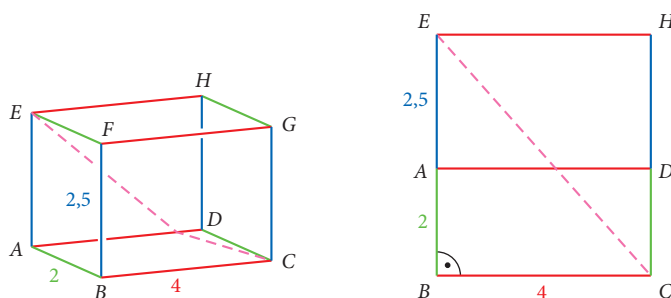
- b) A pók útja jobban átlátható, ha kiterítjük egy síkba azt a két szomszédos oldalfalat (vagy plafont, vagy padlót), amelyen a pók halad. A lehetséges síkba terítések történhetnek a 2 m, a 4 m, valamint a 2,5 m hosszúságú él mentén:

I. Ha a pók a HG élen keresztül halad:



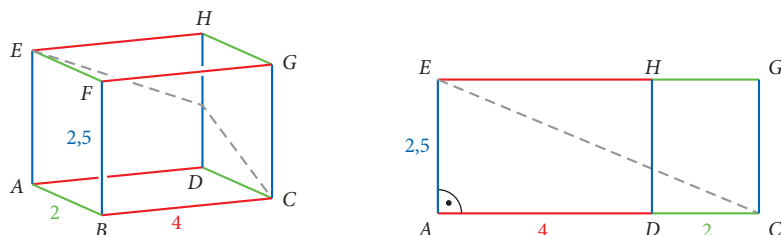
Ekkor az $EFCD$ téglalapon a legrövidebb út az EC átló hosszával egyenlő. Az EFC derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel felhasználásával $EC^2 = EF^2 + FC^2$, így $EC = \sqrt{2^2 + (4 + 2,5)^2} = \sqrt{46,25}$.

II. Ha a pók az AD élen keresztül halad:



Ekkor az $EBCH$ téglalapon a legrövidebb út az EC átló hosszával egyenlő. Az EBC derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel felhasználásával $EC^2 = EB^2 + BC^2$, így $EC = \sqrt{(2,5 + 2)^2 + 4^2} = \sqrt{36,25}$.

III. Ha a pók a HD élen keresztül halad:



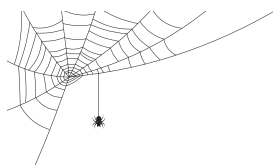
Ekkor az $EACG$ téglalapon a legrövidebb út az EC átló hosszával egyenlő. Az ACE derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel felhasználásával $EC^2 = EA^2 + AC^2$, így $EC = \sqrt{2,5^2 + (4 + 2)^2} = \sqrt{42,25}$.

A számításokból az látható, hogy a II. esetben lesz a megtett távolság a legkisebb. Tehát, ha a pók a falakon halad, akkor a legrövidebb út hossza $\sqrt{36,25} \approx 6$ méter.

Merre mehetett még a pók, hogy ugyanilyen rövid úton érjen E -ből C -be?

Milyen távolságban lesz a pók az A csúcstól, amikor éppen „befordul” az AD él mentén?

Vajon miért az lett a legrövidebb út, amelyik a leghosszabb élt metszette?



Tételek: pont, egyenes, sík, tér.

Tételek kölcsönös helyzete (ismétlés)

Két egyenes metsző, ha pontosan egy közös pontjuk van.

Két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak, és nincs közös pontjuk (vagy ha egybeesnek).

Két egyenes kitérő, ha nincs olyan sík, amelyre mindkét egyenes illeszkedik.

Egy egyenes illeszkedik egy síkra, ha minden pontja a síkon van.

Egy egyenes metsz egy síkot, ha pontosan egy közös pontjuk van.

Egy egyenes párhuzamos egy síkkal, ha nincs közös pontjuk (vagy ha illeszkedik rá).

Két különböző sík metszi egymást, ha a két síknak van közös pontja. A közös pontok által alkotott egyenes a két sík metszésvonala.

Két sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk (vagy ha egybeesnek).

Tételek távolsága (ismétlés)

Két pont távolsága a pontok által meghatározott szakasz hossza.

Két pontthalmaz távolságát a pontthalmazok pontjai között mért távolságok minimuma adja.

Ha két térelemnek van közös pontja (metszik egymást, vagy illeszkednek egymásra), akkor távolságuk 0.

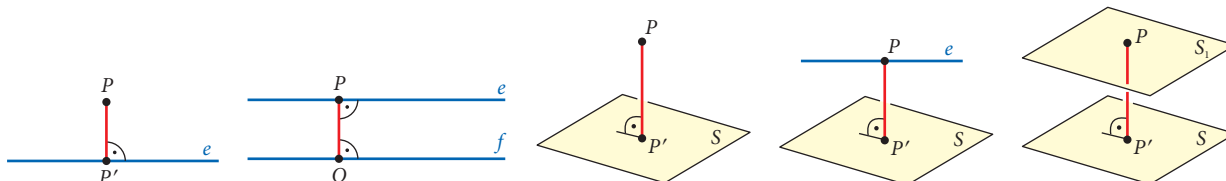
Pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza.

Két párhuzamos egyenes távolsága az egyik egyenes egy tetszőleges pontjának a másik egyenestől való távolsága.

Pont és sík távolsága a pontból a síkra állított merőleges szakasz hossza.

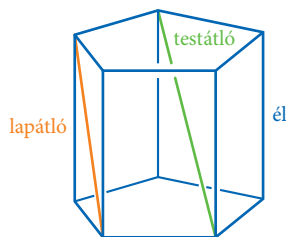
Sík és egy vele párhuzamos egyenes távolsága az egyenes tetszőleges pontjának a síktól való távolsága.

Két párhuzamos sík távolsága az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól való távolsága.



Lapátló, testátló:

Egy sokszöglapokkal határolt test (ún. poliéder) két csúcsát összekötő szakasz lehet a test egyik éle vagy egyik átlója. Ha egy átló illeszkedik a test valamelyik lapjára, akkor az **lapátló**, ha nem ugyanazon a lapon lévő csúcsokat köt össze, akkor **testátló**.

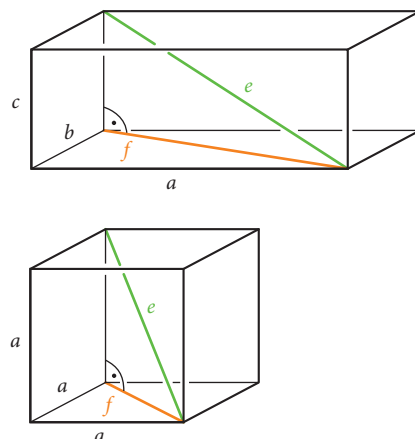


Megjegyzés

1. A téglatest testátlójának hossza meghatározható úgy, hogy az egy csúcsból induló élhosszak négyzetösszegének vesszük a négyzetgyökét:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

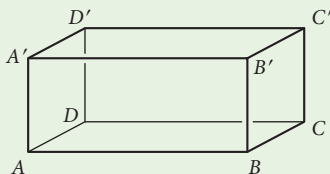
2. Az a élhosszúságú kocka lapátlójának hossza $f = a\sqrt{2}$, testátlójának hossza $e = a\sqrt{3}$.



FELADAT

1. Egy kocka lapátlójának hossza $\sqrt{10}$ egység. Mekkora a kocka testátlójának hossza?

2. Tekintsük az $ABCD A'B'C'D'$ téglatestet (lásd az ábrát)! Éleiről tudjuk, hogy $AD = 7$ m, $AB = 12$ m, valamint $AA' = 5$ m. Milyen távolságban vannak a téglatest AD élétől a téglatest élei?



3. Milyen távol van a kocka egyik testátlója a kocka csúcsaitól, ha a kocka élének hossza 8 cm?

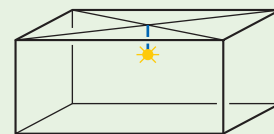
4. Egy téglatest alakú terem plafonjának közepéről lelógatnak egy 40 cm hosszúságú zsinóron lévő, pontszerű lámpatestet.

A terem összes élhosszának összege 53,2 méter.

A terem magasságának, szélességének és hosszának aránya ilyen sorrendben 4 : 6 : 9.

Milyen távol van a lámpatest

- a) a padlótól;
- b) a legkisebb területű faltól;
- c) a leghosszabb éltől?



HÁZI FELADAT

1. A kocka testátlójának hossza $\sqrt{30}$ egység. Mekkora a kocka lapátlójának hossza?

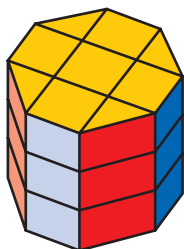
2. (Érettségi feladat, 2007)
Egy függőlegesen álló rádióantennát magasságának $\frac{2}{3}$ részénél négy egyenlő, egyenként 14,5 m hosszú drótkötellel rögzítenek a talajhoz. A rögzítési pontok a földön egy 10 m oldalhosszú négyzetet alkotnak.

- a) Milyen magas az antenna?
- b) Reklámcélokra a drótkötelek közé sátorszerűen vásznakat feszítenek ki. Mekkora ezek együttes területe?

3. Egy téglatest alakú terem 5 m széles, 8 m hosszú és 3 m magas. A termet úgy választják ketté, hogy a padlólap egyik átlója mentén állítanak egy függőleges falat (ez az úgynevezett átlósík). Milyen távol van az elválasztófál a terem függőleges éleitől?

- a) Egy kocka két szomszédos lapközeppontjának távolsága 21,92 cm. Mekkora a kocka élei?
- b) Ha a kocka lapközeppontjait összekötjük az összes szomszédos lap lapközeppontjával, akkor a kapott szakaszok egy újabb testet alkotnak. Hány csúcsa, hány éle, hány lapja van ennek a testnek?

BEVEZETŐ

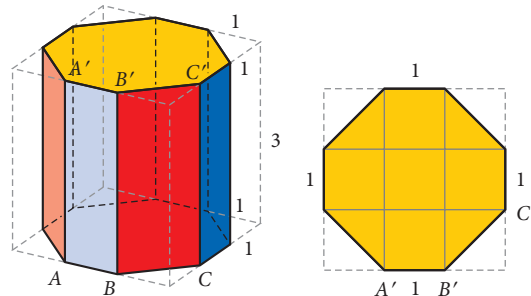


A képen egy érdekes formájú logikai játék látható. A kialakított test úgy jött létre, hogy egy 3 egységnyi élhosszúságú „bűvös kocka” (Rubik-kocka) csúcsaiban, a fedőlapon lévő négyzeteket elmetstették egy-egy átlójuk mentén függőleges vágással (az eredeti bűvös kockából 4 háromszög alapú hasáb lemetstését hajtották végre).

Sorold fel a levágás után megmaradt mértani test tulajdonságait! Hány csúcsa, hány éle, hány lapja van a testnek? Az élek, valamint a lapok milyen kapcsolatban vannak egymással?

A testnek 16 csúcsa, 24 éle (az ábrán 16 „vízszintes”, 8 „függőleges”), 10 lapja (az ábrán 2 „vízszintes”, 8 „függőleges”) van. A test alsó lapja (az ún. alaplappja) olyan nyolcszög, amelynek 4 oldala olyan hosszúságú, mint az eredeti bűvös

kocka lapjait adó kis négyzeteknek az oldalhossza, másik 4 oldala pedig akkora, mint egy ilyen kis négyzet átlójának hossza. A test felül lévő lapja (az ún. fedőlappja) az alaplappal egybevágó, és ezek síkjai egymással párhuzamosak. A testnek nyolc oldallapja van, ezek merőlegesek az alaplappal és a fedőlappal síkjára. Az oldallapok közül 4-4 egybevágó (az ábrán a sötétkék a világoskékkel, valamint a rózsaszín a pirossal). Az oldallapok függőleges éleinek hossza 3 egység, a vízszintes éleinek hossza megegyezik az alaplappal egy-egy oldalának hosszával. A test egy nyolcszög alapú egyenes hasáb.

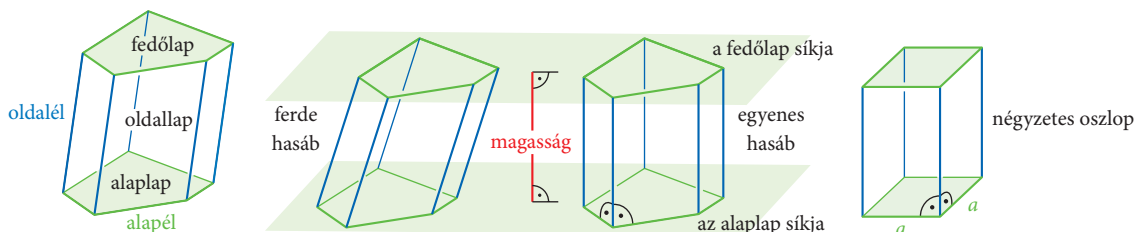


ELMÉLET

A **hasáb** olyan test (poliéder), amelyet a következő lapok határolnak (lásd az ábrát):

- **alaplapp:** tetszőleges sokszög;
 - **fedőlapp:** az alaplappal egybevágó sokszög, amelyet az alaplappból párhuzamos eltolással kapunk (az eltolás iránya nem párhuzamos az alaplapp síkjával);
 - **oldallapok:** paralelogrammák, amelyeknek egy-egy párhuzamos oldalpárját az alaplapp és a fedőlapp megfelelő élei alkotják.
- Az alaplapp oldalai a hasáb **alapeléi**, a fedőlapp oldalai a **fedőélek**, a többi él az **oldalél**. A hasáb bármely két oldaléle egyenlő hosszúságú és párhuzamos egymással.

Ha egy hasáb oldallapjai téglalapok, akkor a test **egyenes hasáb**. Az egyenes hasáb oldalélei merőlegesek az alaplapp és a fedőlapp síkjára, ezért az egyenes hasáb **testmagassága** (röviden: magasság) az oldalélek hosszával egyenlő. Amelyik hasáb nem egyenes hasáb, az **ferde hasáb**.



A négyzet alapú egyenes hasábot **négyzetes hasábnak** vagy **négyzetes oszlopnak** nevezzük.

A **téglatest** téglalap alapú egyenes hasáb.

A **kocka** olyan téglatest, amelynek élei egyenlő hosszúak.

Megjegyzés: A hasábok elnevezését az alaplapok alakja és az oldalélek alaplapra való merőlegessége alapján végezzük. (Például: szabályos hatszög alapú egyenes hasáb; rombusz alapú ferde hasáb stb.)

FELADAT

1. Válaszolj a bevezetőben szereplő testtel kapcsolatos alábbi kérdésekre!

- a) Hány olyan átló van a test fedőlapján, amelynek az egyik csúcsa A' ? Mekkora ezek hossza?
- b) Hány testátló indul az A' csúcsból? Melyik milyen hosszúságú?

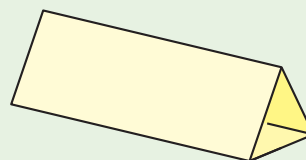
2. Egy tartószerkezet alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A stabilitás fokozása érdekében me-revítő rudakat helyeznek el a szerkezet testátlói mentén. Milyen hosszúak lehetnek ezek a rudak, ha a test alapéle 4 m, magassága pedig 5 m hosszú?

3. Gyakran használnak olyan egyedi megjelenést biztosító hirdetési felületeket versenypályák, rendezvények helyszínein, amelyek alakja szabályos háromszög alapú egyenes hasáb. A szerkezet egy vagy két

(álló helyzetben akár három) oldalán helyeznek el hirdetést.

Az egyik ilyen szabályos háromszög alapú oszlop alapéle 90 cm, oldaléle 300 cm hosszú.

- a) Milyen magas egy hirdetőtábla, ha – mint ahogyan a képen – az oldallapján helyezzük el a talajon?



- b) Milyen hasábot kapunk, ha két ilyen hirdetőtáblát oldallapjai mentén összeillesztünk? Milyen távol van a kapott hasáb két egymástól legtávolabb eső csúcsa?

HÁZI FELADAT

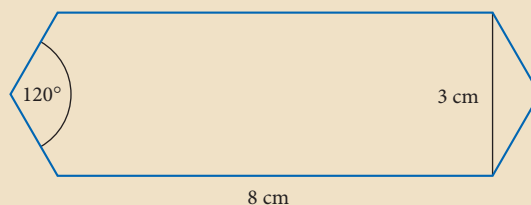
1. Válaszolj a bevezetőben szereplő testtel kapcsolatos alábbi kérdésekre!

- a) Hány átlója van összesen a hasáb alaplapjának? Hányféle hosszúságúak ezek az átlók?
- b) Hány testátlója van összesen ennek a testnek? Hányféle hosszúságú fordul elő ezek között?

2. Igaz vagy hamis?

- a) Minden hasábnak páros számú lapátlója van.
- b) Van olyan hasáb, aminek nincs testátlója.
- c) A hasáb oldaléle legalább olyan hosszú, mint a hasáb magassága.
- d) A szabályos hétoldalú sokszög alapú, egyenes hasábnak 18 testátlója van.

3. Egy nagyon finom svájci csokoládé doboza olyan egyenes hasáb, amelynek alaplapja egy 3 cm és 8 cm oldalhosszúságú téglalaphoz és két egybevágó, egyenlő szárú, 120° -os szárszögű háromszögből áll (lásd az ábrán). A doboz magassága 15 cm.



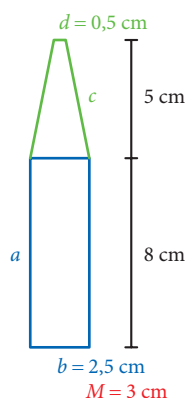
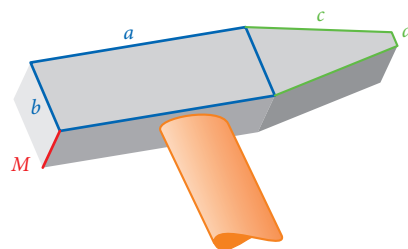
Ha a dobozból a csoki kifogy, akkor újrahasznosítható, például tárolásra is használható.

Legfeljebb milyen hosszúságú kötöttű fér el teljes hosszában a dobozban?

Válaszod centiméterben, egy tizedes jegyre kerekítve add meg!

KIDOLGOZOTT FELADAT

Hány kg tömegű az a $7,87 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ sűrűségű vasból készült kalapácsfej, amelynek adatait az ábrán jelöltük, és tudjuk, hogy a fejbe beillesztett kalapácsnyél a fej 23%-át foglalja el?



Megoldás

A kalapácsfej tömegének meghatározásához ki kell számítani a test térfogatát.

A kalapács feje egy olyan M magasságú egyenes hasáb, amelynek alaplappja egy téglalapra (oldalai a és b) és egy szimmetrikus trapézra (alapjai b és d , szára c) bontható. Ezért az alaplapp területa a téglalap és a szimmetrikus trapéz területének összegével egyenlő: $T_{\text{alaplapp}} = 8 \cdot 2,5 + \frac{2,5 + 0,5}{2} \cdot 5 = 27,5 \text{ cm}^2$

A hasáb térfogatát az alapterület és a testmagasság szorzata adja:

$V_{\text{hasáb}} = T_{\text{alaplapp}} \cdot M = 27,5 \cdot 3 = 82,5 \text{ cm}^3$. A kalapácsfej térfogata a hasáb térfogatának 77%-a:

$V_{\text{kalapácsfej}} = 82,5 \text{ cm}^3 \cdot 0,77 \approx 63,53 \text{ cm}^3$

Így a vasból készült kalapácsfej tömege:

$m_{\text{kalapácsfej}} = V_{\text{kalapácsfej}} \cdot \rho_{\text{vas}} = 63,53 \text{ cm}^3 \cdot 7,87 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 500 \text{ g}$, tehát a kalapácsfej tömege körülbelül fél kg.

ELMÉLET

A hasáb felszíne és térfogata

Az egyenes hasáb felszínét a lapok területének összegeként kapjuk meg. Az alaplapp tet-szöleges sokszög, az oldallapok téglalapok. Az oldallapok együttesen alkotják a **palástot**.

Tehát a hasáb felszíne: $A = 2 \cdot T_{\text{alaplapp}} + T_{\text{palást}}$

Egyenes hasáb oldallapjai síkba terítve egy olyan téglalapot alkotnak, amelynek az egyik oldala az alaplapp kerületével, az arra merőleges oldala pedig a hasáb magasságával (jelölése: M) egyenlő.

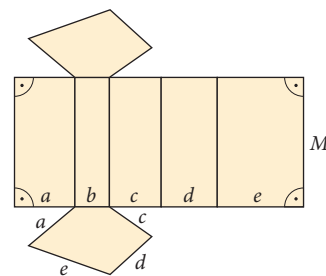
Ezért $T_{\text{palást}} = K_{\text{alaplapp}} \cdot M$, így a felszín: $A = 2 \cdot T_{\text{alaplapp}} + K_{\text{alaplapp}} \cdot M$

Az egyenes és a ferde hasáb térfogatát az alaplapp területének és a testmagasság szorzatának értéke adja:

$V = T_{\text{alaplapp}} \cdot M$

Megjegyzés

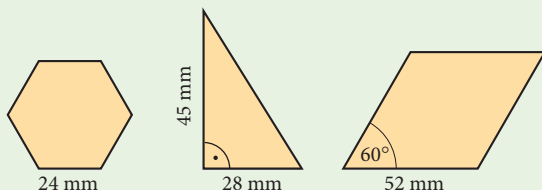
1. Az a élű kocka térfogata: $V = a^3$
2. Ha a téglatest egy csúcsból induló éleinek hossza a , b , c , akkor a téglatest térfogata: $V = abc$
3. A ferde hasáb felszíne ugyancsak az $A = 2 \cdot T_{\text{alaplapp}} + T_{\text{palást}}$ képlet alapján számítható, de ebben az esetben paralelogrammák területének összege adja a palást területét.



$$\begin{aligned} A_{\text{egyenes hasáb}} &= 2 \cdot T_{\text{alaplapp}} + K_{\text{alaplapp}} \cdot M \\ V_{\text{hasáb}} &= T_{\text{alaplapp}} \cdot M \end{aligned}$$

FELADAT

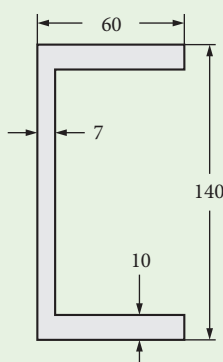
- 1.** Három egyenes hasáb oldalélei 85 mm-esek. Alaplapjukat az ábrák mutatják (szabályos hatszög, derékszögű háromszög és rombusz).



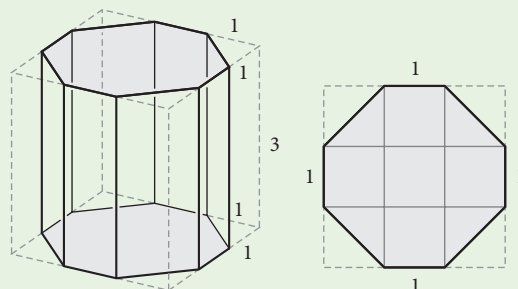
Mekkora ezeknek a hasáboknak az alapterülete, magassága, felszíne és térfogata?

- 2.** Egy 6 méter hosszú tömör fémgerenda keresztmetszetének adatait látod az ábrán, milliméterben mérve.

- a) Határozd meg a gerenda anyagának sűrűségét, ha a gerenda tömege 96 kg!
b) Hány négyzetcentiméter egy ilyen gerenda felszíne?



- 3.** A 2. leckében megismert test egy nyolcszög alapú egyenes hasáb. A testmagasság 3 egység hosszúságú, az alaplapot a rajzon látható módon egy 3 egység oldalhosszúságú négyzetből hoztuk létre. Határozd meg a test felszínét és térfogatát!



- 4.** Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb palástjának területe $\sqrt{3}$ -szorosa az alaplap területének.

- a) Igaz-e, hogy a testmagasság 4-szerese az alapélnek?
b) Mekkora a hasáb térfogata, ha az alapél hossza 8 cm?
c) Hogyan változik a hasáb felszíne és térfogata, ha a testet 3-szorosára nagyítjuk?

HÁZI FELADAT

- 1.** Egy téglatest egyik lapjának területe 192 cm^2 , a lap két oldalhosszának különbsége 4 cm. A téglatest harmadik élének hossza az előbbi két él számtani közepe.

- a) Mekkora a test élének hossza?
b) Mekkora a test térfogata?
c) Hányszorosára változik a test térfogata, ha mindegyik él hosszát megnöveljük 2 cm-rel?

- 2.** Egy – a sportversenyek eredményhirdetésén használatos – dobogót úgy készítenek el, hogy egy-egy oldal mentén egymás mellé illesztenek három négyzetes oszlopot. Az aranyérmes centiméterekben mérve egy $50 \times 50 \times 60$, az ezüstérmes egy $45 \times 45 \times 40$, míg a bronzérmes egy $40 \times 40 \times 35$ méretű négyzetes oszlopra állhat. Mekkora egy ilyen összeillesztett dobogó felszíne, ha az alaplapok (egy-egy négyzet) területét nem számítjuk?



- 3.** Egy vízelvezető keresztmetszete olyan egyenlő szárú trapéz, amely alapjainak hossza 3 m és 2 m, szárainak hossza 62,5 cm.

- a) Milyen mély az árok?
b) Hány liter víz fér el az árok 120 méter hosszú egyenes szakaszában?



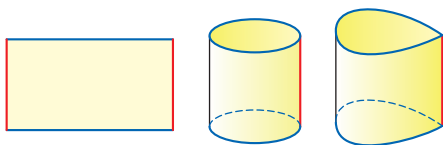
- 4.** Egy köztéri szökőkút medencéje szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A hasáb magassága feleakkora, mint az alapél. A medencébe 2240 liter víz fér.

- a) Mekkora a szökőkút alapélének hossza?
b) Milyen hatósugarúra állíthatják a medence középpontjában, a víz felszínén elhelyezett locsolófejet, ha azt szeretnék, hogy a szétlocsolt víz a medencébe hulljon vissza?

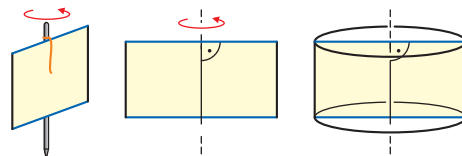
BEVEZETŐ

A fazék, a cylinder, a jégkori korongja, a hirdetőoszlop egészen más-más funkciót tölt be, mégis van ezeknek a tárgyaknak egy közös tulajdonságuk: mindegyiknek ugyanolyan mértani test az alakja. Ez a test az egyenes körhenger. Hajtsd végre a következőket!

- a) Vegyél elő egy könnyen formálható téglalap alakú papírlapot, és illeszd össze (vagy ragaszd össze) a két rövidebb oldalát! Ekkor egy hengerszerű test jön létre. A keletkező test egyenes körhenger, ha úgy jártál el, hogy a papírlap szabadon maradt (össze nem illesztett) oldalai kört formálnak. Ha az összeragasztást sikerül átfedés, illetve hézag nélkül megvalósítani, akkor a papírlap szabadon maradó (össze nem ragasztott) oldalának hossza megegyezik a kialakult kör vagy görbe vonal hosszával. A henger magassága akkora, amekkora az összeragasztott oldalak hossza.



- b) Tűzz be egy kisebb téglalap alakú lapot (pl. névjegykártya, diákigazolvány) a tollad szárába a hosszabbik oldal felezőmerőlegese mentén! Forgasd meg a lapot a toll – mint tengely – körül!
- A téglalap megforgatásával egy egyenes körhenger keletkezik, amit az eljárás miatt forgáshengernek is nevezünk.



- c) Hozz létre újabb hengereket az előbbi papírlapok segítségével a hosszabb oldalak mentén történő összeillesztéssel, a rövidebb oldalra merőleges szimmetriatengely körüli megforgatással, majd a hosszabb, valamint a rövidebb oldal körüli megforgatással! Jellemezd a papír oldalainak hosszával a kapott hengerek adatait!
- d) Próbáld ki a papírlap teherbíró képességét! Tekerj össze egy átlagos vastagságú, A4 méretű lapot hengerré úgy, hogy keletkezzenek átfedések is, és rögzítsd összekötőzssel vagy ragasztással! Tedd óvatosan a létrehozott henger fedőlapjára a matekkönyved!

Ha jól dolgoztál, akkor a vékony papírlapból készített papírhenger nem roksad össze a teher alatt.

A papírnak ezt a kivételes teherbíró képességét próbálják egyre inkább kihasználni a környezetbarát, modern lakberendezésben és építészetben.

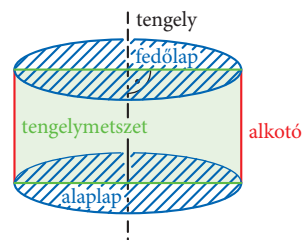


ELMÉLET

Az **egyes körhengert (forgáshengert)** két egymással egybevágó és párhuzamos síkban lévő körlap (az **alaplappal**, illetve **fedőlappal**) és egy görbe felület (**palást**) határolja.

Az egyenes körhenger palástja a síkba kiterítve egy olyan téglalap, amely egyik oldalának hossza az alapkör területével, másik oldalának hossza pedig a henger magasságával (az alaplappal és fedőlappal távolságával) egyenlő. Az alaplappal (és fedőlappal) merőleges, palástra illeszkedő szakaszok a henger **alkotói**. Az egyenes henger alkotóinak hossza a testmagasság hosszával egyenlő. A két körlap középpontjait összekötő egyenes a **henger tengelye**.

A henger tengelymetszete egy olyan téglalap, amelyet az alap- és fedőkör egy-egy, egymással párhuzamos átmérője és ezek végpontjába állított két alkotó hoz létre.



FELADAT

1. Az A4 méretű papírlap közelítőleg 29,5 cm-szer 21 cm-es téglalap. A lap két hosszabb oldalának összeragasztásával egyenes körhengert hozhatunk létre. Mekkora az így keletkező henger tengelymetszetének a területe, ha a ragasztásnál nincs átfedés?

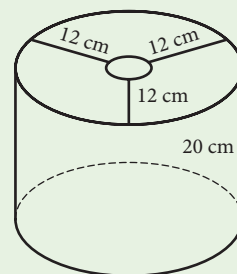
2. Igaz vagy hamis?

- a) Ha egy egyenes körhenger tengelymetszete négyzet, akkor az alapkör sugarának és a testmagasságnak az aránya 1 : 2.
- b) Az egyenes körhenger esetén a palást, illetve az alapkör területének hányadosa kétszerese a testmagasság és az alapkör sugara hányadosának.
- c) Ha egy forgáshenger tengelymetszetének és alapkörének területe egyenlő nagyságú, akkor a testmagasság az alapkör sugarának $\frac{\pi}{2}$ -szerese.

3. Legfeljebb milyen hosszúságú fakanál fér el teljes hosszúságában egy forgáshenger alakú fazékban, ha a fazék alapkörének sugara 8 cm hosszú, a magassága pedig 32 cm?

4. A hengeres lámpaernyő a minimál stílusban berendezett lakások kedvelt világítástechnikai formája, melyet előszeretettel választanak fővilágításként vagy kiegészítő, dekorációs világításként is. Az egyik ilyen lámpában a lámpaernyő vásznát a felső szélénél egy fémkeretre feszítik. A fémkeret külső része kör alakú (erre feszül a lámpaernyő vászna), és a külső kör három, sugárirányban elhelyezett, egymással 120° nagyságú szöget bezáró, 12 cm hosszú fém pálcával kapcsolódik egy kisebb, belső körhöz. A belső kör koncentrikus a külső körrel. A belső kör illeszkedik a foglalathoz (amelybe az izzót helyezik).

Mekkora a foglalatként elhelyezett kör átmérője, ha tudjuk, hogy a lámpaernyő palástjának területe 1885 cm^2 , a lámpaernyő magassága pedig 20 cm?



HÁZI FELADAT

1. Egy téglalap oldalainak hosszúsága 2,6 cm, illetve 4,5 cm. Megforgatjuk ezt a téglalapot a

- a) rövidebb oldalának egyenesére;
- b) hosszabbik oldalának egyenesére körül.

Melyik esetben mekkora a keletkező henger alapkörének területe?

2. Négyzet alakú védőfóliával akarjuk bevonni egy rétegben különböző forgáshenger alakú csövek palástját a fólia feldarabolása nélkül. Milyen átmérőjű, milyen hosszúságú csőre elegendő ez a fólia, ha a négyzet oldalának hossza 32 cm?

3. Egy forgáshenger alakú torta tetejét kakaóporral, oldalát fehér mázzal borították. A tortát függőleges vágásokkal 8 egyenlő cikkre vágták. Mekkora az egyes cikkek kakaóporos, illetve fehér mázas bevont részének területe, ha a torta fedőkörének átmérője 16 cm, és magassága 10 cm?



KIDOLGOZOTT FELADAT



Egy cég kétféle méretű májkrém-konzervet forgalmaz. Mindkét doboz henger alakú, a kisebbik sugara 2,5 cm, magassága 3 cm, a nagyobbik konzerv mindkét mérete ennek duplája.

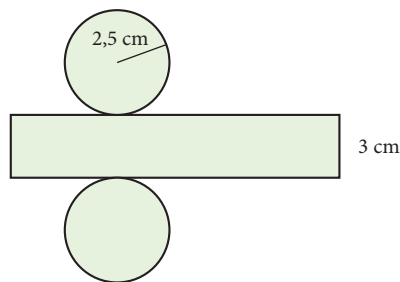
- Hány cm^2 alumíniumlemez szükséges a kisebbik konzervdoboz elkészítéséhez, ha eltekintünk a forrasztásnál, ráhajtásnál felhasznált anyagtól?
- Hányszor akkora a nagyobbik konzervdoboz felszíne, mint a kisebbiké?
- Hány gramm májkrém fér a nagyobbik dobozba, ha a kisebbikben 65 g van?

Megoldás

- A konzervdoboz felszíne a két kör és a hengerpalást területének az összege.
Az alapkör területe $2,5^2\pi = 6,25\pi \text{ cm}^2$, a fedőlapé ugyanennyi. A két kör területének összege tehát $12,5\pi \text{ cm}^2$.

A hengerpalást kiteríthető a síkba. Ekkor egy olyan téglalapot kapunk, amelynek két szemközti oldala az alapkör kerületével egyenlő, vagyis $5\pi \text{ cm}$, a másik két oldala pedig akkora, mint a konzervdoboz magassága, vagyis 3 cm.

Eszerint a hengerpalást területe $5\pi \cdot 3 = 15\pi \text{ cm}^2$.



Tehát a kisebb dobozhoz szükséges alumíniummennyiség: $12,5\pi + 15\pi = 27,5\pi \approx 86,4 \text{ cm}^2$

- A nagyobb konzervdoboz felszíne hasonló számolással $2 \cdot 5^2\pi + 10\pi \cdot 6 = 110\pi \text{ cm}^2$.

A felszínek nagyságának aránya $\frac{110\pi}{27,5\pi} = 4$.

- A nagyobb konzervdoboz térfogata $5^2\pi \cdot 6 = 150\pi \text{ cm}^3$. A kisebbnek a térfogata $2,5^2\pi \cdot 3 = 18,75\pi \text{ cm}^3$. A térfogatok aránya $\frac{150}{18,75\pi} = 8$. A nagyobbik konzervdobozba 8-szor annyi májkrém fér, mint a kisebbbe, ez tehát $8 \cdot 65 \text{ g} = 520 \text{ g}$.

Azt tapasztaltuk, hogy a testek között a hasonlóság aránya 2, a felszínek aránya 2^2 , a térfogatok aránya pedig 2^3 . Ezt az összefüggést később általánosan is megfogalmazzuk majd.

ELMÉLET

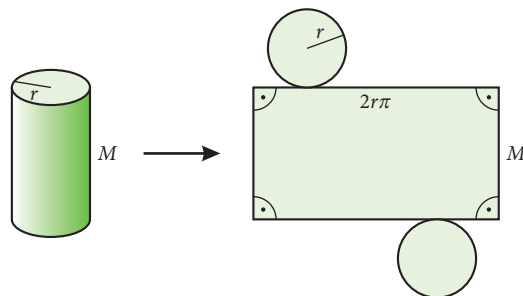
Az egyenes körhenger palástja görbült felület, de kiteríthető a síkba. Így adódik, hogy az egyenes körhenger felszíne:

$$A = 2 \cdot T_{\text{alaplapp}} + K_{\text{alaplapp}} \cdot M,$$

$$\text{részletezve: } A = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot M.$$

A henger térfogatát az alapterület és a magasság szorzata adja:

$$V = T_{\text{alaplapp}} \cdot M, \text{ azaz } V = r^2\pi \cdot M.$$



$$\begin{aligned} A_{\text{egyenes henger}} &= 2 \cdot T_{\text{alaplapp}} + K_{\text{alaplapp}} \cdot M \\ V_{\text{henger}} &= T_{\text{alaplapp}} \cdot M \end{aligned}$$

FELADAT

1.

Egy téglalap oldalainak hosszúsága 2,6 cm, illetve 4,5 cm. Megforgatjuk ezt a téglalapot. A forgatás tengelye

- a rövidebb oldalegyenese;
- a hosszabbik oldalegyenese. Melyik esetben mekkora a keletkező henger felszíne és térfogata?

2.

Egy 2 cm sugarú, 20 cm széles festőhengerrel dolgozva egy teljes fordulattal körülbelül 3 ml festéket viszünk fel a falra.

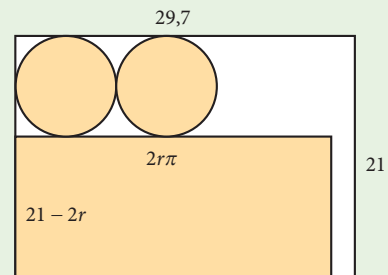
- Hány liter festéket vegyünk egy 40 m^2 falfelületű szobához, ha a falfelületet csak egyszer kell lefesteni?
- Milyen magasan áll ennyi festék a 16 cm átmérőjű, henger alakú festékes vödörben?

3.

Egy A4-es méretű vékony kartonlap méretei: $29,7 \text{ cm} \times 21 \text{ cm}$. Bence egy forgáshengert akar készíteni, ezért az ábra szerint két körlapot és egy megfelelő méretű téglalapot vág ki a kartonlapból. (Az ábrán r a körök sugarát jelenti.)

- Lehetnek-e a körlapok 3 cm, 4 cm, illetve 5 cm sugarúak? Ha igen, akkor mekkora felszínű a hozzájuk tartozó henger? Ha nem, akkor miért nem?

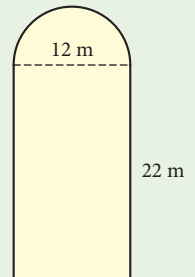
- Ha a kiterített palást egyik oldala éppen 29,7 cm, akkor mekkora az A4-es kartonból készíthető henger sugara? Hány százalék hulladék keletkezik ebben az esetben? (A henger palástja és alapköréi az ábrának megfelelően vannak kivágva.)



4.

Egy koncertterem alaprajza egy téglalaphoz és az ahhoz illesztett félkörből áll (lásd az ábrán).

A terem magassága 4,5 méter. Hány négyzetmétert kell lefesteni a terem renoválásakor, ha a terembe 4 olyan ajtó nyílik, amelyek 2 méter széles, 2,5 méter magas téglalapok? (Az oldalfalakat és a mennyezetet kell lefesteni.)



HÁZI FELADAT

1.

Egy mobil kerti medence forgáshenger alakú. Az átmérője 3 méter, a medencét 1,2 méter magasságig töltik fel vízzel.

- Mennyi időre lenne elegendő ennyi víz egy 4 tagú családnak, amelynek havi átlagos vízfogyasztása 18 m^3 ?
- Mennyibe kerül a kerti medence egyszeri feltöltése, ha az adott településen a vízdíj és a szennyvízdíj együttes összege köbméterenként 620 forint? (A csapból kiengedett vízárt vízdíjat és szennyvízdíjat is fizetünk.)
- A medence belső felületét vízlepergető réteggel vonják be. Hány négyzetmétert vonnak be összesen, ha a medence 160 cm magas?



2.

Ugyanazt a fajta mézet a termelő kétféle henger alakú üvegben hozza forgalomba. A magasabb üveg magassága pontosan kétszer akkora, mint a kisebbiké, viszont az átmérője csak feleakkora. A magasabb üveg mézet 230 Ft-ért, az alacsonyabikat 430 Ft-ért árulja. Melyik a jobb vétel, ha mindkét üveg ára 20 Ft?

3.

Egy téglalap egyik oldala 4-szer olyan hosszú, mint a másik oldal. Igazold, hogy 4-szer akkora térfogatú forgáshenger keletkezik, ha ezt a téglalapot a rövidebb oldalának egyenese körül forgatjuk meg, mint ha a hosszabb oldalának egyenese körül forgatjuk!

4.

Egy forgáshenger alakú edény fenekének kerülete 37,7 cm. Az edény magassága 18 cm, és 12 cm magasságig víz van benne. Milyen magasan fog állni a vízszint, ha beletöltünk az edénybe még 4,5 dl vizet?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 8 cm átmérőjű narancsot kettévágtunk. Nem lett egyforma a két rész, mert a gömb alakú narancsot a középpontjától 2 cm-re vágtuk el. A vágás mentén keletkező metszési felületek kör alakúak. Mekkora lett a metszatkör sugara?

Megjegyzés: Természetesen senki sem gondolhatja, hogy léteznek tökéletesen gömb alakú narancsok, de a felvetett problémában a narancsot gömbbel **modellezzük**, a gömböt választottuk **matematikai modell**ként.

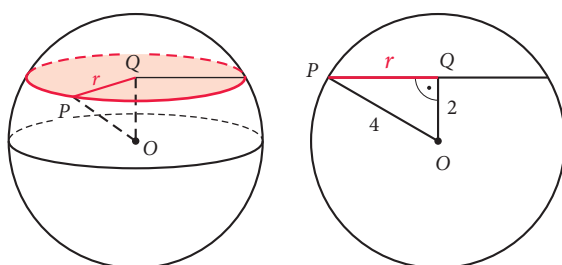


Megoldás

Egy pont és egy sík távolsága a pontból a síkra állított merőleges szakasz hossza. A narancsot modellező gömb O középpontjának a metszési felületre eső merőleges vetülete legyen Q , a gömbfelület és a metsző sík egy közös pontja pedig P . A rajzon lévő OQP derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tétel alapján:

$$r^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12,$$

így $r = \sqrt{12}$. Tehát $r \approx 3,5$ cm.



ELMÉLET

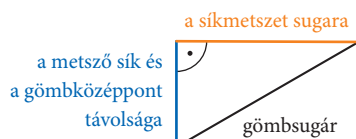
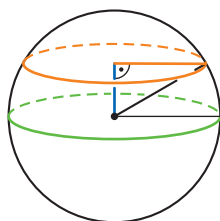
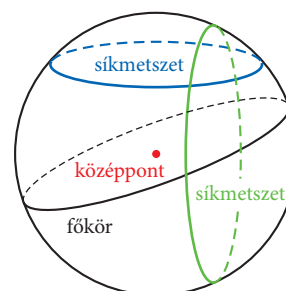
A tér egy adott pontjától adott távolságra lévő pontok halmaza a **gömbfelület**.

A gömbfelület által határolt test a **gömb**. Az adott távolság a gömb sugara.

Bármely metsző sík a gömböt egy körben, a gömbfelületet egy körvonalban metszi.

Ha a sík illeszkedik a gömb középpontjára, akkor a keletkező kört a **gömb főkörének** nevezzük. A főkör sugara egyenlő hosszúságú a gömb sugarával.

A gömböt bármely síkmetszete két **gömbsüvegre** bontja.



Ha a síkmetszet nem főkör, akkor a metszatkör sugara kisebb

a gömb sugaránál. Ekkor a gömb sugara, a kimetszett kör sugara és a metsző síknak a gömb középpontjától való távolsága

egy derékszögű háromszöget határoz meg.

FELADAT

1.

Egy gömb alakú dinnyét egymással párhuzamos síkú vágásokkal 5 azonos magasságú részre vágtunk szét, így az egyes részek magassága 4 cm lett. Mekkora sugarú körök határolják az egyes részeket?

2.

Egy gömböt a középpontjától 3 cm távolságra lévő síkkal elmetssze egy 4 cm sugarú metszatkört kapunk.

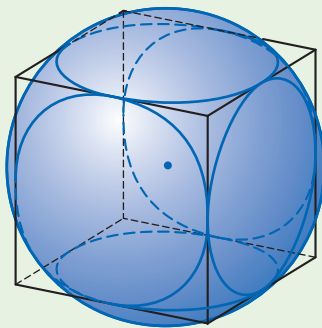
a) Mekkora a gömb sugara?

b) Mekkora sugarú köröket metsz ki az első metsző síkkal párhuzamos, attól 1 cm-re lévő két sík a gömbből?

3.

Egy gömb középpontja egy 8 cm élhosszúságú kocka testátlóinak metszéspontjában van. A gömb érinti a kocka éleit.

Mekkora összesen azoknak a síkidomoknak a területe, amelyek a kocka lapján, de ugyanakkor a gömbön kívül helyezkednek el?



4.

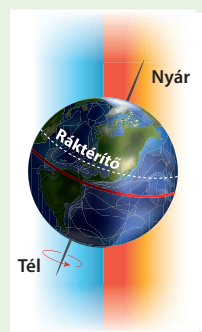
A Ráktérítő a Földön körülbelül az északi szélesség $23^{\circ}26'$ mentén halad körbe. (Ez azt jelenti, hogy a Föld középpontját a Ráktérítő bármely pontjával

összekötő szakasz az Egyenlítő síkjával $23^{\circ}26'$ nagyságú szöget zár be.) A Ráktérítő a Földön annak a sávnak az északi határvonala, ahol az év bizonyos napjain bekövetkezhet

az, hogy a Nap éppen a fejünk fölött delel (ettől északra ez sosem történik meg). A Ráktérítőn ez éppen a nyári napforduló napján következik be. Mekkora sugarú kört alkot a Ráktérítő?

Milyen hosszú a Ráktérítő?

A Földet tekintsd 6371 km sugarú gömbnek!



HÁZI FELADAT

1.

Egy 12,8 cm sugarú gömb egyik síkmetszetének az átmérője

a) 10,2 cm; **b)** 21,7 cm; **c)** 25,6 cm.

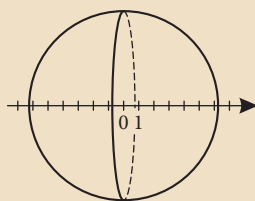
Mekkora távolságra van a metsző sík a gömb középpontjától?

2.

Mekkora területű a 3,2 dm sugarú gömbnek az a síkmetszete, amely az egyik sugar felezőmerőleges síkjában van?

3.

Egy 6,2 cm sugarú gömb egyik átmérőjére olyan számegyeneset fektetünk, amelynek az egységei 1 cm-esek, és a 0 pontja a gömb középpontjában van.



Erre a számegyenesre az egész számokat jelző pontjain át merőleges síkokat állítunk.

a) Hány olyan sík keletkezik, amely metszi a gömböt?

b) Melyik síkmetszetnek mekkora a sugara? Készíts táblázatot!

c) Melyik síkmetszetnek mekkora a területe? Készíts táblázatot!

d) Ábrázold azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya az egész számok halmaza, és amely az értelmezési tartomány elemeihez a megfelelő körök területét rendeli hozzá! Sorold fel ennek a függvénynek néhány tulajdonságát!

4.

Két gömb közül az egyik főkörének a kerülete 10 cm-rel nagyobb a másik főkörének kerületénél. Mekkora a két gömb sugarának különbsége?

RÁADÁS

A Déli-sark közvetlen közelében épült Amundsen–Scott tudományos kutatóállomásnak sokáig meghatározó része volt a képen látható göbbsüveg alakú kupola, melynek alapköre 50 méter átmérőjű, magassága pedig 16 méter volt. Mekkora sugarú lenne az a gömb, amelyből ez a kupola származik?



KIDOLGOZOTT FELADAT

1.

A görögdinnye 90–95%-a víz, ezért a dinnye átlagsűrűsége közelítőleg annyi, mint a víz sűrűsége (erről meggyőződhetsz, ha egy kád vízbe teszel egy dinynt: a dinnye úszni fog, de alig látszik ki a vízből).

- Mekkora lehet egy 8 kg tömegű dinnye térfogata? Adj becslést!
- Mekkora lehet egy 20 cm átmérőjű dinnye tömege, ha az jó közelítéssel gömb alakú?
- Körülbelül mekkora lehet egy 8 kg tömegű, gömb alakú dinnye átmérője?



2.

Egy 2 cm sugarú ólomgolyóból 1 mm sugarú ólomsöréteket (ólomból öntött apró, gömb alakú lövedék) öntenek.

- Hány darab sörét készíthető?
- A golyóból készített összes sörét együttes felszíne hányszorosa a golyó felszínének?

A feladatok megoldásához szükség van a gömb felszínének és térfogatának meghatározására.

ELMÉLET

A gömbfelület nem teríthető ki síkba.

Felsőbb matematikai módszerekkel igazolható,

hogy az r sugarú gömb felszíne az $A = 4r^2\pi$, térfogata a $V = \frac{4r^3\pi}{3}$ képlettel számolható.

$$A_{\text{gömb}} = 4r^2\pi$$

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4r^3\pi}{3}$$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Megoldás

- A dinnye térfogata közelítőleg annyi, mint 8 kg víz térfogata, vagyis 8 dm^3 .
 - A gömb sugara 10 cm, ezért a dinnye térfogata: $V = \frac{4 \cdot 10^3 \pi}{3} \approx 4189 \text{ cm}^3 = 4,2 \text{ dm}^3$.
Ennek a dinnének a tömege körülbelül 4,2 kg (hiszen 4,2 liter „víznek” a tömege 4,2 kg).
 - A 8 kg-os dinnye térfogata körülbelül 8 dm^3 . Ha a gömb sugara r , akkor $\frac{4r^3\pi}{3} = 8$. Az egyenlet rendezése után:
 $r^3 = \frac{6}{\pi} \approx 1,91$. Kétféleképpen is jelöltük azt az r pozitív számot, amelynek 1,91 a harmadik hatványa: $r \approx \sqrt[3]{1,91}$, illetve $r \approx 1,91^{\frac{1}{3}}$. Számológéppel azt kapjuk, hogy $r \approx 1,24 \text{ (dm)}$. A dinnye átmérője tehát körülbelül 2,5 dm, azaz 25 cm.
- A sörétek számát megkapjuk, ha kiszámoljuk, hogy a golyó térfogata hányszorosa egy sörét térfogatának.
Mivel $2 \text{ cm} = 20 \text{ mm}$, így a térfogatok aránya: $\frac{V_{\text{golyó}}}{V_{\text{sörét}}} = \frac{\frac{4 \cdot 20^3 \pi}{3}}{\frac{4 \cdot 1^3 \pi}{3}} = 20^3 = 8000$. Tehát 8000 darab sörét készíthető.
 - Az r sugarú gömb felszíne az $A = 4r^2\pi$ képlettel számolható ki. Így a 8000 darab sörét és az ólomgolyó felszínének hányadosa: $\frac{8000 \cdot A_{\text{sörét}}}{A_{\text{ólmogolyó}}} = \frac{8000 \cdot 4 \cdot 1^2 \cdot \pi}{4 \cdot 20^2 \cdot \pi} = 20$. Tehát a sörétek együttes felszíne 20-szorosa a golyó felszínének.

FELADAT

1.

A görögdinnye héja 1-2 cm vastagságú. Egy gömbölyű, körülbelül 24 cm átmérőjű dinnye esetében a teljes térfogatnak körülbelül hány százaléka az ehető belső rész térfogata? Töltsd ki a táblázatot!

	a belső rész sugara (cm)	a belső rész térfogata (cm ³)	a dinnye teljes térfogata (cm ³)	ehető mennyiség (%)
1 cm vastag héj				
2 cm vastag héj				

2.

A görögdinnye jelentős mennyiségű cukrot, kismértékben ásványi anyagot és vitamint tartalmaz. Az ehető rész energiatartalma 100 gramm esetén 30 kilokalória, azaz kb. 130 kilojoule.

Máté egy 20 cm átmérőjű görögdinnye felét megette. Hány kilojoule (hány kilokalória) energiát vihetett be a szervezetébe ezzel, ha a dinnyehéj vastagsága 1 cm és 2 cm közötti érték?

3.

Nem hivatalos adatok szerint a 2012-es év legnehezebb dinnyéje az ormánsági Vajszlón termett, és 53 kg-ot nyomott.

Körülbelül hány kg lehet a dinnye ehető része, ha a héját 2 cm vastagnak, sűrűségét a víz sűrűségével egyezőnek, az alakját pedig gömbnek tekintjük?

4.

- a) Mekkora 10 darab, egyenként 30 mm átmérőjű, gömb alakú szappanbuborék együttes felszíne?
- b) Mekkora annak az – ugyancsak gömb alakú – szappanbuboréknak a felszíne, amely úgy jött létre, hogy a fenti 10 kis szappanbuborék összekapcsolódott egyetlen nagy buborékká, amelynek akkora a térfogata, mint a 10 buborék térfogata együtt?

HÁZI FELADAT

1.

Két dinnye közelítőleg gömb alakú, az átmérőjük 36 cm. Az egyiknek 1 cm vastag a héja, a másiknak 2 cm. Hasonlítsd össze, hogy a dinnyék hány százaléka ehető! Mennyivel több ez a vékony héjú dinnye esetén?

2.

Egy 4 cm sugarú és egy 3 cm sugarú gömbgyertyából egyetlen nagyobb gömbgyertyát öntenek.

- a) Mekkora lesz az új gömbgyertya sugara?
- b) Hány százaléka a két eredeti gyertya együttes felszíne az azokból öntött egyetlen, nagyobb gömbgyertya felszínének?

3.

Földünk felületének körülbelül 70,8%-át víz borítja. Hány négyzetkilométernyi területet borít víz, ha a Földet 6371 km sugarú gömbnek tekintjük?

4.

A különböző műholdaknak és szondáknak köszönhetően a 2000-es évek eleje óta egyre több ismeretet szerzünk a Mars felszínéről. Vajon hány-szor annyi időbe telne egy műholdnak feltérképezni a Mars felszínét, mint a Földét, ha tudjuk, hogy a Mars térfogata a Földének körülbelül 15,1%-a? Mindkét bolygót gömb alakúnak tekintjük, és feltesszük, hogy a feltérképezéshez szükséges idő egyenesen arányos a bolygó felszínével.



KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy falfesték „kiadósságát” így adta meg a gyártó: $8\text{--}9 \frac{\text{m}^2}{\text{liter}}$.

- Hány m^2 felület festéséhez elegendő festék van egy 15 literes vödörben?
- Milyen vastag festékréteggel számolt a gyártó cég?
- A szobafestők gyakran nem méricskélnek a falfelületet, hanem azt mondják, hogy a kifestendő lakás alapterületét meg kell szorozni 3-mal (az oldalfalakat és a mennyezetet le kell festeni, az ajtókat és az ablakokat pedig nem).
Hány vödör festékre van szükség a szobafestő szerint egy 53 m^2 -es lakás kifestéséhez, ha egy vödörben 15 liter falfesték van, a festék „kiadóssága” $8\text{--}9 \frac{\text{m}^2}{\text{liter}}$, és minden felületet kétszer kell lefesteni?

Megoldás

- A 15 liter festék 15-ször akkora területre elegendő, mint az 1 liter, tehát $120\text{--}135 \text{ m}^2$ -re.
- Az 1 liter festék térfogata 1 dm^3 , a $8\text{--}9 \text{ m}^2$ terület $800\text{--}900 \text{ dm}^2$. Ha mindenütt azonos vastagságú festékréteget képzelünk el, akkor a befestett felületet te-

kinthetjük egy olyan hengernek, amelynek a térfogata éppen 1 dm^3 , az alapterülete pedig $800\text{--}900 \text{ dm}^2$ körüli érték. A henger térfogatát az alaplap alakjától függetlenül a $V = T_{\text{alaplap}} \cdot M$ képlettel számolhatjuk ki, amelyből most a test magasságát szeretnénk meghatározni, ezért az $M = \frac{V}{T_{\text{alaplap}}}$ összefüggéssel fogunk számolni.

Ha 800 dm^2 -nek vesszük az alaplap területét, akkor $M = \frac{1}{800} = 0,00125 \text{ dm}$ -t kapunk, ami $0,125 \text{ mm}$.

Ha 900 dm^2 -nek vesszük az alaplap területét, akkor az előbbihez hasonló számítással $0,111 \text{ mm}$ -t kapunk.

A gyártó tehát körülbelül $0,11\text{--}0,13 \text{ mm}$ -es festékrétegvastagsággal számolt a kiadósság megállapításakor.

- A szobafestő szerint (a kétszeres festést is figyelembe véve) $6 \cdot 53 \text{ m}^2 = 318 \text{ m}^2$ felületre kell festék. A feladat a) részében kiszámítottuk, hogy 1 vödör festék $120\text{--}135 \text{ m}^2$ felületre elegendő. Ha 135 m^2 -rel kalkulálunk, akkor $\frac{318}{135} \approx 2,4$ vödör, ha pedig 120 m^2 -rel, akkor $\frac{318}{120} \approx 2,7$ vödör festékre van szükség. Tehát 3 vödör festéket kell vásárolni.

FELADAT

1. A Velencei-tó vízfelülete körülbelül 26 km^2 , a tó átlagos mélysége 1,5 méter. Becsüld meg, hány köbméter víz lehet összesen a tóban! Az eredményt normálalakban add meg!

2. Körülbelül hány köbméter vizet kellene beleengedni a Balatonba ahhoz, hogy a víz szintje mindenütt 15 cm-rel emelkedjen, ha a Balaton vízfelületének területe körülbelül 590 km^2 ? Válaszodat normálalakban add meg!



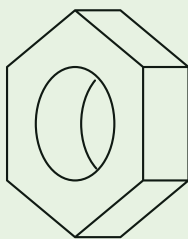
3. Egy 7,2 cm belső átmérőjű, 3,5 deciliteres, henger alakú bögre áll a polcon.

- a) Mekkora a bögre (belső) magassága?
- b) Mekkora magasságban áll a víz a bögrében, ha 1,5 dl-t töltöttünk bele?
- c) Hány mm-rel emelkedik meg a víz szintje, ha a bögrében 1,5 dl víz van, és egy 3 cm átmérőjű vasgolyót teszünk bele?

4. Egy ipari forróvíz-kazán alakja félgömb alakú végekkel ellátott henger. (A henger alap- és fedőköre egybeesik a félgömbök főkörével.) A henger magassága 3,5 méter, alapkörének átmérője 4 méter hosszú. Mekkora a kazántest felszíne és térfogata?

5.

Az anyacsavar közelítőleg egy olyan test, amelyet egy szabályos hatszög alapú hasábból egy henger alakú vájat kimetszésével kaphatunk meg. A két test alap- és fedőlapjának síkjai, valamint a hatszög és a henger alapkörének középpontja egybeesik. Az M10 típusú anyacsavarban a szabályos hatszög egy oldalának hossza, valamint a henger alapkörének átmérője egyaránt 10 mm, a test magassága 7,8 mm.



a) Az anyákhoz tartozó ún. kulcsokat aszerint számazzák, hogy mekkora az anyacsavar két, egymással párhuzamos oldallapjának távolsága. Hányas kulcs tartozik az M10 típusú anyacsavarhoz?



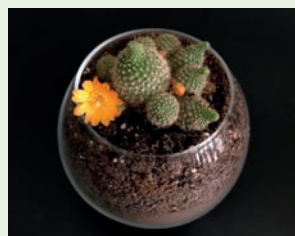
6.

b) Hány kg 200 darab ilyen anyacsavar tömege, ha azokat $8,73 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ sűrűségű sárgarézből gyártották?

Egy üvegváza egy 17 cm átmérőjű gömb elmettségével készült. A stabil tartóban elhelyezett váza nyílása 15 cm távolságra van a váza legalsó pontjától.

a) Belefér-e a vázába 3 liter víz?

b) Ha a vázát 15 cm magasságig vízzel töltjük – és a víz felszíne párhuzamos az edény nyílásával –, akkor mekkora a szabadon lévő víz felületének nagysága?



HÁZI FELADAT

1.

Egy gömb felszíne $1675,5 \text{ m}^2$. Egy egyenes henger magassága egyenlő a gömb átmérőjével, és térfogata egyenlő a gömb térfogatával. Mekkora területű a henger palástja?

2.

Egy háromszög alapú egyenes hasáb alapélei 8 cm, 15 cm és 17 cm hosszúak. A hasáb magassága ugyanakkora, mint az alaplap legrövidebb magassága. Határozd meg a hasáb felszínét és térfogatát!

3.

Egy négyzetes oszlop testátlója 8 cm, magassága 6 cm hosszú. Mekkora a test felszíne és térfogata? A választ két tizedesjegyre kerekítve add meg cm^2 -ben, valamint cm^3 -ben!

4.

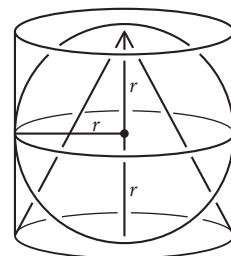
A bob kalapot egy félgömbből és egy körgyűrűből, míg a cilindert egy hengerből és egy körgyűrűből állítják össze. Mindkét esetben a körgyűrűt alkotó kisebb kör átmérője 19 cm, a külső köré pedig 24 cm. A kisebb méretű kör adja a félgömb főkörét, valamint a henger alapkörét. Tudjuk, hogy a cylinder magassága 14 cm. Melyik kalap elkészítéséhez hány cm^2 anyagra van szükség, ha mindkét esetben 10 százalékos hulladékkal számolunk?



RÁADÁS

A gömb sok szempontból különleges test. Végtelen sok forgástengelye és végtelen sok szimmetriatengelye van, így ez tűnik a tökéletes formának. Felszínét és térfogatát már az ókor legnagyobb matematikusa, Arkhimédész (Kr. e. 287–212) is meghatározta.

„A gömbről és hengerről” című művében megállapította, hogy a gömb felszíne egyenlő a köré írt egyenes körhenger palástjának területével, a térfogata pedig ugyanazon henger térfogatának két-harmad része. (A köré írt henger alaplapját és palástját érinti a gömb.) Számítással igazold az előbbi állításokat!



BEVEZETŐ



A Rubik-kocka (vagy más néven bűvös kocka) egy háromdimenziós mechanikus logikai játék, amit ifjabb Rubik Ernő alkotott meg 1974-ben. A játék szabadalmi leírása szerint: „A találmány lényege abban van, hogy a nagy kockát alkotó 27 elem, szétszedés tehát a nagy kocka megbontása nélkül hozható új helyzetbe, aminek eléréséhez egyetlen homológ művelet: a nagy kocka bármelyik lapját alkotó kilenc kis kockának elforgatása szükséges.” Az elmúlt közel 50 évben a kockának újabb változatait hozták létre. Az eredeti $3 \times 3 \times 3$ -as változat mellett létezik például $2 \times 2 \times 2$ -es típus, a „Rubik bosszúja” elnevezésű $4 \times 4 \times 4$ -es, valamint a „Professzor kockája” fantázianevű $5 \times 5 \times 5$ -ös változata is. A legnagyobb forgalomban lévő termék a $25 \times 25 \times 25$ -ös kocka.

KIDOLGOZOTT FELADAT

- 1.** Képzeljünk el a Rubik-kockákhoz hasonló, kis kockákból felépített testeket. Tekintsünk egy kis kockát $1 \times 1 \times 1$ -es típusúnak, és állítsuk elő csakis ilyen darabokból a nagyobb kockákat. (Az eredeti Rubik-kocka kockaelemeit olyan alakúra formálták, hogy azok az alakjuknál fogva tartsák össze magukat.)
- Hány kockára van szükségünk a bevezetőben említett típusok előállításához? Hányszorosa lesz az így létrehozott kockák felszíne és térfogata az eredeti kis kocka felszínének és térfogatának?

Megoldás

A $2 \times 2 \times 2$ -es kocka felépítésekor egy nagy kockalap $2 \cdot 2$ darab négyzetlapot tartalmaz, így a 6 lapon összesen $6 \cdot 2 \cdot 2$ négyzetlap van, ami miatt 4-szerese lesz a kapott kocka felszíne az eredeti $1 \times 1 \times 1$ -es kis kocka felszínének. Mivel a $2 \times 2 \times 2$ -es kocka 2 sorban egymás fölé $2 \cdot 2$ darab kis kockát tartalmaz, ezért annak felépítéséhez összesen 8 kis kocka szükséges. Így a 8 kis kockából álló $2 \times 2 \times 2$ -es kocka térfogata 8-szorosa az eredeti $1 \times 1 \times 1$ -es kis kocka térfogatának. A többi kocka felszínéről és térfogatáról hasonló megállapításokat tehetünk. Foglaljuk táblázatba az eredményeket!

A kocka mérete	Egy élen elhelyezett négyzetek száma	Egy lap területe	A kocka felszíne	A testet alkotó $1 \times 1 \times 1$ -es kockák száma	$\frac{A_{\text{kocka}}}{A_{1 \times 1 \times 1}}$	$\frac{V_{\text{kocka}}}{V_{1 \times 1 \times 1}}$
$1 \times 1 \times 1$	1	1	6	1	1	1
$2 \times 2 \times 2$	2	4	24	8	4	8
$3 \times 3 \times 3$	3	9	54	27	9	27
$4 \times 4 \times 4$	4	16	96	64	16	64
$25 \times 25 \times 25$	25	625	3750	15 625	625	15 625

Az $1 \times 1 \times 1$ -es típusú kocka középpontos nagyításával kapjuk a többi kockát. Vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van a hasonlóság aránya és a kockák felszín-, valamint térfogataránya között!

	A hasonlóság aránya az $1 \times 1 \times 1$ kockához képest (k)	A felszín aránya: $\frac{A_{\text{kocka}}}{A_{1 \times 1 \times 1}}$	A térfogat aránya: $\frac{V_{\text{kocka}}}{V_{1 \times 1 \times 1}}$
$2 \times 2 \times 2$	2	4	8
$3 \times 3 \times 3$	3	9	27
$4 \times 4 \times 4$	4	16	64
$25 \times 25 \times 25$	25	625	15 625

Észrevehetjük, hogy a kockák felszínének aránya egyenlő a hasonlósági arány négyzetével, a térfogataik aránya pedig a hasonlósági arány köbével.

Megoldás

Legyen a henger alapkörének sugara r , a test magassága M . Ekkor a nagyítással kapott henger alapkörének sugara $r' = k \cdot r$, a magassága $M' = k \cdot M$.

$$\text{A hengerek felszínének aránya: } \frac{A'}{A} = \frac{2 \cdot (r')^2 \pi + 2r'\pi \cdot M'}{2 \cdot r^2 \pi + 2r\pi \cdot M} = \frac{2 \cdot (k \cdot r)^2 \pi + 2k \cdot r\pi \cdot k \cdot M}{2 \cdot r^2 \pi + 2r\pi \cdot M} = \frac{k^2 \cdot (2 \cdot r^2 \pi + 2r\pi \cdot M)}{2 \cdot r^2 \pi + 2r\pi \cdot M} = k^2$$

$$\text{A hengerek térfogatának aránya: } \frac{V'}{V} = \frac{(r')^2 \pi \cdot M'}{r^2 \pi \cdot M} = \frac{(k \cdot r)^2 \pi \cdot k \cdot M}{r^2 \pi \cdot M} = \frac{k^3 \cdot (r^2 \pi \cdot M)}{r^2 \pi \cdot M} = k^3$$

Tehát a henger felszíne a k^2 -szeresére, a henger térfogata a k^3 -szorosára növekszik.

ELMÉLET

1. Emlékeztető: Ha két síkidom hasonló, és a hasonlóság arányszáma k , akkor a síkidomok területének aránya k , a síkidomok területének aránya k^2 .
2. Ha két test hasonló, és a hasonlóság arányszáma k , akkor a testek felszínének aránya k^2 , a testek térfogatának aránya k^3 .

$$\frac{K'}{K} = k$$

$$\frac{T'}{T} = k^2$$

$$\frac{A'}{A} = k^2$$

$$\frac{V'}{V} = k^3$$

FELADAT

1.

Egy 1,26 m élhosszúságú betonkockából kivájtak egy olyan kocka alakú üreget, amelynek az élei

a) 21 cm; **b)** 42 cm; **c)** 63 cm hosszúságúak.

Hányad része az üreg térfogata a megmaradt beton-töb térfogatának?

2.

Ivett a nyári szünet egy részében a Marcipán cukráz-
zatban dolgozott. Legutóbb 340 darab 22 mm át-
mérőjű marcipángolyóból kellett csokoládémázzal
bevont 30 mm átmérőjű, gömb alakú bonbonokat
készítenie.

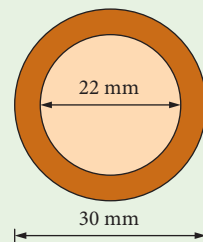
a) Hány dm^3 volt a 340 marcipán-
golyó együttes térfogata?

b) Hányszor annyi lett a 340 bon-
bon térfogata, mint a marci-
pángolyóké?

c) Hány dm^3 csokoládét használt
fel a mázhoz?

d) Mekkora lett volna egy bonbon átmérője, ha $5,2 \text{ dm}^3$
csokoládét használt volna fel?

e) Mekkora a példában említett háromféle gömb felszíne?



HÁZI FELADAT

1.

Egy 2 cm sugarú ólomgolyóból 1 mm sugarú ólom-
söréteket öntenek.

a) Hány darab sörét készíthető?

b) A golyóból készített összes sörét együttes felszíne
hányszorosa a golyó felszínének?

Ez volt a 7. lecke 2. kidolgozott feladata. A megoldást
most hasonló testek felszínére és térfogatára vonat-
kozó gondolatmenet segítségével végezd el!

2.

A Marcipán cukrázgatban készülő, téglatest alakú cso-
kis minyon méretei: 4 cm, 3 cm, 2,5 cm. Születésnap
meglepésként elkészítik ennek a 3-szoros nagyítását.

a) Mekkora ennek az „óriás minyonnak” az élei?

b) Mekkora a nagyított változat felszíne, és ez
hányszorosa egy kis minyon felszínének?

c) Mekkora a nagy minyon térfogata, és ez hány-
szorosa az eredeti kis minyon térfogatának?

3.

Egy forgáshenger térfogata nagyítás során 4-szere-
sére növekedett. A nagyított test alapkörének suga-
ra 7 cm, a testmagasság 3 cm.

a) Hányszorosára növekedett ugyanakkor a hen-
ger felszíne?

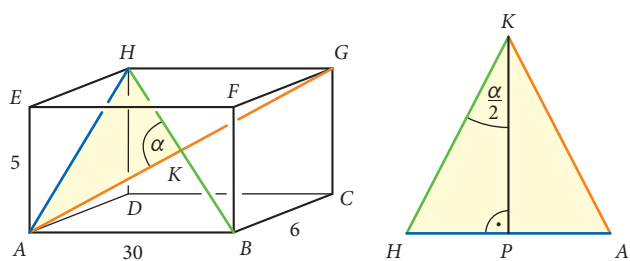
b) Add meg az eredeti henger adatait cm-ben, egy
tizedesjegyes pontossággal!

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy tárolóláda alakja olyan téglatest, amelynek magassága 5 cm, alaplapijának oldalai pedig 6 cm, valamint 30 cm hosszúak. Elfér-e két olyan vékony fémpálca ebben a ládában, amelynek hossza 31 cm? Ha elfér a két pálca, akkor az elhelyezés után mekkora szöget zárnak be egymással, valamint a láda legnagyobb területű lapjával?

Megoldás

A ládában elhelyezhető pálca nem lehet hosszabb, mint a testátló. A testátló hossza (e) kiszámítható az élek hosszának ismeretében: $e^2 = 5^2 + 6^2 + 30^2$, ebből $e = 31$ cm, tehát elhelyezhetők a pálcák a testátlók mentén.



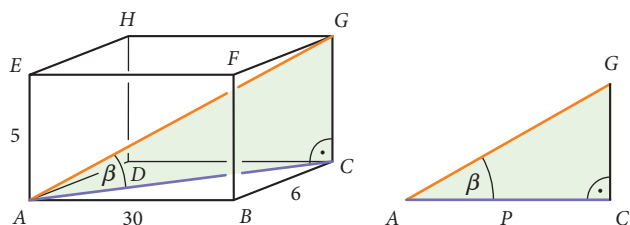
Ha a két pálcát ugyanazon testátló mentén helyezzük el, akkor hajlásszögük nagysága 0° .

Ha a két pálcát két különböző testátló mentén helyezzük el (az ábra jelöléseivel például AG , valamint HB testátlók mentén), akkor azok – a téglatest középpontos szimmetriája miatt – felezve metszik egymást, ezért $HK = AK = 15,5$ cm. A két pálca által bezárt szög a HAK egyenlő szárú háromszög szár-szögének nagysága.

A $HAK\triangle$ HA oldala az $ADHE$ téglalap lapátlója, mely a Pitagorasz-tétel alapján $AH = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} \approx 7,81$ (cm). A HAK egyenlő szárú háromszög szárszögének felező egyenese az AH alapot a P pontban metszi.

A $HPK\triangle$ -ből: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{HP}{HK} = \frac{3,905}{15,5} \approx 0,2519$, ebből $\frac{\alpha}{2} \approx 14,6^\circ$, így $\alpha \approx 29,2^\circ$

A két pálca tehát közelítőleg $29,2^\circ$ nagyságú szöget zár be egymással.



A legnagyobb területű lap az $ABCD$ téglalap. Tekintsük az AG testátlóban elhelyezett pálcát. Ez az alaplappal éppen akkora szöget zár be, mint a pálca és a pálca $ABCD$ lapra eső merőleges vetülete („árnyéka”) egymással, vagyis a $GAC\angle$ nagyságát (β) keressük.

A $GAC\triangle$ derékszögű, mert a téglatest CG éle merőleges az $ABCD$ lapra, így annak AC egyenesére is. A GAC derékszögű

háromszögben: $\sin \beta = \frac{CG}{AG} = \frac{5}{31} \approx 0,1613$, ebből $\beta \approx 9,3^\circ$. Az AG testátló mentén elhelyezett pálca tehát közelítőleg $9,3^\circ$ nagyságú szöget zár be a legnagyobb területű lappal.

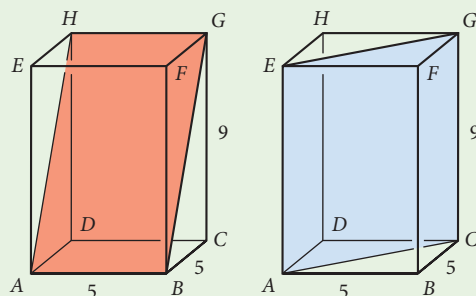
Az egybevágóság miatt, ha bármelyik másik testátló mentén helyezzük el a pálcát, ugyanezt a hajlásszöget kapjuk.

FELADAT

1.

Az $ABCDEFGH$ négyzetes oszlop alapéleinek hossza 5 cm, a test magassága 9 cm hosszú (ld. ábra).

- Milyen síkidomok az $ABGH$, valamint $ACGE$ négyszögek?
- Mekkora az $ABGH$, valamint $ACGE$ síkidomok területének nagysága?
- Mekkora szöget zár be az $ABGH$, valamint $ACGE$ sík a négyzetes oszlop alaplapijával, valamint oldallapjaival?



Térelemek hajlásszöge

1. Két egyenes hajlásszöge

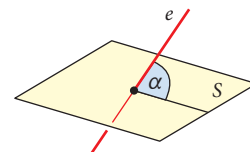
Két metsző egyenes hajlásszöge a két egyenes által meghatározott két-két egyenlő szög közül a nem nagyobbik (legfeljebb 90°). Két párhuzamos egyenes szöge 0° .

2. Egyenes és sík hajlásszöge

Egy egyenes merőleges egy síkra, ha merőleges a sík minden egyenesére (ekkor az egyenes síkra eső merőleges vetülete az egyenes és a sík metszéspontja).

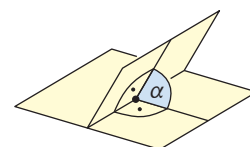
Belátható, hogy egy egyenes és egy sík merőlegességének elegendő feltétele, ha az egyenes merőleges az egyenes és sík metszéspontjára illeszkedő, a síkban lévő két egyenesre.

Egy (a síkra nem merőleges) egyenes és egy sík hajlásszögén az egyenesnek és az egyenes síkra eső merőleges vetületének a hajlásszögét értjük. Ha egy egyenes párhuzamos egy síkkal, akkor az egyenes és a sík szöge 0° .



3. Két sík hajlásszöge

Két metsző sík hajlásszöge megegyezik azzal a szöggel, amit a két sík metszévonalának tetszőleges pontjában a metszévonalra merőlegesen állított egyik, illetve másik síkra illeszkedő egyenesek határoznak meg. Párhuzamos síkok szöge 0° .



Megjegyzés:

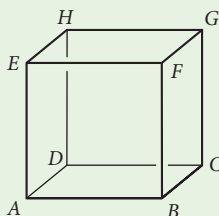
1. A fentiek szerint két egyenes, egyenes és sík, illetve két sík hajlásszöge sem lehet nagyobb 90° -nál.
2. A hajlásszögek meghatározásához a szöget tartalmazó, alkalmas derékszögű háromszögben végezhetjük a számolást a hegyesszögek szögfüggvényei segítségével.

FELADAT

2.

Az $ABCDEFGH$ kocka élhosszúsága 6 cm.

- a) Jelöld α -val az AG egyenes és a $BCGF$ sík hajlásszögét! Határozd meg az α értékét!
- b) Jelöld β -val az BDG sík és az $ABCD$ sík hajlásszögét! Határozd meg a β értékét!



3.

Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb leg-hosszabb testátlójának hossza 14 cm, és ez a testátló 60° nagyságú szöget zár be az alaplap síkjával.

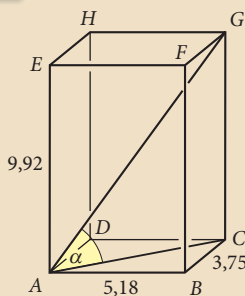
- a) Mekkora a hasáb alapélének és magasságának hossza?
- b) Mekkora a rövidebb testátló hossza?

HÁZI FELADAT

1.

Egy téglatest élleinek hossza 5,18 cm, 3,75 cm és 9,92 cm.

- a) Mekkora az AG testátló és az alaplap síkjának a szöge (α)?
- b) Mekkora az AG testátló és az AE él szöge?
- c) Mekkora az AG és a CE testátló szöge?
- d) Igaz-e, hogy az AG és a CE testátló szöge éppen 2-szerese az EAG szögnek?



2.

Az $ABCD A'B'C'D'$ négyzetes oszlop alaplapjának területe 1 dm^2 , palástjának területe 280 cm^2 . A test $ABCD$ alaplapjának A csúcsát kössük össze az $A'B'C'D'$ fedőlap K lapközeppontjával!

- a) Hány cm hosszúságú az AK szakasz?
- b) Hány fokok szöget zár be az AK szakasz az AB alapéllal?
- c) Hány fokok szöget zár be az AK szakasz az $ABCD$ alaplappal?

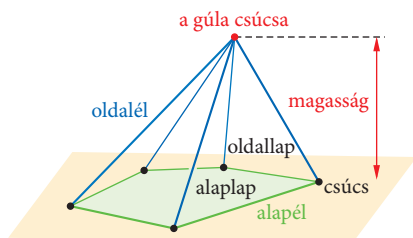
Válaszod két tizedesjegy pontossággal add meg!

BEVEZETŐ

Egyiptom fővárosa, Kairó közvetlen közelében található a – több mint 4 ezer évvel ezelőtt épült – gízai piramisok. A piramisok közül Kheopsz fáraó piramisa az ókori világ hét csodájának az egyetlen még ma is látható darabja. A piramis tájolását illetően több elméletet gyártottak, de mindegyikben közös, hogy a módszer alapvetően csillagászati alapokon nyugszik. A piramis az emberiség történetének egyik építészeti remeke, megtervezéséhez és elkészítéséhez alapos matematikai ismeretekre volt szükség. A piramis alakja szabályos négyoldalú gúla, méretei lenyűgözőek.



ELMÉLET



A gúla olyan síklapokkal határolt test (poliéder), melyet egy sokszög és annyi háromszög határol, ahány oldalú a sokszög.

A gúla csúcsának az alapsíktól való távolságát a gúla testmagasságának (röviden: magasság) nevezzük.

Az ábrán láthatók a szokásos elnevezések. Ebben az esetben a gúla alaplapja ötszög, ezért ezt *ötoldalú gúlának* mondjuk. Az ötoldalú gúlának 6 lapja van (az ötszög az alaplapja, és 5 háromszög az öt oldallapja).

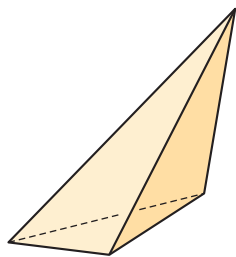
Ha a gúla alaplapja szabályos sokszög, és minden oldaléle egyenlő hosszúságú, akkor szabályos gúlának nevezzük.

Bizonyítható, hogy ha egy gúla minden oldaléle egyenlő hosszú, akkor a gúla alaplapja körbe írható sokszög, és a kör középpontja a gúla csúcsának az alapsíkon lévő merőleges vetülete.

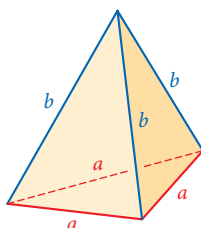
A háromoldalú gúlát, aminek tehát az alaplappal együtt négy lapja van, görög eredetű szóval tetraédernek nevezzük. A tetraéder 4 lapja közül bármelyik tekinthető alaplapnak.

A szabályos háromoldalú gúla alaplapja szabályos háromszög, oldallapjai egyenlő szárú háromszögek.

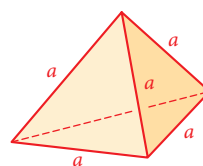
A szabályos tetraéder olyan szabályos háromoldalú gúla, amelynek mind a 4 lapja szabályos háromszög.



háromoldalú gúla



szabályos háromoldalú gúla

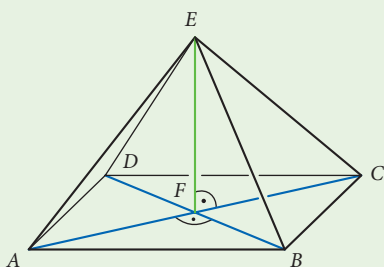


szabályos tetraéder

FELADAT

1.

A Kheopsz-piramist egy szabályos négyoldalú gúlával modellezhetjük. Ezt láthatod az ábrán.



Végezz számításokat a piramis eredeti adatainak ismeretében: az alapél hossza $AB = 232,4$ méter, a magasság $FE = 146,7$ méter.

- Mekkora az oldallap magasságának és az alapél felének hányadosa? (Érdekesség: ez az arányszám az ún. aranymetszés esetén adódó állandó.)
- Igazold, hogy a piramis egyik oldallapjának a területe és a gúla magasságának a négyzete négy-

zetméterben, ezresekre kerekítve ugyanazt az értéket adja!

- Mekkora az oldalél és az alaplap hajlásszöge?
- Mutasd meg, hogy az oldallap és az alaplap hajlásszöge körülbelül 10° -kal nagyobb az oldalél és az alaplap hajlásszögénél!

2.

Egy szabályos hatoldalú gúla oldalélének hossza $7\sqrt{2}$ egység hosszú. Az oldalél az alaplappal 45° -os szöget zár be.

- Mekkora az alapél hossza?
- Hány fokos szöget zár be egymással a gúla oldallapja és alaplapja? A választ egy tizedesjegyre kerekítve add meg!

3.

Egy szabályos tetraéder alapélének hossza 8 cm. Mekkora szöget zárnak be egymással a tetraéder lapjai?

HÁZI FELADAT

1.

Igaz vagy hamis?

- A gúla magassága nem lehet hosszabb a gúla egyetlen oldalélénél sem.
- Ha a gúla egyik oldallapján összekötjük a két oldalél felezőpontját, akkor biztosan van olyan alapél, amely kétszerese a felezőpontokat összekötő szakasz hosszának.
- Van olyan gúla, amelynek van testátlója.
- Egy szabályos tízoldalú gúla alaplapjának területe kisebb, mint az oldallapok területeinek összege.

2.

Egy szabályos négyoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek. A gúla alaplapjának területe 100 cm^2 .

- Mekkora a gúla magassága?

- Határozd meg, hogy mekkora szöget zár be az oldallap az alaplappal!
- Mekkora szöget zár be egymással a gúla oldal-éle és alaplapja?

3.

Egy gúla alapja egy olyan derékszögű háromszög, amelynek befogói 5 cm, valamint 12 cm hosszúak. A gúla 12 cm hosszúságú oldaléle az alaplap derékszögű csúcsából indul, és merőleges az alaplap síkjára.

- Határozd meg a test ismeretlen élének hosszát!
- Készítsd el a test síkba terített hálójának vázlatos rajzát!
- Melyik a gúla legnagyobb területű lapja, és mekkora ez a terület?

RÁADÁS

Az egyiptomi piramisok évezredek óta ámulatba ejtik az embereket. De piramisok, halomsírok máshol is vannak. Például Kínában találhatók csonkagúla alakú, hatalmas piramisok. Nem kell azonban messzire mennünk, nálunk is találhatók kúp alakú halomsírok, amelyek jóval kisebbek: ilyenek a kunhal-mok. Továbbá híresek a Krakko közelében lévő kúp alakú halomsírok is.

Keress az interneten további információt a témában!



KIDOLGOZOTT FELADAT

Néhány tejterméket (például tejet, tejszínt, madártejet) időnként lehet kapni „háromszögletű” csomagolásban.

A tartódoboz valójában egy térbeli alakzat, egy gúla, és mivel háromszög alapú, ezért tetraéder. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egy ilyen doboz egyik lapja szabályos háromszög, a másik három pedig egy-egy 10 cm befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög.

a) Mennyi karton szükséges egy ilyen doboz elkészítéséhez?

Számítsuk hozzá az összeállítás elvégzése miatt még a felszín 5%-át!

b) Mennyi tejszín fér ebbe a dobozba?

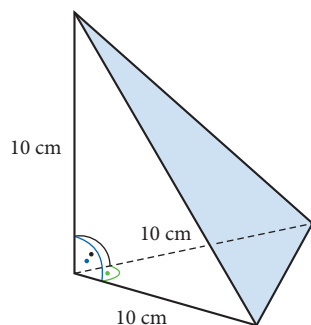
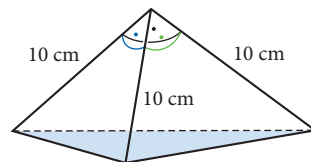
Megoldás

a) Az ábra a tetraédernek azt az elhelyezését mutatja, amikor az alaplappal a szabályos háromszög. A derékszögű háromszögek területe egyenként: $t = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ (cm}^2\text{)}$.

A háromszögek átfogója $10\sqrt{2} \approx 14,1 \text{ (cm)}$, így az alapot alkotó szabályos háromszög területe: $T_{\text{alaplapp}} = \frac{(10\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 86,6 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Így a négy lap együttes területe körülbelül $236,6 \text{ cm}^2$. A felhasználandó karton mennyisége ennek a 105%-a, vagyis közelítőleg $236,6 \cdot 1,05 \approx 248 \text{ cm}^2$.

b) A térfogat kiszámításához tekintsük a gúla alaplappjának valamelyik derékszögű háromszög alakú lapját! Az alaplappra merőleges 10 cm hosszúságú él ekkor a gúla magassága. A gúla térfogata az alapterület és a magasság szorzatának a harmadrésze, vagyis $V = \frac{50 \cdot 10}{3} \approx 166,7 \text{ (cm}^3\text{)}$. A dobozba tehát körülbelül 1,7 dl tejszín fér.



ELMÉLET

A gúla felszíne a gúlát határoló lapok területének összege.

A gúla térfogatát az alaplapp és a testmagasság szorzatának harmadrésze adja meg.

$$V_{\text{gúla}} = \frac{T_{\text{alaplapp}} \cdot M}{3}$$

Megjegyzés:

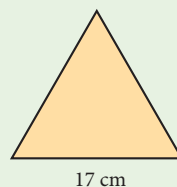
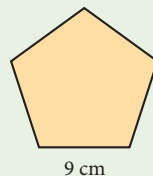
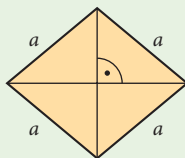
1. Egy gúla térfogata a gúlával azonos alapterületű és magasságú hasáb térfogatának a harmadrésze.
2. A tetraéder térfogatának meghatározásakor bármelyik lap tekinthető alaplappnak, de az fontos, hogy a kiválasztott laphoz tartozó magassággal végezzük a számítást.

FELADAT

1.

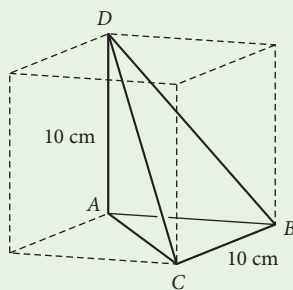
Három gúla 15 cm magas, alaplappjukat az ábrák mutatják. A rombusz alapú gúla alaplappjának átlói 18 cm, illetve 15 cm hosszúságúak, a gúla csúcsából indított magassága a rombusz középpontjában végződik. A másik két gúla szabályos gúla. A három gúla közül melyiknek a legnagyobb, és melyiknek a legkisebb

- a) a térfogata, b) a felszíne?



2.

Az ábra egy tejszínes doboz tervét mutatja. A doboz alakja egy olyan tetraéder, amelynek mind a négy csúcsa egy 10 cm élű kocka egy-egy csúcsával esik egybe.

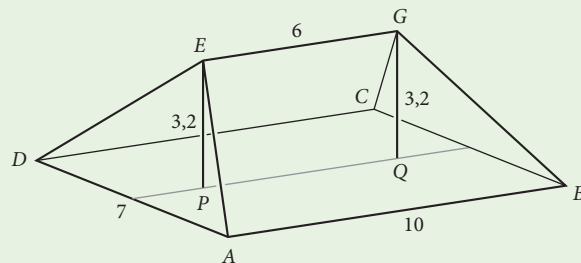


- Igaz-e, hogy a tetraéder mindegyik lapja derékszögű háromszög? Válaszod indokold!
- Mekkora a tetraédert határoló háromszögek oldalai és szögei?
- Rajzold meg a tetraéder hálóját!
- Számítsd ki a tetraéder felszínét!
- Számítsd ki a tetraéder térfogatát!
- Mekkora a tetraédernek az a magassága, amelyik a BCD lapjához tartozik?

3.

A háztető „alapja” téglalap, amelynek szomszédos oldalai 10 méter és 7 méter hosszúak. Az EP és GQ függőleges tartógerendák 3,2 métereseek, az EG tetőgerinc 6 méter hosszú, és a téglalap középvonala felett húzódik.

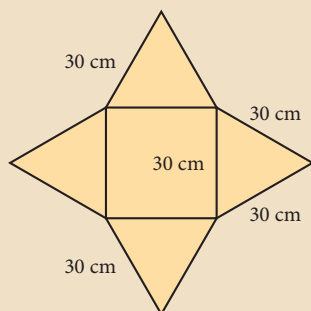
- Mekkora szöget zárnak be a vízszintes síkkal a tető különböző síkjai?
- Mekkora szöget zár be egymással a két trapéz alakú rész síkja?
- Mekkora a tetőtér térfogata?



HÁZI FELADAT

1.

Az ábrán egy négyzet alapú gúla hálózata látható.



- Igaz-e, hogy ez a gúla tetraéder, négyoldalú gúla, szabályos gúla?
- Hány éle és hány csúcsa van ennek a testnek?
- Számítsd ki a gúla felszínét és térfogatát!
- Gondolatban ragassz össze az alaplapjánál két ilyen gúlát úgy, hogy a két alaplap csúcsai illeszkedjenek egymásra! Hány lapja, hány éle és hány csúcsa van az így kapott testnek? (Melyik szabályos testet kaptuk meg?) Számítsd ki ennek a testnek a felszínét és a térfogatát!

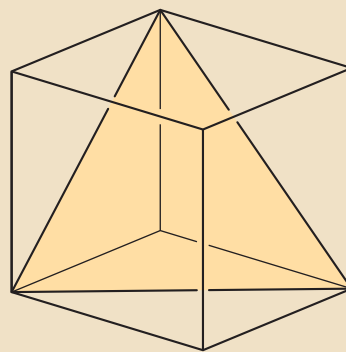
2.

Egy szabályos hatoldalú gúla alapéle 12 cm, oldaléle 13 cm hosszú.

- Számítsd ki a gúla magasságát és térfogatát!
- Számítsd ki a gúla oldalélének és alaplapjának a szögét!
- Számítsd ki a gúla oldallapjának és alaplapjának a szögét!
- Számítsd ki a gúla felszínét!

3.

Mekkora szöget zár be az ábrán látható 20 cm élű kockába rajzolt háromszög síkja és a kocka alaplapjának síkja? Mekkora térfogatú részekre bontja a sík a kockát?



4.

Egy szabályos négyoldalú gúla magassága 8 cm hosszú, az oldallapok pedig 57° -os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

- Mekkora a gúla alapéle?
- Mekkora a gúla felszíne és térfogata?
- Mekkora szöget zárnak be az oldalélek egyenesei az alaplap síkjával?
- Mekkora szöget zárhat be két oldalél egyenese?

BEVEZETŐ

A triangulum (fém háromszög) olyan ütős hangszer, amely rezgés révén hoz létre – méretétől és anyagának vastagságától függően mély vagy magas – zenei hangot. A szerkezet egy fémrúdból hajlított szabályos háromszög, amelynek oldalhossza általában 10 és 30 cm között van. Az egyik csúcsánál lazán felfüggesztve szólaltatják meg egy hozzá hasonló anyagú és átmérőjű rúdból készült ütővel.

Képzeld el (vagy próbáld ki), hogy egy ilyen fém háromszöget megforgatunk a felfüggesztésre illeszkedő tengely mentén. Minél gyorsabban forog a test, szemünk tehetetlensége miatt annál inkább egybefüggő térbeli alakzatként érzékeljük az eredeti síkbeli háromszöget. Ez az alakzat egy forgáskúp.



ELMÉLET

Ha egy egyenlő szárú háromszöget megforgatunk a szimmetriatengelye körül, **forgáskúp** (más néven: egyenes körkúp) keletkezik.

A forgáskúpot egy körlap (a kúp alapköre) és a **kúppalást** határolja.

A kúp csúcsát az alapkör pontjaival összekötő szakaszok a kúp **alkotói** (a).

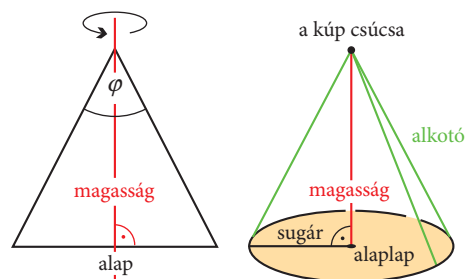
A forgáskúp minden alkotója egyenlő hosszú.

A kúp alapkörének az átmérője egyenlő hosszúságú a háromszög alapjával, alkotói pedig akkorák, mint a háromszög szárai.

A megforgatott egyenlő szárú háromszög szárszögét a **forgáskúp nyílásszögének** nevezzük (φ).

A kúp csúcsát az alapkör középpontjával összekötő szakasz merőleges az alapkör síkjára, ez a forgáskúp **testmagassága** (röviden magassága: M). A testmagasság hossza egyenlő az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságának hosszával.

A megforgatott egyenlő szárú háromszög a forgáskúp **tengelymetszete**.

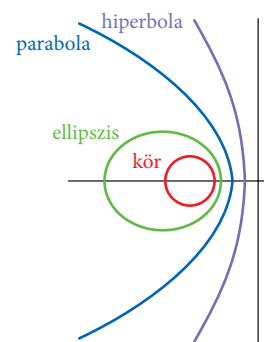
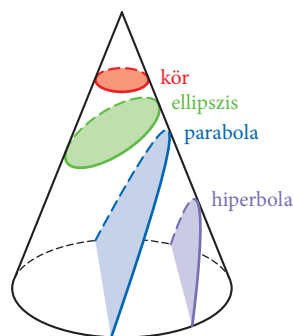


RÁADÁS

Elemi geometriai és koordináta geometriai ismeretekkel igazolható, hogy ha egy forgáskúp palástját olyan síkkal metsszük, amely nem megy át a kúp csúcspontján, és

- merőleges a tengelyre, akkor a síkmetszet kör;
- minden alkotót metsz, de nem merőleges a tengelyre, akkor a síkmetszet ellipszis;
- egy alkotóval párhuzamos, akkor a síkmetszet parabolaív;
- két alkotóval párhuzamos, akkor a síkmetszet hiperbolaív.

Keress meg az interneten az említett ponthalmazok fogalmát!



FELADAT

1. Ha egy derékszögű háromszöget megforgatunk az egyik befogójának egyenese körül, akkor is forgáskúpot kapunk. Készíts rajzot! Jellemezd a kúp adatait a háromszög adatainak segítségével!
2. Felfüggesztése körül megforgatunk egy triangulumot. A háromszög minden oldalának hossza 20 cm. Mekkora a keletkezett forgáskúp magassága, alapkörének kerülete és területe?
3. Egy egyenes körkúp alkotójának hossza 24 mm, alapkörének átmérője 2 cm. Mekkora a kúp nyílásszöge? Válaszd fokban, egy tizedesjegyre kerekítve add meg!
4. Egy forgáskúp alapkörének területe $1256,6 \text{ cm}^2$. A kúp magasságának hossza negyede az alapkör területének. Mekkora a kúp nyílásszöge? Válaszd fokban, egy tizedesjegyre kerekítve add meg!

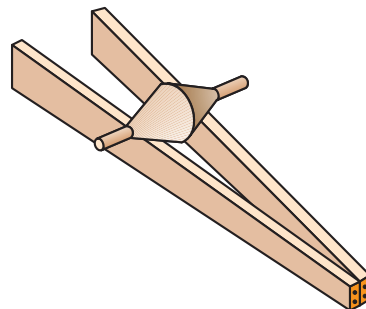
HÁZI FELADAT

1. Igaz vagy hamis?
 A: Ha egy forgáskúpot háromszorosára nagyítunk, akkor a nyílásszöge háromszorosára nő.
 B: A forgáskúp alkotója és alaplapja által bezárt szög pótsszöge a nyílásszög felének.
 C: Egy forgáskúp alkotójának hossza mindig nagyobb, mint az alapkör átmérőjének hossza.
 D: Egy forgáskúp alapkörének sugara mindig rövidebb a kúp testmagasságánál.
2. Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza 51 cm, egyik befogójának hossza 24 cm. A háromszöget megforgatjuk a hosszabbik befogója mentén. Mekkora az így kapott forgáskúp nyílásszöge és alaplapjának területe?
3. Egy egyenes körkúp alkotójának hossza 2 dm, nyílásszöge 40° . Mekkora annak az egyenlő szárú háromszögnek a kerülete és a területe, amelynek megforgatásával kaptuk az eredeti kúpot?
4. Ha egy rombuszt az egyik átlója mentén megforgatunk, akkor két, azonos alapkörrel rendelkező kúpot (úgynevezett kettős kúpot) kapunk. Mekkora annak a rombusznak az oldala, amelynek megforgatásával kaptuk két kúp nyílásszöge 50° , és a közös alapkörök területének nagysága 1964 cm^2 ?

RÁADÁS

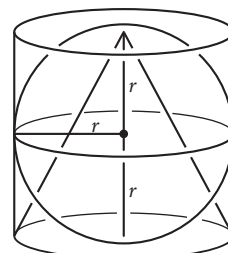
Előfordul, hogy olykor olyan hihetetlennek tűnő jelenség tárul elénk, ami látszólag el-lentmond a fizikaórákon tanult törvényeknek. Ilyen például a kettős kúp lejtőn történő „felfelé gurulása”.

A felfelé szélesedő, ék alakú sín párból álló emelkedő aljára helyezett kettős kúp alakú tárgy a sín pár kiszélesedő, magasabban lévő vége felé tart, ebből úgy gondolhatjuk, hogy a test valójában a lejtőn felfelé halad. A jelenség azonban azzal magyarázható, hogy a mozgás során a kettős kúp tömegközéppontja lesüllyed (vagyis az valójában lefelé halad), míg a szélesedő, ék alakú lejtőn gördülve a kúpok alátámasztási pontjai egyre közelebb kerülnek a csúcshoz.



KIDOLGOZOTT FELADAT

Arkhimédész nevéhez kapcsolódik a – már korábban is említett – híres ábra, amelyik egy forgáshengert, egy ebbe írt gömböt és forgáskúpot mutat. A gömb sugara ugyanakkora, mint a henger alapkörének sugara. A henger magassága az alapköre átmérőjének hosszával egyenlő. A forgáskúp alapköre a henger alapkörével egyezik meg. A kúp csúcsa a henger fedőlapjának középpontja.



a) Számítsuk ki a három test térfogatának arányát!

b) Számítsuk ki a henger, a gömb és a kúp felszínét, ha a henger alapkörének sugara 5 cm!

Megoldás

a) A forgáskúp térfogatát ugyanúgy számolhatjuk ki, mint a gúlák térfogatát: $V_{\text{kúp}} = \frac{T_{\text{alaplapp}} \cdot M}{3}$, amely az $M = 2r$ kapcsolat miatt $V_{\text{kúp}} = \frac{r^2 \pi \cdot 2r}{3} = \frac{2r^3 \pi}{3}$.

A gömb térfogata: $V_{\text{gömb}} = \frac{4r^3 \pi}{3}$, tehát éppen kétszerese a kúp térfogatának.

A forgáshenger térfogata: $V_{\text{henger}} = T_{\text{alaplapp}} \cdot M = r^2 \pi \cdot 2r = 2r^3 \pi$, tehát éppen háromszorosa a kúp térfogatának.

Így $V_{\text{kúp}} : V_{\text{gömb}} : V_{\text{henger}} = 1 : 2 : 3$.

b) A henger magassága 10 cm, ezért a felszíne:

$$A_{\text{henger}} = 2 \cdot T_{\text{alaplapp}} + K_{\text{alaplapp}} \cdot M = 2 \cdot 5^2 \pi + 2 \cdot 5 \pi \cdot 10 = 150\pi \text{ cm}^2$$

A gömb sugara 5 cm, ezért a felszíne: $A_{\text{gömb}} = 4 \cdot r^2 \pi = 4 \cdot 5^2 \pi = 100\pi \text{ cm}^2$. Ez pontosan kétharmada a henger felszínének.

A kúp felszínét az alaplapp területének és a kúppalást területének összege adja:

$$A_{\text{kúp}} = T_{\text{alaplapp}} + T_{\text{palást}}$$

$$\text{A kúp alapterülete: } T_{\text{alaplapp}} = 25\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

A forgáskúp kiterített palástja olyan körcikk, amelynek a sugara a forgáskúp alkotója, körívének hossza pedig a kúp alapkörének kerületével egyenlő.

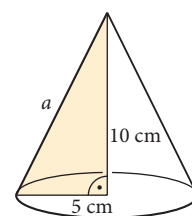
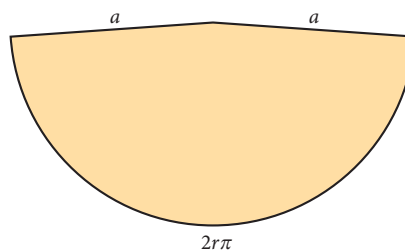
A kúp alkotójának hosszát Pitagorasz-tétellel számíthatjuk ki: $a = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} \text{ (cm)}$

Az alapkör kerülete $10\pi \text{ (cm)}$, tehát a kiterített palást egy olyan körcikk, amelynek a sugara $\sqrt{125} \text{ cm}$, íve pedig $10\pi \text{ cm}$ hosszú.

A körcikk területét kiszámíthatjuk a $T_{\text{körcikk}} = \frac{i_{\text{körcikk}} \cdot r_{\text{körcikk}}}{2}$ képlettel, tehát $T_{\text{palást}} = \frac{10\pi \cdot \sqrt{125}}{2} = 25\pi \cdot \sqrt{5} \text{ (cm}^2\text{)}$

$$\text{A kúp felszíne: } A_{\text{kúp}} = 25\pi + 25\pi \cdot \sqrt{5} = 25\pi(1 + \sqrt{5}) \text{ (cm}^2\text{)}$$

Közelítő értékekkel adódik, hogy a henger felszíne 471 cm^2 , a gömb felszíne 314 cm^2 , a kúp felszíne pedig 254 cm^2 .



Megjegyzés

Arkhimédész észrevette, hogy a forgáshengerbe írt gömb és a henger felszínének aránya minden esetben $2 : 3$, ugyanúgy, mint a térfogatuk aránya. Erre a felfedezésére nagyon büszke volt.

Kívánsága szerint sírkövére a hengerbe írt gömb és kúp körvonalait vésték. Halála után 150 évvel a híres ábra alapján sikerült azonosítani a sírját, melyet Cicero író és államférfi kutatott fel Szürakuszaiban.

ELMÉLET

A forgáskúp palástja síkba kiterítve egy körcikk, amelynek sugara a kúp alkotójával, határoló íve pedig a kúp alapkörének kerületével megegyező hosszúságú.

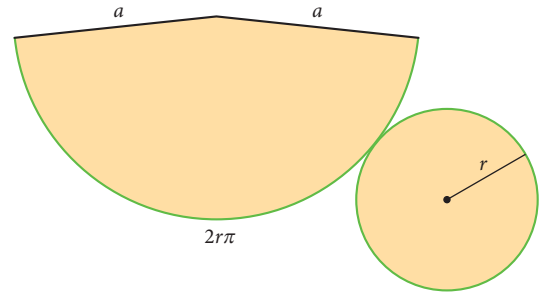
Ebből adódik, hogy a forgáskúp felszíne, ha az alapkör sugarának hossza r , és alkotójának hossza a :

$$A_{\text{kúp}} = T_{\text{alaplap}} + T_{\text{palást}} = r^2\pi + r\pi a = r\pi(r + a)$$

A forgáskúp térfogatát az alapterület és a magasság (M) szorzatának

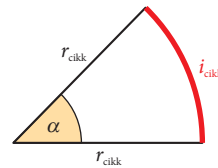
$$\text{harmadrésze adja: } V_{\text{forgáskúp}} = \frac{T_{\text{alaplap}} \cdot M}{3}, \text{ vagyis } V_{\text{forgáskúp}} = \frac{r^2\pi \cdot M}{3}.$$

Megjegyzés: Egy kúp térfogata a kúppal azonos alapterületű és magasságú henger térfogatának a harmadrésze.



$$A_{\text{forgáskúp}} = r^2\pi + r\pi a = r\pi(r + a)$$

$$V_{\text{forgáskúp}} = \frac{r^2\pi \cdot M}{3}$$



Emlékeztető: A körcikk területe: $T_{\text{körcikk}} = \frac{l_{\text{körcikk}} \cdot r_{\text{körcikk}}}{2}$

FELADAT

1. 📡

Egy forgáskúp alapkörének az átmérője 7,5 cm, a magassága pedig 9 cm hosszú. Mekkora

- a) a felszíne;
- b) a térfogata;
- c) a nyílásszöge;
- d) szöget alkotnak a forgáskúp alkotói az alapsíkkal?

2. 📡

Egy egyenlő szárú háromszög alapja 4,2 dm, szára 2,9 dm hosszú. A háromszöget megforgatjuk a szimmetriatengelye körül, így egy forgáskúpot kapunk.

- a) Mekkora a kúp nyílásszöge?
- b) Mekkora a kúp térfogata?
- c) Mekkora a kúp kiterített palástjának középponti szöge?
- d) Mekkora a kúp felszíne?

3. 📡

Egy építkezéshez 2 köbméter sódert rendeltek. A rendelt áru meg is érkezett.

A teherautóról leborított sóderkupac nagyjából kúp alakú, az alaplapja 3 m átmérőjű körnek látszik, a kupac magassága pedig 80 cm körül van. Számítsd ki az adatokból, hogy körülbelül mennyi a sóderkupac térfogata! Megérkezett-e a kívánt mennyiség?

4. 📡

Egy forgáskúp alakú születésnapi papírcsákót egy olyan körcikkből készítették el, amelynek középponti szöge 132° nagyságú, íve 44 cm hosszú. Hány cm magas a papírcsákó? Válaszol egészre kerekítve add meg!



HÁZI FELADAT

1. 📡

Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 35 mm és 84 mm. Ezt a háromszöget megforgatjuk a hosszabbik befogó egyenese körül 360° -kal. Számítsd ki a keletkezett test felszínét és a térfogatát!

2. 📡

Egy 88 mm magasságú forgáskúp alkotói 45° -os szöget alkotnak az alapkör síkjával. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?

3. 📡

Egy pattogatott kukoricát árusító helyen olyan forgáskúp alakú papírtölcsért adnak, amelynek palástja egy 20 cm sugarú körből kivágott körcikk, és a körcikk ívének hossza 60 cm. Mekkora a körcikkből készített kúp térfogata?



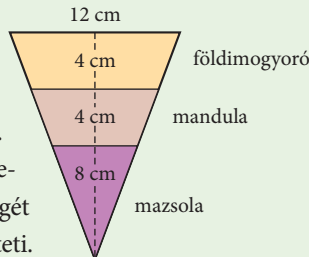
FELADAT

1. Egy forgáskúp alapkörének a sugara 24 cm, magassága 45 cm. Ezt a forgáskúpot a testmagasság egyenesére illeszkedő, alaplapra merőleges síkokkal szétvágjuk 4 olyan testre, amelyek alaplapja egy-egy körcikk. A körcikkek középponti szöge 30° , 45° , 120° és 165° . Mekkora a keletkezett kúpszerű testek

- a) felszíne;
b) térfogata?

2. Egy hatoldalú egyenes gúla alapélének hossza 8 méter, az oldallapoknak az alaplappal bezárt szöge 40° . Mennyivel lesz magasabb a gúlánál az a kúp, amelynek térfogata egyenlő a gúlával, és alaplapja a gúla alaplapjába beírt kör?

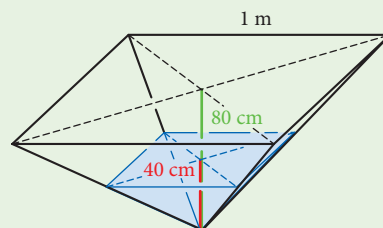
3. „Finom csemege” néven 16 cm magas, forgáskúp alakú csomagolásban egy különleges édesség kapható, amelyben „leg-alul” mazsola, majd mandula és „legfelül” földimogyoró található. Az egyes összetevők elhelyezkedését és mennyiségét a mellékelt ábra szemlélteti.



- a) Számítsd ki a teljes csomag térfogatát!
b) A teljes térfogatnak hány százalékát tölti ki a mazsola, a mandula, illetve a földimogyoró?
c) A mazsola egységára 1000, a mandula egységára 3900, a földimogyoró egységára 1200 forint kilogrammonként. Az egységárak ismeretében hogyan indokolható a gyártó csomagolási technikája?
d) Ha a fenti csomagolásnál kiszámolt mennyiségű földimogyoró lenne legalul, akkor mekkora magasságú részt foglalna el a kúpban?

4. Egy földbe ásott vájat alakja olyan szabályos négyoldalú gúla, amelynek alaplapja a vízszintes talaj síkjában van, az alapéle 1 méter hosszúságú, a legala-

acsonyabban lévő pontja pedig a talaj alatt 80 cm-re található.



- a) Mekkora területű részt kell vízhatlan anyaggal bevonni, ha a vájat egészét szeretnék szigetelni?
b) Mennyi vízzel lehet a vájatot 40 cm magasságáig megtölteni?
c) A talaj alatt hol lesz a vízszint, ha a vájat térfogata felének megfelelő vízmennyiséget töltenek bele?

5. Hivatalokban, üzletekben

is egyre többször láthatunk ásványvíz-automatákat, amelyekből egy kis kar lenyomásával egy papírpohárnyi vizet tölthetünk magunknak. Egy dizájnér kúp alakú, egyszer használatos papírpoharakat tervez, melyek magassága 9 cm, átmérőjük pedig 6 cm hosszú. (A poharak „alja” a kúp csúcsánál van.)



- a) Legfeljebb mennyi vizet tölthetünk egy ilyen kúp alakú papírpohárba?
b) Hány dm^2 anyag kell egy 100 darabos pohárkészlet gyártásához? Az átfedések miatt számolj az elméleti értéknél 5%-kal nagyobb mennyiséggel!
c) Ha az egyik hivatalban egy 20 cm sugarú, gömb alakú víztartályt helyeznek el, akkor hány papírpohárnyi vizet tud szolgáltatni egy ilyen teljesen tele lévő tartály, ha a poharakat minden alkalommal 8,5 cm magasan töltik meg?
d) Hány pohárnyi vizet biztosítana egy olyan gömb alakú tartály, aminek a sugara a c) esetben leírt gömb sugarának másfélszerese?

HÁZI FELADAT

1.

Egy templomtorony teteje szabályos hatoldalú gúla, melynek alapéle 2 méter, magassága 6 méter hosszú.

- Mekkora a tető légtérének térfogata?
- Mennyibe kerül a tetőt borító bádoglemez javítása, ha négyzetméterenként 9600 forintot kér érte a bádogos?

2.

Egy meteorit becsapódása szabálytalan alakú, nagyjából kúpszerű krátert hagyott maga után, amelyet később a beleömlő patak krátertővé töltött fel. Körülbelül hány köbméter víz lehet a tóban, ha a víz felülete $2,4 \text{ km}^2$, és a legnagyobb mélysége 6 méter?



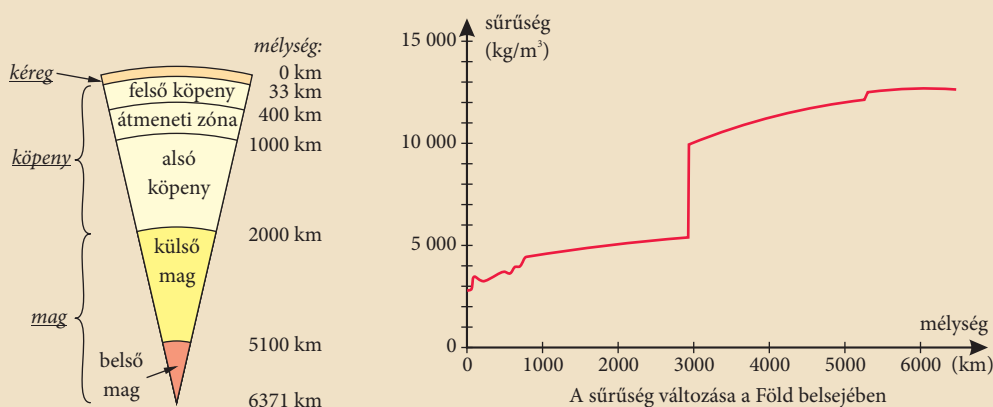
3.

Egy szabályos négyoldalú gúla alakú alumínium papírnehézék alapéle és az oldallap magassága egyaránt 8 cm hosszú. Számítsd ki,

- hány fokos szöget zárnak be az oldallapok az alaplap síkjával;
- a nehézék tömegét, ha az alumínium sűrűsége $2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$!

4.

- A mellékelt ábra és grafikon alapján töltsd ki a táblázatot a Föld belső szerkezetéről, a Föld tömegének körülbelüli eloszlásáról! A Föld tömege közel $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.
- Ábrázold kördiagramon a térfogateloszlást és a tömegeloszlást is!
- Készíts olyan grafikont, amely a Föld sűrűségének változását a Föld középpontjától való távolság függvényében tünteti fel!



A réteg neve	A réteg vastagsága (km)	A réteg térfogata (km^3)	A réteg térfogata hány %-a a Föld térfogatának?	Mekkora a réteg tömege? (kg)	A réteg tömege hány %-a a Föld tömegének?
kéreg					
felső köpeny					
átmeneti zóna					
alsó köpeny					
külső mag					
belső mag	1271	$8,6 \cdot 10^9$	0,8	$1,1 \cdot 10^{23}$	2

(A grafikonok forrása és a felhasználási engedélyhez a tulajdonos által kért hivatkozás: dr. Völgyesi Lajos (2002): Geofizika. Műegyetemi Kiadó, Budapest)

BEVEZETŐ

„Steinmann felel.

Ez különleges, ünnepélyes pillanat. [...] Maga a tanár is ünnepélyes. Oldalt ül le a székre, összetett ujjakkal gondolkodik. A jó tanuló a táblához megy, és kezébe veszi a krétát.

A tanár gondolkodik. [...]

– Hát – mondja a tanár, és gondolkodva húzza a szót –, majd valami érdekes példát veszünk...

A jó tanuló udvariasan és végtelen megértéssel köhög. Természetesen valami érdekes példát, az érdekes helyzetnek megfelelőt. [...]

– Vegyünk egy kúpot... [...]

– Egy kúpot – mondja Steinmann... De már ezt is úgy tudja mondani, ez a Steinmann, annyi megértéssel, olyan okosan: csak ő tudja, *mennyire* kúp az, amit veszünk. Én, Steinmann, a legjobb tanuló az egész osztályban, veszek egy kúpot, mivel engem, mint az erre legalkalmasabbat, megbízott a társadalom. Még nem tudom, miért vettem a kúpot,

de nyugodtak lehettek mindannyian, bármi történjék ezzel a kúppal, én is ott leszek a helyemen, és megbirkózom vele.

– Különben – mondja a tanár hirtelen –, vegyünk inkább egy csonka gúlát.

– Csonka gúla – ismétli a jó tanuló, ha lehet, még értelmesebben. Ő a csonka gúlával éppen olyan határozott, barátságos, bár fölényes viszonyban van, mint a kúppal. Mi neki egy csonka gúla? Ő nagyon jól tudja, őt nem lehet félrevezetni, a csonka gúla is csak olyan gúla, mint más, normális gúla, egyszerű gúla, amilyent egy Eglmayer is el tud képzelni – csak le van vágva belőle egy másik gúla.

A felelés rövid ideig tart. Félsszavakban beszélnek egymással, értik egymást, lassanként intim dialógus alakul ki tanár és a jó tanuló közt: mi már nem is értjük, ez az ő kettejük dolga, két rokon lélek, mely itt előttünk egyesül, a differenciálegyenletek éteri légkörében.”

(Karinthy Frigyes: *A jó tanuló felel* – részlet)

ELMÉLET

Ha egy gúlát/kúpot az alaplapjával párhuzamos síkkal elmetsszünk, akkor két test keletkezik. Egy olyan gúla/kúp, amely középpontosan hasonló az eredetihez, továbbá egy másik test, amelyet **csonkagúlának** / **csonkakúpnek** nevezünk.

A csonkagúlát / csonkakúpot két középpontosan hasonló síkidom – a test **alaplappja** és **fedőlapja** –, továbbá a test **palástja** határolja.

A csonkagúla palástját annyi **trapéz** alkotja, ahány oldala van az alaplapnak.

Az alaplap és a fedőlap síkjának távolságát a csonkagúla / csonkakúp **magasságának** nevezzük.

A csonkakúp **alkotói** az eredeti „teljes” kúp alkotóinak a csonkakúp palástjára illeszkedő szakaszai.

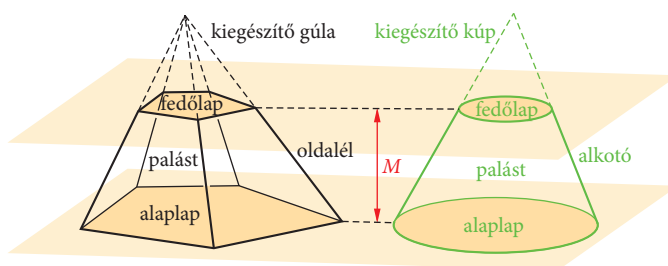
Megjegyzések

– Ha a csonkagúla egy szabályos n oldalú gúlából származik, akkor a neve: **szabályos n oldalú csonkagúla**.

– A csonkagúlát sokszögek határolják, ennek megfelelően használhatjuk az alapél, oldalél, oldallap elnevezéseket.

– A lemetezett gúla / kúp a kapott csonkagúla / csonkakúp **kiegészítő gúlája** / **kiegészítő kúpja**.

– Ha a forgáskúpból keletkező csonkakúpot a tengelyére illeszkedő síkkal metsszük, akkor a síkmetszet szimmetrikus trapéz. Ezt a síkmetszetet **tengelymetszetnek** is nevezzük.



FELADAT

1.

Egy szabályos négyoldalú gúla magassága 8 dm, alapélének hossza 5 cm. A gúlát a gúla csúcsától 2 dm távolságban az alaplappal párhuzamos síkkal elmeteszszük.

Milyen hosszú a keletkezett csonkakúla alapéle, fedőéle, magassága?

2.

Egy szimmetrikus trapéz egyik alapjának hossza 16 cm, másik alapjának hossza 10 cm. Az egyik alapon fekvő két szög nagysága 30° . Jellemezd a trapéz szimmetriatengelye körüli forgatással kapott csonkakúpot!

Milyen hosszú a csonkakúp

- alapkörének sugara;
- fedőkörének sugara;
- testmagassága;
- alkotója?

3.

A csokoládék alakja rendkívül változatos, szinte minden tanult test alakjának megfelelő megtalálható közöttük. Egy kézműves csokiboltban árusított, csonkakúp alakú bonbon alapkörének átmérője 3,3 cm hosszú, fedőkörének átmérője és az alkotójának hossza ugyancsak 1,5 cm. Milyen magas díszdobozban helyezhető el egymás fölött két rétegben sok ilyen bonbon (ha az elválasztó réteg olyan vékony selyempapír, hogy annak a vastagságát nem kell figyelembe venni)?



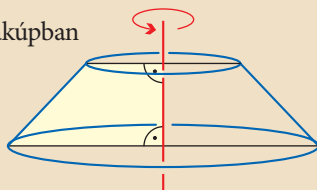
HÁZI FELADAT

1.

Egy derékszögű trapézt megforgatunk a derékszögű szára körül. Jellemezd a forgatással kapott csonkakúpot, ha tudjuk, hogy a trapéz alapjainak hossza 16 cm, valamint 11 cm, a hosszabb szár pedig 12 cm hosszú.

Milyen hosszú a csonkakúpban

- az alapkör sugara;
- a fedőkör sugara;
- a testmagasság;
- az alkotó?



2.

Egy szabályos négyoldalú gúla magassága 20 cm, alapélének hossza 6 cm. A gúlát a gúla alaplajától 2 cm távolságban, az alaplappal párhuzamos síkkal elmeteszszük.

Milyen hosszú a keletkezett csonkakúla alapéle, fedőéle, magassága?

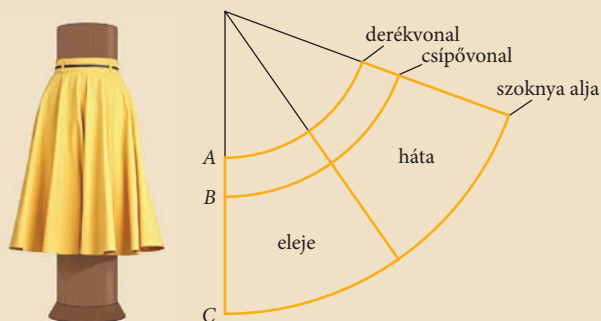
3.

Egy internetes ruhaportálon az egyik eladó egy henger alakú állványon helyezte el az eladásra kínált A vonalú szoknyáját, és az állvány hengerének átmérőjét (23 cm) adta meg.

Mellékelte a szoknya szabásmintáját is, amely két azonos méretezésű körgyűrűcikkből áll.

A leírásban megadta, hogy a szoknya derékvonalának és csípővonalának távolsága (AB szakasz hossza) 20 cm, a szoknya hossza (AC szakasz hossza) 80 cm, valamint csípővonalának teljes hossza 91 cm.

- Mekkora a derékbősége annak a lánynak, aki nek éppen jó méretű a szoknya?
- Mekkora sugarú körből lehet kivágni a szoknyához szükséges körcikkeket?
- Milyen hosszú a szoknya aljának vonala?

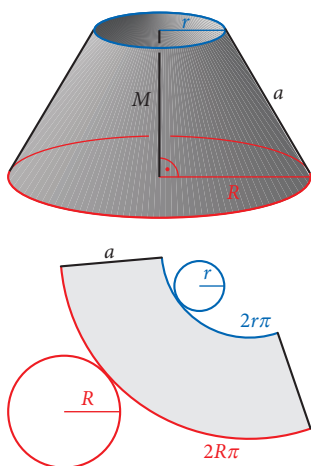


BEVEZETŐ

Szoty kutusnak védőgallért kell viselnie néhány napig, hogy ne rághassa le a kötést, amelyet az állatorvos tett a lábára. A védőgallér alakja olyan, mint egy lámpaernyő, egy csonkakúp palástja.



ELMÉLET



A csonkagúla és a forgáskúpából származtatott csonkakúp felszíne az alaplapp, a fedőlap és a palást területének összege:

$$A = T_{\text{alaplapp}} + t_{\text{fedőlap}} + T_{\text{palást}}$$

A csonkakúp hálója két körlepből és a kiterített palástból áll. A palást egy körgyűrűcikk. Legyen a csonkakúp alapkörének sugara R , a fedőkörének sugara r , és az alkotója a hosszúságú.

Bebizonyítható, hogy egy körgyűrűcikk területét megadja a határoló körívek hossza számtani közepének és a körgyűrű szélességének a szorzata:

$$T_{\text{palást}} = \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot a, \text{ ami egyszerűsítés után: } T_{\text{palást}} = (R + r)\pi \cdot a$$

Így az egyenes csonkakúp felszíne:

$$A_{\text{cs.k.}} = R^2\pi + r^2\pi + (R + r)\pi \cdot a = \pi[R^2 + r^2 + (R + r) \cdot a]$$

Megjegyzés:

1. A palást területének kiszámítási módja nagyon hasonlít a trapéz területképletéhez (a két alap hosszának számtani közepét megszorozzuk a trapéz magasságával).
2. A szabályos n oldalú csonkagúla hálója két n oldalú szabályos sokszögből és a kiterített palástból áll. A palástot n darab egymással egybevágó szimmetrikus trapéz alkotja. A felszín: $A = T + t + n \cdot T_{\text{trapéz}}$

Ha a csonkagúla szabályos 4 oldalú, az alaplapp éle a , a fedőlap éle b hosszúságú, és az oldallapp magassága m , akkor az egyenes csonkagúla

$$\text{felszíne: } A_{\text{szabályos négyoldalú cs.g.}} = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot m,$$

$$\text{egyszerűbben: } A_{\text{szabályos négyoldalú cs.g.}} = a^2 + b^2 + 2(a+b) \cdot m.$$

$$A_{\text{cs.k.}} = \pi[R^2 + r^2 + (R + r) \cdot a]$$

$$A_{\text{szabályos négyoldalú cs.g.}} = a^2 + b^2 + 2(a+b) \cdot m$$

FELADAT

1. (Javasoljuk páros munkában végezni.)

Két barát, Antal és Bandi terveket készít Szoty kutus védőgallérjának elkészítéséhez. Először megméri, hogy milyen hosszú a kutus nyaka körül a pánt, amihez a gallért rögzítik. Ezt 47 cm-nek találják, ami azt jelenti, hogy a csonkakúp fedőkörének sugara $\frac{47}{2\pi} \approx 7,5$ cm.

Úgy gondolják, ahhoz, hogy a fejét tudja valamennyire mozgatni, az alapkör átmérőjének 35 cm-nek kell lennie, és kb. 20 cm széles gallér elég ahhoz, hogy a kötéséhez ne férjen hozzá.

Ezek után Antal terve a következő: az egyszerűség kedvéért felvázol egy 35 cm-es oldalhosszú szabályos háromszöget. Ha ezt megforgatja az egyik szimmetriatengelye körül, egy forgáskúpot kap.

Ebből levág egy 7,5 cm alapkör sugarú kis kúpot, és a megmaradt egyenes csonkakúp palástjából lesz Szotyí gallérja. Vajon mekkora a gallér területe?

a) Indokold, hogy az ábrán szereplő adatok (15 cm és 20 cm) helyesek!

b) Mi a hasonlóság aránya a levágott kis kúp és a teljes kúp között?

Ezek után Antal felvázolja a teljes kúp palástját, és szétvágja két részre: a kis kúp és a csonkakúp palástjára.

c) Készítsd el te is a palást vázlatát, és számítsd ki, hányad része a kis kúp palástja a teljes palásznak!

d) Hányad része a csonkakúp palástja a teljes palásznak?

Ezután Antal kiszámítja a teljes kúp palástjának a területét, amiből könnyen megkapja a csonkakúp palástjának a területét.

e) Mekkora Szotyí gallérjának a területe?

Készítsd el te is Antal vázlatrajzait, és végezd el a számításait!

Bandi terve a következő: felvázol egy 35 cm sugarú félkört.

a) Mekkora lesz ennek a félkörívnek a hossza?

b) Mekkora sugarú, vele koncentrikus félkört vágjon ki belőle, hogy annak az ívhossza megegyezzen a csonkakúp fedőkörének kerületével?

A megmaradt körgyűrűcikkéből csonkakúpot formál.

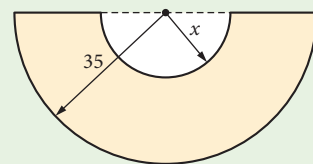
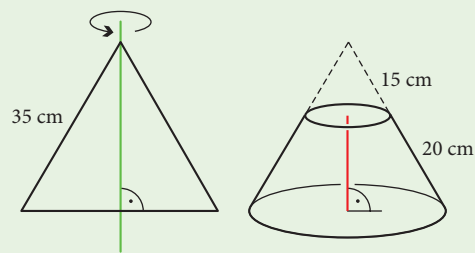
c) Mekkora a keletkezett csonkakúp alapkörének és fedőkörének a sugara, mekkorák az alkotók?

d) Mekkora a nagyobbik félkör, és mekkora a kisebbik félkör területe?

e) Mekkora Szotyí gallérjának (vagyis a csonkakúp palástjának) a területe?

Készíts vázlatrajzokat Bandi elgondolásához, és végezd el a számításait!

Hasonlítsd össze a két fiú számításainak eredményeit!



2.

Egy szabályos négyoldalú csonkagúla felszíne 274 cm^2 . Az alapél hossza 11 cm, a fedőél hossza 5 cm. Mekkora a csonkagúla oldallapjai magasságának és oldalélének hossza? Mekkora szöget zár be az oldallap az alaplappal?

HÁZI FELADAT

1.

A következő táblázat három egyenes csonkakúp néhány adatát tartalmazza. R az alapkör sugarának, r a fedőkör sugarának, a az alkotóknak a hosszát jelöli cm-ben. Az alapkör területe T , a fedőkör területe t , a palást területe P , a csonkakúp felszíne $A \text{ cm}^2$ -ben.

	R	r	a	T	t	P	A
I.	12	6	10				
II.	12	3	10				
III.	6,15	4,76	3,11				

a) Töltsd ki a táblázat üres celláit!

b) Határozd meg a táblázatban megadott csonkakúpok magasságát és térfogatát!

2.

Egy szabályos négyoldalú csonkagúla felszíne 914 cm^2 . Az alapél hossza 17 cm, az oldallapjai magasságának hossza 12 cm. Határozd meg a fedőél hosszát, az oldalél és az alaplap hajlásszögét!

BEVEZETŐ

A franciaországi Valençay (ejtsd válanszé) nevű kecskesajt csonkagúla alakú. Egy legenda szerint ennek a formának „történelmi magyarázata” van. Napóleon – kudarcba fulladt egyiptomi hadjáratából visszatérve Valençay városába – állítólag annyira feldühödött az akkor még piramis formájú sajt láttán, hogy egy kardcsapással levágta a tetejét. Az ilyen módon „megcsonkított” formát a mai napig őrzi ez a sajt.



KIDOLGOZOTT FELADAT

A bevezetőben említett sajt alakja a „napóleoni vágás” előtt szabályos négyoldalú gúla volt, amelynek – tegyük fel, hogy – alapéle 4 cm, oldaléle pedig 7 cm hosszú volt. Az alaplapjával párhuzamos vágással keletkező kisebb gúla magassága az eredeti gúla magasságának 60%-a. A gúla másik része egy csonkagúla. Számítsd ki a csonkagúla térfogatát!

Megoldás

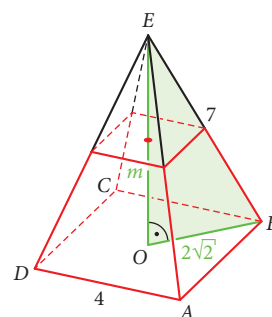
A lemetezett kisebb gúla középpontosan hasonló az eredeti gúlához. A hasonlóság aránya

$$k = 0,6, \text{ ezért a térfogatok aránya: } \frac{V_{\text{kicsi}}}{V_{\text{nagy}}} = k^3 = 0,6^3 = 0,216.$$

A csonkagúla térfogatát megkapjuk, ha az eredeti gúla térfogatából levonjuk a levágott gúla térfogatát: $V_{\text{csonka}} = V_{\text{nagy}} - V_{\text{kicsi}} = V_{\text{nagy}} - 0,216 \cdot V_{\text{nagy}} = 0,784 \cdot V_{\text{nagy}}$

Az eredeti „nagy” gúla magasságát az ábra szerint Pitagorasz-tétellel számolhatjuk: $M = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{41} \approx 6,4 \text{ (cm)}.$

A nagy gúla térfogata: $V_{\text{nagy}} = \frac{16 \cdot 6,4}{3} = 34,1 \text{ (cm}^3\text{)}.$ A csonkagúla térfogata: $V_{\text{csonka}} = 0,784 \cdot 34,1 = 26,7 \text{ cm}^3.$



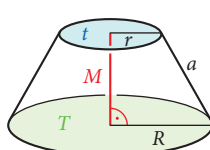
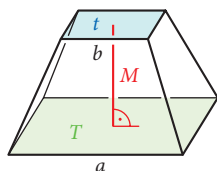
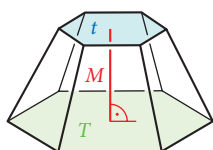
ELMÉLET

1. A csonkagúla / csonkakúp térfogata kiszámításának egyik módja: az eredeti gúla/kúp és a lemetezett, hozzá hasonló gúla/kúp térfogatának különbsége.
2. Bebizonyítható, hogy ha egy csonkagúla / csonkakúp alaplapjának területe T , fedőlapjának területe t , magassága pedig M , akkor a térfogata:

$$V_{\text{csonka}} = \frac{M}{3} \cdot (T + \sqrt{T \cdot t} + t)$$

Egy szabályos négyoldalú csonkagúla esetén, ha az alaplap éle a , a fedőlap éle b hosszúságú, és a test magassága M , akkor az egyenes csonkagúla térfogata:

$$V_{\text{cs.g.}} = \frac{M}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2)$$



Ha a csonkakúp alapkörének sugara R , a fedőkörének sugara r , és a test magassága M hosszúságú, akkor a csonkakúp térfogata:

$$V_{\text{cs.k.}} = \frac{M}{3} \cdot \pi(R^2 + Rr + r^2)$$

$$V_{\text{csonka}} = \frac{M}{3} \cdot (T + \sqrt{T \cdot t} + t)$$

$$V_{\text{cs.k.}} = \frac{M}{3} \cdot \pi(R^2 + Rr + r^2)$$

FELADAT

- 1.** Egy szabályos négyoldalú gúla magassága 8 cm, az oldallapjai pedig 45° -os szöget zárnak be az alaplap síkjával. Ebből a gúlából – egy, az alaplapjával párhuzamos síkkal – levágunk egy 6 cm magas gúlát.

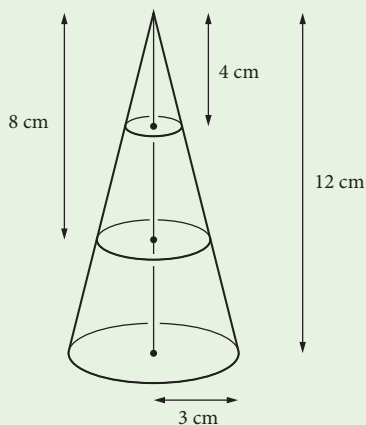
Számítsd ki

- az eredeti és a levágott gúla alaplapjának területét;
- az eredeti és a levágott gúla térfogatát, valamint a keletkező csonkagúla térfogatát is;
- a levágott gúla és a megmaradt csonkagúla felületét!

- 2.** Egy szabályos négyoldalú csonkagúla alaplapja 12 cm oldalú négyzet, fedőlapja 8 cm oldalú négyzet, magassága 6 cm.

- Számítsd ki a csonkagúla kiegészítő gúlájának magasságát!
- Számítsd ki a csonkagúla térfogatát!

- 3.** Egy forgáskúp alapkörének sugara 3 cm, magassága 12 cm. A kúp csúcsától 4, illetve 8 cm távolságban elmetsszük a kúpot az alaplapjával párhuzamos két síkkal. Így egy kis kúp és két csonkakúp keletkezik. Számítsd ki mindhárom test térfogatát!



HÁZI FELADAT

- 1.** Egy szabályos négyoldalú gúla oldalélei 10 cm hosszúak, az oldalélek az alaplap síkjával 52° -os szöget zárnak be.

- Számítsd ki a gúla magasságát és az alapélének hosszát!
- Mekkora térfogatú részekre vágja a gúlát az a sík, amelyik párhuzamos az alaplapjával, és attól 2 cm távolságra van?

- 2.** Egy egyenes csonkakúp alapkörének sugara 10 cm, fedőkörének sugara 4 cm, magassága 5 cm.

- Milyen magas az a kúp, amelyből ez a csonkakúp származik?
- Számítsd ki a kiegészítő kúp és a csonkakúp térfogatát!

- 3.** Van olyan zselés cukorka, amely közelítőleg csonkakúp alakú. Egy szem cukorka alaplapja 310 mm^2 , fedőlapja 180 mm^2 területű síkidom, a magassága 17 mm hosszú.

- Számítsd ki egy darab zselés cukorka térfogatát!
- Számítsd ki a zselé sűrűségét, ha egy 10 dkg-os zacskóban 16 darab cukorka van!



RÁADÁS

„Az érettségi vizsgálat tételei az 1894–95. iskolai év végén. Kecskemét. Ev. ref. főgymnásium. (Csabai Imre)

Valamely csonka gúla alapjai szabályos nyolcszögek; a nagyobb alaplap oldaltávola $r = 72 \text{ dm}$, az oldallapok hajlásszöge [az alaplaphoz] $\alpha = 75^\circ$. a csonka gúla magassága $m = 96 \text{ dm}$ – számítsák ki a gúla felülete és tömörsége [= térfogata].”

(Forrás: KöMaL 1896. február, 97. oldal)

FELADAT

- 1.** A Rio de Janeiro-i Szent Sebestyén-székesegyház csonkakúp alakú építmény, alapköre 96 méter átmérőjű, magassága 75 méter, az alkotók 65° -os szöget zárnak be a vízszintes síkkal.

- a) Készíts ábrát!
Rajzold le a csonkakúp síkmetszetét!
- b) Mekkora a fedőkör átmérője?
- c) Hány köbméter a csonkakúp térfogata?
- d) Hány négyzetméter a csonkakúp palástjának területe?



- 2.** Egy fából készült, 24 cm magas szabályos gúla alaplapja 14 cm-es oldalú háromszög. Ezt a gúlát az alappal párhuzamos síkokkal három egyenlő magasságú részre vágjuk.

- a) Hányszor akkora az egyes csonkakúpok térfogata, mint a kis gúláé?
- b) Mekkora a kis gúla térfogata?
- c) Mekkora az egyes csonkakúpok térfogata?

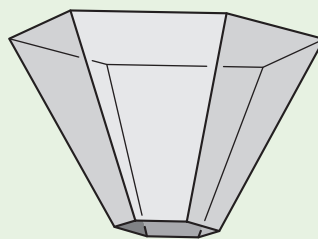
- 3.** Egy derékszögű trapéz alapjai 9 cm és 6 cm, a hosszabbik szára 10 cm hosszú.

- a) A trapézt megforgatjuk a derékszögű szár körül. Mekkora a létrejött forgástest felszíne és térfogata?
- b) A trapézt megforgatjuk a hosszabbik alap körül. Mekkora a létrejött forgástest felszíne és térfogata?

- 4.** (Érettségi feladat, 2015)

Egy műanyag termékeket gyártó üzemben szabályos hatoldalú csonkakúla alakú, felül nyitott virágtartó dobozokat készítenek egy kertészet számára. A csonkakúla alaplapja 13 cm oldalú szabályos hatszög, fedőlapja 7 cm oldalú szabályos hatszög, az oldalélei 8 cm hosszúak.

Egy műanyagöntő gép 1 kg alapanyagból (a virágtartó doboz falának megfelelő anyagvastagság mellett) $0,93 \text{ m}^2$ felületet képes készíteni. Számítsd ki, hány virágtartó doboz készíthető 1 kg alapanyagból!



- 5.** Egy fagyitölcsér alakja olyan testhez hasonló, amely két egymáshoz illesztett csonkakúpból áll. Az összeillesztésnél a körlapok (egy fedőlap és egy alappal) egyenlő területűek. A tölsér legalsó része 4 cm széles, a két csonkakúp összeillesztésénél 5 cm széles, a legfelső rész szélessége pedig 6 cm. A tölsér teljes magassága 7 cm.

Mekkora az egyes részek magassága, ha mindkét részbe ugyanannyi csokikrémet lehet tölteni?



HÁZI FELADAT

1. Egy szabályos négyoldalú csonkakúp alapélei 63 mm, fedőélei 27 mm hosszúak. Az oldalélek 60° -os szöget alkotnak az alaplap síkjával.

- Készíts ábrát a csonkakúp azon síkmetszetéről, mely két szemközti oldalélre illeszkedik!
- Milyen hosszúak a síkmetszetet alkotó húrtrapéz párhuzamos oldalai?
- Mekkora a csonkakúp magassága?
- Számítsd ki a csonkakúp térfogatát!

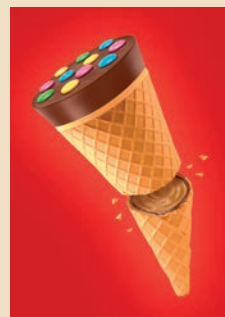
2. Gabi kíváncsi volt a csonkakúp alakú, asztali sótarató térfogatára, ezért lemérte annak néhány adatát. Megtudta, hogy az alaplap kerülete 9,4 cm, a fedőlap kerülete 6,3 cm, és a csonkakúp magassága 4,5 cm. Ezekből már könnyen ki tudta számolni, hogy az 1 kg tömegű, kb. $2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ sűrűségű konyhasóból hányszor tudja teletölteni a tartót. Végezd el te is a számításokat!



3. Két darab margarinkockát szeretnénk áttenni egy üres margarinos csészébe. A kockák oldalélei körülbelül 63 mm hosszúak, a csésze alapkörének átmérője 10 cm, fedőkörének átmérője 11,4 cm, alkotója 5,6 cm hosszú.

Vajon sikerül-e az „átdarabolás”? Ellenőrizd a megfelelő térfogatok összehasonlításával!

4. Dani és Domi osztozkodik egy olyan forgáskúp alakú tölcséres édességen, amelynek alaplapja 7 cm átmérőjű, a magassága pedig 15 cm. Az édesség teteje étcsokival van bevonva, de Dani azt nem kedveli, ezért nem a tengely mentén fogják elvágni a tölcsért.



Dani azt javasolja, hogy úgy osztozzanak, hogy a magasság felezőpontján átmenő, az alaplappal párhuzamos síkkal vágják el a finomságot.

Domí szerint ez nem lenne igazságos, ezért számításokba kezd.

- Milyen arányban osztoznának, ha Dani javaslata szerint darabolnák az édességet?
- Az alaplaptól számítva milyen távolságban kell elvágniuk az édességet az alaplap síkjával párhuzamosan ahhoz, hogy megfelezzék az édességet (annak a térfogatát)?

RÁADÁS

Szabályos testek azok a testek, amelyek rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal: minden élük egyenlő hosszú; minden lapjuk egybevágó szabályos sokszög; a csúcsokból ugyanannyi él indul ki, és a szomszédos élek szöge mindenhol ugyanakkora. Meglepő módon (szemben azzal, hogy végtelen sokféle szabályos sokszög létezik) mindössze *ötféle* szabályos test van. A szabályos testek elnevezéseit és adatait tartalmazza az alábbi táblázat.



	Tetraéder	Hexaéder (kocka)	Oktaéder	Dodekaéder	Ikozaéder
A lapok alakja	szabályos háromszög	négyzet	szabályos háromszög	szabályos ötszög	szabályos háromszög
A lapok száma	4	6	8	12	20
A csúcsok száma	4	8	6	20	12
Az élek száma	6	12	12	30	30

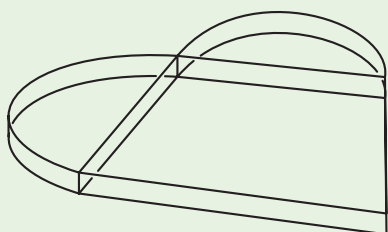
FELADAT

- 1.** Egy kiállításon régi, díszes kapuk másolatát akarják bemutatni. Az egyik kapu mellett kétoldalt eredetileg egy-egy kőből készült gömb és egy-egy forgáskúp helyezkedett el. A kiállításra ezek fenyőfából készülnek. A gömbök átmérője 4,2 dm, a kúpok alapkörének átmérője ugyanennyi, magasságuk 5,4 dm.

- a)** Mennyi e négy tárgy együttes tömege, ha a fenyőfa sűrűsége $0,43 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?
- b)** A két gömböt és a kúpok palástját víztaszító festékkel vonják be. Mekkora a befestendő teljes felület?

- 2.** Egy születésnap tortát készítették egy négyzet alapú egyenes hasárból és egy kettévágott forgáshengerből illesztették össze. A forgáshenger alapköre átmérőjének hossza egyenlő a négyzet oldalhosszával. Becsüljük meg, hány embert kínálhatunk meg a tortával, ha tudjuk a következőket:

- a négyzet alapú részt egy 20 cm oldalhosszúságú formában sütötték;
- a torta magassága 8 cm;
- egy személyre egy átlagos, téglatest alakú, körülbelül $3 \times 8 \times 5$ cm-es szeletnek megfelelő mennyiséggel számolunk!



- 3.** (Érettségi feladat, 2007)

Egy gyertyagyárban sokféle színű, formájú és méretű gyertyát készítenek. A folyékony, felhevített viasz különböző formákba öntik. Az öntőhelyek egyikén négyzet alapú, egyenes gúlát öntenek, melynek alapéle 5 cm, oldaléle 8 cm hosszú.

- a)** Számítsd ki ennek a gúla alakú gyertyának a térfogatát! (Az eredményt cm^3 -ben, egészre kerekítve add meg!)

- b)** Ezen az öntőhelyen az egyik műszakban 130 darab ilyen gyertyát gyártanak.

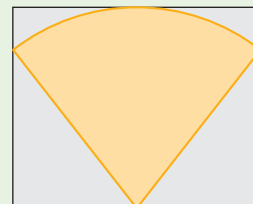
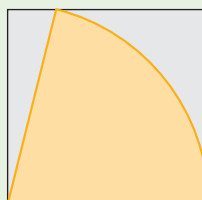
Hány liter viaszra van szükség, ha tudjuk, hogy a felhasznált anyag 6%-a veszteség? (Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve add meg!)

- c)** A gúla alakú gyertyákat egyenként díszdobozba csomagolják. Hány cm^2 papír szükséges 40 darab díszdoboz elkészítéséhez, ha egy doboz papírszükséglete a gúla felszínének 136%-a?

- 4.** Forgáskúp alakú farsangi kalapot szeretnénk készíteni. A kalap 40 cm magas lesz, és „fejkörfogata” (az alap kerülete) 54 cm.

- a)** Hány cm^2 karton szükséges az elkészítéséhez?
- b)** Az ábrán a kalaphoz szükséges körlelap két lehetséges kivágási módját ábrázoljuk.

Milyen széles és milyen magas téglalap alakú kartonlap szükséges az egyik, illetve a másik esetben?



- 5.** Egymásra merőleges vagy egymással ferde szögben találkozó tengelyek esetében az erőátvitel egy lehetséges módja a kúpos fogaskerekek alkalmazása. Az ábrán látható fogaskerek modellezhetők olyan csonkakúpokkal, amelyek alapköre 1,5 cm, fedőkörre 1 cm sugarú. Mekkora az egyes fogaskereken a kopásnak kitett felület (a fogak külső felülete), ha az a modellként használt csonkakúp palástjának körülbelül 40%-a, és az alkotó az alapkörrel

- a)** 45° -os;
- b)** 50° -os szöget zár be?



HÁZI FELADAT

1.

Egy homokkúp alakja jó közelítéssel 80 cm magasságú, 120° nyílásszögű forgáskúp.

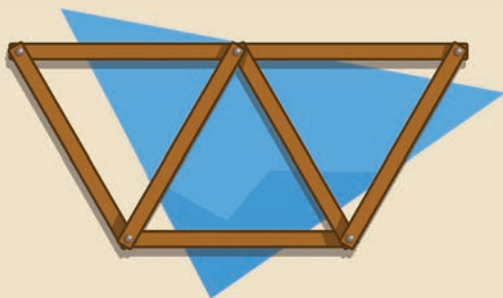
- Mennyi a homokkúp térfogata?
- Hányszor kell fordulnia egy teherautónak, ha minden alkalommal ugyanannyi homokot tud szállítani, mint amennyi ebben a homokkúpban van, és az építkezésen 12 m^3 homok szükséges?



2.

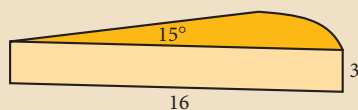
Egy vízelvezető árok alját és oldalait a kiásás után 30 cm oldalhosszúságú, négyzet alakú kőlapokkal szeretnék burkolni, ezért ásás közben az árok keresztmetszetét időről időre ellenőrzik. Ehhez az ábrán látható fából készült keretet használják, melyet egy darab 60 cm és öt darab 30 cm hosszú falécből állítottak össze.

- Hány köbméter földet kell kiásni a 24 m hosszú árok elkészítéséhez?
- Hány kőlapra van szükség a tervezett burkoláshoz?



3.

Egy 3 cm vastagságú, 16 cm sugarú, forgáshenger alakú sajttömböt 15° -os középponti szögű körívek mentén 200 gramm tömegű darabokra vágnak szét.



- Mekkora tömegű volt a teljes sajttömb?

- Mekkora a 200 gramm tömegű darab térfogata?
- A 200 gramm tömegű darab csomagolásánál a teljes felszínre még 25%-ot rá kell számítani. Mekkora területű csomagolóanyag kell a becsomagolásához?

4.

A víztároló középső része egy 6 m átmérőjű, 8 m magasságú forgáshenger, alsó része félgömb, felső része forgáskúp alakú.

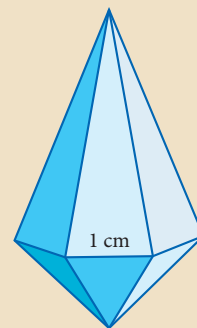
A kúp magassága 3 m.

- Mekkora a tartály teljes (bruttó) térfogata?
- Mekkora felületet kell bevonni a tartály külső felületének festésekor?



5.

Kristálycsillárokon sokszor látható olyan üvegdísz, amelynek alakja két talpával egymásnak fordított, azonos alapú, de eltérő magasságú szabályos gúla. Egy ilyen dísz két gúlájának közös alapja 1 cm oldalú hatszög, a gúlák magassága pedig 2, illetve 5 cm. Milyen nehéz egy-egy ilyen üvegdísz, ha tudjuk, hogy a készítéshez használt üveg sűrűsége $3,1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$?



FELADAT

1. Az Antarktika jéggel borított területe kb. 13,8 millió km^2 , a jégréteg átlagos vastagsága 2200 méter. Hány köbméter jég borítja ezt a kontinenst? Ez a térfogat hány százaléka a Föld teljes vízkészletének, ami kb. 1,46 milliárd km^3 ?

2. Egy négyzetes kőoszlop alapélei 12 dm-esek, a magassága 18 dm.

a) Mekkora távolságra van egymástól a kőoszlop két legtávolabbi csúcsa?

Az oszlopból kifaragják a lehető legnagyobb térfogatú szabályos négyoldalú gúlát.

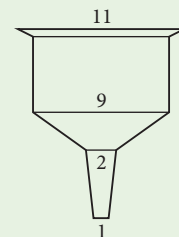
b) Hogy aránylik egymáshoz a gúla és az oszlop térfogata?

c) Mekkora a gúla oldalélei?

d) Mekkora a gúla egy oldalélének az alapsíkkal alkotott szöge?

e) Mekkora a gúla egy oldallapjának az alapsíkkal alkotott szöge?

3. Az ábrán egy forgásszimmetrikus tölcsér keresztmetszete látható. A különböző átmérők felülről lefelé haladva: 11 cm, 9 cm, 2 cm, 1 cm; az egyes részek magassága rendre: 0,5 cm (felső, csonkakúp alakú rész), 5 cm (hengeres rész), 2,5 cm (csonkakúp alakú rész) és 4,5 cm (csonkakúp alakú kifolyórész). Tülfolyik-e a tölcsér felső peremén a málnaszörp, ha a nyílást alul befogjuk, és a tölcsérbe fél liter szörpöt töltünk?



4. Egy kúp palástja síkba terítve egy 210° középponti szögű, 18 cm sugarú körcikk.

a) Mekkora a kúp felszíne?

b) Mekkora a kúp alkotói, magassága és térfogata?

c) Mekkora a kúp nyílásszöge?

TUDÁSPRÓBA I.

1. Egy ládika téglatest alakú, az alapélei 3,2 dm és 3,7 dm, az oldalélei 6,8 dm hosszúak.

a) Hány olyan 6,7 dm hosszú fémálca fér el benne, amelynek az alapja 15 mm-es oldalú négyzet?

b) Elfér-e a ládikában egy 8,3 dm hosszúságú, nagyon vékony fémálca?

2. Egy 18 cm átmérőjű fazékban 12 cm magasan áll a leves.

a) Hány liter leves van a fazékban?

b) Hány adag levest lehet kimerni egy 8 cm átmérőjű, félgömb alakú merőkanállal?

3. Egy forgáshenger alapkörének az átmérője 72 mm, a térfogata pedig ugyanakkora, mint a 72 mm-es átmérőjű gömb térfogata. Milyen magas ez a henger?

4. 80 cm hosszúságúra darabolt, 10 cm átmérőjű fahengerekből olyan cölöpöket esztergálnak, amelyeknek a hengeres része ugyancsak 10 cm átmérőjű (ábra). Egy cölöp hossza 78 cm, a csonkakúp alakú rész 5 cm magas, a henger alakú rész 60 cm hosszú. A cölöp csonkakúp alakú végén lévő, kör alakú rész 6 cm átmérőjű. Hány százalék hulladék keletkezik a cölöpök gyártásakor?



5.

A képen látható „felfordított” szabályos négyoldalú gúla alakú szökőkút alapélei 40 centiméter hosszúak, magassága 70 cm.

- Hány dm^2 rozsdamentes acéllemez borítja a szökőkút belső felületét?
- Hány liter vizet tartalmaz a gúla, ha teljesen megtelik?
- Mekkora szöget zárnak be a gúla élei a vízszintes síkkal?



TUDÁSPRÓBA II.

1.

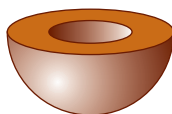
- Becsomagolható-e egy 53 cm hosszúra összecusukható horgászbót egy $30 \times 40 \times 20$ cm-es ládikába?
- Egy négyoldalú gúla alaplappja megegyezik a $30 \times 40 \times 20$ cm-es téglatest egyik oldallapjával, az ezzel szemkötti oldallapon van a gúla csúcsa. Mekkora a gúla térfogata?

2.

Egy forgáskúp alapkörének az átmérője 54 mm, a térfogata ugyanakkora, mint az 54 mm-es átmérőjű gömb térfogata. Milyen magas ez a kúp?

3.

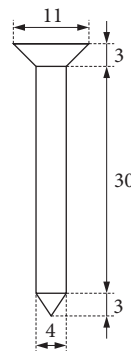
Egy 22 cm-es átmérőjű fa félgömbből kivájtak egy feleakkora átmérőjű félgömböt.



- Mennyi víz fér az így kifaragott tálba?
- Mekkora felületet kell befesteni, ha a tálat teljesen be akarják vonni műanyag alapú festékkel?

4.

Egy nyerscsavar (még nincs rajta menet, és a csavarfejen sincs bemélyedés) hosszirányú keresztmetszetét és mm-ben megadott méreteit mutatja az ábra. Mekkora tömegű nyersanyagra van szükség $1,5 \cdot 10^6$ darab nyerscsavar előállításához, ha a gyártás során 17,8% veszteség keletkezik, és a csavar anyagának sűrűsége $8700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?



5.

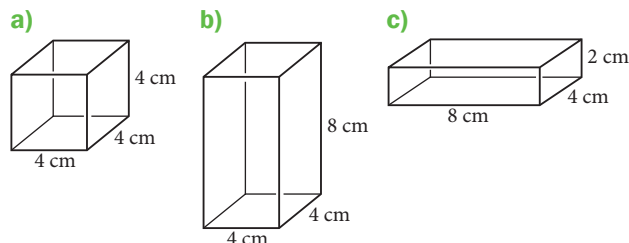
A párizsi Louvre múzeum 1989-ben átadott új főbejárata egy olyan üvegpiramis, amelynek alapja 35 méter oldalhosszúságú négyzet, magassága pedig 20,6 méter.

- Mekkora szöget zárnak be a vízszintes síkkal a piramis oldalélei?
- Mekkora szöget zárnak be a vízszintes síkkal a piramis oldallapjai?
- Hány m^2 az üvegfelület nagysága? (Az üveglapokat tartó keretek területétől tekintsünk el!)

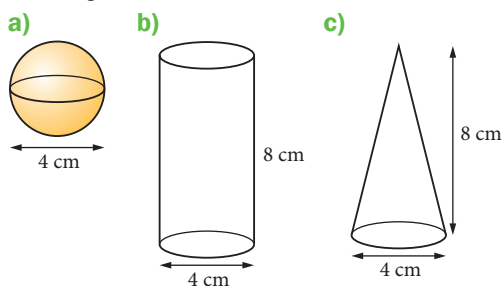


Témazáró feladatgyűjtemény

- 1.** Építőkockák méreteit látod az ábrán. Számold ki a felszínüket és a térfogatukat!



- 2.** Ennek az építőjátéknak az elemei forgásszimmetrikusak. Számold ki, mennyi az egyes elemek felszíne és térfogata!



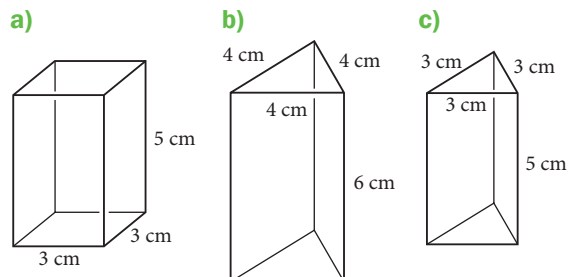
- 3.** Egy bolygó sugara 2440 km .
 a) Milyen hosszú ezen a bolygón az egyenlítő?
 b) Mekkora a bolygó felszíne és térfogata?

- 4.** Egy $2\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ -es, téglatest alakú gyurmából
 a) egy nagy gömböt formázunk. Mekkora a gömb sugara és felszíne?
 b) öt egybevágó, kisebb gömböt formázunk. Mekkora egy kis gömb térfogata és sugara? Mekkora összesen az 5 gömb felszíne?

- 5.** Egy $7,2\text{ cm}$ sugarú gömböt félbevágunk a középpontján átmenő egyik síkkal. Mennyi a keletkező részek felszíne és térfogata?

- 6.** Egy gömb alakú gyümölcsben közepén gömb alakú mag van. A mag átmérője $1,4\text{ cm}$, a teljes gyümölcs átmérője $4,2\text{ cm}$.
 a) Hány cm^2 a gyümölcs héja?
 b) Hány cm^3 a gyümölcs húsa, ha a héj vastagságától eltekintünk?

- 7.** Mennyi az ábra szerinti egyenes hasábok felszíne és térfogata?



- 8.** Négyoldalú szabályos gúla alapéle 32 mm , magassága 40 mm .

- a) Mekkora a térfogata?
 b) A gúla tetejéről az alaplappal párhuzamos síkkal levágunk egy 8 mm magasságú kis gúlát. Mekkora a levágott kis gúla és a keletkező csonkagúla térfogata?

- 9.** Egy forgáskúp alapkörének átmérője $6,8\text{ cm}$. Magassága $5,4\text{ cm}$.

- a) Mekkora a térfogata?
 b) Mekkora a felszíne?
 c) Ez a forgáskúp úgy keletkezett, hogy egy egyenlő szárú háromszöget megforgattunk a szimmetriatengelye körül. Mekkora volt a háromszög oldalai?

- 10.** Egy forgáskúp alapkörének átmérője $6,8\text{ cm}$. Magassága $5,4\text{ cm}$. A forgáskúp tetejéről, az alaplappal párhuzamos síkkal levágunk egy $0,9\text{ cm}$ magas kis forgáskúpot.

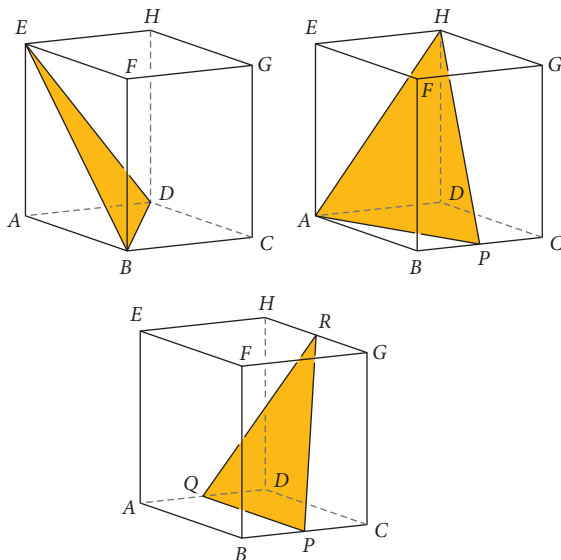
- a) Mekkora a levágott kis kúp térfogata és felszíne?
 b) Mekkora a keletkező csonka kúp térfogata és felszíne?

- 11.** Egy téglatest alaplajának két éle 12 cm és 16 cm , a téglatest testátlója 60° -os szöget zár be az alaplaj síkjával.

- a) Mekkora a téglatest testátlójának hossza?
 b) Mekkora a téglatest ismeretlen hosszúságú éle?
 c) Mekkora szöget zár be egymással két testátló?

12. Az ábrán látható kocka élei 10 cm hosszúak.

- a) Számítsd ki az EBD , APH és QPR háromszögek oldalainak hosszát és szögeinek nagyságát! (P , Q , R pontok a kocka ábra szerinti éleinek felező-pontjai.)



- b) Mekkora szöget zárnak be az EBD és PQR háromszögek síkjai a kocka $ABCD$ alaplapjával?

13. Egy téglatest élhosszúságainak aránya $1 : 2 : 3$. A téglatest cm^2 -ben mért felszínének mérőszáma megegyezik a cm^3 -ben mért térfogat mérőszámával. Határozd meg a téglatest éleinek hosszúságát!

14. Egy négyzet alapú egyenes hasáb testátlója 25 cm, alapéle feleakkora, mint az oldaléle.

- a) Mekkora szöget zár be a testátló a hasáb élével?
b) Mekkora szöget zár be a testátló a testet határoló lapok síkjaival?
c) Mekkora távolságra vannak a testátlótól a hasáb csúcsai?

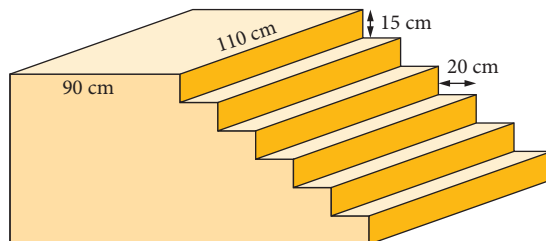
15. A 8 cm élű kocka csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott csúcsok közötti távolság $8\sqrt{2}$ cm?

16. Kocka alakú, 10 mm élhosszúságú kis kockacukrokból 135 db kerül egy téglatest alakú dobozba.

- a) Milyen méretű dobozokba csomagolhatják a kockacukrot, ha a doboznak nincs 3 cm-nél kisebb éle?
b) Melyik doboz elkészítése igényel kevesebb csomagolóanyagot?

17. Egy szabályos nyolcszög alapú egyenes hasáb alapéle 6 cm, oldaléle 0,7 dm. Milyen hosszúságú a legrövidebb testátlója? Mekkora szöget zár be a leghosszabb testátló az alaplap síkjával?

18. Egy lakóház bejáratánál a mellékelt ábrán látható lépcsőt akarják kiönteni betonból. Hány m^3 betont kell hozzá keverni?



19. Egy 12 cm magasságú egyenes hasáb alapja egy egyenlő szárú háromszög. A hasáb valamelyik két oldalapjának hajlásszöge 70° , térfogata 360 cm^3 . Mekkora a hasáb alapélei?

20. Egy háromoldalú gúla alaplapjának ismerjük két oldalának hosszát és az általuk közbezárt szög nagyságát: $a = 8 \text{ cm}$, $b = 13 \text{ cm}$, $\gamma = 50^\circ$. A gúla 10 cm-es magasságának talppontja az a oldal felezőpontjában van. Határozd meg a gúla többi élének a hosszát!

21. Egy 20 cm magas egyenes hasáb alaplapja olyan szabályos nyolcszög, amely köré 8 cm sugarú kör írható. Számítsd ki a hasáb felszínét és térfogatát!

22. Egy 9 dm^3 térfogatú szabályos hatoldalú gúla oldaléle az alapsíkkal 72° -os szöget zár be. Milyen hosszúságú az oldaléle? (Gimnáziumi érettségi feladat – 1988)

23. Az egyik húsüzemben olyan hengeres alakú felvágott-rudakat gyártanak, aminek a két vége félgömbben végződik. Egy ilyen rúd teljes hossza 22 cm, keresztmetszete pedig 8 cm átmérőjű kör.



- a) Mekkora egy ilyen rúd térfogata?
b) Mekkora a rajta lévő fólia területe?

24. Egy szabályos ötszög alapú gúla alapéle 5 cm. Ha a gúlát az alaplappal párhuzamos síkkal elmetsszük, a síkmetszet területe harmadrésze az alaplap területének. A metszősík alaplaptól mért távolsága 4 cm. Számítsd ki az eredeti gúla térfogatát és felszínét!

25. Egyenes körhenger alapkörének sugara 5 cm, kiterített palástja pedig olyan téglalap, amelyben az oldalhosszak aránya 2 : 3. Mekkora a henger felszíne és a térfogata?

26. Egy henger alakú sajtkorong 1,2 kg, a korong átmérője 18 cm, magassága 6 cm. Ebből egy 15 dkg-os cikket vágunk le. Mekkora a sajtdarabon lévő piros műanyag fólia területe?



27. Egy henger alakú fadarabot, aminek magassága 30 cm, alapkörének átmérője 21 cm, az alaplappokra merőleges, két egymással párhuzamos síkú vágással három darabra hasítunk. A síkok az alapkör átmérőjét három egyenlő részre osztják. Mekkora a keletkezett fadaraboknak a térfogata és a felszíne?

28. Egy pók egy forgáshenger alakú helyiség mennyezetének pereméről a padló áttellenes pontjába kétféleképpen is eljuthat ugyanakkora úton:

- függőlegesen leereszkedik, majd a padló átmérője mentén folytatja útját, vagy
- végig a paláston halad úgy, hogy a palástot síkba kiterítve útja egy egyenes szakasz.

Számítsd ki a henger magasságának és átmérőjének arányát!

29. Egy forgáskúp nyílásszöge 60° , magassága 10 cm. Mekkora a kiterített palástjának a középponti szöge és a területe?

30. Egy forgáskúp alapkörének sugara 7 cm, alkotója 25 cm hosszú. A kúpot kettévágjuk a csúcsán átmennő, az alaplappra merőleges síkkal. Mekkora a keletkezett részek felszíne és térfogata?

31. Mekkora annak a kúpnak a nyílásszöge, amelynek palástja háromszor akkora területű, mint az alapkör területe?

32. A bábszínházban jelmezeket készítenek egy mesejáték szereplőinek. A királylány ruháját eredetileg egy 8000 cm^2 területű anyagból szabták ki, de a szabásvarrás során 21,5%-os volt az anyagvesztés. Az elkészített ruha csonkakúp-palást alakú, melynek nyakánál mért átmérője 10 cm, a legalján mért átmérője 30 cm. Milyen magas a királylány, ha a ruhagallértól a feje búbjáig mért távolság 30 cm, a ruha aljától a talpáig mért távolság 44 cm?



33. Egy körgyűrű két körének átmérője 204 mm, illetve 30,6 cm. A körgyűrű síkjában, a középpontjából induló két félegyenes 120° -os szöget alkot. Készíts ábrát!

- Mekkora a körgyűrű két részének (a két körgyűrűcikknek) a területe?
- Mindkét körgyűrűcikkből egyenes csonkakúp-palástot készítünk. Mekkora a csonkakúpok alapkörének és fedőkörének a sugara?
- Mekkora a b) feladatban szereplő két csonkakúp magassága és térfogata?

34. Egy egyenes körkúp felszíne 314 cm^2 , a kúp alkotójának és az alapkör sugarának összege 20 cm. Számítsd ki a kúp térfogatát!

35. 1 literes, csonkakúp alakú tejfölöspohár alapkörének (belső) átmérője 9 cm, fedőkörének átmérője 11 cm hosszú. A pohárban 8 dl tejföl van. Milyen magasan áll a tejföl a pohárban?

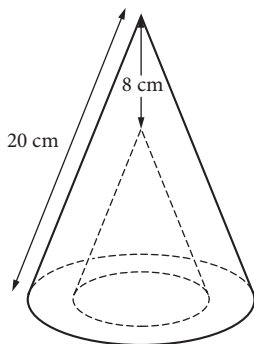
36. Egy 10 cm oldalú szabályos háromszöget megforgatunk az egyik oldalegyenesese körül. Határozd meg az így keletkezett forgástest felszínét és térfogatát!

37.

Egy henger alakú fazék belső átmérője 20 cm, magassága 28 cm. A fazékba hat liter vizet tettünk. Hány darab túrógombócot tehetünk egyszerre a vízbe, ha azt szeretnénk, hogy utána a víz szintje a fazék felső peremétől számítva legalább 2 cm-re legyen? Egy túrógombóc átmérője 4 cm. (A vízbe helyezett túrógombócok teljesen elmerülnek a vízben.)

38.

Az ábrán látható test úgy keletkezett, hogy egy forgáskúpból kivágtak egy kisebb forgáskúpot. A két kúp tengelye egybeesik, nyílásszögük egyenlő, és a kisebb kúp térfogata 27-ed része a nagy kúp térfogatának. A két kúp csúcsának távolsága 8 cm, a nagy kúp alkotója 20 cm. Határozd meg a keletkezett test felszínét!



39.

Milyen távol van a 15 cm sugarú gömb középpontjától az a síkmetszete, amelynek területe $\frac{2}{3}$ része a főkör területének?

40.

Egy 20 cm átmérőjű gömböt három, páronként egymásra merőleges, a gömb középpontján áthaladó síkkal elvágunk. Mennyivel változott meg az így kapott testek együttes felszíne az eredeti gömb felszínéhez képest?

41.

Egy 12 cm élhosszúságú kocka minden csúcsánál levágunk a kockából egy olyan háromoldalú gúlát, amelynek oldalélei a kockaélek 4 cm hosszú darabjai.

- Hány lapja, csúcsa, éle van a visszamaradó testnek?
- Mekkora a megmaradt test térfogata és felszíne? (Szakközépiskolai érettségi feladat – 1988)

42.

Egy recept alapján annyi tésztát gyúrtunk, ami 50 db 3 cm átmérőjű kókuszgolyó elkészítéséhez elegendő. Mi ennél nagyobb, 4 cm átmérőjű golyókat formázunk, és a maradékból is készítünk egy gömböt.

- Hány darab kókuszgolyónk lesz?
- A kókuszreszelék mennyisége, amiben a golyókat megforgatjuk, egyenesen arányos a golyók felszínével. A kisebb méretű (3 cm) golyókhoz szükséges kókuszreszelék hány százalékára lesz szükségünk a nagyobb golyók készítése során?

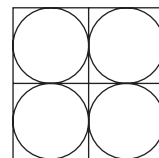
43.

Egy szabályos hatszög alapú gúla alapéle 15 cm, magassága 20 cm. Határozd meg a gúlába írható gömb sugarát!

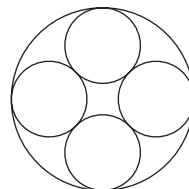
44.

Karácsony előtt egy gyertyakészítő az egyenes körhenger formájú gyertyákat négyessel szeretné dobozolni. Erre többféle lehetőség is kínálkozik:

- téglatest alakú dobozokba;



- henger formájú dobozba csomagolja a gyertyákat. (A dobozokat gyertyákkal együtt felülnézetből ábrázoltuk.)



A gyertyák átmérője 6 cm, magassága 9 cm, és úgy kell a dobozokban elhelyezni őket, hogy ne lötyögjenek.

- A dobozokat kartonpapírból készítik. Melyiknek legkisebb az anyagszükséglete?
- Számold ki, hogy az egyes esetekben a doboz térfogata hány százaléka a gyertyák együttes térfogatának!
- Számold ki, hogy az egyes esetekben a doboz térfogatának hány százaléka üres!

45.

Egy 50 cm^3 térfogatú egyenes csonkakúp alapkörének a sugara 25 mm, fedőkörének sugara 13 mm. Milyen magas a csonkakúp?

46.

„Az írásbeli érettségi vizsgálat tételei az 1892–93. isk. év végén. Esztergom. Szt. Benedekrendi főgymnasium. (Borosay Dávid)

Valamely három oldalú gúla alapjának, mely egy 6,8 m küllőjű [sugarú] körbe van beírva, egyik oldal 13 m. s ezen oldal mellett fekvő egyik szöge $25^\circ 26'$; az oldalélek mindegyike 9 m. A csúcsponttól milyen távolságban kell az alappal párhuzamos síkkal metszenünk a gúlát, hogy azt két egyenlő részre osszuk?” (Forrás: KöMaL 1894. február, 23. oldal)

47.

„Az érettségi vizsgálat tételei az 1894–95. iskola év végén. Kalocsa. Jézus-társasági érseki főgymnasium. (Strobl Antal)

Valamely nyolczoldalú szabályos egyenes gúlának oldalsíkja az alapsíkhöz $60^\circ 32'$ -nyi szög alatt hajlik: mekkora ennek felülete és köbtartalma [térfogata], ha az alap síkja körül leírt kör sugara egyenlő azon gömb sugarával, melynek felülete $380,13 \text{ m}^2$ ” (Forrás: KöMaL 1896. január, 78. oldal)

KIDOLGOZOTT FELADAT

Ha felfelé megyünk egy lépcsőn, és minden lépésnél felfelé lépünk 1 vagy 2 fokot, akkor hányféleképpen juthatunk fel a lépcső második, negyedik, illetve nyolcadik fokára?

Megoldás

Az első lépcsőfokra egyféleképpen léphetünk: ha első lépésben 1 fokot lépünk. A második lépcsőfokra kétféle módon érkezhünk, ha elsőre 2 fokot lépünk, vagy ha elsőre és másodikkra is 1-1 fokot lépünk. Ha a_n -nel jelöljük az n -edik lépcsőfok esetén a lehetőségek számát, akkor $a_1 = 1$ és $a_2 = 2$.

A harmadik lépcsőfokra érkezhünk a második lépcsőfokról egy utolsó 1-es lépéssel vagy az első lépcsőfokról utoljára 2-t lépve. A harmadik lépcsőfokra a lehetőségek száma tehát megegyezik a második és az első lépcsőfokhoz tartozó lehetőségek összegével: $a_3 = a_2 + a_1$; vagyis $a_3 = 2 + 1 = 3$.

A lehetőségek száma eddig így alakult: 1; 2; 3. (Vajon hogyan folytatódik ez a sorozat? ... Óvatosnak kell lennünk a válasszal. Most nem az lesz a folytatás, ami erről az 1; 2; 3 számokat hallva elsőként eszünkbe jut. 🤔)

A negyedik lépcsőfokra érkezhünk a harmadik lépcsőfokról egy utolsó 1-es lépéssel vagy a második lépcsőfokról utoljára 2-t lépve: $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$.

Vegyük észre, hogy minden lépcsőfok esetén, ha $n > 2$, akkor a lehetőségek két jól elkülönülő csoportra bonthatók: az egyik lehetőség az, hogy az utolsó lépésben 1-et, a másik lehetőség az, hogy az utolsó lépésben 2-t lépünk. Általánosan felírható, hogy $n > 2$ esetén $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. A sorozat minden tagja meghatározható az előtte álló két tag segítségével. Ez alapján ki tudjuk tölteni az alábbi táblázatot.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	3	5	8	13	21	34

$a_8 = 34$, a nyolcadik lépcsőfokra tehát 34 különböző módon juthatunk fel.



ELMÉLET

A sorozat fogalma

Sorozatról (vagy számsorozatról) beszélünk, ha valós számoknak egy végtelen sok tagból álló felsorolását adjuk meg. A sorozat olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, képhalmaza pedig a valós számok halmaza. A sorozat az 1-hez a sorozat első tagját rendeli, a 2-höz a sorozat 2. tagját, a 3-hoz a sorozat 3. tagját, és így tovább, az n -hez a sorozat n -edik tagját: $n \mapsto a_n$.

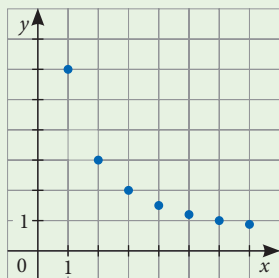
Jelölés: a sorozat jele: $\{a_n\}$, a sorozat tagjai: $a_1, a_2, a_3, \dots$, az n -edik tag: a_n .

$\{a_n\}$	a_1 ;	a_2 ;	a_3 ;	...	a_n ;	...
	1. tag	2. tag	3. tag	...	n -edik tag	...

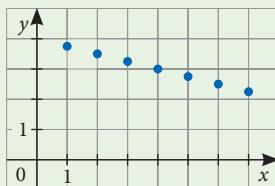
FELADAT

1. A következő grafikonok olyan függvényeket ábrázolnak, amelyek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. Add meg a függvények hozzárendelési szabályait!

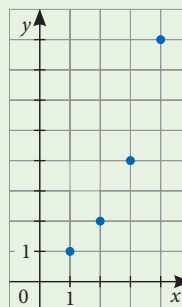
a)



b)



c)



2. Felfelé haladunk egy lépcsőn úgy, hogy 1 vagy 2 fokot léphetünk egyszerre (lásd Kidolgozott feladat).

a) Értelmezd, hogy mit jelent a Kidolgozott feladatban használt jelölésekkel az a_{18} , a_{19} és az $a_{20}!$

b) Annak ismeretében, hogy $a_{18} = 4181$ és $a_{20} = 10\,946$, határozd meg a_{19} és a_{17} értékét!

3. Az $\frac{5}{7}$ tizedes tört alakjában milyen számjegy áll a tizedesvessző utáni 8-adik, 90-edik, illetve a 970-edik helyen?

4. A $\{k_n\}$ sorozat első tagja $k_1 = 0$, minden további tagja $k_n = \binom{n}{2}$.

a) Add meg a sorozat első hat tagját!

b) A következő függvények közül van-e olyan, amelyik megegyezik a $\{k_n\}$ sorozattal, ha $n \in \mathbb{Z}^+$?

$$f(n) = \frac{n}{2}$$

$$g(n) = \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$h(n) = \frac{n!}{2}$$

$$i(n) = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$j(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

HÁZI FELADAT

1. Hajni vasárnap kitalált egy jó viccet, hétfőn elmondta három barátnőjének. Kedden mindegyikük elmondta három-három másik lánynak, ezután mindenki, aki ismerte a viccet, a következő napon továbbmondta három olyan személynek, aki még nem hallotta. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

	hétfőn	kedden	szerdán	csütörtökön	pénteken	szombaton
Hányan ismerték meg a viccet?	3					
Hányan ismerték a viccet összesen?	$1 + 3 = 4$					

2. Egy nemzeti park állatgondozói a következő egyszerű szabály segítségével modellezik az állatállomány növekedését egy hullófavész esetében: a kezdetben 201 egyedből álló állomány minden évben megduplázódik, azonban e duplázódást követően évente átlagosan 200 egyed elpusztul, így az állomány létszáma évről évre közel azonos marad.

a) Töltsd ki a táblázatot! Valóban közel azonos marad az állomány létszáma?

Évek száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Egyedszám	201									

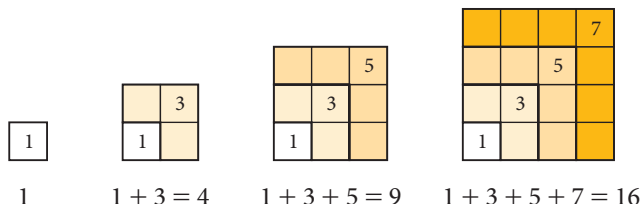
b) Adj meg olyan képletet, amellyel az adott évi egyedszámból kiszámítható a következő!



3. Sorold fel a sorozatok első öt tagját! $a_n = \frac{60+n}{n}$ $b_n = \frac{n}{n+1}$ $c_n = \log_4 n$

BEVEZETŐ

Ha összeadjuk az első néhány pozitív páratlan számot, akkor a következőket kapjuk:



Megfigyelhetjük, hogy ezekben az esetekben az első n darab pozitív páratlan szám összege egyenlő n^2 -tel. Bebizonyítható, hogy ez a megfigyelés általánosan is teljesül. Adj magyarázatot az ábrák alapján arra, hogy továbbra is teljesül az összefüggés! Ez alapján az $1; 4; 9; 16; \dots; n^2; \dots$ sorozat többféle módon is megadható. A következő leírások ugyanazt a sorozatot határozzák meg. (Felhasználjuk, hogy az n -edik pozitív páratlan szám $2n - 1$.)

$$a_n = n^2$$

$$a_n = 1 + 3 + \dots + (2n - 1)$$

$$a_1 = 1 \text{ és } a_n = a_{n-1} + (2n - 1)$$

ELMÉLET

A sorozat megadása

Egy sorozat megadható:

➤ **képlettel**

A sorozat n -edik tagjának megadása n függvényében ($n \in \mathbb{Z}^+$). Például: $a_n = 3n + 2$

➤ **rekurzív módon**

A sorozat n -edik tagjának megadása az előtte álló tag vagy tagok ismeretében. Ekkor a sorozat első vagy első néhány tagját is meg kell adni (annyit, hogy a rekurzióval a tagok kiszámolhatóak legyenek).

Például: $a_1 = 1, a_2 = 2$ és $n > 2$ esetén $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

➤ **utasítással, körülírással**

Például: pozitív négyzetszámok növekvő sorozata;

a $\frac{3}{11}$ tizedes tört alakjában a tizedesvessző után az n -edik helyen álló számjegy.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Add meg rekurzív módon, illetve képlettel a 8-cal osztva 5 maradékot adó pozitív számok növekvő sorozatát!

Megoldás

A sorozat első néhány tagja: 5; 13; 21; 29; 37.

Ha elkezdjük felírni a sorozat tagjait, akkor észrevehetjük, hogy az egymás után következő tagok különbsége állandó. Ha egy szám 8-cal osztva 5 maradékot ad, akkor a nála 8-cal nagyobb szám lesz a következő olyan szám, amely 8-cal osztva 5 maradékot ad. Ez alapján a sorozat rekurzív megadása: $a_1 = 5$ és $n > 1$ esetén $a_n = a_{n-1} + 8$.

A 8-cal osztva 5 maradékot adó számok $8k + 5$ ($k \in \mathbb{N}$) alakúak. Azonban a sorozat első tagja a $k = 0$ esetében kapott 5, ez tartozik az $n = 1$ -hez. Ezért helyettesítünk a képletbe k helyére $n - 1$ -et. $a_n = 8(n - 1) + 5 = 8n - 8 + 5 = 8n - 3$.

Ugyanehhez a képlethez jutunk, ha észrevesszük, hogy a sorozat tagjait megkaphatjuk a $8n$ alakú számokból (8; 16; 24; 32; ...) úgy, ha mindegyikből levonunk 3-at. A sorozat tehát: $a_n = 8n - 3$.

FELADAT

1. Írd fel a sorozat első öt tagját, majd add meg képlettel is és rekurzív módon is a sorozatot!

- a) A páros pozitív egész számok növekvő sorozata.
- b) A természetes számok növekvő sorozata.
- c) 3-mal osztva 1 maradékot adó pozitív egész számok növekvő sorozata.
- d) 7-tel osztva 4 maradékot adó pozitív egész számok növekvő sorozata.

2. Írd fel annak az $\{a_n\}$ számsorozatnak az első nyolc tagját, amelyet így adunk meg:

- a) $a_1 = 3$, és ha $n > 1$, akkor $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 4$;
- b) $a_1 = \sqrt{3}$, és ha $n > 1$, akkor $a_n = 2 + \sqrt{3} \cdot a_{n-1}$.

3. Írd fel, és ábrázd a sorozatok első hat tagját! Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatot add meg képlettel, a $\{c_n\}$ sorozatot pedig utasítással is!

- a) Az $\{a_n\}$ sorozat első tagja 5. A második tagtól kezdve a sorozat bármely tagja úgy kapható meg, hogy az öt megelőző taghoz hozzáadunk 2-t.
- b) A $\{b_n\}$ sorozat első tagja 8. A második tagtól kezdve a sorozat bármely tagja úgy kapható meg, hogy az öt megelőző tagot elosztjuk 2-vel.
- c) A $\{c_n\}$ sorozat első tagja 3, második tagja 1. Ha $n > 2$, akkor $c_n = c_{n-1} - c_{n-2}$.

4. Adott az $a_n = 8 \cdot (-1)^n$ sorozat ($n \in \mathbb{N}^+$).

- a) Add meg az $a_1, a_2, a_3, a_4, a_{12}, a_{17}$ tagokat!
- b) Hány elemű halmaz a megadott sorozat értékkészlete?
- c) Határozd meg a sorozat első 25 tagjának összegét!

5. (Érettségi feladat nyomán, 2021)

Egy biztonsági őr először 4 egymás utáni napon dolgozik, utána 2 napot pihen, majd újra 4 nap munka és 2 pihenőnap következik, és így tovább. Ha az őr január elsején kezdett dolgozni, akkor

- a) dolgozik vagy pihen az év 100. napján?
- b) az év 100. napjának reggelén hány ledolgozott munkanapja van már az évben?
- c) az év 125. napjának reggelén hány ledolgozott munkanapja van már az évben?



HÁZI FELADAT

1. A következő táblázat a $c_n = n(n-1) + 2$ sorozatra vonatkozik. Töltsd ki az üres helyeket!

	c_1			c_{10}		c_{100}
n	1			10		100
c_n		8	74		602	

2. A két sorozat közül melyiknek nagyobb a 4. tagja?

- a) $a_n = 12 - 5n$, illetve $b_n = 10 - n^2$
- b) $a_n = n^2 + n$, illetve $b_n = 35 - n^2$

3. (Érettségi feladat, 2021)

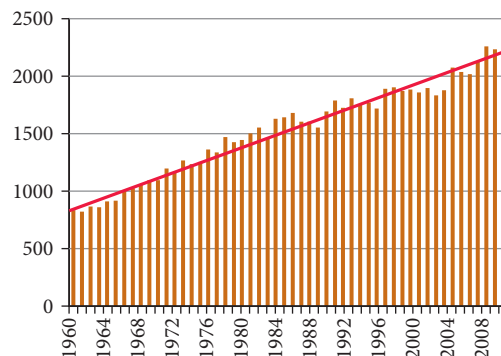
Egy sorozat első tagja 5. A második tagtól kezdve minden tag az előző tag (-2) -szeresénél 1-gyel nagyobb szám. Add meg a sorozat második, harmadik és hatodik tagját!

4. Egy számsorozatnak minden páratlan sorszámú tagja 24, minden páros sorszámú tagja -23 . Mennyi az első tíz tag összege? Mennyi az első tizenöt tag összege?

BEVEZETŐ

A világ gabonatermelése 1960 és 2010 között évente átlagosan körülbelül 27 millió tonnával növekedett. 1960-ban a termelés körülbelül 824 millió tonna volt. Ezt a folyamatot modellezhetjük egy olyan sorozattal, melynek első tagja 824, és minden tag 27-tel nagyobb, mint az előtte álló tag. Azon sorozatokat, amelyek esetében az egymás után álló tagok különbsége, azaz $a_n - a_{n-1}$ állandó, számtani sorozatnak nevezzük. (Az ábrán a piros vonal mutatja a számtanisorozat-szerű trendet. A narancssárgával jelölt valódi termelési adatok kissé eltérnek ettől.)

A világ gabonatermelése (millió tonna)



Forrás: Earth Policy Institute
www.earth-policy.org (U.S. and World Grain Production, 1960–2012)

ELMÉLET

A számtani sorozat

Definíció: Az $\{a_n\}$ sorozatot **számtani sorozat**nak nevezzük, ha a második tagtól kezdve bármely tag és az előtte álló tag különbsége állandó, vagyis $n > 1$ esetén $a_n - a_{n-1}$ értéke állandó.

Ez az állandó a sorozat **differenciája (különbsége)**. Jele: d .

A számtani sorozat n -edik tagját ($n > 1$ esetén) megkapjuk, ha az előtte álló taghoz a differenciát adjuk, vagy ha az első taghoz $(n - 1)$ -szer adjuk hozzá a differenciát.

Ha ismert egy számtani sorozat két tagja (és mindkettőről tudjuk, hogy hányadik tagok), az egyértelműen meghatározza a számtani sorozatot. A differenciát a tagok különbsége segítségével meghatározhatjuk.

Például: $a_{12} = 40$; $a_{15} = 46 \Rightarrow a_{15} - a_{12} = 3d \Rightarrow 46 - 40 = 3d \Rightarrow d = 2$

Megjegyzés: Ha egy feladatban egy számtani sorozat három egymást követő tagja szerepel, akkor érdemes „szimmetrikus” jelölést használni:

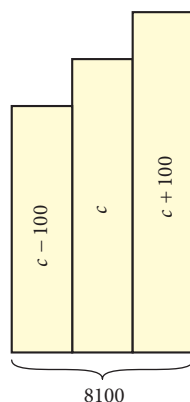
$$\begin{array}{ccccccccc} & +d & +d & +d & +d & +d & +d & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \dots \end{array}$$

$$a_n - a_{n-1} = d$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\begin{array}{ccccc} & -d & & +d & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ a-d & & a & & a+d \end{array}$$

KIDOLGOZOTT FELADAT



Tibor január elsejétől kezdve minden hónapban 100 forinttal többet tesz be a perselyébe, mint az előző hónapban. Tudjuk, hogy az április–június hónapokban összesen 8100 forintot tett a perselybe. Mennyi pénzt tett Tibor a perselybe januárban?

Megoldás

Tibor júniusban 100 forinttal többet, áprilisban pedig 100 forinttal kevesebbet tett a perselybe, mint amennyit májusban. Ha a májusban betett összeg forintban c , akkor az áprilisi $c - 100$, a júniusi $c + 100$.
 $(c - 100) + c + (c + 100) = 3c \Rightarrow 3c = 8100 \Rightarrow c = 2700$

A májusban betett pénz 2700 Ft, a januári 400 Ft-tal kevesebb, azaz 2300 Ft.

Ellenőrzés: A perselybe tett összegek januártól júniusig: 2300; 2400; 2500; 2600; 2700; 2800 Ft. Az utolsó háromnak az összege $2600 + 2700 + 2800 = 8100$ Ft.

FELADAT

1.

A 33-nál nagyobb páros számokat növekvő sorba állítva számtani sorozatot kapunk.

- a) Melyik szám ennek a sorozatnak az első tagja?
- b) Mennyi a differencia?
- c) Melyik szám e sorozat 77. tagja?
- d) Hányadik tagja ennek a sorozatnak az 1948?

2.

Egy számtani sorozat 10., 11. és 12. tagjának összege 63.

- a) Számítsd ki a sorozat 11. tagját!
- b) Számítsd ki a sorozat első tagját, ha 5 a sorozat differenciája!
- c) Számítsd ki a sorozat 10. és 12. tagját, ha 7 a sorozat differenciája!
- d) Mutasd meg, hogy a 11. tag a 10. tag és a 12. tag számtani közepével egyenlő, akármennyi is a differencia!

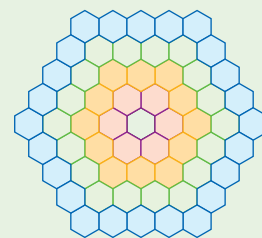
3.

A $\{b_n\}$ számtani sorozatról tudjuk, hogy $b_7 - b_1 = 24$ és $b_7 + b_1 = 4$.

- a) Mennyi a differencia?
- b) Mennyi az első tag?
- c) Mennyi a hetedik tag?
- d) Mennyi a negyedik tag?

4.

Egy város főterét az ábrán látható szabály szerint hatszög alakú kőlapokkal burkolják.



- a) Milyen sorozatot alkot a más-más színű kőlapok száma belülről kifelé haladva, a középső fehér lapot kivéve? (A sorozat első tagja a rózsaszín hatszögek száma.)
- b) Hány darab kőlap van a belülről számított 12-dik „körben”?
- c) Hány kőlappal van több a 20-dik „körben”, mint a 15-dik „körben”?
- d) Hány szín van, amelyből 100-nál kevesebb kőlap kell, ha minden „kör” színe különböző?

5.

Egy számtani sorozat 28. tagja 96, 32. tagja 112. Hányadik tagja ennek a sorozatnak a 192?

6.

(Érettségi feladat, 2022)

Egy számtani sorozat első három tagjának összege 18. A harmadik és a negyedik tag összege 28-cal nagyobb az első és a második tag összegénél. Határozd meg a sorozat első tagját és a különbségét!

HÁZI FELADAT

1.

Iktass be 4 számot 5 és 8 közé úgy, hogy a hat szám együtt egy számtani sorozat hat egymás utáni tagja legyen!

2.

(Érettségi feladat, 2017)

A tapasztalatok szerint egy Balaton-parti strandon júliusban folyamatosan nő a strandolók száma. Ezért a strandbüfében bevált rendszer, hogy a július 1-jei megrendelést követően július 2-től kezdve július 31-ig mindennap ugyanannyi literrel növelik a nagykereskedésből megrendelt üdítő mennyiségét. A könyvelésből kiderült, hogy július 1-jén, 2-án és 3-án összesen 165 litert, július 15-én pedig 198 litert rendeltek. Hány litert rendelnek július 31-én?

3.

A 37-tel osztva 3 maradékot adó pozitív egész számok növekvő sorozata egy számtani sorozat.

- a) Melyik a sorozat legkisebb tagja, amely nagyobb, mint 999?
- b) Melyik a sorozat legnagyobb tagja, amely kisebb, mint 10 000?
- c) Hány négyjegyű tagja van a sorozatnak?

4.

Egy számtani sorozat ötödik és hatodik tagjának összege 60. A nyolcadik, kilencedik és tizedik tag összege 69. Határozd meg a sorozat első tagját és differenciáját!

BEVEZETŐ

- Hogyan lehet a legegyszerűbben megfogni egy oroszlánt?
- ??
- Fogunk kettőt, és elengedünk egyet. 😊

Sokat segít ez a gondolat, ha egy számtani sorozat tagjainak összegét keressük.



KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy tér egyik részét 50 sorban díszkövel borították. Az első sorba 26 díszkővet tettek, és minden következő sorba 2-vel többet, mint az előző sorba. Hány díszkő van a téren?

Megoldás

A sorokban a díszkövek száma: 26; 28; 30; 32; Az utolsó, 50. sorban $26 + 49 \cdot 2 = 124$ díszkő van.

Gondolatban egészítsük ki mindegyik sort! Az első sort annyi díszkővel, amennyi az utolsó sorban van, a második sort annnyival, amennyi az utolsó előtti sorban van, és így tovább. Ezzel az eljárással minden sorban ugyanannyi, 150 díszkő lesz. Ez összesen $50 \cdot 150 = 7500$ darab. De ekkor kétszer számoltunk minden díszkővet. A díszkövek

száma ennek a fele: $\frac{(26 + 124) \cdot 50}{2} = 3750$.

Megjegyzés: Ezzel a módszerrel általánosan is kiszámolhatjuk a számtani sorozat első n tagjának összegét.

1. sor	26	124	összesen 150
2. sor	28	122	összesen 150
3. sor	30	120	összesen 150
...			
50. sor	124	26	összesen 150

ELMÉLET

A számtani sorozat első n tagjának az összege

Jelölés:
sorozat első n tagjának összege: S_n
 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

az első taggal és az n -edik taggal
kifejezve (n ; a_1 és a_n ismeretében)
az első taggal és a differenciával
kifejezve (n , a_1 és d ismeretében)

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Bizonyítsuk be, hogy a számtani sorozat első n tagjának összege $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Bizonyítás

Írjuk fel az első n tag összegét előbb az indexek növekvő, majd csökkenő sorrendjében!

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

Adjuk össze a két egyenletet!

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_1 + a_n)$$

Ebben a kifejezésben n darab zárójeles tag van.

Megfigyelhető, hogy ezek a tagok egyenlők, hiszen

➤ az a_2 d -vel nagyobb az a_1 -nél, az a_{n-1} d -vel kisebb az a_n -nél; ($a_2 = a_1 + d$ és $a_{n-1} = a_n - d$),

➤ az a_3 $2d$ -vel nagyobb az a_1 -nél, az a_{n-2} $2d$ -vel kisebb az a_n -nél; ($a_3 = a_1 + 2d$ és $a_{n-2} = a_n - 2d$),

➤ és így tovább.

$$\text{Tehát } 2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n). \Rightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

FELADAT

1. Határozd meg a számtani sorozatok hiányzó adatait!

a_1	d	n	a_n	S_n
129	-10	13		
	5,3	21	112	
-8			22	77
	-1	27	48	

2. Egy számtani sorozat első tagja -65 , n -edik tagja 65 . Mennyi a sorozat első n tagjának összege, ha
a) $n = 3$; **b)** $n = 8$; **c)** $n = 11$; **d)** $n = 27$?

3. (Érettségi feladat, 2006)
 55 darab egymást követő pozitív páratlan szám összege 3905. Melyik az összegben az első, illetve az 55. páratlan szám?

4. Bizonyítsd be, hogy az első n darab pozitív páratlan szám összege n^2 . (Ezt szemléltette a 23. lecke Bevezetője.)

5. Egy kis üzlet tulajdonosa 5 láda sóletkonzervet szeretne elrendezni gúla alakban. Mindegyik ládában 24 konzerv van. Mindegyik sorba 1-gyel kevesebbet tesz, mint az alatta lévőbe. El tudja-e rendezni a konzerveket úgy, hogy a legfelső sorba egyet tesz? Ha igen, hányat tegyen a legalsó sorba? Milyen magas lesz a gúlája, ha egy konzerv 12 cm magas? Hány konzerv kellene egy 3 m magas gúlához?

6. (Érettségi feladat, 2015)
 Zsuzsa nagyszülei elhatározzák, hogy Zsuzsa 18. születésnapjára 90 000 Ft-os vásárlási utalványt adnak neki ajándékba. Ezért 18 hónapban keresztül minden hónapban félretesznek valamekkora összeget úgy, hogy a 18. születésnapon éppen 90 000 forintjuk legyen erre a célra. Az első hónap után mindig 200 forinttal többet tesznek félre, mint az előző hónapban. Mennyi pénzt tesznek félre az első, és mennyit az utolsó alkalommal?

HÁZI FELADAT

1. Az $\{a_n\}$ számtani sorozatban az első tag 15, a differencia $-1,2$. Mennyi a sorozatban
a) az első 10 tag összege?
b) az első 16 tag összege?
c) az első 26 tag összege?

2. Mennyi az eredmény, ha összeadjuk
a) a pozitív egész számokat 100-tól 1000-ig;
b) a pozitív páratlan számokat 45-től 945-ig?
c) a páros számokat -14 -től 132-ig?

3. Egy stadion nézőterén az első sorban 340 ülés van, minden következő sorban 30 üléssel több, mint az előző sorban. Hány nézőnek van ülőhely a stadionban, ha a sorok száma összesen 27?

4. **a)** Egy számtani sorozatban $a_1 = -5$, $a_6 = 5$. Számítsd ki d , a_{25} és S_{25} értékét!
b) Egy számtani sorozatban $a_3 = 6$, $a_{10} = -15$. Számítsd ki d , a_1 , a_{20} és S_{20} értékét!

RÁADÁS

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) német matematikusról maradt fenn az a történet, hogy kisgyermek korában a tanítója azt a feladatot adta fel az osztály egy részének, hogy adják össze a számokat 1-től 40-ig. A tanító arra gondolt, hogy amíg ezen dolgoznak, ő foglalkozhat a többi diákkal. De a kis Gauss pillanatok múlva már jelentkezett is az eredménnyel. Így gondolkodott:

$$1 + 40 = 41$$

$$1 + 39 = 41$$

...

$$20 + 21 = 41$$

Vagyis az összeg 41-nek a 20-szorosa, azaz 820.

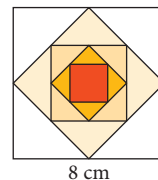
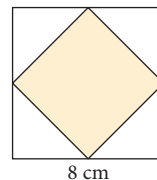


KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 8 cm oldalhosszúságú négyzet oldalfelező pontjait sorban összekötjük. Mivel a kapott alakzat olyan négyszög, amelyet az eredeti négyzet középpontja körüli 90°-os elforgatás önmagába visz át, ezért az oldalfelező pontok összekötésével kapott alakzat is egy négyzet. A belső négyzet oldalfelező pontjait összekötve újabb négyzetet kapunk, és így tovább, az ábra szerint. Ha ezt az eljárást folytatjuk, akkor mennyi

a) a negyedik négyzet kerülete és területe;

b) az n -edik négyzet kerülete és területe?



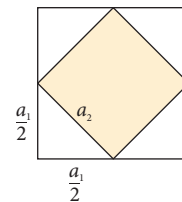
Megoldás

Az egymásba írt négyzetek hasonlóak. Mennyi a hasonlóság aránya (λ) az első két négyzet esetében?

Ha az első négyzet oldalának hossza a_1 , és a második négyzet oldalának hossza a_2 , akkor Pitagorasz

$$\text{tétele alapján } a_2^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{a_1^2}{4} = \frac{a_1^2}{2}. \quad \text{Ebből: } a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a_1 \quad \text{és} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Megfigyelhető, hogy bármely két egymás utáni lépésben kapott négyzet esetén a hasonlóság aránya szintén $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



A négyzetek oldalhosszai tehát egy olyan sorozatot alkotnak, melyben az egymás után álló tagok hányadosa állandó.

Ha a hasonlóság aránya λ , a hasonló alakzatok kerületeinek aránya is λ , a területek aránya pedig λ^2 . Így a négyzetek kerületei és területei is olyan sorozatot alkotnak, amelyben az egymás után álló tagok aránya állandó. Az oldalhosszak és a kerület esetében ez a szorzószám $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, a területek esetében pedig $\lambda^2 = \frac{1}{2}$. (Jól látható, hogy a beírt négyzet területe fele az eredeti négyzet területének.)

Az első (eredeti) négyzet oldalának hossza $a_1 = 8$, kerülete $K_1 = 32$, és területe $T_1 = 64$. (Az egységek cm, illetve cm^2 .)

$$\begin{array}{lll} \text{A második négyzetre} & a_2 = \lambda \cdot a_1 & K_2 = \lambda \cdot K_1 \quad T_2 = \lambda^2 \cdot T_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{A harmadik négyzetre} & a_3 = \lambda \cdot a_2 = \lambda^2 \cdot a_1 & K_3 = \lambda \cdot K_2 = \lambda^2 \cdot K_1 \quad T_3 = \lambda^2 \cdot T_2 = \lambda^4 \cdot T_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{A negyedik négyzetre} & a_4 = \lambda \cdot a_3 = \lambda^3 \cdot a_1 & K_4 = \lambda \cdot K_3 = \lambda^3 \cdot K_1 \quad T_4 = \lambda^2 \cdot T_3 = \lambda^6 \cdot T_1 \end{array}$$

A negyedik négyzet kerülete tehát $\approx 11,31$ cm, és területe 8 cm^2 .

Hasonló módon, lépésről lépésre jutunk el a sorozatok n -edik tagjáiig.

$$\text{Az } n\text{-edik négyzetre:} \quad a_n = \lambda^{n-1} \cdot a_1 \quad K_n = \lambda^{n-1} \cdot K_1 \quad T_n = (\lambda^2)^{n-1} \cdot T_1$$

FELADAT

1. Zoltán 3 millió Ft-ot helyez el a bankban, kamatos kamatra.

a) Mennyi pénze lesz ezen a számlán 6 év múlva, ha az éves kamat 3,5%?

b) Mekkora az éves kamat, ha 3 840 000 Ft lesz a számláján 6 év múlva?

(A kamatot évente írják jóvá. Zoltán a 6 év alatt nem nyúl ehhez a számlájához.)

2. Egy erdő faállománya 2005 és 2020 között minden évben az előző évhez képest 2%-kal csökkent. 2010-ben 12 000 m^3 volt a faállomány.

a) Mennyi volt a faállomány 2005-ben?

b) Mennyi volt a faállomány 2020-ban?

c) Melyik évben csökkent a faállomány először 10 500 m^3 alá?

A mértani sorozat

Definíció: Az a_n sorozatot **mértani sorozatnak** nevezzük, ha a második tagtól kezdve bármely tag és az előtte álló tag hányadosa 0-tól különböző állandó, vagyis $n > 1$ esetén $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ értéke állandó.

Ez az állandó a sorozat **kvóciense (hányadosa)**. Jele: q .

$$\begin{array}{ccccccc} & \cdot q & \cdot q & \cdot q & \cdot q & \cdot q & \cdot q \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \dots \end{array}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

A mértani sorozat n -edik tagját ($n > 1$ esetén) megkapjuk, ha az előtte álló tagot megszorozzuk a kvócienssel, vagy ha az első tagot megszorozzuk a kvóciens $(n - 1)$ -edik hatványával.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

A mértani sorozatnak tehát semelyik tagja és a kvóciense sem lehet 0.

Megjegyzés: Ha egy feladatban ismert egy mértani sorozat két tagja (és mindkettőről tudjuk, hogy hányadik tagok), akkor lehetséges, hogy a feladatnak két megoldása van.

Például: $a_{12} = 10$; $a_{14} = 40 \Rightarrow \frac{a_{14}}{a_{12}} = q^2 \Rightarrow 4 = q^2 \Rightarrow q = 2$ vagy -2 .

FELADAT

3. Egy mértani sorozat első tagja 7. Mennyi a hányados és a hatodik tag, ha a negyedik tag

- a) 189 b) $-0,875$

4. Egy mértani sorozat második tagja 1600, negyedik tagja 4. Mennyi lehet a sorozat

- a) kvóciense; b) első tagja?

5. Egy mértani sorozat első tagja 8. A második és a harmadik tag összege 16. Mennyi lehet a sorozat negyedik tagja?

6. Egy vállalkozó 2021-ben vett egy 21,5 millió forint értékű gépet. Ennek értéke évente az előző évi értékének 15%-ával csökken. Amikor az értékcsökkenés eléri az 55%-ot (azaz a gép értéke kevesebb lesz, mint az eredeti ár 45%-a), a gépet értékesítik, és újat vesznek helyette.

- a) Mennyit ér ez a gép 3 év múlva? (Figyelj! Itt a választ a_4 értéke adja meg!)
- b) Melyik évben kell értékesíteni?
- c) Oldd meg a b) feladatot úgy is, hogy nem használod fel a 21,5 millió forintos adatot!

HÁZI FELADAT

1. Létezik-e olyan mértani sorozat, amelynek a táblázat egy sorában szereplő két szám a két adott sorszámú tagja? Töltsd ki a táblázatot! Melyik esetben nincs megoldás? Melyik esetben van két megoldás?

	a_1	a_2	a_3	a_4	q
I.	4		-16		
II.		9		81	
III.	500			-864	
IV.			400	-320	

2. Egy mértani sorozat harmadik tagja 32 és hatodik tagja 108. Hány olyan tagja van a sorozatnak, amely kisebb, mint 1 000 000?

3. Egy mértani sorozat első tagja 10^{23} , és kvóciense 0,001.

- a) Hányadik tagja a sorozatnak a 100?
- b) Hány olyan tagja van a sorozatnak, amely nagyobb, mint 10^{10} ?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy járvány csökkenő fázisában egy modell szerint az új megbetegedések száma mindennap az előző napi szám 90%-a. Ha ebben a fázisban a hónap első napján 600 új megbetegedés van, akkor a modell szerint összesen mennyien betegednek meg a hónap első 20 napja alatt?

Megoldás

Mivel a modell szerint a betegek száma napról napra ugyanannyiszorosára változik, ezért a modell egy mértani sorozattal írja le a folyamatot, melyre $a_1 = 600$, és $q = 0,9$. Az első 20 tag összegét keressük.

$$S_{20} = 600 + 0,9 \cdot 600 + \dots + 0,9^{19} \cdot 600$$

Nagyon hasonló ehhez a $0,9 \cdot S_{20}$ kifejezés.

$$0,9 \cdot S_{20} = 0,9 \cdot 600 + 0,9^2 \cdot 600 + \dots + 0,9^{20} \cdot 600$$

Ha képezzük $0,9 \cdot S_{20}$ és S_{20} különbségét, akkor a tagok egyezősége miatt a jobb oldalon két tag marad.

$$0,9 \cdot S_{20} - S_{20} = 0,9^{20} \cdot 600 - 600$$

$$S_{20} \cdot (0,9 - 1) = 600 \cdot (0,9^{20} - 1)$$

$$\text{Ebből: } S_{20} = \frac{600 \cdot (0,9^{20} - 1)}{0,9 - 1} \approx 5271.$$

Tehát 20 nap alatt a modell szerint összesen 5271 megbetegedés történik.

ELMÉLET

Mértani sorozat első n tagjának összege

a mértani sorozat első tagja a_1 , és kvóciense q

$$\begin{cases} \text{ha } q \neq 1, \text{ akkor } S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \\ \text{ha } q = 1, \text{ akkor } S_n = n \cdot a_1 \end{cases}$$

Bizonyítás

Ha a sorozat kvóciense $q = 1$, akkor a sorozat minden tagja egyenlő az első taggal, ezért $S_n = n \cdot a_1$.

Ha a sorozat kvóciense $q \neq 1$, akkor írjuk fel az S_n és $q \cdot S_n$ kifejezéseket!

$$S_n = a_1 + q \cdot a_1 + q^2 \cdot a_1 + \dots + q^{n-1} \cdot a_1$$

$$q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q^2 \cdot a_1 + q^3 \cdot a_1 + \dots + q^n \cdot a_1$$

Vonjuk ki $q \cdot S_n$ -ből S_n -t! Ekkor a jobb oldalon két tag marad: $q^n \cdot a_1 - a_1$.

$$q \cdot S_n - S_n = q^n \cdot a_1 - a_1$$

$$S_n(q - 1) = a_1(q^n - 1)$$

Mivel $q \neq 1$, ezért oszthatunk $(q - 1)$ -gyel.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

FELADAT

1. Egy mértani sorozat első tagja 18, második tagja 27. Számítsd ki a sorozat első négy, első tíz és első huszonöt tagjának összegét!

2. Egy mértani sorozat első tagja 49, kvóciense -1 . Mennyi az első n tag összege, ha

- a)** $n = 5$; **b)** $n = 10$; **c)** $n = 79$?

3. Sok ember érdekes hobbija – sőt, újabban már komoly szolgáltatásként is elérhető – a családfa-kutatás. Összesen hány ősünket kellene felkutatni, ha tíz generációra, vagyis körülbelül 200–250 évre visszamenőleg mindegyikükről szeretnénk megtudni valamit?

4.

Egy mértani sorozat első tagja 2, és kvóciense 3. Mekkora az n , ha az első n tag összege 88 574?

5.

Mennyi lehet egy olyan mértani sorozat első hat tagjának az összege, melynek második tagja 20, és a negyedik tagja 500?

6.

(Érettségi feladat, 2007)

Szabó nagymama sálát kötött egyetlen lány unokájának. Az első napon 8 cm készült el a sálból, és a nagymama elhatározta, hogy a további napokon mindennap 20 százalékkal többet köt meg, mint az előző napon. Ezt az elhatározását tartani tudta. Hány nap alatt készült el a 2 méter hosszúra tervezett sál?

HÁZI FELADAT

1.

Töltsd ki a táblázat üres mezőit (a_1 egy mértani sorozat első tagja, q a hányadosa, a_n az n -edik tagja, S_n az első n tag összege)!

	a_1	q	n	a_n	S_n
a)	1	2		1024	
b)		5	4	300	
c)	512	0,5			1023

2.

Egy 120 kg-os ember orvosi tanácsra szigorú diétába kezd, így hetente súlyának 1,5%-át tudja leadni. Hány kilót tud lefogyni

a) 5 hét alatt; b) 15 hét alatt; c) 20 hét alatt?

Hány hét múlva lesz 85 kg-os?

3.

Egy hosszú betegség után 42 kg-osra lefogyott ember szeretné visszanyerni eredeti súlyát, 65 kg-ot. Ha hetente súlyának 1%-át tudja visszanyerni, hány hét után lesz ismét a régi formában?

4.

Egy tartományban a száj- és körömfájással fertőzött sertések száma az első héten 520. Az új fertőzések száma hetente körülbelül 35%-kal haladja meg az előző heti új fertőzések számát. Ha a fertőzés terjedésének üteme tartósan megmaradna, akkor megközelítőleg hány sertés fertőződne meg összesen

a) 5 hét alatt; b) 15 hét alatt; c) 20 hét alatt?



RÁADÁS

Egy megfizethetetlen játék

Egy legenda szerint volt Indiában egy király, aki annyira unatkozott, hogy belebetegedett. Udvarából az egyik bölcs, Sissa ibn Dahir ekkor kitalált egy játékot, a sakkot. A király alig játszott le egy partit, máris meggyógyult tőle. Annyira megörült, hogy megkérdezte Sissát: – Mit kívánsz jutalmul?

A bölcs így válaszolt:

– Tegy a sakktábla első kockájára egy búzaszemet, a másodikra kettőt, a harmadikra négyet, és így tovább, minden kockára kétszer annyit, mint az előtte lévő volt. Ez legyen a jutalmam!

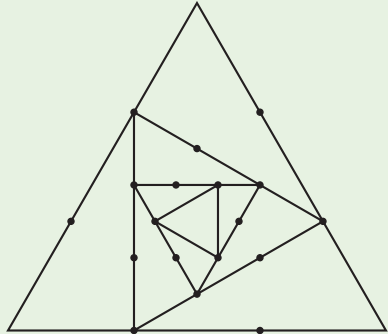
A sakktábla első kockáira még alig kerül valami. De vajon mekkora lenne Sissa ibn Dahir jutalma, ha a sakktábla mind a 64 mezőjére teljesülne a kérése?

Az $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{63}$ egy mértani sorozat első 64 tagjának összege, ami közelítőleg $1,84 \cdot 10^{19}$ db búzaszem!

Ez 700 milliárd tonna búzának felel meg, ami körülbelül 1000-szer annyi, mint az egész Föld éves búzatermése.



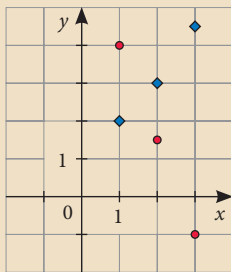
FELADAT

1. Egy számtani sorozat első tagja 5, differenciája 2. Az első taggal kezdve összeadtuk a sorozat egymást követő tagjait, így 357-et kaptunk eredményül. Hány tagot adtunk össze?
2. Egy mértani sorozat első tagja 16, kvóciense 1,07.
 a) Hány olyan tagja van a sorozatnak, amely kisebb, mint 1000?
 b) Összeadtuk a sorozat első n tagját, és a kapott összeg kisebb, mint 1000. Legfeljebb hány tagot adhattunk össze?
3. A $\{b_n\}$ mértani sorozat első tagja 1, hányadosa $\frac{1}{2}$.
 a) Számítsd ki az első 5, 10, 15, 20 tag összegét! Pontos értéket adj meg!
 b) Kerekítsd az a) feladat eredményeit ezredekre!
 c) Rajzolj olyan számegyeneset, amelyen 4 cm-esek az egységek! Ábrázold ezen az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ összeget!
 d) Bence azt állítja, hogy akárhány tagját adod is össze a $\{b_n\}$ mértani sorozatnak, az összeg sohasem éri el a 2-t. Mi a véleményed erről az állításról?
4. Csilla rajzolt egy 30 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget, majd elharmadolta az oldalait, és az óra járásának megfelelő irányban haladva összekötötte a csúcsoktól számított első osztópontokat. Így ismét egy szabályos háromszöget kapott. Ezt ismételte összesen 3-szor. Annyira megtetszett neki a minta, hogy elhatározta, ilyen alakú emeletes tortát készít Hajninak a születésnapjára. A háromszögek oldalait színes cukrokkal díszíti. Milyen hosszú lesz ez a cukordíszítés, ha négyszintes tortát készít? Összesen hány cm^2 1 cm vastagra nyújtott tésztára lesz szüksége, ha az összegyúrt tésztának kb. 10%-a lesz hulladék?
 A cukordíszítés előtt a torta felületét marcipánnal szeretné beborítani. Hány cm^2 1 mm-re nyújtott marcipánra lesz szüksége, ha a torta oldalát is marcipánnal fogja bevonni?
- 
5. (Érettségi feladat, 2009)
 Angéla a pihenőkertjük egy részére járólapokat fektetett le. Az első sorba 8 járólap került, minden további sorba kettővel több, mint az azt megelőzőbe. Összesen 858 járólapot használt fel. Hány sort rakott le Angéla?
 A járólapokat 225-ös csomagolásban árusítják. Minden csomagban bordó színű a járólapok 16%-a, a többi szürke. Angéla 4 csomag járólapot vásárolt. Csak bordó színű lapokat rakott le az első és az utolsó sorba. Ezenkívül a többi sor két szélén levő 1–1 járólap is bordó, az összes többi lerakott járólap szürke. Hány szürke és hány bordó járólap maradt ki a lerakás után?
6. (Érettségi feladat, 2006)
 Egy mértani sorozat első tagja 5, hányadosa q . Egy számtani sorozatnak is 5 az első tagja, a sorozat különbsége d . Határozd meg d és q értékét, ha a mértani sorozat harmadik és ötödik tagja rendre megegyezik a számtani sorozat negyedik és tizenhatodik tagjával!

HÁZI FELADAT

1.

A mellékelt grafikonon egy számtani és egy mértani sorozat első 3-3 tagját ábrázoltuk. Határozd meg a sorozatok első és tizedik tagját, valamint az első 25 tag összegét mindkét sorozat esetében!



3.

Egy faiskolában egy trapéz alakú területen több sorba ültettek barackfákat. Az első sorba 40 csemete került, minden következő sorba pedig 4-gyel több, mint az előzőbe. Összesen 1020 facsemete van ezen a részen. Hány sorba ültettek barackfákat?

4.

Összeadtuk egy sorozat első n tagját. A sorozat első tagja 10. Legalább hány tagot adtunk össze, ha az összeg nagyobb, mint 1000, és a sorozat

- a) számtani sorozat, ahol $d = 2$;
- b) mértani sorozat, ahol $q = 1,2$?

2.

Mennyi lehet annak az $\{a_n\}$ mértani sorozatnak a 7. tagja, amelynek

- a) az 5. tagja -4 , és a 9. tagja -49 ;
- b) a 4. tagja -18 , és a 10. tagja -2 ;
- c) kvóciense -3 , az első 10 tag összege -7381 ?

RÁADÁS

1. A számtani sorozat és a számtani közép

Ha $\{a_n\}$ számtani sorozat, és $n > 1$, akkor az a_{n-1} , a_n és a_{n+1} tagokra (vagyis tetszőleges három egymás utáni tagra) teljesül, hogy a középső tag számtani közepe az azt közrefogó két tagnak.

$$\text{Hiszen: } \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_n - d) + (a_n + d)}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n.$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Általánosan is teljesül, hogy egy számtani sorozatban minden tag az attól szimmetrikusan elhelyezkedő két tag számtani közepe. A számtani sorozat erről a tulajdonságáról kapta a nevét.

2. A mértani sorozat és a mértani közép

Ha $\{a_n\}$ mértani sorozat, és $n > 1$, akkor az a_{n-1} , a_n és a_{n+1} tagokra (vagyis tetszőleges három egymás utáni tagra) teljesül, hogy a középső tag négyzete egyenlő az azt közrefogó két tag szorzatával.

$$\text{Hiszen: } a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \frac{a_n}{q} \cdot a_n \cdot q = a_n^2.$$

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Általánosan is teljesül, hogy egy mértani sorozatban minden tag négyzete egyenlő az attól szimmetrikusan elhelyezkedő két tag szorzatával. Amennyiben a tagok pozitívak, akkor minden tag egyenlő az azt közrefogó két tag mértani közepével. A mértani sorozat erről a tulajdonságáról kapta a nevét.

3. A négyzetszámok összege

A képen egy tökipiramis látható, mely a legfelső szintjén 1 darab, felülről lefelé számolva az n -edik szinten pedig n^2 darab tököt tartalmaz.

- a) Hány tök van összesen a felső négy sorban?
- b) Hány tök van összesen az ábrán látható tökipiramisban?
- c) Hány olyan tök van, amely a piramis belsejében helyezkedik el, és kívülről nem látható?
- d) Bebizonyítható, hogy 1-től n -ig a négyzetszámok összege:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
 Ellenőrizd a képletet 9-re és 7-re!
- e) Mennyivel egyenlő az $1^2 + 2^2 + \dots + 25^2$ összeg?



ELMÉLET

A pénzügyi számítások alapja, hogy a pénz értéke változik, ahogy telik az idő. Ha ma van 10 000 Ft-om, az az infláció miatt „többet ér” (nagyobb a vásárlóértéke), mint ha 3 év múlva van 10 000 Ft-om.

Tőkebefektetés

Tőke = a bankba tett, lekötött pénzösszeg

Kamat = az a pénzösszeg, amivel a tőke megnő
Kamatláb = arány (%), amely megadja, hogy a kamat hány-szorosa a tőkének

Egyszerű kamatozás: a kamat nem adódik a tőkéhez (pl. kivesszük, átvezetjük másik bankszámlára)

Kamatos kamatozás: a kamat a tőkéhez adódik, és azzal együtt (tőkeként) kamatozik tovább

Az összehasonlíthatóság érdekében a bankoknak törvény írja elő, hogy a kamatlábat éves időtartamra és egyszerű kamatozás esetére adják meg. Például ha a negyedévre lekötött tőke kamata 3%, akkor a kamatláb évi 12%. Emiatt havi, negyedéves vagy fél éves kamatos kamatozás esetén a valódi növekedés (hozam) nagyobb, mint a kamatláb.

Például:

negyedéves jóváírási periódus, kamatos kamatozás, évi 8%



a negyedéves kamatláb
 $8 : 4 = 2\%$



egy év alatt $1,02^4 = 1,0824$, azaz 8,24%-os a növekedés

(A magyar szabályozás szerint banki kamatjóváíráskor az állam felé kamatadót kell fizetni, melyet a banknak kell levonnia és befizetnie az állam felé. A feladatokban ettől a tételtől általában eltekintünk.)

Gyűjtőjáradék

A megtakarítás egy gyakori módja, hogy egyenlő időszakonként, például havonta azonos összeget helyezünk el egy bankszámlán (gyűjtőszámlán). Így a tőke nemcsak az eredeti tőke kamatos kamatával, hanem a közben újra és újra betett pénzösszegekkel és azok kamatos kamataival növekszik.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Dalma elhatározza, hogy havonta 20 000 Ft-ot megtakarít a keresetéből, és azt minden hónap elején bankbetétbe, egy gyűjtőszámlára helyezi. A betét kamatos kamattal kamatozik, az éves kamat 6%, és havonta, a hónap végén történik a jóváírás. Mekkora összeg lesz Dalma ezen bankszámláján 2 év múlva?

Megoldás

Az éves 6%-os kamat havi kamatozás esetén $\frac{6}{12} = 0,5\%$ -os kamatozást jelent.

A folyamatot végiggondolhatjuk úgy, mintha külön-külön bankbetétbe helyeznénk havonta a 20 000 Ft befizetéseket. Az első befizetés 24-szer kamatozik, a második már csak 23-szor, a harmadik 22-szer, az utolsó, 24. befizetés csak egyszer.

Az összeg tehát így számolható: $20\,000 \cdot 1,005^{24} + 20\,000 \cdot 1,005^{23} + \dots + 20\,000 \cdot 1,005$

Ez az összeg tekinthető egy mértani sorozat első 24 tagja összegének. Ha fordított sorrendben vesszük a tagokat, akkor könnyebb felismerni és kezelni a mértani sorozatot: az első tag $20\,000 \cdot 1,005$, és a kvóciens 1,005.

$$S_{24} = 20\,000 \cdot 1,005 \cdot \frac{1,005^{24} - 1}{1,005 - 1} \quad \text{Zsebszámológéppel kiszámolhatjuk:} \quad S_{24} = 511\,182$$

Tehát a 24. hónap végén 511 182 Ft lesz Dalma számláján. (Ez 31 182 Ft-tal több, mint a bankba tett $24 \cdot 20\,000 = 480\,000$ Ft.)

FELADAT

1.

Egy házaspár öt évvel ezelőtt 6 millió forintot helyezett el a bankban, kamatos kamatra. A kamatláb az öt év alatt nem változott, és a kamatot évente írták jóvá. Az öt év elteltével 7 millió forintot vehettek fel a banktól. Hány százalék volt az éves kamatláb?

2.

(Érettségi feladat, 2022)

Az új autók értéke a megvásárlás pillanatától kezdve csökken. A csökkenés mértékét különböző modellekkel lehet becsülni.

- a) A *lineáris* becslési módszer szerint az autó minden hónapban ugyanannyi forintot veszít az értékéből. Egy újonnan 6 millió forintba kerülő autó értéke a lineáris becslési módszer szerint 5 év alatt csökken a felére. Hány forinttal csökken az autó értéke egy hónap alatt?
- b) Az *exponenciális* modell szerint az új autó értéke havonta 1%-kal csökken. Hány forintba csökken a 6 millió forintba kerülő új autó értéke két év alatt az exponenciális modell szerint, és ez hány százalékos csökkenést jelent az új kori értékéhez képest? Hány hónap alatt csökken a felére az autó értéke ezen modell szerint?

3.

Ferenc gyűjtőszámlát nyitott. Az első két évben az év elején 200 000 Ft-ot fizetett be a számlájára, ezekben az években a kamatláb 7% volt. A következő két évben megemelkedett a kamatláb 9%-ra. Ferenc megörült a lehetőségeknek, és ebben a két évben 300 000 Ft-ot helyezett el a számláján. A számla kamatos kamatozása, és évente egyszer, az év végén írják jóvá a kamatot. Mekkora összeg gyűlt össze Ferenc számláján a negyedik év végére?

4.

Egy fiatalember dohányozni kezdett, és havonta 10 000 Ft-ot költött cigarettára. Elgondolkodik azon, mi történne, ha ezt a pénzt inkább bankban helyezné el. Mekkora összeg gyűlné össze 10 év alatt, ha minden hónap elején befizetne egy gyűjtőszámlára 10 000 Ft-ot, a kamatláb végig évi 6% lenne, és a kamatot havonta, a hónap végén írnák jóvá?

5.

Dávid négy éven át minden év elején ugyanakkora összeget helyezett el a bankban a gyűjtőszámláján. Az éves kamatláb 7% volt, a bank évente írta jóvá a kamatot, és kamatos kamatozással számolt. Mekkora volt a négy egyenlő összeg, ha a négy év leteltével, a negyedik kamatozás után a számlán 1 140 000 Ft gyűlt össze?

HÁZI FELADAT

1.

Melyik kamatos kamatozású befektetés lenne előnyösebb kétéves időtartamra?

A: 9,8%-os éves kamatláb, a kamat jóváírása évente történik.

B: 9,6%-os éves kamatláb, a kamat jóváírása havonta történik.

2.

Miklós bankba tesz 3 millió Ft-ot. A bank kamatos kamatozással számol, évente történik a kamatjóváírás. Mekkora a kamatláb, ha 12 év múlva 4,7 millió Ft lesz Miklós számláján?

3.

(Érettségi feladat, 2008)

Csilla és Csongor ikrek, és születésükkor mindkettőjük részére takarékettkönyvet nyitottak a nagyszülők. 18 éves korukig egyikőjük számlájáról sem vettek fel pénzt.

a) Csilla számlájára a születésekor 500 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg évi 8%-kal kamatozik. Mekkora összeg gyűlt össze Csilla számláján a 18. születésnapjára, ha a kamat mindvégig 8%?

b) Csongor számlájára a születésekor 400 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg félévente kamatozik, mindig azonos kamatlábbal. Mekkora ez a félévenkénti kamatláb, ha tudjuk, hogy Csongor a számlájáról a 18. születésnapján 2 millió forintot vehet fel?

4.

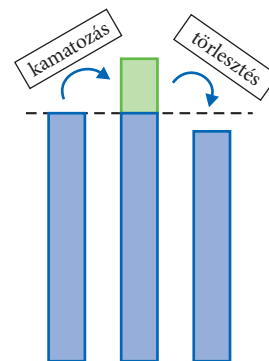
Zsuzsa gyűjtőszámlát nyit, és öt éven át minden év elején 350 000 Ft-ot helyez el rajta a bankban. Az éves kamatláb 7,5%, a bank évente, minden év végén írja jóvá a kamatot, és kamatos kamatozással számol. Mekkora összeg lesz Zsuzsa számláján öt év múlva?

ELMÉLET

Hitelfelvétel

Ha hitelt veszünk fel egy banktól, akkor szerződés szabályozza, hogy milyen ütemben, milyen kamatozással kell visszafizetnünk a felvett hitelt (tőkét) és annak kamatait. Minden időtartam végén először az esedékes kamat hozzáadódik a tartozáshoz, majd utána a törlesztőrészlet befizetésével a törlesztőrészlettel csökken a bank felé a tartozásunk.

A hiteltörlesztés egyik gyakori módja, hogy egyenlő időközönként és egyenlő részletekben fizetünk. A hitel törlesztése során a bank nem számol fel kamatot a már kifizetett rész után. Az egyenlő törlesztőrészletek meghatározása az egyre csökkenő tartozás figyelembevételével, egy mértani sorozat segítségével történik. (Tehát nem úgy számolják a törlesztőrészletet, hogy egyenlő részekre osztják azt az összeget, ami az egyösszegű törlesztés esetén lenne esedékes.)



Megjegyzés:

A törvény külön szabályozza a kamatra és külön a tőkére vonatkozó eljárásrendet. A hiteltörlesztés során ezért külön kezelik a tőkét, és külön a kamatot. Minden törlesztéskor kifizetjük az adott időszakban keletkezett kamatot, és a tőkéből is törlesztünk. (Ez utóbbi nélkül a tartozásunk sosem fogyna el.)

KIDOLGOZOTT FELADAT

Tamás egy banknál 2 000 000 Ft hitelt vesz fel 3 évre, évi 10%-os kamatra.

- Mekkora összeget kellene visszafizetnie, ha a tartozást egy összegben fizetné vissza, kamatos kamattal, 3 év múlva?
- Mekkora a törlesztőrészlet, ha évente, 3 egyenlő részletben fizeti meg a tartozást?

Megoldás

- Egyösszegű visszafizetésnél 3 év elteltével a visszafizetendő összeg $2\,000\,000 \cdot 1,1^3 = 2\,662\,000$ Ft lenne.
- Ha évente, 3 egyenlő részletben fizeti vissza a hitelt, akkor minden év végén megnő a tartozása a 10% kamattal, majd lecsökken a tartozása a fix törlesztőrészlettel úgy, hogy az utolsó részlet után már a tartozás 0 Ft.

Kövessük táblázatban a tartozás alakulását, a törlesztőrészletet jelöljük x -szel!

Eltelt idő	Tartozás	Befizetés	Befizetéssel csökkentett tartozás
1 év	$2\,000\,000 \cdot 1,1 = 2\,200\,000$	x	$2\,200\,000 - x$
2 év	$(2\,200\,000 - x) \cdot 1,1 = 2\,420\,000 - 1,1x$	x	$2\,420\,000 - 1,1x - x$
3 év	$(2\,420\,000 - 1,1x - x) \cdot 1,1 = 2\,662\,000 - 1,21x - 1,1x$	x	$2\,662\,000 - 1,21x - 1,1x - x$

A 3 év elteltével a tartozás 0, ezért $2\,662\,000 - 1,21x - 1,1x - x = 0$.

Átrendezve:

$$2\,662\,000 = 1,21x + 1,1x + x$$

$$2\,662\,000 = 3,31x$$

$$\text{Ebből } x = 804\,230.$$

A három egyenlő törlesztőrészlet tehát 804 230 Ft.

(A visszafizetett $3 \cdot 804\,230 = 2\,412\,690$ Ft jóval kevesebb, mint az a) esetben számolt összeg. Ennek oka, hogy a már befizetett részek csökkentették a hiteltartozást, és arra a bank már nem számít fel kamatot.)

FELADAT

1. Egy cég 2 000 000 Ft hitelt vesz fel 1 évre, a kamatláb 8%. Mekkora összeget kell visszafizetnie a cégnek, ha egy év leteltével, egy összegben fizeti meg a tartozását?
2. Egy cég 2 000 000 Ft hitelt vesz fel 2 évre, a kamatláb 8%. Mivel a cég ezt az összeget olyan fejlesztésre fordítja, ami csak a második évben kezd megtérülni, ezért úgy állapodnak meg a bankkal, hogy az első év végén csak az éves kamatot fizetik vissza, és majd a második év végén a többi tartozást. Mekkora összeget fizet a cég az első, illetve a második év végén?
3. Egy cég 2 000 000 Ft hitelt vesz fel 3 évre, a kamatláb 8%. Mivel a cég ezt az összeget olyan fejlesztésre fordítja, ami fokozatosan fog megtérülni, ezért úgy állapodnak meg a bankkal, hogy az első és a második év végén 500 000 Ft-ot fizet vissza, a harmadik év végén a fennmaradó tartozást. Mennyit kell visszafizetniük a harmadik év végén?
4. Antal 200 000 Ft hitelt vett fel, a kamatláb 10%. A hitelt 4 év alatt, 4 egyenlő részletben törleszti, az állandó törlesztőrészlet 63 095 Ft. Kövesd végig a táblázat segítségével, hogy az egyes törlesztések után mennyi fordítódott a kamat törlesztésére, és mennyi a fennmaradó tőketartozás!

	tőketartozás	kamat	törlesztőrészlet	ebből a tőketörlesztésre marad	fennmaradó tőketartozás
1. év végén	200 000	20 000	63 095	43 095	156 905
2. év végén	156 905		63 095		
3. év végén			63 095		
4. év végén			63 095		

5. Kálmán 1 000 000 Ft hitelt vesz fel a banktól egy évre, a kamatláb évi 12%. Minden negyedév végén, 4 egyenlő részletben törleszti a felvett hitelt. Mekkora az állandó törlesztőrészlet?

HÁZI FELADAT

1. Judit 350 000 Ft hitelt vett fel a banktól, melyet 2 év alatt fizet vissza. A szerződése szerint az első év végén csak az esedékes kamatot fizeti vissza, ami 38 500 Ft.
 - a) Mennyi az éves kamatláb?
 - b) Mekkora összeget fizet a második év végén?
2. Szilárd 500 000 Ft hitelt vesz fel a banktól, melyet 3 év alatt, 3 egyenlő részletben törleszt.
 - a) Mekkora a törlesztőrészlet, ha a kamatláb 13%?
 - b) Foglald táblázatba, hogy az egyes évek végén hogyan alakul a tőketartozás, a kamat, a tőketörlesztés és a fennmaradó tőketartozás!

ELMÉLET

Kockázatok

A befektetési döntéseknél a kamatok (hozamok) mellett feltétlenül figyelembe kell venni a kockázatokat is. A kockázatokat az okozza, hogy nem ismerjük előre a később lejárló történéseket és gazdasági folyamatokat, amelyek a pénz (vagy egy befektetés) értékét majd meghatározzák.

Kockázatos lehet például külföldi pénznemben hitelt felvenni, ha forintban kapjuk a fizetésünket, mivel a külföldi pénznem árfolyama később jelentősen megváltozhat. Kockázatos lehet például olyan termékbe befektetni, amelynek változékony az értéke (pl. deviza, részvény, startup). A kockázat matematikai mérésére a szórás számítása ad egy lehetőséget. (Erre a statisztika témakörben találsz példát.)

CSOPORTVERSENY

Alkossatok 4 fős csoportokat! Oldjátok meg az 1–8. feladatokat, a 8. feladat eredményét írájátok fel a táblára! Az a csoport nyer, amelyik először írja fel a jó eredményt. A verseny addig tart, amíg mindegyik csoport felírja eredményét a táblára.

1. feladat Mennyivel nagyobb az $a_n = 5n - 4$ sorozat hetedik tagja a harmadiknál?	<i>A kapott számot jelöljétek a K betűvel!</i>
2. feladat Egy mértani sorozat harmadik tagja is és kvóciense is $\frac{1}{2}$. Hány tagot kell összeadni az elsőtől kezdve, hogy az összeg 3,8-nél nagyobb legyen?	<i>Az eredményt jelöljétek az L betűvel!</i>
3. feladat Mennyi az 50-nél kisebb kétjegyű pozitív egész számok összege?	<i>A kapott számot jelöljétek M-mel!</i>
4. feladat Egy számtani sorozat negyedik tagja 31, a hatodik tagja pedig 51. Számítsd ki a sorozat első tagját!	<i>A kapott számot jelöljétek N-nel!</i>
5. feladat Hány olyan mértani sorozat van, amelynek a negyedik tagja 20, és a hatodik tagja 5?	<i>A kapott számot jelöljétek P-vel!</i>
6. feladat Elhelyeztünk a bankban 80 ezer forintot évi 6%-os kamatos kamatra. Hány év alatt nő ez az összeg $80 \cdot 1,06^7$ ezer forintra?	<i>A kapott számot jelöljétek Q-val!</i>
7. feladat Összeadtuk az $a_n = 0,08 \cdot 2^{n-1}$ sorozat első tizenöt tagját. Mennyi az összeg legkisebb helyi értékű számjegye?	<i>A kapott számot jelöljétek R-rel!</i>
8. feladat Számítsátok ki, mennyi az $\frac{M}{K}x^2 - (R \cdot Q + 3)x - 2(L \cdot N + P) = 0$ másodfokú egyenlet pozitív gyöke!	<i>A kapott számot írájátok fel a táblára! Zárójelben tüntessétek fel a felírás időpontját!</i>

FELADAT

- 1.** (Érettségi feladat, 2017)
Egy matematikaversenyen 25 feladatot kell a résztvevőknek megoldaniuk 75 perc alatt. A felkészülés során Vera azt tervezgeti, hogy mennyi időt töltsön majd a könnyebb feladatok megoldásával, és mennyi időt hagyjon a nehezebbekre. Az első feladatra 1 percet szán. A versenyfeladatok általában egyre nehezedő sorrendben vannak megadva; Vera ezt úgy veszi figyelembe, hogy a második feladattól kezdve mindig ugyanannyival növeli az egyes feladatok megoldására fordítható időt. Vera a rendelkezésére álló teljes időtartamot szeretné kitölteni a feladatok megoldásával. A terv szerint összesen mennyi időt szán Vera az utolsó 4 feladat megoldására?
- 2.**
Anikó gyűjtőszámlát nyit. Minden év elején 250 000 Ft-ot helyez el a számláján, amelyen évente egyszer, az év végén van a kamatjótírás.
- a) Mekkora az éves kamatláb, ha két év elteltével 560 000 Ft van a számláján?
- b) Hány év után gyűlik össze 1 600 000 Ft a számlán, ha a kamatláb 9%?

HÁZI FELADAT

1.

Egy számítógép úgy van beállítva, hogy ha a webszerver túlterheltség miatt elutasítja a csatlakozási kérelmét egy bizonyos weboldalhoz, akkor először 1 másodperc után próbál újracsatlakozni, majd – hogy a túlterheltséget enyhítse – újabb 3 másodperc után, és így tovább, fokozatosan, mindig 2 másodperccel növelve a várakozási időt az egyes próbálkozások között.

- Hány másodpercet fog várni a gép a tizedik újrapróbálkozás előtt?
- Összesen hány másodperccel hosszabbítja meg a csatlakozási kísérleteket a tíz várakozás?
- Hány másodpercet fog várni a gép a tizedik újrapróbálkozás előtt, ha úgy állították be, hogy az első 1 másodperc után a várakozási időt mindig 10%-kal növelje?
- Összesen hány másodperccel hosszabbítja meg a csatlakozási kísérleteket a tíz várakozás ebben az esetben?

2.

(Érettségi feladat, 2021)

Anna szeretne részt venni a Balaton-átúszáson, amelyhez két különböző 21 napos edzéstervet készít. Elhatározta, hogy az első napon 200 métert, az utolsó, 21. napon pedig az átúszás teljes távját, 5200 métert úszik. Az egyik edzéstervben a napi úszásmennyiségek egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a másik változatban pedig (jó közelítéssel) egy mértani sorozaté. A teljes felkészülés alatt összesen hány métert úszna Anna az egyik, illetve a másik változatban?

3.

A modern matematika egyik érdekes ága a fraktálok elméletével foglalkozik. A fraktálok olyan alakzatok, amelyeknek bármilyen kicsiny részletét kinagyítva az eredetihez hasonló alakzatot kapunk. Az egyik legegyszerűbb és leg híresebb fraktál az úgynevezett *Sierpiński-háromszög*. Húzzuk meg egy teljesen feketére festett szabályos háromszög középvonalait, és az így keletkezett belső háromszöget fessük fehérre! Ismétljük meg az eljárást az összes megmaradt fekete háromszöggel újra és újra! Az eljárás során kapott alakzatok közül az első hatot láthatod a mellékelt ábrán.



- Hány fekete háromszög lesz a 20. ábrán?
- Adj meg rekurzív képletet, amellyel az előző ábra fekete részének területéből kiszámítható a feketén maradó rész területe!
- Az eredeti háromszög területének mekkora része fekete a 20. ábrán?

RÁADÁS

Mennyit ér Manhattan?

A holland nemzeti levéltárban őrzik azt a dokumentumot, amely szerint 1626-ban a hollandok 60 guldenért (24 dollárt érő holland pénzéért) vásárolták meg a mai Manhattan szigetét az indián őslakosoktól. Történészek vitatják ugyan, hogy hogyan értelmezhetők akkor ennek a szerződésnek a szövegét, de a tényeknél maradva: 24 dollárba került akkor a mai Manhattan.

Warren Buffett, aki 2008-ban a világ leggazdagabb emberének számított, befektetési stratégiákat magyarázó, humorral átszőtt írásai egyikében a következő példát hozta fel a befektetői türelem és a kamatos kamat illusztrálására. Ha ezt a 24 dollárt az indián őslakosok befektették volna évi 6,5%-os kamatra, akkor az 1626-ban kapott 24 dollár a cikk írása idején $24 \cdot 1,065^{338} \approx 4,2 \cdot 10^{10}$ dollárt (42 milliárd dollárt) ért volna. Ha kiharcolták volna a 7%-os kamatot, akkor pedig $24 \cdot 1,07^{338} \approx 20,5 \cdot 10^{10}$ (205 milliárd) dollárt. Érdekes tehát hosszú távon gondolkodni. Vajon mikor írhatta ezt?



FELADAT

1. Egy számtani sorozat tizenötödik tagja 21. Mennyi az első tagja, és mennyi a differenciája, ha az első tizenöt tag összege

a) 52,5; b) $-52,5$?

2. A következő feladatokban $\{b_n\}$ egy-egy mértani sorozatot, n egy pozitív egész számot jelöl, q a mértani sorozat hányadosa, S_n pedig az első n tagjának az összege. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

b_1	q	n	b_n	S_n
120	0,5	10		
-5	3	8		
	-2	4	72	
	2	5		155

3. Egy vetélkedőn 29 000 forint jutalmat osztottak ki. Az első helyezett 3800 Ft-ot kapott, a további helyezettek rendre 200 Ft-tal kevesebbet, mint a versenyben közvetlenül előttük végző versenyző. Hány versenyzőt jutalmaztak?

4. (Érettségi feladat, 2016)

A kereskedelemmel foglalkozó cégek között több olyan is van, amely állandóan emelkedő fizetést kínál. Péter munkát keres, és két cég ajánlata közül választhat:

I. ajánlat: Az induló havi fizetés 200 000 Ft, amit havonta 5000 Ft-tal emelnek négy éven át.

II. ajánlat: Az induló havi fizetés 200 000 Ft, amit havonta 2%-kal emelnek négy éven át.

Melyik ajánlatot válassza, ha azt az ajánlatot szeretné választani, amelyik négy év alatt nagyobb össz-jövedelmet kínál?

TUDÁSPRÓBA

1. Egy számtani sorozat második tagja 5, nyolcadik tagja 14. Határozd meg a sorozat differenciáját és az első 20 tag összegét!

2. A vásárban úgy kínálják eladásra a Betyár nevű lovat, hogy csak a patkószegekért kell fizetni, a ló ingyen van. Az első patkószeg ára 1 fillér, minden további patkószeg ára kétszer annyi fillér, mint az előzőé. Betyár patáiba összesen 32 patkószeget vertek. Mennyiért lehet megvenni Betyárt?



3. Egy számtani sorozat első tagja 8, és a differenciája 1,5. Hány tagot adtunk össze, ha a tagok összege 1233?

4. Egy gazdának 7 fia van. Az ember úgy rendelkezik, hogy a legidősebb fiú kapja meg a vagyonának a 20%-át, a korban utána következő a vagyonból így megmaradó 80%-os rész 20%-át, és így tovább a többi fiú, utoljára a legkisebb is megkapja a megmaradó rész 20%-át. Az ezután megmaradó vagyonrészt jótékony célra szánja a gazda.

- a) A vagyon hány százalékát kapja a középső fiú?
b) A vagyon hány százalékát kapja a legkisebb fiú?
c) A vagyonnak mekkora része jut jótékony célokra?

5. Kinga gyűjtőszámlát nyit, és öt éven keresztül minden év elején 450 000 Ft-ot helyez el rajta. A kamatláb 9%, és évente egy összegben, az év végén írják jóvá. Mekkora összeg lesz öt év után Kinga gyűjtőszámláján?

A Fibonacci-sorozat

Egy 800 éves feladat:

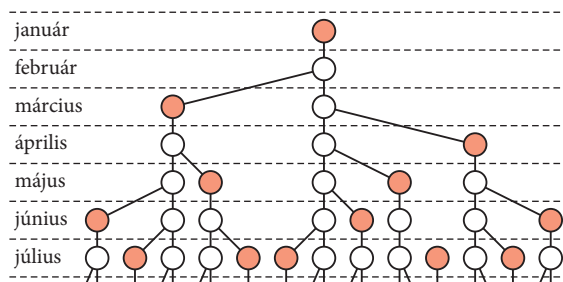
Hány nyúl származik egy év alatt egy pár nyúltól, ha mindegyik pár két hónapos korától kezdve havonta egy új párt hoz világra, és közben egyetlen nyúl sem pusztul el?

Megoldás

Tegyük fel, hogy januárban születik az első megfigyelt nyúlpár. Ekkor ők februárban még nem szaporodnak, de a következő hónapok mindegyikében származik tőlük egy új nyúlpár. Tehát februárban 1 nyúlpár, márciusban azonban már 2 pár van. Áprilisban 1 pár születik a januári nyulaktól, és megvan még a márciusi 2 pár.

Jelöljük f_n -nel az n -edik hónapban élő nyúlpárok számát. Ekkor a fentiek szerint $f_1 = f_2 = 1$; $f_3 = 2$; $f_4 = 1 + 2 = 3$.

Mely nyulak szaporodnak májusban? Azok, amelyek legalább 2 hónaposak, vagyis azok, amelyek már éltek márciusban. Ilyen pár 2 van. Tehát májusban él a 2 újszülött pár és még a 3 áprilisi pár: $f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5$.



Tovább hasonlóan haladva azt tapasztaljuk, hogy minden hónapban annyi nyúlpár él, amennyi az előző két hónapban élt párok összege. Így $f_6 = f_4 + f_5 = 3 + 5 = 8$; $f_7 = f_5 + f_6 = 5 + 8 = 13$. A sorozatot folytatva azt kapjuk, hogy $f_8 = 21$; $f_9 = 34$; $f_{10} = 55$; $f_{11} = 89$; $f_{12} = 144$, így $f_{13} = f_{11} + f_{12} = 233$.

Tehát megfigyelésünk kezdete után egy évvel 233 pár nyúl élt, az eredetin kívül még 232 pár, vagyis 464 nyúl. Ennyi származott az eredeti pártól.

Ez az érdekes probléma Leonardo Pisano itáliai (pisai) matematikus nevéhez fűződik, aki apja, Bonacci után a Fibonacci nevet kapta halála után. Ő 1200 körül élt, a matematikának igen sok területével foglalkozott eredményesen. Róla nevezték el az itt szereplő $\{f_n\}$ sorozatot Fibonacci-sorozatnak. A sorozat rekurzív meghatározása: $f_1 = f_2 = 1$; $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, ha $n > 2$.

Megjegyzés

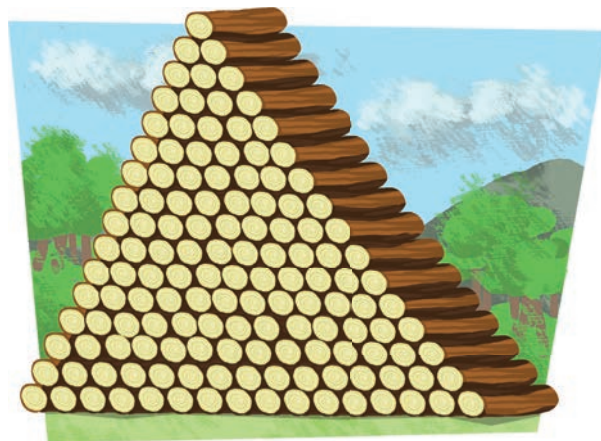
A Fibonacci-sorozat sok helyen felfedezhető a természetben is, például a napraforgómagok elrendeződésében vagy a fenyőtoboz szerkezetében. A Fibonacci-sorozathoz kapcsolódik például az a feladat is, hogy hányféleképpen mehetünk fel egy lépcső n -edik fokára, ha egyszerre egyet vagy kettőt léphetünk. (Ez a feladat szerepelt a 22. lecke Bevezetőjében.)



Leonardo Fibonacci (kb. 1170 – kb. 1250) itáliai matematikus

Témazáró feladatgyűjtemény

- 1.** Határozd meg az alábbi sorozatok hatodik, illetve tizedik tagját!
a) $a_n = 3n^2 + n - 4$; b) $b_n = 2^n - 3$
- 2.** Hányadik tagja az alábbi sorozatoknak a 17?
a) $a_n = 5n - 43$; b) $b_n = 3^n - 64$
- 3.** Tagja-e az $a_n = 0,5n^3 - 9$, valamint $b_n = \frac{3n+2}{2n}$ sorozatoknak a $-9,5$?
- 4.** Egy számsorozat első tagja 3. Add meg a sorozat első hat tagját, ha tudjuk, hogy $a_{n+1} = 3a_n - 2$, ahol n pozitív egész szám!
- 5.** Egy számtani sorozat hetedik tagja 503, harmincharmadik tagja 399. Határozd meg a sorozat első tagját és differenciáját!
- 6.** Egy számtani sorozat első három tagjának összege 12, valamint tudjuk, hogy az ötödik tag tizenkettővel kisebb a nyolcadik tagnál. Melyik ez a sorozat?
- 7.** A 7 és 35 közé iktass be hat számot úgy, hogy a megadott számokkal együtt egy számtani sorozat nyolc egymást követő tagját kapjuk!
- 8.** Egy számtani sorozat harmadik tagja $-17,5$. A sorozat első nyolc tagjának összege kétszer akkora, mint a következő nyolc tag összege. Határozd meg a sorozat első tíz tagjának összegét!
- 9.** Határozd meg a háromjegyű páratlan számok összegét!
- 10.** Egy számtani sorozat első tíz tagjának összege 20; ezek közül a páratlan indexű tagok összege 5. Melyik ez a sorozat?
- 11.** Egy számtani sorozat első három tagjának összege 21, ugyanezen tagok szorzata 231. Határozd meg a sorozat nyolcadik és kilencedik tagjának szorzatát!
- 12.** Határozd meg azoknak a négyjegyű számoknak az összegét, melyek hárommal osztva 2 maradékot adnak!
- 13.** Egy számtani sorozat első tagja 8; differenciája 3. Az első tagtól kezdve hányat kell összeadni, hogy a kapott összeg legalább 1000 legyen?
- 14.** (Érettségi feladat, 2005)
a) Iktass be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek!
b) Számítsd ki a 6 és az 1623 közötti négygyel osztható számok összegét!
- 15.** Milyen valós k esetén lesz az alábbi három kifejezés értéke egy számtani sorozat három egymást követő tagja?
 $3k - 1$; $4k + 2$; $7 - 5k$
- 16.** Farönköket rakunk „gúlába” úgy, hogy a legalsó sorban 16 farönk van. A második sor farönköt az első sor szomszédos farönkjei közötti mélyedésekbe helyezzük, és így tovább. Az utolsó sorba egy farönk jut. Hány farönk van az egész halomban?



- 19.** Egy derékszögű háromszög oldalhosszai számtani sorozatot alkotnak. A háromszög kerülete 84 cm. Mekkora a háromszög területe és a legkisebb szöge?
- 20.** Add meg az n -edik tagját a mértani sorozatoknak!
a) $\frac{6}{5}; \frac{12}{5}; \frac{24}{5}; \dots$ **b)** $\frac{5}{2}; \frac{5}{4}; \frac{5}{8}; \dots$ **c)** $3; -9; 27; \dots$
- 21.** Számítsd ki a mértani sorozatnak a hatodik elemét, ha az első eleme és a hányadosa a következő:
a) $a_1 = 6; q = 0,5;$
b) $a_1 = -\frac{1}{2}; q = 4;$
c) $a_1 = \frac{9}{4}; q = -\frac{1}{3}!$
- 22.** Számold ki a mértani sorozat első elemét, ha
a) $a_8 = 256; q = 4;$
b) $a_3 = \frac{4}{9}; q = -\frac{1}{3};$
c) $a_6 = 2,25; q = 1,5!$
- 23.** Határozd meg a mértani sorozatok hányadosát!
a) $a_1 = 4; a_5 = 64$
b) $a_1 = \frac{2}{5}; a_5 = \frac{1}{40}$
c) $a_1 = \sqrt{5}; a_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}$
- 24.** Határozd meg n értékét, ha $\{a_n\}$ mértani sorozat, és
a) $a_1 = 3; a_n = 243; q = 3;$
b) $a_1 = 0,6; a_n = 0,075; q = 0,5;$
c) $a_1 = \frac{8}{5}; a_n = 0,1; q = \frac{1}{2}!$
- 25.** 160 és 5 közé iktass be négy számot úgy, hogy egy mértani sorozat egymás utáni elemeit alkossa a hat szám!
- 26.** Egy mértani sorozat első három tagjának összege 168, az ezt követő három tag összege 21. Határozd meg a sorozat első hat tagját!
- 27.** Egy mértani sorozat első eleme 0,5, kvóciense -2 . Határozd meg a sorozat első hat elemének szorzatát!
- 28.** Egy mértani sorozat első tagja 1, hányadosa 0,5. A sorozatnak melyik két szomszédos tagja közé esik a 0,000 001?
- 29.** Egy berendezés értéke évente átlagosan 6%-kal csökken. Mennyit ér egy félmillió forintos berendezés 12 év múlva?
- 30.** Évi hány százalékos átlagos növekedés mellett változik az eredetileg 6800 m^3 mértékű faállomány mennyisége 20 év alatt $12\,260 \text{ m}^3$ -re?
- 31.** Hány év alatt duplázódik meg a betett pénz abban a pénzintézetben, melyben a kamat mértéke évi 5%?
- 32.** Tíz éven keresztül minden év elején elhelyezünk a bankban 100 000 forintot. Mennyi pénzünk lesz a tizedik év végén, ha a kamat mértéke 5,5% évente?
- 33.** Egy autó jelenlegi értéke 4,5 millió forint. Mennyit ért az autó 7 évvel ezelőtt, ha tudjuk, hogy az évi amortizáció (értékromlás) mértéke 4%?
- 34.** Zsófi úgy számol, hogy negyedévente 120 000 Ft-ot tud megtakarítani. Ezt az összeget minden negyedév elején befizeti egy bankszámlára, amelyen a pénze kamatos kamattal kamatozik, évi 8%-os kamattal, és a kamatot évente négyszer, a negyedévek végén írják jóvá. Mennyi pénz gyűlik így össze Zsófi számláján 3 év alatt?
- 35.** Gergely 400 000 Ft hitelt vesz fel 2 évre, a kamatláb évi 10,5%. A szerződése szerint az első év végén csak az első éves kamatot fizeti vissza, a második év végén a többi tartozást. Mekkora összeget fizet vissza az első, illetve a második év végén?
- 36.** Mennyi annak a hatmillió forintos hitelnek az évenkénti törlesztőrésze, melyet tíz éven keresztül tíz egyenlő részletben szeretnénk visszafizetni, ha a bank a hitelért 10% kamatot számol évente?
- 37.** Egy számtani sorozat második tagja 5. Ezen sorozat első, harmadik és tizenegyedik tagja egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Határozd meg a mértani sorozat hányadosát!
- 38.** Egy mértani sorozat első három tagjának összege 52. Ha a harmadik számot 16-tal csökkentjük, egy számtani sorozat első három tagjához jutunk. Határozd meg a mértani sorozatot!
- 39.** Egy számtani sorozat első, második, illetve hetedik tagja egyúttal mértani sorozatot alkot. Tudjuk, hogy ezen tagok összege 93. Határozd meg a számtani sorozat első hét elemét!

BEVEZETŐ



A XX. század első évtizedeiben népszerű amerikai magazin volt a The Literary Digest. Ismert volt közvélemény-kutatásairól, és négyévente megbízható előrejelzést adott az amerikai elnökválasztás kimeneteléről. Ennek ellenére 1936-ban nagyot tévedtek. A felvett 2,4 millió válasz alapján magabiztos (+19%) befutónak vélték Alfred Landont, ám Franklin Delano Roosevelttel elsöprő fölényrel (+24%) győzött. Mi okozhatta a közvélemény-kutatás ekkora tévedését?

A hibához többek között az is hozzájárult, hogy a saját olvasóikat, illetve az autó- és telefontulajdonosokat kérdezték meg. Mindhárom csoportba a vagyonosabb amerikaiak tartoztak, így a felmérés nagyon erősen torzított. Ugyanekkor a Gallup, egy amerikai elemző- és tanácsadó cég már 50 000 fős reprezentatív minta alapján pontos becslést adott a végeredményre.

ELMÉLET

Reprezentatív minta

A statisztikai adatgyűjtés során gondosan meg kell határozni a gyűjtés körülményeit, a gyűjtés módszertanát és a kiválasztott mintát. Akkor mondunk reprezentatívnak egy mintavételt, ha a mintához tartozó adatok megfelelő módon tükrözik a teljes adatsokaságot.

Több kritériumnak is teljesülnie kell ahhoz, hogy reprezentatív mintáról beszélhessünk. Fontos kritérium, hogy ha a választadókat több, egymástól elkülönülő csoportba tudjuk sorolni (például életkor, iskolai végzettség, lakókörnyezet szerint stb.), akkor a csoportokra jellemző létszámarányok közelítőleg ugyanazok legyenek a mintában, mint a teljes adatsokaságban. A minta nagysága is lényeges szempont.

FELADAT

1.

Egy város önkormányzata az alábbi statisztikát készítette a helyi lakosságról:

Legmagasabb iskolai végzettség	Legfeljebb alapfokú	Szakiskolai	Érettségi	Felsőfokú
Nők	1927	1281	2271	1121
Férfiak	1610	1963	1845	982

Ez a táblázat 8 osztályba sorolta a lakosságot.

- Állíts össze ezeknek a szempontoknak megfelelően a teljes lakosságból egy 2000 fős, a táblázattal megadott 8 osztályba sorolt reprezentatív mintát! Eredményeidet táblázatban add meg!
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy a város teljes lakosságából véletlenszerűen kiválasztott személy férfi, és a legmagasabb végzettsége szakiskola?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 2000 fős mintából véletlenszerűen kiválasztott személy érettségizett nő? (Vigyázz, nem biztos, hogy az érettségi a legmagasabb végzettsége!)
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 2000 fős mintából véletlenszerűen kiválasztott személy érettségizett nő? (Vigyázz, nem biztos, hogy az érettségi a legmagasabb végzettsége!)

2.

Egy élelmiszer-áruház reprezentatív felmérés keretében arról kérdezte meg vásárlóit, hogy van-e törzsvásárlói kártyájuk, illetve hogy igénybe veszik-e az áruház által felkínált kuponokat. A válaszadók 60%-ának van törzsvásárlói kártyája, 25%-uk használja a kuponokat. A felmérésben részt vevők 12%-a válaszolt igennel mindkét kérdésre.

- Készíts Venn-diagramot a vásárlókról, köztük a törzsvásárlókról és a kuponhasználókról! Írd a Venn-diagram megfelelő tartományába, hogy a vásárlók hány százaléka tartozik a felmérés szerint ahhoz a csoporthoz!
- Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott vásárló használja a két kedvezmény valamelyikét?
- Az áruház becslése szerint körülbelül 10 000 vásárlójuk van. Közülük hányan nem élnek a fenti lehetőségek egyikével sem?

3.

Egy biztosító a náluk biztosított 5000 személygépkocsiról baleseti statisztikát készített 5000 ügyfelük megkérdezésével. Megállapították, hogy ezen ügyfelek 72%-a napi rendszerességgel vezet gépkocsit. Az elmúlt 12 hónapban az 5000 ügyfél közül 6% volt érintett különféle gépjárműbalesetekben. A statisztikából azonban az is kiderült, hogy a nem rendszeresen vezetők között ez az arány 9%.

- A nem rendszeres vezetők közül hánynak volt balesete?
- Hány rendszeresen vezető ügyfél volt érintett autóbalesetben az elmúlt évben?
- Mekkora a valószínűsége, hogy a balesetben érintett ügyfelek közül egyet tetszőlegesen kiválasztva éppen egy rendszeres vezetőt választunk?

HÁZI FELADAT

1.

Az alábbi táblázat a KSH 2021-es adatai alapján készült. A külföldi látogatók számát tartalmazza (ezer főre kerekítve) 15 osztályba sorolva. 2021-ben a táblázatban megadott országokból érkezett a legtöbb látogató Magyarországra.



	Románia	Szlovákia	Ausztria	Lengyelország	Németország
1 napos látogatók	8528	5710	4800	1167	1038
1–3 éjszakát eltöltők	458	492	520	82	540
4 vagy több éjszakát eltöltők	274	93	409	233	910
Összesen					

Az alábbi 1000 fős minta azt mutatja, hogy a magyarországi tapasztalataikról hány látogatót kérdeztek meg az egyes osztályokból.

	Románia	Szlovákia	Ausztria	Lengyelország	Németország
1 napos látogatók	293	188	160	35	69
1–3 éjszakát eltöltők	38	52	34	9	10
4 vagy több éjszakát eltöltők	34	10	32	16	20
Összesen					

- Töltsd ki a táblázatok utolsó sorait!
- Keress érveket amellett, hogy az 1000 fős minta nem reprezentatív!
- Mutasd meg, hogy a látogatók nemzetek szerinti eloszlását tekintve a minta reprezentatívnak tekinthető!
- Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy olyan látogatót, aki legfeljebb 3 éjszakára marad (az összes látogatóból, az első táblázat adatai szerint), akkor mennyi a valószínűsége, hogy német?

BEVEZETŐ



A szórást gyakran alkalmazzák a befektetések (pl. részvények) kockázatának mérésekor, mivel a változékonyabb árfolyamok, amelyek szórása nagyobb, több bizonytalanságot hordoznak. (A múltbeli hozamok és szórások a jövőbeni árfolyamokat illetően azonban nem adnak egyértelmű információt.)

Ha egy részvény árfolyama az egyik évben 5%-kal emelkedik, akkor azt mondjuk rá, hogy a hozama 5%. Ha 5%-kal csökken, akkor a hozama -5% .

Ha egy részvény hozama három egymás utáni évben 6%, 4%, 5%, akkor az átlagos hozam ebben a három évben 5%.

Ha egy másik részvény hozama ugyanekkor 10%, -2% és 10%, akkor az átlagos hozam 6%, ami magasabb, mint az első részvény esetében, de jóval nagyobb a hozam szórása. Ez a részvény kockázatosabb, mint az első.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Táblázatba foglaltuk két részvény éves záró árfolyamát 5 egymást követő évben. Kiszámoltuk, hogy a részvények árfolyama hány százalékkal nőtt vagy csökkent az előző évhez viszonyítva. Ezt a százaléklában megadott értéket nevezik (éves) hozamnak. Határozd meg az egyes részvények esetében a hozamok szórását! Ezen mutató alapján melyik részvény számít kockázatosabbnak?

Év	2018	2019	2020	2021	2022
A részvény árfolyama (Ft)	2600	2756	3060	3000	3150
A részvény hozama		6%	11%	-2%	5%
B részvény árfolyama (Ft)	4700	5170	4963	5560	5670
B részvény hozama		10%	-4%	12%	2%

Megoldás

Egy adatsokaság szórását megkapjuk, ha meghatározzuk az adatok átlagát, majd az adatoknak az átlagtól való eltérését. Utána ezen eltéréseket négyzetre emeljük, majd meghatározzuk ezek átlagát, végül gyököt vonunk. A számolásban segítségünkre lehet egy olyan táblázat, amely tartalmazza az adatokat (x_i), az adatoknak az átlagtól való eltérését ($x_i - \bar{x}$), valamint az átlagtól való eltérés négyzetét ($(x_i - \bar{x})^2$).

A hozamok átlaga az A részvény esetében $\bar{x} = \frac{6 + 11 - 2 + 5}{4} = 5$, a B részvény esetében $\bar{x} = \frac{10 - 4 + 12 + 2}{4} = 5$.

A részvény	2019	2020	2021	2022
x_i	6	11	-2	5
$x_i - \bar{x}$	1	6	-7	0
$(x_i - \bar{x})^2$	1	36	49	0

B részvény	2019	2020	2021	2022
x_i	10	-4	12	2
$x_i - \bar{x}$	5	-9	7	-3
$(x_i - \bar{x})^2$	25	81	49	9

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{1 + 36 + 49 + 0}{4}} = \sqrt{21,5} \approx 4,64$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{25 + 81 + 49 + 9}{4}} = \sqrt{41} \approx 6,40$$

Az A részvény esetében az átlagos hozam 5%, és a hozam szórása 4,64%.

A B részvény esetében az átlagos hozam ugyancsak 5%, de a hozamok szórása nagyobb, 6,40%.

Ha két részvény esetén az átlagos hozam megegyezik, akkor azt tekintjük kockázatosabbnak, amelyiknek nagyobb a szórása. Tehát ezen mutató alapján a B részvény a kockázatosabb, mivel éves hozama változékonyabb volt.

Megjegyzés: Ha két részvény átlagos hozama különböző, akkor a relatív szórást szokták figyelembe venni, amit úgy kapunk meg, hogy a szórást elosztjuk az átlaggal.

ELMÉLET

A szórás meghatározása (ismétlés)

(Jelölések: $\bar{x}$: az adatok átlaga, σ : az adatok szórása)

Számítsd ki az adatok átlagát!

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Vedd az adatok és az átlag különbségének négyzetét!

$$(x_1 - \bar{x})^2, \dots, (x_n - \bar{x})^2$$

Számold ki ezek átlagát (ez a szórásnégyzet)!

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Vonj gyököt a szórásnégyzetből!

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

FELADAT

1.

Táblázatba foglaltuk egy részvény éves záró árfolyamát forintban öt egymás utáni évben.

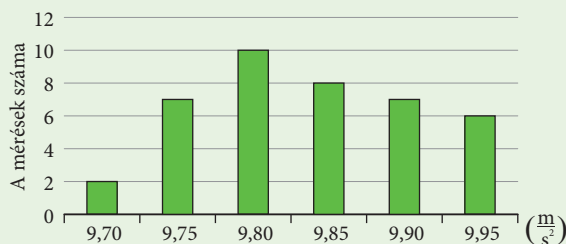
2015	2016	2017	2018	2019
6150	7380	7011	8063	8789

- a) Határozd meg (a második évtől kezdve) a részvény hozamát, vagyis azt, hogy hány %-kal nőtt, illetve csökkent az árfolyam az előző évhez viszonyítva!
- b) Határozd meg a hozamok átlagát és szórását!

2.

(Érettségi feladat nyomán, 2017)

Egy fizikaórán a diákok a nehézségi gyorsulás, a g értékét határozták meg. 40 mérés eredményét tartalmazza a következő diagram.

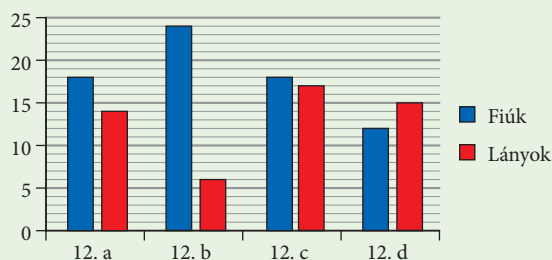


Készíts gyakorisági táblázatot, majd határozd meg a 40 mérési eredmény móduszát, mediánját, átlagát és szórását!

3.

(Érettségi feladat, 2022)

Az ábrán látható diagram egy végzős évfolyam négy osztályában mutatja a fiúk és a lányok számát.



- a) A legkisebb létszámú osztályban a lányok száma hány százaléka a fiúk számának?
- b) Töltsd ki a táblázatot, majd határozd meg a 4 adat terjedelmét, átlagát és szórását!

Osztály	12. a	12. b	12. c	12. d
Lányok létszáma				

- c) A 12. b osztályban év végén a lányok matematikajegyeinek átlaga 4,5, az egész osztály matematikajegyeinek átlaga pedig 4,1 volt. Mennyi volt év végén a 12. b osztályban a fiúk jegyeinek átlaga matematikából?

HÁZI FELADAT

1.

Egy részvény árfolyama négy egymás utáni évben 15; 12; 3 illetve 8%-kal nőtt. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a részvény hozama ebben a négy évben 15%, 12%, 3% és 8% volt. Határozd meg a hozamok átlagát és szórását!

2.

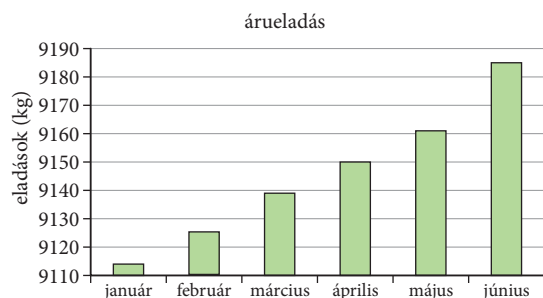
A táblázat egy serdülő-röplabdacsapat játékosainak testmagasságát tartalmazza.

Adat (cm)	168	170	171	172	175
Gyakoriság	2	3	4	3	3

Határozd meg az adatok átlagát és szórását!

BEVEZETŐ

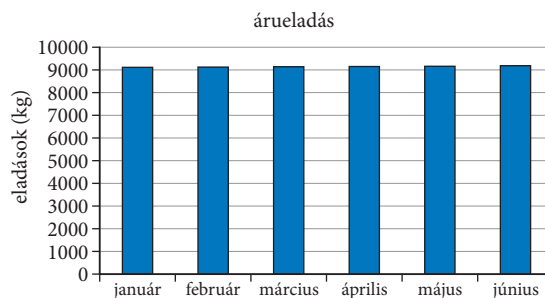
Egy mosópor-forgalmazó kisvállalatnál kimutatást készítettek a havi eladásokról. Az adatokat oszlopdiaagramon ábrázolták.



Első ránézésre az a benyomásunk támad, hogy az eladások az év első 6 hónapjában erőteljesen növekedtek. Ám ha figyelmesebben megnézzük a diagramot, akkor láthatjuk, hogy az eladott termék mennyisége a januári 9114 kg-ról júniusra csak 9185 kg-ra növekedett, ami mindössze 0,8%-os növekedést jelent.

Mi okozza a félreértést? Az, hogy a függőleges tengelyen nem a 0-tól indul a beosztás. Emiatt a diagram nem arányos, vagyis az egyes hónapokban eladott mosópormennyiségek aránya torzítva jelenik meg a szemlélő számára.

Ha megrajzoljuk azt a diagramot, amelyen az oszlopok területe (és magassága) arányos az eladott termék mennyiségével, az jól szemlélteti, hogy a havi eladások nem változtak lényegesen. Ezen a diagramon azonban alig látható a hat hónap alatt bekövetkező kismértékű növekedés.



FELADAT

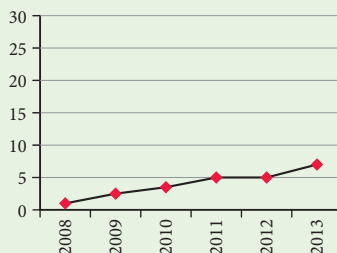
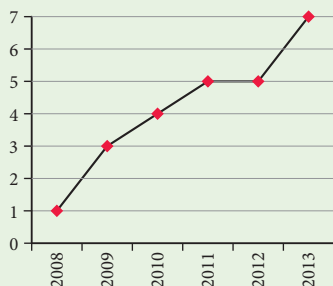
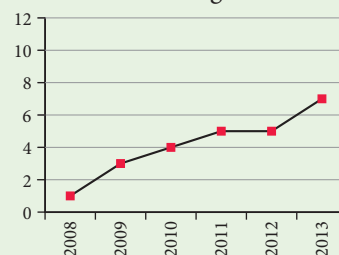
1.

Az uniós pénzből felújított játszótérek számáról vonaldiagram készült a főváros egyik kerületében. Ugyanezeket az adatokat két napilap is megjelentette, de nem pontosan ebben a formában.

a) Egyértelmű-e, hogy mit ábrázolnak a diagramok?

b) Hogyan befolyásolja a diagram léptéke az adatok értelmezését? Milyen másféle diagramot használhatunk, hogy reális képet kapjunk illetve, hogy elfedjük a reális képet?

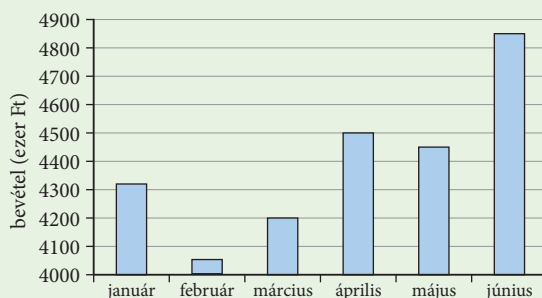
eredeti diagram



2.

Az oszlopdiagram egy városi mozi bevételeit ábrázolja.

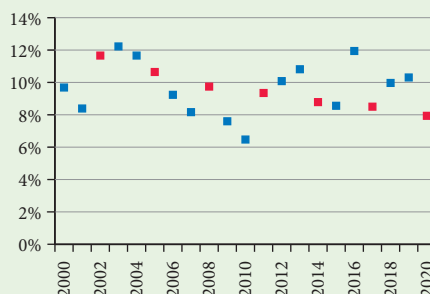
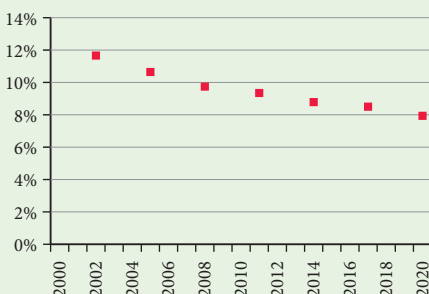
- Mi a félvezető az oszlopdiagramban?
- Módosítsd úgy a diagramot, hogy jobban ábrázolja a tényleges viszonyokat!



3.

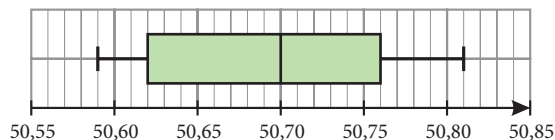
„A munkanélküliség folyamatos csökkenése városunkban” címmel jelent meg egy újságcikk a város helyi lapjában. A cikk szerint a munkanélküliség folyamatosan csökkent, amit az olvasók a mellékelt diagramon meg is tekinthetnek. A valóságban a második diagram szerint alakult a munkanélküliség. (A kék jelek a közbülső évek adatait mutatják.)

- Milyen módszerrel érte el az újságcikk írója azt, hogy a címben megjelent állítását alátámassza?
- Hogyan kellene módosítania a szerzőnek az újságcikk címét?



KIDOLGOZOTT FELADAT

Tamás úszóversenyző. A felkészülési ideény egyik hónapjában sokszor leúszta azt a versenytávot, amelyikben a versenyen indulni fog. Az edzések során elért, másodpercben mért időeredményeiről dobozdiagram készült. A diagram alapján válaszolj a kérdésekre!



- Ebben a hónapban mekkora volt Tamás legjobb ideje?
- Igaz-e, hogy a mérések 60%-ában jobb időt úszott, mint 50,7 s?
- Igaz-e, hogy a mérések 40%-ában gyengébb eredménnyel úszott, mint 50,76 s?
- Lehetséges-e, hogy eredményeinek átlaga 50,71 s? Ha igen, akkor adj meg egy ilyen adatsokaságot!

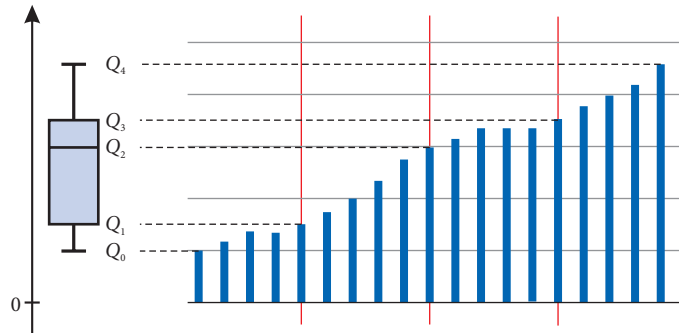
Megoldás

- A legjobb idő az adatsokaság legkisebb eleme, tehát 50,59 s.
- és c) Ha nagyság szerint növekvő sorrendbe rendezzük az adatokat, akkor a dobozdiagramot meghatározó öt adat a minimum, az alsó kvartilis, a medián, a felső kvartilis és a maximum. Ezek úgy osztják négy csoportra az adatokat, hogy mindegyik csoportba az adatok körülbelül 25%-a esik.
Az adatok legalább 50%-a nagyobb vagy egyenlő, mint a medián, ezért nem lehetséges, hogy a mérések 60%-ában 50,7 s-nél jobb időt úszott.
Az adatok legalább 75%-a kisebb vagy egyenlő, mint 50,56 s, ezért nem lehetséges, hogy a mérések 40%-ában 50,76 s-nél jobb időt úszott.
- Lehetséges. Egy ilyen adatsokaság például: 50,59; 50,62; 50,62; 50,7; 50,7; 50,7; 50,76; 50,76; 50,76; 50,79; 50,81. (Az adatok összege 557,81, átlaga 50,71. A 3. adat az alsó kvartilis, a 6. adat a medián, a 9. adat a felső kvartilis.)

A dobozdiagram jellemzői és készítése (ismétlés)

- A dobozdiagram készítéséhez az adatokat növekvő sorrendbe kell állítani. Az adatelemző kihagyhatja a szélsőséges értékeket, ezeket hívjuk kiugró adatoknak. A továbbiakban az így kapott szűkebb adathalmazzal dolgozik tovább.
- A figyelembe vett adatok közül a legkisebb adat a minimum (Q_0), a legnagyobb adat a maximum (Q_4).
- Páratlan elemszám esetén a középső adat, páros elemszám esetén a két középső adat átlaga a medián (Q_2).
- A mediánnal kettéosztjuk az adatsokaságot (páratlan elemszámnál a mediánt elhagyjuk).
- Külön-külön vesszük a két részsokaság mediánját, ezek az alsó kvartilis (Q_1) és a felső kvartilis (Q_3).

maximum	Q_4
felső kvartilis	Q_3
medián	Q_2
alsó kvartilis	Q_1
minimum	Q_0



Ezzel az eljárással négy, körülbelül azonos számú adatot tartalmazó részre vágtuk az adatsokaságot.

A maximum és a minimum különbsége a **terjedelem**, az alsó és a felső kvartilis különbsége a **félterjedelem**.

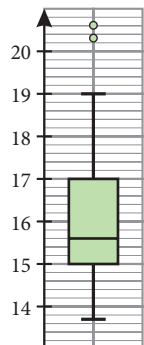
Kiugró adat

A statisztika **kiugró adatról** beszél, ha egy adat jelentősen eltér a többi adattól. Sokszor van kiugró adat abban az esetben, ha az adatoknak nagy a szórása, de keletkezhet ilyen adat mérési hiba folytán is.

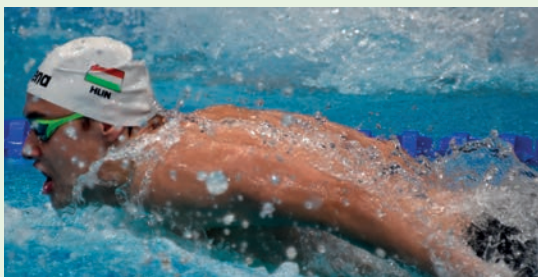
Kiugró az az adat, amely

- a felső kvartilisnél több, mint a félterjedelem másfélszeresénél nagyobb;
- az alsó kvartilisnél több, mint a félterjedelem másfélszeresével kisebb.

Ha egy adatsokaság kiugró adatot (vagy adatokat) is tartalmaz, akkor a dobozdiagramon a dobozból kiinduló vonal addig az adatig tart, amelyik még nem kiugró adat, vagyis kevésbé tér el az alsó kvartilistől lefelé, mint a félterjedelem másfélszerese, vagy kevésbé tér el a felső kvartilistől felfelé, mint a félterjedelem másfélszerese. A kiugró adatokat különálló pontokkal jelöljük.

**FELADAT**

4. A budapesti 2022-es úszó-világbajnokságon Milák Kristóf remek idővel, világcsúccsal nyerte a 200 méteres pillangóúszást. Készíts dobozdiagramot az elődöntőben elért legjobb 8 eredményről, illetve a döntőben elért 8 eredményről! Figyelj a kiugró adatokra! (Az adatok perc : másodpercben vannak megadva, az 1:52,39 jelentése 1 perc és 52,39 másodperc.)



Elődöntő (továbbjutók)	
Kristóf Milák	1:52,39
Tomoru Honda	1:54,01
Noè Ponti	1:54,20
Léon Marchand	1:54,32
Luca URLando	1:54,50
Tamás Kenderesi	1:54,79
Alberto Razzelli	1:54,87
James Guy	1:54,91

Döntő	
Kristóf Milák	1:50,34
Léon Marchand	1:53,37
Tomoru Honda	1:53,61
Noè Ponti	1:54,29
Luca URLando	1:54,92
Tamás Kenderesi	1:55,20
Alberto Razzelli	1:55,52
James Guy	1:55,54

5.

Az atlétikai sportágak közül a férfi távolugrás világcsúcsának van a leghihetetlenebb története.

Az 1968-as olimpián Mexikóvárosban Bob Beamon a második helyezettnél 71 cm-rel ugrott távolabbra. 8,90 m-es ugrásával 55 cm-rel döntötte meg a korábbi világcsúcsot. Fantasztikus világcsúcsa szinte megdönthetetlennek tűnt. A következő 54 évben (e könyv megírásáig, 2022-ig) megengedett hátszél mellett egyetlen versenyen tudtak ennél nagyobbat ugrani, 1991-ben. A világcsúcs azóta 8,95 m. (2022-ben

8,36 m volt a győztes eredmény az atlétikai világ-bajnokságon.)

Táblázatba foglaltuk az 1968-as olimpia férfi távolugrás döntőjében született eredményeket méterben. Ábrázold az adatokat dobozdiagramon!

1.	8,90	5.	8,09	9.	7,94	13.	7,71
2.	8,19	6.	8,02	10.	7,93	14.	7,66
3.	8,16	7.	7,97	11.	7,90	15.	7,51
4.	8,12	8.	7,94	12.	7,89	16.	7,44

(Forrás: <https://olympics.com>)

HÁZI FELADAT

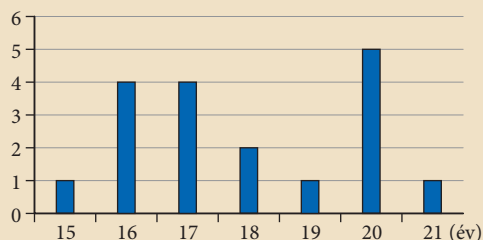
1.

A magyar labdarúgó-bajnokság 2021–22-es idényében a góllövőlista érdekes eredménnyel zárult. A gólkirály ugyanis Ádám Martin lett 31 góllal, és hatalmas fölényrel utasított maga mögé mindenkit. 11 játékos volt, aki legalább 10 gólt ért el. Készíts a 11 játékos eredményéről dobozdiagramot! Figyelj a kiugró adatra!

1. Ádám Martin – 31 gól
2. Kenan Kodro és Nenad Lukics – 15 gól
4. Ryan Mmaee, Varga Barnabás és Budu Zivzivadze – 13 gól
7. Claudiu Bumba, Marin Jurina és Koszta Márk – 11 gól
10. Nikolics Nemanja és Ugrai Roland – 10 gól

2.

Az oszlopdiagramról egy szabadulószoza látogatóinak életkorát és létszámát olvashatod le. Készíts táblázatot és dobozdiagramot az adatokról!



3.

Nagyobb cégek, vállalkozások számára kötelező, hogy minden hónapban összesítést készítsenek dolgozóik számáról, szaknyelven az átlagos állományi létszámról. A Központi Statisztikai Hivatal által közzétett útmutató pontosan leírja, hogyan kell számolni ezt az adatot.

1	Sze	38
2	Cs	37
3	P	35
6	H	36
7	K	40
8	Sze	40
9	Cs	39
10	P	38
13	H	40
14	K	40
15	Sze	41
16	Cs	41
17	P	37
20	H	39
21	K	40
22	Sze	39
23	Cs	39
24	P	39
27	H	37
28	K	37

„Az átlagos állományi létszám a munkavállalók folyamatosan vezetett létszámnyilvántartása alapján számított mutató. Az átlagolást havonta kell elvégezni az adott hónap naptári napjainak figyelembevételével, vagyis a naponkénti állományi létszámok összegét, a munkarend szerinti pihenőnapokra és ünnepnapokra az azt megelőző munkanap létszámát véve figyelembe, el kell osztani a hónap napjainak számával. [...]

A statisztikai adatgyűjtésekben, ha erre eltérő utalás nincs, az adatokat tizedes nélkül, a kerekítés általános szabályainak figyelembevételével, egész számban kell közölni.”

(Útmutató és annak módosítása, kiegészítése a munkaügy-statisztikai adatszolgáltatáshoz)

Egy cég februári létszámnyilvántartása látható az oldalsó táblázatban.

a) Az útmutató szövege alapján állapítsd meg a létszámadatokat a hónap mind a 28 napjára!

b) Készíts gyakorisági táblázatot és kördiagramot az adatokról!

c) Számítsd ki a februári átlagos állományi létszámot!

ELMÉLET

Az **osztályba sorolás** segítségével áttekinthetően lehet rendezni, ábrázolni, elemezni adatokat.

Ha osztályba sorolást alkalmazunk, akkor úgy kell létrehozni osztályokat, hogy semelyik két osztálynak nem lehet közös része, és együtt az osztályok fedjék le az összes adatot. Torzíthat az adatsokaságon, ha túl kevés osztályt hozunk létre, és nehezíti az adatsokaság elemzését, ha túl sok az osztály. (Dolgozatok osztályzásánál például 5 osztályba sorolja a tanár a dolgozatokat.)

Osztályközépnek nevezzük az adott osztályt határoló két érték számtani közepét. Osztályokba sorolt adatok statisztikai jellemzőit úgy számoljuk ki, mintha minden adat a hozzá tartozó osztályközépkel lenne egyenlő.



FELADAT

- 1.** (Érettségi feladat, 2020)
Megkértünk 50 embert, hogy egy barkácsboltban vegyenek egy-egy marék (kb. 10 dkg) acélszöget ugyanabból a fajtából, majd megszámoltuk, hogy hány darab szöget vásároltak. Táblázatba foglaltuk a darabszámok eloszlását.

Vásárolt szögek száma (db)	120–124	125–129	130–134	135–139	140–144	145–149	150–154	155–159
Gyakorisága	1	2	6	17	10	7	5	2

- a) Készíts oszlopdiagramot a táblázat alapján!
b) Számítsd ki az 50 adat mediánját és átlagát!

Mindkét esetben az osztályközepekkel (az egyes osztályok alsó és felső határának átlagával) számolj!

- 2.** A következő táblázat a Békéscsabán 2020-ban és 2021-ben mért havi csapadékmennyiséget mutatja:

2020	jan.	febr.	márc.	ápr.	máj.	jún.	júl.	aug.	szept.	okt.	nov.	dec.
Csapadék (mm)	13	68	60	12	38	133	74	46	37	95	20	50
2021	jan.	febr.	márc.	ápr.	máj.	jún.	júl.	aug.	szept.	okt.	nov.	dec.
Csapadék (mm)	63	28	13	34	47	22	19	34	26	14	53	67

- a) Töltsd ki a következő táblázatot a 24 hónap adatai segítségével, és készíts gyakorisági diagramot!

Osztályok	1–25 mm	26–50 mm	51–75 mm	76–100 mm	101–133 mm
Gyakoriság					
Osztályközép					

- b) Számítsd ki az a) feladat eredményei alapján az átlagos havi csapadékmennyiség közelítő értékét!
c) Számítsd ki a szórást az osztályközepek felhasználásával!
d) Az eredeti, 24 adatot tartalmazó táblázatban szereplő értékek hány százaléka van a b)-ben kapott átlaghoz a c)-ben kapott szórásnál közelebb? Változik-e a válasz, ha az osztályközepekkel számolsz?

3.

Egy matematikatanár minden általa tanított 12. osztályos tanulóval (összesen 50 fő) ugyanazt a dolgozatot íratta meg. Az elért pontszámokat a táblázat tartalmazza.

Az osztályközépek felhasználásával számítsd ki a pontszámok átlagát és szórását!

Elért pontszám	0–30	31–40	41–50	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100
Gyakoriság	0	2	8	21	9	9	1	0

4.

Egy elektromos paneleket gyártó üzemben az egyik robot feladata az, hogy 14,5 mm hosszúságú vékony huzaldarabokat vágjon le,

amelyekkel egy panel két forrasztási pontját kötik majd össze. A robot működését a levágott huzaldarabok hosszának mérésével rendszeresen ellenőrzik. Az egyik ellenőrzés adatait mutatja az alábbi táblázat.

A huzaldarab hossza (mm)	11,8–12,8	12,9–13,9	14,0–15,0	15,1–16,1	16,2–17,2
Gyakorisága	2	4	13	5	1

- a) Ha a gyártásnál az előírt hosszától való megengedett legnagyobb eltérés (a *tűrés*) $\pm 1,6$ mm, akkor az ellenőrzött huzalok hány százaléka felel meg ennek az előírásnak?
- b) Mennyi az ellenőrzött huzaldarabok hosszának átlaga (az osztályközépekkel számolva)?
- c) Ha a tűrés helyett a legfeljebb 1,2 mm-es szórás lenne a minőségi előírás, akkor a minta alapján ítélni kellene-e állítani a robot működését? Az osztályközépekkel számolj!

HÁZI FELADAT

1.

(Érettségi feladat, 2018)

Egy iskolában érettségiző 100 tanuló matematika írásbeli érettségi vizsgájának pontszámairól készült az alábbi táblázat.

Pontszám	0–20	21–30	31–40	41–50	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100
Tanulók száma	0	8	12	8	18	20	12	16	6

- a) A táblázat alapján mennyi a 100 tanuló pontszámának lehetséges legmagasabb átlaga?
- b) Osztályközépekkel számolva mennyi a 100 tanuló pontszámainak átlaga?

2.

A tojásokat a tömegük alapján 4 osztályba sorolják. A határon lévő tojásokat már a felsőbb kategóriába teszik, tehát ha a tömeg 63 g, akkor a tojás L-es besorolást kap.

Egy farmon az egyik hónapban 1200 tojást termeltek. A legkisebb tojás tömege 45 g volt, a legnagyobbé 81 g. Az osztályközépekkel számolva határozd meg a tojások tömegének átlagát és szórását!

Méret jele	Tojás tömege
S (kicsi)	kevesebb, mint 53 g
M (közepes)	53–63 g
L (nagy)	63–73 g
XL (extra nagy)	több, mint 73 g

3.

Az emberek szellemi teljesítőkéességének (intelligenciájának) a szintjét egy-egy számmal, az *intelligenciahányados* (IQ-val) szoktuk kifejezni. Ennek mérését alkalmas kérdéssorozatokkal, ún. *IQ-tesztekkel* végzik, és ún. *IQ-pontokkal* értékelik. Egy modern IQ-tesztet a szakemberek akkor tekintenek szabványszerűnek, ha az átlagos várható eredmény 100, míg a szórás 15 IQ-pontnak felel meg. Egy frissen elkészült teszt első 1000 kitöltőjének eredményeit a mellékelt táblázat szemlélteti.

Elért pontszám	75–84	85–94	95–104	105–114	115–124	125–134
Gyakorisága	17	132	225	468	130	28

Az osztályközépek segítségével számítsd ki a fenti 1000 fős minta átlagát és szórását! Megfelel-e ez a teszt a szakemberek kívánalmainak?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Feldobunk három különböző pénzdarabot, egy 10 forintost, egy 20 forintost és egy 50 forintost. Feljegyezzük (ilyen sorrendben), hogy a pénzérméknek a fej vagy az írás oldala látható. Az FIF leírás például azt jelenti, hogy a 10 forintosnak a fej, a 20 forintosnak az írás, és az 50 forintosnak a fej oldala látható.

- Soroljuk fel a kísérlet lehetséges kimeneteleit!
- Hány olyan lehetőség van, amikor több fejet dobunk, mint írást?
- Hány olyan lehetőség van, amikor ugyanannyi fejet dobunk, mint írást?

Megoldás

- A dobás után mindhárom pénzdarabon fej vagy írás látható. Ez $2^3 = 8$ lehetőség. A lehetséges kimenetek tehát: FFF, FFI, FIF, FII, IFF, IFI, IIF, III.
- Azok a lehetőségek, amikor több fej van, mint írás: FFF, FFI, FIF, IFF. Ez összesen 4 lehetőség.
- Mivel a fejek és írások számának összege 3, és mindkettő egész szám, ezért nincs olyan lehetőség, amikor a fejek és írások száma egyenlő.



ELMÉLET

Elemi események	egy véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei
Eseménytér	az elemi események halmaza
Esemény	az eseménytér részhalmaza
Biztos esemény	olyan esemény, amely biztosan bekövetkezik
Lehetetlen esemény	olyan esemény, amely nem következhet be

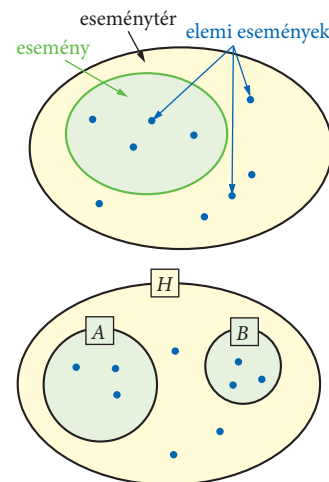
Jelölés: Az eseményeket nagybetűkkel (A ; B ; ...), az eseményteret H -val jelöljük.

Egy A **esemény komplementere** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be. Jele: $\bar{A}$.

Az A és B események **egymást kizáró események**, ha egyszerre nem következhetnek be.

Példák abban a kísérletben, amikor feldobunk 3 különböző pénzérmét

Elemi esemény	a 10 Ft-ossal és a 20 Ft-ossal fejet, az 50 Ft-ossal írást dobunk: FFI
Eseménytér	a 8 elemi esemény halmaza {FFF, FFI, FIF, FII, IFF, IFI, IIF, III}
Biztos esemény	a fejek száma kisebb vagy egyenlő, mint 3
Lehetetlen esemény	a fejek száma és az írások száma egyenlő
Egy a esemény	a 10 Ft-ossal fejet dobunk {FFF, FFI, FIF, FII}
Az $\bar{a}$ esemény	a 10 Ft-ossal írást dobunk {IFF, IFI, IIF, III}
Egymást kizáró események	A és $\bar{A}$



FELADAT

1.

Az iskolában az egyik nyelvtanár szervezett egy külfoglalkozást. A foglalkozáson részt vevők közül 13 diák tanul olaszt, 10 diák tanul spanyolt, 7 diák pedig olaszt és spanyolt is. Véletlenszerűen kiválasztunk négy részt vevő diákot. Melyik lehetetlen esemény, melyik biztos esemény? Válaszodat indokold!

A: Mind a négyen tanulnak olaszt.

B: Van köztük olaszos.

C: Egyikük sem tanulja mindkét nyelvet.

D: Mind a négyen tanulnak spanyolt, de olaszt nem.

2.

Anna, Bea, Csaba és Dénes rendszeresen összejönnek társasjátékozni. Azt, hogy ki a kezdő játékos, egy mobilalkalmazás segítségével döntik el. Ez az alkalmazás véletlenszerűen adja valamelyiküknek az egyes sorszámot.

Egyik nap két menetet terveznek, mindkét alkalommal ezzel az alkalmazással választják ki, hogy ki kezd. Egy elemi eseménynek tekintjük, hogy konkrétan az egyikük (pl. Anna) kezdi az első játékot, és konkrétan valamelyikük (pl. Bea) kezdi a második játékot. (Előfordulhat az is, hogy mindkét játékot ugyanaz kezdi.)

a) Hány elemi eseményből áll az eseménytér?

b) Sorold fel annak az eseménynek az elemi eseményeit, hogy „Anna kezdi az első játékot”!

c) Melyek egymást kizáró események a következők közül?

K: Bea kezdi a második játékot.

L: Egyik játékot sem Bea kezdi.

M: Mindkét játékot Bea kezdi.

N: Dénes kezdi a második játékot.

d) Fogalmazd meg a c) pontban felsorolt események komplementerét!



3.

Az egyik játékban két dobókockával dobunk. Az egyik dobókocka fehér, a másik fekete. Táblázatban ábrázoltuk a lehetséges elemi eseményeket.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

a) Hány elemi esemény van?

b) Hány elemi eseményből állnak a következő események?

A: A fehér dobás hatos.

B: Pontosan az egyik dobás hatos.

C: Van hatos dobás.

D: Mindkét dobás hatos.

E: Egyik dobás sem hatos.

F: Van olyan dobás, amelyik nem hatos.

c) Vannak-e a b) részben felsorolt események között komplementer események?

d) Fogalmazd meg olyan eseményt, amelyhez 5 elemi esemény tartozik!

e) Melyik lehetetlen esemény, melyik biztos esemény?

K: A dobások szorzata prím.

L: A dobások összege kisebb, mint 36.

M: A dobások összege 1.

N: A dobások összege köbszám.

HÁZI FELADAT

1.

Feldobunk egy pénzérmét háromszor egymás után, és sorban feljegyezzük a dobás eredményét. Sorold fel, melyik elemi események esetén következik be az adott esemény!

A: Pontosan az egyik dobás fej.

B: Az első két dobás eredménye különböző.

C: Az első dobás fej, vagy a második dobás írás.

D: Az első két dobás fej, és a második két dobás írás.

2.

Két dobókockával dobunk. Keress egymást kizáró, valamint komplementer eseményeket az alábbi események között!

A: A dobások szorzata prím.

B: Legalább egy dobás egyes.

C: A dobások szorzata nagyobb, mint 16.

D: A két dobás egyenlő.

E: Pontosan egy dobás egyes.

F: A dobások összege kisebb, mint 9.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Feldobunk három különböző pénzdarabot, egy 10 forintos, egy 20 forintos és egy 50 forintos. Feljegyezzük (ilyen sorrendben), hogy a pénzérméknek a fej vagy az írás oldala látható. Vizsgáljuk a következő két eseményt:

A : a 10 forintoson az írás oldal látható;

B : az érmék között pontosan egy fej látható.

Hány elemi esemény esetében következik be az A vagy B , illetve az A és B esemény?

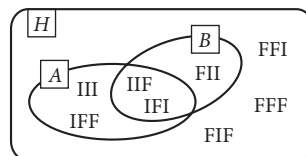
Megoldás

Mivel mindegyik pénzdarab kétféleképpen érkezik le, az eseménytér $2^3 = 8$ elemi eseményből áll. Az ábrán ezeket az elemi eseményeket ábrázoltuk.

Az A eseményhez azok az elemi események tartoznak, amikor a 10 forintoson az írás oldal látható. Ezek az III, IIF, IFI, IFF események, ez tehát 4 elemi esemény.

A B eseményhez azok az elemi események tartoznak, amikor az érmék között pontosan egy fej látható. Ezek az IIF, IFI és FII események, tehát 3 elemi esemény.

Az A vagy B esemény azt jelenti, hogy a 10 forintoson írás van, vagy pontosan egy fej van. Ehhez az ábra szerint 5 elemi esemény tartozik. Az A és B esemény azt jelenti, hogy a 10 forintoson írás van, és pontosan egy fej van. Ehhez az ábra szerint 2 elemi esemény tartozik.



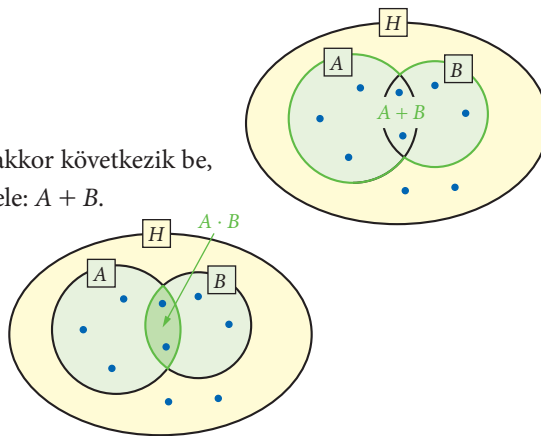
ELMÉLET

Események összege és szorzata

- Az A és B **események összege** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik. Jele: $A + B$.
- Az A és B **események szorzata** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha az A és B esemény is bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$.

Egymást kizáró események szorzata a lehetetlen esemény.

Komplementer események összege a biztos esemény.



FELADAT

1.

Táblázatba foglaltuk egy hét időjárási jellemzőit.

	hétfő	kedd	szerda	csütörtök	péntek	szombat	vasárnap
átlaghőmérséklet	14 °C	18 °C	17 °C	10 °C	9 °C	10 °C	12 °C
csapadék	0 mm	4 mm	12 mm	8 mm	0 mm	0 mm	6 mm
szélerősség	5 km/h	8 km/h	2 km/h	26 km/h	18 km/h	3 km/h	szélcsend

Adott három esemény:

A : Az átlaghőmérséklet több, mint 10°C.

B : A csapadék több, mint 5 mm.

C : A szél erősebb, mint 5 km/h.

Mely napokra igaz, hogy bekövetkezett a következő esemény?

a) $A + B$

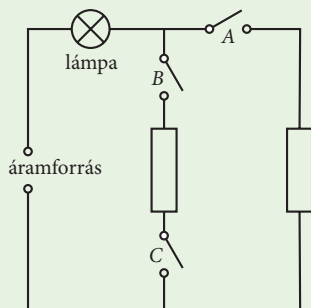
b) $B \cdot C$

c) $\bar{B} + C$

d) $\bar{A} \cdot B \cdot C$

2.

Egy elektromos áramkör vázlatát mutatja az ábra. Legyen az A esemény az, hogy az A kapcsoló zárva van, a B esemény az, hogy a B kapcsoló zárva van, a C esemény az, hogy a C kapcsoló zárva van. (Amikor egy kapcsoló zárva van, akkor rajta keresztül tud folyni az áram, azon a helyen záródik az áramkör.)



Világít-e a lámpa a következő eseményekben?

- a) $B \cdot C$ b) $A \cdot \bar{B}$
c) $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$ d) $\bar{A} \cdot (\bar{B} + \bar{C})$

3.

Sándor, József és Benedek mindhárman rendszeresen lottóznak. Az ötösloton játszanak, ahol a lehetséges lottószámok az 1; 2; 3; ... ; 89; 90 számok. Sándor kedvenc számai a négyzetszámok és a köbszámok. József kedvenc számai azok, amelyek oszthatók 5-tel vagy 7-tel. Benedek kedvenc számai azok, amelyek-

ben a számjegyek összege 9 vagy 10. Mindhárman mindig a kedvenc számaik közül jelölnek meg ötöt. Legyen S az az esemény, hogy egy lottószám Sándor kedvenc számai közül való, J az az esemény, hogy József kedvenc számai közül való, és B az az esemény, hogy Benedek kedvenc számai közül való.

- a) Az egyik héten a lottón a 42, 45, 49, 63, 64 számokat húzták ki. Ezek közül melyik számok esetén következik be az $S + \bar{J}$, illetve a $J \cdot B$ esemény?
b) Adj meg két-két olyan lottószámot, amelyre be következik az $\bar{S} \cdot J$, illetve az $J + \bar{B}$ esemény!
c) Hány olyan szám van a lottószelvényen, amely esetén bekövetkezik az $S \cdot B \cdot J$ esemény?

4.

Az A esemény 18 elemi esemény esetén következik be, a B esemény 15 elemi esemény esetén.

- a) Legalább hány elemi esemény esetén következik be az $A + B$, az $A \cdot B$, illetve az $A \cdot \bar{B}$ esemény?
b) Legfeljebb hány elemi esemény esetén következik be az $A + B$, az $A \cdot B$, illetve az $A \cdot \bar{B}$ esemény?

5.

Legalább, illetve legfeljebb hány elemi esemény esetén következik be az A , illetve a B esemény, ha tudjuk, hogy az $\bar{A} \cdot B$ 15 elemi esemény, az $A + \bar{B}$ 16 elemi esemény esetén következik be?

HÁZI FELADAT

1.

Egy városban minden héten szerdán és szombaton van koncert, pénteken, szombaton és vasárnap van színházi előadás, és hétfőt kivéve minden este filmvetítés. Legyen K az az esemény, hogy egy adott napon van koncert, S az az esemény, hogy van színházi előadás, és F az az esemény, hogy van filmvetítés. 2023-ban január elseje vasárnapra esett. A felsorolt napok közül mely napokon következik be a $K \cdot (S + F)$, a $K + \bar{S}$, illetve a $K \cdot S + \bar{F}$ esemény?

január 10. január 18. január 23.
február 2. február 11. február 14.

2.

András megállapította, hogy a nadrágzszebében lévő pénz több mint 15 000 Ft, és csak papírpénz van nála. Adottak a következő események:

- A: András zsebében kettő papírpénz van, és azok ugyanolyan értékűek.
B: András zsebében három papírpénz van, és mind különböző értékűek.
C: András zsebében kevesebb pénz van, mint 20 000 Ft.

Mennyi pénz lehet András zsebében, ha bekövetkezik a következő esemény?

- a) $A \cdot B$ b) $A + C$ c) $B + \bar{C}$ d) $A \cdot \bar{C}$

3.

A H eseménytér 20 elemi eseményből áll. Az A esemény 12, a B esemény 16 elemi esemény halmaza. Legalább, illetve legfeljebb hány elemi esemény esetén következik be az $\bar{A} + \bar{B}$, az $\bar{A} \cdot \bar{B}$, illetve az $A + \bar{B}$ esemény?

KIDOLGOZOTT FELADAT

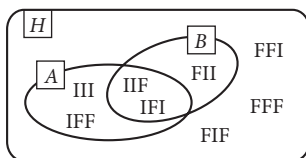
Feldobunk három különböző pénzdarabot, egy 10 forintost, egy 20 forintost és egy 50 forintost. Feljegyezzük (ilyen sorrendben), hogy a pénzérméknek a fej vagy az írás oldala látható. Mennyi a valószínűsége, hogy az A , a B , az $A + B$, illetve az $A \cdot B$ esemény bekövetkezik?

A : a 10 forinton az írás oldal látható

B : az érmék között pontosan egy fej látható

Megoldás:

Az eseménytér $2^3 = 8$ elemi eseményből áll. Az ábrán ezeket az elemi eseményeket ábrázoltuk.



Az A eseményhez 4 elemi esemény tartozik, a B eseményhez 3.

Ezek az elemi események egyformán valószínűek, ezért az A esemény valószínűségét a kedvező esetek (azaz az A eseményhez tartozó elemi események) számának és az összes elemi esemény számának a hányadosával számolhatjuk ki. Az $A \cdot B$ esemény esetén ugyanígy járhatunk el.

$$P(A) = \frac{4}{8} = 0,5 \quad \text{és} \quad P(B) = \frac{3}{8} = 0,375$$

Az $A + B$ eseményhez az ábra szerint 5 elemi esemény, az $A \cdot B$ eseményhez pedig 2 elemi esemény tartozik.

A valószínűségek tehát:

$$P(A + B) = \frac{5}{8} = 0,625 \quad \text{és} \quad P(A \cdot B) = \frac{2}{8} = 0,25$$

ELMÉLET

1. Esemény valószínűsége

Ha az elemi események egyformán valószínűek (és a számuk véges), akkor



$$P(A) = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$$

A komplementer esemény valószínűsége: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Ha az A és a B események **egymást kizáró események** (azaz nem következhetnek be egyszerre), akkor:

- $P(A \text{ vagy } B \text{ bekövetkezik}) = P(A + B) = P(A) + P(B)$;
- $P(A \text{ és } B \text{ bekövetkezik}) = P(A \cdot B) = 0$.

Megjegyzés:

Az A esemény szempontjából kedvező elemi eseménynek hívjuk az A eseménybe tartozó elemi eseményeket. Ezek azok az elemi események, amikor az A esemény bekövetkezik.

2. Független események

Definíció: Az A és a B események **függetlenek**, ha $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

A függetlenség akkor teljesül, ha a B esemény valószínűsége ugyanakkora abban az esetben, ha az A esemény bekövetkezik, mint amikor az $\bar{A}$ következik be, és viszont. Függetlenek például azok az események, amelyek esetében az egyik bekövetkezése nem befolyásolja, hogy a másik bekövetkezik-e. Ha például feldobunk két dobókockát, akkor az az esemény, hogy az első kocka hatos, nincs hatással arra, hogy a második kocka hatos-e.

Két esemény függetlenségét úgy bizonyíthatjuk, hogy ellenőrizzük, teljesül-e a $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ egyenlőség.

FELADAT

- 1.** A háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy
- egyik számjegye sem ötös;
 - legalább egy számjegye ötös;
 - pontosan egy számjegye ötös?

- 2.** Egy társasjátékban a játékos egyszerre két dobókockával dob, az egyik kocka fehér, a másik fekete. Ha a fehér kockával nem egyest dob, akkor annyit léphet előre, amennyi a két dobás összege. Ha azonban a fehér kockával egyest dob, akkor meg kell fordítani a fehér kockát, így az egyesből hatos lesz, és azt kell hozzáadni a fekete kockával dobott számhoz. (Ha például a fehérrel egyest és a feketével négyest dob, akkor a fehér kockát hatosra fordítja, így az összeg $6 + 4 = 10$.)

Foglald táblázatba, hogy az egyes elemi események esetén mennyit lép előre a játékos!

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Mennyi a valószínűsége, hogy a játékos

- hatot;
- nyolcat vagy kilencet;
- legfeljebb négyet;
- legalább tízet lép előre?

- 3.** Egy technikum tanulóira vonatkozik a táblázat.

	Lányok	Fiúk	Összes
A tanulók száma	165		
A tanulók %-os aránya		75	
A kosárlabdázók száma			270
A kosárlabdázók %-os aránya a lányok, illetve a fiú között	≈ 18		

- Töltsd ki a táblázatot!
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott kosárlabdázó
A) lány; B) fiú?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott diák
A) kosárlabdázó; B) nem kosárlabdázó lány;
C) kosárlabdázó lány vagy nem kosárlabdázó fiú;
D) kosárlabdázó fiú vagy nem kosárlabdázó lány?
- Számítással igazold, hogy a következő két esemény nem független egymástól!
E: Egy véletlenszerűen kiválasztott diák kosárlabdázik.
F: Egy véletlenszerűen kiválasztott diák fiú.

- 4.** Feldobunk három szabályos pénzérmét. Tekintsük a következő eseményeket!

A: Mindhárom érmevel azonosat dobunk.

B: Több fejet dobunk, mint írást.

C: Ugyanannyi fejet dobunk, mint írást.

- Mennyi az események valószínűsége?
- Számítással igazold, hogy az A és B események függetlenek!

HÁZI FELADAT

- 1.** A háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám
- számjegyei különbözők;
 - mindhárom számjegye kisebb, mint 4?

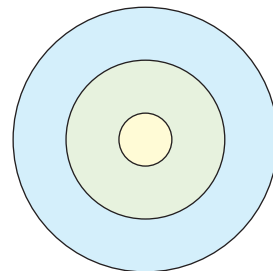
- 2.** Egy ház 67 lakója közül 15 gyerek, a felnőttek 57,7%-a nő, a gyerekek 40%-a fiú. Mennyi a valószínűsége, hogy ha a lakók névsorából véletlenszerűen kiválasztunk valakit, akkor ő egy
- gyerek;
 - felnőtt nő;
 - felnőtt vagy fiú;
 - lány?

- 3.** Öt lány, Anna, Bea, Cili, Dóri és Eszter véletlenszerű sorrendben érkeznek meg egy találkozójukra.

- Mennyi a következő események valószínűsége?
A: Anna érkezik harmadikként.
B: Bea érkezik negyedikként.
C: Cili és Dóri közvetlenül egymás után érkeznek.
- Számítással igazold, hogy A és B nem független események!

KIDOLGOZOTT FELADAT

Az ábra szerinti céltáblán a belső kör átmérője 10 cm. Mindkét körgyűrű szélessége ugyancsak 10 cm. Ha véletlenszerűen érkezik egy lövés, amely eltalálja a céltáblát, akkor mekkora valószínűséggel találja el a középső körlapot, a belső körgyűrűt, illetve a külső körgyűrűt?



Megoldás

A feladat szövege alapján feltesszük, hogy a lövés a céltábla bármely pontjába érkezik. Az elemi eseményeknek megfelelőek a céltábla pontjai. A körlapnak azonban végtelen sok pontja van, és hasonló módon a középső körlapnak is végtelen sok pontja van. A valószínűség eddig használt (kombinatorikus) definíciója értelmében, amikor a kedvező elemi események számát az összes elemi esemény számával kell osztanunk, végtelent kellene osztani végtelennel, amit nem tudunk értelmezni. Ezért nem az elemi események számát vesszük a számítás alapjául, hanem az adott esemény szempontjából kedvező területnek és a teljes körlap területének a hányadosát.

$$P(\text{belső kört találja el a golyó}) = \frac{\text{belső körlap területe}}{\text{teljes körlap területe}} = \frac{5^2\pi}{25^2\pi} = \frac{1}{25}$$

$$P(\text{belső körgyűrűt találja el a golyó}) = \frac{\text{belső körgyűrű területe}}{\text{teljes körlap területe}} = \frac{15^2\pi - 5^2\pi}{25^2\pi} = \frac{8}{25}$$

$$P(\text{külső körgyűrűt találja el a golyó}) = \frac{\text{külső körgyűrű területe}}{\text{teljes körlap területe}} = \frac{25^2\pi - 15^2\pi}{25^2\pi} = \frac{16}{25}$$

(Az utóbbit kiszámolhatjuk úgy is, hogy a biztos esemény valószínűségéből levonjuk a komplementer esemény valószínűségét: $P = 1 - \left(\frac{1}{25} + \frac{8}{25}\right) = \frac{16}{25}$.)

ELMÉLET

Geometriai valószínűség

Ha egy esemény bekövetkezését egy geometriai mennyiséggel (pl. hosszúság, terület, térfogat, szög) jellemezzük, akkor a szemlélet alapján belátható, hogy az esemény valószínűsége arányos az adott mennyiség mértékével. Ezért az esemény valószínűsége számolható úgy, hogy az adott eseményhez tartozó mennyiség mértékét osztjuk a teljes eseménytérhez tartozó ugyanezen mennyiség mértékével.

Például: Egy szerencsekerék esetében az adott körívek középponti szögének nagyságát osztjuk a teljes szerencsekerékhez tartozó középponti szög nagyságával, azaz 360° -kal.

FELADAT

1. Egy hangya mászkál egy méterrúdon. A méterrúd 1 m hosszú, és meg vannak jelölve a rúd 0 cm, 10 cm, 20 cm, ... 100 cm-hez tartozó pontjai. Feltesszük, hogy egy adott pillanatban a hangya helyzete véletlenszerű. Mennyi a valószínűsége, hogy az adott pillanatban a hangya
- a) közelebb van a rúd 0-val jelölt végéhez, mint a 100-zal jelölt végéhez;
 - b) közelebb van a méterrúd középpontjához, mint valamelyik végéhez;
 - c) közelebb van a rúd 20 cm-es pontjához, mint a 100 cm-es végéhez?

2.

- a) Egy körlepton véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont közelebb van a kör középpontjához, mint a körvonalhoz?
- b) Egy gömb belsejében véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont közelebb van a gömb középpontjához, mint a gömbfelülethez?

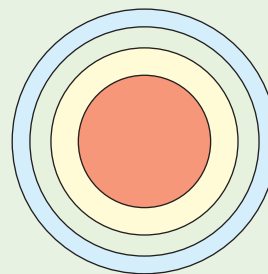
3.

Egy padlózat négyzet alakú csempékkel van borítva. A csempék oldalai 20 cm szélesek, és köztük a fuga mindenhol 0,5 cm széles. Ha leejtünk egy 2,8 cm átmérőjű 50 forintost, és az véletlenszerűen fekszik el valahol a padlón, akkor mennyi a valószínűsége, hogy úgy áll meg, hogy nem érinti semelyik fugát?

4.

Az ábra szerinti céltáblát koncentrikus körökkel négy tartományra osztottuk. A céltábla sugara 16 cm. Ha

egy nyílvevő véletlenszerűen eltalálja a céltáblát, akkor egyes tartományokba érkezés valószínűsége egyenlő egymással. Mekkora a körök sugara?



5.

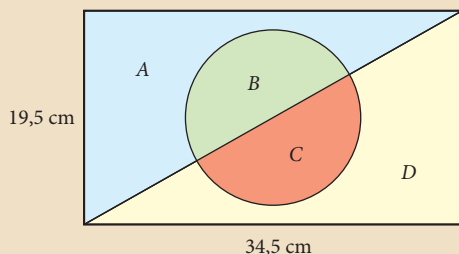
Egy virágcserep csonkakúp alakú. Alapkörének átmérője 18 cm, fedőkörének átmérője 12 cm, az alkotó 10 cm hosszú. A cserép tele van homokkal, és véletlenszerűen mászkál a belsejében egy apró homoktúró bogár. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott pillanatban a bogár legfeljebb 3 cm távolságra van a fedőlap síkjától?

HÁZI FELADAT

1.

Egy számítógép monitorját az ábra szerint az egyik átlóval és a középpont köré rajzolt 8 cm sugarú körrel négy tartományra osztjuk. Ha a monitoron véletlenszerűen felvillan egy pont, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a pont

- a) az A vagy a B tartományba esik;
b) a B vagy a C tartományba esik;
c) a D tartományba esik?



2.

Egy 20 cm $\times$ 30 cm nagyságú papírlapon véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a papírlap mindegyik csúcsától távolabb esik, mint 10 cm?

3.

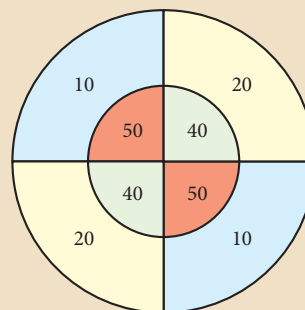
Egy egyméteres méterrúd 10 cm-es részenként felváltva piros és fehér színnel van befestve (lásd ábra). A rúd a 42 cm-t jelölő pontjánál kettétört. Véletlen-

szerűen mászkál egy-egy hangya a két darabon. Számítással igazold, hogy melyik rúdon nagyobb a valószínűsége annak, hogy a hangya piros részen jár!



4.

Az ábrán látható céltáblát véletlenszerűen eltalálja egy nyílvevő.



Mennyi a valószínűsége, hogy a lövés értéke

- a) 10; b) 40; c) legalább 40?

(A céltábla belső körének átmérője feleakkora, mint a külső kör átmérője, az átmérők merőlegesek egymásra.)

KIDOLGOZOTT FELADAT

Az ábra szerinti szerencsekereket egy vurstliban működteti egy vállalkozó.

- a) Mennyi a nyeremény várható értéke, ha egyszer pörgetjük meg a szerencsekereket?
 b) Mennyi a szerencsekereket működtető vállalkozó várható nyeresége egy pörgetésen, ha egy pörgetés a vurstliban 500 Ft-ba kerül?

Megoldás

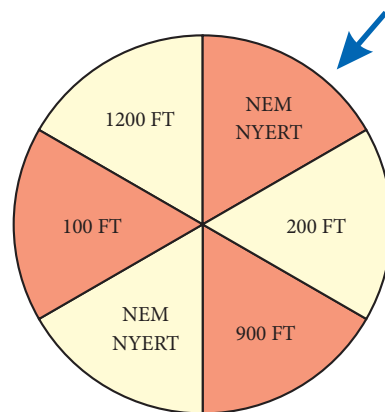
- a) Táblázatba foglaltuk a nyereményeket és a hozzájuk tartozó valószínűségeket.

Nyeremény (Ft)	0	100	200	900	1200
Valószínűség	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E = \frac{2}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 100 + \frac{1}{6} \cdot 200 + \frac{1}{6} \cdot 900 + \frac{1}{6} \cdot 1200 = 400$$

A várható értéket megkapjuk, ha a lehetséges nyereményeket megszorozzuk a hozzájuk tartozó valószínűségekkel, és ezeket összeadjuk. A várható nyeremény tehát 400 Ft.

- b) A vállalkozó várható nyeresége egy pörgetésen $500 - 400 = 100$ Ft.



ELMÉLET

Várható érték (ismétlés)

A várható érték csak olyan esetben értelmezhető, amikor minden elemi esemény kimenetele valós számmal jellemezhető. Ilyen esetben, ha nagyszámú kísérletet végzünk, akkor a kísérletek kimenetelének átlaga egy jól meghatározható érték közelében lesz. Ez az érték a lehetséges kimenetek valószínűségeiből számolható, és várható értéknek nevezzük.

Várható érték = a lehetséges kimeneteknek a valószínűségekkel súlyozott átlaga. Jele: E .

Megjegyzés:

- A várható érték nem azonos a legvalószínűbb eredménnyel.
- Összetartozó fogalompárok:

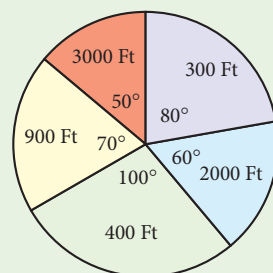
statisztika		valószínűségi számítás
relatív gyakoriság	↔	valószínűség
átlag, súlyozott átlag	↔	várható érték

FELADAT

1.

Mennyi a nyeremény várható értéke, ha egyszer megpörgetjük az ábra szerinti szerencsekereket?

Nyeremény (Ft)	300	400	900	2000	3000
Valószínűség					



2.

Egy gazdasági elemző két részvény esetében modellezte, hogy ugyanolyan gazdasági és környezeti változások esetén milyen hozamokra számít a következő évben. Táblázatba foglaltuk a modell eredményeit.

a) Határozd meg, hogy mekkora a várható hozam az A, illetve a B részvény esetében!

b) Egy befektető úgy dönt, hogy pénze felét az A, felét a B részvénybe fekteti. Mekkora így a várható hozam? (A hozam azt jelenti, hogy a következő évben hány %-kal nő, illetve csökken a részvény árfolyama.)

	A részvény hozama	B részvény hozama
1. eset, valószínűsége 0,5	22%	-2%
2. eset, valószínűsége 0,4	-12%	16%
3. eset, valószínűsége 0,1	8%	10%

3.

Mennyi a dobott fejek számának várható értéke, ha

a) egy pénzérmét dobunk fel;

b) két pénzérmét dobunk fel;

c) három pénzérmét dobunk fel?

HÁZI FELADAT

1.

Egy elemzői modell szerint egy részvény árfolyama a következő évben 0,3 valószínűséggel 5640 Ft, 0,6 valószínűséggel 5710 Ft és 0,1 valószínűséggel 5120 Ft lesz.

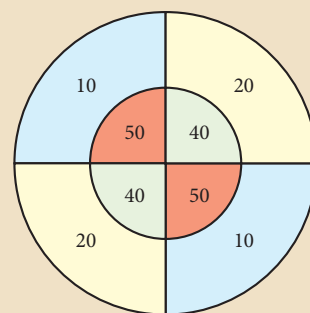
a) Határozd meg a részvény jövő évi árfolyamának várható értékét!

b) Mekkora a várható hozam (azaz a jövő évi árfolyam hány %-kal több, mint a jelenlegi), ha a részvény jelenlegi árfolyama 5330 Ft? Két tizedesjegy pontossággal számolj!

2.

Mennyi egy véletlenszerű találat várható értéke az előző lecke 4. házi feladatában említett céltábla esetén?

Találat	10	20	40	50
Valószínűség				



RÁADÁS

A lecke 2. feladatában azt kaptuk, hogy az A részvény várható hozama a nagyobb. Egy befektetés során azonban nemcsak a várható hozamot kell figyelni, hanem a kockázatot is. Az A részvény esetében nagyobb a hozamok ingadozása, ezért kockázatosabb. (Az esetek 40%-ában komoly veszteséggel jár.)

A statisztikához hasonlóan a valószínűségszámításban is értelmezhető a szórás fogalma, és ezzel szokták mérni egy befektetés kockázatát. Kiszámoltuk, és táblázatba foglaltuk a várható hozamot és a kockázatot, ha csak A, csak B, illetve felerészt A és felerészt B részvényt vásárolunk. Figyeld meg, hogy a 3. esetben sokkal kisebb a kockázat, mint az első két esetben!

Fontos közgazdasági elv szerint, ha kétféle (vagy többféle) befektetést alkalmazunk, akkor a befektetés kockázata sokszor csökkenthető akár mindkét kockázati szint alá. (Ezt diverzifikációs hatásnak nevezik.)

a) Gondold végig, hogy a 2. feladatban vajon mivel lehet magyarázni ezt az eredményt!

b) A szórásnégyzetet úgy számolhatjuk, hogy a lehetséges kimeneteknek a várható értéktől való eltérését figyeljük. Az eltéréseket négyzetre emeljük, majd ezek (valószínűséggel) súlyozott átlagát vesszük. Ellenőrizd ez alapján a táblázat eredményeit!

	A	B	fele A fele B
várható hozam	7,0%	6,4%	6,7%
szórás (kockázat)	16,0%	8,6%	3,85%

BEVEZETŐ

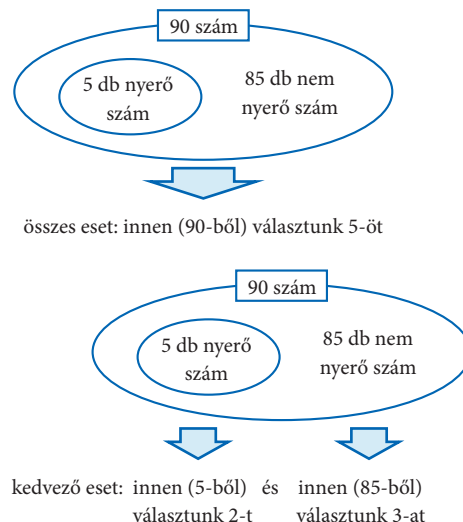
Mennyi a valószínűsége az ötös lottóban a kéttalálatos szelvénynek?

A kéttalálatos szelvény azt jelenti, hogy azon a héten 2 számot eltaláltunk az ötből, és hármat nem. Vagyis két szám a kihúzott 5 közül kerül ki, és 3 szám a többi közül, azaz a maradék 85 közül.

Az összes eset számát az adja, hogy hányféleképpen választhatunk ki 90 elem közül 5-öt, ha nem számít a kiválasztás sorrendje. Ez $\binom{90}{5}$.

A kedvező esetek száma: 5 elem közül kiválasztunk 2-t, ez $\binom{5}{2}$ db lehetőség, és 85 elem közül kiválasztunk 3-at, ez $\binom{85}{3}$ lehetőség. Mivel a 2 találatot bármely 3 nem nyerő számhármassal párosíthatom, ezek szorzata adja meg a kedvező esetek számát: $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}$.

A valószínűség: $\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{10 \cdot 98\,770}{43\,949\,268} \approx 0,0225$.



ELMÉLET

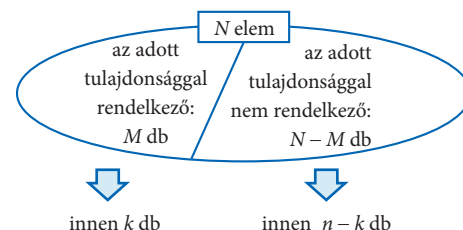
Mintavételek (ismétlés)

A mintavétel során kiválasztunk néhány elemet egy halmaz elemei közül. Általában azt vizsgáljuk, hogy a kiválasztott elemek közül hány rendelkezik egy adott tulajdonsággal. A kiválasztás történhet visszatevés nélkül vagy visszatevéssel.

Visszatevés nélküli mintavétel (ismétlés)

Legyen N darab elem, melyek közül M darab rendelkezik és $N - M$ darab nem rendelkezik egy bizonyos tulajdonsággal. Visszatevés nélkül kiválasztunk összesen n darab elemet. Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott elemek közül pontosan k darab rendelkezik az adott tulajdonsággal ($n - k$ darab pedig nem rendelkezik):

$$P(k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

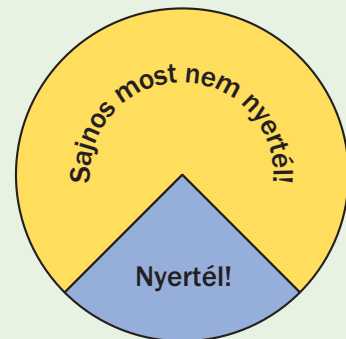


FELADAT

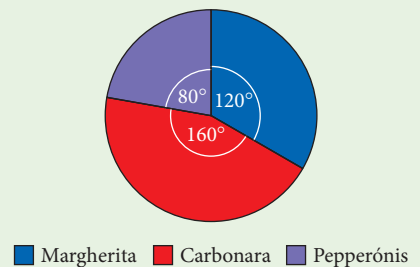
- 1.** Az ötös lottóban Sándor kedvenc számai azok, amelyek négyzetszámok vagy köbszámok. A lottóhúzáskor (viszszatevés nélkül) véletlenszerűen húznak öt számot az 1; 2; 3; ...; 90 számok közül. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott öt szám között
- a) mind az öt szám Sándor kedvenc számai közül való;
 - b) pontosan három való Sándor kedvenc számai közül;
 - c) pontosan egy való Sándor kedvenc számai közül?

- 2.** Anna palacsintát süt. Tegyük fel, hogy minden alkalommal, az előző palacsintáktól függetlenül, 0,1 valószínűséggel elszakad a palacsinta. Mennyi a valószínűsége, hogy 8 palacsinta közül
- a) pontosan 1 szakad el;
 - b) pontosan kettő szakad el;
 - c) legfeljebb kettő szakad el?

- 3.** Egy szerencsekerék 0,25 valószínűséggel a „Nyertél!”, a többi esetben a „Sajnos most nem nyertél” feliratnál áll meg. 10-szer megpörgetjük a szerencsekeréket. Mennyi a valószínűsége, hogy
- a) pontosan kétszer nyerünk;
 - b) pontosan háromszor nyerünk;
 - c) kétszer vagy háromszor nyerünk?



- 4.** Egy 36 fős osztály tanulóit megkérdezték, hogy 3 féle pizza közül (Margherita, Carbonara, pepperónis) melyiket szeretik a legjobban. Kördiagramon ábrázoltuk a válaszokat. Ha véletlenszerűen kiválasztunk 5 tanulóat, akkor mennyi a valószínűsége, hogy
- a) mind az öten a Margherita pizzát jelölték meg;
 - b) pontosan ketten választottak Carbonara pizzát;
 - c) közülük egy ember választotta a pepperónis pizzát?



- 5.** Párosítsd a kérdést a hozzá tartozó válasszal és a binomiális együtthatót annak értékével! Az egyik feladatra hiányzik a válasz, add meg a megoldást!

9 dobásból 3 talált a kosárba. Hányféleképpen alakulhatott, hogy melyik dobások voltak sikeresek?	$\binom{12}{3}$	715
9 dobás mellé ment, és 3 talált a kosárba. Hányféleképpen alakulhatott, hogy melyik dobások voltak sikeresek?	$\binom{13}{4}$	84
12 dobás mellé ment, és 3 talált a kosárba. Hányféleképpen alakulhatott, hogy melyik dobások voltak sikeresek?	$\binom{9}{4}$	220
9 dobásból 4 talált a kosárba. Hányféleképpen alakulhatott, hogy melyik dobások voltak sikeresek?	$\binom{9}{3}$	126
9 dobás mellé ment, és 4 talált a kosárba. Hányféleképpen alakulhatott, hogy hányadik dobások voltak sikeresek?		

HÁZI FELADAT

1.

(Érettségi feladat, 2021)

Az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz elemei közül véletlenszerűen kiválasztunk két különbözőt. Mennyi a valószínűsége, hogy a két kiválasztott szám átlaga egész szám?

2.

Egy társasjátékban a játék elején mindenki dob a kockával. Ha valaki legalább hármast dob, akkor húzhat induláskor egy szerencsekártyát. Ha négyen játszanak a játékban, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

- mindenki húzhat szerencsekártyát;
- két játékos húzhat, és két játékos nem húzhat szerencsekártyát?

3.

Egy számítógépes játék úgy van beállítva, hogy mindig, amikor új mezőre kattint a játékos, ugyanolyan

4.

(Érettségi feladat, 2022)

Egy szállodában 20 db egyforma fedett edényben kétféle müzlikeveréket tartanak. 5 edényben natúr, 15 edényben csokis müzli van. Egy alkalmazott a reggeli sietségben véletlenszerűen választ ki az edények közül 4-et, és ezeket egy tálcára teszi. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a 4 edény közül egyben natúr, háromban pedig csokis müzli lesz?

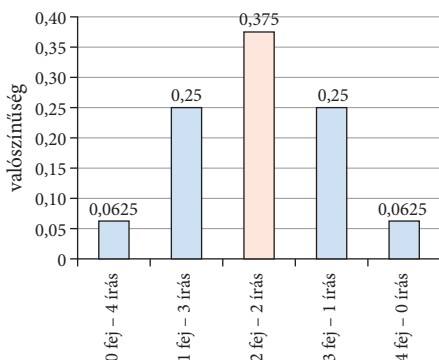
RÁADÁS

„Az élet nem igazságos...”

A binomiális eloszlással kapcsolatos egyik gyakori félreértés, hogy a kísérlet az esetek többségében az eloszlás „csúcsához” tartozó, azaz a legnagyobb valószínűségű esemény bekövetkezésével zárul. Ez azonban általában nem igaz.

Tegyük fel például, hogy Bence és Hajni 4 elvégzendő házimunka esetében mindegyik alkalommal pénzfeldobással dönti el, hogy melyiküknek kell azt elvégeznie. Bence mindig a fejjel, Hajni az írással játszik.

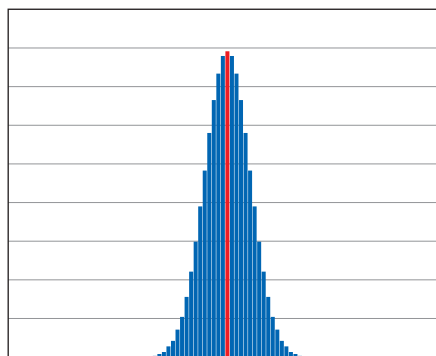
Azt várnánk – és a grafikon is azt sugallja –, hogy az esetek többségében az egyébként is legigazságosabb 2-2 eset fog megvalósulni.



Ennek a valószínűsége azonban csak 0,375, míg annak az esélye, hogy NEM az igazságos 2-2-es eset következik be,

0,625, azaz több mint másfélszer annyi! Vagyis az esetek nagyobb részében az összes vagy majdnem az összes házimunkát – nagy valószínűséggel – ugyanaz a személy fogja végezni. Bármelyikük legyen is az, úgy fogja érezni, hogy „az élet igazságtalan”.

Nagyobb számú kísérlet esetén még jobban látszik, hogy hiába az „igazságos” kimenetel a legvalószínűbb, mégis legtöbbször egy „igazságtalan” kimenetel valósul meg. Ha nem 4, hanem például 100 feladat elvégzéséről döntenének pénzfeldobással, akkor csupán 0,08 körüli annak a valószínűsége, hogy 50-50 feladat jut Hajnira, illetve Bencére. Majdnem 12-szer akkora (0,92) az esélye annak, hogy valamelyikük számára kedvezőtlen lesz a kimenetel.



A probléma táblázatkezelő programmal is vizsgálható.

FELADAT

1. Melyik valószínűség a nagyobb? Állapítsd meg, hogy milyen reláció áll fenn az A , illetve a B esemény valószínűsége között! A helyes válaszhoz tartozó betűkből egy magyar város neve rakható ki.

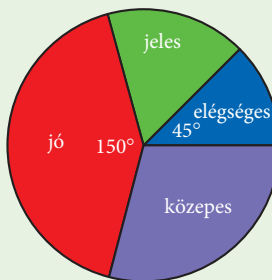
A esemény	B esemény	$P(A) > P(B)$	$P(A) = P(B)$	$P(A) < P(B)$
Hat szabályos dobókockával dobunk. A dobások között pontosan két dobás hatos.	Egy szabályos dobókockával hatszor dobunk. A dobások között pontosan négy dobás négyes.	P	S	D
Az egyjegyű pozitív egész számok halmazából véletlenszerűen kiválasztunk hetet. A kiválasztott számok közül pontosan négy páratlan.	Az egyjegyű pozitív egész számok halmazából véletlenszerűen kiválasztunk hatot. A kiválasztott számok közül pontosan kettő osztható 3-mal.	P	Z	A
Az ötös lottóban a jövő héten a 2; 5; 15; 60; 75 számötös legfeljebb két találatot ér. (Ötös lottó: az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül húznak ki ötöt.)	Feldobunk 10 szabályos pénzérmét. A dobások között van legalább egy fej.	A	C	I
Egy szabályos pénzérmét feldobunk 8-szor. A dobások között a fejek száma több, mint az írások száma.	Egy gép 0,015 valószínűséggel gyárt selejtes terméket. A következő 140 termékéből legfeljebb 1 selejtes.	K	É	Á

2. (Érettségi feladat, 2012)

A táblázat András és Bea érettségi érdemjegyeit mutatja.

- a) Számítsd ki András jegyeinek átlagát és szórását!
- b) Cili érettségieredményéről azt tudjuk, hogy jegyeinek átlaga András és Bea jegyeinek átlaga közé esik, továbbá Cili jegyeinek a szórása 0. Töltsd ki a táblázatot Cili jegyeivel!
- c) Dávid is ebből az 5 tárgyból érettségizett, az 5 tárgy az ő bizonyítványában is a fenti sorrendben szerepel. Eredményeiről azt tudjuk, hogy jegyeinek mediánja 4, átlaga pedig 4,4 lett. Határozd meg Dávid osztályzatait! Hányféleképpen lehetne ezekkel az osztályzatokkal kitölteni az érettségi bizonyítványát?

	András	Bea	Cili
Magyar nyelv és irodalom	3	4	
Matematika	4	5	
Történelem	4	4	
Angol nyelv	3	5	
Földrajz	5	5	



- d) A kördiagram a 24 fős osztály érettségieredményeinek megoszlását mutatja matematikából. Tudjuk, hogy jeles osztályzatot 4 tanuló ért el. Az osztály tanulói közül hányan érettségiztek közepes eredménnyel matematikából?

3.

Egy sorsjegyből 1000 darabot nyomtattak. A sorsjegyek 80%-a nem nyer, 10%-án a nyeremény 700 Ft, 9%-án 2000 Ft, és a többi sorsjegyen a nyeremény 10 000 Ft.

a) Ha egy darab sorsjegyet vásárolunk, akkor mennyi a nyeremény várható értéke?

b) Egy sorsjegy ára 500 Ft. Mennyi a kereskedő haszna, ha minden sorsjegyet elad?

4.

Két szabályos dobókockával dobunk. Legyen az A esemény az, hogy legalább az egyik dobás hatos, a B esemény az, hogy legalább az egyik dobás osztója az 5-nek. Készítsd el a valószínűségeket bemutató táblázatot a füzetedbe, és határozd meg a következő valószínűségeket!

$P(A)$ $P(B)$ $P(A + B)$ $P(A \cdot B)$ $P(\overline{A} \cdot B)$

HÁZI FELADAT

1.

Egy biztosítótársaságnál olyan modellel számolnak, amely szerint minden ügyfél egymástól függetlenül 0,005 valószínűséggel szenved el káreseményt a következő év során. Mennyi a valószínűsége, hogy a velük szerződésben álló 1200 ügyfél közül a következő év során

a) pontosan 3 szenved el káreseményt;

b) legfeljebb 1 szenved el káreseményt?

2.

Egy középiskola 582 diákja közül 120-an kollégisták, 373-an helyben laknak, a többiek bejárók.

	Helyben lakók	Kollégisták	Bejárók
Létszám	373	120	
Félévi átlageredmény	3,11	4,12	3,78

a) Mennyi volt a tanulók félévi átlageredménye?

b) Mennyit kellene év végéig javítaniuk a helyben lakóknak, hogy a másik két csoport változatlan eredménye mellett az iskola átlaga elérje a 3,5-et?

c) Ha véletlenszerűen kiválasztunk 6 tanulót, akkor mennyi a valószínűsége, hogy közülük pontosan hárman kollégisták?

3.

Teri néni elfelejtette a mobiltelefonjának a PIN-kódját. Arra emlékszik, hogy a 3; 6; 6; 9 számjegyekből állt valamilyen sorrendben.

a) Ha véletlenszerűen üti be ennek a négy számjegynek egy sorrendjét, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a helyes kódot írja be?

Ha háromszor próbálkozhat, mennyi a valószínűsége annak, hogy

b) elsőre eltalálja,

c) csak másodikra találja el,

d) csak harmadikra találja el?

e) Mi a valószínűsége annak, hogy három próbálkozásból eltalálja?

4.

Táblázatba foglaltuk, hogyan változott egy részvény árfolyama négy egymás utáni hónapban.

(A részvény hozama azt adja meg, hogy hány %-kal nőtt vagy csökkent az árfolyam az előző hónaphoz képest.)

Hónap	március (induló ár)	április	május	június	július
Árfolyam (Ft)	25 600	26 624		28 179	
Hozam			8%		−4%

a) Töltsd ki a táblázat hiányzó adatait!

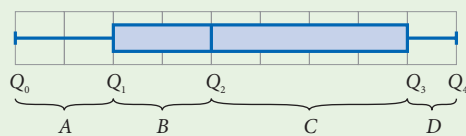
b) Határozd meg a hozamok szórását ebben a 4 hónapban!

FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2021)

- a) Dávidnak ebben a félévben három darab 3-as és két darab 5-ös érdemjegye van angolból. Jánosnak is öt jegye van angolból. Az ő jegyeinek mediánja 1-gyel nagyobb, mint Dávid jegyeinek mediánja, az átlaga viszont 1-gyel kisebb Dávid jegyeinek átlagánál. Határozd meg János angoljegyeit! (A jegyek egész számok.)
- b) Eszter az első félévben 9 jegyet szerzett angolból, és ezek átlaga pontosan 3. A második félévben 6 jegyet szerzett, ezek átlaga pontosan 4,5. Mennyi Eszter egész évben szerzett angoljegyeinek az átlaga?

2. Dobozdiagramon ábrázolták egy nagyszámú adatsokaság elemeit. Az elemzők azzal a modellel dolgoznak, amely biztosítja, hogy a diagram alapján az adatok négy osztályba sorolhatók úgy, hogy minden osztályba az adatok negyede esik. (Ez a modell azt feltételezi, hogy pontosan a határra nagyon kevés adat esik – számos esetben ez a közelítés kellő pontosságú eredményekhez vezet.) Az osztályokat az ábrán A, B, C és D betűvel jelöltük.



A	B	C	D
$Q_0 \leq x < Q_1$	$Q_1 \leq x < Q_2$	$Q_2 \leq x < Q_3$	$Q_3 \leq x \leq Q_4$

Visszatevéses mintavétellel véletlenszerűen kiválasztunk 12 adatot. Mennyi a valószínűsége, hogy

- a) mindegyik adat a féltérjedelemhez tartozó két osztály, B és C valamelyikébe esik;
- b) az adatoknak pontosan a negyede kisebb, mint az alsó kvartilis;
- c) az adatok közül legfeljebb 2 adat nagyobb vagy egyenlő, mint a felső kvartilis?

3. Két részvény néhány jellemző adatát tartalmazza a táblázat, ugyanarra az időszakra vonatkozóan. Az adatok alapján melyik részvényt tartod kockázatosabbnak? Válaszodat érvekkel támaszd alá!

	A részvény	B részvény
átlagos árfolyam	12 500 Ft	1840 Ft
átlagos hozam	13%	24%
hozam szórása	3%	6%

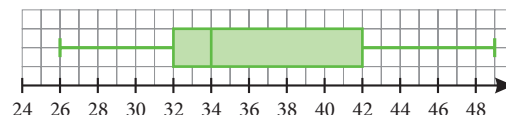
4. A hatoslottón az 1; 2; ...; 45 számok közül sorsolnak ki véletlenszerűen hat különböző számot. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott héten a hatoslottón kihúzott hat szám között pontosan kettő olyan van, amelyik osztható 6-tal?

5. Egy bolthálózat azoknak, akik legalább 30 000 Ft értékben vásárolnak, egy kupont ad ajándékba. A kuponok értéke azonban nem azonos, az összes kupon 90%-a 1000 Ft, 8%-a 2000 Ft, a többi pedig 8000 Ft értékű. A vásárlók véletlenszerűen kapják a kupont, a kupon értéke csak akkor derül ki, ha lekaparják a fedőréteget. Mennyi egy kupon várható értéke?

TUDÁSPRÓBA

1. Egy adatsokaságról dobozdiagramot készítettünk. A diagram alapján válaszolj a kérdésekre!

- Van-e kiugró adat az adatsokaságban?
- Mennyi az adatsokaság mediánja?
- Hányszorosa az adatsokaság terjedelme a féltérjedelemnek?
- Az adatok negyedének legalább mennyi az értéke?



2. Két szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 5, B azt az eseményt, hogy a dobott számok szorzata 4. Határozd meg a $P(A)$, $P(B)$, $P(A + B)$ és a $P(A \cdot B)$ valószínűségeket!

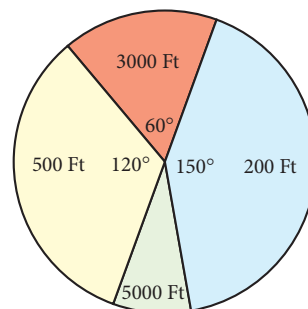
3. Egy számítógépes játékban egy őserdőből kell megtalálni a kivezető utat, sokféle akadály között. A játék úgy van beprogramozva, hogy az erdő egyik területén 0,7 valószínűséggel megcsípi a játékost egy mérges pók, ezért amíg nem találja az ellenszert, addig csak lassabban tud tovább haladni. András a játék során 5 alkalommal tévedt erre a területre. Mennyi a valószínűsége, hogy

- egyszer sem csípi meg a pók;
- legfeljebb egyszer csípi meg a pók?

4. Mennyi az ábrán látható szerencsekerék egy pörgetése esetén a nyeremény várható értéke?

5. Próbaérettségit tart egy történelemtanár. A 20 szóbeli tétel közül 9 tétel a XX. századi történelemhez kapcsolódik. Az első csoportban 6 vizsgázó húz tételt, a kihúzott tételeket nem teszik vissza. Mennyi a valószínűsége, hogy a 6 vizsgázó közül

- aki elsőnek húz, az nem XX. századi tételt húz;
- pontosan 2 diák húz XX. századi tételt;
- legfeljebb 2 diák húz XX. századi tételt?



RÁADÁS

Egy területfoglalás társasjátékban az ütközetek kimenetelét kockadobással döntenek el. Mindkét játékos katonái ereje az 1, 2, 3, 4, 5, 6 értékek valamelyike lesz. Ha egy játékos több kockával dob, akkor a dobások maximuma határozza meg a katonai erőt, azaz különböző dobások esetén a legnagyobb dobás számít, egyenlőség esetén a közös maximális érték számít. Fontos tehát, hogy melyik játékos hány dobókockával dobhat. Az egyik játékos három dobókockával dobhat.

- Sorold fel azokat a dobásokat, amelyek esetén a katonai ereje 2 lesz! (Ne felejtse el megkülönböztetni a kockákat!)
- Ha különbözők a dobókockák, akkor hány olyan dobás van, amely esetén a katonai erő 3?
- Mennyi a valószínűsége, hogy a katonai ereje 2 lesz?
- Mennyi a valószínűsége, hogy a katonai ereje 3 lesz?
- Mennyi a valószínűsége, hogy a katonai ereje 4 lesz?



Témazáró feladatgyűjtemény

1. Táblázatba foglaltuk, hogy egy kézilabdamérkőzésen a pályára lépő 20 játékos hány gólt dobott. Mennyi a 20 adat mediánja, módusza, átlaga és szórása?

Gólok száma	0	1	2	4	5	6	7
Gyakoriság	6	5	2	3	2	1	1

2. Egy kis vállalkozásban 10 ember dolgozik. Közülük 5 embernek 580 000 Ft, 3 embernek 720 000 Ft és a két vezetőnek 1 080 000 Ft a havi fizetése. Mennyi a cégnél a fizetések mediánja, módusza, átlaga és szórása? Melyik középérték jellemzi a legjobban a fizetéseket?

3. Mennyi a következő sorozatok első öt tagjának átlaga és szórása?
- a) $\{a_n\}$ számtani sorozat, $a_1 = -1$ és $d = 0,5$
- b) $\{b_n\}$ mértani sorozat, $b_1 = -5$ és $q = -1$

4. (Érettségi feladat, 2021)
- Egy kosárlabdacsapat az előző öt mérkőzésen 77, 60, 83, 73, illetve 90 pontot szerzett. Hány pontot kell szereznie a következő mérkőzésen ahhoz, hogy a hat mérkőzésen szerzett pontjainak átlaga 75 legyen?

5. Mennyi a 10 legkisebb természetes szám mediánja, átlaga és szórása?

6. Egy számtani sorozat három egymás utáni tagjából álló adatsokaság szórásnégyzete 24. Mennyi lehet a sorozat differenciája? Határozd meg az első öt tagból álló adatsokaság szórását!

7. Bencének nyolc jegye van matematikából. Ezekről tudjuk, hogy az átlaguk 3,75, a módusz 4, a medián 4, és a terjedelem 2.
- a) Határozd meg, milyen osztályzatai lehetnek Bencének! Keress több megoldást is!
- b) Számítsd ki Bence jegyeinek szórását legalább két megtalált megoldás esetére!

8. Az olimpián a fejlődő országokat azzal támogatják, hogy ún. szabad kártyával indíthatnak versenyzőt néhány számban akkor is, ha a versenyzőjük nem

éri el az olimpiai szintidőt. Így fordulhatott elő, hogy Egyenlítői-Guinea versenyzője, Eric Moussambani is indult 2000-ben a 100 méteres gyorsúszásban. (Az olimpia előtt soha nem látott 50 méter hosszú medencét, csak egy szálloda 12 méteres medencéjében edzett.) Több mint kétszer annyi idő alatt ért célba, mint a nyertes idő, a közönség óriási biztatása közepette.

A 100 méteres férfi gyorsúszásban a 2000-es olimpián 71 időeredmény született. A nyertes idő másodpercben mérve 48,64; a 18-dik idő 49,93; a 36-dik idő 51,52; az 54-dik idő 52,58. A hat leggyengébb időeredmény: 54,33; 58,79; 59,26; 60,39; 62,45 és 112,72. Készíts dobozdiagramot az adatokról!

9. Egy adatsokaságról tudjuk, hogy terjedelme 12, félterjedelme 8, mediánja 25, alsó kvartilise 22, és maximuma 33.

- a) Készíts dobozdiagramot az adatokról!
- b) Adj meg 7 olyan egész számot, amely megfelel a feladatban felsorolt leírásnak!

10. Egy mérést 50-szer elvégeztek, majd a mérés eredményeit osztályokba sorolták.

Eredmény	20–22	22–24	24–26	26–28
Gyakoriság	2	4	4	8

Eredmény	28–30	30–32	32–34	34–36
Gyakoriság	15	12	3	2

- a) Készíts a táblázat alapján dobozdiagramot!
- b) Határozd meg az adatok szórását!

11. Feldobunk egy piros és egy fekete dobókockát. Tekintsük a következő eseményeket!
- A: A piros kockával ötöst dobunk.
- B: A fekete kockával legfeljebb kettést dobunk.
- C: A két dobás közül az egyik dobás értéke prímszám, a másik dobás értéke összetett szám.
- Sorold fel, melyik elemi események tartoznak a következő eseményekhez!

- a) $A + B$ b) $B \cdot C$ c) $\bar{A} \cdot C$

12. Egy A esemény 18 elemi esemény esetén, egy B esemény 25 elemi esemény esetén következik be. Legfeljebb, illetve legalább hány elemi esemény esetén következik be az $A + B$ és az $A \cdot B$ esemény?

13. Feldobunk egy piros és egy fekete dobókockát. Tekintsük a következő eseményeket!
A: A piros kockával ötöst dobunk.
B: A fekete kockával legfeljebb kettőt dobunk.
C: A két dobás közül az egyik dobás értéke prímszám, a másik dobás értéke összetett szám.

- a) Határozd meg az A , B és C események valószínűségét!
- b) Számolással igazold, hogy az A és a B események függetlenek egymástól, a B és a C események azonban nem függetlenek egymástól!

14. Egy szabályos pénzérmét háromszor feldobunk, és feljegyezzük, hogy a dobás eredménye fej (F) vagy írás (I). Tekintsük a következő eseményeket!

A: A harmadik dobás írás.
B: Pontosan kétszer dobunk fejet.
C: A második dobástól kezdve minden dobás különbözik az előtte levőtől.

- a) Független-e az A és a B esemény?
- b) Független-e a B és a C esemény?
- c) Független-e az A és a C esemény?

15. Feldobunk négy szabályos érmét. Számolással igazold, hogy A és B események függetlenek, B és C események nem függetlenek egymástól!

A: A második dobás fej.
B: A harmadik és a negyedik dobás különböző.
C: A dobások között több a fej, mint az írás.

16. Találomra kiválasztunk egy négyjegyű számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ennek

- a) egyik jegye sem 5;
- b) legalább egy jegye 5;
- c) pontosan egy jegye 5?

17. Találomra kiválasztunk egy kétjegyű számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ennek mindkét számjegye kisebb 4-nél?

18. Papírlapokra írjuk egyenként az összes olyan 3 jegyű számot, amelyben a 0, 2, 4, 5 számjegyek szerepelhetnek, de mindegyik legfeljebb egyszer.

- a) Hány papírlapra van szükségünk?
Kiveszünk találomra egyet a lapok közül. Mennyi a valószínűsége, hogy a lapra írt szám
- b) első jegye 5;
- d) 4-gyel osztható;
- c) 5-tel osztható;
- e) 3-mal osztható?

19. Oldd meg a 18. feladatot azzal a változtatással, hogy az összes olyan háromjegyű számot írjuk fel a lapokra, amelynek minden számjegye eleme a $\{0; 2; 4; 5\}$ halmaznak!

20. Egy futárszolgálat azt nyilatkozza, hogy másnap 10:00 óra és 15:00 óra között szállítja ki a megrendelt csomagot. Tekintsük véletlenszerűnek a futár érkezését az adott időszámban. Mennyi a valószínűsége, hogy

- a) a csomag még délelőtt megérkezik?
- b) a csomag 10:15 és 11:30 között érkezik?

21. Egy méterrúdon egy hangya mászkál. Tekintsük véletlenszerűnek, hogy egy adott pillanatban a méterrúd mely pontján tartózkodik. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott pillanatban közelebb van a 20 cm-t jelző vonalhoz, mint a 60 cm-t jelző vonalhoz?

22. Egy derékszögű háromszög befogói 5 cm és 12 cm hosszúak. A háromszög belsejében véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a pont a háromszög mindhárom csúcsától távolabb van, mint 2 cm?

23. Az ötéves Julika homokvárat készít. A vár úgy készül, hogy megtölti a homokozóvödörrel, majd megfordítja, és óvatosan leemeli a vödörrel a homokról. Így a vödör alakjának megfelelő csonkakúp alakú vár keletkezik. Az alaplap átmérője 12 cm, a fedőlapja átmérője 10 cm hosszú, a csonkakúp magassága 16 cm. Sajnos a homokvödörbe és így a homokvárba belekerült Julika apró fülbevalója. Tekintsük úgy, hogy a fülbevaló véletlenszerűen található valahol a homokvárban. Mennyi a valószínűsége, hogy a homokvárnak abban a részében van, amely a talajtól távolabb van, mint 10 cm?



24. Feldobunk egyszerre egy piros és egy fehér, szabályos dobókockát.

- a) Hányféleképpen kaphatunk a két kockán különböző számot?
- b) Mekkora a valószínűsége, hogy a fehér kockán nagyobb szám lesz, mint a pirosan?

25. Egy dobókockát egymás után háromszor feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

- a) mindegyik esetben ugyanazt a számot dobjuk;
- b) három különböző számot dobunk;
- c) a három szám között pontosan kettő ugyanaz;
- d) a dobott pontok számának összege 16?

26. Mennyi a valószínűsége, hogy egy szabályos dobókockával hatszor dobva a dobások között mind a hat lehetséges szám előfordul?

27. Két szabályos dobókockával dobunk. Legyen az A esemény az, hogy a dobott számok között van prímszám, a B esemény az, hogy a dobott számok összege négyzetszám. Határozd meg a következő valószínűségeket!

$$P(A) \quad P(B) \quad P(A + B) \quad P(A \cdot B) \quad P(A \cdot \bar{B})$$

28. Egy előrejelzés szerint a következő napon 0,4 valószínűséggel 45 mm, 0,3 valószínűséggel 30 mm, 0,2 valószínűséggel 10 mm és 0,1 valószínűséggel 0 mm csapadék fog esni. Hány mm a csapadék várható értéke a következő napon?

29. Egy áruházi akció keretében az egyik napon minden vásárló kap egy kupont. Az akcióhoz a cég 1000 kupon készített, melyek közül 800 db kupon 200 Ft, 120 db kupon 600 Ft, 75 db kupon 1500 Ft, a többi pedig 5000 Ft értékű. A kupon értéke csak egy kapáros réteg eltávolítása után derül ki, és véletlenszerűnek tekinthető, hogy ki milyen kupont kap. Mennyi egy kupon várható értéke?

30. Egy szakértői modell szerint egy 4520 Ft-os részvény árfolyama a következő hónapban 0,2 valószínűséggel 4560 Ft, 0,3 valószínűséggel 4910 Ft, 0,4 valószínűséggel 4320 Ft és 0,1 valószínűséggel 3760 Ft lesz. Mennyi a részvény árfolyamának várható értéke a következő hónapra?

31. Egy dobozban 2 piros és 5 fehér golyó van. Véletlenszerűen kihúzzunk három golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három kiválasztott golyó között

- a) nincs fehér;
- b) nincs piros;
- c) egy piros van;
- d) egy fehér van?

32. Egy osztályba 36 tanuló jár, közülük 20 lány és 16 fiú. Egy farsangi osztályfőnöki órán minden tanuló nevét beletették egy kalapba, és véletlenszerűen kisorsoltak öt tanulót egy játékos feladatra. Mennyi a valószínűsége, hogy az öt kisorsolt diák közül

- a) pontosan három lány;
- b) legfeljebb egy fiú;
- c) több a lány, mint a fiú?

33. Egy szabályos dobókockával 10-szer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb két dobás eredménye hatos?

34. Egy szerencsekerék $\frac{1}{3}$ valószínűséggel áll meg a NYERT feliratnál, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a NEM NYERT feliratnál. Megpörgetjük 6-szor a szerencsekereket. Mennyi a valószínűsége, hogy

- a) pontosan 2 forgatásnál nyerünk;
- b) pontosan 3 alkalommal nem nyerünk?

35. Hányszor kell dobni a szabályos dobókockával, hogy annak a valószínűsége, hogy a dobások között nincs hatos, kisebb legyen, mint 0,000 01?

36. (Érettségi feladat, 2016)

Szabó tanár úrnak ebben az évben összesen 11 darab középszintű matematika érettségi dolgozatot kell kijavítania. Az először kijavított kilenc dolgozat pontszámai: 35, 40, 51, 55, 62, 67, 72, 84, 92.

- a) Számítsd ki a kilenc dolgozat pontszámának átlagát és szórását!

Szabó tanár úr a javítás után a kilenc dolgozat közül három tanuló dolgozatát véletlenszerűen kiválasztja.

- b) Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a három kiválasztott dolgozat közül legalább kettőnek a pontszáma legalább 60 pont!

Az utolsó két dolgozat kijavítása után Szabó tanár úr megállapítja, hogy a 11 dolgozat pontszámának mediánja 64, átlaga 65 pont lett.

- c) Határozd meg az utoljára kijavított két dolgozat pontszámát!

Rendszerező összefoglalás

HALMAZOK, LOGIKA, KOMBINATORIKA, GRÁFOK

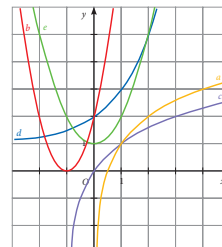


SZÁMTAN, ALGEBRA

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

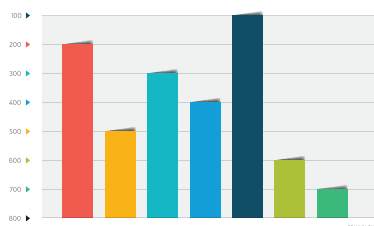
FÜGGVÉNYEK, SOROZATOK



GEOMETRIA



STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS



A fenti öt témakörbe rendezve ismételjük át a középiskolai matematika-tananyagot.

A témakörökön belül a rendszerező összefoglalás felépítése:

Összefoglaló táblázat	A témakörhöz tartozó definíciók (D), tételek (T) és módszerek (M) felsorolása.
Kidolgozott feladatok	Néhány feladat esetében a megoldás bemutatása.
Feladatok 1. rész (A, B, C és D jelű)	45 percre tervezett feladatsor, egyszerűbb feladatokkal. A középszintű matematika érettségi vizsga I. részében lévő feladatokkal azonos nehézségi szintű, rövid feladatok. Ha a feladat szövege nem ír mást, akkor elegendő megadni a végeredményt.
Feladatok 2. rész (P, Q, R és S jelű)	Részletes kidolgozásra szánt, nehezebb feladatsor. A középszintű matematika érettségi vizsga II. részében lévő feladatokkal azonos nehézségi szintű, összetett feladatok. Minden esetben részletezni kell a feladat megoldását. Az érettségi vizsgán 6 feladat lesz ebben a részben, ezek közül ötöt kell megoldanod, ami-re 135 perc áll majd rendelkezésedre.

JÓ TANÁCSOK A MATEMATIKAÉRETTSÉGIHEZ

- Ha a feladat jellege lehetővé teszi, készíts ábrát! Az ábra ne legyen túl kicsi, legyen jól látható és jól használható! Jelöld be rajta a feladatban szereplő adatokat!
- Figyeld meg, mit kérdeznek a feladatban! Válaszolj a kérdésre!
- Figyeld meg, hogy a megoldáshoz nem kell-e mértékegységet is megadni!
- Figyeld meg, említik-e, hogy hány tizedesjegy pontossággal kérik a végeredményt!
- Egyenlettel, egyenletrendszerrel történő megoldás esetén végezz ellenőrzést! A szöveges feladat ellenőrzését a szöveg szerint végezd el!

Halmazok, logika, kombinatorika, gráfok

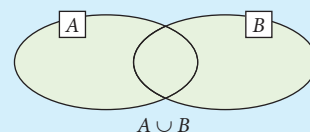
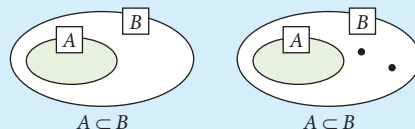
A halmazelmélet számos tudományterület alapját képezi. Halmazokra épül a biológiában a rendszertan. A fizika és a kémia is csoportosítja és halmazokba sorolja az anyagokat. A matematikán belül a számhalmazokat az algebra, a ponthalmazokat a geometria vizsgálja. A függvények esetében két halmaz elemei közötti hozzárendelésről beszélünk.

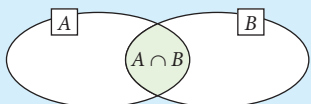
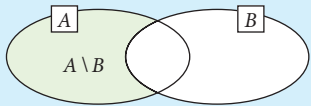
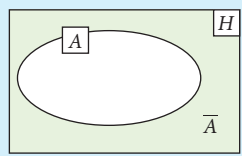
A kombinatorikában olyan feladatokkal találkozunk, ahol egy véges halmaz elemeit rendezzük sorba, vagy egy véges halmaz elemei közül választunk ki néhányat. A gráfokat úgy határozzuk meg, mint pontok (más szóval csúcsok) és bizonyos pontokat összekötő élek halmaza.

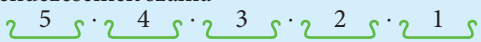
A matematikában a halmaz és a halmaz eleme alapfogalmak. Ez azt jelenti, hogy ezeket a fogalmakat nem vezetjük vissza egyszerűbb fogalmakra, azaz nem definiáljuk.

FOGALMAK, TÉTELEK, MÓDSZEREK

	Alapfogalmak	halmaz, halmaz eleme Jelölés: $A = \{2; 3; 5; 7\}$ esetén $2 \in A$, $12 \notin A$
M	Halmaz megadása	Akkor mondjuk, hogy megadtunk egy halmazt, ha minden dologról eldönthető, hogy eleme-e a halmaznak, vagy sem. Egy halmaznak nincs két azonos eleme. Egy halmaz megadható például: – annak megfogalmazásával, hogy milyen tulajdonságú elemek tartoznak a halmazba; – az elemek felsorolásával; – jelekkel, ábrákkal; – halmazok és halmazműveletek segítségével. <i>Például:</i> $A = \{\text{egyjegyű prímszámok}\} = \{2; 3; 5; 7\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ prím és } n < 10\}$ A halmazokat szokás Venn-diagrammal szemléltetni. A számhalmazok hagyományos jelölését a <i>Számтан</i> , <i>algebra</i> témakörben találod.
D	Halmazok egyenlősége	Két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik.
D	Üres halmaz	Ha a halmaznak nincs eleme, akkor üres halmaznak nevezzük. Jele: $\emptyset$ vagy $\{\}$
D	Véges halmaz	Ha egy halmaz elemeinek száma megadható egy természetes számmal, akkor véges halmaznak nevezzük.
D	Végtelen halmaz	Olyan halmaz, amely nem véges. Vagyis bármilyen természetes számot adunk meg, a halmaznak több eleme van ennél. Végtelen halmaz például az egész számok halmaza, egy körvonal pontjainak halmaza, a koordináta-rendszer rácpontjainak halmaza.
D	Véges halmaz számossága	Véges halmaz számossága egyenlő az elemeinek a számával. Jele: $ A $
D	Részhalmaz Valódi részhalmaz	Egy A halmaz részhalmaza egy B halmaznak, ha az A halmaz minden eleme egyúttal eleme a B halmaznak is. Jele: $A \subseteq B$ (Az A és a B halmaz lehet egyenlő.) Ha az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, és B -nek van olyan eleme, amely nem eleme A -nak, akkor az A valódi részhalmaza B -nek. Jele: $A \subset B$.
D	Unió (egyesítés)	Az A és a B halmaz uniója azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei (azaz benne vannak az A vagy a B halmazban). Jele: $A \cup B$



D	Metszet (közös rész)	Az A és a B halmaz metszete azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek mindkét halmaznak elemei (azaz benne vannak az A és a B halmazban is). Jele: $A \cap B$																
D	Különbség-halmaz	Az A és a B halmaz különbség-halmaza azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek elemei az A halmaznak, de nem elemei a B halmaznak. Jele: $A \setminus B$																
D	Komplementer halmaz	Ha az A halmaz részhalmaza a H halmaznak, akkor a $H \setminus A$ halmazt az A halmaz H -ra vonatkozó komplementer halmazának nevezzük. Jele: $\overline{A}$																
T	Szitaformula	Két véges halmaz uniójának elemszámát megkapjuk, ha a halmazok számosságának összegéből kivonjuk a metszet számosságát. $ A \cup B = A + B - A \cap B $ Három véges halmaz esetén: $ A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C $																
D	Állítás, kijelentés Állítás logikai értéke	A logikában azokat a kijelentő mondatokat, amelyekről egyértelműen eldönthető, hogy a tartalmuk igaz vagy hamis, állításoknak vagy kijelentéseknek nevezzük. Egy állítás igaz vagy hamis, harmadik eset nincs. Az igaz, illetve a hamis megjelölés az állítás logikai értéke.																
D	Állítás tagadása (negáció)	Egy A állítás tagadása az az állítás, amely akkor és csak akkor igaz, ha az A állítás hamis. Jele: $\neg A$	<table><tr><th>A</th><th>$\neg A$</th></tr><tr><td>igaz</td><td>hamis</td></tr><tr><td>hamis</td><td>igaz</td></tr></table>	A	$\neg A$	igaz	hamis	hamis	igaz									
A	$\neg A$																	
igaz	hamis																	
hamis	igaz																	
D	VAGY művelet (diszjunkció)	Ha A és B egy-egy állítás, akkor A vagy B azt az állítást jelenti, amely igaz, ha A és B közül legalább az egyik igaz, és hamis, ha A és B is hamis. Ez a művelet a „megengedő vagy” művelet. Jele: $A \vee B$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>$A \vee B$</th></tr><tr><td>igaz</td><td>igaz</td><td>igaz</td></tr><tr><td>igaz</td><td>hamis</td><td>igaz</td></tr><tr><td>hamis</td><td>igaz</td><td>igaz</td></tr><tr><td>hamis</td><td>hamis</td><td>hamis</td></tr></table>	A	B	$A \vee B$	igaz	igaz	igaz	igaz	hamis	igaz	hamis	igaz	igaz	hamis	hamis	hamis
A	B	$A \vee B$																
igaz	igaz	igaz																
igaz	hamis	igaz																
hamis	igaz	igaz																
hamis	hamis	hamis																
D	ÉS művelet (konjunkció)	Ha A és B egy-egy állítás, akkor A és B azt az állítást jelenti, amely igaz, ha A is és B is igaz, és hamis, ha A és B közül legalább az egyik hamis. Jele: $A \wedge B$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>$A \wedge B$</th></tr><tr><td>igaz</td><td>igaz</td><td>igaz</td></tr><tr><td>igaz</td><td>hamis</td><td>hamis</td></tr><tr><td>hamis</td><td>igaz</td><td>hamis</td></tr><tr><td>hamis</td><td>hamis</td><td>hamis</td></tr></table>	A	B	$A \wedge B$	igaz	igaz	igaz	igaz	hamis	hamis	hamis	igaz	hamis	hamis	hamis	hamis
A	B	$A \wedge B$																
igaz	igaz	igaz																
igaz	hamis	hamis																
hamis	igaz	hamis																
hamis	hamis	hamis																
D	Kizáró vagy	Ha A és B egy-egy állítás, akkor a „vagy A , vagy B ” azt az állítást jelenti, amely igaz, ha A és B közül pontosan az egyik igaz, minden más esetben hamis. Ez a művelet a „kizáró vagy” művelet. (Jele: $A \oplus B$.)	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>vagy A, vagy B</th></tr><tr><td>igaz</td><td>igaz</td><td>hamis</td></tr><tr><td>igaz</td><td>hamis</td><td>igaz</td></tr><tr><td>hamis</td><td>igaz</td><td>igaz</td></tr><tr><td>hamis</td><td>hamis</td><td>hamis</td></tr></table>	A	B	vagy A , vagy B	igaz	igaz	hamis	igaz	hamis	igaz	hamis	igaz	igaz	hamis	hamis	hamis
A	B	vagy A , vagy B																
igaz	igaz	hamis																
igaz	hamis	igaz																
hamis	igaz	igaz																
hamis	hamis	hamis																
D	„Ha ..., akkor” művelet (implikáció)	Ha A és B egy-egy állítás, akkor a „ha A , akkor B ” állítás pontosan akkor hamis, ha A igaz, és B hamis, minden más esetben igaz. Jele: $A \rightarrow B$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>$A \rightarrow B$</th></tr><tr><td>igaz</td><td>igaz</td><td>igaz</td></tr><tr><td>igaz</td><td>hamis</td><td>hamis</td></tr><tr><td>hamis</td><td>igaz</td><td>igaz</td></tr><tr><td>hamis</td><td>hamis</td><td>igaz</td></tr></table>	A	B	$A \rightarrow B$	igaz	igaz	igaz	igaz	hamis	hamis	hamis	igaz	igaz	hamis	hamis	igaz
A	B	$A \rightarrow B$																
igaz	igaz	igaz																
igaz	hamis	hamis																
hamis	igaz	igaz																
hamis	hamis	igaz																
D	„Akkor és csak akkor” művelet (ekvivalencia)	Ha A és B egy-egy állítás, akkor az „ A akkor és csak akkor, ha B ” azt az állítást jelenti, amely pontosan akkor igaz, ha A és B logikai értéke azonos, azaz vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis. Minden más esetben hamis. Jele: $A \leftrightarrow B$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>$A \leftrightarrow B$</th></tr><tr><td>igaz</td><td>igaz</td><td>igaz</td></tr><tr><td>igaz</td><td>hamis</td><td>hamis</td></tr><tr><td>hamis</td><td>igaz</td><td>hamis</td></tr><tr><td>hamis</td><td>hamis</td><td>igaz</td></tr></table>	A	B	$A \leftrightarrow B$	igaz	igaz	igaz	igaz	hamis	hamis	hamis	igaz	hamis	hamis	hamis	igaz
A	B	$A \leftrightarrow B$																
igaz	igaz	igaz																
igaz	hamis	hamis																
hamis	igaz	hamis																
hamis	hamis	igaz																

M	Állítás megfordítása	Egy „ha A, akkor B” ($A \rightarrow B$) állítás megfordítása a „ha B, akkor A” ($B \rightarrow A$) állítás. Az eredeti és a megfordított állítás igazságértéke független egymástól. <i>Például:</i> állítás: Ha egy négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást. megfordítása: Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor téglalap. (Most az első állítás igaz, a második hamis.)
D	Faktoriális	$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$ Értelmezzük a $0!$ -t is: $0! = 1$.
T	Sorba rendezés	n darab különböző elem lehetséges sorba rendezéseinek száma: $n!$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) (n darab elem egy lehetséges sorba rendezését az n elem egy permutációjának nevezzük.) <i>Például:</i> 5 különböző elem lehetséges sorba rendezéseinek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ 
T	Kiválasztás, ha számít a kiválasztott elemek sorrendje	n darab különböző elem közül kiválasztunk k darabot, és számít a kiválasztott elemek sorrendje. ($n, k \in \mathbb{Z}^+, n \geq k$) - Ha minden elemet legfeljebb egyszer választhatunk, akkor a lehetőségek száma: $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ - Ha az elemek akár többször is kiválaszthatók, akkor a lehetőségek száma n^k. (Ha n darab elem közül kiválasztunk k darabot, és számít a kiválasztott elemek sorrendje, akkor egy lehetséges kiválasztást az n elem egy k-ad osztályú variációjának nevezzük.) <i>Például:</i> 8 versenyző között az első három helyezett $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$- féleképpen alakulhat ki, ha nincs holtverseny.  Ha háromszor dobunk egy dobókockával, és a dobások eredményét sorban felírjuk, akkor a lehetőségek száma $6^3 = 216$. 
D	Binomiális együttható	Az $\binom{n}{k}$ kifejezéseket binomiális együtthatóknak nevezzük. ($n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
T	Kiválasztás, ha nem számít a kiválasztott elemek sorrendje	n darab különböző elem közül kiválasztunk k darabot, nem számít a kiválasztott elemek sorrendje, és minden elemet legfeljebb egyszer választhatunk. ($n, k \in \mathbb{N}^+, n \geq k$) A lehetőségek száma: $\binom{n}{k}$ (Ha n elem közül kiválasztunk k darabot, és nem számít a kiválasztott elemek sorrendje, akkor egy lehetséges kiválasztást az n elem egy k-ad osztályú kombinációjának nevezzük.) <i>Például:</i> 8 gyerek közül $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$-féleképpen választhatunk ki egy 3 gyerekből álló csoportot, ha a csoport tagjainak sorrendje nem számít.
T	Összefüggések binomiális együtthatók között	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$
T	k elemű részhalmazok száma	Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{k}$. ($n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$)
T	Összes részhalmaz száma	Egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma 2^n. ($n \in \mathbb{N}$)
D	Gráf	Pontok (más szóval csúcsok) és bizonyos pontokat összekötő élek halmaza.
D	Fokszám	Egy csúcs fokszáma egyenlő az adott csúcsból kiinduló élek számával.
T	Fokszámok összege	Minden gráfban a pontok fokszámának összege egyenlő az élek számának kétszeresével. Ebből következik, hogy a fokszámok összege mindig páros.

- 1.** Egy osztályban 17-en vannak, akik látták az Avatar, 18-an, akik látták a Mátrix, és 13-an, akik látták a Gladiátor című filmet. Ugyanannyian vannak azok, akik mindhárom filmet látták, akik a három közül pontosan két filmet, akik pontosan egy filmet, és akik egy filmet sem láttak. Hányan vannak az osztályban?

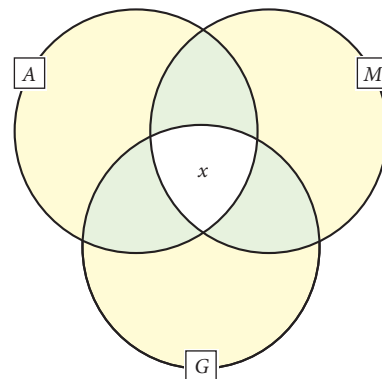
Megoldás

Legyen A azok halmaza, akik látták az Avatart, M azok halmaza, akik látták a Mátrixot, és G azok halmaza, akik látták a Gladiátort. Venn-diagramon ábrázoltuk a három halmazt. Jelöljük x -szel azok számát, akik mindhárom filmet látták.

Ekkor azok, akik pontosan két filmet láttak, a Venn-diagramon zöld színnel jelölt részbe tartoznak, az $\bar{o}$ számuk is x . Azok, akik pontosan egy filmet láttak, az ábrán sárga színnel jelölt részbe tartoznak. Az $\bar{o}$ számuk is x . Ha összeadjuk az A , M és G halmazok számosságát, akkor kétszer számoljuk azokat, akik két filmet láttak, és háromszor azokat, akik három filmet láttak.

Ezért $17 + 18 + 13 = x + 2x + 3x$. Ebből $48 = 6x$, és $x = 8$.

A filmek közül 8 tanuló három filmet, 8 tanuló pontosan 2 filmet, 8 tanuló pontosan 1 filmet, 8 tanuló pedig egy filmet sem látott. Az osztályban tehát 32 tanuló van.



- 2.** Hány olyan 5 jegyű szám van, amelynek az utolsót kivéve mindegyik számjegye nagyobb, mint a rákövetkező?

Megoldás

A keresett számok 5 különböző számjegyet tartalmaznak, a legkisebb számjegy az egyes helyi értéken áll.

Ha tetszőleges módon megadunk 5 különböző számjegyet (például a 4, 8, 0, 7 és 3), akkor ezekből pontosan egy olyan ötjegyű szám képezhető, amely megfelel annak, hogy az utolsót kivéve mindegyik számjegye nagyobb, mint a rákövetkező (ez most a 87 430).

Ezért a megfelelő 5 jegyű számokból pontosan annyi van, ahányféleképpen a 10 számjegy közül 5 különbözőt ki tudunk választani, ha a kiválasztás sorrendje nem számít. Ennek száma $\binom{10}{5} = 252$.

Megjegyzés

Az $\binom{n}{k}$ kifejezés a zsebszámológépek nCr feliratú gombjával közvetlenül kiszámolható.

- 3.** Egy hivatalos megbeszélésen 6 cégvezető találkozott egymással. Érkezéskor mindenki mindenkivel kezét fogott pontosan egyszer. Minden kézfogást megörökített egy hivatalos fotós.

- a) Hány kézfogás történt összesen?
b) A rendezvény honlapjára fotódokumentáció is felkerült a kézfogásokról. Hányféleképpen választhatták ki a szerkesztők, hogy melyik képeket teszik a honlapra, ha az is lehet, hogy minden kézfogásról felteszik a képet, az is lehet, hogy kevesebbéről? (Legalább egy képet mindenképpen feltesznek, és a kiválasztás sorrendje nem számít.)

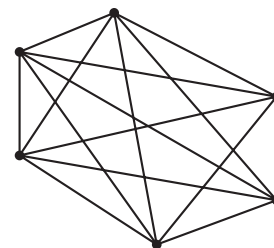
Megoldás

- a) Minden résztvevő kezét fogott a többi 5-tel. 6 résztvevő esetén ez $6 \cdot 5 = 30$, de így minden kézfogást kétszer számoltunk. A megoldás ezért: 15 kézfogás történt.

A feladat szemléltethető egy 6 pontú gráffal, amelyben bármely két pont között pontosan egy él fut. Ez a 6 pontú teljes gráf, éleinek száma 15.

- b) A szerkesztők a 15 fénykép mindegyikéről eldönthetik, hogy felkerül-e a honlapra, vagy sem. Ez $2^{15} = 32\,768$ lehetőség. Ebből ki kell vonni azt a lehetőséget, amikor egyik kép sem kerül fel. Ezért a megoldás 32 767.

A feladat összekapcsolódik azzal, hogy egy 15 elemű halmaznak 2^{15} darab részhalmaza van. Ebbe beletartozik az üres halmaz is és maga a 15 elemű teljes halmaz.



FELADATOK I. RÉSZ

- A1.** Az A halmaz elemei a 120 pozitív osztói, a B halmaz elemei pedig a 150 pozitív osztói. Elemei felsorolásával add meg az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazokat!
- A2.** A felsorolt halmazok közül melyek a végtelen halmazok?
 $\mathbf{N} \cap \mathbf{R}$ $\mathbf{N} \cup \mathbf{R}$ $\mathbf{N} \setminus \mathbf{R}$ $\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$
- A3.** Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $|A| = 10$ és $|B| = 13$.
a) Add meg $A \cap B$ számosságának legnagyobb lehetséges értékét!
b) Add meg $B \setminus A$ számosságának legkisebb lehetséges értékét!
- A4.** Rajzolj egy olyan gráfot, amelynek 5 csúcsa és 7 éle van, és minden csúcs fokszáma kisebb 4-nél!
- A5.** Hét ember érkezik egy terembe (köztük Péter), és egyesével, egymás után lépnek be az ajtón. Hányféle sorrendben léphetnek be, ha tudjuk, hogy közülük Péter nem másodikként lép a terembe?
- A6.** Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben szerepel az ötös számjegy?
- A7.** Egy házban nyári szálláshelyként két különálló apartmant alakítottak ki. Egyik héten az egyik apartmant a négytagú Sallai család, a másik apartmant az öttagú Kemény család vette ki. A két család tagjai a héten megismerkedtek egymással, és összebarátkoztak, annak ellenére, hogy korábban senki nem ismert senkit a másik családból. Ha senkit sem tekintünk önmaga ismerősének, akkor hány ismeretség van a 9 ember között
a) a nyaralás kezdetekor; **b)** a nyaralás végén?
- A8.** Hány részhalmaza van a 15-nél kisebb pozitív páros számok halmazának? Indokold a válaszodat!
- A9.** Hány pontja és hány éle van annak a gráfnak, amelynek pontjai megfelelnek egy kocka oldallapjainak, és két pont között pontosan akkor fut él, ha a lapok szomszédosak?
- A10.** Anikó a következőt állítja: Minden országban él kenguru.
 Az alábbi négy állítás közül válaszd ki az összeset, amely Anikó állításának tagadása!
 A: Semelyik országban sem élnek kenguruk. C: Van olyan ország, amelyben él kenguru.
 B: Van olyan ország, amelyben nem él kenguru. D: Nem minden országban él kenguru.
- A11.** Határozd meg az A , a B , az $A \wedge \neg B$ és az $A \vee \neg B$ állítások logikai értékét!
 A: Van olyan halmaz, amelynek a számossága 0.
 B: Van olyan gráf, amelynek ugyanannyi éle van, mint pontja.
 Válaszodat indokold!
- A12.** Egy kerékpáros lámpában 5 LED (LED = fényt kibocsátó dióda) van. A LED-ek egymástól függetlenül működhetnek, legalább egy LED mindig világít, ha a lámpa be van kapcsolva.
a) Hány különböző módon világíthat a lámpa, ha két világítást akkor tekintünk különbözőnek, ha nem ugyanazok a LED-ek világítanak?
b) Hány lehetőség van akkor, ha mindegyik LED fehéren vagy pirosan világíthat?

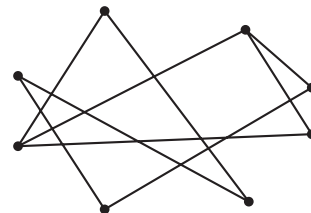


FELADATOK I. RÉSZ

B1. Az A és a B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{\text{egyjegyű pozitív egész számok}\}$, $A \cap B = \{6 \text{ pozitív osztói}\}$ és $A \setminus B = \{4; 5\}$. Elemei felsorolásával add meg az A és a B halmazokat!

B2. Legyen az A halmaz a $[2; 6]$ zárt intervallum, a B halmaz pedig a $[3; 10]$ zárt intervallum. Határozd meg az $A \cup B$ és az $A \cap B$ halmazokat!

B3. Az ábrán látható gráfot hány éllel kell kiegészíteni ahhoz, hogy
a) bármely két csúcsa között pontosan egy él fusson;
b) minden csúcsának a fokszáma 5 legyen?



B4. Határozd meg az A , a B és az $A \wedge \neg B$ állítások logikai értékét! Indokold a válaszodat!
 A : Minden deltoid tengelyesen szimmetrikus.
 B : Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus.

B5. Egy hétfagú csoportban minden tagnak pontosan két ismerőse van a csoport tagjai között. Szemléltess gráffal egy ilyen ismeretségi rendszert! (Az ismeretség kölcsönös, és senki sem ismerőse saját magának.)

B6. Egy 8 főből álló baráti társaság moziba megy. Arnold a társaság egyik tagja. Hányféleképpen ülhetnek le egy 8 ülésből álló sorba úgy, hogy Arnold üljön a sor valamelyik szélén?

B7. Legyenek a és b valós számok. Adott a következő állítás:
 „Ha a abszolút értéke és b abszolút értéke egyenlő, akkor a és b egyenlő.”
a) Határozd meg az állítás logikai értékét!
b) Fogalmazd meg az állítás megfordítását!
c) Határozd meg a b)-ben kimondott állítás logikai értékét!

B8. Mely halmazok végtelenek az alábbiak között?
 $\mathbf{R} \cap \mathbf{Z}$ $\mathbf{Z} \cap \mathbf{N}$ $\mathbf{R} \cap \emptyset$ $\mathbf{R} \setminus \emptyset$ $\emptyset \setminus \mathbf{R}$

B9. Egy 10 elemű halmaznak hány olyan részhalmaza van, amelynek legalább 7 eleme van?

B10. Egy kötélén néhány zokni szárad. Tekintsük a következő állítást: A kötélén minden zokni fekete.
 Válaszd ki az alábbiak közül az összes állítást, amely tagadása a fentinek!
 A : A kötélén minden zokni fehér.
 B : A kötélén nincs fekete zokni.
 C : Van olyan zokni a kötélén, amely nem fekete.
 D : A kötélén nem minden zokni fekete.

B11. Egy 34 fős osztály 2 képviselőt választ a diákönkormányzatba és 4 felelőst az iskolai közösségi szolgálatot szervező csoportba. A 2 képviselő sorrendje és a 4 felelős sorrendje nem számít. Hányféle lehet a választás eredménye, ha senkit sem választanak meg két tisztségre?

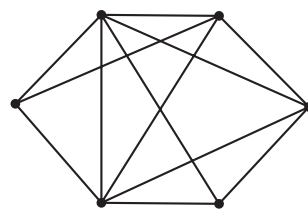
B12. Hány olyan ötjegyű szám van, amelynek
a) mindegyik számjegye páros;
b) mindegyik számjegye különböző?

P1. Egy gyógytornász minden hétfőn, szerdán és pénteken tart úszásfoglalkozást gyerekeknek. Nincs olyan tanítványa, aki mindhárom nap jár úszni. Hétfőn és szerdán 14-en járnak, szerdán és pénteken 18-an, hétfőn és pénteken 8-an. Összesen 65 gyerek jár hozzá úszni, és ugyanannyian járnak hétfőn is, szerdán is és pénteken is.

- Hányan vannak, akik csak pénteken járnak hozzá úszni?
- A gyógytornászt felkérték, hogy tartson egy rövid bemutató foglalkozást. Hányféleképpen választhat ki az úszásra járó tanítványai közül egy 5 gyerekből álló csoportot, akikkel a bemutató foglalkozást tartja?
- Az egyik alkalommal az úszáson részt vevők közül 5 gyerek (köztük Anna és Péter) megkérte, hogy hadd versenyezzenek. Hányféle végeredmény születhetett a versenyen, ha tudjuk, hogy Anna előrébb végzett, mint Péter, és a versenyen nem volt holtverseny?

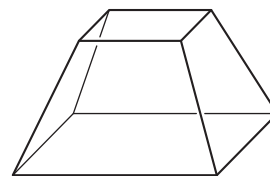
P2. Egy pozitív egész szám pozitív osztói ábrázolhatók gráf segítségével úgy, hogy a gráf csúcsai az osztók, és két csúcs között akkor fut él, ha az egyik csúcsban lévő szám osztója vagy többszöröse a másik csúcsban lévő számnak.

- Helyezd el a 63 pozitív osztóit az ábra szerinti gráf csúcsaiban a leírt szabálynak megfelelően!
- Hányféle szabályos kitöltése van az ábra szerinti gráfnak a 63 pozitív osztóival a leírt szabálynak megfelelően? Válaszodat indokold!
- Hányféleképpen választhatunk ki a 63 pozitív osztói közül valahány osztót, ha legalább egyet kiválasztunk, és a kiválasztás sorrendje nem számít?



P3. Egy édesipari cég olyan dobozba csomagolja az egyik termékét, amelynek az alakja négyoldalú szabályos csonkagúla.

- A cég úgy dönt, hogy a doboz fedőlapját és az oldallapokat kék, zöld, lila vagy sárga színűre színezik olyan módon, hogy a szomszédos oldallapok különböző színűek. Hány különböző doboz készíthető e négy szín használatával? (Minden lap egyszínű, az alaplap fehér, a doboz mérete adott, és két dobozt különbözőnek tekintünk, ha forgatással nem vihetők egymásba.)
- Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Indokold a választodat!
Ha egy test csonkagúla, akkor van két olyan lapja, amelyek területe különböző.
- Fogalmazd meg a b)-ben megadott állítás megfordítását, és add meg a logikai értékét! Indokold a választodat!



P4. Egy dobókockát egymás után háromszor feldobunk. Ha a dobások sorrendjét is figyelembe vesszük, akkor hányféleképpen fordulhat elő, hogy

- | | |
|---|---|
| a) mindegyik esetben ugyanazt a számot dobjuk; | c) a három szám között pontosan kettő ugyanaz; |
| b) három különböző számot dobunk; | d) a dobott pontok összege 16? |

P5. Egy zsákban 30 darab számozott golyó van. Az 1-től 10-ig számozott golyók színe fehér, a 11-től 20-ig számozottak színe fekete, és a 21-től 30-ig számozottak színe zöld. A golyók tapintásra egyformák. Becsukott szemmel, visszatevés nélkül kihúzzunk a zsákból néhány golyót. A kihúzott golyók sorrendje nem számít. (Két húzás azonos, ha ugyanazokat a golyókat húztuk ki.)

- Hány golyót kell kihúzni a zsákból, hogy biztosan legyen a kihúzott golyók között fekete vagy fehér?
- Hány golyót kell kihúzni a zsákból, hogy biztosan legyen a kihúzott golyók között fekete és fehér?
- Öt golyót húzzunk ki. Hány olyan húzás van, amelyben mindegyik golyó fehér?
- Öt golyót húzzunk ki. Hány olyan húzás van, amelyben a golyók közül legalább kettő fehér?
- Öt golyót húzzunk ki. Hány olyan húzás van, amelyben a golyók közül pontosan kettő fehér, és pontosan kettőn 10-zel osztható szám áll?

FELADATOK II. RÉSZ

- Q1.** a) Az A halmazban a kételemű részhalmazok száma 1575-tel több, mint az egyelemű részhalmazok számának 50-szerese. Hány elemű az A halmaz?
 b) A B halmaz elemei azok a 100-nál kisebb pozitív egész számok, amelyek nem oszthatók sem 2-vel, sem 7-tel, sem 11-gyel. Hány elemű a B halmaz?

- Q2.** Egy sakkversenyt körmérkőzéses rendszerben bonyolítanak le, azaz mindenki mindenkivel pontosan egy partit játszik. Táblázatba foglaltuk, hogy eddig ki kivel játszott, a partit ki nyerte, vagy a parti döntetlenre végződött. (Például a táblázatba dőlt betűvel írt *Anna* azt jelenti, hogy Anna és Béla már játszott egymással, és azt a partit Anna nyerte.)

	Anna	Béla	Cili	Dani	Ede	Feri
Anna		<i>Anna</i>			<i>Ede</i>	<i>Feri</i>
Béla			<i>Béla</i>	döntetlen		
Cili				<i>Dani</i>		<i>Cili</i>
Dani					döntetlen	
Ede						<i>Feri</i>
Feri						

- a) Szemléltesd gráffal a versenyen lejátszott partikat úgy, hogy a gráf pontjai jelentsék a versenyzőket, a gráf élei pedig az eddig lejátszott partikat!
 b) A versenyen hetente egy fordulót rendeznek meg. Egy fordulóban mindenki pontosan egy partit játszik. Hány forduló van még hátra a versenyből?
 c) A győzelemért 1 pont, a döntetlenért 0,5 pont, a vesztes partiért 0 pont jár. Kinek hány pontja van a verseny jelenlegi állásában?

Név	Anna	Béla	Cili	Dani	Ede	Feri
Pontszám						

- Q3.** Hány olyan hatjegyű szám van,
 a) amelyben szerepel a nyolcas számjegy;
 b) amely háromféle számjegyet tartalmaz, mindegyik számjegyből kettőt;
 c) amelyben a számjegyek különbözők, és növekvő sorrendben követik egymást?

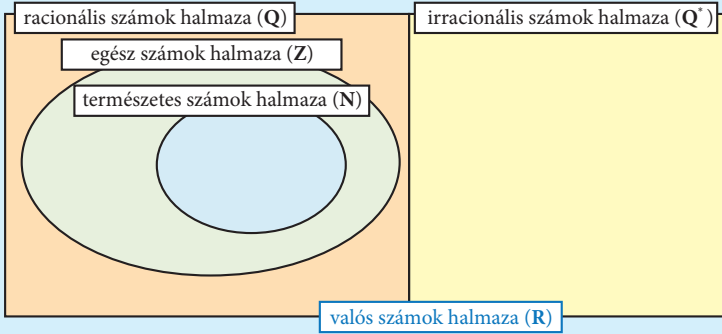
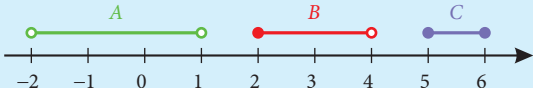
- Q4.** Egy 30 fős érettségiző osztályban 18 tanulónak van középfokú nyelvvizsgálója angol nyelvből vagy német nyelvből, közülük 3 tanulónak mindkét nyelvből. Az angol nyelvvizsgálóval rendelkezők száma kétszerese a német nyelvvizsgálóval rendelkező tanulók számának. Más nyelvből nem tett senki nyelvvizsgát az osztályban.
 a) Hány tanulónak van német nyelvből középfokú nyelvvizsgálója?
 b) Hányféleképpen választható ki az osztály tanulói közül négy úgy, hogy legalább kettőnek legyen nyelvvizsgálója, ha a kiválasztás sorrendje nem számít?
 c) Hányféle sorrendben hívhatják be a szóbeli érettségi vizsgára a diákokat, ha először azokat hívják, akiknek két nyelvvizsgájuk van, utána azokat, akiknek egy, végül azokat, akiknek nincs nyelvvizsgájuk?

- Q5.** Egy cégcsoport égisze alatt 7 vállalkozás működik. A szervezet olyan forrásokra pályázhatott, amelyeket együttműködés keretében használhatnak fel. Úgy döntöttek, hogy mindegyik pályázatukban pontosan 2 vállalkozás dolgozik együtt.
 a) Az egyik megbeszélésen mind a 7 vállalkozásból egy-egy ember vesz részt. A találkozó elején mindenki koccint a többi emberrel, mindenkivel pontosan egyszer. Hány koccintás történik?
 b) Bizonyítsd be, hogy nem lehetséges, hogy mind a 7 vállalkozás pontosan 3 projektben vesz részt!
 c) Az év végén a forrást biztosító szervezet ellenőriz néhány befejezett projektet. Hányféleképpen választhat ki 4 projektet a szervezet projektjei közül, ha a vállalkozások közül 4 vállalkozás 3 projektben, 3 vállalkozás pedig 2 projektben vett részt?



A számtan – a számok és a számolás tudománya – a matematika legrégebbi és egyik legszerteágazóbb területe. Fejlődése nyomon követhető az ujjakon végzett egyszerű számolásoktól egészen a napjaink szuperszámítógépeivel végzett számításokig. A számokkal való műveletek alapos ismerete, a betűs kifejezések használatában való jártasság, az egyenletek, egyenletrendszerek megoldása nemcsak a matematikában fontos, hanem a többi tudományágban, valamint a hétköznapi életben is (pl. pénzügyi számítások, lakásfelújítás, konyhai műveletek).

FOGALMAK, TÉTELEK, MÓDSZEREK

D	A valós számkör	N = természetes számok halmaza Q = racionális számok halmaza R = valós számok halmaza Z = egész számok halmaza Q^* = irracionális számok halmaza  Természetes számok: 0; 1; 2; 3; ... Egész számok: ... -2; -1; 0; 1; 2; ... Racionális számok: a két egész szám hányadosaként előállítható számok. <i>Például:</i> $\frac{5}{7}$; 2,03; -5; 3,405 Irracionális számok azok a (valós) számok, amelyek nem állnak elő két egész szám hányadosaként. <i>Például:</i> $\sqrt{2}$; $\lg 3$; π A racionális és az irracionális számok halmazának uniója a valós számok halmaza. A valós számok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a számegyenes pontjainak.
		Minden racionális szám tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos. <i>Például:</i> $\frac{3}{5} = 0,6$; $\frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$ Minden irracionális szám tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos.
D	Intervallum	Azoknak az x valós számoknak a halmaza, amelyekre az a és b valós számok esetén ➤ $a < x < b$, az a; b nyílt intervallum, jele: $]a; b[$; ➤ $a \leq x < b$, az a; b balról zárt, jobbról nyílt intervallum, jele: $[a; b[$; ➤ $a < x \leq b$, az a; b balról nyílt, jobbról zárt intervallum, jele: $]a; b]$; ➤ $a \leq x \leq b$, az a; b zárt intervallum, jele: $[a; b]$; ➤ $]a; \infty[$ jelöli azon valós számok halmazát, melyekre $a < x$; ➤ $]-\infty; b[$ jelöli azon valós számok halmazát, melyekre $x < b$. <i>Például:</i> az $A =]-2; 1[$, $B = [2; 4[$, $C = [5; 6]$ intervallumok a számegyenesen: 

D	Oszthatóság	Az a természetes szám osztható a b természetes számmal, ha van olyan c természetes szám, hogy $a = bc$. Ekkor b osztója az a -nak, az a szám többszöröse a b -nek. Jele: $b \mid a$ Például: $2 \mid 6$; $0 \mid 0$, vagyis a 0 osztója 0-nak, azaz a 0 többszöröse a 0-nak. Megjegyzés: Az oszthatóság egy reláció két természetes szám között. Nem tévesztendő össze az osztás művelettel.
D	Prímszámok	Azok a pozitív egész számok, amelyeknek pontosan két pozitív osztójuk van. Például: 2; 3; 5; 7; 11 A definíció szerint az 1 nem prímszám.
D	Összetett számok	Azok a pozitív egész számok, amelyeknek kettőnél több osztójuk van. Például: 4; 15; 26; 49 A definíció szerint az 1 nem összetett szám.
D	Legnagyobb közös osztó	Két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztója a közös osztók közül a legnagyobb. Jele: $(a; b)$
M	A legnagyobb közös osztó meghatározása	Két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztóját a számok prímtenyezős felbontásából megkapjuk, ha a közös prímtenyezőket az előforduló legkisebb kitevőjű hatványra emeljük, majd ezeket összeszorozzuk. Ha nincsenek közös prímtenyezők, akkor a legnagyobb közös osztó 1. Például: $(2^5 \cdot 3; 2^3 \cdot 3^4) = 2^3 \cdot 3$; $(2^5 \cdot 3; 5^3 \cdot 7) = 1$
D	Legkisebb közös többszörös	Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszöröse a pozitív közös többszörösök közül a legkisebb. Jele: $[a; b]$
M	A legkisebb közös többszörös meghatározása	Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszörösét megkapjuk, ha a számok prímtenyezős felbontásában az előforduló összes prímszámot az előforduló legnagyobb hatványon összeszorozzuk. Például: $[2^5 \cdot 5; 2^3 \cdot 3^4] = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5$
D	Relatív prímelek	Két pozitív egész szám egymással relatív prím, ha a legnagyobb közös osztójuk 1.
T	Műveleti tulajdonságok ($a, b, c \in \mathbf{R}$)	Kommutativitás, felcserélhetőség: $a + b = b + a$ $ab = ba$ Asszociativitás, csoportosíthatóság: $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(ab)c = a(bc)$ Disztributivitás, széttagolhatóság: $a(b + c) = ab + ac$
D	Valós szám egész kitevőjű hatványai	$a \in \mathbf{R}$ és $n \in \mathbf{Z}^+ \setminus \{1\}$ esetén a^n egy olyan n -tenyezős szorzat, melynek minden tényezője a . $a \in \mathbf{R}$ esetén $a^1 = a$. $a \in (\mathbf{R} \setminus \{0\})$ és $n \in \mathbf{Z}^+$ esetén $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. $a \in (\mathbf{R} \setminus \{0\})$ esetén $a^0 = 1$. A 0-nak nem értelmezzük sem a nulladik, sem negatív kitevőjű hatványát.
T	A hatványozás azonosságai	Minden olyan a, b, m és n esetében, amelyekre értelme van a következő kifejezéseknek, igaz, hogy: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$; $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
D	A négyzetgyök	Az a nemnegatív valós szám esetén $\sqrt{a}$ jelenti azt a nemnegatív valós számot, amelynek a négyzete a -val egyenlő, azaz $(\sqrt{a})^2 = a$. Például: $\sqrt{9} = 3$, mert $3 \geq 0$, és $3^2 = 9$.
T		Bármely valós a esetén: $\sqrt{a^2} = a $. Például: $\sqrt{(-5)^2} = -5 = 5$
T	A négyzetgyökvonás azonosságai	Minden olyan a, b nemnegatív valós szám és k egész szám esetén, amelyekre értelme van a következő kifejezéseknek, igaz, hogy $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$. Például: $\sqrt{200} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2}$; $\sqrt{25^3} = (\sqrt{25})^3$
D	n -edik gyök	Ha a nemnegatív valós szám, és n páros pozitív egész, akkor $\sqrt[n]{a}$ jelenti azt a nemnegatív valós számot, amelynek n -edik hatványa a , azaz $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Ha a valós szám, és n 1-nél nagyobb páratlan pozitív egész, akkor $\sqrt[n]{a}$ jelenti azt a valós számot, amelynek n -edik hatványa a , azaz $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Például: $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[4]{625} = 5$; $\sqrt[5]{-32} = -2$
T		Ha a valós szám, és n páros pozitív egész szám, akkor $\sqrt[n]{a^n} = a $. Ha a valós szám, és n 1-nél nagyobb páratlan pozitív egész szám, akkor $\sqrt[n]{a^n} = a$. Például: $\sqrt[4]{(-5)^4} = -5 = 5$; $\sqrt[3]{2^3} = 2$; $\sqrt[5]{(-7)^5} = -7$

D	Törtkitevőjű hatvány	Ha az a pozitív valós szám, p és q egész számok, és $q > 1$, akkor $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Például: $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$; $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$; $7^{-\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{7^{-4}}$.
D	A logaritmus	Ha a, b pozitív valós szám, és $a \neq 1$, akkor az $\log_a b$ jelenti azt a valós hatványkitevőt, amelyre az a -t emelve b -t kapunk, azaz $a^{\log_a b} = b$. A $\log_a b$ -t így olvassuk: a alapú logaritmus b . Az a a logaritmus alapszáma. A 10-es alapú logaritmus jele: $\lg$. Például: $\log_2 8 = 3$; $\log_9 3 = \frac{1}{2}$; $\log_5 \frac{1}{5} = -1$; $\lg 100 = 2$ Ha a pozitív valós szám, és $a \neq 1$, akkor $\log_a a = 1$, valamint $\log_a 1 = 0$.
T	Áttérés más alapú logaritmusra	Ha a, b és c pozitív valós számok, $a \neq 1$, és $c \neq 1$, akkor $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. Például: $\log_4 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = \frac{\log_2 3}{2}$; $\log_5 2 = \frac{\lg 2}{\lg 5}$
T	Nevezetes azonosságok ($a, b \in \mathbf{R}$)	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
D	Egyenlet alaphalmaza	A valós számok halmazának az a részhalmaza, amelynek az elemei között a megoldásokat keressük.
D	Egyenlet megoldáshalmaza	Az alaphalmaz azon elemeinek összessége, amelyek igazzá teszik az egyenletet.
M	Mérlegelv	Az egyenletek megoldása során nem változik meg az egyenlet megoldáshalmaza, ha az egyenlőséggel két oldalán álló kifejezést ugyanazzal a valós számmal vagy kifejezéssel növeljük vagy csökkentjük, illetve ugyanazzal a nullától különböző valós számmal vagy kifejezéssel szorozzuk vagy osztjuk.
M	Ekvivalens átalakítás	Azok az átalakítások, amelyek nem járnak gyökvesztéssel, és nem adódik olyan megoldás, amely nem gyöke az eredeti egyenletnek. Nem ekvivalens átalakítás lehet pl. ismeretlennel való szorzás vagy osztás, hatványozás, gyökvonás.
D	A másodfokú egyenlet általános alakja	$ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$, és $a \neq 0$)
T	A másodfokú egyenlet megoldóképlete	Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet esetén az egyenlet megoldásai (gyökei): $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$, és $a \neq 0$)
D	A másodfokú egyenlet diszkriminánsa ($a, b, c \in \mathbf{R}$, és $a \neq 0$)	Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldóképletében a négyzetgyökjel alatt lévő kifejezés: $D = b^2 - 4ac$. Ha $D > 0$, két különböző valós gyöke van az egyenletnek, ha $D = 0$, egy valós gyöke (két egyenlő valós gyöke) van az egyenletnek, ha $D < 0$, nincs valós gyöke az egyenletnek.
T	A másodfokú egyenlet gyöktényező alakja ($a, b, c \in \mathbf{R}$, és $a \neq 0$)	Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet valós gyökei x_1 és x_2 , akkor $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Például: A $3x^2 - 2x - 1 = 0$ egyenlet valós gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = -\frac{1}{3}$, ezért $3x^2 - 2x - 1 = 3(x - 1)\left(x + \frac{1}{3}\right)$.
	n alapú számrendszer ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$)	Az n alapú számrendszerben: n db számjegy használható, a 0; 1; 2; ...; $n - 1$ számjegyek (ha $n > 10$, akkor $A = 10$, $B = 11$...), a számjegyek helyi értéke jobbról balra haladva $1; n^1; n^2; n^3 \dots$ Például: A hatos számrendszerben a számjegyek 0; 1; 2; 3; 4 és 5. A helyi értékek jobbról balra haladva $1; 6^1; 6^2; 6^3$. $2304_6 = 2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 4 \cdot 1$, tehát $2304_6 = 544$.

D	Egyenes arányosság	Két változó mennyiség között egyenes arányosság van, ha összetartozó értékeik hányadosa 0-tól különböző állandó. Egyenes arányosság van például: egyenletes mozgás esetén a megtett út és a közben eltelt idő között; órabér esetén a ledolgozott munkaórák és az azokért kapott fizetség között; a négyzet oldalhossza és a kerülete között.
D	Fordított arányosság	Két változó mennyiség fordítottan arányos, ha teljesül a következő: ahányszorosára változik az egyik mennyiség, annyira részére változik a másik. Ekkor a változó mennyiségek összetartozó értékeinek szorzata állandó. Fordított arányosság van például: adott mennyiségű pénzből vásárolható azonos termékek egységára és darabszáma között; adott területű téglalap oldalhosszai között; adott mennyiségű anyag elszállításához szükséges teherautók száma és az azok által megtett fordulóok száma között.
D	Százalék	Ha egy k mennyiség az a mennyiségnek p százaléka, akkor $k = \frac{a}{100} \cdot p$. <i>Például:</i> 72-nek a 15%-a egyenlő 72 századrészenek a 15-szörösével, $\frac{72}{100} \cdot 15 = 10,8$ -del.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1.

a) Alakítsd szorzattá az alábbi kifejezéseket!

$$3x^2 - 12x$$

$$3x^2 - 12$$

$$3x^2 - 12x + 12$$

b) Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$3x^2 - 12x = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 - 12x + 12 = 0$$

Megoldás

a) Mindhárom kifejezés esetében alkalmazható a kiemelés módszere, majd a második és harmadik esetben nevezetes azonosságok is.

$$3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$$

$$3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$$

$$3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2$$

b) Az egyenletek bal oldalát az a) feladatrészen megkapott szorzatalakban írva és felhasználva, hogy egy szorzat értéke akkor és csak akkor nulla, ha az abban szereplő valamely tényező értéke nulla, adódik:

$$3x^2 - 12x = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$3x(x - 4) = 0$$

$$3(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$3(x - 2)^2 = 0$$

I. eset vagy II. eset

I. eset vagy II. eset

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$3x = 0 \text{ vagy } x - 4 = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ vagy } x + 2 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ vagy } x = 4$$

$$x = 2 \text{ vagy } x = -2$$

$$x = 2$$

$$M = \{0; 4\}$$

$$M = \{2; -2\}$$

$$M = \{2\}$$

A kapott eredmények az eredeti egyenlet megoldásai, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk. (Ha nem csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, mindenképpen ellenőrizzük a megoldásokat behelyettesítéssel.)

2.

a) Alakítsd szorzattá a $3x^2 - 8x - 35$ kifejezést!

b) Oldd meg a $3x^2 - 8x - 35 < 0$ egyenlőtlenséget az egész számok halmazán!

Megoldás

a) A $3x^2 - 8x - 35$ másodfokú kifejezés szorzattá alakítása a gyöktényezős alak felírásával végezhető el.

A $3x^2 - 8x - 35 = 0$ egyenlet gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-35)}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 22}{6}, \text{ amiből } x_1 = -\frac{7}{3}, \text{ valamint } x_2 = 5, \text{ ezért a gyöktényezős alak:}$$

$$3x^2 - 8x - 35 = 3\left(x + \frac{7}{3}\right)(x - 5)$$

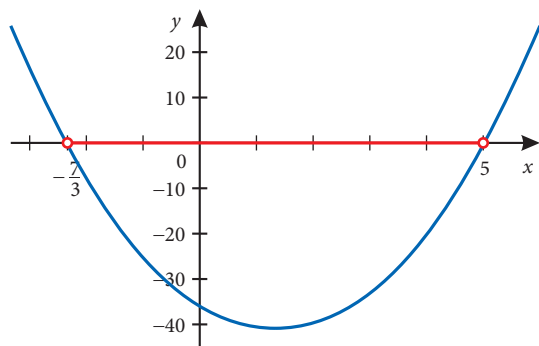
b) Első megoldás (grafikus módszer)

Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x) = 3x^2 - 8x - 35$ másodfokú függvényt.

A függvény grafikonja a másodfokú tag együtthatójának pozitív előjele miatt felfelé nyitott (konvex) parabola.

A $3x^2 - 8x - 35 = 0$ egyenlet gyökei megadják az f függvény zérushelyeit, tehát a függvény grafikonja az abszcissza-tengelyt az $x_1 = -\frac{7}{3}$, valamint az $x_2 = 5$ helyeken metszi.

Előbbiek felhasználásával a függvénygörbe vázolható, és a függvény grafikonjáról leolvasható az egyenlőtlenség megoldása.



Az eredeti egyenlőtlenség megfelel az $f(x) < 0$ egyenlőtlenségnek, vagyis azt kell meghatározni, hogy a függvény által felvett értékek hol negatívak. Az ábrán piros színnel jelölt intervallum megadja az egyenlőtlenséget teljesítő valós x értékek halmazát, de mivel az egyenlőtlenség alaphalmaza az egész számok halmaza, ezért a megoldáshalmaz elemei a jelölt intervallumba eső egész számok, tehát $\left[-\frac{7}{3}; 5\right] \in \mathbb{Z}$, vagyis:

$$M = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Második megoldás (algebrai módszer)

A $3x^2 - 8x - 35 < 0$ egyenlőtlenség megoldása elvégezhető a b) feladatrészen felírt szorzatalak segítségével is.

A $3\left(x + \frac{7}{3}\right)(x - 5) < 0$ egyenlőtlenség bal oldala egy háromtényezős szorzat, amelynek egyik tényezője (a 3) pozitív előjelű, ezért elegendő az $\left(x + \frac{7}{3}\right)(x - 5)$ szorzat előjelének vizsgálata.

$\left(x + \frac{7}{3}\right)(x - 5)$ szorzat akkor negatív, ha egyik tényezője sem 0, és a két tényező előjele egymással ellentétes.

A tényezők értékének előjelvizsgálatához célszerű ún. előjel táblázat készítése, melyből a megoldás leolvasható. Mivel

$\left(x + \frac{7}{3}\right)(x - 5) = 0$ akkor teljesül, ha $x_1 = -\frac{7}{3}$, vagy $x_2 = 5$, ezért:

	$x < -\frac{7}{3}$	$x = -\frac{7}{3}$	$-\frac{7}{3} < x < 5$	$x = 5$	$5 < x$
$x + \frac{7}{3}$ értéke	negatív	0	pozitív	pozitív	pozitív
$x - 5$ értéke	negatív	negatív	negatív	0	pozitív
$\left(x + \frac{7}{3}\right)(x - 5)$ értéke	pozitív	0	negatív	0	pozitív

A táblázatból kiolvasható, hogy a szorzat negatív, ha $-\frac{7}{3} < x < 5$, de az alaphalmaz miatt ennek az intervallumnak csak az egész elemei tartoznak a megoldáshalmazba, így: $M = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.



Írd át 6-os számrendszerbe a 3014_5 számot!

Megoldás

Először átírjuk az adott számot 10-es számrendszerbe:

$$\begin{aligned} 3014_5 &= 3 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4 = \\ &= 3 \cdot 125 + 0 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 4 = 384 \end{aligned}$$

Ezután a 10-es számrendszerből térünk át a 6-osra.

A 6 legkisebb hatványai: 1, 6, 36, 216, 1296. Közülük a 216 még kisebb a 384-nél, de az 1296 már nagyobb nála.

$$384 = 1 \cdot 216 + 168; \quad 168 = 4 \cdot 36 + 24; \quad 24 = 4 \cdot 6.$$

$$\text{Tehát } 3014_5 = 384 = 1 \cdot 216 + 4 \cdot 36 + 4 \cdot 6 + 0 \cdot 1, \text{ vagyis } 384 = 1440_6.$$

Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{3-7x} = -2$

b) $\sqrt{4x-3} = x-6$

Megoldás

a) Egy valós szám négyzetgyöke nemnegatív szám, ezért nem lehet az értéke az egyenlet jobb oldalán álló -2 . Tehát az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

b) A négyzetgyökvonás művelete a nemnegatív valós számokon értelmezett, és eredményként nemnegatív valós számot ad a kifejezés.

A bal oldalon álló kifejezés értelmezési tartományát a $4x-3 \geq 0$ egyenlőtlenség megoldása adja: $x \geq \frac{3}{4}$.

Mivel a bal oldal értéke nemnegatív, ezért a jobb oldalra is teljesülnie kell az $x-6 \geq 0$ relációnak, amiből $x \geq 6$.

A két egyenlőtlenség egyidejűleg akkor teljesül, ha $x \geq 6$.

Ezt követően (ezen a halmazon) ekvivalens átalakításokkal az egyenlet megoldása:

$$\sqrt{4x-3} = x-6 \quad / ()^2$$

$$4x-3 = x^2 - 12x + 36$$

$$0 = x^2 - 16x + 39$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (39)}}{2 \cdot 1} = \frac{16 \pm 10}{2},$$

amiből $x_1 = 3$, valamint $x_2 = 13$.

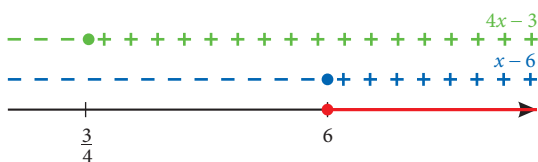
Az előzetes feltételeket $x_1 = 3$ nem teljesíti, ezért nem megoldása az egyenletnek, $x_2 = 13$ teljesíti, ezért megoldása az egyenletnek, így a megoldáshalmaz $M = \{13\}$.

Megjegyzések:

1. A feladat megoldható az értelmezési tartomány és értékkészlet vizsgálata nélkül is, de ezek elhagyásakor a kapott gyökök mindegyikét ellenőrizni kell az eredeti egyenletbe való visszahelyettesítéssel.

2. Az egyenlőtlenség megoldása során kapott relációkat érdemes számegyenes mentén ábrázolni, ez megkönnyíti a feladat átláthatóságát, könnyebbé teszi a halmazmetszetek létrehozását.

Például a b) feladatrészben:



Két cég, az Egyik Kft. és a Másik Kft. közösen vállalta el egy termék mintadarabjainak elkészítését. Ha az Egyik Kft. az eredeti vállalásnak csak $\frac{4}{5}$ részét teljesíti, a Másik Kft. pedig 10%-kal felülmúlja a tervet, akkor közösen 4300 darab terméket készítenek. Viszont ha az Egyik Kft. az eredeti tervek $\frac{5}{6}$ részét tudja legyártani, és a Másik Kft. 5%-os termelésnövekedésre képes, akkor 4230 darab terméket tudnak közösen gyártani. Eredetileg hány termék gyártását vállalta az Egyik Kft. és a Másik Kft.?

Megoldás

Legyen az Egyik Kft. eredeti tervének megfelelő darabszám x ; a Másik Kft. esetében pedig y .

Az I. változat szerint: $\frac{4}{5}x + \frac{110}{100}y = 4300$

A II. változat szerint: $\frac{5}{6}x + \frac{105}{100}y = 4230$

A két egyenlet együtt egy kétismeretlenes egyenletrendszert alkot.

Célszerű a megoldást az egyenlő együtthatók módszerével végezni, ezért az I. sort szorozzuk $\frac{5}{4}$ -del, a II. sort $\frac{6}{5}$ -del.

I. $x + 1,375y = 5375$

II. $x + 1,26y = 5076$

Az I. és II. sor különbsége: $0,115y = 299$, ebből $y = 2600$.

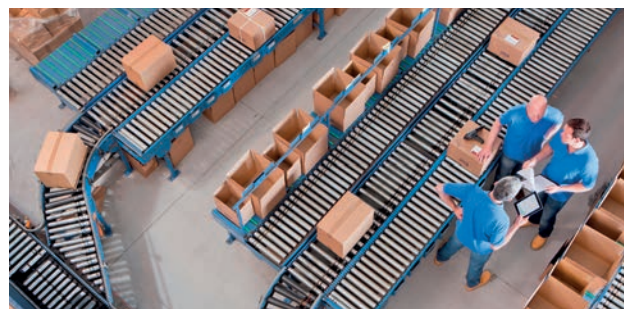
Az $y = 2600$ valamelyik tetszőleges sorba való visszahelyettesítésével $x = 1800$ adódik.

Ellenőrzés a szöveg szerint:

I. változat esetén: Az Egyik Kft. eredeti vállalása 1800 darab, ennek $\frac{4}{5}$ része 1440, a Másik Kft. eredeti vállalása 2600 darab, ennek 110%-a 2860, így együtt 4300 darabot tudnak gyártani.

II. változat esetén: Az Egyik Kft. eredeti vállalása 1800 darab, ennek $\frac{5}{6}$ része 1500, a Másik Kft. eredeti vállalása 2600 darab, az 5%-os növekedés miatt 105%-ot, vagyis 3120 darabot gyártanak, így a két cég 4300 darabot.

Válasz: Az Egyik Kft. eredetileg 1800, a Másik Kft. 2600 darab termék előállítását vállalta.



Egy ingatlanbecslő szerint Kovács úr lakásának jelenlegi értéke (2022 januárjában) 7,8 millió forint. Kovács úr azt tervezi, hogy eladja lakását, és helyette egy kisebbet fog vásárolni. Az új lakás ára 5,2 millió forint, és az adásvétellel kapcsolatos költségek várhatóan 400 000 forint körül lesznek. Az ingatlan eladása adó befizetésével jár (mivel ilyenkor a tulajdonos bevételre tesz szert). Az adó az adóalap 15%-a, és az adóalapot az „eladási ár – (vétélár + költségek)” képlet alapján számítják.

- Mennyi adót kell fizetnie Kovács úrnak, ha az ingatlan-adásvétel a terv szerint zajlik?
- Mennyit fog érni a jelenlegi lakás 4 teljes év eltelté után, ha a lakás értékcsökkenésének mértéke évi 3% (és időközben nem végeznek lakásfelújítást)?

Megoldás

- A képlet szerint az adó $7,8 \cdot 10^6 - (5,2 \cdot 10^6 + 0,4 \cdot 10^6) = 2,2 \cdot 10^6$ forintnak a 15%-a, vagyis $2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,15 = 330\,000$ forint.
- A 3%-os csökkenés miatt a lakás értéke az előző évinek mindig a 97%-ára, vagyis 0,97-szorosára esik vissza. Így a 4 teljes év alatt összesen $0,97^4$ -szeresére csökken a lakás értéke. Tehát $7,8 \cdot 10^6 \cdot 0,97^4 \approx 6,9 \cdot 10^6$ forint lesz a lakás értéke 4 teljes év elteltével.



A Föld népessége 2020 év végén közelítőleg 7,753 milliárd volt. 2022 július végén már körülbelül 7,963 milliárd ember élt a Földön.

- Hány százalékos volt a népesség havi átlagos növekedése ebben az időszakban?

- Ugyanilyen ritmusú növekedés mellett milyen népesség várható 2022 év végére?
- Ilyen mértékű növekedés mellett mikor éri el a világ népessége a 9 milliárdot?

Megoldás

- A szöveg alapján az eltelt 19 hónap alatt bekövetkezett változásra felírható egyenlet: $7,963 \cdot 10^9 = 7,753 \cdot 10^9 \cdot q^{19}$, ahol q a növekedésre vonatkozó arányszám. Az egyenlet oldalainak $7,753 \cdot 10^9$ -nel való osztása után $1,027 \approx q^{19}$, ahonnan 19. gyökvonással (vagy mindkét oldal $\frac{1}{19}$ -re történő hatványozásával) adódik: $q \approx 1,0014$, ami 100,14%-nak felel meg, ezért átlagosan közelítőleg havi 0,14%-os növekedést jelent.
- Az a) feladatrészen megkapott 0,14%-os növekedéssel számolva 2022 év végére (ami a július után 5 hónappal következik be) felírható: $A = 7,963 \cdot 10^9 \cdot 1,0014^5$, ami számolás után $A = 8,018 \cdot 10^9$ értéket ad. A 2022 év végére várható népesség tehát közelítőleg 8,018 milliárd fő.
- Jelölje a 2022 év vége óta eltelt hónapok számát x , így $9 \cdot 10^9 = 7,753 \cdot 10^9 \cdot 1,0014^x$. Az egyenlet oldalainak $7,753 \cdot 10^9$ -nel való osztása után $1,161 \approx 1,0014^x$. Ezek után azt keressük, hogy 1,0014-nek hányadik hatványa lesz közelítőleg 1,161-del egyenlő. A logaritmus definíciójának felhasználásával a keresett hatványkitevő értéke: $\log_{1,0014} 1,161$. A számérték meghatározását a logaritmus új alapra átírásával végezhetjük el: $\log_{1,0014} 1,161 = \frac{\lg 1,161}{\lg 1,0014} = 106,7 \approx 107$. Vagyis 2020 után közel 107 hónapnak kell elteltelnie, hogy a népesség elérje a 9 milliárdot, tehát várhatóan 2029 év végén (novemberben) következik be.



1.

Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán! Írd fel az egyenlőtlenségek megoldáshalmazát intervallumokkal! Adj meg legalább két olyan számot, amely igazá teszi az egyes egyenlőtlenségeket!

a) $\lg(5 - 6x) \leq -2$ b) $0,3^{4x-1} < 0,09^{-3}$

Megoldás

- a) A bal oldal értelmezési tartománya adódik az $5 - 6x > 0$ egyenlőtlenségből, így $\frac{5}{6} > x$.

A jobb oldal 10-es alapú logaritmusra átírásával:

$$\lg(5 - 6x) \leq \lg 10^{-2}$$

A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekvő tulajdonsága miatt a logaritmus elhagyásakor a relációjel megmarad, így:

$$5 - 6x \leq 10^{-2}$$

A kapott elsőfokú egyenlőtlenség megoldásához célszerű az oldalakat (mindig) úgy rendezni, hogy az ismeretlen együtthatója pozitív legyen. Így:

$$5 - 10^{-2} \leq 6x$$

$$\frac{499}{600} \leq x$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk. Tehát a megoldáshalmaz a $\left[\frac{499}{600}; \frac{5}{6}\right]$ intervallum.

Az egyik szám, amely teljesíti az egyenlőtlenséget, az intervallum legkisebb eleme, a $\frac{499}{600}$. Egy újabb számot könnyebb választani, ha az intervallum határait bővítjük például úgy, hogy a törtnek nevezője 1200 legyen. Így a $\frac{998}{1200}$ -nál nagyobb és ugyanakkor az $\frac{1000}{1200}$ -nál kisebb számot választhatunk, aminek megfelel a $\frac{999}{1200}$. Újabb számok újabb törtbővítéssel könnyen meghatározhatók.

- b) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

A jobb oldal átírása után:

$$0,3^{4x-1} < (0,3^2)^{-3}$$

$$0,3^{4x-1} < (0,3)^{-6}$$

A 0,3 alapú exponenciális függvény szigorú monoton csökkenő tulajdonsága miatt az alapok elhagyásakor megfordul a relációjel, így:

$$4x - 1 > -6$$

$$x > -\frac{5}{4}$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk. Tehát a megoldáshalmaz a $\left]-\frac{5}{4}; \infty\right[$ nyílt intervallum.

Bármelyik $-\frac{5}{4}$ -nél nagyobb szám benne van a megoldáshalmazban, így például a -1 , valamint a 3 teljesíti az egyenlőtlenséget.

2.

Oldd meg az $x^{x+3} = x^7$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Végezzünk esetszétválasztást aszerint, hogy a hatványalap pozitív, nulla vagy negatív!

I. eset

Ha $0 < x$, akkor vagy mindkét oldalon 1 a hatványalap (mert 1 minden hatványa 1), vagyis $x = 1$, vagy egymással egyenlő a két hatványkitevő (mivel egy pozitív szám hatványai akkor egyenlők, ha kitevőik egymással egyenlők), vagyis $x + 3 = 7$, ebből $x = 4$. Visszahelyettesítés után mindkét esetben fennáll az egyenlőség.

II. eset

Ha $x = 0$, akkor visszahelyettesítéssel $0^{0+3} = 0^7$ adódik. Mindkét oldal értéke 0 (mert a 0 minden pozitív kitevős hatványa 0), így fennáll az egyenlőség. Tehát az egyenletnek megoldása az $x = 0$.

III. eset

Ha $x < 0$, akkor az $x + 3$ kitevő csak egész szám lehet (mert negatív szám törtkitevős hatványát nem értelmeztük).

Az $x^{x+3} = x^7$ egyenlet mindkét oldalát x^7 -nel osztva $x^{x-4} = 1$ adódik. Ha $x = -1$, akkor visszahelyettesítéssel $(-1)^{-1+3} = (-1)^2$ adódik, de így a bal oldal értéke 1, a jobb oldalé -1 , tehát nem áll fenn az egyenlőség. Ha x a -1 -től különböző negatív egész, akkor $x^{x-4} = 1$ csakis akkor áll fenn, ha $x - 4 = 0$, amiből $x = 4$, de ez nem teljesíti az $x < 0$ feltételt.

Az egyenlet gyökei tehát: 0; 1; 4.

FELADATOK I. RÉSZ

- A1.** Dönts el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis!
 A: Ha két szám abszolút értéke egyenlő, akkor harmadik hatványaik is egyenlők.
 B: A kettes számrendszerben felírt 101111 szám a tízes számrendszerben 47.
 C: Bármely öt prímszám összege páros.
 D: A 90 és a 75 legkisebb közös többszöröse a 900.
 E: A prímszámok közül ki tudunk választani ötöt úgy, hogy az összegük páros legyen.
- A2.** Egy autó értéke egy év alatt 6%-kal csökkent, így jelenleg 2 280 000 Ft-ot ér. Mennyi volt az értéke 1 évvel ezelőtt?
- A3.** Pista a bankkártyája négyjegyű PIN-kódjából két dologra emlékszik. Az egyik, hogy benne van a 123 háromjegyű szám, a másik, hogy a kód olyan szám, ami osztható 4-gyel. Mi lehet a PIN-kód? Válaszod indokold!
- A4.** A 3-nak hányadik hatványa $\frac{9}{\sqrt{27}}$?
- A5.** Adott a $(2x - 1)^2 - 3x(2x - 4)$ másodfokú kifejezés. Rendezd a másodfokú kifejezést általános alakra $(ax^2 + bx + c)$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, majd számold ki a kifejezés helyettesítési értékét $x = -\frac{1}{2}$ esetén! Megoldásod részletezd!
- A6.** Hány olyan természetes szám van, amelyre értelme van a $\sqrt{47 - 3x}$ kifejezésnek?
- A7.** Az alábbiak közül melyik kifejezés értéke racionális szám?
 $A = \log_5 \sqrt{5}$ $B = \log_9 \frac{1}{3}$ $C = \pi^0$ $D = (\sqrt{7})^{-2} \cdot (\sqrt{7})^5$
- A8.** Írd fel a $-2x^2 + 4x - 3 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsát! Hány valós gyöke van az egyenletnek?
- A9.** Mely valós számpárok teszik igazzá az egyenletrendszert?

$$\begin{cases} 4x - 3y = -10 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$$
- A10.** Írd fel szorzat alakban a következő kifejezéseket!
 a) $6ab^2 - 9b$ b) $3x^2 - 12x + 12$
- A11.** Egy üzem 21 egyforma teljesítményű gépe 4,4 óra alatt gyártaná le a megrendelt mintadarabokat. 18 ugyanilyen teljesítményű gép hány perc alatt tudja legyártani a megrendelést?
- A12.** Húzd alá a megfelelőt a vastagon írt lehetőségek közül ahhoz, hogy igazak legyenek az állítások!
 a) Ha két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 1, akkor azok **egyik osztója a másiknak / relatív prímek**.
 b) Ha egy nem nulla valós számnak van négyzetgyöke, akkor **értelmezzük / nem értelmezzük** a 10-es alapú logaritmusát.
 c) Azonos alapú hatványok szorzását úgy is elvégezhetjük, hogy a közös alapot a kitevők **összegére/különbségére/ szorzatára** emeljük.
 d) Ha egy szám racionális, akkor biztosan eleme a **természetes/egész/irracionális/valós** számok halmazának is.

FELADATOK I. RÉSZ

B1. Válaszd ki azokat az egyenlőségeket, amelyek minden $a; b \in \mathbb{R}^+$ esetén igazak!

$$A: \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$C: \frac{(a)^{-1}}{b} = \frac{b}{a}$$

$$B: (a - b)^2 = a^2 - ab + b^2$$

$$D: \log_{a+b}(a+b) = 1$$

B2. Adj meg növekvő sorrendben négy olyan racionális számot, amelyek elemei a $] -2; 0]$ intervallumnak!

A megadott számok közül legalább kettőt két egész szám hányadosaként írfel!

B3. Antal édesanyja három és félszer olyan idős most, mint Antal. 8 év múlva életkoraik hányadosa 2,5 lesz. Hány éves most Antal? Megoldásod részletezd!

B4. Milyen számjegy állhat az A és a B helyén, ha a négyjegyű $\overline{5A7B}$ szám osztható 15-tel?

B5. Egy iskola tanulóinak 28%-a végzős, a végzősök 75%-a, vagyis 168 diák egyetemen kíván továbbtanulni. Hány diák jár összesen ebbe az intézménybe?

B6. Oldd meg a $(2x-1)(2x+1) = 8$ egyenletet a valós számok halmazán!

B7. Igaz vagy hamis?

a) Van olyan valós szám, amelynek második hatványa nagyobb a harmadik hatványánál.

b) Egy negatív szám negatív kitevős hatványa lehet pozitív.

c) Van olyan nullától különböző valós szám, amelynek ellentettje egyenlő a szám abszolút értékével.

B8. Add meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyre a $\lg(7 - 3x)$ kifejezésnek értelme van!

B9. Add meg kettes számrendszerben az 1234_6 számot!

B10. Hány természetes szám teszi igazzá az egyenlőtlenséget? Válaszod indokold! $2x - 7 \leq 0$

B11. Írj a négyzet helyére olyan számjegyet a $\frac{72}{\square 4}$ törtben, hogy az 1-nél nagyobb értékű, véges tizedes tört legyen!

B12. A 2-nek hányadik hatványával egyenlő $8^{-\frac{3}{4}}$?

RÁADÁS

1. Melyik az a legkisebb, 6-ra végződő természetes szám, amely a négyszeresére változik, ha az egyesek helyén álló 6-os számjegyet a szám végéről áthelyezzük a szám elejére?

2. Legyen a k egész szám. A k melyik értékeire lesz a $\frac{24}{k-1}$ tört értéke

a) természetes szám;

c) egész szám;

e) negatív szám;

g) 3-nál kisebb?

b) nulla;

d) pozitív szám;

f) 5-nél nagyobb;

FELADATOK II. RÉSZ

- P1.**
- a) Oldd meg az egyenletet a racionális számok halmazán! $3^x \cdot 9^{-x} = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$
 - b) Milyen egész számok esetén teljesül az egyenlőtlenség? $(x-1)^2 + (x-3)(x+3) \leq 4$
 - c) Bizonyítsd be, hogy az $|x-6| + (x+6)^2 = 0$ egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán!

P2. Két hajó, az AngryMan és a BigBlue ugyanabból a kikötőből indul útra március 1-én. Ezt követően ugyanebből a kikötőből az AngryMan 18 naponként, a BigBlue pedig 20 naponként indul újra útjára, majd mindig újra visszatér.



- a) Ugyanebben a naptári évben melyik napokon fognak ismét együtt indulni a kikötőből?
- b) A két hajó egyik alkalommal ugyanabban az irányban, egymással párhuzamos útvonalon indul el. Az AngryMan éppen délben $35 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, a BigBlue azt követően 45 perccel, $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel indul. Hány óra múlva és milyen távolság megtétele után éri utol a BigBlue a másik hajót?
- c) Az AngryMan hajóskapitánya és kormányosa életkorainak összege 92 év. Ha az életkoruk összege megduplázódik, akkor a kapitány 4 év híján 100 éves lesz. Hány évesek jelenleg?

P3. A Földön, a tengerszinten mért légnyomás értéke közelítőleg $p_0 = 10^5$ Pa (pascal). A légnyomás mértékét a tengerszinttől h km magasságban a $p = p_0 \cdot 2,718^{-0,1275h}$ összefüggés adja meg.

- a) Mekkora a légnyomás a tengerszint fölött 100 méterrel?
- b) A tengerszint fölött milyen magasságban lesz a légnyomás értéke $0,9 \cdot 10^5$ Pa?

P4. Egy baráti társaság egynapos kirándulást tervez. A közös költségekre 12 000 Ft-ot szednek össze fejenként. A nap végén kiderül, hogy 4000 Ft-tal kevesebb pénzt szedtek össze, mint amennyire szükség volt. Ha 13 000 Ft-ot szedtek volna, akkor pontosan annyival gyűlt volna össze több pénz, mint amennyivel kevesebbet szedtek össze eredetileg.



- a) Hány fős ez a baráti társaság?
- b) A társaság tagjai emlékeznek rá, hogy a közös hajókirándulás két éve összesen 23 000 Ft-ba került. Ez az érték egy év alatt 20%-kal nőtt, és az azt követő évben 30%-os volt az áremelkedés. Mennyi lett a hajókirándulás ára a két év eltelte után? Hány százalékos két év alatt az árnövekedés?

P5. Április 11-re, a költészet napjára egy iskola közössége flashmobelőadással készül. Az iskola minden diákja részt vesz az eseményen. Az előadás során olyan téglalap alakzatban szeretnének felállni, ahol soronként 6; 8; 9 vagy 10 diák helyezkedik el, de így az utolsó sorra minden esetben 4 diák marad.

- a) Hány diák tanul az intézményben, ha tudjuk, hogy 500-nál kisebb az összlétszám?
- b) Hogyan tudják létrehozni a téglalap alakzatot, ha azt szeretnék, hogy minden sorban ugyanannyi diák legyen, és soronként legalább 6, de kevesebb, mint 11 diák álljon?

FELADATOK II. RÉSZ

Q1. Add meg az alábbi kifejezések helyettesítési értékét közös nevezőre hozva, ha $a = 0,3$ és $b = \frac{1}{3}$!

a) $\frac{(a^2)^{-1} \cdot a^3}{b}$

b) $\sqrt{10 \cdot b \cdot a^{-1}}$

c) $0,5 \cdot \log_b 10a$

Q2. Informatikai eszközök tervezésekor fontos szempont, hogy egy bizonyos feladat elvégzése mennyi időt vesz igénybe. Ez részben az eszköz fizikai tulajdonságaitól, részben a feladat bonyolultságától függ. Például „az egérrel rámutatni egy kívánt ikonra” egy olyan mozdulatsor, amelynek a „bonyolultsági indexét” (ID) az $ID = \log_2 \frac{2x}{d}$ összefüggéssel számítják ki. A képletben x a kiindulópont és a célpont távolsága a monitoron, d pedig a célpont átmérője azonos mértékegységben kifejezve.

- a) Mekkora ID -érték tartozik egy olyan mozdulathoz, amely során egy 0,5 cm átmérőjű ikonra 8 cm távolságról indulva kell rámutatni?
- b) Hányszorosára nő ez az érték (azaz hányszor annyi idő kell a feladat elvégzéséhez), ha ugyanezt az ikont 4-szer távolabbról próbáljuk eltalálni?



Q3. Oldd meg az egyenleteket a negatív valós számok halmazán!

a) $2x^2 - x - 1 = 0$

b) $\sqrt{2x+11} = x+4$

c) $\sqrt{x} + |x| + x^2 = 0$

Q4. a) Mi a számrendszer n alapja, ha: $20123_n = 539$ teljesül (n egész szám, és $1 < n$)?

- b) Melyik a nagyobb értékű? A legkisebb négyjegyű szám a hármas számrendszerben vagy a legnagyobb háromjegyű szám a négyes számrendszerben?

Q5. A sarki boltban egy állattartó minden héten 5 doboz macskaeledel-konzervet és 3 doboz kutyaeledel-konzervet vásárol, és minden alkalommal 2250 forintot fizet. Árváltozások miatt a macskaeledel 20%-kal olcsóbb, a kutyaeledel pedig 10%-kal drágább lett, de az állattartó továbbra is 2250 forintot fizet a 8 doboz konzervért.

- a) Mennyibe került eredetileg egy-egy konzerv?

A bolt tulajdonosa a riasztóberendezés kódjaként mindig olyan négyjegyű számot választ, amelynek prímtényezőző felbontásában szerepel mindegyik egyjegyű prímszám.

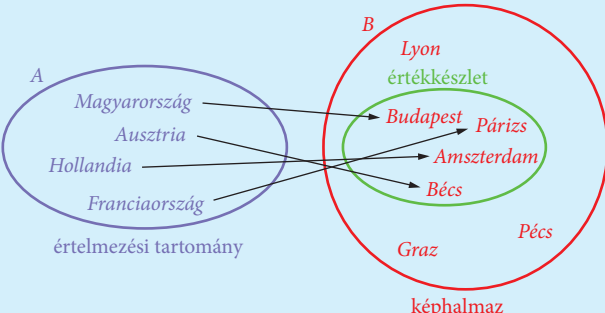
- b) Van-e olyan számjegy, ami benne van minden ilyen módon megalkotható kódban?
- c) Adj meg négy lehetséges kódszámot!
- d) Van-e a lehetséges kódok között négyzetszám?



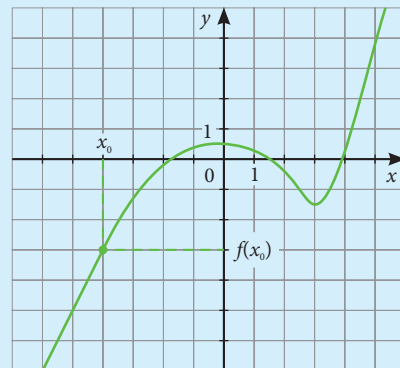
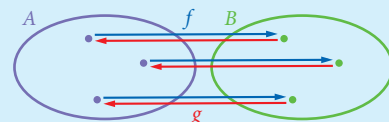
Függvények, sorozatok

A felismerés, hogy a körülöttünk lévő világ jelenségei egymással összefüggnek, egyidős az emberiséggel. A matematikában azonban a függvény fogalma (legalábbis mai formájában) viszonylag későn alakult ki: a kifejezés Gottfried Leibniz német matematikus egy 1673-ban írt levelében bukkant fel először. Az azóta eltelt három és fél évszázad alatt a függvények vizsgálata a matematika egyik leglátványosabb és leghasznosabb területévé nőtte ki magát. Függvényekkel dolgozik a Mars-járót célba juttató mérnök, a tőzsdei elemző, a vírusok fertőzési gyorsaságát vizsgáló virológus. A hétköznapi, gyakorlati életben is fontosak a függvénytani alapismeretek, hiszen azok nélkül nehezen lehetne megérteni például a heti időjárás-előrejelzést, vagy gondot okozna a hivatásos sofőrök vezetéssel kapcsolatos információkat tartalmazó tachográf (menetíró-készülék) elemzésének elvégzése.

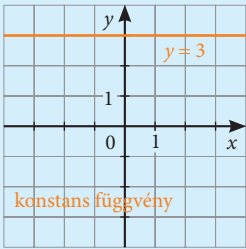
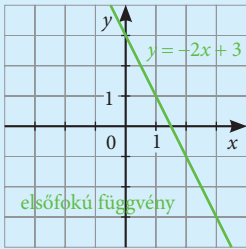
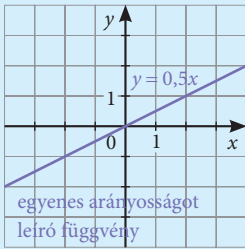
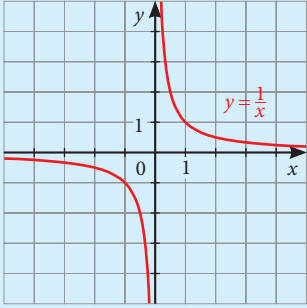
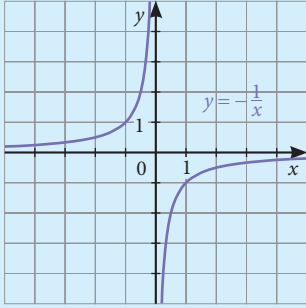
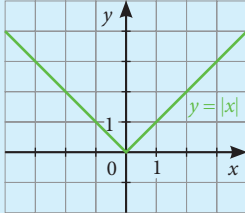
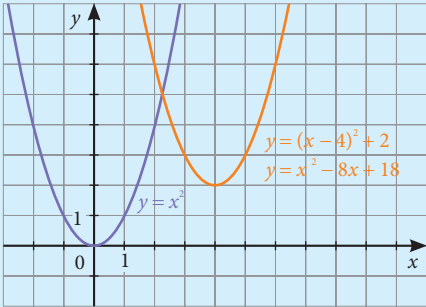
FÜGGVÉNYEK

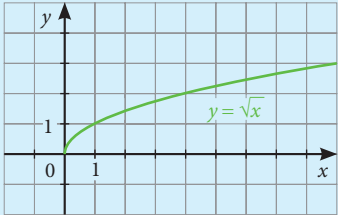
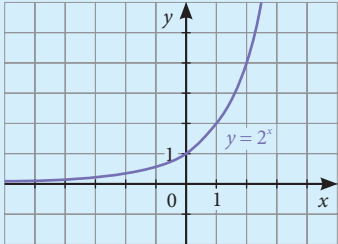
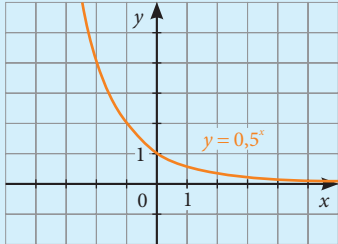
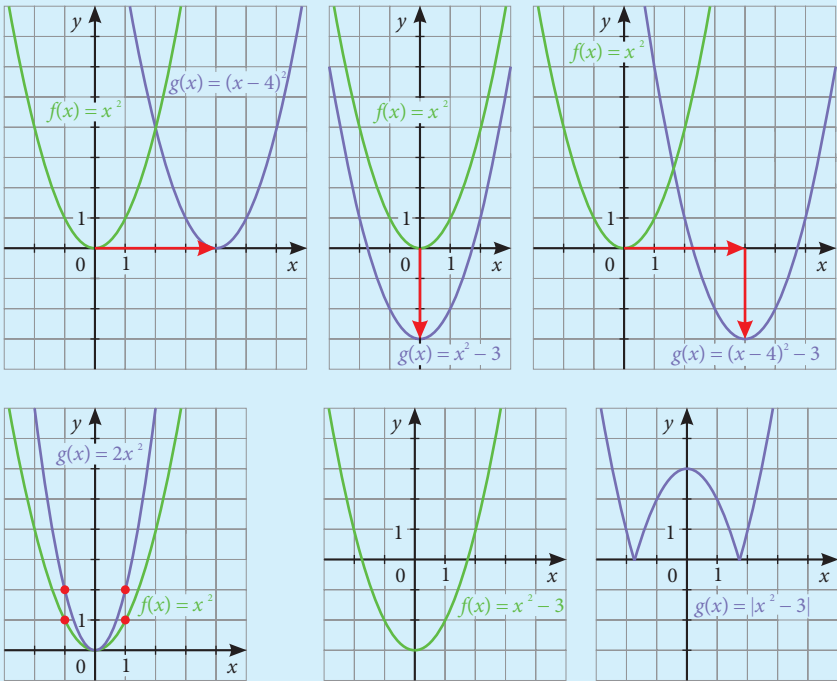
D	Függvény Értelmezési tartomány Értékkészlet	Legyen A és B két – egymástól nem feltétlenül különböző – nemüres halmaz. Függvénynek nevezzük azt a hozzárendelést, amely az A halmaz minden eleméhez a B halmazból pontosan egy elemet rendel. Ekkor a függvény értelmezési tartománya az A halmaz, képhalmaza a B halmaz. Értékkészlet: a B halmaz azon elemeinek halmaza, melyeket hozzárendelünk valamely értelmezési tartománybeli elemhez. <i>Megjegyzés:</i> A függvény tehát egyértelmű hozzárendelés. Az A és B halmazok nem csak számhalmazok lehetnek. <i>Például:</i> A Föld országaihoz hozzárendeljük a hivatalos fővárosukat. $A = \{\text{a világ országai}\}$ $B = \{\text{a világ városai}\}$ 
D	Hozzárendelési szabály	A hozzárendelési szabály az az utasítás, amely egyértelműen megadja, hogy az értelmezési tartomány egyes elemeihez a képhalmaz melyik elemét kell hozzárendelni. A függvényeket általában az értelmezési tartománnyal és a hozzárendelési szabállyal szokás megadni. (Ha a számhalmazokon értelmezett függvényekre az értelmezési tartományt nem adják meg, akkor a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát tekintjük értelmezési tartománynak, amin a hozzárendelésnek értelme van.) <i>Például:</i> f: Rendeljük hozzá minden pozitív egész számhoz a háromszorosát. Ekkor a hozzárendelés szabálya a háromszorozás; az értelmezési tartomány a pozitív egész számok halmaza; az értékkészlet a hárommal osztható pozitív egész számok halmaza. g: Rendeljük hozzá minden valós számhoz az abszolút értékét. Ekkor a hozzárendelés szabálya az abszolútérték-képzés; az értelmezési tartomány a valós számok halmaza; az értékkészlet a nemnegatív valós számok halmaza.

D	Függvénytani jelölések	A függvények jele általában $f, g, h \dots$ Értelmezési tartománya: $D_f, D_g, D_h \dots$ Értékkészlete: $R_f, R_g, R_h \dots$ A hozzárendelést a $\mapsto$ szimbólum jelöli. Az értelmezési tartomány és a képhalmaz közé $\rightarrow$ szimbólum kerül. <i>Például:</i> Az előbbi példák jelölésekkel: $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto 3x; D_f = \mathbf{N}; R_f = \{0; 3; 6; 9; \dots\} = \{3x x \in \mathbf{N}\}$ $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x ; D_g = \mathbf{R}; R_g = \mathbf{R}_0^+$ Leírhatók a hozzárendelések $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = 3x; g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = x$ módon is.
D	Helyettesítési érték	Ha x_0 az f függvény értelmezési tartományának eleme, akkor a függvény x_0 helyen felvett helyettesítési értéke (röviden: függvényértéke): a képhalmaznak az az eleme, amit a függvény x_0-hoz rendel. Jele: $f(x_0)$ <i>Például:</i> Az $f(x) = 3x$ függvénynek az 5 helyen felvett helyettesítési értéke $f(5) = 3 \cdot 5 = 15$; a $g(x) = x$ függvény értéke a $-7,2$ helyen $g(-7,2) = -7,2 = 7,2$.
D	Kölcsönösen egyértelmű függvény	Ha egy függvény az értelmezési tartomány bármely két különböző eleméhez az értékkészlet különböző elemeit rendeli, akkor a függvény kölcsönösen egyértelmű. <i>Például:</i> Az $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = 3x$ függvény kölcsönösen egyértelmű; a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = x$ függvény nem kölcsönösen egyértelmű, mert például a -3-hoz és a 3-hoz ugyanazt az értéket, a 3-at rendeli.
D	Függvény megfordítása	Legyen f az A halmazon értelmezett kölcsönösen egyértelmű függvény, melynek értékkészlete a B halmaz. Az f függvény megfordítása (inverze) az a g függvény, amely minden B halmazbeli y elemhez azt az A halmazbeli x elemet rendeli, amelyre $f(x) = y$. Az f függvény megfordítását az f^{-1} szimbólummal jelölik. <i>Például:</i> - Legyen $A = \{\text{kémiai elemek}\}$ és $B = \{\text{vegyjelek}\}$. Ekkor $f: A \rightarrow B$ minden elemhez a vegyjelet rendeli, például: vas $\mapsto$ Fe, ezüst $\mapsto$ Ag. A függvény megfordítása $g: B \rightarrow A$, a vegyjelekhez az elemeket rendeli, például: S $\mapsto$ kén, Ra $\mapsto$ rádium. - Ha az f függvény minden valós számhoz a háromszorosát rendeli, akkor az f függvény megfordítása az a g függvény, amely minden valós számhoz a harmadrészét rendeli: $f(x) = 3x$, és $g(x) = \frac{1}{3}x$.
M	A függvény grafikonja	Ha az értelmezési tartomány és az értékkészlet is számhalmaz, akkor a függvény grafikonnal szemléltethető a derékszögű koordináta-rendszerben. Legyen az f függvénynek az x_0 helyen felvett függvényértéke y_0 (azaz $y_0 = f(x_0)$). Az egymáshoz tartozó x_0 és y_0 számokból alkotott $(x_0; y_0)$ koordinátájú síkbeli pontok összessége adja a függvény grafikonját (másképp: a függvénygörbét).



	D Függvény zérushelye, szélsőértéke	Zérushely: az értelmezési tartomány azon x_0 eleme (helye), amelyre $f(x_0) = 0$, azaz ahol a függvényérték 0 (zérus). Maximum: az értékkészlet legnagyobb eleme, ha ez létezik. Maximumhely: az értelmezési tartomány azon eleme, amelyhez a maximum van hozzárendelve. Minimum: az értékkészlet legkisebb eleme, ha ez létezik. Minimumhely: az értelmezési tartomány azon eleme, amelyhez a minimum van hozzárendelve. Megjegyzés: Egy függvénynek lehet több zérushelye, maximumhelye, minimumhelye. zérushely: $x_1 = -4; x_2 = 3$ szélsőérték: minimumhely: $x = -3$ minimum: $y = -5$ maximum nincs zérushely: $x_0 = 3$ szélsőérték: nincs zérushely: nincs szélsőérték: minimum nincs maximumhely: $x = 2$ maximum: $y = -1$
D	Monotonitás, a függvény menete (monoton növekvő; monoton csökkenő; szigorúan monoton növekvő; szigorúan monoton csökkenő)	Egy függvény az értelmezési tartományának egy adott intervallumán – monoton növekvő, ha az adott intervallum bármely két eleme közül a nagyobbikhoz legalább akkora helyettesítési érték tartozik, mint a kisebbikhez; – monoton csökkenő, ha az adott intervallum bármely két eleme közül a nagyobbikhoz legfeljebb akkora helyettesítési érték tartozik, mint a kisebbikhez; – szigorúan monoton növekvő, ha az adott intervallum bármely két eleme közül a nagyobbikhoz nagyobb helyettesítési érték tartozik, mint a kisebbikhez; – szigorúan monoton csökkenő, ha az adott intervallum bármely két eleme közül a nagyobbikhoz kisebb helyettesítési érték tartozik, mint a kisebbikhez. Például: Az f függvény a $]-6; 2]$ intervallumon monoton növekvő, ezen belül a $]-6; -2]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, a $[-2; 2]$ intervallumon mondhatjuk monoton növekvőnek vagy monoton csökkenőnek is. Az f függvény a $[2; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő. Ez teljesül a $[2; \infty[$ intervallum részhalmazaira is, például a $[2; \infty[$ intervallumra is. A g függvény a $]-\infty; -1]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő. A g függvény a $[-1; 8]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő. Megjegyzés: A monotonitás értelmezhető akkor is, ha a függvény értelmezési tartománya nem intervallum, hanem más számhalmaz, például a természetes számok halmaza.

D	Lineáris függvény	Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$) függvényt lineáris függvénynek nevezzük. A függvény grafikonja egyenes, amelynek a meredeksége a, és az egyenes az y tengelyt a $(0; b)$ pontban metszi. Ha $a = 0$, akkor $f(x) = b$ konstans függvény (nulladfokú függvény); ha $a \neq 0$, akkor $f(x) = ax + b$ elsőfokú függvény; ha $a \neq 0$ és $b = 0$, akkor $f(x) = ax$ az a arányszámú egyenes arányosságot leíró függvény.   
D	Fordított arányosságot leíró függvény	$f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \in \mathbf{R}; a \neq 0$) Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény tulajdonságai: értékkészlet: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ zérushely nincs $x < 0$ esetén szigorúan monoton csökken $0 < x$ esetén szigorúan monoton csökken szélsőérték nincs  
D	Abszolútérték-függvény	$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = x$, ahol $x = \begin{cases} -x, & \text{ha } x < 0 \\ x, & \text{ha } 0 \leq x \end{cases}$  A függvény tulajdonságai: értékkészlet: $\mathbf{R}^{+0}$ zérushely: $x_0 = 0$ $x \leq 0$ esetén szigorúan monoton csökken $0 \leq x$ esetén szigorúan monoton nő minimumhely: $x = 0$ minimum: $y = 0$
D	Másodfokú függvény	alapfüggvény: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = x^2$ általános alak: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}; a \neq 0$) Az alapfüggvény tulajdonságai: értékkészlet: $\mathbf{R}^{+0}$ zérushely: $x_0 = 0$ $x \leq 0$ esetén szigorúan monoton csökken $0 \leq x$ esetén szigorúan monoton nő minimumhely: $x = 0$ minimum: $y = 0$ 

D	Négyzetgyökfüggvény	$f: \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = \sqrt{x}$  A függvény tulajdonságai: értékkészlet: $\mathbf{R}^{+0}$ zérushely: $x_0 = 0$ szigorúan monoton nő minimumhely: $x = 0$ minimum: $y = 0$
D	a alapú exponenciális függvény	$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = a^x \quad (a \in \mathbf{R}^+, a \neq 1)$ A függvény tulajdonságai: értékkészlet: $\mathbf{R}^+$ zérushely nincs szélsőérték nincs a monotonitás az a értékétől függ Ha $a > 1$, akkor a függvény szigorúan monoton nő, ha $0 < a < 1$, akkor a függvény szigorúan monoton csökken.  
M	Függvény-transzformáció	Egy f függvény görbéjének ismeretében újabb függvényeket tudunk ábrázolni függvény-transzformációk segítségével (a függvénytranszformációk hatása a függvény grafikonjára: eltolás, nyújtás vagy zsugorítás, tükrözés). Például: 

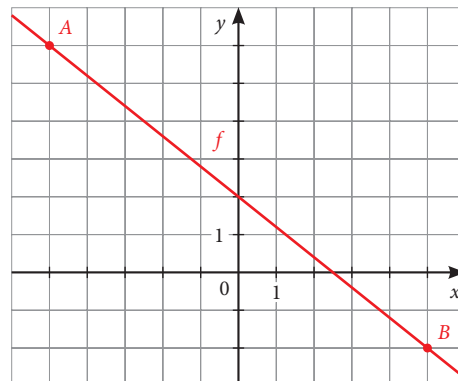
1.

Az ábrán az f lineáris függvény grafikonján jelöltük a grafikonra illeszkedő A és B rácspontot.

Olvasd le az A és B pont koordinátáit, majd ezek segítségével határozd meg a függvény hozzárendelési szabályát!

Ennek ismeretében válaszolj az alábbiakra!

- Milyen értéket vesz fel a függvény $x = 123$ -nál?
- Hol veszi fel a függvény az $f(x) = 456$ értéket?
- Hol van a függvény zérushelye? A zérushely ismeretében oldd meg a valós számok halmazán az $f(x) < 0$ egyenlőtlenséget!



Megoldás

A pontok koordinátái: $A(-5; 6)$ és $B(5; -2)$, ez azt jelenti, hogy a függvény az $x = -5$ helyen 6, valamint az $x = 5$ helyen -2 értéket vesz fel. A lineáris függvény képletét $f(x) = ax + b$ alakban keressük. Teljesül tehát a következő két egyenlőség: $6 = -5a + b$ és $-2 = 5a + b$. Az a és b ismeretlenekre az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $a = -0,8$ és $b = 2$. A lineáris függvény tehát az $f(x) = -0,8x + 2$ hozzárendelési szabállyal megadható.

- $x = 123$ esetén a függvényérték helyettesítéssel számolható: $f(123) = -0,8 \cdot 123 + 2$, amiből $f(123) = -96,4$. Tehát a függvényérték a keresett helyen $-96,4$.
- Ha a függvényérték 456, akkor az x értéke a $456 = -0,8x + 2$ egyenletből számítható. Ebből $x = -567,5$, tehát a $-567,5$ helyen lesz a függvényérték 456.
- A zérushely meghatározásakor azt a helyet kell meghatározni, ahol a függvényérték 0, ezért a $0 = -0,8x + 2$ egyenlet megoldását keressük. Ebből $x = 2,5$ a függvény zérushelye.

A függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért az $f(x) < 0$ egyenlőtlenség megoldása – az ábráról is leolvasható – minden olyan valós x , amelyre $2,5 < x$.

2.

Legyen $f(x) = x^2$, valamint g az a függvény, amelynek grafikonja a koordináta-rendszerben az f függvény grafikonjának $\mathbf{v}(-3; -4)$ vektorral való eltolásával kapható meg.

- Add meg a g függvény hozzárendelési szabályát!
- Határozd meg mindkét függvény zérushelyét! Válaszod számolással indokold!
- Add meg mindkét függvény szélsőértékeinek helyét és értékét!
- Add meg a függvények értékkészletét!
- Jellemezd a függvényeket monotonitás szempontjából!
- Hol metszi a g függvény grafikonja a $h(x) = -3$ függvény grafikonját? Válaszod számolással igazold!

Megoldás

- Az f függvény $\mathbf{v}$ vektorral való eltolása után kapott g függvény grafikonja az ábrán látható.

A transzformáció alapján: $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad g(x) = (x + 3)^2 - 4$

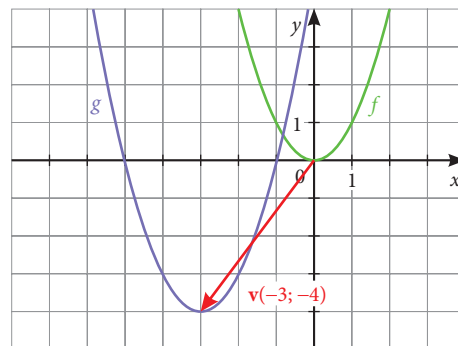
- A függvények zérushelye az ábráról leolvasható, majd számolással ellenőrizve: az f függvény zérushelye $x = 0$, mert $f(0) = 0^2 = 0$; a g függvény zérushelye $x_1 = -5$, valamint $x_2 = -1$, mert $g(-5) = (-5 + 3)^2 - 4 = 0$, valamint $g(-1) = (-1 + 3)^2 - 4 = 0$.

- Mindkét függvénynek van minimuma, egyiknek sincs maximuma.

Az f függvény minimumának helye $x = 0$, értéke $f(0) = 0$;

a g függvény minimumának helye $x = -3$, értéke $g(-3) = -4$.

- Az f függvény értékkészlete: $R_f = [0; \infty[$; a g függvény értékkészlete: $R_g = [-4; \infty[$



e) Az f függvény a $]-\infty; 0[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[0; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő. A függvény a $]-\infty; -3[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[-3; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.

f) Ábrázoljuk az előbbi koordináta-rendszerben a h függvényt is. Az ábráról azt láthatjuk, hogy a g és h függvények grafikonjai metszéspontjainak első koordinátája vélhetően az $x_1 = -4$, valamint $x_2 = -2$. Ezt számolással ellenőrizzük:

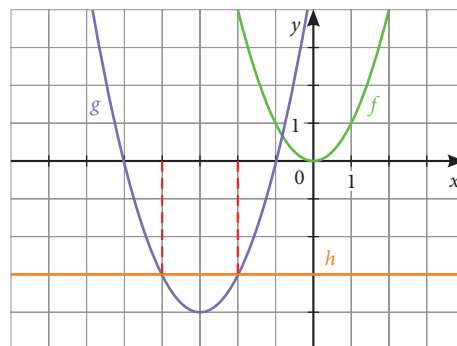
$$g(-4) = (-4 + 3)^2 - 4 = -3, \text{ valamint } g(-2) = (-2 + 3)^2 - 4 = -3,$$

azaz a felvett függvényérték az adott helyeken -3 .

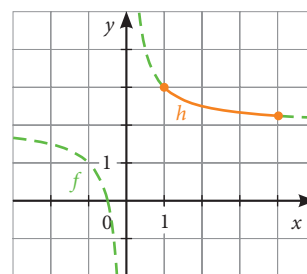
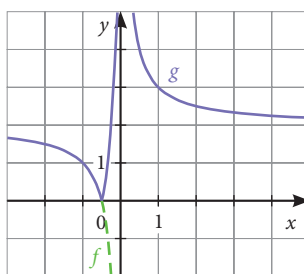
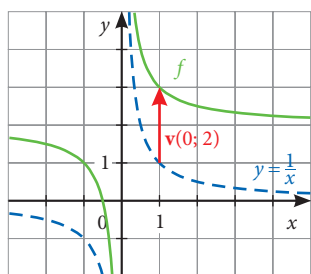
Tehát a g függvény grafikonja a h függvény grafikonját az $x_1 = -4$ és az $x_2 = -2$ helyeken metszi.

Megjegyzés:

A g és h függvény grafikonjainak metszéspontját meghatározhatjuk a $g(x) = h(x)$, vagyis $(x + 3)^2 - 4 = -3$ másodfokú egyenlet megoldásával is.



- 3.**
- a) Ábrázold az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezett $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ függvény grafikonját!
 - b) Ábrázold az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezett $g = |f|$ függvény grafikonját!
 - c) Ábrázold az $[1; 4]$ halmazon értelmezett $h(x) = \frac{1}{x} + 2$ függvény grafikonját!
 - d) Határozd meg az f , g és h függvények értékkészletét!
 - e) Az f és g függvény közül melyiknek van szélsőértéke? Határozd meg a szélsőértéket, illetve a szélsőértékhelyet!



Megoldás

- a) Az f függvény grafikonját az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezett $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény transzformációjával kapjuk úgy, hogy ez utóbbit eltoljuk a $\mathbf{v}(0; 2)$ vektorral.
- b) A g függvény grafikonját az f függvény grafikonjából úgy kapjuk, hogy a grafikonnak azt a részét, amelyik az x tengely „alá” esik, tükrözzük az x tengelyre.
- c) A h függvény grafikonját az f függvény grafikonjából úgy kapjuk, hogy a grafikonnak azt a részét jelöljük ki, amelyik az $1 \leq x \leq 4$ helyekhez tartozik.
- d) A grafikonok alapján meghatározhatjuk a függvények értékkészletét. A h függvény esetében behelyettesítéssel tudjuk kiszámolni, hogy $x = 1$ és $x = 4$ helyen mennyi a függvényérték: $h(1) = \frac{1}{1} + 2 = 3$, és $h(4) = \frac{1}{4} + 2 = 2,25$.

$$R_f = \mathbf{R} \setminus \{2\} \quad R_g = \mathbf{R}_0^+ \quad R_h = [2,25; 3]$$

- e) A grafikonról leolvasható, hogy f függvénynek nincs szélsőértéke.

A g függvénynek maximuma nincs, de minimuma van azon a helyen, ahol a függvényérték 0.

$$0 = \frac{1}{x} + 2, \text{ ebből } \frac{1}{x} = -2, \text{ így } x = -\frac{1}{2}. \quad \text{A minimumhely tehát az } x = -\frac{1}{2}, \text{ a minimuma pedig } y = 0.$$

FELADATOK I. RÉSZ

- A1.** Függvény vagy sem? Kölcsönösen egyértelmű vagy sem? A táblázat minden sorában tegyél X-et abba az oszlopba, amelyik teljesül az adott hozzárendelés esetében!

	Nem függvény	Függvény, de nem kölcsönösen egyértelmű	Kölcsönösen egyértelmű függvény
Minden valós számhoz hozzárendeljük a négyzetét.			
Minden háromszöghöz hozzárendeljük azt a pozitív valós számot, amely megadja területének nagyságát cm^2 -ben mérve.			
Minden egész számhoz hozzárendeljük azt a valós számot, amelytől 2 egység távolságra van a számegyenesen.			
Minden valós számhoz hozzárendeljük a hozzá legközelebb eső egész számot.			
Minden valós számhoz hozzárendeljük a számnál 5-tel nagyobb számot.			

- A2.** Határozd meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x^2 - x - 1$ függvény zérushelyeit!

- A3.** Add meg annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonjára illeszkedik az $A(-3; 2)$, valamint a $B(5; 4)$ koordinátájú pont!

- A4.** Mennyi a helyettesítési értéke az $x = -\frac{1}{2}$ helyen a valós számokon értelmezett $f(x) = 9^x + 5$ függvénynek?

- A5.** a) Válaszd ki az ábrán lévő grafikonhoz a megfelelő hozzárendelési szabály betűjelét!

A: $f(x) = (x + 5)^2 - 2$

B: $f(x) = (x - 2)^2 - 5$

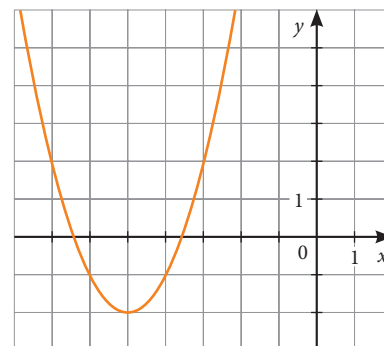
C: $f(x) = (x + 2)^2 - 5$

D: $f(x) = (x - 2)^2 + 5$

E: $f(x) = x^2 - 2x + 5$

F: $f(x) = (x + 5)^2 + 2$

- b) Add meg azt a legbővebb intervallumot, ahol negatív az a) feladatrészen ábrázolt f függvény értéke!



- A6.** Számítsd ki a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 0,5^x - 8$ függvény zérushelyét!

- A7.** Döntsd el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz-e, vagy hamis!

A: Minden, a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvénynek van szélsőértéke.

B: Minden hozzárendelés függvény.

C: Minden elsőfokú függvény menete szigorúan monoton.

D: Van olyan exponenciális függvény, amelynek van zérushelye.

- A8.** Jellemezd a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -\frac{7}{3}x + 22$ függvényt monotonitás szempontjából!

- A9.** Hol veszi fel a valós számokon értelmezett $f(x) = -7x + 16$ függvény a 13 értéket?

- A10.** Hány olyan függvény van, amelynek értelmezési tartománya az $A = \{1; 2; 3\}$ halmaz, és értékkészlete a $B = \{5; 6; 7\}$ halmaz? Ezek közül hány függvény kölcsönösen egyértelmű?

A11. Add meg képlet segítségével az alábbi függvényeket!

f : Minden valós számhoz hozzárendeljük az 5-szörösénél 2-vel kisebb számot.

g : Minden valós számhoz hozzárendeljük a számnál 4-gyel nagyobb szám négyzetét.

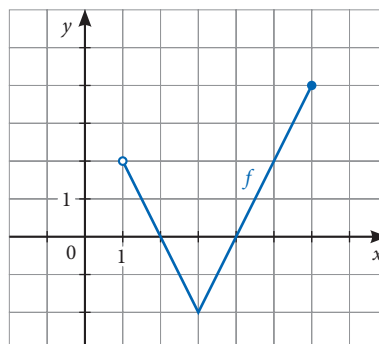
h : Minden valós számhoz hozzárendeljük az abszolút értékének az ellentettjét.

i : Minden valós számhoz hozzárendeljük a négyzetgyökénél 6-tal nagyobb számot.

A12. Az ábrán egy f függvény grafikonja látható. Add meg az $|f|$ függvény

a) minimumát és minimumhelyeit!

b) maximumát és maximumhelyét!



FELADATOK II. RÉSZ

P1. Az ábrán egy ferdén kilőtt, parabolapályán haladó test mozgását jelenítettük meg. A kilövés az időmérés kezdetén ($x = 0$ s) történt a talajszintnél magasabban lévő helyről.

Az x tengelyen az eltelt időt (1 másodperc 1 egység), az y tengelyen a test talajtól mért magasságát (1 méter 1 egység) mérjük.

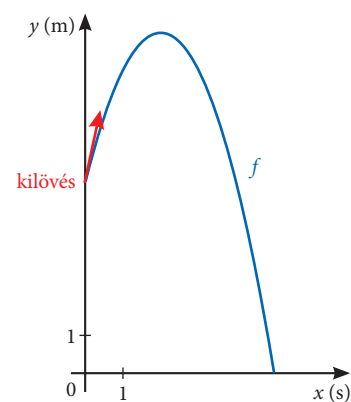
A pályagörbét leíró függvény $f(x) = -(x - 2)^2 + 9$.

a) Igazold, hogy a test a kilövéskor 5 méter magasban volt!

b) A kilövéstől számítva mennyi idő múlva éri el a test a pálya legmagasabb pontját? Milyen távol van ekkor a talajtól?

c) A kilövéstől számítva hány másodperc múlva lesz a test 8 méter magasban?

d) A kilövéstől számítva hány másodperc múlva érkezik a talajra a test?



P2. Az f és a g függvény értelmezési tartománya az $\mathbf{R}$, $f(x) = 3 - 2x$; $g(x) = x^2$.

a) Ábrázold közös koordináta-rendszerben az f és a g függvény grafikonját!

b) Olvasd le az ábráról, mely x -ekre teljesül az $f(x) = g(x)$ egyenlet!

c) Ellenőrizd a b) részben kapott eredményt a másodfokú egyenlet megoldóképletével!

d) Oldd meg grafikusán az $f(x) > g(x)$ egyenlőtlenséget!

P3. Egy internetes csomagküldő szolgálatnál a csomagküldés díja egy fix csomagolási díjból és a csomag tömegével egyenesen arányos szállítási díjból tevődik össze. Az x dekagramm tömegű csomagért (forintban) fizetendő díjat az $f(x) = 12x + 640$ képlettel számítják ki.

Ha a csomag tömege eléri a 10 kg-ot, akkor az $f(x) = 12x + 640$ összegzen felül csomagonként további 1100 Ft extra költséget számít fel a cég. 25 kg-nál nehezebb csomag kiszállítását nem vállalják.

a) Mennyi a fix csomagolási díj?

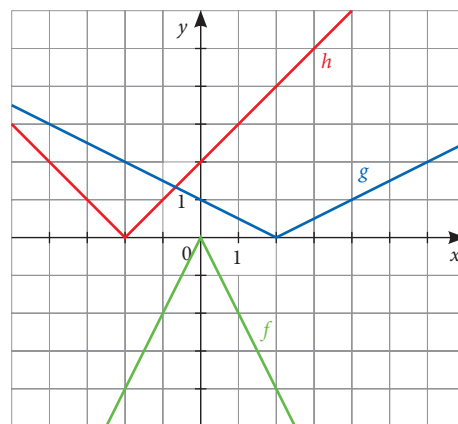


- b) Mennyi az 1 dkg-ra jutó szállítási díj egy 10 kg-nál könnyebb csomag esetén?
- c) Mennyibe kerül egy 450 grammos csomag küldése?
- d) Hány kilogramm annak a küldeménynek a tömege, amiért összesen 1600 forintot kell fizetni?
- e) Készíts grafikont a csomagokért fizetendő díjról a csomag tömegének függvényében!
- f) Milyen határok között mozoghat a csomagokért fizetendő díj?

P4. Megadtuk hat függvény hozzárendelési szabályát és közülük háromnak a grafikonját. A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

$$\begin{array}{ll} p: x \mapsto 0,5 \cdot |x + 2| & s: x \mapsto |x + 2| \\ q: x \mapsto -2 \cdot |x| & t: x \mapsto -0,5 \cdot |x| \\ r: x \mapsto |x - 2| & u: x \mapsto 0,5 \cdot |x - 2| \end{array}$$

- a) Válaszd ki az adottak közül az ábrán lévő három grafikonhoz tartozó hozzárendelési szabályokat!
- b) Határozd meg az ábrán lévő függvények 0-hoz rendelt értékét!
- c) Add meg az ábrán lévő függvények zérushelyeit!
- d) Jellemezd az ábrán lévő függvényeket szélsőértékek szempontjából!



P5. Arnd Leike német fizikus – aki a müncheni Ludwig Maximilian Egyetem fizika tanszékének munkatársa, és alapvetően a részecskefizika a fő kutatási területe – a sörhab magasságának változására vonatkozó vizsgálatot végzett a 2000-es évek elején. Háromféle 19 °C-os hőmérsékletű sörrel kísérletezett. A sört az üvegből egy 7,2 cm átmérőjű hengerbe töltötte. A sörhab néhány másodperc alatt elérte maximális magasságát, majd kezdett fokozatosan lepadni. Leike 15 másodpercenként mérte meg a sörhab magasságát. Az egyik sör esetében azt tapasztalta, hogy a sörhab mm-ben mért magasságának változását jó közelítéssel az $f(t) = 14 \cdot 0,991^t$ függvény írja le a $[0, 360]$ időintervallumban az eltelt t (másodpercekben mért) idő függvényében.

- a) Hány mm magas volt eredetileg ennek a sörnek a habja?
- b) Milyen magas volt a hab 1 perc eltelté után?
- c) Hány másodperc elteltével volt a hab magassága 3 mm? A válaszod egy tizedesjegy pontossággal add meg!
- d) Vázold a hab magasságára vonatkozó függvény grafikonját a derékszögű koordináta-rendszerben az első 120 s-ra vonatkozóan! Válaszd meg észszerűen a koordinátatengelyek beosztását!

(A sörhabbal kapcsolatos tanulmányért Leike doktor később – a hasonló nevű Nobel-díjtól eltérő – Ignobel-díjat kapott, amit a meglepő, ám haszontalan felfedezésekért ítélnek oda.)



RÁADÁS

Azt, hogy a tengerszint felett h kilométer magasságban lévő pontból – a Föld felszínén, a Föld görbületét is figyelembe véve – legfeljebb hány kilométerre „láthatunk el”, jó közelítéssel a $D(h) = \sqrt{12\,740 \cdot h + h^2}$ ($h \in [0; 20]$) függvény segítségével számíthatjuk ki.

- a) 2012-es megnyitásakor a tokiói *Sky Tree* kilátó és tévétorony volt a világ második legmagasabb épülete. Körülbelül milyen messzire lehet ellátni a 455 m magasan lévő kilátószintről?
- b) Körülbelül mekkora magasságban haladhat az a repülő, amelynek pilótája 300 km-nyi távolságra lát el?



SOROZATOK

D	Számsorozat	Olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza (képhalmaza a valós számok halmaza). Jelölése: $\{a_n\}$; ahol a_n a sorozat n -edik tagját jelöli.
M	A sorozat megadása	– Körülírással: a sorozatban szereplő számok tulajdonságával – Képlettel (általános taggal): az n-edik tag megadása n függvényében – Rekurzív módon: megadjuk, hogy hogyan lehet kiszámítani a sorozat n-edik tagját az előtte lévő egy vagy több tag ismeretében, valamint megadjuk a rekurzíóhoz szükséges első néhány tagot. <i>Például:</i> a 2; 4; 6; 8; ... sorozat megadható az előbbi három módon: körülírással: pozitív páros számok növekvő sorozata; képlettel: $a_n = 2n$ ($n \in \mathbb{N}^+$); rekurzív módon: $a_1 = 2$ és $a_{n+1} = a_n + 2$ ($n \in \mathbb{N}^+$)
D	Számtani sorozat	Az $\{a_n\}$ számsorozat számtani sorozat, ha a második tagtól kezdve bármely tag és az előtte álló tag különbsége állandó, vagyis $1 < n$ esetén $a_n - a_{n-1}$ értéke állandó. Ez az állandó a sorozat differenciája (különbsége). Jele: d <i>Például:</i> 3; 9; 15; 21; ... egy olyan számtani sorozat, ahol $a_1 = 3$, $d = 6$ 12; 7; 2; -3; ... egy olyan számtani sorozat, ahol $a_1 = 12$, $d = -5$
T	A számtani sorozat n -edik tagja	Ha $\{a_n\}$ olyan számtani sorozat, amelynek első tagja a_1, és a differenciája d, akkor minden n esetén $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$. <i>Például:</i> $a_5 = a_1 + 4d$
T	A számtani sorozat első n tagjának összege	Az $\{a_n\}$ számtani sorozatban az első n tag összege ($S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$): $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad \text{másként} \quad S_n = \frac{2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$
D	Mértani sorozat	Az $\{a_n\}$ számsorozat mértani sorozat, ha a második tagtól kezdve bármely tag és az előtte álló tag hányadosa 0-tól különböző állandó, vagyis $1 < n$ esetén $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ értéke állandó. Ez az állandó a sorozat kvóciense (hányadosa). Jele: q <i>Például:</i> 3; 6; 12; 24; ... egy olyan mértani sorozat, ahol $a_1 = 3$, $q = 2$ 108; -36; 12; -4; ... egy olyan mértani sorozat, ahol $a_1 = 108$, $q = -\frac{1}{3}$
T	A mértani sorozat n -edik tagja	Ha $\{a_n\}$ olyan mértani sorozat, amelynek első tagja a_1, és a kvóciense q, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. <i>Például:</i> $a_{16} = a_1 q^{15}$
T	A mértani sorozat első n tagjának összege	Az $\{a_n\}$ mértani sorozatban az első n tag összege ($S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$): ha $q \neq 1$, akkor $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$; ha $q = 1$, akkor $S_n = n \cdot a_1$.
	Kamatos kamat számítása	Ha egy A_0 összeg $p\%$-kal kamatozik évente, akkor az n-edik év végére az összeg: $A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ A kamatozás üteme éves időszaktól eltérő is lehet (például: havi, napi stb.), ekkor figyelni kell arra, hogy a p kamattényező a megfelelő időszakra vonatkozzon. (Az időszakokat a kamattényezőben szereplő időszakhoz kell igazítani.)
	Gyűjtőjáradék	Gyűjtőjáradékról akkor beszélünk, ha úgy gyűjtjük a pénzt, hogy ugyanazon a számlán egyenlő időközönként azonos összeget helyezünk el a bankban, azaz egy alapösszeget egyenlő időközönként ugyanakkora összeggel növelünk.
	Állandó törlesztőrészlet	Állandó (fix) törlesztőrészletről akkor beszélünk, ha a banktól felvett hitelt úgy törlesztjük, hogy azonos időközönként ugyanakkora összeget fizetünk vissza.

1.

Egy mértani sorozat első tagja 6; második tagja 12.

- Add meg a sorozat a_n általános tagját az n függvényében a legegyszerűbb alakban!
- Mennyi a sorozat 10. tagja?
- Mennyi az első 30 tag összege? Az eredményt normálalakban add meg!
- Legalább hány tagot kell összeadni az első tagtól kezdve, hogy az összeg 10^7 -nél nagyobb legyen?

Megoldás

- a) A feladat szövege alapján $a_1 = 6$, és $a_2 = 12$. Ebből $q = 2$.

Az általános tag $a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$, ami átalakítás után $a_n = 6 \cdot \frac{2^n}{2^1} = 3 \cdot 2^n$.

- b) A 10. tag számítható az általános tagból: $a_{10} = 3 \cdot 2^{10} = 3072$ (ami egyenértékű az $a_n = a_1 q^{n-1}$ képletből adódó $a_{10} = 6 \cdot 2^{10-1} = 3072$ értékkel). A 10. tag tehát 3072.

- c) Mivel $q \neq 1$, ezért használhatjuk az $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ összegképletet, amiből helyettesítés után kapjuk:

$$S_{30} = 6 \cdot \frac{2^{30} - 1}{2 - 1} = 6\,442\,450\,938 \approx 6,44 \cdot 10^9$$

- d) A $6 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} > 10^7$ egyenlőtlenséget teljesítő pozitív egész számok közül keressük a legkisebbet. Az egyenlőtlenség rendezése után $2^n > \frac{10^7}{6} + 1$. A logaritmus definícióját felhasználva: $2^n > 2^{\log_2\left(\frac{10^7}{6} + 1\right)}$. A 2 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedése miatt a hatványalapok elhagyása után a hatványkitevők közötti reláció az eredetivel

meg egyező marad: $n > \log_2\left(\frac{10^7}{6} + 1\right)$, amiből 10-es alapú logaritmusra való áttéréssel adódik, hogy $n > \frac{\lg\left(\frac{10^7}{6} + 1\right)}{\lg 2}$.

Ebből zsebszámológéppel kapjuk, hogy $n > 20,67$.

Az egyenlőtlenséget teljesítő pozitív egész számok közül a legkisebb a 21, tehát legalább 21 tagot kell összeadni az első tagtól kezdve, hogy az összeg 10^7 -nél nagyobb legyen.

2.

Egy vállalkozásban használatban lévő nyomdagép értéke jelenleg 42 millió forint. A gép rendszeres használata során az állaga folyamatosan romlik, így az értéke átlagosan mindig az előző évi 90%-ára esik vissza. Az aktuális karbantartásra a cégtulajdonos átlagosan évi 300 000 forintot fordít, így a gép értéke ennyivel megnő évente.

Mennyi lesz a berendezés értéke 8 teljes év múlva? Válaszod százezer forintba kerekítve add meg!

(Egyéb gazdasági befolyásoló tényezőket ne vegyél figyelembe a feladat megoldása során.)



Megoldás

Egy év múlva a gép értéke: $42 \cdot 10^6 \cdot 0,9 + 300\,000$

Két év múlva a gép értéke: $(42 \cdot 10^6 \cdot 0,9 + 300\,000) \cdot 0,9 + 300\,000 = 42 \cdot 10^6 \cdot 0,9^2 + 300\,000(0,9 + 1)$

Hasonló gondolatmenettel felírható, hogy 8 év múlva a gép értéke:

$42 \cdot 10^6 \cdot 0,9^8 + 300\,000(0,9^7 + 0,9^6 + \dots + 0,9 + 1)$, ahol a zárójelben lévő kifejezésről látható, hogy egy mértani sorozat első 8 tagjának az összege, ahol $a_1 = 1$, és $q = 0,9$.

Előbbiek miatt $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ felhasználásával felírható: $42 \cdot 10^6 \cdot 0,9^8 + 300\,000 \cdot 1 \cdot \frac{0,9^8 - 1}{0,9 - 1}$

Ebből számolással 19 788 221 adódik, tehát 8 év múlva a nyomdagép értéke közelítőleg 19 800 000 forint lesz.

Az egymástól 189 km-re lévő A és B városból egy-egy kerékpáros indul egymással szemben, a B város felé enyhén emelkedő, egyenes úton. Az A városból éppen délben, a B városból délután 2-kor indul a kerékpáros. Az A városból induló az első órában 21 km-t tesz meg, és – mivel egyre fáradtabb lesz – a további órák mindegyikében 1,4 km-rel kevesebbet, mint az azt megelőző órában. A B városból induló, pihenés után lévő kerékpáros az első órában 18 km-t tesz meg, majd minden órában 2-vel többet, mint az azt megelőzőben. (A kerékpárosok sebessége a teljes mozgás során pozitív.)

- a) Hány km-t tettek meg az egyes kerékpárosok délután 4 és 5 óra között?
 b) Mikor találkozott a két kerékpáros, és ekkor milyen távol voltak az A várostól?

Megoldás

A két kerékpáros által óránként megtett út egy-egy számtani sorozattal írható le.

Jelölje a_n az A városból induló, b_n a B városból induló mozgását jellemző számtani sorozat tagjait, d_A és d_B pedig a sorozatok differenciáit km-ben.

Ekkor $a_1 = 21$, és $d_A = -1,4$, valamint $b_1 = 18$, és $d_B = 2$.

- a) A délután 4-től 5-ig tartó szakasz az A városból indulónak a mozgás 5. órája, a B városból indulónak a mozgás 3. órája, így a megfelelő számtani sorozatok 5., valamint 3. tagja adja meg a választ. Számoljunk a számtani sorozat n -edik tagjára felírható összefüggés felhasználásával:

$a_5 = 21 + (5 - 1) \cdot (-1,4) = 15,4$, valamint $b_3 = 18 + (3 - 1) \cdot 2 = 22$. Tehát az A városból induló 15,4 km-t, a B városból induló 22 km-t tett meg ebben az órában.

- b) A délben induló kerékpáros n , a délután 2-kor induló $n - 2$ órán keresztül haladt a találkozásig.

Az általuk megtett utak hossza: az A városból induló megtett útja n óra alatt: $S_{(A)n} = \frac{2 \cdot 21 + (n - 1) \cdot (-1,4)}{2} \cdot n$,

a B városból induló megtett útja $n - 2$ óra alatt: $S_{(B)n-2} = \frac{2 \cdot 18 + (n - 2 - 1) \cdot 2}{2} \cdot (n - 2)$.

A két kerékpáros összesen megtett útja éppen a két város távolságának összege:

$$\frac{2 \cdot 21 + (n - 1) \cdot (-1,4)}{2} \cdot n + \frac{2 \cdot 18 + (n - 2 - 1) \cdot 2}{2} \cdot (n - 2) = 189$$

A műveletek elvégzése, összevonás és egyenletrendezés után: $0,3n^2 + 34,7n - 219 = 0$ másodfokú egyenlet adódik, amelynek gyökei $n_1 = -\frac{365}{3}$, valamint $n_2 = 6$. Az n_1 nem megoldása a feladatnak.

Tehát délután 6 órakor találkoznak, és ekkor $S_{(A)6} = \frac{2 \cdot 21 + (6 - 1) \cdot (-1,4)}{2} \cdot 6 = 105$ km-re vannak az A várostól.

Ellenőrzés: $S_{(B)6-2} = \frac{2 \cdot 18 + (6 - 2 - 1) \cdot 2}{2} \cdot (6 - 2) = 84$



FELADATOK I. RÉSZ

- B1.** Iktass be a 2 és az 54 közé két számot úgy, hogy a megadottakkal együtt egy számtani sorozat négy egymást követő tagját kapd eredményül!
- B2.** Egy számtani sorozat harmadik, negyedik és ötödik tagjának összege 123. A sorozat differenciája 5. Mennyi a sorozat hatodik tagja?
- B3.** Egy számtani sorozat első tagja 7, differenciája $-\frac{5}{6}$. Mennyi a sorozat 20. tagja és az első 20 tag összege?
- B4.** Egy mértani sorozat második tagja $-\frac{1}{9}$, hányadosa 3. Mennyi az 5. tag?
- B5.** Hat sorozatot megadtunk az általános tagjával. Írj az általános tagok alá S betűt, ha az számtani, M betűt, ha az mértani sorozatot határoz meg, és E betűt, ha az előbbieket egyike sem érvényes! Minden helyre írd legalább egy betűt! ($n \in \mathbb{N}^+$)
 $a_n = 6n$ $b_n = 6$ $c_n = n^6$ $d_n = 6^n$ $e_n = 6 + n$ $f_n = n - 6$
- B6.** Mennyi lehet annak a mértani sorozatnak a hányadosa, amelynek 3. tagja -7 , 5. tagja -112 ?
- B7.** Határozd meg a kétjegyű páratlan számok összegét! Megoldásod részletezd!
- B8.** Melyik az 50. pozitív egész szám, ami 7-tel osztva 3 maradékot ad?
- B9.** Egy mértani sorozat első tagja 4, hányadosa 2. Az első 100 tag közül hány olyan tagja van a sorozatnak, amelyek
 a) 2-nek hatványa? b) 4-nek hatványa?
- B10.** Egy sorozat első tagja -9 , második tagja 4. Minden további tag a közvetlenül előtte álló két tag összegével egyenlő. Add meg a sorozat további öt tagját!
- B11.** Igaz-e, hogy a $\sqrt{5}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{45}$ lehetnek egy számtani sorozat egymást követő tagjai? Megoldásod részletezd!
- B12.** Valaki a bankban 1 millió forintot helyez el kamatos kamatra, és a bank évi 8% kamatot ad. Mennyi pénze lesz az illetőnek ezen a számlán 2 teljes év elteltével, ha más összeget nem tesz be és nem vesz ki időközben?



RÁADÁS

Az írásbeli érettségi vizsgálat tételei az 1892-93. isk. év végén,
 Szeged, Városi főgymnasium. (Karátsonyi Miklós)

Egy mértani haladvány harmadik tagja 50, a hetedik tagja 31,250 [mai írásmóddal: 31 250]; mily nagy az első tag, mily nagy a hányados, mekkora a 10-ik tag és a 10 első tag összege? [A haladvány kifejezés mai szóhasználattal sorozatot jelent.]
 (Forrás: KöMaL 1894. május, 49. oldal; eredeti szöveg alapján)

FELADATOK II. RÉSZ

- Q1.** Adott négy számsorozat ($n \in \mathbb{N}^+$): $a_n = 5 - 2n$; $b_n = 3 \cdot 0,8^n$; $c_n = n(n+1)$; $d_n = 7$.
Töltsd ki a táblázatot a megadott sorozatokra vonatkozóan! Az utolsó két sorba írt válaszaidat indokold!

	a_n	b_n	c_n	d_n
1. tag				
2. tag				
3. tag				
4. tag				
Számtani sorozat? (igen/nem)				
Mértani sorozat? (igen/nem)				

- Q2.** Egy cirkuszban a nézők összesen 12 sorban ülhetnek. Minden sorban az azt megelőző sorhoz képest 10 hellyel van több. Az utolsó sorban 210 az ülőhelyek száma.

a) Hány ember fér el a nézőtérre?

Az egyensúlyozóművész egy üvegpoharat helyez el egy tálcán, arra tesz egy újabb tálcát, amin aztán két újabb poharat helyez el, majd arra egy újabb tálcát, amire már három poharat tesz. Így folytatva minden egyes újabb tálcára eggyel több poharat helyez, mint az előtte lévő volt.

b) Hány tálcát kell egymás fölé halmoznia, ha összesen 66 poharat akar elhelyezni?

A cirkusz vezetése úgy dönt, hogy egy adott napon mindenkinek egységesen 1500 forintos kedvezményes áron kínálja a belépőt. Egy telt házas előadást követően a bevétel 25 százalékát kifizetik a költségekre, és a maradékot bankban helyezik el. A bank havi 1%-os kamatos kamatozású betétet biztosít.

c) Mennyi pénz lesz egy teljes év elteltével ezen a bankszámlán, ha (az egyetlen telt házas előadásból adódó nettó bevételen kívül) más összeget erre a számlára nem helyeznek el?



- Q3.** Egy mértani sorozat harmadik tagja -2 , hatodik tagja 250.

a) Határozd meg a sorozat tizedik tagját!

b) Számítsd ki a sorozat első tíz tagjának összegét!

c) Tekintsük a sorozat első 20 tagját. E tagok közül a páros indexű tagok összegét jelölje A , a páratlan indexű tagok összegét B . Határozd meg az $\frac{A}{B}$ hányados értékét! Válaszod tovább már nem egyszerűsíthető valódi tört alakjában add meg!

- Q4.**
- a)** Mennyi pénzt helyezett el eredetileg egy befektető a bankban kamatos kamatra, ha 10 év letelte után 7%-os éves kamattal 32 millió forint volt ezen a számláján, és a 10 év során nem nyúlt ehhez a számlához?
- b)** A 6%-os éves kamatra elhelyezett kamatos kamatozású bankbetét értéke hány év alatt másfélszereződik meg, ha közben semmilyen tranzakciót nem hajtottunk végre a számlán?
- c)** Hány százalékos éves kamatozást ígérő bankban duplázódhat meg a pénzünk 20 év alatt, ha kamatos kamatra kötjük le?
- d)** Egy befektető 6 éven keresztül minden év elején 1 200 000 Ft-ot helyez el a gyűjtőszámláján, évi 8%-os kamatos kamatra. Mennyi pénz lesz ezen a számlán a 6. év végére?

- Q5.** Egy számtani sorozat első tagja 7, differenciája -9 .

a) Tagja-e a sorozatnak a -472 ?

b) Legalább hány tagot adtunk össze, ha az összeg kisebb, mint -4300 ?

c) Határozd meg az első 30 tag abszolút értékének az összegét!

FELADATOK II. RÉSZ

R1. A magyarországi autók rendszáma 2022-ig 3 betűből és 3 számjegyből állt.

Hány olyan rendszám létezett 2022-ig, amelynek

- a) három betűje SAM, és a 3 szám sorrendben egy növekvő számtani sorozat egymást követő 3 tagja;
- b) három betűje MER, és a 3 szám sorrendben egy növekvő mértani sorozat egymást követő 3 tagja?

R2. Néhány szakasz hossza (cm-ben mérve) olyan számtani sorozat egymás után következő tagjai, amelynek differenciája 3, és ezek közül a legrövidebb szakasz hossza 2,3 cm. A szakaszok hosszának összege 158 cm.

- a) Hány szakaszból van szó? Milyen hosszú ezek közül a leghosszabb?

Egy számtani sorozat első és második tagjának összege 48. A második, harmadik és negyedik tagjának összege 54.

- b) Hányszorosa az első 10 tag összege a második 10 tag összegének?

R3. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2^{x-4}$, valamint $g(x) = 2^x - 4$ függvény.

- a) Ábrázold a megadott függvények grafikonját derékszögű koordináta-rendszerben!
- b) Add meg a függvények értékkészletét és zérushelyét! Jellemezd a függvényeket monotonitás szempontjából!

Tekintsük a pozitív egész számok halmazára leszűkített f és g függvényt. Vizsgáld az így kapott $a_n = 2^{n-4}$, valamint $b_n = 2^n - 4$ ($n \in \mathbb{N}^+$) sorozatokat!

- c) Mértani sorozat-e az $\{a_n\}$, valamint a $\{b_n\}$ sorozat? Indokold a válaszod!
- d) Amennyiben $\{a_n\}$ vagy $\{b_n\}$ mértani sorozat, akkor add meg a sorozat első 10 tagjának összegét, valamint első 10 tagjának szorzatát!

R4. Szerencsés Flórián nyert a lottón 1 millió forintot, de annyira szerencsés, hogy az 5 év múlva esedékes nyugdíjazásáig megél a jelenlegi keresetéből. Azon töri a fejét, hogy mi legyen a nyeremény sorsa.

- a) Otthon tartja 5 éven keresztül a pénzt. Mennyi lesz a pénzének a vásárlóértéke 5 év múlva, ha az éves átlagos infláció 6% (ami azt jelenti, hogy a pénz vásárlóereje minden évben az előző évhez képest a $\frac{100}{106}$ -od részére csökken)?
- b) Bankba teszi a teljes összeget évi 8% kamatos kamatozású betétre. Mennyi pénzhez juthat így 5 év múlva? Ennek az összegnek mennyi lesz a vásárlóértéke az a) részben leírt feltételekkel?
- c) A nyeremény mellé felvesz 1 500 000 Ft hitelt, és ebből az összegből napelemet csináltat a háza tetejére. A hitelt 4 év alatt, 4 egyenlő részletben törleszti. Mekkora a törlesztőrészlet, ha a hitel kamata évi 9%?



R5. (Középszintű érettségi feladat 2020 nyomán)

Egy kutató (a 2000 óta mért adatok alapján tett) egyik feltételezése szerint a 2018 utáni néhány évtizedben a globális éves középhőmérséklet alakulását a következő függvénnyel lehet előre jelezni: $g(t) = 15,92 \cdot 1,002^t$. Ebben a képletben t jelöli a 2018 óta eltelt évek számát, $g(t)$ pedig az adott év becsült középhőmérsékletét Celsius-fokban ($0 \leq t$).

Ezt a modellt alkalmazva

- a) számítsd ki, hogy mennyi volt az éves középhőmérséklet 2018-ban;
- b) számítsd ki, hogy mennyi lesz az éves középhőmérséklet 2024-ben;
- c) számítsd ki, hogy melyik évben lesz az éves középhőmérséklet 16,7 °C!

Adott a $[-2; 2]$ intervallumon értelmezett $f(x) = 2^x - 2$ függvény.

- d) Vázold a függvény grafikonját, majd határozd meg a függvény zérushelyét és értékkészletét!

A geometria a matematikának az az ága, amely különböző alakzatokkal, azok tulajdonságaival, formájával, méretével, kölcsönös elhelyezkedésével foglalkozik. A testek, síkidomok ismeretlen adatainak meghatározása, a szimmetriák felismerése és felhasználása már az ősi Mezopotámiában és Egyiptomban is része volt a földmérési, építészeti, csillagászati számításoknak. A geometria szabályait Kr. e. 300 környékén Eukleidész öntötte szigorú formába *Elemek* című munkájában, amely a következő két évezredre megalapozta és meghatározta a geometria szemléletét.

A XVII. század elején René Descartes és Pierre Fermat francia matematikusok a koordináta geometria bevezetésével lehetővé tették geometriai feladatok algebrai úton, egyenletek segítségével történő megoldását is.

A XIX. század matematikusai (köztük a magyar Bolyai János) a párhuzamos egyenesek Eukleidésztől eltérő értelmezésével új típusú geometriákat hoztak létre, amelyek segítségével ma a tengeri szivacsok telepeinek alakjától egészen az univerzum lehetséges jövőjéig terjedő kérdésekre keressük a választ. A geometria élő, napjainkban is fejlődő tudomány. A felsőbb matematikában érintett differenciálgeometria, a topológia vagy éppen a fraktálgeometria művelői újabb és újabb érdekes, a természettudományok szempontjából is fontos eredményekkel állnak elő.



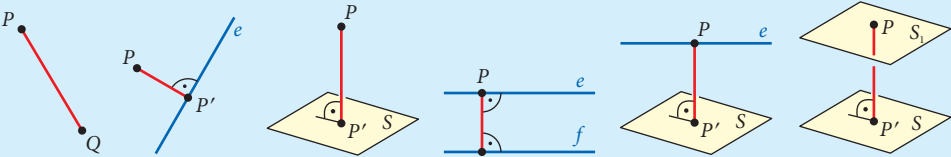
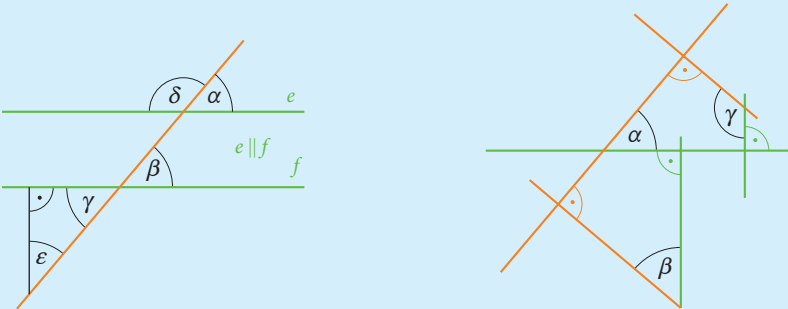
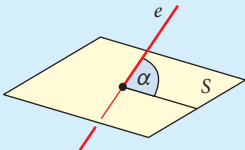
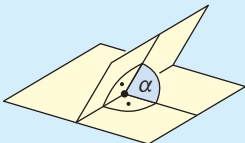
A Klein-kancsó önmagába visszaterő felülete

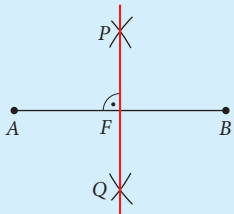
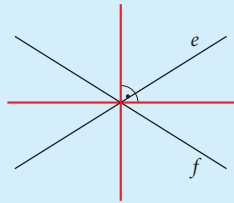
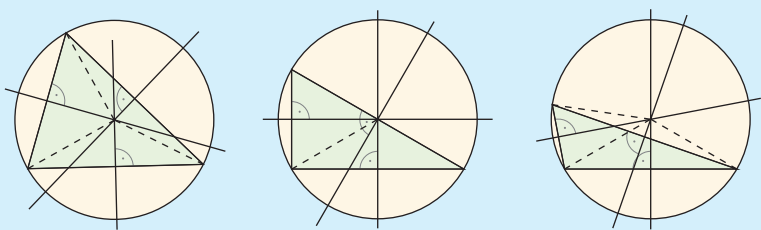


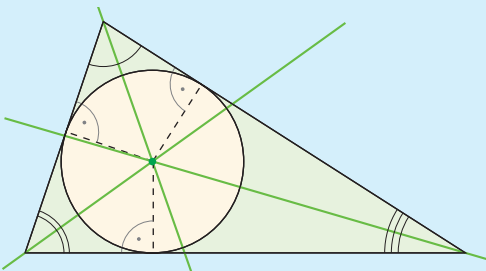
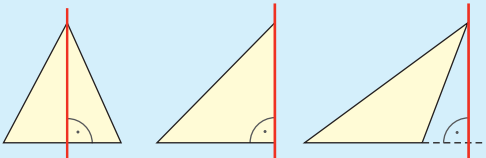
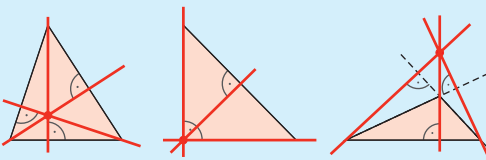
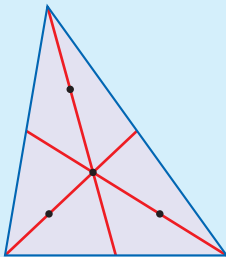
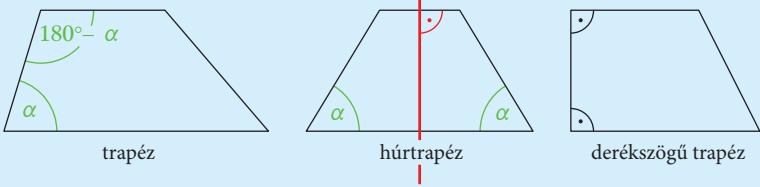
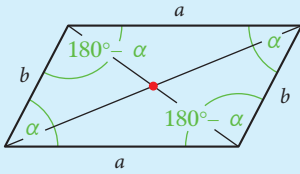
Fraktálok segítségével számítógéppel generált „táj”

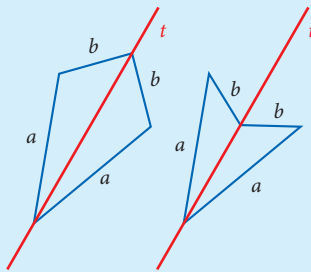
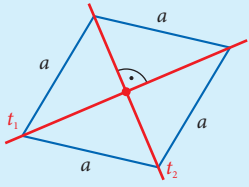
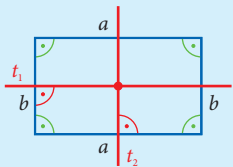
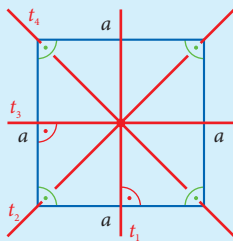
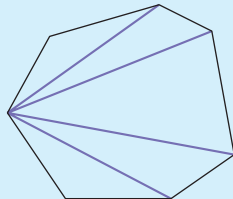
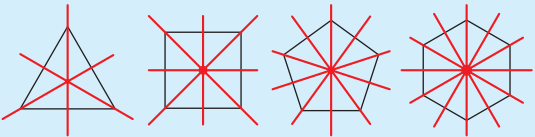
ELEMI GEOMETRIA

	Alapfogalmak	Pont, egyenes, sík (térelemek); illeszkedés
D	Térelemek kölcsönös helyzete	Két egyenes metsző, ha pontosan egy közös pontjuk van. Két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak, és nincs közös pontjuk (vagy ha egybeesnek). Egy egyenes illeszkedik egy síkra, ha minden pontja a síkon van. Egy egyenes metsz egy síkot, ha pontosan egy közös pontjuk van. Egy egyenes párhuzamos egy síkkal, ha nincs közös pontjuk (vagy ha az egyenes illeszkedik a síkra). Két különböző sík metszi egymást, ha a két síknak van közös pontja. A közös pontok által alkotott egyenes a két sík metszévonal. Két sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk (vagy ha egybeesnek). (Két egyenes kitérő, ha nem párhuzamosak és nem metszők. Ekkor nincs olyan sík, amely mindkét egyenest tartalmazza.)
D	Térelemek távolsága, ha van közös pontjuk	Ha két térelemnek van közös pontja, akkor a két térelem távolsága 0.

D	Tételek távolsága, ha nincs közös pontjuk	Két pont távolsága a pontokat összekötő szakasz hossza. Pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza. Pont és sík távolsága a pontból a síkra állított merőleges szakasz hossza. Két párhuzamos egyenes távolsága az egyik egyenes egyik pontjának a másik egyenestől mért távolsága. Párhuzamos egyenes és sík távolsága az egyenes egyik pontjának a síktól mért távolsága. Két párhuzamos sík távolsága az egyik sík egyik pontjának a másik síktól mért távolsága. 
D	A szög	Egy közös pontból kiinduló félegyenes a síkot két szögtartományra (szögre) bontja. A félegyenesek a szög szárjai, a közös kezdőpont a szög csúcsa.
D	A szög mértéke fokban	A teljes szög 360-ad része az 1° nagyságú szög. Az 1° 60-ad része 1 szögperc ($1'$), az 1 szögperc 60-ad része 1 szögmásodperc ($1''$).
D T	Nevezetes szögpárok	 α és β egyállású szögek; $\alpha = \beta$ β és γ csúcsszögek; $\beta = \gamma$ α és γ váltószögek; $\alpha = \gamma$ α és δ mellékszögek; $\alpha + \delta = 180^\circ$ δ és γ kiegészítő szögek; $\delta + \gamma = 180^\circ$ γ és ϵ pótszögek; $\gamma + \epsilon = 90^\circ$ α és β merőleges szárú szögek; $\alpha = \beta$ α és γ merőleges szárú szögek; $\alpha + \gamma = 180^\circ$
D	Tételek hajlásszöge	Egyenes-egyenes: Két metsző egyenes hajlásszöge a két egyenes által meghatározott két-két egyenlő szög közül a nem nagyobbik (legfeljebb 90° nagyságú). Két párhuzamos egyenes szöge 0°. Egyenes-sík: Egy egyenes merőleges egy síkra, ha az egyenes síkra eső merőleges vetülete az egyenes és a sík metszéspontja. Belátható, hogy egy egyenes merőleges a síkra, ha az egyenes merőleges az egyenes és sík metszéspontjára illeszkedő, a síkban lévő két nem egybeeső egyenesre. Egy (a síkra nem merőleges) egyenes és egy sík hajlásszögén az egyenesnek és az egyenes síkra eső merőleges vetületének a hajlásszögét értjük. Ha egy egyenes párhuzamos egy síkkal, akkor az egyenes és a sík szöge 0°. Sík-sík: Két metsző sík hajlásszöge megegyezik azzal a szöggel, amit a két sík metszésvonalának tetszőleges pontjában a metszésvonalra merőlegesen állított egyik, illetve másik síkra illeszkedő egyenesek határoznak meg. Párhuzamos síkok szöge 0°.  

T	A háromszög szögei	A háromszög belső szögeinek összege 180°. A háromszög minden külső szöge a nem mellette fekvő belső szögek összegével egyenlő. A háromszög külső szögeinek összege 360°.
T	Háromszög-egyenlőtlenség	Egy háromszög bármely két oldalhosszának összege nagyobb a harmadik oldal hosszánál. Ha egy háromszög oldalainak hossza: a, b, c, akkor fennáll, hogy $c < a + b$; $a < b + c$; $b < a + c$.
T	A háromszög szögei és oldalai	A háromszögben egyenlő hosszúságú oldalakkal szemben egyenlő nagyságú szögek vannak, egyenlő nagyságú szögekkel szemben egyenlő hosszúságú oldalak vannak. Hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van, nagyobb szöggel szemben hosszabb oldal van.
D	A háromszögek osztályozása	Szögei szerint: Egy háromszög hegyesszögű, ha legnagyobb szöge hegyesszög; derékszögű, ha legnagyobb szöge derékszög; tompaszögű, ha legnagyobb szöge tompaszög. A másik két szög minden esetben hegyesszög. Oldalai szerint: Egy háromszög egyenlő szárú, ha van két egyenlő hosszúságú oldala. Az egyenlő hosszú oldalak a szárak, a harmadik oldal az alap. A szárak által bezárt szög a szár-szög, a másik két szöget alapon fekvő szögnek nevezzük. Egy háromszög szabályos (egyenlő oldalú), ha minden oldala egyenlő hosszú (és így minden szöge egyenlő nagyságú).
D	Nevezetes pontthalmazok	A sík két különböző pontjától egyenlő távolságban lévő pontok halmaza a síkon a két pont által meghatározott szakasz szakaszfelező merőlegese.  Két metsző egyenestől egyenlő távolságban lévő pontok halmaza a síkon a két egyenes által bezárt szögek szögfelező egyenesei. (T: Két ilyen egyenes van, ezek merőlegesek egymásra.)  A körvonal (röviden: a kör) a sík egy adott pontjától adott távolságra lévő pontok halmaza a síkon. A gömb a tér egy adott pontjától adott távolságra lévő pontok halmaza.
D	A háromszög oldalfelező merőlegesei	A háromszög oldalfelező merőlegesei a háromszög egy-egy oldalára merőleges és az adott oldal felezőpontjára illeszkedő egyenesek.
T	A háromszög oldalfelező merőlegesei	A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög köré írható körének középpontja (egyenlő távolságra van a háromszög három csúcsától). Hegyesszögű háromszög esetén ez a pont a háromszög belső pontja, derékszögű háromszög esetén az átfogó felezőpontja, tompaszögű háromszög esetén a háromszögon kívül eső pont. 
D	A háromszög belső szögfelezői	A háromszög belső szögfelezői a háromszög belső szögeit felező egyenesek.

T	A háromszög belső szögfelezői	A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög beírható körének középpontja (egyenlő távolságra van a háromszög három oldalegyenesétől). Ez a pont minden háromszög esetén a háromszög belső pontja. 
D	A háromszög magasságvonalai	A háromszög magasságvonalai a háromszög egy-egy csúcsára illeszkedő és az azal szemközti oldalegyenesre merőleges egyenesek. 
T	A háromszög magasságvonalai	A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög magasságpontja. Hegyesszögű háromszög esetén a magasságpont a háromszög belső pontja, derékszögű háromszögben a derékszög csúcsa, tompaszögű háromszög esetén a háromszög külső pontja. 
D	A háromszög súlyvonalai	A háromszög súlyvonalai a háromszög egy-egy csúcsára és a csúccsal szemközti oldal felezőpontjára illeszkedő egyenesek.
T	A háromszög súlyvonalai	A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a súlypont. A súlypont a súlyvonal háromszögbe eső részének az oldalhoz közelebb eső harmadolópontja. A súlypont minden háromszög esetén a háromszög belső pontja. 
T	A négyszög szögei	A négyszög belső szögeinek összege 360°. A négyszög külső szögeinek összege 360°.
D	Trapéz	A trapéz olyan négyszög, amelynek két oldala párhuzamos (ezek a trapéz alapjai, a másik két oldal a trapéz két szára).
T	Trapéz	A trapéz egy száron fekvő szögeinek összege 180°. A húrtrapéz alapon fekvő szögei egyenlő nagyságúak. A húrtrapéz tengelyesen szimmetrikus négyszög. 
D	Paralelogramma	A paralelogramma olyan négyszög, amelynek szemközti oldalai párhuzamosak.
T	Paralelogramma	A paralelogrammában a szemközti szögek egyenlő nagyságúak; az egy oldalon fekvő szögek összege 180°; a szemközti oldalak hossza egyenlő; az átlók felezik egymást. A paralelogramma középpontosan szimmetrikus négyszög. 

D	Deltoid	A deltoid olyan négyszög, amely tengelyesen szimmetrikus az egyik átló egyenesére.	
T	Deltoid	A deltoidnak két-két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú. A deltoidnak van két egyenlő nagyságú (egymással szemkötti) szöge. A deltoid egyik átlóját merőlegesen felezi a másik átló egyenese. A deltoid tengelyesen szimmetrikus négyszög.	
D	Rombusz	A rombusz olyan négyszög, amelynek oldalai egyenlő hosszúságúak.	
T	Rombusz	A rombusz rendelkezik a paralelogramma, valamint a deltoid összes tulajdonságával.	
D	Téglalap	A téglalap olyan négyszög, amelynek minden szöge derékszög.	
T	Téglalap	A téglalap szemkötti oldalai egyenlő hosszúak és párhuzamosak egymással. Átlói felezik egymást. A téglalap tengelyesen és középpontosan szimmetrikus négyszög.	
D	Négyzet	A négyzet olyan négyszög, amelynek minden oldala egyenlő hosszú, és minden szöge egyenlő nagyságú (szabályos négyszög).	
T	Négyzet	A négyzet rendelkezik a téglalap, valamint a rombusz összes tulajdonságával.	
T	Sokszögek szögei, átlói	Az n oldalú konvex sokszög egy csúcsából induló átlóinak száma $n - 3$; összes átlóinak száma $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$; belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180^\circ$, ahol $n \in \mathbb{N}$, és $n > 2$; külső szögeinek összege 360°.	
D	Szabályos sokszög	Egy konvex sokszög szabályos sokszög, ha minden oldala egyenlő hosszú, és minden szöge egyenlő nagyságú.	
T	Szabályos sokszög	A páros oldalszámú szabályos sokszögek tengelyesen és középpontosan is szimmetrikusak, a páratlan oldalszámú szabályos sokszögek tengelyesen szimmetrikusak. Az n oldalú szabályos sokszög egy belső szögének nagysága $\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$; $n > 2$).	

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságvonal 20° -os szöget zár be a C csúcsból induló szögfelező egyenessel. Mekkora az ABC háromszög hegyesszögei?

Megoldás

Az ábra jelöléseivel:

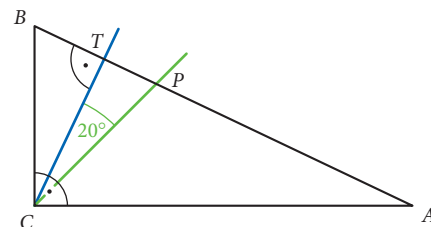
A feladat szövege szerint $\angle TCP = 20^\circ$. Mivel $\angle BCA = 90^\circ$, és CP felezi ezt a szöget, ezért $\angle BCP = \angle PCA = 45^\circ$. Ugyanakkor

$$\angle BCT = \angle BCP - \angle TCP = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ.$$

A $\angle TBC$ és $\angle BCT$ a BCT derékszögű háromszög hegyesszögei, ezért egymás pótszögei, így $\angle TBC = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$. A CAB derékszögű háromszögben $\angle ABC + \angle CAB = 90^\circ$, így $\angle CAB = 25^\circ$.

Az ABC derékszögű háromszög hegyesszögei tehát 25° és 65° nagyságúak.

Megjegyzés: A feladat más módon is megoldható. Például, ha kihasználjuk, hogy a TPC derékszögű háromszög P csúcsánál lévő belső szöge a CAP háromszög P csúcsánál lévő külső szöge, vagy észrevesszük, hogy a $\angle BCT$ és $\angle CAB$ merőleges szárú hegyesszögek, ezért $\angle CAB = \angle BCT = 25^\circ$. $\angle ABC + \angle CAB = 90^\circ$, amiből $\angle ABC = 65^\circ$.



2. Egy háromszög cm-ben mért oldalhosszúságai egész számok. Két oldalának hossza 35 cm és 91 cm.
- Mekkora lehet a háromszög harmadik oldalhosszának legkisebb, illetve legnagyobb értéke?
 - Hány, a feltételeknek megfelelő, nem egybevágó háromszög létezik?
 - Van-e a háromszögek között olyan, amelyben két belső szög nagysága egyenlő?

Megoldás

Jelölje c a háromszög harmadik oldalának hosszát centiméterben.

A háromszög-egyenlőtlenség miatt teljesül, hogy $c < 35 + 91$, és $35 < 91 + c$, valamint $91 < 35 + c$.

Ezek alapján $c < 126$, és $-56 < c$, valamint $56 < c$, ezért $56 < c < 126$.

- Mivel c egész szám, ezért legkisebb értéke 57, legnagyobb értéke 125 lehet.
- 56-nál nagyobb, 126-nál kisebb egész számból összesen $125 - 56 = 69$ darab van, ezért két oldalhossz rögzítése mellett a harmadik oldal hossza 69-féleképpen alakulhat. Tehát 69 ilyen háromszög van.
- A háromszög két belső szögének nagysága egyenlő, ha megegyezik két oldalának hosszúsága. Az eredetileg adott 35 cm és 91 cm oldalhosszúság közül a harmadik oldal hossza 35 cm nem lehet, viszont 91 cm lehet, mert az teljesíti a c oldal hosszára érvényes egyenlőtlenséget. Tehát egy olyan háromszög van a lehetségesek között, amelyben két belső szög nagysága egyenlő.

3. Egy konvex sokszög esetében behúztuk az egyik csúcsából induló összes átlót. Ezek az átlók a csúcsnál lévő belső szöget 23° , 42° , 30° , 47° , valamint 8° nagyságú szögekre bontják. Hányszorosa ennek a belső szögnek a sokszög belső szögeinek összege?

Megoldás

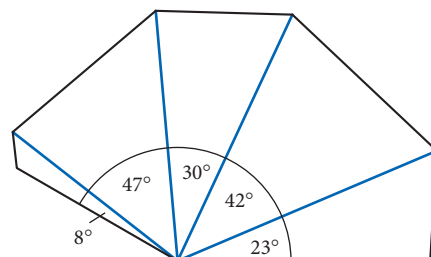
Ha az átlók öt diszjunkt szögtartományt hoznak létre, akkor a csúcsból induló átlók száma 4.

Minden csúcsból a csúcsok számánál 3-mal kevesebb átló indul, ebből következik, hogy a sokszögnek 7 csúcsa van.

Mivel a belső szögek összege $(7 - 2) \cdot 180^\circ$, így a keresett hányados

$$\frac{(7 - 2) \cdot 180^\circ}{23^\circ + 42^\circ + 30^\circ + 47^\circ + 8^\circ} = 6.$$

Tehát 6-szorosa a belső szögeösszeg a szóban forgó belső szögnek.



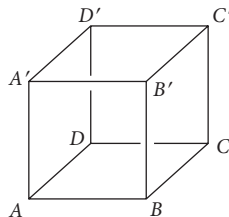
FELADATOK I. RÉSZ

- A1.** Hány fokok szöget zár be az óra kismutatója és nagymutatója egymással
a) 7 órakor; **b)** fél 4-kor?

- A2.** Az $ABCD$ konvex négyszög A csúcsánál lévő külső szöge 104° , a B csúcsnál lévő belső szöge 74° , a C csúcsnál lévő belső szöge 80° nagyságú. Hány fokok a négyszög D csúcsánál lévő külső szöge?

- A3.** Az $ABCD A'B'C'D'$ kocka éleinek hossza 5 cm.
 Add meg

- a)** az A pont és a $CC'D'D$ sík;
b) a BD' egyenes és az $ABCD$ sík;
c) az AD' egyenes és a $CC'B'B$ sík;
d) az $ABCD$ sík és az $A'B'CD$ sík távolságát!



- A4.** Döntsd el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis!

A : Minden paralelogramma trapéz.

B : Ha két szög egymással váltószög, akkor lehetnek egymás kiegészítő szögei.

C : Egy négyszögnek lehet 180° -nál nagyobb belső szöge is.

D : A rombusznak vannak egyállású belső szögei.

- A5.** Egy háromszög külső szögeinek aránya $3 : 5 : 7$. Mekkora a háromszög legkisebb belső szöge?

- A6.** Egy konvex sokszög belső szögeinek összege 1800° . Hány átló indul a sokszög egy csúcsából?

- A7.** Mekkora a paralelogramma szögei, ha az egyik belső szög 23° -kal nagyobb, mint egy másik?

- A8.** Írj mindegyik nyomtatott nagybetű alatt lévő vonalra legfeljebb egyet az alább felsorolt szavak közül aszerint, hogy az adott betűben megtalálható-e a megnevezett típusú nevezetes szögpár! Az egyes nyomtatott nagybetűkben jelöld a két megfelelő szöget α és β betűkkel, és írd fel ezek kapcsolatát a vonal alá! (Tekintsd a betűk felírásához használt vonalakat a megszokott írásmód szerinti merőlegeseknek vagy párhuzamosoknak!)

A felhasználható szavak: egyállású szögek, csúcsszögek, mellékszögek, váltószögek, pótszögek

A X F H Z K T

- A9.** Egy derékszögű háromszög köré írható körének középpontja 8 cm távolságra van a háromszög magasságpontjától. Mekkora a háromszög köré írható kör átmérője?

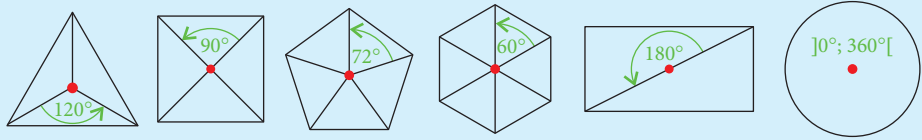
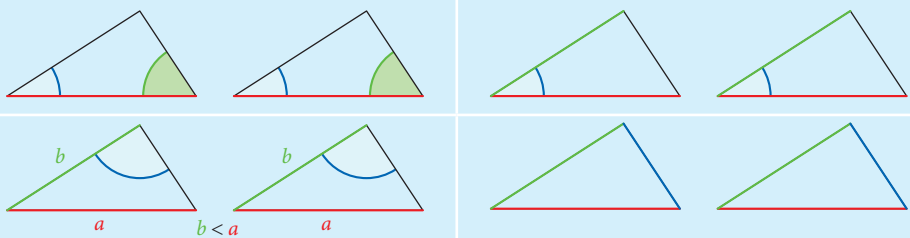
- A10.** Egy szabályos sokszögben összesen 65 átló húzható. Mekkora a sokszög egy belső szögének nagysága?

- A11.** Van-e olyan háromszög, amelyben az oldalak hossza 3,8 cm, 0,29 dm, valamint 64 mm? Válaszod indokold!

- A12.** Mekkora lehet az a két szög, amelyek

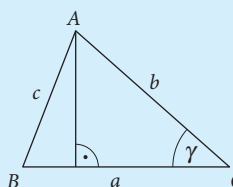
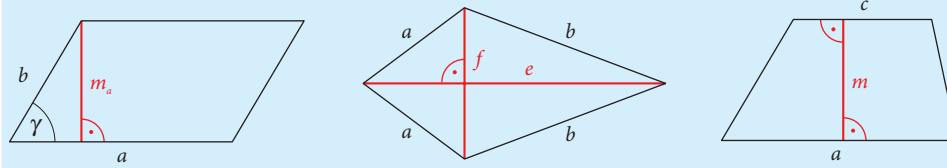
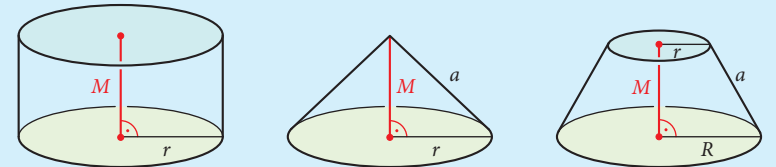
- a)** egymásnak pótszögei, és az egyik a másiknak az ötszöröse;
b) merőleges szárú szögek, és az egyik 23° -kal nagyobb, mint a másik?

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK, SÍKBELI ÉS TÉRBELI ALAKZATOK

D	Geometriai transzformáció	Kölcsönösen egyértelmű leképezés, amelynek értelmezési tartománya is és értékkészlete is ugyanaz a ponthalmaz.
D	Egybevágósági transzformáció	Olyan geometriai transzformáció, amely távolságtartó, azaz bármely két pont távolsága egyenlő a képek távolságával. A sík egybevágósági transzformációi: tengelyes tükrözés, pontra vonatkozó tükrözés, pont körüli elforgatás, eltolás, illetve ezek egymás utáni elvégzése.
D	Tengelyesen szimmetrikus alakzat	Ha egy síkidomhoz van olyan egyenes, amelyre tükrözve önmagába megy át, akkor a síkidom tengelyesen szimmetrikus.
	Tengelyesen szimmetrikus síkidomok	Tengelyesen szimmetrikus síkidomok például: egyenlő szárú háromszög, szabályos háromszög, négyzet, téglalap, rombusz, deltoid, húrtrapéz, kör.
D	Középpontos szimmetria	Ha egy síkidomhoz van olyan pont, amelyre tükrözve önmagába megy át, akkor a síkidom középpontosan szimmetrikus.
	Középpontosan szimmetrikus síkidomok	Középpontosan szimmetrikus síkidomok például: négyzet, téglalap, rombusz, paralelogramma, kör.
	Forgásszimmetria	Ha van olyan 0° -nál nagyobb és 360° -nál kisebb szögű elforgatás, amely egy síkidomot önmagába visz át, akkor a síkidom forgásszimmetrikus. Ilyenkor a legkisebb alkalmas α szög-re hivatkozunk, és azt mondjuk, hogy az alakzat α szögű forgásszimmetriával rendelkezik.
	Forgásszimmetrikus síkidomok	Forgásszimmetrikus síkidomok: szabályos háromszög, négyzet, téglalap, szabályos sokszög, kör. 
D	Egybevágóság	Két alakzatot egybevágónak nevezünk, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi.
T	Háromszögek egybevágóságának alapesetei	Két háromszög egybevágó, ha a két háromszög – egy-egy oldalának hossza és az ezeken fekvő két szög nagysága páronként egyenlő; – két-két oldalának hossza és az általuk közbezárt szög nagysága páronként egyenlő; – két-két oldal hossza és közülük a hosszabbikkal szemben fekvő szög nagysága egyenlő; – a három oldalának hossza páronként egyenlő. 

D	Középpontos hasonlósági transzformáció	Adott O pont (a hasonlóság középpontja) és k pozitív valós szám (a hasonlóság aránya) esetén: az O pont képe önmaga (azaz $O = O'$); a tér – bármely O ponttól különböző – P pontjához hozzárendeljük a P' pontot, amely az OP félegyenesének azon pontja, amelyre igaz, hogy az OP' szakasz hossza az OP szakasz hosszának k-szorososa, azaz $k = \frac{OP'}{OP}$. Ha $1 < k$, akkor a transzformáció középpontos nagyítás, ha $k < 1$, akkor középpontos kicsinyítés, ha $k = 1$, akkor egybevágóság. Ha k negatív valós szám, akkor a transzformáció a k arányú, O középpontú középpontos hasonlóság és egy O középpontú tükrözés egymásutánja. <i>Például:</i>
D	Középpontos hasonlóság	Két alakzatot középpontosan hasonlóknak nevezünk, ha a két alakzathoz van olyan középpontos hasonlóság, amely az egyiket a másikba viszi át.
D	Hasonlósági transzformáció	Olyan geometriai transzformáció, amely aránytartó, vagyis amely transzformáció esetén bármely két pont távolságának és a képek távolságának az aránya állandó. A hasonlóság arányszámának abszolút értéke megadja, hányszorosára változnak az egyes távolságok a transzformáció során.
T	Hasonlósági transzformáció	Minden hasonlósági transzformáció előállítható egy középpontos hasonlósági transzformáció és egy egybevágósági transzformáció egymásutánjaként.
D	Síkidomok hasonlósága	Két síkidomot hasonlóknak nevezünk, ha hasonlósági transzformációval egymásba vihetők.
T	Síkidomok hasonlósága	Bármely két azonos oldalszámú szabályos sokszög hasonló. Bármely két kör hasonló.
T	Háromszögek hasonlóságának alapesetei	Két háromszög hasonló, ha a két háromszögben – két-két szög nagysága páronként egyenlő; – két-két megfelelő oldal hosszának aránya és az általuk közbezárt szög nagysága egyenlő; – két-két megfelelő oldal hosszának aránya és közülük a nagyobbikkal szemben fekvő szög nagysága egyenlő; – a három oldal hosszának aránya páronként egyenlő.
T	Arányok hasonló síkidomok, hasonló testek esetén	Ha két síkidom hasonló, és a hasonlóság arányszáma k, akkor a két síkidom kerületének aránya k, a két síkidom területének aránya k^2. Ha két test hasonló, és a hasonlóság arányszáma k, akkor a két test felszínének aránya k^2, a két test térfogatának aránya $k ^3$.
D	A háromszög középvonala	A háromszög egy középvonala a háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakasz. A háromszög középvonala párhuzamos a szemközti oldallal, és feleolyan hosszú.

T	Pitagorasz-tétel	A derékszögű háromszögben a befogók hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével.	
T	A Pitagorasz-tétel megfordítása	Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.	
T	Thalész-tétel	A kör átmérője a körvonal bármely pontjából – kivéve az átmérő két végpontját – derékszög alatt látszik.	
T	A Thalész-tétel megfordítása	Ha az AB szakasz egy C pontból derékszögben látszik, akkor a C pont rajta van az AB átmérőjű körvonalon.	
T	Körérintő, sugár	A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.	
T	Érintőszakaszok	A körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak.	
D	Középponti szög	Olyan szög, amelynek csúcsa a kör középpontja.	
T	Középponti szög, körív, körcikk területe	Adott körben a középponti szögek nagysága és az ezekhez tartozó ívek hossza között egyenes arányosság van. Adott körben a középponti szögek nagysága és az ezekhez tartozó körcikkek területének nagysága között egyenes arányosság van.	
D	Hegyesszögek függvényei (α a derékszögű háromszög egyik hegyesszöge)	$\sin \alpha = \frac{\alpha \text{ szöggel szemben lévő befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}}$ $\cos \alpha = \frac{\alpha \text{ szög melletti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\alpha \text{ szöggel szemben lévő befogó hossza}}{\alpha \text{ szög melletti befogó hossza}}$	
D	90° -os szög szögfüggvényei	$\sin 90^\circ = 1$ $\cos 90^\circ = 0$	
D	Szögfüggvények kiterjesztése tompaszögre	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ esetén: $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$	
T	Pótszögek szögfüggvényei	$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$	
T	Ugyanazon szög szögfüggvényeinek kapcsolata	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \alpha \neq 90^\circ$	
T	Színusztétel	A háromszögben két oldal hosszának aránya egyenlő a velük szemben lévő szögek szinuszának az arányával. A szokásos jelölésekkel: $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$	
T	Koszinusztétel	A szokásos jelölésekkel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$	

T	A háromszög területképletei	$T = a \cdot \frac{m_a}{2}$, ahol m_a az a oldalhoz tartozó magasság hossza. $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$, ahol a és b a háromszög oldala, γ az a és b oldalak által közbezárt szög.	
T	Négyszögek területképletei	$T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot m_a$, ahol m_a az a oldalhoz tartozó magasság hossza. $T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot b \sin \gamma$, ahol a és b a paralelogramma oldalainak hossza, γ az a és b oldalak által közbezárt szög nagysága. $T_{\text{deltoid}} = \frac{e \cdot f}{2}$, ahol e és f a deltoid átlóinak hossza. $T_{\text{trapéz}} = \frac{a+c}{2} \cdot m$, ahol a és c a trapéz alapjainak, m pedig a trapéz magasságának a hossza.	
T	A kör kerülete, területe	Az r sugarú kör kerülete: $K = 2r\pi$; területe: $T = r^2\pi$	
T	A körcikk területe	$T = \frac{r^2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha$, ahol r a kör sugarának hossza, α a körcikk középponti szögének fokban megadott nagysága.	
T	Testek felszíne	Hasáb, gúla, csonkagúla felszíne: a testet határoló lapok területének összege. $A_{\text{forgáshenger}} = 2r^2 \cdot \pi + 2r \cdot \pi \cdot M$ $A_{\text{csonkakúp}} = \pi[R^2 + (R+r) \cdot a + r^2]$	$A_{\text{forgáskúp}} = r^2 \cdot \pi + 2r \cdot \pi \cdot a$ $A_{\text{gömb}} = 4r^2 \cdot \pi$ 
T	Térfogat	$V_{\text{hasáb}} = T_{\text{alaplap}} \cdot M$ $V_{\text{gúla}} = \frac{T_{\text{alaplap}} \cdot M}{3}$ $V_{\text{forgáshenger}} = r^2 \cdot \pi \cdot M$ $V_{\text{forgáskúp}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3}$	$V_{\text{csonkagúla}} = \frac{M}{3}(T + \sqrt{Tt} + t)$ $V_{\text{gömb}} = \frac{4}{3}r^3 \cdot \pi$ $V_{\text{csonkakúp}} = \frac{M \cdot \pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

KIDOLGOZOTT FELADAT

4.

Egy függőhíd tartószerkezete körívet alkot. A híd hossza (a körív két vége közötti távolság) 750 méter, és az ív a legmagasabb ponton 120 méteres magasságban emelkedik a hídpálya fölé. Mekkora a híd ívének sugara?



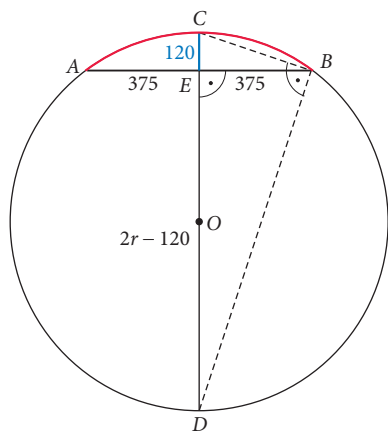
Megoldás

Készítsünk ábrát a feladathoz az adatok feltüntetésével! A kör sugarát jelölje r .

A Thalész-tétel miatt a CBD háromszög a B csúcsánál derékszögű.

Mivel az EDB $\sphericalangle$ -nek pótszöge a DBE $\sphericalangle$, valamint a BCE $\sphericalangle$, ezért ezek nagysága egyenlő. Az előbbiekből következik, hogy az EBC , valamint EDB háromszögek szögeinek nagysága páronként egyenlő, ezért a két háromszög hasonló.

A hasonlóság miatt fennáll, hogy $\frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EB}$, vagyis az adatok felhasználása után $\frac{375}{120} = \frac{2r-120}{375}$.



Ebből beszorzás után: $375^2 = 120 \cdot (2r - 120)$

$$2r - 120 = \frac{375^2}{120} \approx 1172 \quad 2r \approx 1292 \quad r \approx 646 \text{ (m)}$$

A híd ívének sugara tehát körülbelül 650 méter.

Megjegyzés:

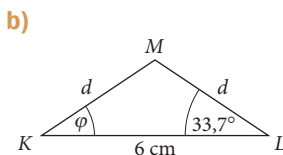
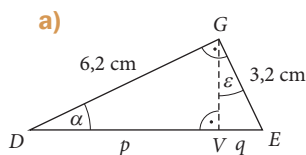
A feladatot Pitagorasz-tétellel is megoldhattuk volna.

Mivel $OE = r - 120$, így az OEB derékszögű háromszögben igaz, hogy $(r - 120)^2 + 375^2 = r^2$.

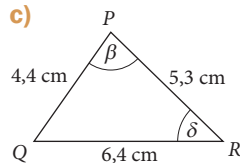
A négyzetre emelést elvégezve és az egyenletet rendezve kapjuk: $240r = 375^2 + 120^2$, amiből $r = \frac{375^2 + 120^2}{240} \approx 646$.

5.

Számítsd ki az ismeretlen szakasz hosszokat és a megjelölt szögeket! A keresett hosszúságokat két tizedesjegy pontossággal, a szögeket egy tizedesjegy pontossággal határozd meg!



c)



Megoldás

a) A derékszögű háromszög hegyesszögeinek szögfüggvényeit a háromszög oldalainak hányadosával is kifejezhetjük. A DEG háromszögben: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3,2}{6,2} \approx 0,516$, amiből $\alpha \approx 27,3^\circ$.

A DVG derékszögű háromszögben $\cos 27,3^\circ = \frac{p}{6,2}$, amiből $p = 6,2 \cdot \cos 27,3^\circ \approx 5,51$ (cm).

Az ε és az α merőleges szárú hegyesszögek, ezért ezek egyenlők: $\varepsilon \approx 27,3^\circ$.

A GVE derékszögű háromszögben $\sin 27,3^\circ = \frac{q}{3,2}$, amiből $q = 3,2 \cdot \sin 27,3^\circ \approx 1,47$ (cm).

b) A KLM háromszög egyenlő szárú, ezért az alapján fekvő két szöge is egyenlő: $\varphi = 33,7^\circ$.

Ha megrajzoljuk a háromszög alapjához tartozó magasságot, akkor a háromszöget két egybevágó derékszögű háromszögre bontjuk. Ezekben felírható:

$$\cos 33,7^\circ = \frac{3}{d}, \text{ amiből } d = \frac{3}{\cos 33,7^\circ} \approx 3,61 \text{ (cm).}$$

c) Gyors számolással ellenőrizhetjük, hogy a PQR háromszög nem derékszögű, hiszen $4,4^2 + 5,3^2 = 47,45 \neq 6,4^2 = 40,96$.

A háromszögre alkalmazható a koszinusztétel, amit célszerű a háromszög leghosszabb oldalára felírni:

$$6,4^2 = 5,3^2 + 4,4^2 - 2 \cdot 5,3 \cdot 4,4 \cdot \cos \beta, \text{ amiből}$$

$$\cos \beta = \frac{5,3^2 + 4,4^2 - 6,4^2}{2 \cdot 5,3 \cdot 4,4} \approx 0,139.$$

Tehát $\beta \approx 82,0^\circ$.

A δ szöget célszerű szinusztétellel kiszámítani:

$$\frac{\sin \delta}{\sin 82^\circ} = \frac{4,4}{6,4} = 0,6875,$$

$$\sin \delta = 0,6875 \cdot \sin 82^\circ \approx 0,681, \text{ amiből } \delta \approx 42,9^\circ.$$

(A δ csak hegyesszög lehet, hiszen nem a háromszög leghosszabb oldalával van szemben.)

Megjegyzés:

A $\sin \delta = 0,681$ egyenletnek megoldása még a $137,1^\circ$, de az nem felel meg a kitűzött feladat feltételeinek, mert a háromszög legrövidebb oldalával szemkötti szög csak hegyesszög lehet.

FELADATOK I. RÉSZ

- B1.** Egy épület tervrajzán egy 2 cm hosszúságú szakasz jeleníti meg az 5 m hosszú folyosót. Hány centiméter a rajzon a folyosó szélessége, ha a valóságban 1,8 m széles?
- B2.** Az r sugarú körvonal egyik pontjából kiinduló két merőleges húr hossza 5 cm, valamint 7 cm. Add meg az r értékét cm-ben kifejezve két tizedesjegy pontossággal!
- B3.** Az $ABCD$ téglalap AB oldalának hossza 26 egység, az AC átló az AB oldallal $24,7^\circ$ nagyságú szöget zár be. Mekkora a téglalap BC oldalának hossza? A választ egy tizedesjegyre kerekítve add meg!
- B4.** Egy kör kerülete 16 m. Mekkora középponti szög tartozik ebben a körben a 14 m hosszúságú körívhez?
- B5.** Egy szabályos négyoldalú gúla oldalélének hossza háromszorosa a gúla alaplaján lévő átlónak. Mekkora szöget zár be az oldalél az alaplappal? Válaszod fokban, egy tizedesjegyre kerekítve add meg!
- B6.** Döntsd el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis!
 A: Ha egy háromszöget 4-szeresére nagyítunk, akkor a szögei is 4-szeresére növekednek.
 B: Minden szabályos sokszög középpontosan szimmetrikus.
 C: Ha egy ötszöget felére kicsinyítünk, akkor területe negyedére csökken.
 D: A téglalapnak 4 szimmetriatengelye van.
- B7.** Egy kör alakú, 3 méter átmérőjű virágágyást 0,5 méter szélességben zúzott kővel vesznek körbe. Mekkora a zúzott kővel borított rész területe?
- B8.** Egy paralelogramma átlóinak hossza 10 cm és 16 cm, az átlók által bezárt szög nagysága 60° . Mekkora a paralelogramma rövidebb oldalának hossza cm-ben kifejezve, egy tizedesjegy pontossággal?
- B9.** Egy henger alakú tartályba 37 700 liter vizet töltöttek, és így a folyadék felszíne 30 cm magasan van az alaplaptól számítva. Hány centiméter a tartály belső átmérője?
- B10.** Egy kocka nagyítása során a felszíne a 64-szeresére növekszik. Hányszorosára nő ugyanakkor a kocka térfogata?
- B11.** Egy háromszög oldalainak hossza 10 cm, 24 cm, valamint 26 cm. Derékszögű-e a háromszög középvonalai – mint oldalak – által alkotott háromszög? Válaszod indokold!
- B12.** Egészítsd ki a mondatokat a vonalakra írt szavakkal, kifejezésekkel vagy számokkal úgy, hogy igazak legyenek az állítások!
- a) A 28° nagyságú szög szinusza ugyanakkora, mint a _____ nagyságú szög koszinusza.
- b) A kör érintője és az érintési pontba húzott sugár _____.
- c) Ha két háromszög két-két szögének nagysága páronként egyenlő, akkor a háromszögek egymással _____.
- d) A tompaszögek koszinusza _____, mint 0.

FELADATOK II. RÉSZ

P1.

A $8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ sűrűségű nemesacélból készült kézi súlyzók egyik típusának markolata olyan forgáshenger, amelynek átmérője 28 mm. A súlyzó egésze tömör szerkezetű, és a súlyzóvégek szorosan illeszkednek a markolatra. A súlyzó teljes hossza 28 cm, ebből a markolat 18 cm hosszú. A súlyzó össztömege 10 kg.

- Határozd meg a henger alakú súlyzóvégek átmérőjének nagyságát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve!
- A kényelmesebb használat érdekében a súlyzó teljes felületét speciális, bőrbarát lakkréteggel vonják be. Mennyibe kerül egy ilyen súlyzó bevonása, ha mindenhol egyenletes vastagon vonják be, és az 1 dm^2 -re számolt réteg ára 80 Ft?



P2.

Egy szabályos nyolcszög oldalának hossza 12 egység.

- Számítsd ki a nyolcszög legrövidebb és leghosszabb átlójának hosszát!
- Hogyan aránylik egymáshoz a nyolcszögbe, valamint a nyolcszög köré írható kör területe?
- Egy ilyen nyolcszög alapú egyenes hasáb magassága 10 egység hosszúságú. Mekkora a hasáb térfogata?

P3.

Bendegúz egyik rajzórai feladatát nagyrészt vonalzó és körző segítségével készítette. Szabadkézzel csak a virág levelét rajzolta. A cserépes növény virágzatát egy 3 cm sugarú körben egy 255° középponti szögű körcikkkel formázta meg. A cserépedény alakját úgy alakította ki, hogy két, egy-egy 7 cm hosszúságú alapjával egymáshoz illesztett szimmetrikus trapézt rajzolt. Az alsó trapéz másik alapja 6 cm, a felső trapéz másik alapja 8 cm hosszúságú. Az alul lévő trapéz rövidebbik alapján lévő szöget 95° , a felül lévő trapéz rövidebbik alapján lévő szöget 105° nagyságúra szerkesztette.

- Mekkora nagyságú területet színezett be összesen, ha a virágzat, valamint a cserép színezésével készült el?
- Bendegúz később elárulta, hogy úgy választotta meg a rajzon a cserép méreteit, hogy az minél inkább hasonlítson az anyukája egyik kedvenc virágát tartó cseréphez. Felhasználta ugyanis, hogy a cserép olyan csonka kúpokból áll össze, amelyeknek a rajzon a tengelymetszetei jelennek meg negyedére kicsinyített formában. Hány liter virágföld fér a kedvenc virágot tartó cserépbe, ha azt éppen színültig töltik?



P4.

Egy gömb sugara 10 cm hosszúságú.

- Mekkora a gömb térfogatával megegyező térfogatú félgömb sugara?
- Mekkora a gömbközepptől 5 cm-re lévő síkmetszet területe?
- Milyen távolságban van a gömb középpontjától az a síkmetszet, amelynek feleakkora a kerülete, mint a gömb fő-körének kerülete?

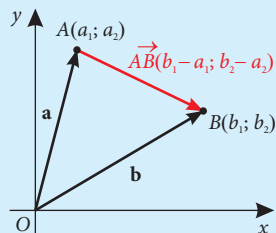
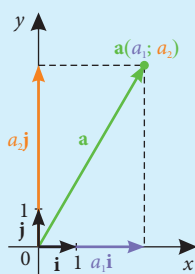
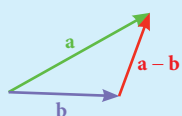
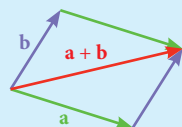
P5.

Az ABC háromszög BC oldalán úgy helyeztük el a P_1 és P_2 , valamint AC oldalán a Q_1 és Q_2 pontokat, hogy $BP_1 = P_1P_2 = P_2C$, valamint $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2C$. Tudjuk, hogy $AB = 6 \text{ cm}$.

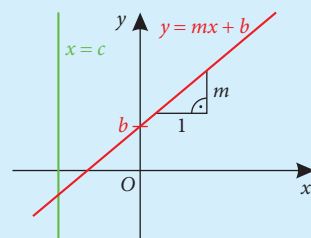
- Mekkora a P_1Q_1 , valamint P_2Q_2 szakaszok hossza?
- Hányad része az ABC háromszög területének a $Q_1Q_2P_2P_1$ trapéz területe?

VEKTOROK, KOORDINÁTAGEOMETRIA

D	Írányított szakasz	Írányított szakaszt kapunk, ha egy szakasz két végpontját megkülönböztetjük, egyik a kezdőpont, másik a végpont.
D	Vektor	Azonos irányú, azonos hosszúságú irányított szakaszok ugyanazt a vektort határozzák meg.
D	Vektor abszolút értéke	A vektor kezdőpontjának és végpontjának a távolságát a vektor abszolút értékének (a vektor hosszának) nevezzük.
D	Vektorok egyenlősége	Két vektor egyenlő, ha azok iránya megegyezik, és az abszolút értékük egyenlő.
D	Nullvektor	A nullvektor az a vektor, amelynek kezdő- és végpontja egybeesik, iránya tetszőleges. A nullvektor abszolút értéke 0.
D	Vektorok összege	Ha egy vektor ugyanazt az eltolást hozza létre, mint az a vektorral és b vektorral való eltolás egymásutánja, akkor ezt a vektort az a és b vektor összegének nevezzük.
D	Vektorok különbsége	A $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektor az a és b különbségvektora, ha az a vektor a és c vektor összege.
D	Vektor számszorosa	Az a vektor λ valós számmal vett szorzata a $\lambda \cdot \mathbf{a}$ vektor, amely az a vektorral párhuzamos, hossza az a hosszának $ \lambda $ -szerese, iránya az a irányával megegyezik, ha $0 < \lambda$; az a irányával ellentétes, ha $\lambda < 0$; tetszőleges, ha $\lambda = 0$ (ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$, vagyis a nullvektor).
D	Ellentett vektor	Két vektor egymás ellentettje, ha hosszuk egyenlő, irányuk ellentétes. Az a vektor ellentettje a $(-1) \cdot \mathbf{a}$ vektor, rövidebben $-\mathbf{a}$ vektor.
T	Vektor koordinátái	A síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben bázisvektoroknak nevezzük az origóból az (1; 0) pontba mutató i és a (0; 1) pontba mutató j egységvektorokat. A sík bármely a vektora egyértelműen felírható az i és j bázisvektorok segítségével $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ alakban. Ekkor az a koordinátái: $\mathbf{a}(a_1; a_2)$
T	Műveletek vektorokkal	$\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ vektorok, c valós szám: $\mathbf{a} + \mathbf{b} (a_1 + b_1; a_2 + b_2) \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} (a_1 - b_1; a_2 - b_2) \quad c \cdot \mathbf{a} (c \cdot a_1; c \cdot a_2)$
T	Vektor hossza	A derékszögű koordináta-rendszerben az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ vektor hossza: $ \mathbf{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
D	Pont koordinátái	Egy pont koordinátái megegyeznek az origóból a pontba mutató vektor (helyvektor) koordinátaival.
T	$\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái	Az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ pontok esetén $\overrightarrow{AB} (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$.
T	Két pont távolsága	Az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ pontok távolsága egyenlő az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszával: $AB = \overrightarrow{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$
T	Felezőpont	Az $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ végpontú szakasz felezőpontja: $F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$



D	Alakzat egyenlete	Egy alakzat egyenlete a síkban olyan x és y változókat tartalmazó egyenlőség (vagy egyenlőtlenség), melyet azoknak és csak azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a koordinátái tesznek igaz-zá, amelyek illeszkednek az alakzatra.
T	Egyenes egyenlete	Minden, az y tengellyel nem párhuzamos egyenes egyenle-te felírható $y = mx + b$ alakban, ahol m az egyenes mere-deksége (iránytangense), és az egyenes az y tengelyt a $(0; b)$ pontban metszi ($m \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$). Az y tengellyel párhuzamos egyenesek egyenlete $x = c$ alakú ($c \in \mathbf{R}$).
T	Merőlegesség, párhuzamosság	Két egyenes párhuzamos, ha meredekségük egyenlő, vagy ha párhuzamosak az y tengellyel. Két egyenes merőleges egymásra, ha meredekségeik szorzata -1 , vagy ha az egyik párhuzamos az x tengellyel, a másik párhuzamos az y tengellyel.
T	A kör egyenlete	Ha a kör középpontja $C(u; v)$, és sugara r , akkor a kör egyenlete: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$
M	Egyenesek metszés-pontja	Az egyenesek egyenletéből álló kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásai adják a közös pont koordinátáit. (Ha az egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor az egyeneseknek nincs közös pontja.)



KIDOLGOZOTT FELADAT

6.

Adottak az ABC háromszög csúcsai: $A(-5; 3)$, $B(-1; 0)$ és $C(4; 12)$.

- Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát!
- Számítsd ki a B csúcsnál lévő belső szög nagyságát!
- Írd fel az A csúcsból induló súlyvonal egyenesének egyenletét!

Megoldás

- a) Az oldalhosszak meghatározásához kiszámítjuk az oldalvektorok koordinátáit.

Ezek: $\overrightarrow{AB}(4; -3)$, $\overrightarrow{BC}(5; 12)$, valamint $\overrightarrow{AC}(9; 9)$.

Az oldalak hossza: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$, $BC = 13$, valamint $AC = 9\sqrt{2}$.

- b) A keresett szög (β) nagysága meghatározható a koszinusztétel segítségével.

$$(9\sqrt{2})^2 = 5^2 + 13^2 - 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot \cos \beta$$

$$-32 = -130 \cdot \cos \beta, \text{ amiből } \cos \beta \approx 0,2462$$

Egy olyan szög van a $]0^\circ; 180^\circ[$ intervallumban, amely megoldása ennek az egyenletnek: $\beta \approx 75,75^\circ$. A B csúcsnál lévő belső szög nagysága tehát $75,75^\circ$.

- c) A háromszög súlyvonalát egyértelműen meghatározza a háromszög egy csúcsa (ebben az esetben az A csúcs), és a csúcsal szemközti oldal (BC oldal) felezőpontja. A felezőpont koordinátái: $F(1,5; 6)$.

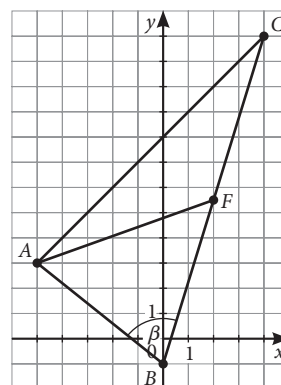
A súlyvonal meredeksége számolható az $\overrightarrow{AF}(6,5; 3)$ koordinátáiból: $m = \frac{3}{6,5} = \frac{6}{13}$

A súlyvonal $y = mx + b$ alakú egyenletébe helyettesítve a rá illeszkedő A pont koordinátáit, valamint a meredekség értékét, a $3 = \frac{6}{13} \cdot (-5) + b$ egyenlet adódik, amiből a b értéke számolható, így $b = \frac{69}{13}$.

A súlyvonal egyenlete: $y = \frac{6}{13}x + \frac{69}{13}$

Megjegyzés:

A feladat úgy is megoldható, hogy az $y = mx + b$ alakú egyenletbe a súlyvonalra illeszkedő A és F pontok koordinátáit helyettesítjük, és az így adódó ($3 = -5 \cdot m + b$ és $6 = 1,5m + b$), m és b ismeretleneket tartalmazó kétismeretlenes egyenletrendszert megoldjuk.



Az e egyenes meredeksége -3 , és az y tengelyt a $(0; 6)$ pontban metszi.

- Írd fel az egyenes egyenletét!
- Írd fel annak az f egyenesnek az egyenletét, amely merőleges e -re, és az x tengelyt a $(-5; 0)$ pontban metszi!
- Határozd meg az e egyenes és az $y = 2x - 9$ egyenletű g egyenes metszéspontjának koordinátáit!
- Az e egyenes a koordinátatengelyekkel együtt egy derékszögű háromszöget hoz létre. Mekkora ennek a háromszögnek a területe?
- Írd fel a d) részben leírt derékszögű háromszög Thalész-körének egyenletét! Számolással igazold, hogy az origó illeszkedik erre a körre!

Megoldás

a) A szokásos jelölésekkel: $m_e = -3$, $b = 6$, ezért az egyenes egyenlete $y = -3x + 6$.

b) Mivel az e és az f egyenesek nem párhuzamosak az y tengellyel, ezért akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha meredekségeik szorzata -1 , ezért az e egyenes m_e és az f egyenes m_f meredeksége: $m_e \cdot m_f = -1$, amiből $m_f = \frac{1}{3}$.

Az f egyenes az x tengelyt a -5 -ben metszi, vagyis az egyenesre illeszkedik az $A(-5; 0)$ pont. Az előbbi adatokkal az $y = mx + b$ alakú egyenletbe helyettesítéssel: $0 = \frac{1}{3} \cdot (-5) + b$ adódik, így $b = \frac{5}{3}$.

Tehát az f egyenes egyenlete: $y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{5}{3}$.

c) Az e és a g egyenesek metszéspontját jelöljük B -vel! A B pont koordinátáit az egyenesek egyenletéből álló,

$$\left. \begin{array}{l} e: y = -3x + 6 \\ g: y = 2x - 9 \end{array} \right\}$$

kétismeretlenes, elsőfokú egyenletrendszer megoldása adja.

Az egyenlő együtthatók módszerét használva, a két egyenlet különbsége $0 = 5x - 15$, amiből $x = 3$ adódik. Visszahelyettesítéssel számolható a másik ismeretlen értéke: $y = -3$.

A metszéspont tehát: $B(3; -3)$.

d) Az e egyenesnek az x tengellyel alkotott metszéspontja az egyenes egyenletéből az $y = 0$ helyettesítéssel számolható, így $0 = -3x + 6$ miatt $x = 2$. A tengelyekkel alkotott metszéspontokból adódóan a létrejött derékszögű háromszög befogóinak hossza 6 és 2 egység, ezért a háromszög területe $T = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6$ területegység.

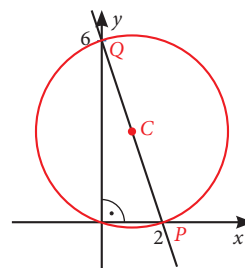
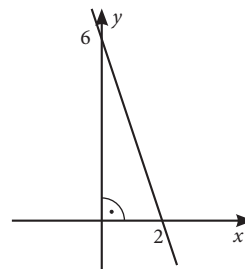
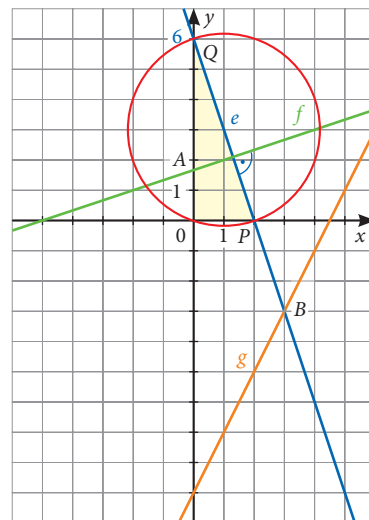
e) A derékszögű háromszög átfogója a Thalész-körének egy átmérője, ezért a kör egyik átmérőjének végpontjai az e egyenes tengelymetszetei, vagyis (az ábra jelöléseit használva) $P(2; 0)$ és $Q(0; 6)$. A kör C középpontja a PQ szakasz felezőpontja, így $C(1; 3)$, valamint sugarának hossza a PQ szakasz hosszának felével egyenlő. A PQ szakasz hossza a Pitagorasz-tétellel számolva: $PQ = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, vagyis a sugár hossza $r = \sqrt{10}$.

Az előbbieket felhasználásával a kör egyenlete: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$

Az origó koordinátáit a kör egyenletébe helyettesítve

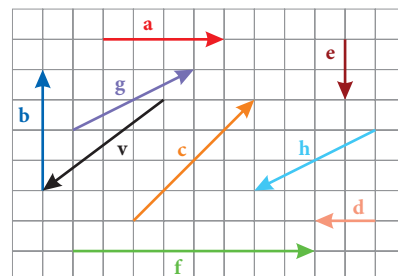
$(0 - 1)^2 + (0 - 3)^2 = 10$, amiből $10 = 10$ adódik, vagyis fennáll az egyenlőség.

Ezzel beláttuk, hogy az origó koordinátái kielégítik a kör egyenletét, tehát az origó rajta van a körön.



FELADATOK I. RÉSZ

- C1.** Határozd meg az $A(-3; 8)$ és $B(7; -2)$ végpontú szakasz felezőpontjának koordinátáit!
- C2.** Adottak az $\mathbf{a}(-3; 8)$ és $\mathbf{b}(7; -2)$ vektorok. Számítsd ki a $2\mathbf{a}$, az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, valamint a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ vektorok koordinátáit!
- C3.** Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a $C(-5; 4)$ pont, és a körvonal egyik pontja az origó!
- C4.** Milyen hosszú a PQ szakasz, ha $P(-6; 9)$ és $Q(-1; -3)$?
- C5.** Hol metszi az $y = 4x - 3$ egyenletű egyenes az x tengelyt?
- C6.** Adott az $e: y = 5x - 7$ és az $f: y = k \cdot x + 3$ egyenletű egyenes. Milyen k valós szám esetén merőleges egymásra a két egyenes?
- C7.** Válaszd ki, és jelöld aláhúzással a dőlten szedett szavak közül azt, amely igazzá teszi az állítást!
- Az $\overrightarrow{AB}$ vektorban a B pont a vektornak a kezdőpontja / végpontja.
 - Ha egy körnek és egy egyenesnek egy közös pontja van, akkor az egyenes a kört elkerüli / érinti / metszi.
 - Ha két vektor egymással párhuzamos, akkor egymásnak biztosan az ellentettjei / a skalárszorosai.
 - Az $x^2 + (y - 5)^2 = 100$ egyenletű kör középpontja illeszkedik a koordináta-rendszer x tengelyére / y tengelyére / origójára.
- C8.** Az $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$ egyenletű körvonalra illeszkedik-e a $P(0; -3)$ pont? Válaszod indokold!
- C9.** Az $ABCD$ négyzet $\overrightarrow{AB}$ oldalvektorát jelölje $\mathbf{b}$, és $\overrightarrow{AD}$ oldalvektorát jelölje $\mathbf{d}$. Legyen H a BC oldal B -hez közelebb lévő harmadolópontja. Állítsd elő az $\overrightarrow{AH}$ vektort a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ vektorok segítségével!
- C10.** Döntsd el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis!
- A: Két vektor összege lehet rövidebb az eredeti két vektor mindegyikénél.
- B: Ha két egyenes meredeksége egyenlő, akkor az egyenesek párhuzamosak egymással.
- C: Ha egy pont egyenlő távolságra van a két koordinátatengelytől, akkor a pont két koordinátája egyenlő.
- D: Egy vektor -3 -szorosának hossza az eredeti vektor hosszának 3 -szorosa.
- C11.** Írd fel az $m = -\frac{2}{3}$ meredekségű, $P(4; -2)$ ponton átmenő egyenes egyenletét!
- C12.** A rajzon lévő vektorok mindegyike rácspontból indul, és rácspontban végződik. Írd a pontok helyére egy-egy vektor betűjelét úgy, hogy helyesek legyenek az egyenlőségek!
- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \dots$
 - $\mathbf{e} - \mathbf{a} = \dots$
 - $\mathbf{b} = -2 \cdot \dots$
 - $\mathbf{a} = 0,5 \cdot \dots$



FELADATOK II. RÉSZ

- Q1.** A koordinátasík három helyvektora $\mathbf{a}(5; 4)$, $\mathbf{b}(-1; 2)$ és $\mathbf{c}(-6; -3)$.
- Rajta van-e az $\mathbf{a}$ végpontja az $e: 7x - 8y = 3$ egyenletű egyenesen?
 - Illeszkedik-e a $\mathbf{b}$ végpontja a $k: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36$ egyenletű körvonalra?
 - Melyik vektor hosszabb: az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vagy a $\mathbf{c} - \mathbf{a}$?
- Q2.** Tekintsük a koordináta-rendszer $A(-17; 9)$, $B(12; 11)$ és $C(7; -1)$ pontjait.
- Számítással igazold, hogy a háromszög C csúcsánál lévő szög derékszög!
 - Írd fel az AC oldal felezőmerőlegesének egyenletét!
 - Mekkora a háromszög és a háromszög köré írható kör területének aránya?
- Q3.** Adott az $e: 2x + 3y = 11$ egyenletű egyenes és a $k: (x - 6)^2 + (y + 9)^2 = 169$ egyenletű kör.
- Add meg a kör középpontjának koordinátáit!
 - Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a kör középpontjára, és merőleges az e egyenesre!
 - Hol metszi a kör az x tengelyt?
 - Határozd meg annak a háromszögnek a szögeit, amelyet a kör középpontja, valamint a kör x tengellyel alkotott metszéspontjai hoznak létre!
- Q4.** A sík két egyenese: $e: y = 2x + 11$ és $f: x + 2y = 7$.
- Számítással igazold, hogy a két egyenes merőleges egymásra!
 - Határozd meg a két egyenes metszéspontjának koordinátáit!
 - Tekintsd azokat a négyzeteket, amelyeknek két oldalegyenese az e és f egyenesek, és közös csúcsuk a két egyenes metszéspontja! Hány ilyen 6 egység oldalhosszúságú négyzet van? Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelyre illeszkednek ezen négyzetek középpontjai!
- Q5.** Egy túrázó csapat az indulási és érkezési helyük pozícióját a térképhez rögzített koordináta-rendszerben ábrázolta. A koordináta-rendszer egységei a valóságban 1 km-nek felelnek meg. Az indulási helyük a $P(3; 2)$ pontban, az érkezési helyük a $Q(11; 17)$ pontban volt, és a közbeeső utat egyenes vonal mentén tették meg.
- Hány kilométert haladtak, míg a P pontból a Q pontba jutottak?
- Másnap, a továbbhaladás előtt tanácskozni kezdtek: Aladár azt javasolta, hogy menjenek tovább ugyanebben az irányban, és tegyenek meg ugyanakkora távolságot, mint eddig. Béla azt mondta, hogy induljanak el az eddigi útirányra merőlegesen, a folyó irányába fordulva (a folyó a koordináta-rendszer x tengelye mentén folyik), és menjenek el egészen a folyó partjáig. Cecil azt szeretne volna, ha a folyó egy olyan pontjához jutnak el, ahonnan az eddig megtett PQ útjuk derékszög alatt látszik.
- Van-e vajon mindhármuk ötletének megfelelő érkezési pont a térképen?
Ha van ilyen pont, akkor határozd meg az egyes úti célok-nak megfelelő pontok koordinátáit!
Melyik esetben hány kilométert fognak megtenni a túra következő szakaszában?

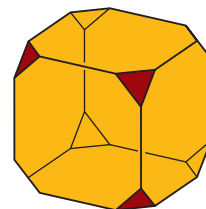


FELADATOK I. RÉSZ

D1. Egy derékszögű háromszög átfogója 25 cm, a hozzá tartozó magassága 6,72 cm hosszú. Mekkora a háromszög területe?

D2. Egy 18 cm sugarú körben megrajzoltunk egy 18 cm hosszú húrt. Mekkora a húr végpontjai által meghatározott körívekhez tartozó középponti szögek nagysága?

D3. Egy kocka mindegyik sarkáról levágunk egy olyan gúlát, amelynek az oldallapjai derékszögű háromszögek, és alapélei kisebbek, mint a kocka élének fele (lásd az ábrát). Hány lapja, hány csúcsa és hány éle van a keletkezett testnek?



D4. Számítsd ki a $2x + y = -4$ és a $3x - y = -1$ egyenletű egyenes metszéspontjának koordinátáit!

D5. Az 1 : 30 000 arányú térképen egy tó 2 cm^2 területű kék foltként van ábrázolva. Hány négyzetméter a valóságban a tó víztükrének a területe?

D6. Adott az $A(-3; 5)$ és $B(4; 2)$ pont.

a) Számítsd ki az AB szakasz hosszát!

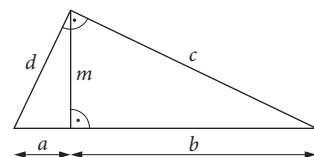
b) Add meg az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit!

D7. Döntsd el, hogy az alábbi összefüggések közül – amelyek a mellékelt ábrára vonatkoznak – melyik igaz, melyik hamis!

a) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

c) $c^2 + d^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $m^2 = c^2 - b^2$



D8. Hányszorosára, illetve hány %-kal változik az egyenes hasáb térfogata, ha

a) a magasságát felére csökkentjük, de az alaplaját változatlanul hagyjuk;

b) az alaplaját 0,5-szeresére kicsinyítjük, de a magasságát változatlanul hagyjuk;

c) a hasábot 1,2-szeresére nagyítjuk?

D9. Egy szabályos sokszög egyik külső szöge 15° -os. Hány oldalú ez a sokszög?

D10. Add meg a következő egyenesek meredekségét!

a) $y = -4x + 1,6$

b) $9x - 9y = 9$

D11. Egy deltoidnak van két derékszöge. Melyik kijelentés igaz az alábbiak közül?

A: Ez a deltoid egy négyzet.

B: Ennek a deltoidnak pontosan három derékszöge van.

C: Ebben a deltoidban a külső szögek összege 360° .

D: Ennek a deltoidnak van körülírt köre.

E: Ebben a deltoidban a belső szögek összege 360° .

D12. Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja $K(-12; 5)$, sugara pedig $r = 13$.

RÁADÁS

Az írásbeli érettségi vizsgálat tételei az 1892–93. isk. év végén. Budapest. VII. kerületi állami gymnasium. (Held Károly)

Egy henger-alaku rézcső 4 m. hosszú és 90 kg. súlyos; a cső nagyobbik átmérője 0,25 m.

Mily nagy a cső falának vastagsága?

(Forrás: KöMaL 1894. január, 14. oldal)

FELADATOK II. RÉSZ

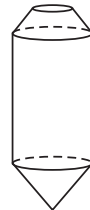
R1. Egy háromszög egyik oldala 8,5 cm hosszú, a rajta fekvő két szög 50° -os, illetve 66° -os.

- a) Mekkora szögben látszanak a háromszög oldalai a beírt kör középpontjából?
- b) Mekkora a háromszög másik két oldala?
- c) Mekkora a háromszög területe?

R2. 80 cm hosszúságúra darabolt, 10 cm átmérőjű fahengerekből olyan cölöpöket esztergálnak, amelyeknek a hengeres része ugyancsak 10 cm átmérőjű (lásd az ábrát).

Egy cölöp hossza 77 cm, a csonka kúp alakú rész 5 cm magas, a henger alakú rész 60 cm hosszú. A cölöp csonka kúp alakú végén lévő kör 5 cm átmérőjű. A cölöpök külső felületét vízálló lakkal vonják be. Hány m^2 felületet kell belakkozni, ha 15 000 darab cölöpöt gyártanak?

Válaszodat tíz négyzetméterre kerekítve add meg!



R3. Adott a síkban egy kör és rajta kívül egy P pont. A P pont 34 cm távolságra van a kör középpontjától. P -ből a körhöz érintőket húzunk, ahol az érintőszakaszok hossza 30 cm.

- a) Mekkora a kör sugara?
- b) Mekkora szöget zár be egymással a két érintő?
- c) Mekkora annak a síkrésznek a területe, amelyet a két érintőszakasz és az érintési pontokat összekötő rövidebb körív határol?

R4. Egy húrtrapéz átlói merőlegesek a trapéz egy-egy szára. A trapéz hosszabbik alapja 24 cm-es, egyik szöge 60° -os.

- a) Mekkora a trapéz köré írt kör sugara?
- b) Számítsd ki a trapéz területét!
- c) Számítsd ki a trapéz területét!

R5. Az ABC háromszög két csúcsa $A(-3; 5)$ és $C(5; 1)$, az AB oldal felezőmerőlegesének egyenlete $-x + 3y = 3$.

- a) Írd fel az AB egyenes egyenletét!
- b) Melyik pont az AB szakasz felezőpontja?
- c) Határozd meg a B pont koordinátáit!
- d) Írd fel a C -ből induló magasságvonal egyenletét!

RÁADÁS

Az írásbeli érettségi vizsgálat tételei az 1892–93. isk. év végén,
Besztercebánya. Kir. kath. főgymnasium. (Marcsiss János)

Valamely négyszög oldalai: 33 m., 63 m., 16 m., 56 m.

Az első és negyedik oldal közti szög egyenlő a második és harmadik oldal közti szöggel.

Mily nagyok a szögek, az átlók és a terület?

(Forrás: KöMaL 1893. december, 7. oldal)



FELADATOK II. RÉSZ

S1. Az $ABCD$ négyzet két szemközti csúcsa: $A(-3; -2)$ és $C(3; 2)$.

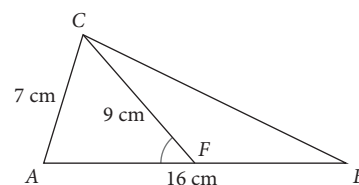
- Mekkora a négyzet oldala, kerülete, területe?
- Írd fel az AC egyenes egyenletét!
- Írd fel a négyzet beírható körének egyenletét!
- Írd fel a négyzet köré írható körének egyenletét!

S2. Egy paralelogramma egyik oldalának hossza 13 cm, átlóinak hossza 10 cm, illetve 24 cm.

- Igazold, hogy a paralelogramma átlói merőlegesek egymásra!
- Igazold, hogy ez a paralelogramma rombusz!
- Igazold, hogy az oldalhosszak négyzetének összege egyenlő az átlóhosszak négyzetének összegével!
- Mekkora ennek a rombusznak a szögei?
- Számítsd ki ennek a rombusznak a magasságát!

S3. Egy háromszög két oldalának hossza 16 cm, illetve 7 cm. A 16 cm-es oldalhoz tartozó súlyvonal hossza 9 cm.

- Mekkora a súlyvonal és a 16 cm-es oldal által bezárt szög?
- Mekkora a háromszög harmadik oldala?
- Mekkora területű részekre osztja a háromszöget a súlyvonal?

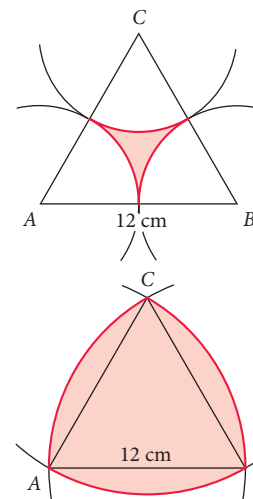


S4. Egy 10 cm belső átmérőjű, 15 dm magasságú forgáshenger alakú tartály tele van folyékony viasszal. A viaszból annyi 5 cm sugarú gömböt öntünk ki, ahányat csak lehet. (A fagyás során bekövetkező térfogatváltozástól eltekintünk.)

- Hány gömböt tudunk így készíteni?
- A henger térfogatának hányad része marad meg a gömbök elkészítését követően?
- Hogy aránylik egymáshoz a henger alakú tartály felszíne és a gömbök felszínének az összege?

S5. Az ABC háromszög szabályos, oldalhossza 12 cm, az AB oldalának felezőpontja F .

- Mekkora távolságra van az F pont a BC oldaltól?
- Az A , B , C pontok körül 6-6 cm sugarú kört rajzolunk. A háromszög területének mekkora része nem tartozik hozzá egyik körhöz sem?
- Az A , B , C pontok körül egy-egy 12 cm sugarú kört rajzolunk. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelynek pontjai mindhárom körhöz hozzátartoznak?



RÁADÁS

Az írásbeli érettségi vizsgálat tételei az 1892–93. isk. év végén, Budapest. Fő- és székvárosi IV. ker. főreáliskola. (Deme László)

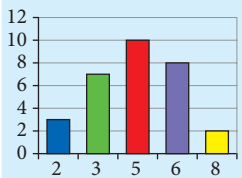
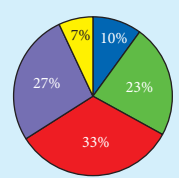
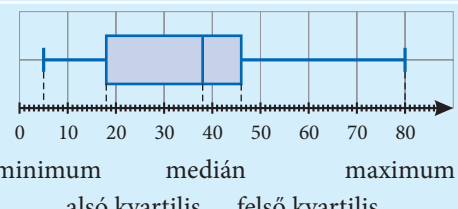
Három gömb köbtartalma úgy aránylik egymáshoz, mint $2 : 7 : 16$ és köbtartalmuk együttvéve 50 köbméter. Mily nagy ezeknek radiusa? [A radius latin szó, jelentése: sugár.]

(Forrás: KöMaL 1893. december, 8. oldal)

Statisztika, valószínűesszámitás

Az ezredforduló óta nagyon megnőtt a statisztika jelentősége. Az internet elterjedésével ugyanis rengeteg adat vált elérhetővé, a nagy teljesítményű számítógépek segítségével pedig kezelhetővé. A világban lévő óriási információmennyiség feldolgozásához, a körülöttünk zajló folyamatok megértéséhez, valamint számos elméleti és gyakorlati probléma kezeléséhez ma már nélkülözhetetlen a statisztika tudománya. A számszerű információk összegyűjtését, majd azok feldolgozását követően elemzéseket lehet elvégezni, és ezek alapján tudományos igényességgel következtetéseket lehet levonni. Sok esetben a statisztika által nyert információk biztosítanak kiinduló adatokat a valószínűesszámitás számára. A statisztika és a valószínűesszámitás kulcsfontosságú szerepet játszanak a tudományos felfedezésekben, az objektív mutatók alapján meghozható döntések és az előrejelzések létrehozásában.

FOGALMAK, TÉTELEK, MÓDSZEREK

D	Átlag	Az adatsokaság elemeinek az összegét elosztjuk az elemek számával: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$
D	Módusz	Az adatsokaságban a legtöbbször előforduló elem (lehet több módusz is).
D	Medián	Olyan szám, amelynél az adatok fele kisebb vagy egyenlő. Az adatsokaság nagyság szerinti felsorolásában páratlan elemszám esetén a középen álló szám, páros elemszám esetén a középen álló két szám átlaga.
D	Alsó kvartilis	Olyan szám, amelynél az adatoknak (közelítőleg) a negyede kisebb vagy egyenlő. Páros elemszám esetén a nagyság szerint sorba rendezett adatok alsó felének mediánja. Páratlan elemszám esetén a mediánt elhagyva az adatok alsó felének mediánja.
D	Felső kvartilis	Olyan szám, amelynél az adatoknak (közelítőleg) a negyede nagyobb vagy egyenlő. Páros elemszám esetén a nagyság szerint sorba rendezett adatok felső felének mediánja. Páratlan elemszám esetén a mediánt elhagyva az adatok felső felének mediánja.
D	Terjedelem	Az adatsokaság legnagyobb és legkisebb elemének különbsége.
D	Félterjedelem	Az adatsokaságban a felső kvartilis és az alsó kvartilis különbsége.
D	Szórás	Az adatsokaságban az adatok szóródását jellemző szám. Az adatoknak az átlagtól való eltéréseit vesszük, ezek négyzetének átlaga a szórásnégyzet, ennek négyzetgyöke a szórás. $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$ (az adatok: $x_1, x_2, \dots, x_n$, az átlaguk $\bar{x}$)
D	Relatív gyakoriság	Ha egy kísérletet n -szer végeztünk el, és k -szor kaptunk meg egy bizonyos kimenetelt, akkor az adott kimenetel gyakorisága k , relatív gyakorisága $\frac{k}{n}$.
	Diagramok	 Oszlopdiagram  Kördiagram  Dobozdiagram

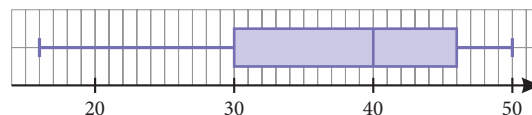
D	Elemi események	Egy véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei. <i>Például:</i> Ha dobunk egy fehér és egy fekete dobókockával, akkor egy elemi esemény az, hogy a feketével hatost, a fehérrel egyest dobunk.
D	Eseménytér	Az elemi események halmaza. <i>Például:</i> Ha két kockával dobunk, akkor a 36 elemi esemény halmaza.
D	Esemény	Az eseménytér egy részhalmaza. Az események között a biztos esemény az, amely biztosan bekövetkezik, a lehetetlen esemény az, amely nem következhet be. <i>Például:</i> Ha két kockával dobunk, akkor egy esemény például, hogy két dobás összege 7.
D	Események szorzata	Az A és a B események szorzata az az esemény, amikor az A és a B események közül mindkettő bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$
D	Események összege	Az A és a B események összege az az esemény, amikor az A és a B események közül legalább az egyik bekövetkezik. Jele: $A + B$
D	Komplementer esemény	Egy A esemény komplementere az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be. Jele: $\bar{A}$
D	Egymást kizáró események	Az A és B események egymást kizáró események, ha egyszerre nem következhetnek be. <i>Például:</i> Két kockával dobunk. Egymást kizáró események, hogy az egyik dobás hatos, illetve a két dobás összege 5.
	A valószínűség fontos tulajdonságai	Az A esemény valószínűségének jele $P(A)$. – Az A esemény $P(A)$ valószínűségére $0 \leq P(A) \leq 1$. – A biztos esemény valószínűsége 1, a lehetetlen esemény valószínűsége 0. – Ha A és B egymást kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$. – A komplementer esemény valószínűsége: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
D	A valószínűség klasszikus modellje	Ha az elemi események egyformán valószínűek, és számuk véges: $P(A) = \frac{\text{az } A \text{ eseményt adó elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$
	Geometriai valószínűség	Ha az események előfordulása egy geometriai mennyiséggel jellemezhető, akkor az esemény valószínűsége számolható úgy, hogy az adott eseményhez tartozó mennyiség mértékét osztjuk a teljes eseménytérhez tartozó ugyanezen mennyiség mértékével.
D	Független események	Az A és a B események függetlenek, ha $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. <i>Például:</i> Két kockával dobunk. Független események, hogy az egyik dobás hatos, illetve a másik dobás hatos.
D	Várható érték	A lehetséges kimeneteknek a valószínűségekkel súlyozott átlaga.
D	Visszatevés nélküli mintavétel	Olyan mintavétel, amely során, ha egy elemet kiválasztunk, akkor azt nem tesszük vissza, az nem választható ki újra. Ez történhet úgy is, hogy egyszerre veszünk ki több elemet.
D	Visszatevésees mintavétel	Olyan mintavétel, amely során minden kiválasztás pontosan ugyanazon elemek közül történik. Ha kiválasztunk egy elemet, akkor a következő választás előtt azt visszatesszük a többi közé.
T	Visszatevésees mintavétel (binomiális eloszlás)	Egy kísérletet n -szer megismétlünk, és megfigyelünk egy p valószínűségű eseményt (pl. visszatevésees mintavételt alkalmazunk). Annak a valószínűsége, hogy ez a p valószínűségű esemény az n kísérletből pontosan k -szor következik be: $P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
T	Visszatevés nélküli mintavétel	Adott N darab elemünk, melyek közül M darab rendelkezik egy bizonyos tulajdonsággal (és $N - M$ darab különbözik ettől). Visszatevés nélkül kiválasztunk n darab elemet. Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott elemek közül pontosan k darab rendelkezik az adott tulajdonsággal: $P(k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

1. Egy osztály 20 tanulója írt meg egy dolgozatot. A dolgozatban elért pontszámok:
 16; 20; 24; 28; 28; 32; 36; 37; 38; 39; 41; 42; 43; 44; 46; 46; 47; 48; 48; 50.
- a) Készíts dobozdiagramot az adatsokaságról!
- b) Sorold hat osztályba az adatokat (16–20; 21–25; ...; 46–50), majd az osztályközepekkel számolva határozd meg az adatok szórását!

Megoldás

- a) 16; 20; 24; 28; 28; 32; 36; 37; 38; 39; 41; 42; 43; 44; 46; 46; 47; 48; 48; 50

Az adatok nagyság szerint növekvő sorrendben vannak. A medián a 10. és a 11. adat átlaga, azaz 40. Az alsó kvartilis az 5. és a 6. adat átlaga, azaz 30, a felső kvartilis a 15. és a 16. adat átlaga, azaz 46. A dobozdiagramot meghatározó öt adat tehát 16; 30; 40; 46; 50.



- b) Érdemes táblázatba rendezni az adatokat. A táblázat első sora tartalmazza az osztályokat. Az osztályközép az osztályt határoló két szám átlaga. Ha kitöltjük a táblázat 3. sorát, akkor az ott szereplő gyakoriságok segítségével kiszámolható az adatok átlaga.

Osztály	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50
Osztályközép	18	23	28	33	38	43	48
Gyakoriság	2	1	2	1	4	4	6
$x_i - \bar{x}$							
$(x_i - \bar{x})^2$							

Osztály	
Osztályközép	
Gyakoriság	
$x_i - \bar{x}$	
$(x_i - \bar{x})^2$	

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 18 + 1 \cdot 23 + 2 \cdot 28 + 1 \cdot 33 + 4 \cdot 38 + 4 \cdot 43 + 6 \cdot 48}{20} = 38$$

Az átlag ismeretében tudjuk kitölteni a táblázat 4., majd az 5. sorát. Az 5. sor segítségével számolható ki az adatsokaság szórása.

Osztály	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50
Osztályközép	18	23	28	33	38	43	48
Gyakoriság	2	1	2	1	4	4	6
$x_i - \bar{x}$	–20	–15	–10	–5	0	5	10
$(x_i - \bar{x})^2$	400	225	100	25	0	25	100

$$\sigma^2 = \frac{2 \cdot 400 + 1 \cdot 225 + 2 \cdot 100 + 1 \cdot 25 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 25 + 6 \cdot 100}{20} = 97,5 \quad \text{ebből:} \quad \sigma \approx 9,87$$

Megjegyzések:

- Ha nem soroljuk osztályokba az adatokat, akkor a 20 adat átlaga 37,65, szórása pedig 9,70. Látható, hogy az osztályba sorolás után kapott eredmények csak kismértékben különböznek ettől. Sokszor nem ismertek az eredeti (nyers) adatok, csak az osztályba sorolt adatok, de az osztályba sorolás után kapott statisztikai jellemzők kellő pontossággal jellemezhetik az adatsokaságot.
- Az átlag és a szórás a zsebszámológép statisztika üzemmódjával is számolható.

2.

A táblázat két úszócsoport létszámát és az egyik távon elért időeredményeik átlagát tartalmazza. Mennyi az n , ha az összes időeredmény átlaga 73,28 s?

Megoldás

Az 1. csoportban az átlag 72,6, ezért az időeredmények összege $12 \cdot 72,6 = 871,2$.

A 2. csoportban az eredmények összege $n \cdot 74,3$.

Az összes eredmény átlagára ezért felírható: $73,28 = \frac{871,2 + 74,3n}{n + 12}$

Átrendezve: $73,28(n + 12) = 871,2 + 74,3n$

Ebből: $73,28n + 879,36 = 871,2 + 74,3n$

$$8,16 = 1,02n$$

$n = 8$, tehát a 2. csoportban 8 fő van.

	létszám	átlag (s)
1. csoport	12	72,6
2. csoport	n	74,3

3.

Egy játékban két dobókockával dobunk. Ha a két kockán különböző pontszám látható, akkor a nagyobbik érték számít, ha azonos pontszám, akkor a közös érték számít. Mennyi egy dobás várható értéke?

Megoldás

Érdemes kitölteni a 6×6 -os táblázatot, akkor megtudhatjuk, hogy melyik értékhez hány elemi esemény tartozik. Ennek segítségével felírható mind a hat eredmény valószínűsége. A várható értéket megkapjuk, ha ezekkel a valószínűségekkel súlyozva átlagoljuk az eredményeket.

Eredmény	1	2	3	4	5	6
Valószínűség	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

$$E = \frac{1}{36} \cdot 1 + \frac{3}{36} \cdot 2 + \frac{5}{36} \cdot 3 + \frac{7}{36} \cdot 4 + \frac{9}{36} \cdot 5 + \frac{11}{36} \cdot 6 = \frac{161}{36} \approx 4,47 \quad \text{A várható érték 4,47.}$$

4.

Az egyik iskolában a magyar irodalom érettségi tételei közül 6 kapcsolódik külföldi és 14 magyar szerzőhöz. Ha véletlenszerűen kiválasztunk a 20 tétel közül 5-öt, akkor mennyi a valószínűsége, hogy az 5 közül pontosan 3 kapcsolódik magyar szerzőhöz, ha a kihúzott tételeket

a) húzás után nem tesszük vissza;

b) minden húzás után visszatesszük?

Megoldás

a) Visszatevés nélküli mintavételről van szó. A kedvező esetek azok, amikor a 14 tételből választunk 3-at, és a 6 tételből 2-t. A lehetőségek száma $\binom{14}{3} \cdot \binom{6}{2}$. Az összes eset számát az adja meg, hogy hányféleképpen választhatunk 20 tételből 5-öt. Ez $\binom{20}{5}$. A valószínűség tehát:

$$P(\text{pontosan 3 magyar}) = \frac{\binom{14}{3} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{20}{5}} \approx 0,352$$

b) Visszatevéses mintavételről van szó, ekkor a binomiális eloszlás adja meg a valószínűséget. Mind az 5 húzás során $\frac{14}{20} = 0,7$ a valószínűsége, hogy a szerző magyar, és 0,3 a valószínűsége, hogy külföldi.

A kérdéses valószínűség tehát:

$$P(\text{pontosan 3 magyar}) = \binom{5}{3} \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^2 = 0,3087$$

5.

Egy üzemben meghibásodik egy gép, ezért minden termék 0,015 valószínűséggel selejtes lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy 200 termékből legfeljebb 2 lesz selejtes?

Megoldás

Minden egyes termék 0,015 valószínűséggel selejtes és 0,985 valószínűséggel jó. Mivel ugyanaz a helyzet ismétlődik, ezért a binomiális eloszlással számolhatunk. Legfeljebb 2 selejtes termék akkor lesz, ha a selejtes termékek száma 0; 1 vagy 2.

$$P(\text{legfeljebb 2 selejtes}) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,985^{200} + \binom{200}{1} \cdot 0,015 \cdot 0,985^{199} + \binom{200}{2} \cdot 0,015^2 \cdot 0,985^{198} \approx 0,049 + 0,148 + 0,225 = 0,422 \quad \text{A valószínűség tehát 0,422.}$$

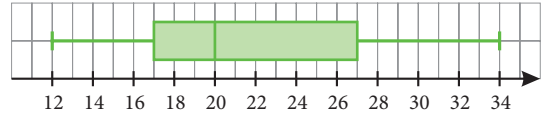
FELADATOK I. RÉSZ

- A1.** Határozd meg a táblázatban megadott adatsokaság móduszát, mediánját és átlagát!

adat	14	15	16	17	18	19	20
gyakoriság	1	3	4	3	2	1	1

- A2.** Ábrázold kördiagramon az adatsokaságot! Határozd meg az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögeket!
2; 4; 5; 5; 4; 2; 2; 5; 2; 4; 4; 4; 5

- A3.** Állapítsd meg a dobozdiagram alapján, hogy az adatsokaság félterjedelme hány százaléka a terjedelemnek!

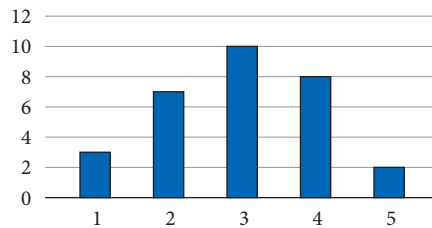


- A4.** Határozd meg a táblázatban megadott adatsokaság szórását!

adat	18	18,3	18,8
gyakorisága	5	3	2

- A5.** Egy csoportos utazáson 45 fő vesz részt, a résztvevők 3 településről jöttek: Pápáról, Zircről és Veszprémből. A 12 pápai résztvevő átlagéletkora 48 év. A 25 zirci átlagéletkora 42 év. A veszprémiek átlagéletkora 52 év. Mennyi a teljes csoportban az átlagéletkor?

- A6.** Oszlopdiagramon ábrázoltuk, hogy egy dolgozatra milyen osztályzatok születtek egy osztályban. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy dolgozatot, akkor mennyi a valószínűsége, hogy az eredménye legalább hármas?



- A7.** Négy barát, Kati, Laci, Móni és Nándi véletlenszerű sorrendben leülnek egymás mellé egy padra. Mennyi a valószínűsége, hogy a két lány nem egymás mellé ül?

- A8.** Mennyi a valószínűsége, hogy két szabályos dobókockával dobva a dobott számok összege 10?

- A9.** Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. A dobott számokat (a dobás sorrendjében) egymás után írva egy kétjegyű számot kapunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kapott szám osztható 3-mal?

- A10.** Egy szerencsekerek $\frac{1}{3}$ valószínűséggel áll meg a NYERT feliratnál, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a NEM NYERT feliratnál. Megpörgetjük 6-szor a szerencsekereket. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 forgatásnál kapunk NYERT feliratot?

- A11.** Egy szabályos pénzérmét négyszer egymás után feldobunk. A dobás eredményét az F és I betűkkel rövidítve sorban feljegyezzük (F = fej, I = írás). Legyen az A esemény az, hogy az első dobás fej, a B esemény az, hogy a dobások között több írás van, mint fej. A megfelelő dobássorozatok felsorolásával add meg az $A + B$ és az $A \cdot B$ eseményeket!

- A12.** Egy zsákban 3 piros és 5 sárga, tapintásra egyforma üveggolyó van. Véletlenszerűen húzunk egyszerre két golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy

- a) mindkét golyó piros; b) mindkét golyó sárga; c) egyik golyó sárga, a másik piros?

FELADATOK I. RÉSZ

B1. Egy 12 fős csoportban az átlagéletkor 24 év. A csoportban lévő 8 férfi átlagéletkora 25,5 év. Mennyi a csoportban lévő nők átlagéletkora?

B2. A táblázat egy nemzetközi cég éves bevételeit mutatja millió dollárban, földrészek szerinti bontásban. Ábrázold kördiagramon az adatokat! Határozd meg az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögek nagyságát!

Afrika	Amerika	Ázsia	Európa
5,5	6,7	13,2	19,6

B3. A 42; a ; 30 adatok csökkenő sorrendben követik egymást ($30 < a < 42$), és tudjuk, hogy a három adat átlaga 2-vel nagyobb, mint a mediánja. Határozd meg a értékét!

B4. 11 darab, nem feltétlenül különböző természetes számról a következőket tudjuk: a számok egyetlen módusza 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme 5. Adj meg 11 darab ilyen természetes számot!

B5. Egy zsákban 12 piros és 3 kék üveggolyó van. Néhány zöld színű üveggolyót tettünk a zsákba, így 0,3 lett annak a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen húzunk a zsákból egy üveggolyót, akkor piros golyót húzunk. Hány darab zöld golyót tettünk a zsákba?



B6. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott kétjegyű szám osztható 8-cal?

B7. Klári, Eszter és Hanna megbeszéltek egy találkozót egymással. Ha véletlenszerű sorrendben érkeznek a találkozó helyszínére, akkor mennyi a valószínűsége, hogy Klári hamarabb érkezik, mint Eszter?

B8. Egy számítógépes játékban 0,3 valószínűséggel sérülést szenved, aki a játéktér egy adott mezőjére lép. Ha a játék folyamán 8 alkalommal lép valaki arra a mezőre, akkor mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 alkalommal szenved sérülést?

B9. Egy szabályos pénzérmét háromszor egymás után feldobunk, és a dobás eredményét az F és I betűkkel rövidítve sorban feljegyezzük (F = fej, I = írás). Mennyi a valószínűsége, hogy az IFI szót kapjuk?

B10. Az egyik héten az ötöslottóban a következő öt szám nyert: 10; 12; 40; 45 és 48. Ha véletlenszerűen töltöttük ki a lottószelvényt, akkor mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 találatot értünk el? (Az ötöslottóban 90 szám közül sorsolnak ki 5-öt, tekintet nélkül a sorrendre.)

B11. Egy részvény árfolyama 4200 Ft. Egy elemző modellje szerint a részvény ára egy hét múlva 0,5 valószínűséggel emelkedni fog 210 Ft-tal, 0,2 valószínűséggel csökkenni fog 400 Ft-tal, és 0,3 valószínűséggel nem változik. Mennyi a részvény árfolyamának várható értéke egy hét múlva ezen modell szerint?

B12. Két dobókockával egyszer dobva mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege prím?



FELADATOK II. RÉSZ

P1. Tanulók egy statisztikai kísérlet során azt vizsgálták, hogy hány szál gyufa van egy-egy gyufásdobozban. Táblázatba foglalták a kapott adatokat.

Gyufaszálak száma	38	39	40	41	42	43
Gyakoriság	22	33	42	12	13	3

- Határozd meg a gyufaszálak számának szórását!
- Ha véletlenszerűen választunk egy gyufásdobozt, akkor mennyi a benne lévő gyufák számának várható értéke?
- A gyufagyártó cég előírása szerint a csomagolás megfelelő, ha a gyufák számának a 40-től való eltérése a dobozok 98%-ában kisebb, mint 5%. Megfelel-e ennek az elvárásnak a kísérlet eredménye?

P2. Egy középiskola évfolyamonként három osztályt indít: egy nyelvi, egy matematikai és egy informatikai tagozatot. Az egyes évfolyamokon az egyes osztályokba járó tanulók számát a táblázat szemlélteti:

	9. évfolyam	10. évfolyam	11. évfolyam	12. évfolyam	
Nyelvi tagozat	36	33	30	28	
Matematika tagozat	34	33	29	31	
Informatikai tagozat	35	34	34	30	

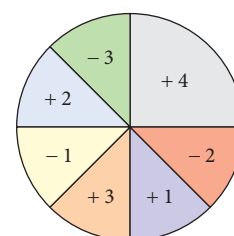
- Készíts kördiagramot, amely a diákok évfolyamonkénti eloszlását ábrázolja! Egy tizedesjegy pontossággal határozd meg a kördiagramon a középponti szögeket!
- Mennyi a valószínűsége, hogy két véletlenszerűen kiválasztott diák közül az egyik a 9., a másik a 11. évfolyamra jár?
- Mennyi a valószínűsége, hogy három véletlenszerűen kiválasztott diák mindegyike nyelvi tagozatra jár?

P3. Egy pénzérmét 12-szer feldobunk, a „fej” dobását F-fel, az „írás” dobását I-vel jelöljük. Egymás után felírjuk a dobások eredményét.

- Hányféle betűsort kaphatunk?
- Mekkora a valószínűsége, hogy csak fejből áll majd a sorozat?
- Mekkora a valószínűsége, hogy az első és az utolsó dobás is fej?
- Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan a dobások fele lesz fej, a másik fele pedig írás?

P4. Egy társasjátékban az ábra szerinti szerencsekerék megpörgetése mutatja meg, hogy előre léphetünk egyet, kettőt, hármat vagy négyet, vagy vissza kell lépünk egyet, kettőt vagy hármat. A szerencsekeréken a (+4)-es lépést jelentő körcikk 90°-os, a többi körcikk 45°-os.

- Ha egyszer megpörgetjük a szerencsekeréket, akkor mennyi az eredmény várható értéke?
- A célig még 10 mezőt kell haladnunk előre (a tizedikkel már célba érünk). Mekkora a valószínűsége, hogy a harmadik forgatás után beérünk a célba? (A célba nem kell pontosan belépni, túl is haladhatunk rajta.)



P5. Ismert tény, hogy az úgynevezett partidrogok (tudatmódosító szerek) fogyasztása esetén a balesetveszély fokozódik. Tegyük fel, hogy egy szombat éjszakán az országban 250 ezer fiatal vesz részt valamilyen partin, és ezeknek a fiataloknak a 15%-a fogyaszt valamilyen partidrogot. A partiról távozó fiatalok körében 0,0008 valószínűséggel következik be valamilyen közúti baleset, a tudatmódosító szert szedők között ez a valószínűség 0,0034.

Számítsd ki, hogy egy ilyen éjszakát követő hajnalon

- hány baleset következik be a statisztikai adatok szerint a partiról távozó fiatalok körében;
- hány tudatmódosító szer hatása alatt álló fiatallal történik közúti baleset;
- mekkora a valószínűsége annak, hogy egy közúti balesetet szenvedett fiatal tudatmódosító szert szedett!

FELADATOK II. RÉSZ

- Q1.** Egy népszavazáson arról dönthettek a szavazók, hogy városukban park, bevásárlóközpont vagy hangversenyerem épüljön; a három lehetőség közül mindenki egyet választhatott. A lakosság 54,6%-a szavazott, a szavazata mindenkinek érvényes volt. A szavazás eredményének néhány részletét életkori csoportok szerint mutatjuk be:

Korcsoport	A szavazók száma (ezer fő)	Parkra szavazott	Bevásárlóközpont szavazott	Hangversenyeremre szavazott
18–27	21	27%	57%	
28–37	32	48%		15%
38–47	28	15%	53%	
48–57	35		25%	25%
58–67	16	24%	50%	
68 évtől	45		30%	26%

- Hány lakosa van ennek a városnak?
- Melyik terv nyerte meg a népszavazást?
- Hányan szavaztak az egyes tervekhez az 57 évnél idősebbek közül?

- Q2.** Egy nagyvállalat vezetősége összesítést készített arról, hogy a dolgozói között az egyes korcsoportokon belül mennyi a felsőfokú végzettségű dolgozók aránya (relatív gyakorisága).

- Hányan dolgoznak ennél a vállalatnál?
- Töltsd ki az üresen maradt rovatokat!
- Mennyi a dolgozók között a diplomások relatív gyakorisága?
- Mennyi a diplomások relatív gyakorisága a 30 év alattiak között?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott dolgozó 30 és 49 év közötti diplomás?
- Ha véletlenszerűen kiválasztunk három dolgozót, akkor mennyi a valószínűsége, hogy ketten 30 és 49 év közöttiek, és egyikük 60 évnél idősebb?

Életkor	Létszám	A diplomás dolgozók	
		relatív gyakorisága	gyakorisága
20 év alatt	420	0	
20–29	3645	0,75	
30–39	5280	0,53	
40–49	7013	0,32	
50–59	4339	0,42	
60 évtől	2106	0,95	

- Q3.** **a)** Határozd meg a táblázatba foglalt adatsokaság átlagát és szórást!
- b)** Készíts dobozdiagramot az adatsokaságról!
- c)** Ha véletlenszerűen kiválasztunk az adatsokaság elemei közül 8 adatot, akkor mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb két adat kisebb, mint 4,4?

Adat	4	4,3	4,5	4,8	5
Gyakoriság	2	4	9	7	3

Q4. (Érettségi feladat, 2022) Andrea és Balázs kockarulettet játszanak. Egy játék abból áll, hogy két szabályos dobókockával egyszerre dobnak. A dobás előtt a játékszelvényen megadott öt eseményre lehet fogadni úgy, hogy a játékosok minden játék előtt beírják a tétjeiket a játékszelvény megfelelő oszlopába. A tétként feltett pontokat levonják a játékos pontszámából. A szelvényen látható az egyes eseményekre a nyereményszorzó is, ami megmutatja, hogy a tétként feltett pontok hányszorosát kapják meg nyereményként, amennyiben az esemény bekövetkezik.

A játékosok 100 ponttal indulnak. A lenti ábrán Andrea játékszelvényét látjuk. Az 1. játékban 10-10-10 pontot tett fel három eseményre, és ezek után az 1 és 4 számokat dobták a kockákkal. Andrea az első téttel nem nyert, de a másik kettővel $3 \cdot 10$, illetve $2 \cdot 10$ pontot nyert. Összesen 30 pontot tett fel, és 50 pontot nyert, tehát az 1. játék után 120 pontja lett, ennyivel kezdi a 2. játékot.

ESEMÉNY	nyereményszorzó	Tétek		
		1. játék	2. játék	3. játék
A: két páros számot dobunk	4	10		
B: az egyik szám páros, a másik páratlan	3	0		
C: a számok összege kisebb, mint 6	3	10		
D: a számok szorzata páros	2	10		
E: dobunk 6-ost	3	0		
Összes tét		30		

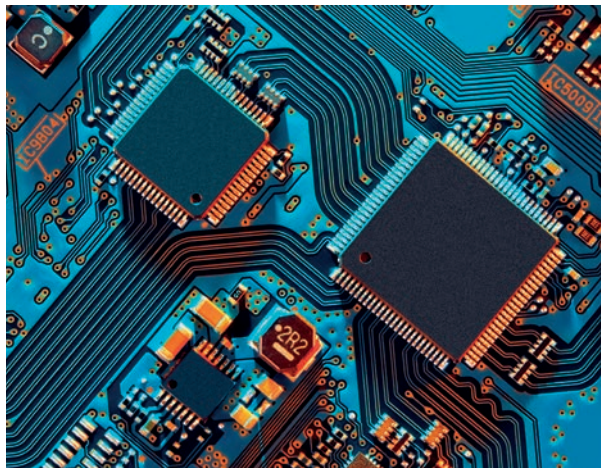


nyeremény	50		
pontszám a játék után	120		
dobott számok	1 és 4		

- a) A 2. játékban Andrea ugyanerre a három eseményre fogadott 20-20-20 ponttal, és mindhárom tétjével nyert. Melyik számokat dobták a 2. játékban, és mennyi lett Andrea pontszáma a 2. játék után?
- b) A 3. játékban Andrea az első három eseményre fogadott 10-10-10 ponttal, de egyikkel sem nyert. Melyik számokat dobhatták a 3. játékban?
- c) Balázs az egyik játékban az A, a D és az E eseményre fogadott összesen 70 ponttal, és mindhárom tétjével nyert. Az E eseményre éppen kétszer annyi tétet tett, mint az A-ra. Hány ponttal fogadott Balázs az A eseményre, ha összesen 200 pont lett a nyereménye? Melyik számokat dobhatták ebben a játékban?
- d) Egy másik napon már három, különböző színű szabályos dobókockával dobtak egyszerre. Számítsd ki annak az eseménynek a valószínűségét, hogy a dobások között előfordul az ötös dobás!

Q5. Egy gépsoron integrált áramköröket gyártanak. A tapasztalat szerint a gépsoron gyártott áramkörök esetén 0,005 annak a valószínűsége, hogy egy legyártott áramkör hibás. A minőség-ellenőrzés során a nagyon sok alkatrész közül 100 alkalommal választanak ki egy-egy darabot.

- a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a 100 alkalom közül egyszer sem találnak selejteset?
- b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a 100 alkalom közül legalább egy selejtes darabot találnak?
- c) Hány alkalommal kell megismételni a mintavételt, ha azt szeretnénk, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik darab selejtes, nagyobb legyen, mint 0,5?



Próbaérettségi-feladatsorok

A középszintű matematika érettségi feladatsor két részből, ennek megfelelően két feladatlapból áll.

ELSŐ FELADATLAP (I.)

- Rendelkezésre álló idő: 45 perc
- Elérhető pont: 30 pont
- Feladatok száma: általában 12
- Ha külön felszólítás nem írja, akkor nem kell részletezni és indokolni a feladatok megoldását.
- A feladat végeredményét vagy a választ be kell írni az előre megadott üres keretbe.
- A szürkített téglalapba nem szabad írni semmit, azt a javító tanár tölti ki.
- Néhány esetben hozzáteszi a feladat szövege, hogy „Megoldását részletezze!” vagy „Indokolja a választ!”, ekkor az indoklást, illetve a számítás menetét is le kell írni.

	2 pont	
--	--------	--

	2 pont	

MÁSODIK FELADATLAP (II.)

- Rendelkezésre álló idő: 135 perc
- Elérhető pont: 70 pont
- A feladatlap 6 feladat szerepel, amely további két részre oszlik.
- A II. A részben 3 feladat szerepel.
- A II. B részben 3 feladat szerepel, amelyből 2-t kell megoldani. Neked kell eldönteni, hogy melyik 2 feladatot választod. Az értékelésnél csak ez a 2 feladat vehető figyelembe.
- Annak a feladatnak a sorszámát, amelyet kihagysz, be kell írni a feladatlap 3. oldalán az erre kijelölt üres négyzetbe.
- A feladatok rendszerint több alpontból állnak. Ezek a részfeladatok akkor is megoldhatók, ha az egyik részfeladatot nem sikerül megoldani. Az egyes részfeladatok eredménye nem szükséges a következő alpontok megoldásához – néhány esetben azonban rávezető lépésként is funkcionálnak, és segítséget jelentenek a következő részfeladatokhoz.
- Minden feladat után szerepel az is, hogy arra a feladatra, azon belül az egyes alpontokra hány pontot lehet kapni. Ebbe a részbe nem szabad beleírni, ezt a javító tanár tölti ki. Támpontul szolgálhat azonban a feladat nehézségét illetően.

A B részben kitűzött három feladat közül csak kettőt kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.

a)	3 pont	
b)	5 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	12 pont	

Használható segédeszközök: zsebszámológép, függvénytáblázat, körző, vonalzó, szögmérő. A zsebszámológép nem lehet olyan, amely alkalmas szöveges adatok tárolására és megjelenítésére.

- Ismerd meg a zsebszámológépedet!
- Lapozd végig, tanulmányozd a négyjegyű függvénytáblázatokban a matematikai ismereteket, azonosságokat, tételeket bemutató részt!

1. FELADATSOR

I. rész

1. Egy számtani sorozat második tagja -42 ; differenciája 3 . Mennyi az első tíz tag összege?

2 pont

2. Hány éle van annak az ötpontú gráfnak, amelyben minden pontnak 2 a fokszáma?

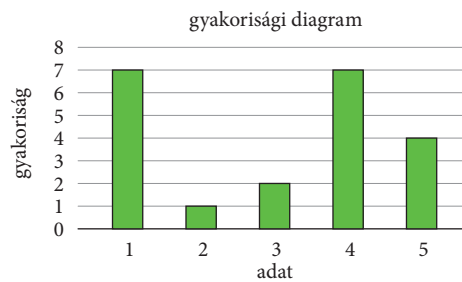
2 pont

3. A $[0; 10]$ intervallumban véletlenszerűen kiválasztunk egy valós számot. Mennyi a valószínűsége, hogy a szám közelebb van a 3 -hoz, mint a 9 -hez?

2 pont

4. Állapítsd meg az ábrán lévő diagrammal megadott adatsor átlagát, mediánját és móduszát!

3 pont



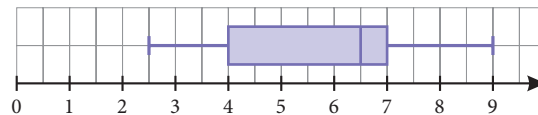
5. Egy sportcipő eredeti ára $35\,990$ Ft. A nyár végi árleszállításon 12% -os kedvezménnyel árusítják. Hány forint így a cipő? Az eredményt tízesekre kerekítve add meg!

2 pont

6. Egy villanypózna magasságát szeretnénk megmérni. Az internetről megtudtuk, hogy a mai napon, delelőkor a nap 40° -os szögben süt (a napsugárnak a vízszintessel bezárt szöge 40°). Mérés alapján megállapítottuk, hogy az oszlop árnyéka $6,7$ méter. Milyen magas az oszlop? A választ méterben, egy tizedesjegyre kerekítve add meg!

3 pont

7. Az ábrán lévő dobozdiagram egy minta adatainak eloszlását szemlélteti. Határozd meg a diagram alapján a minta elemeinek



3 pont

- a) mediánját;
- b) alsó és felső kvartilist;
- c) minimumát és maximumát!

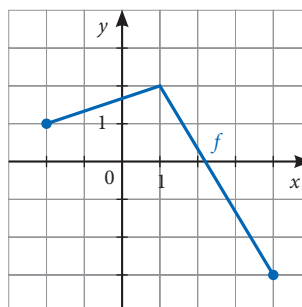
8. Hány olyan tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, amely 4 jegű, 5 -tel osztható, és minden számjegye különböző?

3 pont

9. Az ábrán az f függvény grafikonja látható.

- a) Rajzold meg az $|f|$ függvény grafikonját!
- b) Határozd meg az $|f|$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

3 pont



10 . Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{a; b; c; d; e; f; g\}$, $A \setminus B = \{e; g\}$, és $A \cap B = \{a; b\}$. Hány eleme van a B halmaznak? Válaszod indokold!

3 pont

11 . Mennyivel nagyobb az 1 egység sugarú gömb felszíne, mint az 1 egység oldalélű kocka felszíne?

2 pont

12 . Válaszd ki az alábbi állítások közül minden olyan állításnak a betűjelét, amelyik az A állítás tagadása!

2 pont

A = Minden kutya ugat.

B = Nem minden kutya ugat.

C = Nincs olyan kutya, amelyik ugat.

D = Van olyan kutya, amelyik nem ugat.

E = Egyetlen kutya sem ugat.

II. rész „A”

13 . a) Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán! $\sqrt{4x + 13} = 2x + 5$

6 pont

b) Melyek azok az egész számok, amelyek kielégítik a $-x^2 + 5x > 0$ és az $x^2 - 0,5x - 3 \leq 0$ egyenlőtlenséget is?

7 pont

14 . Az $ABCD$ paralelogramma három csúcsa: $A(-6; 0)$, $B(2; 3)$, $C(-2; 8)$.

a) Számítsd ki a D csúcs koordinátáit!

2 pont

b) Írd fel a C pontra illeszkedő, 0,25 meredekségű egyenes egyenletét!

2 pont

c) Határozd meg a paralelogramma területét egy tizedesjegy pontossággal!

2 pont

d) Mekkora annak a kúpnak a térfogata, amelynek palástját az AB szakasz x tengely körüli megforgatásával kapjuk?

4 pont

15 . Egy biciklistáborban mindennap háromféle túrát indítottak. A „kis” túrára leginkább a kezdő bicajosok jelentkeztek, vagy azok, akik az előző nap nagyon elfáradtak. A „közepes” túrán már nagyobb távolságokat kellett megtenni, és nehezebb terepen, a „nagy” túrán indulóknak már napi 100–110 km-t is kellett tekerni, nem egyszer dimbes-dombos vidéken. 54 olyan bicajos volt, aki legalább egyszer vállalta a „nagy” túra kihívását, és 84-en vettek részt „kis” túrán a tábor alatt. A „kis” túrán vagy „nagy” túrán részt vevőknek a 15%-a „nagy” túrán és „kis” túrán is részt vett.

a) Hány olyan biciklis volt, aki részt vett a „kis” túrán, de a „nagy” túrán nem?

5 pont

A táborban volt 10 olyan ember, aki mindhárom túrát kipróbálta, és 12 olyan, aki csak a „közepes” túrát. A „közepes” túrázók közül 70-en más túrán is részt vettek. A „közepes” túrán indulóknak a fele a „kis” túrán is indult.

b) Hány olyan résztvevője volt a tábornak, aki a „közepes” túrán és a „nagy” túrán is részt vett?

7 pont



II. rész „B”

- 16.** Egy fiúkból álló 10 fős baráti társaság tagjainak lábméreteiről a következőket tudjuk: Aladár 42, Brúnó 41, Cingár 44, Dönci 42, Elemér 43, Furfang 42, Guszti 43, Huncut 42, Icurka 36. Jankó lábmérete nem ismert.

a) Határozd meg Jankó lábának nagyságát, ha tudjuk, hogy 41,8 a tíz fiú lábméretének átlaga!

3 pont

b) A tíz fiú lábméretének ismeretében határozd meg, mennyi a lábméretnek mediánja!

2 pont

A tíz ember nevét felírjuk egy-egy papírra, a papírokat bedobjuk egy kalapba. Véletlenszerűen húzzuk ki a neveket a kalapból.

c) Állítsd növekvő sorrendbe az alábbi események valószínűségét!

5 pont

A: Először egy legfeljebb negyvenes lábméretű ember nevét húzzuk ki a kalapból.

B: A kalapból kihúzott nevek alapján, balról jobbra sorba állítva az embereket növekvő lábméret szerint sorakoznak fel.

C: Négy név véletlenszerű kiválasztása esetén pontosan 2 embernek lesz közülük 42 a lábmérete.

d) Legalább hány nevet válasszunk ki a kalapból, hogy biztosan legyen a nevek között magánhangzóval kezdődő?

2 pont

A felsoroltak közül Icurka a legfiatalabb, Cingár a legidősebb.

e) Számítsd ki, hány éves Icurka és Cingár, ha tudjuk, hogy kettejük életkorának különbsége 16 év, és tudjuk, hogy 4 év múlva életkoraik hányadosa 2,6 lesz!

5 pont

- 17.** Egy váza alakja szabályos ötszög alapú egyenes hasáb, amelynek alapélei 12 cm-esek, magassága pedig 18 cm.

a) Hány dl víz fér a vázába?

7 pont

A vázába vizet töltünk 12 cm magasságig, majd belejtünk egy 6 cm átmérőjű, tömör gömböt, ami teljesen elsüllyed a vízben.

b) Mennyivel emelkedik meg a vízszint?

6 pont

A 25 °C-os szobában a vázába 50 °C-os vizet töltünk. A víz elkezd hűlni, hőmérséklete t perc múlva a következő összefüggés alapján számolható: $T(t) = 25 + 25 \cdot k^t$, ahol t az eltelt idő percben mérve, k a lehűlési tényező ($k < 1$), amely egy mértékegység nélküli arányszám, T pedig a víz hőmérséklete °C-ban mérve. Mérésünk alapján a víz hőmérséklete 15 perc elteltével 35 °C-os lett.

c) Mekkora a k értéke? A választ két tizedesjegy pontossággal add meg!

4 pont

- 18.** Egy cég 3 000 000 Ft hitelt vesz fel egy banktól. A hitelt 4 év alatt, 4 egyenlő részletben törlesztik, tehát évente egyszer fizetnek törlesztőrészt. A hitel kamata évi 10%.

a) Mekkora a hitel törlesztőrésze?

9 pont

A felvett 3 000 000 Ft-ból a cég egy új gépet vásárol. A gép értéke az amortizáció miatt minden évben az előző évi értékének a 15%-ával csökken.

b) Jelölje a gép értékét az egymás utáni években a_1 , a_2 és a_3 ($a_1 = 3\,000\,000$). Hány százalékkal több a_1 értéke, mint a_3 ?

3 pont

c) Hányadik évben csökken a gép értéke 1 000 000 Ft alá?

5 pont

2. FELADATSOR

I. rész

1. Arnold és hat barátja moziba mennek. Hányféle sorrendben ülhetnek egymás mellé a lefoglalt 7 helyen, ha Arnold középen ül?

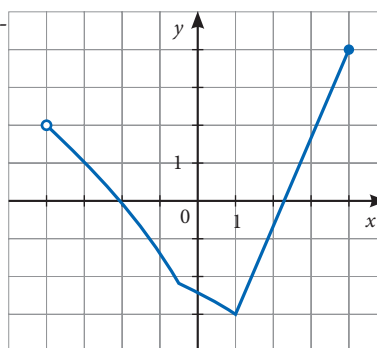
2 pont

2. Határozd meg annak a derékszögű trapéznek a területét, amelynek alapjai 10, illetve 22 cm hosszúak, a derékszögű szár pedig 5 cm hosszú!

2 pont

3. Állapítsd meg az ábrán lévő, grafikonjával adott függvény szélsőértékeinek típusát, értékét és helyét!

2 pont



4. Milyen számjegyeket írhatunk a $\overline{367x2y}$ hatjegyű szám ismeretlen számjegyeinek helyére ahhoz, hogy a szám osztható legyen 12-vel? Határozd meg az összes lehetséges $(x; y)$ rendezett számpárt!

3 pont

5. Határozd meg az alábbi állítások logikai értékét!

A: Van középpontosan szimmetrikus háromszög.

3 pont

B: Minden szabályos sokszög tengelyesen szimmetrikus valamelyik átlójára.

C: Van középpontosan szimmetrikus trapéz.

6. Egy részvény ára április 30-án 3670 Ft. A részvények ára nagyon sok összetevőtől függhet. Egy elemző szerint ennek a részvénynek az ára három hónap múlva 0,2 valószínűséggel 3690 Ft, 0,1 valószínűséggel 3790 Ft, 0,4 valószínűséggel 3680 és 0,3 valószínűséggel 3650 Ft lesz. Ezen becslés adatai alapján három hónap múlva mennyi a részvény árának várható értéke?

3 pont

7. Két dobókockával dobunk. Legyen az A esemény az, hogy a dobott számok összege 4, a B esemény pedig az, hogy az egyik dobás eredménye 3. A táblázat első oszlopában két dobás eredményét látod. Jelöld a táblázatban az *igen*, illetve a *nem* szavak beírásával, hogy bekövetkezik-e az $A + B$, illetve az $A \cdot B$ esemény az adott esetekben!

3 pont

	Bekövetkezik-e az $A + B$ esemény?	Bekövetkezik-e az $A \cdot B$ esemény?

8. Egy szabályos dobókockát kétszer feldobunk, és a kapott számokat egymás után írjuk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy 39-nél nagyobb, hárommal osztható számot kapunk? Válaszod indokold!

3 pont

9. Milyen hosszú az $A(-4; 2)$, $B(3; -7)$ és $C(1; -10)$ csúcsokkal adott háromszög AC oldalával párhuzamos középvonala?

2 pont

10. Az $ABCD$ téglalap oldalai 7 cm és 3 cm hosszúak, az ehhez hasonló $A'B'C'D'$ téglalap területe pedig 42 cm². Add meg egy tizedesjegyre kerekítve, hogy hány cm az $A'B'C'D'$ téglalap rövidebb oldala! Írd le a számítás lépéseit!

2 pont

11. Amikor a víz megfagy, térfogata $\frac{1}{11}$ -ed részével megnő. Hányad részével csökken a jég térfogata olvadáskor?

2 pont

12. Bizonyítsd be, hogy az alábbi egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása!
 $(x - 2)^2 + |x - 1| = 0$

3 pont

II. rész „A”

13. Nyaranta Révfülöp és Balatonboglár között kerül sor a Balaton-átúszásra. Mintegy tízezer ember ússza át a Balatont, és teszi meg a kb. 5,2 km-es távolságot. A két település egyébként is népszerű kirándulóhely. Sokan keresik fel a révfülöpi kiindulási hely kilátóját a Fülöp-hegyen, illetve a boglári hegy csúcsán a Xantus János Gömbkilátót. A két kilátó távolsága közelítőleg 6 km.
- 1998-ig visszamenőleg elérhetők az átúszás legérdekesebb statisztikai adatai az interneten. Az alábbi táblázatban a 2004–2020 közötti időszak legfiatalabb és legidősebb átúszóit tüntettük fel nemek szerint (2005-ben és 2010-ben a sorozatos rossz idő miatt nem tartották meg az átúszást).



	2004	2006	2007	2008	2009	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Legfiatalabb női úszó	9	8	7	8	7	9	8	8	9	8	8	6	8	6	8
Legfiatalabb férfi úszó	6	7	8	8	8	9	8	8	8	8	7	7	7	7	8
Legidősebb női úszó	69	72	73	74	73	77	78	76	80	78	79	80	81	82	75
Legidősebb férfi úszó	77	79	87	77	78	79	82	82	83	84	85	82	83	82	83

- a) Készíts gyakorisági táblázatot a legfiatalabb női úszók életkoráról!
- b) Határozd meg a mediánt, az átlagot és a módot a legidősebb férfi úszó kategóriában!
- c) Készíts dobozdiagramot a legidősebb női úszó kategória adatairól!
- d) Milyen messze van Fonyód a Fülöp-hegyi kilátótól, ha tudjuk, hogy a Gömbkilátó 9 km-re van Fonyódtól, és a Fülöp-hegyet Fonyóddal összekötő egyenes 50° -os szöget zár be a Fülöp-hegyet a Gömbkilátóval összekötő egyenessel?

2 pont

3 pont

3 pont

4 pont

14. Az egyetem egyik irodája előtt 6 diák várakozik: Anna, Béla, Csaba, Dénes, Elek és Fanni.

- a) Megkérdezték őket, hogy a jelenlévők között kinek hány ismerőse van. Ezeket a válaszokat kapták: 2; 3; 3; 2; 1 és 2. Bizonyítsd be, hogy ezek a válaszok nem teljesülhetnek egyszerre (tehát legalább egyikük tévedett). (Feltesszük, hogy az ismeretség kölcsönös.)
- b) Hányféle sorrendben érkezhetnek az iroda elé, ha egyesével érkeztek, és tudjuk, hogy Anna előbb jött, mint Béla?
- c) A 6 várakozó ember közül véletlenszerűen kiválasztunk 3 főt. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy lány van a kiválasztott 3 diák között?

3 pont

4 pont

5 pont

15.

Andrásnak tavaly több volt a fizetése, mint Bélának. András 11 havi fizetése volt annyi, mint Béla egész éves keresete. Idén január elsejétől mindketten fizetésemelést kaptak. A szerződésük szerint idén január elsején és innentől kezdve minden év január elsején egy adott százalékkal emelkedik a fizetésük. Így Andrásnak 2%-kal, míg Bélának 3%-kal nő minden év január elsején a fizetése.

- a) Ha megmarad ez a növekedési ütem, akkor hány év múlva fordul elő először, hogy Béla fizetése nagyobb lesz, mint Andrásé?
- b) András cégénél 26-an dolgoznak, a dolgozók átlagfizetése 293 000 peták. Felvesznek a céghez egy informatikust 352 000 peták és egy gazdasági ügyintézőt 333 000 peták fizetéssel. Mennyi lesz ekkor a fizetések átlaga a cégénél?

7 pont

5 pont

II. rész „B”

16.

Körbe akarjuk biciklizni a Balatont. A Balatoni Körút hossza kb. 210 km. Úgy tervezzük, hogy minden nap 10 km-rel többet teszünk meg, mint az előző napon.

- a) Hány km-t tekerjünk első nap, ha 6 napra tervezzük a túrát?
- b) Hány napig fog tartani a kör, ha első nap 60 km-t tekerünk?

3 pont

3 pont

Egy másik baráti társaság is körbetekeri a Balatont. Ők az alapján tervezik meg az utat, hogy melyik településen találunk maguknak kedvező áron szálláshelyet. Révfülöpről indulva az általuk kiszemelt lehetséges szállások közti távolságok a következők: Révfülöp – 32 km – Balatonfüred – 31 km – Balatonkenese – 41 km – Balatonföldvár – 46 km – Balatonmária-fürdő – 28 km – Balatongyörök – 32 km – Révfülöp. Hányféle út lehetséges, ha Révfülöpről indulnak, és egy nap

- c) legfeljebb 70 km-t;
- d) legalább 70 km-t;
- e) legfeljebb 90 km-t

3 pont

3 pont

5 pont

akarnak tekerni, valamint nem feltétel, hogy minden szálláshelyen éjszakázniuk kell?

17.

Bimbó, a tehén egy – síknak tekinthető – réten legelészik. Tőle északra 9 méterre álldogál Riska, a másik tehén.

Riskától keleti irányban, ugyanakkor Bimbótól 15 méterre heverészik Kócos, a puli kutya.

Helyezd el egy derékszögű koordináta-rendszerben az állatokat jelző R ; B ; K (rendre Riska; Bimbó; Kócos) pontokat úgy, hogy R legyen az origóban, B az ordinátatengely negatív felén, valamint K az abszcisza-tengely (x tengely) pozitív ágán! (Tekintsük ilyen szempontból pontszerűnek az állatokat. Észak az y tengely pozitív irányában, kelet az x tengely pozitív irányában van.)

- a) Határozd meg az említett állatok helyének koordinátáit rendezett valós számpárokkal, ha az egységet egy méternek tekintjük!
- b) Az előbbi koordináták figyelembevételével írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely mentén Kócos és Bimbó elhelyezkedik!

2 pont

4 pont

Riska az origóban rögzített, 7 méter hosszúságú kötéllel van kipányvázva.

- c) A három állat eredeti helyzetével létrehozott BRK háromszög területének hány százalékát tudja ilyen módon bejárni? Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve add meg!

6 pont

A nap folyamán legelészés közben Riska az x tengely mentén haladt. Kócos és Bimbó az eredeti helyükön maradtak.

- d) Az x tengelynek melyik az a pontja, amelyik egyenlő távolságban van Kócostól és Bimbótól? Állhat-e ebben a pontban Riska a kipányvázás ellenére?

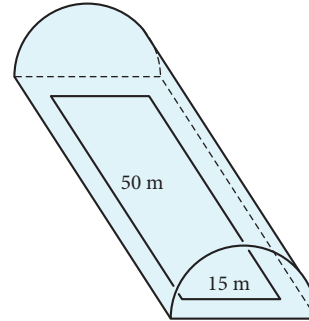
5 pont

- 18.** Egy úszómedence 15 m széles, 50 m hosszú, és a hosszabb oldala mentén a vízmélység 170 cm-ről egyenletesen nő 250 cm-ig.

a) Mennyi víz fér a medencébe?

b) Télen a medence fölé az ábra szerint egy félhenger alakú sátrat húznak, amelynek két végét függőleges síkú félkörökkel zárják le. A félhenger alakú sátor alaplapja olyan félkör, amelynek sugara 9 m hosszú, a sátor hossza 54 m. Hány négyzetméter anyagot kellett venni a sátor elkészítéséhez, ha a hulladék a felhasznált anyag 15%-a volt?

c) A medencében 6 úszósávot alakítottak ki. Egy alkalommal négyen érkeznek az uszodába. Hányféleképpen foglalhatják el az úszósávokat?



6 pont

7 pont

4 pont



RÁADÁS

1. (Érettségi feladat, 1981)

Hol helyezkednek el a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben azok a pontok, amelyek koordinátái eleget tesznek a következő feltételeknek?

a) $|x| = |y|$

b) $|x + y| = 1$

2. (Érettségi feladat, 1983)

Hány 3-mal osztható tízjegyű számot tudunk felírni a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számjegyekből, ha minden számjegyet csak egyszer írunk fel?

3. (Érettségi feladat, 1988)

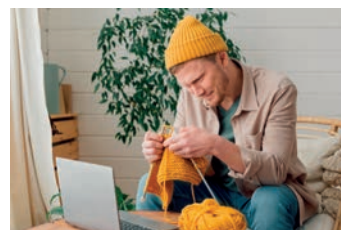
Egy 12 cm élhosszúságú kocka minden csúcsánál levágunk a kockából egy olyan háromoldalú gúlát (tetraédert), amelynek oldalélei a kockaélek 4 cm hosszú darabjai. Mekkora a megmaradt test térfogata és felszíne?

4. (Érettségi feladat, 1997)

Egy mértani sorozat első három tagjának összege 28. Ha a második tagot megszorozzuk az első és a harmadik tag összegével, 160-at kapunk. Melyik ez a sorozat?

5. (Érettségi feladat, 2002)

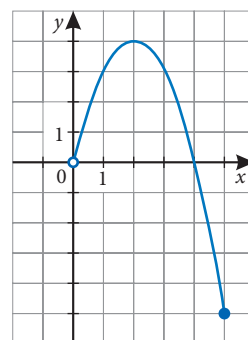
Egy 2 m hosszúságú sálát akarunk kötni. Ha az első napon 18 cm-t, majd pedig mindennap az előző napinál 4 cm-rel hosszabb darabot kötünk, akkor hány nap alatt készül el a sál?



3. FELADATSOR

I. rész

1. Hány olyan egész szám van, amelynek abszolút értéke nem nagyobb, mint 5? 2 pont
2. Egy rombusz átlói 40 cm és 32 cm hosszúak. Milyen hosszú a rombusz oldala? Válaszod tizedes tört alakban, két tizedesjegyre kerekítve add meg! 2 pont
3. Határozd meg, hogy a 3; 4; 6; 4; 5; 8; 10; 5; 4; 7; 10 minta esetében hány százalékkal nagyobb a minta terjedelme a minta félterjedelménél! 2 pont
4. Egy szabályos tizennégyszög esetében mennyi a
a) belső szögek összege; b) külső szögek összege? 3 pont
5. Legyen x egy pozitív egész szám. Tekintsd a következő állítást:
A: Ha x osztható 5-tel, akkor az ötös számrendszerben az egyesek helyén álló számjegye 0.
a) Mi az A állítás logikai értéke?
b) Fogalmazd meg az állítás megfordítását!
c) Mi a b) részben megfogalmazott állítás logikai értéke? 3 pont
6. Egy pénzürmét egymás után háromszor feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy először fejet dobunk, utána kétszer írást? 2 pont
7. Az A halmaznak 14 eleme van. Hány olyan részhalmaza van az A halmaznak, amelynek 3 vagy 4 eleme van? 3 pont
8. Egy számtani sorozat első tagja 6; differenciája 0,4. Határozd meg az első 100 tag összegét! 3 pont
9. Az ábrán egy másodfokú függvény grafikonja látható. A parabolaív „csúcspontja” rácspontra (mindkét koordinátája egész szám), és a parabolára illeszkedik a (4; 0) koordinátájú pont.
a) Add meg a grafikonjával megadott másodfokú függvény hozzárendelési szabályát!
b) Add meg a függvény értelmezési tartományát!
c) Add meg a függvény értékkészletét! 3 pont
10. Legyen az A halmaz a $[2; 6]$ zárt intervallum, a B halmaz a $]3; 10[$ nyílt intervallum. Add meg intervallumjelöléssel az $A \cup B$ és az $A \setminus B$ halmazokat! 2 pont
11. Pista 28 cm átmérőjű pizzát rendelt 2150 Ft-ért, de a kiszállítás után lemérve a pizza átmérője csak 25 cm. Hány százalékkal kisebb területű pizzát kapott Pista, mint amire számított? Írd le a számítás menetét! A végeredményt egy tizedesjegyre kerekítve add meg! 3 pont
12. Legyen az A esemény az, hogy két dobókockával dobva a dobások összege 6. Válaszd ki az alábbi események közül az összetett, amellyel az A esemény egymást kizáró eseménypárt alkot!
B: Az egyik dobás eredménye 6.
C: A két dobás szorzata 5.
D: A két dobás különböző, a nagyobbik és a kisebbik dobás különbsége 4. 2 pont



II. rész „A”

13. Adott a koordináta-rendszerben három pont: $A(-3; 2)$, $B(5; 0)$ és $C(2; 5)$

- a) Írd fel az AB átmérőjű kör egyenletét! 3 pont
- b) Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög derékszögű! 2 pont
- c) Az AB átmérőjű körlemezén véletlenszerűen kiválasztunk egy P pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a P pont az ABC háromszögnek is belső pontja? 5 pont

14. Egy középiskolai kosárlabda-bajnokságon 8 csapat körmérkőzést játszik, vagyis bármely csapat egy-egy meccset játszik minden másik csapattal. A mérkőzések mind ugyanazon a pályán zajlanak, egymás után. Egy meccsre 15 percet szánnak, és a meccsek közt 5 perces szünetet tartanak.

- a) Mennyi ideig tart a bajnokság lebonyolítása? 4 pont
- b) Hányféleképpen alakulhatott az első mérkőzés két részt vevő csapata, ha arra véletlenszerűen választották ki a csapatokat? 2 pont
- c) Déli 12 órára már 9 mérkőzés lezajlott a csapatok között. Igaz-e, hogy ekkor biztosan van olyan csapat, amelyik már 3 meccsen is túl van? 3 pont
- d) Az egyik csapat a 12. a osztály diákjai közül állt össze. Ha véletlenszerűen választják ki a 8 csapat számára a római számmal ellátott öltözőket (I.; II.; ...; VIII.), akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az I., II. vagy III. öltözőt kapja ez a csapat? 4 pont

15. Egy szabályos sokszögnek 25-tel kevesebb átlója van, mint az annál kettővel nagyobb oldalszámú szabályos sokszögnek.

- a) Hány oldalúak ezek a sokszögek? 4 pont
- b) Mekkora az említettek közül a kisebb oldalszámú szabályos sokszög egy szögének nagysága? A választ fokban, egy tizedesjegy pontossággal add meg! 3 pont
- c) A nagyobb oldalszámú szabályos sokszög oldalának hossza 20 cm. Mekkora annak a hasábnak a felšíne és térfogata, amelyiknek az alaplapja egy ilyen sokszög, magassága pedig 6 cm? 6 pont

II. rész „B”

16. Egy csomagolóüzemben meghibásodott egy gép, és 0,2 valószínűséggel nem ragaszt matricát az éppen összeállított dobozra.

- a) Mennyi a valószínűsége, hogy a hibás gép 12 alkalom közül legfeljebb 2 alkalommal nem ragaszt matricát a dobozra? 6 pont

Az üzem egyik alkalmazottja úgy dönt, hogy nyit egy új bankszámlát (egy gyűjtőszámlát), és ezen a számlán gyűjti a megtakarításait. Negyedévente befizet 120 000 Ft-ot erre a számlára. A számla éves kamata 8%, a számlán negyedévente – az új tétel befizetése előtt – írják jóvá a negyedéves kamatot. (A következő negyedévben minden alkalommal az addig bent lévő összeg, a jóváírt kamat és az újonnan befizetett összeg is kamatozik.)

- b) Mennyi pénz lesz a számlán 3 év múlva, ha 3 év alatt a leírtakon kívül más pénzmozgás nem történik rajta? 7 pont
- c) Az üzem egy másik alkalmazottja néhány évvel ezelőtt bankbetétbe helyezte el 1 500 000 Ft-ját, éves 6%-os kamatos kamatra. Hány év telt el a lekötés óta, ha most 50%-kal több pénze van ezen a számláján, mint amikor lekötötte a pénzét, és azóta nem nyúlt ehhez a számlához? 4 pont

- 17.** Egy társasjátékban olyan dobókockákat használnak, amelyeknek egyik oldalán kettő, két oldalán négy és három oldalán hat pötty látható.

a) Töltsd ki a táblázatot, majd határozd meg, hogy mennyi egy dobás várható értéke!

5 pont

Dobás			
A dobás valószínűsége			

b) Két ilyen dobókockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy a két dobás összege 8?

6 pont

c) Az események függetlenségének definíciója alapján bizonyítsd be, hogy nem független egymástól a következő két esemény!

6 pont

A: Két ilyen kockával dobva a dobások összege 8.

B: Két ilyen kockával dobva pontosan egy dobás hatos.

- 18.** Egy laboratóriumban az egyik napon hússzor végeztek el egy mérést. Gyakorisági táblázatba foglalták a mérési eredményeket.

Mérés eredménye (másodperc)	12,5	13	13,5	14	14,5
Gyakorisága	3	6	5	4	2

a) Készíts a mérési eredményekről kördiagramot, és add meg az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögek nagyságát!

4 pont

b) Készíts a mérési eredményekről dobozdiagramot!

3 pont

c) Határozd meg a mérési eredmények szórását!

6 pont

d) Másnap folytatták a méréseket. Azt tapasztalták, hogy ha a másnapi első két mérési eredménnyel kiegészítik az előző napi eredményeket, akkor az eredmények átlaga 0,1-del megnő. Mennyi a másnapi két mérési eredmény átlaga?

4 pont

RÁADÁS

1. (Érettségi feladat, 1990)

6%-os és 30%-os töménységű sósavat összeöntve 24 liter 15%-os töménységű sósavat kaptunk. Hány liter sósavat öntöttünk össze a kétféle sósavból?

2. (Érettségi feladat, 1991)

Oldd meg a racionális számok halmazán a következő egyenletet!

$$7 - 2x - \frac{1 - 3x}{7} = 2 - \frac{2x - 1}{3}$$

3. (Érettségi feladat, 1992)

Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(-2; -1)$, $B(4; -3)$, $C(4; 5)$. Számítsd ki a B csúcsból induló magasságvonál és az AC oldal metszéspontjának koordinátáit!

4. (Érettségi feladat, 1992)

Egy szabályos négyoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek, térfogata 408 cm^3 . Mekkora az alapéle?

Órai feladatok végeredménye

1. lecke: 1. $\sqrt{15}$. 2. 0 cm: AB, AD, AA', DD', CD .
5 cm: $A'D, A'B', D'C'$. 12 cm: BB', CC', BC . 13 cm: BC' .

3. $8\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm. 4. a) 2,4 m. b) 3,15 m. c) 3,2 m.

2. lecke: 1. a) 5; $\sqrt{5}$, 3, $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{5}$. b) 5; $\sqrt{14}$,
 $\sqrt{18}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{14}$. 2. $\sqrt{89}$ m és $\sqrt{73}$ m.

3. a) $45\sqrt{3}$ cm. b) Rombusz alapú hasáb. 338 cm.

3. lecke: 1. Alaplap területe: $1496,5 \text{ mm}^2$; 630 mm^2 ;

$2341,73 \text{ mm}^2$. Magasság: 85 mm; 85 mm; 85 mm.

Felület: 15 233 mm^2 ; 11 970 mm^2 ; 22 363,46 mm^2 .

Térfogat: 127 202,5 mm^3 ; 53 550 mm^3 ; 199 047,05 mm^3 .

2. a) 7,84 g/cm^3 . (acélból van) b) 30 400 cm^2 . 3. 43 terület-
egység, 21 térfogat-egység. 4. a) nem. b) 55,4 cm^3 .

c) 9-szeresére illetve 27-szeresére nő.

4. lecke: 1. 197 cm^2 . 2. a) igaz. b) igaz. c) hamis. 3. 35,8 cm.

4. 6 cm.

5. lecke: 1. a) 200,75 cm^2 , 165,4 cm^3 . b) 116,0 cm^2 ,
95,57 cm^3 . 2. a) 4,774 liter. b) 23,7 cm. 3. a) $r = 3$ cm lehet,
a felszín 339 cm^2 , $r = 4$ cm lehet, a felszín 427 cm^2 , $r = 5$ cm
nem lehet. b) $r = 4,7$ cm, a hulladék 22,5 %. 4. 722 m^2 .

6. lecke: 1. 9,8 cm és 8 cm. 2. a) 5 cm. b) 4,58 cm és 3 cm.

3. 82,4 cm^2 . 4. 5843 km, 36 713 km.

7. lecke: 1. 11 cm, 5575 cm^3 , 7238 cm^3 , 77%, 10 cm,
4189 cm^3 , 7238 cm^3 , 58%. 2. Ha a dinnyehéj 1 cm vastag:
1985 kJ (458 kcal). Ha a dinnyehéj 2 cm vastag: 1391 kJ
(321 kcal). 3. 40,48 kg. 4. a) 283 cm^2 . b) 131 cm^2 .

8. lecke: 1. $3,9 \cdot 10^7 \text{ m}^3$. 2. $8,85 \cdot 10^7 \text{ m}^3$. 3. a) 8,6 cm.

b) 3,7 cm. c) 3,5 mm. 4. 94,25 m^2 , 77,5 m^3 . 5. a) 17.

b) 2,469 kg. 6. a) Nem. b) 94 cm^2 .

9. lecke: 1. a) $\frac{1}{215}$. b) $\frac{1}{26}$. c) $\frac{1}{7}$. 2. a) 1,9 dm^3 . b) 2,5-szer.
c) 2,85 dm^3 . d) 33 mm. e) 6082 mm^2 , 11 310 mm^2 ,
13 685 mm^2 .

10. lecke: 1. a) Téglalapok. b) 51,5 cm^2 , 63,6 cm^2 . c) 61°,
45°. 2. a) 35°. b) 55°. 3. a) 3,5 cm, 12 cm. b) 13,6 cm.

11. lecke: 1. a) 1,61. b) 21 741 m^2 , 21 521 m^2 c) 41,8°.
d) 51,5°. 2. a) 7 egység. b) 30°. 3. 70,5°.

12. lecke: 1. a) legnagyobb az ötoldalúé, legkisebb a há-
romoldalúé. b) legnagyobb a háromoldalúé, legkisebb az
ötoldalúé. 2. a) igen. b) 10 cm, 10 cm, 14,1 cm és 45°, 45°,
90°, illetve 10 cm, 14,1 cm, 17,3 cm és 90°, 54,7°, 35,3°.
d) 241 cm^2 . e) 166,7 cm^3 . f) 7,1 cm. 3. a) 42,44° és 57,99°.
b) 95,12°. c) 97,07 m^3 .

13. lecke: 2. $10\sqrt{2}$ cm, 62,8 cm, 314,1 cm^2 . 3. 49,2°. 4. 65,0°.

14. lecke: 1. a) 159 cm^2 . b) 132,5 cm^3 . c) 45,2°. d) 67,4°.
2. a) 92,8°. b) 9,24 dm^3 . c) 260,7°. d) 33 dm^2 . 3. 1,9 m^3
4. 18 cm.

15. lecke: 1. a) 1551 cm^2 , 1787 cm^2 , 2965 cm^2 , 3672 cm^2 .
b) 2262 cm^3 , 3393 cm^3 , 9048 cm^3 , 12 441 cm^3 . 2. 0,6 cm.
3. a) 603,2 $\text{cm}^3 \approx 6$ dl. b) 29,7%, 12,5%, 57,8%. d) 13,3 cm.
4. a) 1,9 m^2 . b) 33 l. c) 63 cm. 5. a) 0,85 dl. b) 93,88 dm^2 .
c) 469. d) 1582.

16. lecke: 1. 5 cm, 1,25 cm, 6 cm. 2. a) 8 cm. b) 5 cm.

c) $\sqrt{3}$ cm. d) $2\sqrt{3}$ cm. 3. 2,4 cm.

17. lecke: 1. Antal számításai: a) 3 : 7. b) 20 cm. c) $\frac{9}{49}$.

d) $\frac{40}{49}$. e) 15,71 dm^2 . Bandi számításai: a) 110 cm. b) 15 cm.
c) 17,5 cm, 7,5 cm, 20 cm. d) 19,24 dm^2 , 3,53 dm^2 . e) 15,71 dm^2 .
2. 4 cm, 5 cm, 41,7°.

18. lecke: 1. a) 256 cm^2 , 144 cm^2 . b) 683 cm^3 , 288 cm^3 ,
395 cm^3 . c) 348 cm^2 , 558 cm^2 . 2. 4,2 cm^3 , 29,3 cm^3 , 79,6 cm^3 .
3. a) 12 cm. b) 608 cm^3 .

19. lecke: 1. b) 26 m. c) 243 238 m^3 . d) 15 861 m^2 .

2. a) 8-szorosa, 18-szorosa. b) 25,15 cm^3 . c) 176,05 cm^3 ,
452,7 cm^3 . 3. a) 1844 cm^2 , 3576 cm^3 . b) 783 cm^2 , 1795 cm^3 .
4. 16 db. 5. 4,2 cm.

20. lecke: 1. a) 54,8 kg. b) 187,25 dm^2 . 2. 47 embert.

3. a) 60 cm^3 . b) 8,3 l. c) 5494 cm^2 . 4. a) 1105 cm^2 .

b) 40,9 cm és 39,6 cm, illetve 40,9 cm és 50,2 cm.

5. a) $2,22 \text{ cm}^2$. b) $2,44 \text{ cm}^2$.

21. lecke: 1. $3,04 \cdot 10^{16} \text{ m}^3$; 2%. 2. a) 24,74 dm. b) $1 : 3$.
c) 19,9 dm. d) $64,8^\circ$. e) $71,6^\circ$. 3. 433 cm^3 . 4. a) $940,12 \text{ cm}^2$.
b) 18 cm, 14,6 cm, 1688 cm^3 . c) $71,4^\circ$.

22. lecke: 2. b) 6765 és 2584. 3. 1; 5; 2. 4. a) 1; 3; 6; 10; 15;
21. b) igen, az $i(n)$.

23. lecke: 2. a) 3; 2; 0; -4; -12; -28; -60; -124. b) $\sqrt{3}$;
5; $2 + 5\sqrt{3}$; stb. 4. a) -8; 8; -8; 8; 8; -8. b) 2. c) -8.
5. a) dolgozik. b) 67. c) 84.

24. lecke: 1. a) 34. b) 2. c) 186. d) 958. 2. a) 21. b) -29.
c) 14; 28. d) 21. 3. a) 4. b) -10. c) 14. d) 2. 4. a) számtani
b) 72. c) 30. d) 16. 5. 52. 6. $a_1 = -1$, $d = 7$.

25. lecke: 1. 9; 897; 6; 1239; 3; 11; 74; 1647. 2. mind 0.
3. 17 és 125. 5. igen, 15 darab, 180 cm, 325 darab.
6. 3300 Ft, illetve 6700 Ft.

26. lecke: 1. a) 3 687 766 Ft. b) 4,2%. 2. a) $13\,275 \text{ m}^3$.
b) $10\,847 \text{ m}^3$. c) a 7. évben. 3. a) 3 és 1701. b) -0,5 és
-0,21875. 4. a) $\pm \frac{1}{20}$. b) $\pm 32\,000$. 5. 8 vagy -64.
6. a) 13,2 millió Ft. b) 2026.

27. lecke: 1. 146,25; 2039,94; $\approx 909\,006$. 2. a) 49. b) 0. c) 49.
3. 2046. 4. 11. 5. 15 624 vagy 10 416. 6. 11 nap.

28. lecke: 1. 17. 2. a) 62. b) 24. 3. a) $\frac{31}{16}$; $\frac{1023}{512}$; $\frac{65\,534}{32\,768}$;
 $\frac{2\,097\,150}{1\,048\,576}$. b) 1,938; 1,998; 2,000; 2,000. d) igaz. 4. 189 cm;
 433 cm^2 ; 636 cm^2 . 5. a) 26. b) 12 szürke és 30 bordó.
6. $q = \pm 2$, $d = 5$, $q = \pm 1$, $d = 0$.

29. lecke: 1. 3%. 2. a) 50 000 Ft. b) 21,4%. 69 hó.
3. 1 190 598 Ft. 4. 1 646 987 Ft. 5. 240 000 Ft.

30. lecke: 1. 2 160 000 Ft. 2. 160 000 Ft, 2 172 800 Ft.
3. 1 396 224 Ft. 4. A 2. év végén: 15 691, 47 404, 109 501,
3. év végén: 109 501, 10 950, 52 145, 57 356, 4. év végén:
57 356, 5736, 57 358, -2. 5. 269 027 Ft.

31. lecke: 1. 19 percet. 2. a) 7,8%. b) 5 év.

32. lecke: 1. a) -14; 2,5. b) -28; 1,75. 2. $\frac{15}{64}$; $\frac{15\,345}{64}$;
-10 935; -16 400; -9; 45; 5; 80. 3. 10. 4. II.

33. lecke: 1. a) nők: 296, 197, 349, 172, férfiak: 248, 302,
284, 151. b) 0,15. c) 0,15. d) 0,26. 2. a) 48%, 12%, 13%.
b) 0,73. c) 2700. 3. a) 126. b) 174. c) 0,58.

34. lecke: 1. a) 20%; -5%; 15%; 9%. b) átlag: 9,75; szórás:
9,36. 2. módusz: 9,80; medián: 9,85; átlag: 9,84, szórás:
0,0725. 3. a) 125%. b) terjedelem: 11, átlag: 13, szórás: 4,18.
c) 4.

36. lecke: 1. a) b) medián: 137, átlag: 140,4. 2. a) gyako-
riságok: 7, 9, 6, 1, 1, osztályközepek: 13, 38, 63, 88, 117.
b) 42,3 mm. c) 26,15. d) 70,8%, igen: 62,5%. 3. átlag: 59,1,
szórás: 11,27. 4. a) 88%. b) 14,46. c) A szórás 1, tehát nem.

37. lecke: 1. B biztos, D lehetetlen. 2. a) 16. b) AA, AB, AC,
AD. c) K-L, K-N, L-M, M-N. 3. a) 36. b) 6, 10, 11, 1, 25, 10.
c) B - E. e) L: biztos, M: lehetetlen.

38. lecke: 1. a) H, K, Sz, Cs, V. b) Cs. c) H, K, Cs, P, Sz.
d) Cs. 2. a) igen. b) igen. c) nem. d) nem. 3. a) 49, 64, illet-
ve 45, 63. b) 45, 63, illetve pl.: 38, 42. c) Egy. 4. a) 18, 0, 3.
b) 33, 15, 18. 5. legalább 0 és legfeljebb 16, illetve legalább
15 és legfeljebb 31.

39. lecke: 1. a) 0,72. b) 0,28. c) 0,25. 2. a) $\frac{1}{9}$. b) $\frac{11}{36}$. c) $\frac{1}{12}$.
d) $\frac{1}{4}$. 3. a) 495, 660, 25, 100, 28, 242, 49. b) 0,1 és 0,9.
c) 0,41; 0,21; 0,43; 0,57. d) 0,41; 0,75; 0,31 és 0,37. 4. a) 0,25;
0,5; 0. b) 0,125; 0,125.

40. lecke: 1. a) 0,5. b) 0,5. c) 0,6. 2. a) 0,25. b) 0,125. 3. 0,7.
4. 16 cm, $8\sqrt{3}$ cm, $8\sqrt{2}$ cm, 8 cm. 5. 0,23.

41. lecke: 1. 0,22; 0,28; 0,19; 0,17; 0,14. Várható érték 1109.
2. a) A 7%, B 6,4%. b) 6,7%. 3. a) 0,5. b) 1. c) 1,5.

42. lecke: 1. a) $1,0510^{-5}$. b) 0,1157. c) 0,376. 2. a) 0,38.
b) 0,15. c) 0,96. 3. a) 0,28. b) 0,25. c) 0,53. 4. a) 0,002.
b) 0,36. c) 0,43. 5. ???

43. lecke: 2. a) átlag 3,8, szórás 0,75. b) mind 4-es. c) 10-fé-
leképpen. d) 7. 3. a) 350 Ft. b) 150 000 Ft. 4. 0,3; 0,56; 0,75;
0,1; 0,44.

44. lecke: 1. a) 1; 1; 4; 4; 4. b) 3,6. 2. a) 0,00024. b) 0,26.
c) 0,39. 4. 0,19. 5. 1220 Ft.

Halmazok, logika, kombinatorika, gráfok

A 2. 1. 2. 4. 3. a) 10. b) 3. 4. A fokszámok 2; 3; 3; 3; 3.
5. 4320. 6. 3168. 7. a) 16. b) 36. 8. 128. 9. 6 pontja, 12 éle.
10. B, D. 11. $A \wedge B$: hamis, $A \vee B$: igaz. 12. a) 31. b) 242.

B 3. a) 19. b) 11. 4. Igaz. 6. 10 080. 7. a) Hamis. c) igaz. 8.
1. 2. 4. 9. 176. 10. C, D. 11. 20 173 560. 12. a) $4 \cdot 5^4 = 2500$.
b) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$.

P 1. a) 9. b) 8 259 888. c) 60. 2. c) 63. 3. a) 120. b) Igaz.
c) Hamis. 4. a) 6. b) 120. c) 90. d) 6. 5. a) 11. b) 21. c) 252.
d) 78 552. e) 8262.

Q 1. a) 151. b) 39. 2. b) 2. c) 3; 4; 3; 5; 4; 6. 3. a) 427 608.
b) 10 770. c) 84. 4. a) 7. b) 22 950. c) $3! \cdot 15! \cdot 12!$. 5. a) 21.
c) 126.

Számítás, algebra

A 1. A: hamis, B: igaz, C: hamis, D: hamis. 2. 2 425 532
Ft. 3. 1232, vagy 1236. 4. $3\frac{1}{2}$. 6. 16. 7. A, B, C. 8. $D = -8$,
0 megoldás. 9. $(-1; 2)$. 10. a) $3b(2ab - 3)$. b) $3(x - 2)^2$.
11. 5,13 óra. 12. a) relatív prímek. b) van. c) összegére.
d) valós.

B 1. A, B, D. 2. Pl.: $\frac{-3}{2}$; $\frac{-3}{4}$; $\frac{-1}{2}$; 0. 3. 12. 4. $B = 0$ esetén
 $A = 0, 3, 6, 9$. $B = 5$ esetén $A = 1, 4, 7$. 5. 800. 6. $\pm\frac{3}{2}$.
7. a) igaz. b) igaz. c) igaz. 8. $x < \frac{7}{3}$. 9. 100110110₂. 10. 4.
11. 6. 12. $-\frac{9}{4}$.

P 1. a) 3. b) $-2 \leq x \leq 3$. 2. a) Aug. 28-án. b) 2,625 óra,
118,125 km. c) 50 és 42. 3. a) 98 733 Pa. b) 0,8 km. 4. a) 8 fő.
b) 35 880 Ft, 56%. 5. a) 364. b) 7.

Q 1. a) $\frac{9}{10}$. b) $\frac{10}{3}$. c) $-\frac{1}{2}$. 2. a) 5. b) 1,4-szeresére.
3. a) $-0,5$. b) -1 és -5 . c) Nincs megoldás. 4. a) 4. 5. a) 500 Ft
és 150 Ft. b) A 0 számjegy. c) A 210 bármely négyjegyű
többszöröse. d) Nincs.

Függvények, sorozatok

A 2. 1 és $-0,5$. 3. $f(x) = 0,25x + 2,75$. 4. $\frac{16}{3}$. 5. a) A.
b) $-5 - \sqrt{2} < x < -5 + \sqrt{2}$. 6. -3 . 7. igaz, hamis, igaz,
igaz. 8. Szigorúan monoton csökkenő. 9. $\frac{3}{7}$ -nél. 10. 27; 6.
11. $f(x) = 5x - 2$, $g(x) = (x + 4)^2$, $h(x) = -|x|$, $i(x) = \sqrt{x} + 6$.
12. a) $x = 2$ és $x = 4$, $y = 0$. b) $x = 6$, $y = 4$.

P 1. b) 2s. c) 1s és 3s. d) 5s. 2. b) -3 ; 1. d) $]-3; 1[$.

3. a) 640 Ft. b) 12 Ft. c) 1180 Ft. d) 0,8 kg.
f) $640 < x \leq 31\,740$. 4. a) $f - q$, $g - u$, $h - s$. b) 0; 1; 2.
c) 0; 2; -2 . 5. a) 14 mm. b) 8,14 mm. c) 170,4 s.

B 1. $\frac{58}{3}$, $\frac{110}{3}$. 2. 51. 3. $-\frac{53}{6}$, $-\frac{55}{3}$. 4. -3 . 5. S, S és M, E,
M, S, S. 6. ± 4 . 7. 2475. 8. 346. 9. 100, 50. 10. -5 ; -1 ; -6 ;
 -7 ; -13 . 11. igaz. 12. 2 332 800 Ft.

Q 1. A táblázat oszloponként: 3; 1; -1 ; -3 , igen, nem. 2,4;
1,92; 1,536; 1,2288, nem, igen. 2; 6; 12; 20, nem, nem.
7; 7; 7; 7, igen, igen. 2. a) 1860. b) 11. c) 2 357 881.

3. a) 3 906 250. b) 130 208,32. c) $-\frac{1}{5}$. 4. a) 16 267 177 Ft.
b) 7 év. c) 3,5%. d) 9 507 364 Ft. 5. a) nem. b) 105. c) 3719.

R 1. a) 20. b) 3. 2. a) 10 szakasz, 29,3 cm. b) $-0,25$.
3. d) $S_{10} = 127,875$, a szorzat: 2^{22} . 4. a) 3 736 291 Ft.
b) 7 346 640 Ft, 5 489 837 Ft. c) 463 003 Ft. 5. a) 15,92 °C.
b) 16,11 °C. c) 2042. d) $x = 1$, $[-1,75; 2]$.

Geometria

A 1. a) 150°. b) 75°. 2. 50°. 3. a) 5 cm. b) 0 cm. c) 5 cm.
d) 0 cm. 4. igaz, igaz, igaz, hamis. 5. 72°. 6. 9. 7. 78,5°,
101,5°. 8. Egyállású szögek: F, csúcshökök: X, melléshökök:
A, X, F, H, K, T, váltóshökök: X, H, Z, pótszög nincs.
9. 16 cm. 10. 152,3°. 11. Igen. 12. a) 15°, 75°. b) 78,5°, 10,5°.

B 1. 0,72 cm. 2. 4,30 cm. 3. 10,9 cm. 4. 315°. 5. 80°. 6. ha-
mis, hamis, igaz, hamis. 7. 5,5 m². 8. 7,0 cm. 9. 1265 cm.
10. 512-szeresére. 11. Igen. 12. a) 152°. b) merőleges egy-
másra. c) hasonló. d) negatív.

P 1. a) 12 cm. b) 780 Ft. 2. a) 22,2 egység, 31,4 egység.
b) $r : R = 0,9$. c) 6953 térfogategység. 3. a) 71,3 cm².
b) 17,5 liter. 4. a) 12,6 cm. b) 235,6 cm². c) 7 cm. 5. a) 2 cm,
4 cm. b) Harmadrésze.

C 1. (2, 3). 2. $(-6; 16)$, $(4; 6)$, $(10; -10)$
3. $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 41$. 4. 13. 5. 0,75. 6. $-0,2$. 7. a) vég-
pontja. b) érinti. c) skalárszorosai. d) y tengelyére. 8. Nem.
9. $b + \frac{d}{3}$. 10. igaz, igaz, hamis, igaz. 11. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.
12. a) c. b) h. c) e. d) f.

Q 1. a) igen. b) nem. c) $c - a$. 2. a) $CA(-24; 10)$, $CB(5; 12)$,
ezek skaláris szorzata 0. b) $-12x + 5y = 80$. c) 0,25.
3. a) $(6; -9)$ b) $3x - 2y = 36$. c) $6 \pm \sqrt{88}$. d) 92°.

4. a) $n_e(2; -1)$, $n_f(1; 2)$. A két vektor skaláris szorzata 0.
b) $(-3; 5)$. c) 4. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 18$. 5. a) 17 km.
b) Aladár: (19; 32), 17 km, Béla: (42,875; 0), 36,125 km,
Cecil: nincs ilyen pont.

D 1. 84 cm^2 . 2. 60° , 300° . 3. 14; 24; 36. 4. $(-1; -2)$.
5. $180\,000 \text{ m}^2$. 6. a) $\sqrt{58}$. b) $(0,5; 3,5)$. 7. a) Igaz. b) Igaz.
c) Igaz. 8. a) Felére. 50%-kal csökken. b) Negyedére. 75%-
kal csökken. c) 1,728-szorosára. 72,8%-kal nő. 9. 24.
10. a) -4 . b) 1. 11. A: hamis, B: hamis, C: igaz, D: igaz,
E: igaz. 12. $(x + 12)^2 + (y - 5)^2 = 169$.

R 1. a) 115° , 122° , 123° . b) 7,24 cm és 8,64 cm. c) $28,1 \text{ cm}^2$.
2. 3360 m^2 . 3. a) 16 cm. b) $56,1^\circ$. c) 203 cm^2 . 4. a) 12 cm.
b) 60 cm. c) 187 cm^2 . 5. a) $3x + y = -4$. b) $(-1,5; 0,5)$.
c) $(0; -4)$. d) $x - 3y = 2$.

S 1. a) 5,10; 20,4; 26. b) $2x - 3y = 0$. c) $x^2 + y^2 = 6,5$.
d) $x^2 + y^2 = 13$. 2. d) $45,2^\circ$ és $134,8^\circ$. e) 9,23 cm. 3. a) $48,2^\circ$
b) 15,5 cm. c) mindkettő $26,8 \text{ cm}^2$. 4. a) 22. b) $\frac{1}{45}$ része.
c) 31:44. 5. a) 5,20 cm. b) $5,83 \text{ cm}^2$, 9,35%. c) 101 cm^2 .

Statisztika, valószínűség számítás

A 1. Módusz: 16, medián: 16, átlag: 16,6. 2. 111° , 138° , 111° .
3. 45,5%. 4. 0,3. 5. 45. 6. 0,7. 7. 0,5. 8. 0,08. 9. $\frac{1}{3}$. 10. $\frac{80}{243}$.
11. A + B: FFFE, FFFI, FFIE, FIFE, FIIE, FIIF, FFII, FIII, IIIF,
IIIF, IIFI, IIIE. A · B: FIII. 12. a) 0,1. b) 0,36. c) 0,54.

B 1. 21. 2. 44° , $53,6^\circ$, $105,6^\circ$, $156,8^\circ$. 3. 33. 4. Pl.: 2, 2, 2,
2, 2, 3, 4, 6, 7, 7, 7. 5. 25. 6. 0,12. 7. 0,5. 8. 0,25. 9. 0,125.
10. 0,022. 11. 4225 Ft. 12. 0,42.

P 1. a) 1,28. b) 41,6. c) Nem. 2. a) $97,7^\circ$, 93° , $86,5^\circ$, $82,8^\circ$.
b) 0,13. c) 0,035. 3. a) 4096. b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$. c) 0,25. d) 0,226.
4. a) 1. b) 0,0742. 5. a) 200. b) 127–128. c) 0,6375.

Q 1. a) 324 ezer. b) bevásárlóközpont. c) 23 640; 21 500;
15 860. 2. a) 22 803. b) gyakoriságok: 0; 2734; 2798; 2244;
1822; 2001. c) 0,51. d) 0,67. e) 0,22. f) 0,08. 3. a) Átlag: 4,57,
szórás: 0,276. c) 0,68. 4. a) 2, 2 és 240 pont. b) A lehet-
séges dobások valamilyen sorrendben: 1,5, vagy 3,3, vagy
3,5 vagy 5,5. c) 15. d) 0,42. 5. a) 0,61. b) 0,39. c) legalább
139-szer.

Szakábrák: Szalóki Dezső

Illusztráció: Létai Márton (47. o., 49. o., 52. o., 65. o., 76. o.)

Szerkesztői fotó: 89. o.

Shutterstock képügynökség: borító, 6. o., 7. o., 13. o., 14. o., 15. o., 16. o., 17. o., 18. o., 19. o., 20. o., 21. o., 22. o., 23. o., 28. o., 29. o., 32. o., 35. o., 36. o., 37. o., 39. o., 40. o., 42. o., 43. o., 44. o., 45. o., 46. o., 47. o., 51. o., 52. o., 54. o., 55. o., 57. o., 60. o., 61. o., 65. o., 67. o., 73. o., 74. o., 75. o., 78. o., 79. o., 80. o., 86. o., 88. o., 105. o., 107. o., 109. o., 114. o., 117. o., 123. o., 124. o., 128. o., 129. o., 138. o., 139. o., 141. o., 142. o., 143. o., 144. o., 146. o., 156. o., 159. o., 164. o., 166. o., 173. o., 176. o., 179. o., 184. o., 187. o.

Shutterstock szerkesztői képek: 8. o. Julia700702 (Light Festival Amsterdam), 14. o. Ekaterina Bykova (The Garage Museum), 24. o. Compositing Studio, 32. o. aquatarkus, 39. o. Haelen Haagen (csokoládék), 44. o. Fernando Dias Fotografia (Metropolitan Cathedral of Saint Sebastian), 84. o. katacarix (Milák Kristóf), 128. o. Alexanderstock23 (hajóút), 139. o. Hit1912 (Tokyo Skytree)

Thinkstock: 145. o.

iStock: 34. o., 143. o. (bank)

Pixabay: 49. o.

A KöMaL feladatok forrása: <http://db.komal.hu/scan/>

Előszó	3	29. Pénzügyi feladatok I. – tőkebefektetések	66
TÉRGEOMETRIA		30. Pénzügyi feladatok II. – hitelek és kockázatok ...	68
1. Tételek távolsága (ismétlés)	4	31. Gyakorlás	70
2. A hasáb	8	32. Gyakorlás, tudáspróba	72
3. A hasáb felszíne és térfogata	10	Témazáró feladatgyűjtemény	74
4. A henger	12	STATISZTIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS	
5. A henger felszíne és térfogata	14	33. Statisztikai adatgyűjtés	76
6. A gömb, a gömb szeletelése	16	34. Statisztikai jellemzők	78
7. A gömb felszíne és térfogata	18	35. Diagramok	80
8. Gyakorlás	20	36. Számítások osztályközepekkel	84
9. Hasonló testek felszíne, térfogata	22	37. Az eseménytér	86
10. Tételek hajlásszöge	24	38. Események összege és szorzata	88
11. A gúla	26	39. Esemény valószínűsége	90
12. A gúla felszíne és térfogata	28	40. Geometriai valószínűség	92
13. A forgáskúp	30	41. A várható érték	94
14. A forgáskúp felszíne és térfogata	32	42. Mintavételek	96
15. Gyakorlás	34	43. Gyakorlás	100
16. A csonkagúla és a csonkakúp	36	44. Gyakorlás, tudáspróba	102
17. A csonkagúla és a csonkakúp felszíne	38	Témazáró feladatgyűjtemény	104
18. A csonkagúla és a csonkakúp térfogata	40	RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS	
19. Gyakorlás	42	Halmazok, logika, kombinatorika, gráfok	108
20. Térgeometria a hétköznapi életben	44	Számtan, algebra	116
21. Gyakorlás, tudáspróba	46	Függvények, sorozatok	128
Témazáró feladatgyűjtemény	48	Geometria	144
SOROZATOK		Statisztika, valószínűségyszámítás	166
22. Számsorozatok	52	PRÓBAÉRETTSÉGI FELADATSOROK	
23. Sorozatok megadása	54	1. feladatsor	176
24. Számítási sorozatok	56	2. feladatsor	179
25. A számítási sorozat első n tagjának összege	58	3. feladatsor	183
26. Mértani sorozatok	60	Néhány feladat végeredménye	186
27. A mértani sorozat első n tagjának összege	62	Képjegyzék	190
28. Vegyes feladatok	64		

Jó tanácsok a tanuláshoz

Legalább
egyszer
próbáld ki,
megéri!



Mindig a célnak
megfelelő módon
gondolkodj!

- Értsd meg a problémát!
- Készíts tervet a probléma megoldására!
- Hajtsd végre a tervedet!
- Ellenőrizd az eredményt, és gondold át, hogyan lehetne javítani rajta!

Pólya György: A gondolkodás iskolája

- Olvasd el figyelmesen a tartalomjegyzéket! Milyen logikai rendezőelvet fedezel fel benne?
- Keresd a tankönyvben minél több segítséget ahhoz, hogy egy-egy témakör vagy lecke tartalmát gyorsan átlásd! (Például névmutató, kislexikon, kronológia.)
- Nézd át figyelmesen a tankönyv leckeit, hogy megértsd belső szerkezetüket!



Használd ki
a tankönyv által
kínált segítségeket!



Ne add fel, ha valami
nehezen érthető!

- Azonosítsd azokat a részeket a leckében, amelyeknek a megértése nehézséget okoz a számodra!
- Ellenőrizd, hogy van-e olyan szó, amelynek a jelentése nem világos a számodra! Ha van ilyen, keresd meg a szó jelentésének magyarázatát a tankönyvben vagy egy lexikonban!
- Fogalmazd meg kérdések formájában is, mi az, amit nem értesz!
- Olvasd el újra a leckét, nézd meg figyelmesen az ábrákat úgy, hogy a problémát okozó kérdésekre keresd a választ!
- Keresd egy másik könyvet (pl. lexikon, enciklopédia), vagy az interneten kulcsszavas kereséssel próbáld találni egy olyan témájú oldalt, amelyről tanulsz!
- Ha így sem sikerül, kérj bátran segítséget egy társadtól, a testvéredtől vagy a tanárodtól!

- Alakítsd át az alcímeket kérdésekké!
- Ha valami érdekes és hasznos gondolat jut az eszedbe, rögtön írd le!
- A lecke elolvasása után vedd számba, mi volt az, amit már korábban is tudtál!
- Válaszd ki, mi volt a legérdekesebb újdonság! Fogalmazd meg, miért tartod ezt érdekesnek!
- Gondold végig, mi volt az, amit korábban másképpen tudtál vagy gondoltál!
- Fogalmazd meg olyan kérdéseket, amelyek a lecke olvasása közben jutottak az eszedbe, de amelyekre a lecke írója nem tért ki! Ezeket a kérdéseket is érdemes emlékeztetőként leírni!



Gondolkodj arról,
amit tanulsz!



Ha valamit
szeretnél pontosan
megjegyezni, foglalkozz
vele külön is!

- Olvasás közben készíts magadnak jegyzetet!
- A legfontosabb részletekről és összefüggésekről készíts magadnak saját vázlatot!
- Készíts kérdéskártyákat azokról az információkról és kérdésekről, amelyeket a legfontosabbnak tartasz a leckéből! Ezek segítségével teszteld a tudásod, és memorizáld az ismereteket!
- Próbáld emlékeztetőből egy összefüggésvázlatot készíteni, és annak segítségével elmagyarázni valakinek azt, amiről tanultál!

- Mik voltak a legérdekesebb dolgok?
- Mi az, amit kedved lenne ebből másnak is megmutatni, elmondani és elmagyarázni?
- Mikor és hogyan tudnád hasznosítani a tanultakat?
- Milyen korábbi ismeretek és tapasztalatok jutottak közben eszedbe?
- Mennyire vannak összhangban azzal, amit eddig tudtál?
- Mik voltak azok az új ismeretek, amelyekkel már korábban is találkoztál?
- Mit lenne jó még megtudni vagy megtanulni e témával kapcsolatban?



Ha egy lecke
vagy egy témakör
végére érsz, értékelj!