vagy valamely más hasonló kifejezés lesz a lehető legkisebb. Így általában *különböző* „legjobban közelítő" egyenesekhez jutunk. Annak, hogy a (12) kifejezés minimalizálása által szolgáltatott egyenest tekintjük a legjobbnak, számítástechnikai oka is vannak.)

Arra a kérdésre, hogy hogy lehet a és b értékét úgy meghatározni, hogy a (12) kifejezés minimális legyen, könnyen tudunk válaszolni. Tekintsük az $F(a, b)$ függvény parciális deriváltjait

$$\frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{50} (y_i - ax_i - b)\, x_i$$

$$\frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{50} (y_i - ax_i - b).$$

Mint ismeretes az $F(a, b)$ függvény szélsőértékeit a

$$\frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = 0 \tag{13}$$

egyenletek megoldásával nyerhetjük. (Azt, hogy az ily módon kapott a és b értékek tényleg az $F(a, b)$ függvény minimumhelyét szolgáltatják, természetesen be kell bizonyítanunk. A bizonyítás az analízisben szerzett ismereteink alapján igen könnyű, ezért itt nem részletezzük.)

Ebből
$$b = \frac{\sum_{i=1}^{50} y_i - a \sum_{i=1}^{50} x_i}{50},$$

mely értéket az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{50} x_i y_i - a \sum_{i=1}^{50} x_i^2 - \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} x_i \sum_{i=1}^{50} y_i + \frac{a}{50} \left(\sum_{i=1}^{50} x_i \right)^2 = 0,$$

és
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i y_i - \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} x_i \sum_{i=1}^{50} y_i}{\sum_{i=1}^{50} x_i^2 - \frac{1}{50} \left(\sum_{i=1}^{50} x_i \right)^2}.$$

Mivel az előző pontban már kiszámítottuk a

$$\sum_{i=1}^{50} x_i, \quad \sum_{i=1}^{50} y_i, \quad \sum_{i=1}^{50} x_i y_i, \quad \sum_{i=1}^{50} x_i^2$$

mennyiségeket, most könnyen adódik, hogy

$$a = \frac{24\,744 - \frac{1}{50} \cdot 1100 \cdot 1119}{24\,366 - \frac{1}{50} (1100)^2} = \frac{126}{166} = 0{,}76,$$

és
$$b = \frac{1119 - 0{,}76 \cdot 1100}{50} = \frac{283}{50} = 5{,}66.$$

Tehát a legjobban közelítő egyenes egyenlete

$$y = 0{,}76x + 5{,}66.$$

15.5.2.1 A regresszióanalízis feladattípusai

A regresszióanalízis feladata két mennyiség közötti kapcsolat jellemzése egy függvény segítségével. A két mennyiség jellegétől és a kapcsolatot leíró függvény típusától függően osztályozhatjuk a feladatokat.

(i) Két valószínűségi változó közötti kapcsolat

Két valószínűségi változó, ξ és η között bár elvileg lehetséges, hogy függvénykapcsolat áll fenn, azaz például η egyértelmű függvénye ξ-nek ($\eta = f(\xi)$), gyakoribb, hogy ξ értékének ismerete még nem határozza meg egyértelműen η-t. (Vizsgált példánkban is ez volt a helyzet.) Ekkor kérdezhetjük, hogy η eloszlásfüggvénye vagy momentumai, pl. várható értéke, hogy függ ξ-től. Általában η és ξ közötti kapcsolatot jellemezhetjük úgy, hogy megadjuk, miképpen függ η várható értéke ξ-től, azaz a kapcsolat jellemzésére az $y = f(x) = M(\eta \mid \xi = x)$ feltételes várható értéket vagy ennek egy közelítését használjuk .

A feladat jobb megvilágítása céljából nézzünk egy valószínűségszámítási példát. Valamely gépalkatrészt egykilós öntvényekből gyártunk. Az, hogy a gyártott gépalkatrész selejtes lesz-e vagy sem, többek között függ az öntvény tisztaságától is. Gyártmányunk selejtes lehet pl., mert az öntvénybe idegen szemcse kerül. Tegyük fel, hogy az öntvényeket 1000 kp nyersanyagból öntjük, azaz 1000 darab alkatrészt gyártunk. Jelentse η a selejtes alkatrészek számát, és jelentse ξ az 1000 kp nyersanyagban levő idegen szemcsék számát. Ekkor η nyilván „függ" ξ-től, de ξ értékének pontos ismeretében sem tudjuk η értékét pontosan megmondani. Meg tudjuk mondani azonban η eloszlásfüggvényét a ξ feltétel mellett; ugyanis — mint tudjuk — egy öntvényben levő szemcsék száma Poisson-eloszlást követ, tehát annak a valószínűsége, hogy egy öntvény selejtes lesz*

$$p = 1 - e^{-\frac{\xi}{1000}},$$

és annak a valószínűsége, hogy az 1000 öntvényből k selejtes lesz

$$P(\eta = k) = \binom{1000}{k} p^k (1-p)^{1000-k}.$$

Ebből η várható értéke a $\xi = x$ feltétel mellett:

$$M(\eta \mid \xi = x) = 1000 \left(1 - e^{\frac{-x}{1000}}\right).$$

---

* Itt csak a szennyeződés folytán fellépő selejtes darabokat vesszük figyelembe.

E példában elméleti úton kaptuk meg az $M(\eta \mid \xi = x)$ függvényt. Legtöbb esetben nem tudunk eleget a ξ, η valószínűségi változókról ahhoz, hogy így járhassunk el, hanem a ξ, η-ra vonatkozó adatokból kell az $M(\eta \mid \xi = x)$ függvényt (vagy annak paramétereit) megtalálni.
Tegyük fel, hogy ξ, η valószínűségi változópárra vonatkozóan n kísérletet végeztünk. Legyenek ezek eredményei (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), és keressünk egy olyan függvényt, amelynek gráfja ezen pontokhoz közel van. A közel kifejezésen ismét azt értjük, hogy a

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

összeg kicsi. Ha találunk egy olyan $f(x)$ függvényt, amelyre (14) valóban elegendően kicsiny, akkor e függvényt fogjuk az $M(\eta \mid \xi = x)$ függvény közelítésének tekinteni, és az adatok *regressziós görbéjének* fogjuk nevezni.
Az indok arra, hogy éppen a (14) kifejezést kívánjuk minimalizálni a következő. Mint tudjuk, ha η egy tetszőleges valószínűségi változó, úgy

$$(15) \qquad M(\eta - a)^2,$$

akkor lesz a legkisebb, ha $a = M(\eta)$, azaz η várható értéket úgyis meg lehet találni, hogy a (15) kifejezést minimalizáljuk. Esetünkben, ha $f(x) = M(\eta \mid \xi = x)$, akkor

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

kifejezés η tapasztalati szórása (a $\xi = x$ feltétel mellett), és fordítva: azon $f(x)$ függvény, amelyre

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

kifejezés minimális lesz, az $M(\eta \mid \xi = x)$ feltételes várható érték becslésének tekinthető.
Általában nem az összes $f(x)$ függvény közül keressük ki a (14) kifejezést minimalizáló függvényt, hanem csak egy bizonyos függvényosztály elemei közül válogatunk. Lehet, hogy tudjuk vagy sejtjük, hogy a kapcsolat lineáris, azaz $y = ax + b$, és akkor célunk azon paraméterek megtalálása, amelyre

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

minimális. Hasonlóan lehet, hogy tudjuk vagy sejtjük, hogy a kapcsolat kvadratikus, azaz $y = ax^2 + bx + c$, és célunk azon a, b, c paraméterek megtalálása, amelyre a

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$$

összeg a lehető legkisebb lesz.

Definíció. Mivel a közelítő függvény megtalálásának alapelve az, hogy az *eltérések négyzetösszegét* minimalizáljuk, a módszert a *legkisebb négyzetek módszerének* is szoktuk nevezni.

(ii) Paramétertől függő valószínűségi változó (sztochasztikus folyamat)

Valamely anyag szakítási szilárdságát vizsgálva a következő módon járhatunk el. Különböző terhelések mellett megnézzük, hogy a terhelésnek kitett minták közül hány darab szakad el. Jelentse ξ_t azt, hogy t terhelés mellett a mintaelemek hány százaléka szakad. Ekkor ξ_t (fix t esetén) egy valószínűségi változó.
Általában arra vagyunk kíváncsiak, hogy ξ_t vagy ξ_t várható értéke, $M(\xi_t)$, hogy függ a terheléstől.
Hasonló feladathoz jutunk, ha csirkék súlygyarapodását vizsgáljuk. Itt ξ_t jelentse egy véletlenszerűen kiválasztott t napos csirke súlyát. ξ_t ismét valószínűségi változó és ismét ξ_t-nek, illetve $M(\xi_t)$-nek t-től való függését vizsgáljuk.
Mindkét példában kísérletünk eredménye, a ξ_t valószínűségi változó egy t paramétertől is függ. A ξ_t egy paramétertől függő valószínűségi változót sztochasztikus folyamatnak nevezzük.
Tegyük fel, hogy ξ_t értékét különböző $t_1, t_2, \ldots, t_n$ paraméterértékek esetén határozzuk meg (általában mindegyik t_i esetén több mérést végzünk). Például $t_1, t_2, \ldots, t_n$ terhelések mellett nézzük meg, hogy a mintaelemek hány százaléka szakad, vagy $t_1, t_2, \ldots, t_n$ napos csibék súlyát mérjük le.
A t_i paraméterérték mellett végzett kísérletek eredményei legyenek $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{ik_i}$ (k_i jelenti a t_i paraméterérték esetén végzett kísérletek számát).
Az $m(t) = M(\xi_t)$ függvényt — a legkisebb négyzetek módszerének felhasználásával — úgy becsülhetjük meg, hogy megkeressük azon $f(t)$ függvényt, amelyre a

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} (y_{ij} - f(t_i))^2$$

összeg a lehető legkisebb lesz.
Természetesen most sem az összes $f(t)$ függvény közül keressük a (16) kifejezést minimalizáló függvényt, hanem előre megadunk egy függvényosztályt (pl. a lineáris vagy kvadratikus függvények osztályát), és csak azt kérdezzük, hogy ezen függvényosztály elemei közül melyikre lesz a (16) kifejezés a lehető legkisebb.

(iii) Mérési hibák kiküszöbölése

Ismeretes, hogy egy vezető felmelegedése egyenesen arányos a vezetéken áthaladó áramerősség négyzetével. Az arányossági tényezőt megkaphatjuk, ha ismert áramerősségű áramot vezetünk keresztül a vezetéken és lemérjük a felmelegedést. A nehézséget az okozza, hogy a mérések nem pontosak. A mérési hibák kiküszöbölése céljából általában úgy járunk el, hogy különböző erősségű áramok esetén lemérjük a felmelegedéseket, és ezen adatokból próbálunk az ismeretlen arányossági tényezőre következtetni.
Általában a feladatot a következőképpen fogalmazhatjuk. Két mennyiség, x és y között ismert típusú függvénykapcsolat van, de nem ismerjük a függvényben szereplő egy vagy több paraméter értékét. Azaz

$$y = f(x;\, a_1, a_2, \ldots, a_k),$$

ahol $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ismeretlen paraméterek. Kísérleti úton (méréssel) meghatározzuk a függvény értékét, y-t, bizonyos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban (e pontok között lehetnek egyenlőek is). A kapott mérési eredmények legyenek rendre $y_1, y_2, \dots, y_n$. Feltételezzük, hogy mind az x_i, mind az y_i értékek mérésében hibát követhettünk el, azaz mikor azt gondoltuk, hogy az x_i pontban mérjük az y értékét, valójában egy $x_i+\xi_i$ pontban mértük, azaz x_i mérésénél ξ_i hibát követtünk el (pl. mérésünk azt mutatta, hogy a vezetéken x_i áramerősség halad át, de a valóban áthaladó áramerősség $x_i+\xi_i$ volt). Hasonlóan jelentse η_i az y_i mérésében elkövetett hibát, azaz bár mérésünk eredményeként y_i-t kaptunk (pl. felmelegedésként) a valódi érték $y_i+\eta_i$.

A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ hibák valószínűségi változók, amelyekről általában feltesszük, hogy függetlenek és normális eloszlásúak 0 várható értékkel.

Az $a_1, a_2, \dots, a_k$ ismeretlen paramétereket a mérési hibákkal terhelt $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ adatokból a legkisebb négyzetek módszerét felhasználva, úgy becsülhetjük meg, hogy az

$$F(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x; a_1, a_2, \dots, a_k))^2$$

összeget minimalizáljuk, azaz az $a_1, a_2, \dots, a_k$ értékeknek az $F(a_1, a_2, \dots, a_k)$ függvényt minimalizáló értékeket választjuk.

15.5.2.2 A regressziószámítás feladatainak osztályozása a kapcsolatot leíró függvényosztály típusa szerint

Az előző pontban említett mindhárom feladattípusban szereplő probléma matematikai szempontból úgy fogalmazható, hogy adott $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ értékek és egy adott F függvényosztály esetén meg kell találnunk az F függvényosztály azon $f(x)$ elemét, amelyre a

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \tag{17}$$

összeg a lehető legkisebb.

A regresszióanalízis feladatait most aszerint osztályozzuk, hogy az F függvényosztályt hogy választjuk meg.

(i) Lineáris regresszió

Lineáris regresszióról akkor beszélünk, ha az F függvényosztálynak a lineáris függvények (azaz az $y = ax+b$ alakú függvények) összességét választjuk. Ekkor feladatunk az

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

összeg minimalizálása, azaz azon a, b értékek megtalálása, amelyre $F(a, b)$ a lehető legkisebb. Az $F(a, b)$ függvényt minimalizáló a, b értékeket a

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)\, x_i = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0$$

egyenletek, azaz az

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

egyenletek megoldásával találhatjuk meg. Ezen egyenletek megoldásaként adódik, hogy

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

(ii) Kvadratikus regresszió

A kvadratikus regresszió feladata a (17) összeg minimalizálása, abban az esetben, midőn F a kvadratikus függvények osztálya. Azaz feladatunk az

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$$

összeg minimalizálása, vagyis azon a, b, c értékeket kell megtalálnunk, amelyre az $F(a, b, c)$ függvény a lehető legkisebb. A feladatot az $F(a, b, c)$ függvény differenciálásával oldhatjuk meg:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)\, x_i^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)\, x_i,$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c),$$

vagyis az $F(a, b, c)$ függvényt minimalizáló a, b, c értékek az

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2, \\ a \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i + cn &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned} \tag{18}$$

egyenletrendszer megoldásai.*

* Természetesen most is szükséges lenne bebizonyítani, hogy ezen egyenletrendszer megoldása az $F(a, b, c)$ függvénynek valóban szélsőértékét és éppen minimumát szolgáltatja, azonban ettől eltekintünk.

vagy valamely más hasonló ki
„legjobban közelítő” egyene
dását ilyen általános formában megadni,
ıpnánk. Inkább azt tanácsoljuk, hogy

által szolgáltatott egyene
eplő

Arra a kérdésre, hogy
minimális legyen,
deriváltjait

$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i$

zert.

1213

v segítsé-
ályoz-

ım halad keresztül. Az áram erős-
elegedés rendre 11, 12, 15, 22, 34,
rt áramerősség-növekedés és 11, 12,
ség és a tényleges felmelegedés ettől

(5; 22), (7; 34), (10; 61) pontokat
ha a mérésünk hibátlan lenne, egy

rdináta-rendszerünket úgy eltolni,
Ha például a koordináta-rendszer
tóljuk el, akkor a pontok koordinátái az eltolt koordináta-
rendszerben

$$(-4;\ -9),\quad (-3;\ -8),\quad (-2;\ -5),\quad (0;\ 2),\quad (2;\ 14),\quad (5;\ 41)$$

lesznek.

Számítsuk ki először (16) egyenletrendszerünk együtthatóit a transzformált adatokból. Adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -2,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 58,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 34,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 994,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 35,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 303,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 845.$$

$$\begin{aligned} 994a+34b+58c &= 845,\\ 34a+58b-\ 2c &= 303,\\ 58a-\ 2b+\ 6c &= 35. \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.
Ezen egyenletrendszer megoldása

$$a = 0{,}56;\quad b = 4{,}97;\quad c = 2{,}10.$$

Így az adatokat közelítő parabola egyenlete az eltolt koordináta-rendszerben

$$y = 0{,}56x^2+4{,}97x+2{,}10.$$

E parabola egyenlete az eredeti koordináta-rendszerben

$$y-20 = 0{,}56(x-5)^2+4{,}97(x-5)+2{,}10,$$

azaz

$$y = 0{,}56x^2-0{,}63x+11{,}25.$$

(iii) Exponenciális regresszió

Elméleti megfontolások alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy az ideális körülmények között élő állatállomány szaporodása exponenciális, azaz, ha ξ_t jelenti t idő múltán az állatok számát, akkor

$$M(\xi_t) = C_1 e^{C_2 t},$$

ahol C_1 jelenti a $t = 0$ időpontban jelen levő állatok számát (ez nem feltétlenül ismert), C_2 pedig a fajta szaporodóképességére jellemző konstans.*

Tegyük fel, hogy egy állatállományt megszámolunk az év bizonyos napjain, és a következő eredményekre jutunk:

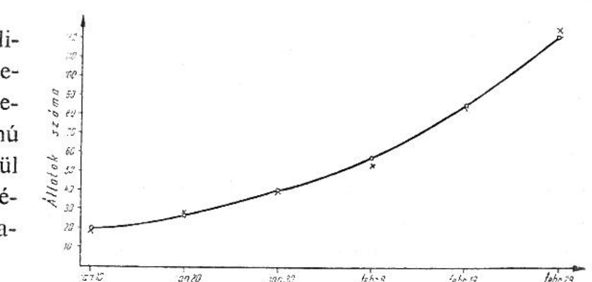
Időpont	Állatok száma
Jan. 10	19
Jan. 30	40
Febr. 19	90
Febr. 28	120

Ha adatainkat egy $y = f(t) = C_1 e^{C_2 t}$ típusú görbével kívánjuk közelíteni, akkor az

$$F(C_1, C_2) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - C_1 e^{C_2 t_i})^2 \qquad (n = 4)$$

összeget kell minimalizálnunk.

Az $F(C_1, C_2)$ függvényt minimalizáló C_1, C_2 értékpár — akár közelítő — meghatározása — még esetünkben is, amikor igen kis számú adattal dolgozunk — rendkívül fáradságos számolási munkát igényelne, ezért más módszerhez folyamodunk.



15.12 ábra

Ha az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adatok valóban egy $C_1 e^{C_2 t}$ típusú görbén fekszenek, azaz ha

$$y_i = C_1 e^{C_2 t_i},$$

akkor ezen adatok logaritmusai** egy egyenesen helyezkednek el, ugyanis

$$\log y_i = C_2 t_i + \log C_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

* A szaporodás exponenciális ütemének legfontosabb jellemzője, hogy az állatok számának kétszereződéséhez szükséges idő állandó és független az állatok számától. Az ENSZ-statisztikák szerint a Föld népessége is exponenciálisan nő, és a kétszereződéshez szükséges idő kevesebb, mint 50 év.

** Logaritmuson természetes logaritmust értünk.

Nem okozna nehézséget ezen egyenletrendszer megoldását ilyen általános formában megadni, azonban megoldásként túl bonyolult formulákat kapnánk. Inkább azt tanácsoljuk, hogy minden konkrét esetben az egyenletrendszerben szereplő

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^4, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^3, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i$$

együtthatókat kiszámítva oldjuk meg az egyenletrendszert.

Most nézzünk egy konkrét példát!

Tegyük fel, hogy egy vezetőn ismeretlen erősségű áram halad keresztül. Az áram erősségét 1, 2, 3, 5, 7, 10 amperrel megnövelve a felmelegedés rendre 11, 12, 15, 22, 34, 61 C°-nak adódott. (Pontosabban 1, 2, 3, 5, 7, 10 a mért áramerősség-növekedés és 11, 12, 15, 22, 34, 61 a mért felmelegedés, a tényleges áramerősség és a tényleges felmelegedés ettől eltérhet.)

Természetesnek látszik, hogy az (1; 11), (2; 12), (3; 15) (5; 22), (7; 34), (10; 61) pontokat egy $y = ax^2+bx+c$ típusú görbével közelítsük, ugyanis ha a mérésünk hibátlan lenne, egy ilyen görbe tökéletesen illeszkedne a pontokra.

Számolási munkánk megkönnyítése céljából célszerű koordináta-rendszerünket úgy eltolni, hogy a szereplő adatok mindegyike lehetőleg kicsi legyen. Ha például a koordináta-rendszer kezdőpontját az (5; 20) pontba toljuk el, akkor a pontok koordinátái az eltolt koordináta-rendszerben

$$(-4; -9), \quad (-3; -8), \quad (-2; -5), \quad (0; 2), \quad (2; 14), \quad (5; 41)$$

lesznek.

Számítsuk ki először (16) egyenletrendszerünk együtthatóit a transzformált adatokból. Adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -2, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 58, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 34, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 994,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 35, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 303, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 845.$$

$$994a+34b+58c = 845,$$
$$34a+58b-2c = 303,$$
$$58a-2b+6c = 35.$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

Ezen egyenletrendszer megoldása

$$a = 0{,}56; \quad b = 4{,}97; \quad c = 2{,}10.$$

Így az adatokat közelítő parabola egyenlete az eltolt koordináta-rendszerben

$$y = 0{,}56x^2+4{,}97x+2{,}10.$$

E parabola egyenlete az eredeti koordináta-rendszerben

$$y-20 = 0{,}56(x-5)^2+4{,}97(x-5)+2{,}10,$$

azaz

$$y = 0{,}56x^2-0{,}63x+11{,}25.$$

(iii) Exponenciális regresszió

Elméleti megfontolások alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy az ideális körülmények között élő állatállomány szaporodása exponenciális, azaz, ha ξ_t jelenti t idő múltán az állatok számát, akkor

$$M(\xi_t) = C_1 e^{C_2 t},$$

ahol C_1 jelenti a $t = 0$ időpontban jelen levő állatok számát (ez nem feltétlenül ismert), C_2 pedig a fajta szaporodóképességére jellemző konstans.*

Tegyük fel, hogy egy állatállományt megszámolunk az év bizonyos napjain, és a következő eredményekre jutunk:

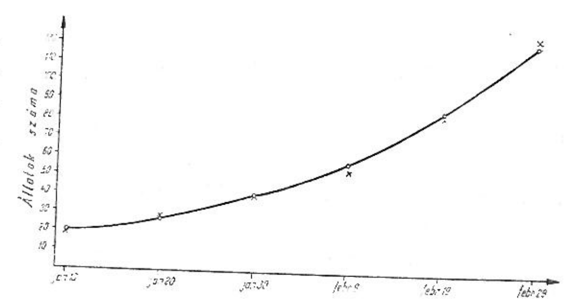
Időpont	Állatok száma
Jan. 10	19
Jan. 30	40
Febr. 19	90
Febr. 28	120

Ha adatainkat egy $y = f(t) = C_1 e^{C_2 t}$ típusú görbével kívánjuk közelíteni, akkor az

$$F(C_1, C_2) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - C_1 e^{C_2 t_i})^2 \qquad (n = 4)$$

összeget kell minimalizálnunk.

Az $F(C_1, C_2)$ függvényt minimalizáló C_1, C_2 értékpár — akár közelítő — meghatározása — még esetünkben is, amikor igen kis számú adattal dolgozunk — rendkívül fáradságos számolási munkát igényelne, ezért más módszerhez folyamodunk.



15.12 ábra

Ha az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adatok valóban egy $C_1 e^{C_2 t}$ típusú görbén fekszenek, azaz ha

$$y_i = C_1 e^{C_2 t_i},$$

akkor ezen adatok logaritmusai** egy egyenesen helyezkednek el, ugyanis

$$\log y_i = C_2 t_i + \log C_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

* A szaporodás exponenciális ütemének legfontosabb jellemzője, hogy az állatok számának kétszereződéséhez szükséges idő állandó és független az állatok számától. Az ENSZ-statisztikák szerint a Föld népessége is exponenciálisan nő, és a kétszereződéshez szükséges idő kevesebb, mint 50 év.

** Logaritmuson természetes logaritmust értünk.

Így ahelyett, hogy eredeti adatainkat közelítenénk egy exponenciális görbével, az adataink logaritmusait közelítjük egy egyenessel.* Esetünkben a transzformált adatok:

$$t_1 = 10 \quad y_1 = 19 \quad \log y_1 = 2{,}9444$$
$$t_2 = 30 \quad y_2 = 40 \quad \log y_2 = 3{,}6888$$
$$t_3 = 50 \quad y_3 = 90 \quad \log y_3 = 4{,}4998$$
$$t_4 = 60 \quad y_4 = 120 \quad \log y_4 = 4{,}7875.$$

Ezeket a pontokat a lineáris regresszió már ismert módszerével közelítve adódik az

$$y = 0{,}038x+2{,}55$$

egyenes. Így eredeti adataink az

$$y = e^{2,55}e^{0,038t} = 12{,}82e^{0,038t}$$

görbével közelíthetőek.

15.5.2.3 A regressziós görbékkel kapcsolatos hipotézisek vizsgálata

Eddigi feladatainkban mindig abból indultunk ki, hogy két mennyiség között ismerjük a függvénykapcsolat formáját, és csak a kapcsolatot leíró függvényben szereplő paraméterek értékét kell a statisztikai adatokból becsülnünk. Más szóval kiindulásként van egy hipotézisünk a függvénykapcsolat típusára. Természetesen előfordulhat, hogy a kapcsolatról nem tudunk eleget ahhoz, hogy biztosak lehessünk abban, hogy a függvényosztályra vonatkozó hipotézisünk valóban helyes, hanem a hipotézis helyes voltát is a statisztikai adatokból kívánjuk ellenőrizni.

Foglalkoztunk például azzal a kérdéssel, hogy anya- és leányállat tejhozama közötti kapcsolat miképpen jellemezhető. Abból indultunk ki, tudjuk hogy a kapcsolatot jellemző függvény lineáris, és csak a lineáris függvények közül kell kikeresnünk az adatokat legjobban közelítőt. Ha a statisztikai adatok felhasználásával kívánjuk ellenőrizni azon hipotézisünket, hogy a kapcsolat lineáris, akkor a következő módon okoskodhatunk. Határozzuk meg a legjobban közelítő egyenest, és nézzük meg, hogy adataink mennyire vannak közel a kapott, *legjobb* egyeneshez, ha általában közel fekszenek, akkor a hipotézis elfogadható, ellenkező esetben elvetendő.

Részletesebben csak egy igen speciális esetben dolgozzuk ki a regressziós görbék típusára vonatkozó hipotézisek ellenőrzésének próbáját. Nevezetesen a következő feltételek teljesülése esetén.

Legyen ξ és η két valószínűségi változó, és tegyük fel, hogy η normális eloszlású a $\xi = x$ feltétel teljesülése esetén, azaz

$$P(\eta < y \mid \xi = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt,$$

* Jegyezzük meg, hogy ezzel hibát követünk el. Ugyanis mi abból indultunk ki, hogy $M(\xi_t)$ egy exponenciális görbe, és így $\log M(\xi_t)$ lineáris. A hibát azzal követjük el, hogy mi a ξ_t értékét mérjük és ezen adatoknak vesszük a logaritmusát. A hibát az $M(\log \xi_t)$ és a $\log M(\xi_t)$ mennyiségek közötti különbség okozza, ami nem jelentős, ha $D^2(\xi_t)$ nem túl nagy.

ahol σ egy x-től független konstans és az $m = M(\eta \mid \xi = x)$ várható érték x-nek egy függvénye, amelyről

a H_0 hipotézis állítja, hogy az η és ξ közötti kapcsolat lineáris, azaz

$$y = M(\eta \mid \xi = x) = ax+b.$$

Ebben az esetben a H_0 hipotézist a következő módon ellenőrizhetjük.

Tegyük fel, hogy statisztikai adataink a következők:

$$(x_1, y_{11}),\ (x_1, y_{12}),\ (x_1, y_{13}),\ \ldots,\ (x_1, y_{1k_1})$$
$$(x_2, y_{21}),\ (x_2, y_{22}),\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ (x_2, y_{2k_2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x_n, y_{n1}),\ (x_n, y_{n2}),\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ (x_n, y_{nk_n}),$$

vagyis $\xi = x_i$ esetén k_i alkalommal határoztuk meg η értékét, és az

$$y_{i1},\ y_{i2},\ \ldots,\ y_{ik_i}$$

eredményekre jutottunk.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$N = \sum_{i=1}^{n} k_i; \quad \bar{y}_i = \frac{1}{k_i}\sum_{j=1}^{k_i} y_{ij}; \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} k_i\bar{y}_i.$$

és legyen az adatainkat legjobban közelítő egyenes egyenlete

$$y = ax+b.$$

Ekkor a σ^2 szórásnégyzet az

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j=1}^{k_i} (y_{ij}-\bar{y}_i)^2}{k_i-1}\,\frac{1}{n}$$

mennyiséggel becsülhető, és mint ez könnyen belátható, a H_0 hipotézis teljesülése esetén a

$$t = \frac{\eta-(ax+b)}{s^2}$$

valószínűségi változó $f = N-n$ paraméterű t-eloszlású (feltéve, hogy η értékét a $\xi = x$ feltétel teljesülése esetén határozzuk meg). Így a t-táblázat alkalmazásával kapjuk, hogy

$$P\big(ax+b-t(f,\varepsilon) \leqq \eta \leqq ax+b+t(f,\varepsilon)\big) = 1-\varepsilon,$$

ahol $t(f, \varepsilon)$ jelenti az f paraméterű t táblázatnak az ε értékhez tartozó pontját. Így a H_0 hipotézis teljesülése esetén a pontok $100(1-\varepsilon)\%$-a az

$$y = ax+b-t(f, \varepsilon),$$

és az $\quad y = ax+b+t(f, \varepsilon)$

egyenesek közé esik. Így abban az esetben, ha az adatoknak legfeljebb $100\varepsilon\%$-a esik az említett két egyenesen kívül, akkor a H_0 hipotézist ε-szinten elfogadhatjuk, ellenkező esetben elvetjük.

15.5.2.4 Konfidenciaintervallum a regressziós görbe körül

Foglalkoztunk azzal a kérdéssel, hogy valamely állatállomány számának növekedése, hogy függ az időtől. Statisztikai adataink felhasználásával azt találtuk, hogy ha ξ_t jelenti az állatok számát t idő múltán, akkor ξ_t várható értéke a következő exponenciális görbével közelíthető:

$$y = M(\xi_t) = 12{,}82e^{0{,}038t}.$$

Ezen eredmény alapján arra is becslést adhatunk, hogy mi lesz az állatok száma egy hosszabb idő elteltével. Például az állatok száma márc. 15-én – feltéve, hogy a növekedés üteme változatlan –, körülbelül

$$M(\xi_{74}) = 12{,}82e^{0{,}038\cdot 74} = 214{,}1 \quad \text{lesz.}$$

Most azt a kérdést vizsgáljuk, hogy ez a becslés mennyire tekinthető pontosnak. A következő feltételből indulunk ki:
ξ_t minden fix t-re normális eloszlású, azaz

$$P(\xi_t < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}\,du,$$

ahol

$$m = m_t = M(\xi_t) = 12{,}82e^{0{,}038t},$$

és a σ^2 szórásnégyzet t-től független konstans.
Ekkor a σ^2 szórásnégyzet az adatokból az

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_{t_i}-m_{t_i})^2}{n} = 16{,}43$$

mennyiséggel becsülhető.
Ebből következik, – a t-táblázat szerint – hogy az adatok 0,95 valószínűséggel a

$$12{,}82e^{0{,}038t}-11{,}5,$$

és a $\quad 12{,}82^{0{,}038t}+11{,}5$

görbék közé esnek. Így például az állatok száma márc. 15-én 0,95 valószínűséggel

$$202{,}6 \quad \text{és} \quad 225{,}6$$

között lesz.

Jelen esetben az a feltétel, hogy a σ^2 szórásnégyzet t-től független konstans, elég irreálisnak tűnik. Talán reálisabb az a feltevés, hogy a σ^2/m relatív szórás t-tól független konstans. E feltétel alkalmazása esetén is kaphatunk ξ_t-re egy konfidenciaintervallumot.

15.5.2.5 Többváltozós regresszió

Az eddigiekben *két* mennyiség közötti kapcsolatot próbáltuk egy függvénnyel jellemezni. Gyakran előfordul azonban, hogy *több* valószínűségi változó közötti kapcsolatot kívánunk egy függvénnyel jellemezni.
Tegyük fel, hogy például azt vizsgáljuk, egy erdőben levő fák súlya, miképpen függ a fa magasságától és a fa törzsének átmérőjétől. Jelentse ζ egy véletlenszerűen kiválasztott fa súlyát, ξ ugyanezen fa magasságát, η törzsének átmérőjét. Nyilvánvaló, hogy ξ és η értékének ismerete még nem határozza meg egyértelműen ζ értékét, de vizsgálhatjuk, hogyan függ ζ várható értéke a ξ és η értékétől, azaz vizsgálhatjuk a

$$z = z(x, y) = M(\zeta \mid \xi = x, \eta = y)$$

függvényt. Tegyük fel, hogy tudjuk (vagy sejtjük), hogy a $z(x, y)$ függvény lineáris, azaz

$$z = z(x, y) = Ax+By+C,$$

és statisztikai adatokból kívánjuk meghatározni A, B, C értékekét.
Mérjük le n véletlenszerűen kiválasztott fa esetében a szóban forgó három adatot (magasság, átmérő, súly), és legyenek méréseink eredményei az

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$$

mennyiségek.
Ekkor a legkisebb négyzetek módszere szerint az A, B, C paramétereket úgy választhatjuk meg, hogy az

$$F(A, B, C) = \sum_{i=1}^{n}(z_i-Ax_i-By_i-C)^2$$

összeg a lehető legkisebb legyen. Az $F(A, B, C)$ függvényt minimalizáló A, B, C, értékeket úgy találhatjuk meg, hogy megoldjuk a

$$\frac{\partial F(A, B, C)}{\partial A} = -2\sum_{i=1}^{n}(z_i-Ax_i-By_i-C)\,x_i = 0,$$

$$\frac{\partial F(A, B, C)}{\partial B} = -2\sum_{i=1}^{n}(z_i-Ax_i-By_i-C)\,y_i = 0,$$

$$\frac{\partial F(A, B, C)}{\partial C} = -2\sum_{i=1}^{n}(z_i-Ax_i-By_i-C) = 0,$$

azaz az

$$A \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + B \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + C \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

$$A \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + B \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + C \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} z_i y_i$$

$$A \sum_{i=1}^{n} x_i + B \sum_{i=1}^{n} y_i + Cn = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

egyenleteket.

Természetesen a többváltozós regressziós analízissel kapcsolatban is felvethetjük az egyváltozós esetben vizsgált kérdéseket (sőt több újabb kérdések is vetődnek fel), de ezekre itt nem térünk ki.

16. LINEÁRIS ALGEBRA

Tegyük fel, hogy az országban valamely gépalkatrészt n helyen gyártanak és m helyen használnak fel. A gyárak legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a felhasználó helyek legyenek $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Jelentse b_j a szóban forgó alkatrészből a B_j helyen felhasználásra kerülők számát, és hasonlóan a_i jelentse a vizsgált alkatrészből az A_i gyárban gyártott mennyiséget.

Feladatunk megadni a szállítás programját (azaz megmondani, hogy melyik gyárból mennyit szállítsunk az egyes felhasználó helyekre) úgy, hogy a szállítási költség minimális legyen. Természetesen feltételezzük, hogy az A_i pontról a B_j pontra való szállítás költségét ismerjük. Legyen ez c_{ij} (azaz c_{ij} egy darab alkatrész szállítási költsége A_i-ból B_j-be).* Ugyancsak feltételezzük, hogy a kérdéses gépalkatrészből a gyártásra és felhasználásra kerülők száma megegyezik.

Ha x_{ij} jelenti az i-edik gyárból a j-edik felhasználó helyre szállított mennyiséget, akkor feladatunk már tiszta matematikai formában a következőképpen fogalmazható.

Keressük azon x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$ mennyiségeket, amelyekre

(1) $$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

(2) $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

(3) $$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$ és a

(4) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

összeg a lehető legkisebb. Feltesszük, hogy a_i, b_j, c_{ij} nemnegatív mennyiségek, és hogy

(5) $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

* Természetesen azt is feltételezzük, hogy a szállítási költség a darabszámmal arányosan nő, azaz k darab alkatrész szállítási költsége kc_{ij}.

Nézzük meg, hogy feladatunk matematikai megfogalmazásában szereplő formuláknak mi a jelentésük. A (4) összeg jelenti a szállítás összköltségét (ezt akarjuk minimalizálni). Nyilván meg kell követelnünk, hogy az i-edik gyárból a j-edik felhasználó helyre szállított mennyiség nemnegatív legyen, (1) feltétel. A (2) feltétel azt jelenti, hogy a j-edik helyre szállított mennyiség megegyezzen az ott felhasználásra kerülő mennyiséggel, míg a (3) feltétel azt jelenti, hogy az A_i helyről elszállított mennyiség megegyezik az ott jelenlevő mennyiséggel. Az (5) feltétel kikötése azt jelenti, hogy a gyártott és a felhasználásra kerülő mennyiség megegyezik. Az (5) feltétel természetesen pótolható a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq \sum_{j=1}^{m} b_j$$

feltétellel. Ebben az esetben a (3) feltételt természetesen a

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leqq a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

feltétellel kellene pótolnunk.

Nézzünk egy konkrét példát!

Legyen a gyártó helyek száma $n = 2$, a felhasználó helyek száma $m = 3$. A gyártott mennyiség legyen az

A_1 helyen $a_1 = 10$,

A_2 helyen $a_2 = 15$,

a felhasználásra kerülő mennyiség legyen a

B_1 helyen $b_1 = 7$,

B_2 helyen $b_2 = 9$,

B_3 helyen $b_3 = 9$.

Az egy darabra jutó szállítási költségek legyenek

A_1-ből B_1-be: $c_{11} = 1$, A_2-ből B_1-be: $c_{21} = 3$,

A_1-ből B_2-be: $c_{12} = 2$, A_2-ből B_2-be: $c_{22} = 5$,

A_1-ből B_3-ba: $c_{13} = 3$, A_2-ből B_3-ba: $c_{23} = 1$.

Ekkor feladatunk az x_{ij} $(i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$ mennyiségeket úgy megválasztani, hogy teljesüljenek az

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3),$$

(6) $x_{11}+x_{12}+x_{13} = 10$,

(7) $x_{21}+x_{22}+x_{23} = 15$,

(8) $x_{11}+x_{21} = 7$,

(9) $x_{12}+x_{22} = 9$,

(10) $x_{13}+x_{23} = 9$

feltételek, és

$$K = x_{11}+2x_{12}+3x_{13}+3x_{21}+5x_{22}+x_{23}$$

összeg a lehető legkisebb legyen.

Az x_{ij} számokra az $x_{ij} \geqq 0$ kikötésen kívül 5 egyenletünk van, azonban ezen egyenletek közül a (10) egyenlet következménye a többinek, így csak 4 független egyenlettel és 6 ismeretlennel rendelkezünk. Ez azt jelenti, hogy az x_{ij} mennyiségek közül négyet ki tudunk fejezni mint a másik kettő függvényét. Fejezzük ki például az x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23} ismeretleneket mint az x_{21} és x_{22} függvényét. A (6)–(9) egyenletrendszerünkből adódik, hogy

$$x_{11} = 7-x_{21},$$
$$x_{12} = 9-x_{22},$$
$$x_{13} = 10-(x_{11}+x_{12}) = 10-(7-x_{21})-(9-x_{22}) = x_{21}+x_{22}-6,$$
$$x_{23} = 15-x_{21}-x_{22}.$$

Mivel feltettük, hogy $x_{ij} \geqq 0$, az x_{21} és x_{22} mennyiségekre a következő feltételeknek kell teljesülniük:

$$0 \leqq x_{21} \leqq 7,$$
$$0 \leqq x_{22} \leqq 9,$$
$$6 \leqq x_{21}+x_{22} \leqq 15.$$

x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23} kapott értékét K kifejezésébe helyettesítve adódik, hogy

$$K = (7-x_{21})+2(9-x_{22})+3(x_{21}+x_{22}-6)+3x_{21}+5x_{22}+(15-x_{21}-x_{22}) =$$
$$= 22+4x_{21}+5x_{22} = 22+4(x_{21}+x_{22})+x_{22}.$$

Azonnal látható, hogy K értéke akkor lesz a legkisebb, ha $x_{21}+x_{22}$ és x_{22} a lehető legkisebb, azaz ha $x_{21}+x_{22} = 6$ és $x_{22} = 0$. Így a minimális összköltségű szállítási program a következő:

$$x_{21} = 6,\ x_{22} = 0,\ x_{11} = 1,\ x_{12} = 9,\ x_{13} = 0,\ x_{23} = 9.$$

Ebben az esetben a szállítási költség

$$K = 22+4(6+0)+0 = 46.$$

Természetesen a gyakorlatban mind a gyárak, mind a felhasználó helyek száma nagyobb az itt közölt példában szereplő számoknál. Abban az esetben, ha n és m (a gyártó és felhasználó helyek száma) nagy, akkor az előbbi példában mutatott módszerek nem alkalmasak a feladat megoldására. Célunknak éppen azt tekintjük, hogy olyan módszereket találjunk, amelyek segítségével hasonló feladatokat meg tudunk oldani akkor is, ha a feladatban szereplő ismeretlenek száma $(n+m)$ nagy.

A következő példa is hasonló matematikai problémához vezet.

Az állatok takarmányozása során gondot kell fordítanunk arra, hogy a takarmányféleségeket úgy válogassuk össze, hogy bizonyos alapanyagokból elegendő mennyiség jusson az állatoknak, de ugyanakkor lehetőleg olcsó takarmányféleségekkel tudjuk a takarmányozást megoldani.

A szükséges alapanyagok legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a rendelkezésünkre álló takarmányféleségek $T_1, T_2, \ldots, T_m$. Tegyük fel, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ alapanyagokból egy állat napi szükséglete rendre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a T_i takarmányféleség egy kg-ja az A_j alapanyagból p_{ij} egységnyit tartalmaz, a T_i takarmányféleség 1 kg-jának ára f_i.

Jelentse $x_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ a T_i takarmányból egy állatnak adott napi mennyiséget. Ekkor feladatunk a következőképpen fogalmazható.
Keressük azon x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ mennyiségeket, amelyekre

$$x_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$p_{11}x_1+p_{21}x_2+\ldots+p_{m1}x_m \geqq a_1,$$
$$p_{12}x_1+p_{22}x_2+\ldots+p_{m2}x_m \geqq a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_{1n}x_1+p_{2n}x_2+\ldots+p_{mn}x_m \geqq a_n,$$

és a $\qquad K = x_1f_1+x_2f_2+\ldots+x_nf_n$

összeg a lehető legkisebb.
Itt a $p_{11}x_1+p_{12}x_2+\ldots+p_{m1}x_m$ összeg jelenti az A_1 alapanyagból egy állatnak jutó napi mennyiséget. Így az a kikötés, hogy ez az összeg nagyobb, mint a_1, megfelel eredeti kikötésünknek.
E feladat megoldása is csak akkor okoz nehézséget, ha az $n+m$ szám túl nagy. Kis n és m esetén a feladat elemi algebrai vagy geometriai ismeretek alapján megoldható. Nézzünk egy példát!

Legyen $\qquad m = 2, \quad n = 3, \quad$ továbbá

$$a_1 = 14, \quad a_2 = 30, \quad a_3 = 10,$$
$$p_{11} = 4, \quad p_{12} = 3, \quad p_{13} = 0,$$
$$p_{21} = 2, \quad p_{22} = 7, \quad p_{23} = 8,$$
$$f_1 = 6, \quad f_2 = 7.$$

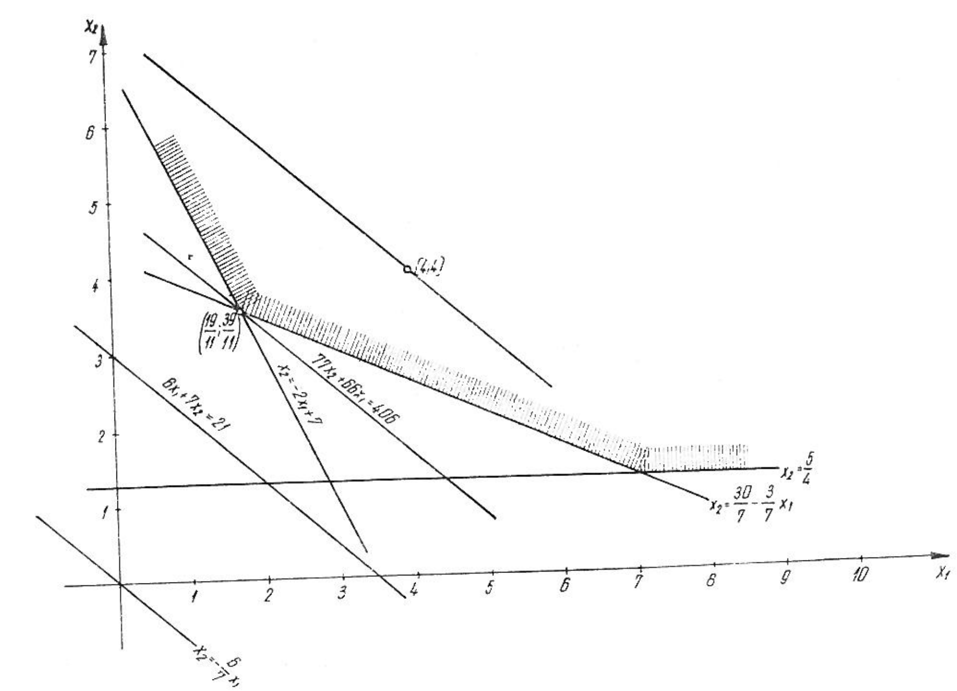
Ekkor feladatunk megtalálni azon x_1, x_2 nemnegatív számokat, amelyekre

$$4x_1+2x_2 \geqq 14,$$
$$3x_1+7x_2 \geqq 30,$$
$$8x_2 \geqq 10,$$

és a $\qquad 6x_1+7x_2$

összeg a lehető legkisebb.
E feladatot analitikus geometriai módszerekkel próbáljuk megoldani. Tekintsünk egy X_1, X_2 koordináta-rendszert, és vizsgáljuk meg, hogy koordináta-rendszerünk mely (x_1, x_2) pontjaiban teljesül mindhárom egyenlőtlenségünk.

A $8x_2 \geqq 10$, azaz $x_2 \geqq \frac{5}{4}$ egyenlőtlenség akkor teljesül, ha (x_1, x_2) pontunk az $x_2 = \frac{5}{4}$ egyenes felett helyezkedik el (16.1 ábra). Hasonlóan a $4x_1+2x_2 \geqq 14$ egyenlőtlenség azon (x_1, x_2) pontokra teljesül, amelyek az $x_2 = 2x_1+7$ egyenes felett helyezkednek el, míg a harmadik egyenlőtlenség akkor teljesül, ha az (x_1, x_2) pont az $x_2 = \frac{30}{7} - \frac{3}{7}x_1$ egyenes felett van. Így mindhárom egyenlőtlenségünk egy-egy félsík pontjaiban teljesül. E három félsík közös része tartalmazza azon (x_1, x_2) pontokat, amelyeknek koordinátáira a felírt három egyenlőtlenség mindegyike teljesül. Ezzel megkaptuk egyenlőtlenségrendszerünk összes megoldásainak halmazát. Most már feladatunk abban áll, hogy meghatározzuk, hogy e halmaz mely elemére lesz a $6x_1+7x_2$ összeg a lehető legkisebb.
E minimalizáló (x_1, x_2) értékpárt is előbbi geometriai módszerünk alkalmazásával keressük meg. Vegyük először észre, hogy az X_1, X_2 koordináta-rendszerben a $6x_1+7x_2 = C$ egyenesek (C tetszőleges konstans) egymással párhuzamosak, iránytangensük C-től függetlenül $-\frac{6}{7}$ (16.1 ábra). Ennek megfelelően, ha az $x_2 = -\frac{6}{7}x_1$ egyenessel a megoldáshalmaznak például a (4; 4) pontján keresztül párhuzamost húzunk, akkor a $6x_1+7x_2$ összeg értéke (vagyis a takarmányok költsége) ugyanaz lesz a szóban forgó egyenes minden pontjában. Feladatunk most már tisztán geometriai formában a következő módon fogalmazható. Keressük a $6x_1+7x_2 = C$ alakú egyenlettel rendelkező egyenesek (vagyis az $x_2 = -\frac{6}{7}x_1$ egyenessel párhuzamos egyenesek) közül azt, amely metszi az ábrán vonalkázott megoldástartományt, és amelynek egyenletében szereplő C érték a lehető legkisebb. Ábránkból látható



16.1 ábra

(és számításokkal is könnyen ellenőrizhető), hogy ez az egyenes az $x_2 = -2x_1+7$ és az $x_2 = \frac{30}{7} - \frac{3}{7}x_1$ egyenesek metszéspontján, azaz a $\left(\frac{19}{11}; \frac{39}{11}\right)$ ponton átmenő $77x_2+66x_1 = 406$ egyenletű egyenes.
Így feladatunk megoldása

$$x_1 = \frac{19}{11}, \quad x_2 = \frac{39}{11},$$

és e takarmányozási terv esetén a költség $K = 406/11$.
A most megoldott feladaton még egy jelenséget figyelhetünk meg. Egyenlőtlenségeink bal oldalai, azaz a

$$\begin{array}{ll} & 4x_1+2x_2, \\ (11) & 3x_1+7x_2 \\ & 8x_2 \end{array}$$

kifejezések megadják, hogy egy (x_1, x_2) takarmányozási terv alkalmazása esetén (azaz ha az első takarmányfajtából x_1, a másodikból x_2 mennyiséget adunk), mennyi alapanyaghoz jutnak az állatok. Vagyis egyenlőtlenségeink bal oldalai az (x_1, x_2) takarmányozási tervhez (matematikailag szólva: az (x_1, x_2) kétdimenziós vektorhoz) hozzárendelik az

$$y_1 = 4x_1+2x_2,$$
$$y_2 = 3x_1+7x_2,$$
$$y_3 = 8x_2$$

alapmennyiségeket (azaz az (y_1, y_2, y_3) háromdimenziós vektort). Így a (11) kifejezések a kétdimenziós tér minden vektorához hozzárendelik a háromdimenziós tér egy vektorát.
E megfeleltetésnek két könnyen belátható tulajdonsága van:

a) Ha $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ és $\mathbf{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$

két vektor, akkor az összegükhöz rendelt $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektor megegyezik az $\mathbf{x}^{(1)}$-hez rendelt $\mathbf{y}^{(1)} = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)})$ és az $\mathbf{x}^{(2)}$-höz rendelt $\mathbf{y}^{(2)} = (y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, y_3^{(2)})$ vektor összegével, azaz

$$y_1 = 4(x_1^{(1)}+x_1^{(2)})+2(x_2^{(1)}+x_2^{(2)}) = (4x_1^{(1)}+2x_2^{(1)})+(4x_1^{(2)}+2x_2^{(2)}) = y_1^{(1)}+y_1^{(2)},$$
$$y_2 = 3(x_1^{(1)}+x_1^{(2)})+7(x_2^{(1)}+x_2^{(2)}) = (3x_1^{(1)}+7x_2^{(1)})+(3x_1^{(2)}+7x_2^{(2)}) = y_2^{(1)}+y_2^{(2)},$$
$$y_3 = 8(x_2^{(1)}+x_2^{(2)}) = 8x_2^{(1)}+8x_2^{(2)} = y_3^{(1)}+y_3^{(2)}.$$

b) Ha $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ egy vektor, akkor a $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ vektorhoz rendelt $\mathbf{y}' = (y_1', y_2', y_3')$ vektor megegyezik az $\mathbf{x}$-vektorhoz rendelt $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektor λ-szorosával, azaz

$$y_1' = 4\lambda x_1+2\lambda x_2 = \lambda(4x_1+2x_2) = \lambda y_1,$$
$$y_2' = 3\lambda x_1+7\lambda x_2 = \lambda(3x_1+7x_2) = \lambda y_2,$$
$$y_3' = 8\lambda x_2 = \lambda(8x_2) = \lambda y_3.$$

Az olyan hozzárendeléseket (leképzéseket, operátorokat,) amelyek rendelkeznek az említett tulajdonsággal, *lineáris hozzárendelés*eknek, *leképezés*eknek, *operátor*oknak nevezzük.

Először az ilyen leképezések tulajdonságaival fogunk foglalkozni. Mivel feladatainkban általában háromnál több változó van, azért a geometriai fogalmak használata nehézségekbe ütközik. Hogy ezt elkerüljük először az n-dimenziós euklideszi tér fogalmát vezetjük be.

16.1 AZ n-DIMENZIÓS EUKLIDESZI TÉR

Jól tudjuk, hogy a koordinátageometriában a kétdimenziós euklideszi tér (azaz a sík) pontjait (vektorait) koordinátáikkal, azaz számpárokkal jellemeztük. Természetesen nemcsak azt mondhatjuk el, hogy a sík minden egyes pontjának megfeleltethető egy számpár (az illető pont koordinátáiból álló számpár), hanem fordítva, azt is állíthatjuk, hogy minden egyes számpárnak megfelel a koordináta-rendszer (azaz a sík) egy pontja, vektora. Így – és ezt teszi a koordinátageometria – a sík pontjai és geometriai idomai helyett számpárokról és ezek közötti algebrai kapcsolatokról beszélhetünk. Persze ahhoz, hogy minden geometriai tulajdonságot ki tudjunk fejezni algebrailag, szükséges tudnunk, hogy az egyes síkidomok pontjai között milyen – algebrai jellegű – kapcsolatok vannak. Ezt általában a geometriai alakzatok egyenleteivel megadjuk.
A jelen fejezet bevezetésében vizsgált második példa azt hivatott szemléltetni, hogy a koordinátageometria nemcsak abból a szempontból hasznos, hogy segítségével geometriai feladatokat algebrai úton oldhatunk meg, hanem fordítva, bizonyos algebrai feladatok megoldását is megkönnyítheti a geometriai szemléltetés. A geometriai szemléltetés nehézségbe ütközik, ha az algebrai feladatban szereplő változók száma háromnál nagyobb.
Ezen a nehézségen segít az *n-dimenziós euklideszi tér* fogalmának bevezetése. A két- és háromdimenziós térnél tapasztalt tényeknek megfelelően bevezetjük a következő definíciót.

Definíció. n-dimenziós euklideszi térnek nevezzük az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szám n-esek, vektorok (pontok) összességét.
Hangsúlyozni kívánjuk, hogy $n > 3$ esetén az n-dimenziós tér szemléletesen (geometriailag) nem képzelhető el. Az, hogy a szám-n-eseket pontoknak nevezzük és más geometriai kifejezésekkel is élünk, kizárólag arra szolgál, hogy a geometriai jelenségekhez való analógiára utaljunk, és ezzel ötleteket adjunk a jelenségek felismeréséhez.
A két- és háromdimenziós koordinátageometriában ki kellett „számítanunk", hogy mi az egyes geometriai alakzatok egyenlete. Beláttuk például, hogy két dimenzióban az egyenes egyenlete $Ax+By = C$, hogy három dimenzióban a sík egyenlete $Ax+By+Cz = D$. Kérdezhetjük, hogy a négydimenziós térben milyen geometriai alakzat felel meg a síkban szereplő egyenesnek, illetve a térben szereplő síknak. Mivel a négydimenziós térről semmi szemléletes elképzelésünk nincs, ezért a megfelelő idomot is csak algebrailag tudjuk jellemezni. Azt mondhatjuk például, hogy a négydimenziós térben síknak (hipersíknak) nevezzük azon (x_1, x_2, x_3, x_4) pontok összességét, amelyekre $A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4x_4 = B$ (ahol A_1, A_2, A_3, A_4; B rögzített valós számok). Ennek megfelelően bevezethetjük a következő definíciót.

Definíció. az n-dimenziós térben *hipersík*nak ($n-1$-dimenziós hipersíknak) nevezzük azon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontok halmazát, amelyekre

$$A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n = B, \tag{12}$$

ahol $A_1, A_2, \ldots, A_n$; B adott valós számok. A (12) egyenletet a hipersík egyenletének nevezzük. Két vagy több hipersík közös részét is hipersíknak nevezzük.
Az n-dimenziós tér egy *félter*ének nevezzük azon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontok halmazát, amelyekre teljesül az

$$A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n \geqq B$$

vagy $$A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n \leqq B \quad \text{egyenlőtlenség.}$$

Hasonló módon bevezethetünk más definíciókat is, azonban még egyszer hangsúlyoznunk kell, hogy a szereplő definíciók önkényesek, kizárólag a két és három dimenzióban *bizonyított* tételekhez való analógián alapulnak.

Definíció. Az n-dimenziós tér két pontjának, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$-nek és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$-nek távolságán a

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

mennyiségét értjük.

Definíció. Két vektor, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ összegén értjük a

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

vektort.

Definíció. Egy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor λ-szorosán (λ valós szám) értjük a

$$\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

vektort.

Definíció. Két vektor (pont) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ összekötő szakaszán értjük a

$$\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}$$

alakú vektorok összességét, ahol λ végigfut a $[0; 1]$ intervallum összes pontján.
Nyilvánvaló, hogy a $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}$ pont az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ pontokat összekötő szakaszt $\lambda:(1-\lambda)$ arányban osztja, azaz

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) : d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (1-\lambda) : \lambda.$$

Definíció. Az n-dimenziós tér egy halmazát *konvex*nek nevezzük, ha e halmaz bármely két pontját összekötő szakasz is a halmazhoz tartozik.

Definíció. Az n-dimenziós tér véges számú félterének közös részét *poliéder*nek nevezzük. Egy poliéder egy pontját *extremális pont*nak (csúcsnak) nevezzük, ha nem belső pontja a poliéder valamely két másik pontját összekötő szakasznak.

Definíció. Az n-dimenziós tér

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

vektorait koordináta-egységvektornak nevezzük.
A két- és háromdimenziós térben láttuk, hogy két vektor hajlásszögét (pontosabban a szög koszinuszát) az irányukba mutató egységvektorok skaláris szorzata segítségével jellemezhetjük. Ennek megfelelően az n-dimenziós térben is bevezetjük két vektor skaláris szorzatának fogalmát.

Definíció. Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és az $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektorok *skaláris szorzat*ának nevezzük az

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

mennyiséget. Az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorokat *ortogonális*nak nevezzük, ha skaláris szorzatuk 0.

Definíció. A

$$\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\ldots+\lambda_r\mathbf{x}_r$$

vektort az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ vektorok *lineáris kombinációj*ának nevezzük.
Könnyen belátható, hogy az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ vektorok lineáris kombinációinak összessége egy hipersíkot alkot. E hipersíkot az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ vektorok által kifeszített hipersíknak nevezzük.

Tekintsük példaként egy háromdimenziós tér

$$\mathbf{x}_1 = (1, 1, -2), \quad \mathbf{x}_2 = (1, -1, 0)$$

vektorait. Azonnal belátható, hogy e vektorok rajta vannak az

$$x+y+z = 0$$

síkon (hiszen koordinátáik kielégítik ezt az egyenletet). Fordítva, $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ egy tetszőleges lineáris kombinációja

$$\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2 = (\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1-\lambda_2, -2\lambda_1)$$

alakú, így pontja az

$$x+y+z = 0$$

síknak. Az is könnyen látható, hogy e sík bármely pontja megkapható mint az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ vektorok lineáris kombinációja.

Tekintsük továbbá a háromdimenziós tér

$$\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (2, 2, 0), \quad \mathbf{x}_3 = (-1, -1, 0)$$

vektorait. Azonnal belátható, hogy e vektorok mindegyike az X, Y koordinátasíkban helyezkedik el, sőt mindegyik rajta van az

$$y = x$$

egyenesen. Ezen egyenes bármely pontja megkapható mint az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ lineáris kombinációja, és az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ bármely lineáris kombinációja pontja lesz az $y = x$ egyenesnek.

Definíció. Az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ vektorokat lineárisan függetleneknek nevezzük, ha abból, hogy

$$\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\ldots+\lambda_r\mathbf{x}_r = 0,$$

következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$. Ez más szóval azt jelenti, hogy az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ vektorok egyike sem fejezhető ki mint a többi $r-1$ lineáris kombinációja.
Könnyen belátható, hogy az n-dimenziós térben n lineárisan független vektor megadható, (például a koordináta-egységvektorok) de $n+1$ már nem.

Megjegyzés. Ha az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektorok között a lineárisan függetlenek maximális száma t, akkor e vektorok által kifeszített hipersíkot t-dimenziós hipersíknak nevezzük. Az első példában szereplő 2 vektor lineárisan független, az általuk kifeszített hipersík (sík) kétdimenziós. A második példában szereplő 3 vektor között nincs két lineárisan független, így az általuk kifeszített hipersík (egyenes) 1-dimenziós.

Definíció. Az n-dimenziós tér n lineárisan független vektorát a tér egy *bázisának* nevezzük. Így például a koordináta-egységvektorok bázist alkotnak. A koordináta-egységvektoroknak egy fontos tulajdonsága volt az, hogy a tér bármely vektora kifejezhető ezen n koordináta-egységvektor lineáris kombinációjaként. A lineáris függetlenség fogalmából (valamint abból, hogy $n+1$ független vektor nem adható meg az n-dimenziós térben) azonnal következik, hogy e tulajdonsággal bármely bázis rendelkezik, azaz a tér bármely vektora kifejezhető a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Más szóval, ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok az n-dimenziós tér egy bázisát alkotják és $\mathbf{b}$ a tér egy tetszőleges vektora, akkor található egy $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valós szám-n-es úgy, hogy

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{a}_n.$$

Megjegyzés. A lineáris függetlenség fogalmából az is nyilvánvaló, hogy a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ számok egyértelműen meg vannak határozva (a $\mathbf{b}$ vektor és az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ báziselemek által).

Az

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3), \qquad \mathbf{a}_2 = (3, 0, 1), \qquad \mathbf{a}_3 = (1, -1, 0)$$

vektorok a háromdimenziós tér egy bázisát alkotják. Ezen állítás igazolásához azt kell csak belátnunk, hogy ha

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\lambda_3\mathbf{a}_3 = 0,$$

azaz ha

$$\begin{aligned} &\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3 = 0,\\ (13)\qquad &2\lambda_1 \qquad -\lambda_3 = 0,\\ &3\lambda_1+\lambda_2 \qquad = 0, \end{aligned}$$

akkor $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Annak igazolását, hogy a (13) egyenletrendszernek a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ triviális megoldáson kívül más megoldása nincs, az olvasóra bízzuk.
Most vizsgáljuk meg azt, hogy a

$$\mathbf{b} = (0, 2, 1)$$

vektort hogyan lehet az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként felírni, vagyis, hogyan lehet megtalálni azon μ_1, μ_2, μ_3 számokat, amelyekre

$$\mu_1\mathbf{a}_1+\mu_2\mathbf{a}_2+\mu_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b},$$

azaz amelyekre

$$\begin{aligned} &\mu_1+3\mu_2+\mu_3 = 0,\\ (14)\qquad &2\mu_1 \qquad -\mu_3 = 2,\\ &3\mu_1+\mu_2 \qquad = 1. \end{aligned}$$

A (14) egyenletrendszer megoldásaként adódik, hogy

$$\mu_1 = \frac{1}{6}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}, \quad \mu_3 = -\frac{5}{3},$$

azaz

$$\mathbf{b} = \frac{1}{6}\mathbf{a}_1+\frac{1}{2}\mathbf{a}_2-\frac{5}{3}\mathbf{a}_3.$$

A következőkben gyakran lesz szükségünk arra, hogy valamely $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektort egy adott bázis elemeinek segítségével írjunk fel, vagy hogy egy bázis elemeinek lineáris kombinációjával megadott vektort valamely más bázis segítségével is kifejezzünk.
Most megismerkedünk egy olyan módszerrel, amelynek segítségével ilyen típusú feladatot viszonylag könnyen megoldhatunk.
Feladatunk pontosabban megfogalmazva a következőképpen hangzik.
Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ és $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ az n-dimenziós térnek bázisai, továbbá legyen $\mathbf{b}$ az n-dimenziós térnek egy adott vektora. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a}_i$ vektorok segítségével a következő módon írható fel:

$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{a}_1+\beta_2\mathbf{a}_2+\ldots+\beta_n\mathbf{a}_n.$$

(A β_i számokat ismertnek tekintjük.) Feltesszük továbbá, hogy ismerjük az $\boldsymbol{\alpha}_i$ vektoroknak az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ bázisbeli kifejezését:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1 &= \lambda_{11}\mathbf{a}_1+\lambda_{12}\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_{1n}\mathbf{a}_n,\\ \boldsymbol{\alpha}_2 &= \lambda_{21}\mathbf{a}_1+\lambda_{22}\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_{2n}\mathbf{a}_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \boldsymbol{\alpha}_n &= \lambda_{n1}\mathbf{a}_1+\lambda_{n2}\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_{nn}\mathbf{a}_n. \end{aligned}$$

Feladatunk megtalálni azon $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ számokat, amelyekre

$$\mathbf{b} = \mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+\mu_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy e feladat megoldása semmi *elvi* nehézséget nem jelent, hiszen a $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ számokat egy n-ismeretlenes n egyenletet tartalmazó egyenletrendszer

megoldásaként megkaphatjuk. A problémát csupán az jelenti, hogy hogyan található e feladat megoldására egy olyan módszer, amely viszonylag kevés számolási munkával is célra vezet és lehetőleg elektronikus számológépek számára is alkalmas.
Módszerünk lényege az lesz, hogy nem egyszerre térünk át az egyik bázisról a másikra, hanem mindig csak egy új α_i vektort cserélünk fel valamelyik $\mathbf{a}_j$ vektorral.
A módszer általános ismertetése előtt nézzünk egy példát.

Legyen

$$\alpha_1 = \mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,$$

$$\alpha_2 = 2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,$$

$$\alpha_3 = \mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_3,$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2+3\mathbf{a}_3.$$

Kiindulási adatainkat táblázatban a következőképpen foglalhatjuk össze:

	α_1	α_2	α_3	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_1$	1	2	1	1
$\mathbf{a}_2$	−1	1	0	2
$\mathbf{a}_3$	1	0	3	1

Először az α_1 vektort juttatjuk be az eredeti bázisba. Mivel

$$\alpha_1 = \mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,$$

adódik, hogy

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_1+\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3.$$

E kifejezést α_2, α_3 és $\mathbf{b}$ kifejezésébe helyettesítve adódik, hogy

$$\alpha_2 = 2\alpha_1+3\mathbf{a}_2-2\mathbf{a}_3,$$

$$\alpha_3 = \alpha_1+\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_3$$

és $$\mathbf{b} = \alpha_1+3\mathbf{a}_2.$$

Az α_2, α_3, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$ vektorok α_1, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ bázisbeli koordinátáit a következő táblázatba foglalhatjuk:

	α_2	α_3	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a}_1$
α_1	2	1	1	1
$\mathbf{a}_2$	3	1	3	1
$\mathbf{a}_3$	−2	2	0	−1

Hasonló módon folytatva az eljárást, az $\mathbf{a}_2$ báziselemet α_2-vel, majd az $\mathbf{a}_3$ báziselemet α_3-mal felcserélve, eredményeinket a következő táblázatokba foglalhatjuk:

	α_3	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$
α_1	1/3	−1	1/3	−2/3
α_2	1/3	1	1/3	1/3
$\mathbf{a}_3$	8/3	−2	−1/3	2/3

	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$
α_1	−3/4	9/24	−3/4	−1/8
α_2	5/4	9/24	1/4	−1/8
α_3	−3/4	−1/8	1/4	3/8

Most térjünk át módszerünk általános ismertetésére. Mivel láttuk, hogy egy adott bázisról egy másik bázisra úgy térhetünk át, hogy az új bázis elemeit egyenként juttatjuk be a régi bázisba, elegendő azzal foglalkoznunk, hogy egy új vektort hogyan cserélhetünk fel a régi bázis valamely elemével.
Legyen $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ egy bázis, tegyük fel, hogy egy $\mathbf{b}$ vektor e bázisbeli kifejtése:

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{a}_n.$$

Célunk az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ báziselemek egyikét valamely

$$\mathbf{c} = \mu_1\mathbf{a}_1+\mu_2\mathbf{a}_2+\ldots+\mu_n\mathbf{a}_n \tag{15}$$

vektorral felcserélni, és meghatározni $\mathbf{b}$ ezen új bázisbeli kifejtését. Ennek érdekében fejezzük ki a (15) egyenletből valamelyik $\mathbf{a}_i$-t. (Ahhoz, hogy ezt megtehessük, nyilván fel kell téteteleznünk, hogy a megfelelő $\mu_i \neq 0$). Kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{\mu_i}\mathbf{c}-\frac{\mu_1}{\mu_i}\mathbf{a}_1-\frac{\mu_2}{\mu_i}\mathbf{a}_2-\ldots-\frac{\mu_{i-1}}{\mu_i}\mathbf{a}_{i-1}-\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\mathbf{a}_{i+1}-\ldots-\frac{\mu_n}{\mu_i}\mathbf{a}_n.$$

Ezt a kifejezést $\mathbf{b}$ kifejtésébe helyettesítve, adódik, hogy a $\mathbf{b}$ vektornak az új rendszerbeli kifejtése:

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_{i-1}\mathbf{a}_{i-1}+\lambda_{i+1}\mathbf{a}_{i+1}+\ldots+\lambda_n\mathbf{a}_n+\frac{\lambda_i}{\mu_i}\mathbf{c}-\frac{\lambda_i\mu_1}{\mu_i}\mathbf{a}_1-$$
$$-\frac{\lambda_i\mu_2}{\mu_i}\mathbf{a}_2-\ldots-\frac{\lambda_i\mu_{i-1}}{\mu_i}\mathbf{a}_{i-1}-\frac{\lambda_i\mu_{i+1}}{\mu_i}\mathbf{a}_{i+1}-\ldots-\frac{\lambda_i\mu_n}{\mu_i}\mathbf{a}_n =$$
$$= (\lambda_1-\delta_i\mu_1)\mathbf{a}_1+(\lambda_2-\delta_i\mu_2)\mathbf{a}_2+\ldots+(\lambda_{i-1}-\delta_i\mu_{i-1})\mathbf{a}_{i-1}+\delta_i\mathbf{c}+$$
$$+(\lambda_{i+1}-\delta_i\mu_{i+1})\mathbf{a}_{i+1}+\ldots+(\lambda_n-\delta_i\mu_n)\mathbf{a}_n,$$

ahol $$\delta_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Eredményünket táblázatban a következő módon foglalhatjuk össze.

A kiinduló táblázat:

	$\mathbf{c}$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_1$	μ_1	λ_1
$\mathbf{a}_2$	μ_2	λ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{a}_{i-1}$	μ_{i-1}	λ_{i-1}
$\mathbf{a}_i$	μ_i	λ_i
$\mathbf{a}_{i+1}$	μ_{i+1}	λ_{i+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{a}_n$	μ_n	λ_n

Első lépésként kiválasztunk a μ_j-k közül egy 0-tól különbözőt, legyen ez μ_i. Ekkor az $\mathbf{a}_i$ elemet próbálhatjuk a $\mathbf{c}$-vel felcserélni. A $\mathbf{b}$ és az $\mathbf{a}_i$ vektor koordinátái az új rendszerben — fenti formulánk szerint — a következők lesznek:

	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a}_i$
$\mathbf{a}_1$	$\lambda_1-\delta_i\mu_1$	$-\mu_1/\mu_i$
$\mathbf{a}_2$	$\lambda_2-\delta_i\mu_2$	$-\mu_2/\mu_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{a}_{i-1}$	$\lambda_{i-1}-\delta_i\mu_{i-1}$	$-\mu_{i-1}/\mu_i$
$\mathbf{c}$	δ_i	$1/\mu_i$
$\mathbf{a}_{i+1}$	$\lambda_{i+1}-\delta_i\mu_{i+1}$	$-\mu_{i+1}/\mu_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{a}_n$	$\lambda_n-\delta_i\mu_n$	$-\mu_n/\mu_i$

Vagyis $\mathbf{b}$ új koordinátái úgy adódnak, hogy a régi koordinátákból levonjuk a $\mathbf{c}$ koordinátáinak $\delta_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$-szeresét.

Az eddigiekben abból indultunk ki, hogy ismerjük egy $\mathbf{c}$ vektor valamely $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ bázisbeli kifejtését. Fenti módszerünk arra is alkalmas, hogy ezt a kifejtést megkapjuk. Ugyanis ha a $\mathbf{c}$ vektor koordinátáival van adva, azaz csak a koordináta-egységvektorokból álló bázisbeli kifejtést ismerjük, akkor az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ bázisbeli kifejtést megkapjuk, ha az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n$ bázisról áttérünk — előbbi módszerünk alkalmazásával — az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ bázisra.

Határozzuk meg a

$$\mathbf{c} = (1, 0, -1)$$

vektor

$$\mathbf{a}_1 = (2, 3, 5),$$

$$\mathbf{a}_2 = (-1, 2, 1),$$

$$\mathbf{a}_3 = (3, 1, -4)$$

bázisbeli kifejtését. A következő táblázatból indulunk ki:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{c}$
$\mathbf{e}_1$	2	-1	3	1
$\mathbf{e}_2$	3	2	1	0
$\mathbf{e}_3$	5	1	-4	-1

Első lépésként $\mathbf{e}_1$-et cseréljük fel $\mathbf{a}_1$-gyel, (Ezt megtehetjük, mivel az első sor első eleme: $2 \neq 0$). A következő táblázat adódik:

	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{c}$
$\mathbf{a}_1$	$-1/2$	$3/2$	$1/2$
$\mathbf{e}_2$	$7/2$	$-7/2$	$-3/2$
$\mathbf{e}_3$	$7/2$	$-23/2$	$-7/2$

$\mathbf{e}_2$-t $\mathbf{a}_2$-vel felcserélve adódik, hogy

	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{c}$
$\mathbf{a}_1$	1	$2/7$
$\mathbf{a}_2$	-1	$-3/7$
$\mathbf{e}_3$	-8	-2

Végül adódik, hogy

	$\mathbf{c}$
$\mathbf{a}_1$	1/28
$\mathbf{a}_2$	−5/28
$\mathbf{a}_3$	1/4

azaz a $\mathbf{c}$ vektor $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$-beli kifejtése

$$\mathbf{c} = \frac{1}{28}\mathbf{a}_1 - \frac{5}{28}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{a}_3.$$

16.2 LINEÁRIS OPERÁTOROK MÁTRIX ALAKJA

A bevezetésben már láttunk példát lineáris operátorokra. Most megismételjük a definíciót. Tegyük fel, hogy az n-dimenziós tér minden $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorának megfeleltetjük az m-dimenziós tér egy $\mathbf{y} = (y_1\, y_2, \dots, y_n) = A\mathbf{x}$ vektorát. (Itt A szimbolizálja a leképezést.) A tulajdonképpen egy, az n-dimenziós téren értelmezett függvény, amelynek értékkészlete az m-dimenziós tér, vagy annak egy részhalmaza. Abban az esetben, ha A értékkészlete az egész m-dimenziós tér, azt mondjuk, hogy A az n-dimenziós teret az m-dimenziós térre képezi le. Ha az értékkészlet az m-dimenziós térnek csak egy részhalmaza, akkor azt mondjuk, hogy A az n-dimenziós teret az m-dimenziós tér*be* képezi le.

Az A leképezést, operátort lineárisnak nevezzük, ha

$$A(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) = \lambda_1 A\mathbf{x}_1 + \lambda_2 A\mathbf{x}_2,$$

ahol $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ az n-dimenziós tér két, tetszőleges vektora, λ_1, és λ_2 két tetszőleges valós szám. Egy lineáris operátort teljesen jellemezhetünk azáltal, hogy megadjuk a koordináta-egységvektorok „képeit", azaz megadjuk, hogy az A lineáris operátor az m-dimenziós térben, mely vektorokat felelteti meg a koordináta-egységvektoroknak.

Tegyük fel ugyanis, hogy

$$A\mathbf{e}_1 = A(1, 0, 0, \dots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}),$$
$$A\mathbf{e}_2 = A(0, 1, 0, \dots, 0) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A\mathbf{e}_n = A(0, 0, 0, \dots, 1) = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}),$$

azaz az $(1, 0, 0, \dots, 0)$ vektor képe az A operátor alkalmazása esetén az $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$ vektor.

Azt állítjuk, hogy ha ismerjük a koordináta-egységvektorok képeit, akkor bármely $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor képét ki tudjuk számítani. Az $\mathbf{x}$ vektor ugyanis kifejezhető a koordináta-egységvektorok segítségével a következőképpen:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n,$$

tehát A linearitása miatt

$$A\mathbf{x} = x_1 A\mathbf{e}_1 + x_2 A\mathbf{e}_2 + \dots + x_n A\mathbf{e}_n = (x_1a_{11}, x_1a_{21}, \dots, x_1a_{m1}) +$$
$$+ (x_2a_{12}, x_2a_{22}, \dots, x_2a_{m2}) + \dots + (x_na_{1n}, x_na_{2n}, \dots, x_na_{mn}) =$$
$$= (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_na_{1n}, x_1a_{21} + x_2a_{22} + \dots + x_na_{2n},$$
$$\dots, x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \dots + x_na_{mn}),$$

vagyis valóban megkaptuk az $A\mathbf{x}$ vektort, csupán az $a_{ij}(i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, m)$ értékeket felhasználva, ami azt jelenti, hogy az A operátor az a_{ij} értékekkel jellemezhető. Ezt formulában úgy szoktuk felírni, hogy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

A formulánk jobb oldalán álló kifejezést mátrixnak ($n \times m$-es mátrixnak) nevezzük, és így azt mondhatjuk, hogy egy lineáris operátor mindig jellemezhető a mátrixának segítségével. Ha az A lineáris operátor mátrixa adott, akkor egy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor képét – a fentiek szerint – formálisan a következő módon számíthatjuk ki.

Az A mátrix mellé leírjuk az

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

oszlopvektort (azaz az $\mathbf{x}$ vektort oszlop alakban), majd az A mátrix egyes sorvektorait skalárisan megszorozzuk az $\mathbf{x}$ oszlopvektorral, azaz

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Most nézzünk néhány numerikus példát.

Vizsgáljuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \end{pmatrix}$$

mátrix által létesített lineáris leképezést.

Mivel A egy 3×2-es mátrix, azonnal látható, hogy ez a leképezés a háromdimenziós tér pontjait a kétdimenziós tér (a sík) pontjaiba viszi át. Nevezetesen az (x_1, x_2, x_3) vektor képe az

$$\begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

vektor lesz. Ezt a tényt geometriailag úgy fogalmazhatjuk meg, hogy az A operátor a háromdimenziós tér minden (x_1, x_2, x_3) vektorát ortogonálisan levetíti az X_1, X_2 koordinátasíkra.
Vizsgáljuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$$

mátrix által létesített leképezést. Nyilvánvaló, hogy ez a leképezés a háromdimenziós tér pontjait a háromdimenziós tér pontjaiba viszi át és az (x_1, x_2, x_3) vektornak az

$$\begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

vektort felelteti meg. Vagyis a leképezés minden vektort saját magába visz át. Ezt a leképezést (mátrixot) *egységleképzés*nek (-mátrixnak) nevezzük.
Vizsgáljuk az

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

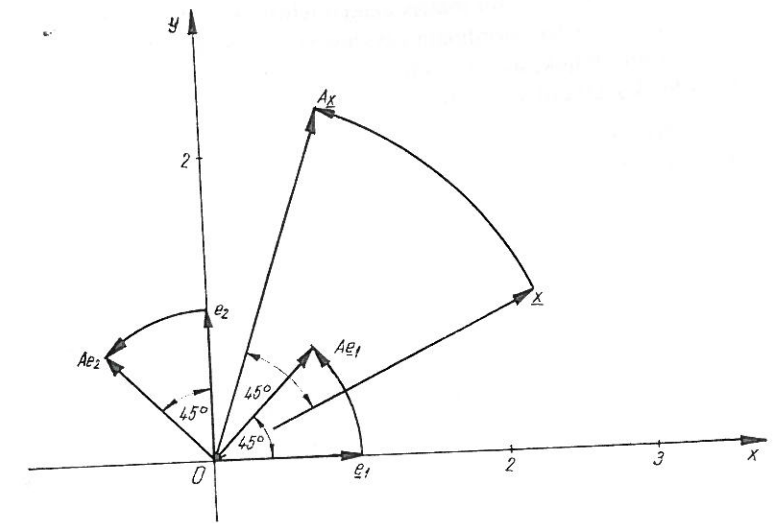
leképezést. E leképezés a sík pontjait a sík pontjaiba viszi át, az (1; 0) és (0; 1) koordináta-egységvektornak megfelelteti a

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

ill. a

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

vektorokat, azaz az A leképezés a koordináta-egységvektorokat 45°-kal forgatja el (lásd 16.2 ábra). Hasonlóan belátható, hogy bármely vektor képét 45°-os forgással kapjuk meg.



16.2 ábra

16.3 MÁTRIXOK SZORZATA

Először is azt vizsgáljuk, hogy milyen transzformációhoz jutunk, ha két lineáris operátort egymás után alkalmazunk egy vektorra. Pontosabban, legyen A egy lineáris operátor, amely az l-dimenziós tér vektorait az m-dimenziós térbe viszi át (azaz, ha $\mathbf{x}$ az l-dimenziós tér egy pontja, akkor $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ az m-dimenziós tér pontja), továbbá legyen B egy lineáris operátor, amely az m-dimenziós teret az n-dimenziós térbe képezi le. Ekkor $\mathbf{z} = B\mathbf{y} = BA\mathbf{x}$ az n-dimenziós tér egy pontja lesz. Természetes módon azt a C operátort, amely az $\mathbf{x}$ vektort $\mathbf{z}$-be képezi le, BA-val jelöljük és a két lineáris operátor szorzatának nevezzük. Hangsúlyoznunk kell, hogy ez a szorzás nem kommutatív, azaz általában $AB \neq BA$, de könnyen belátható, hogy két lineáris operátor szorzata is lineáris operátor. (Ennek a ténynek a bizonyítását az olvasóra bízzuk).
Lineáris operátorok szorzásával kapcsolatban meg kell még jegyeznünk, hogy két operátor csak akkor szorozható össze, ha a bal oldalinak (esetünkben B) az értelmezési tartománya (esetünkben az m-dimenziós tér) megegyezik a jobb oldalinak (esetünkben A) értékkészletével (vagy bővebb annál).
Most azt vizsgáljuk meg, hogy ha az A és B operátorok mátrix alakban vannak megadva, akkor mi mondható a $C = BA$ operátor mátrix alakjáról. Mivel feltettük, hogy A az l-dimenziós teret az m-dimenziósba és B az m-dimenziós teret az n-dimenziósba képezi le, A $l\times m$-es, B $m\times n$-es mátrix lesz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1l} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{ml} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1m} \\ b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Ahhoz, hogy a $C = BA$ operátor mátrix alakját felírhassuk, meg kell határoznunk, hogy a C operátor az l-dimenziós tér koordináta-egységvektorainak az n-dimenziós tér mely vektorait felelteti meg. Mint tudjuk, az A operátor az l-dimenziós tér egységvektorainak rendre az m-dimenziós tér következő vektorait felelteti meg:

$$(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}),$$
$$(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(a_{1l}, a_{2l}, \dots, a_{ml}).$$

A B leképezés viszont ezeket a vektorokat rendre a következő módon képezi le:

$$\begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1m} \\ b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2m} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\dots+b_{1m}a_{m1} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{11}+\dots+b_{2m}a_{m1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}a_{11}+b_{n2}a_{21}+\dots+b_{nm}a_{m1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1m} \\ b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2m} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}+\dots+b_{1m}a_{m2} \\ b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+\dots+b_{2m}a_{m2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}a_{12}+b_{n2}a_{22}+\dots+b_{nm}a_{m2} \end{pmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1m} \\ b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2m} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{ml} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{1l}+b_{12}a_{2l}+\dots+b_{1m}a_{ml} \\ b_{21}a_{1l}+b_{22}a_{2l}+\dots+b_{2m}a_{ml} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}a_{1l}+b_{n2}a_{2l}+\dots+b_{nm}a_{ml} \end{pmatrix}.$$

Így az l-dimenziós tér $(1, 0, \dots, 0)$ egységvektorának képe a

$$C(1, 0, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\dots+b_{1m}a_{m1} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}+\dots+b_{2m}a_{m1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}a_{11}+b_{n2}a_{21}+\dots+b_{nm}a_{m1} \end{pmatrix}$$

vektor, vagyis ez a vektor lesz a C mátrix első oszlopa (első „oszlopvektora"). Hasonlóan C második, harmadik, ... oszlopvektora rendre a

$$\begin{pmatrix} b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}+\dots+b_{1m}a_{m2} \\ b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+\dots+b_{2m}a_{m2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}a_{12}+b_{n2}a_{22}+\dots+b_{nm}a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11}a_{13}+b_{12}a_{23}+\dots+b_{1m}a_{m3} \\ b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23}+\dots+b_{2m}a_{m3} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}a_{13}+b_{n2}a_{23}+\dots+b_{nm}a_{m3} \end{pmatrix}, \dots$$

vektorok lesznek.

Szóban ezt úgy fejezzük ki, hogy a C mátrix a B és A mátrixokból sor-oszlop-szorzással áll elő, azaz C i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk, hogy B i-edik sorvektorát skalárisan megszorozzuk A j-edik oszlopvektorával.

Vizsgáljuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}$$

és a

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

mátrixok szorzatát! Adódik, hogy

$$C = BA = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}, & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2}, & 0 \end{pmatrix}.$$

A C operátor geometriai jelentése világos. Ugyanis mint már láttuk, az A operátor a háromdimenziós tér pontjait levetíti az X, Y síkra, és a B operátor e vetületi pontokat 45°-kal elforgatja. A C operátor mátrix alakjából is könnyen belátható az említett geometriai jelentés, de ezt az olvasóra bízzuk.

Vizsgáljuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, \dots, 0 \\ 0, & 1, & 0, \dots, 0 \\ 0, & 0, & 1, \dots, 0 \\ \dots\dots & & \\ \dots\dots & & \\ \dots\dots & & \\ 0, & 0, & 0, \dots, 1 \end{pmatrix}$$

egységmátrix és a

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrix szorzatát. Adódik, hogy

$$C = BA = \begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, \dots, 0 \\ 0, & 1, & 0, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, \dots, 1 \end{pmatrix} = B,$$

és hasonlóan

$$AB = B,$$

azaz adódik, hogy ha A az egységmátrix, akkor

$$AB = BA = B.$$

A későbbiekben majd látjuk, hogy fontos feladat egy A négyzetes mátrixhoz megtalálni azt a B mátrixot (ha van ilyen), amelyre

$$AB = BA = I$$

(itt I az egységmátrixot jelenti). Az ilyen tulajdonságú B mátrixot az A mátrix inverzének nevezzük és A^{-1}-nel jelöljük. Megjegyezzük, hogy ha egy A mátrixhoz található olyan B mátrix, amelyre $AB = I$, akkor a $BA = I$ egyenlőség is fennáll, azaz $B = A^{-1}$.

Keressük meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét. Más szóval feladatunk abban áll, hogy meg kell találnunk egy

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

mátrixot úgy, hogy

$$AX = XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

legyen. Mivel

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}+3x_{21}, & x_{12}+3x_{22} \\ 2x_{11}+4x_{21}, & 2x_{12}+4x_{22} \end{pmatrix},$$

feladatunk abban áll, hogy meg kell oldanunk az

$$\begin{aligned} x_{11}+3x_{21} &= 1, \\ x_{12}+3x_{22} &= 0, \\ 2x_{11}+4x_{21} &= 0, \\ 2x_{12}+4x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ennek megoldásaként adódik, hogy

$$x_{11} = -2, \quad x_{12} = \frac{3}{2}, \quad x_{21} = 1, \quad x_{22} = -\frac{1}{2},$$

így az A mátrix inverze az

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -2, & \frac{3}{2} \\ 1, & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

mátrix.

Ebben a példában egy mátrix inverzét egy lineáris egyenletrendszer megoldása útján kaptuk. Általában is látni fogjuk, hogy egy mátrix inverzének megtalálása és egy lineáris egyenletrendszer megoldása egy és ugyanazon feladatnak tekinthető. Eljárásunk azonban többnyire fordított, vagyis lineáris egyenletrendszerek megoldását fogjuk előállítani az egyenletrendszerhez tartozó mátrix inverzének segítségével.

16.4 LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MÁTRIX ALAKJA

Tekintsük az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{16}$$

lineáris egyenletrendszert, és vezessük be a következő jelöléseket.

Az együtthatók mátrixa legyen A, azaz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Az ismeretlenekből álló oszlopvektort jelöljük $\mathbf{x}$-szel:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ x_n \end{pmatrix},$$

és az egyenletrendszer jobb oldalán álló állandókból álló oszlopvektor legyen $\mathbf{b}$, azaz

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy egyenletrendszerünk

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{17}$$

alakban is írható, ahol A adott mátrix, $\mathbf{b}$ adott vektor és $\mathbf{x}$ egy ismeretlen vektor. Ha az A mátrix inverzét ismerjük, (17) egyenletünket — és így (16) egyenletrendszerünket — azonnal megoldhatjuk. Ugyanis ha a (17) egyenletet megszorozzuk (balról) A^{-1}-gyel, akkor a következő adódik:

$$A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

azaz az $\mathbf{x}$ ismeretlen vektor egyenlő A^{-1} $\mathbf{b}$-vel.

Az előző pontban láttuk, hogy az

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix inverze a

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

mátrix. Ezen inverz mátrix birtokában könnyen megoldhatjuk például az

$$x+3y = 4$$
$$2x+4y = 6$$

egyenletrendszert, vagy mátrix alakban kifejezve az

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

egyenletrendszert,

ahol $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$

Ugyanis adódik, hogy

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

tehát egyenletrendszerünk megoldása

$$x = 1, \quad y = 1.$$

16.5 MÁTRIXOK INVERZÉNEK MEGHATÁROZÁSA

Egy mátrix inverzének meghatározása általában igen fáradságos munkát igényel. Ezért számos módszert dolgoztak ki a számítási munkák megkönnyítésére. E módszerek közül itt csak egy ismertetésére térünk ki. Ez a módszer a már ismert bázisfelcserélési módszeren alapul.

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

egy $n \times n$-es mátrix, és legyen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} \\ x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn} \end{pmatrix}$$

az A mátrix inverze, továbbá az A mátrix sorvektorai oszlopvektor alakban felírva legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, azaz

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ a_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$A^{-1}A = I,$$

adódik, hogy

$$\begin{aligned} x_{11}\mathbf{a}_1 + x_{12}\mathbf{a}_2 + \dots + x_{1n}\mathbf{a}_n &= \mathbf{e}_1, \\ x_{21}\mathbf{a}_1 + x_{22}\mathbf{a}_2 + \dots + x_{2n}\mathbf{a}_n &= \mathbf{e}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n1}\mathbf{a}_1 + x_{n2}\mathbf{a}_2 + \dots + x_{nn}\mathbf{a}_n &= \mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

tehát az inverz mátrix sorai a koordináta-egységvektoroknak az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ rendszer szerinti kifejtésében szereplő együtthatóit tartalmazzák. Így az inverz mátrixot felírhatjuk, ha megadjuk az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ vektorok kifejtését az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ rendszerben. E feladat megoldására előbbi módszerünket használjuk.

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

és készítsük el a következő táblázatot:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{e}_1$	3	0	2
$\mathbf{e}_2$	0	1	3
$\mathbf{e}_3$	-1	2	0

Első lépésként cseréljük fel az $\mathbf{e}_1$ vektort az $\mathbf{a}_1$ vektorral. A már ismert bázisfelcserélési eljárással adódik, hogy

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{a}_1$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\mathbf{e}_2$	0	1	3
$\mathbf{e}_3$	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{2}{3}$

Következő lépésként $\mathbf{e}_2$-t cseréljük fel $\mathbf{a}_2$-vel, kapjuk, hogy

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{a}_1$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\mathbf{a}_2$	0	1	3
$\mathbf{e}_3$	$\frac{1}{3}$	-2	$-\frac{5}{3}$

Végül $\mathbf{e}_3$ és $\mathbf{a}_3$ felcserélésével adódik, hogy

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{a}_1$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$
$\mathbf{a}_2$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{9}{16}$
$\mathbf{a}_3$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{16}$

azaz azt kaptuk, hogy az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektoroknak az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ bázisbeli kifejtése a következő:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{3}{8}\mathbf{a}_1 + \frac{3}{16}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{16}\mathbf{a}_3,$$

$$\mathbf{e}_2 = -\frac{1}{4}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{8}\mathbf{a}_2 + \frac{3}{8}\mathbf{a}_3,$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{8}\mathbf{a}_1 + \frac{9}{16}\mathbf{a}_2 - \frac{3}{16}\mathbf{a}_3,$$

ami részletesebben felírva azt jelenti, hogy

$$(1, 0, 0) = \frac{3}{8}(3, 0, -1) + \frac{3}{16}(0, 1, 2) - \frac{1}{16}(2, 3, 0),$$

$$(0, 1, 0) = -\frac{1}{4}(3, 0, -1) - \frac{1}{8}(0, 1, 2) + \frac{3}{8}(2, 3, 0),$$

$$(0, 0, 1) = \frac{1}{8}(3, 0, -1) + \frac{9}{16}(0, 1, 2) - \frac{3}{16}(2, 3, 0).$$

Ebből, mint láttuk, következik, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix inverze az

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{9}{16} & -\frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

mátrix.

Tetszőleges $n \times n$-es mátrix inverzének meghatározása – a báziselemek felcserélésének módszere alapján – teljesen hasonló módon történhet, mint ahogy azt a példában láttuk.

Említettük, hogy egy $n \times n$-es mátrixnak nem feltétlenül létezik inverze. Most megadhatjuk az inverz létezésének egy feltételét. Ugyanis mint láttuk, egy $n \times n$-es A mátrix inverze létezik, ha annak sorvektorai az n-dimenziós térnek egy bázisát alkotják, azaz ha a sorvektorok lineárisan függetlenek. Meg kell jegyeznünk, hogy a sorvektorok lineáris függetlensége nemcsak elégséges feltétele az inverz mátrix létezésének, hanem szükséges is ahhoz. Könnyen belátható, hogy az oszlopvektorok lineáris függetlensége hasonló módon szükséges és elégséges feltétele az inverz mátrix létezésének.

Ismertetett – bázisfelcserélési – módszerünknek előnye az is, hogy ha az invertálásra kerülő mátrix inverze nem létezik, akkor ez a tény a számítások közben kiderül. Ugyanis, ha az inverz nem létezik, akkor a báziselemek felcserélését a zérusok megjelenése miatt egy idő után nem tudjuk folytatni.

Még egyszer hangsúlyozni kívánjuk, hogy egy mátrix inverzének meghatározása nem elméletileg nehéz feladat. A probléma csupán abban áll, hogy hogyan lehet viszonylag kevés számolással meghatározni az inverzet. Így egy inverzmeghatározási módszert elsősorban abból a szempontból kell értékelni, hogy az mennyire alkalmas számológépeken folytatott számításokra. Említett módszerünket számológépeken is szokták használni.

Mint láttuk, egy n ismeretlent és n egyenletet tartalmazó egyenletrendszer könnyen megoldható, ha ismerjük az egyenletrendszer együtthatóiból álló mátrix inverzét. Ily módon az is belátható, hogy ha az együtthatómátrix inverze létezik, akkor az egyenletrendszernek egy és csak egy megoldása (megoldásvektora) van.

Felvetődik a kérdés, hogy mi mondható a megoldásokról, ha az inverz mátrix nem létezik. Mint említettük, ha az inverz mátrix nem létezik, akkor a mátrix sorai lineárisan összefüggnek, azaz az egyenletek egymástól nem függetlenek, hanem

1. vagy valamelyik egyenlet ellentmond a többinek, és ekkor az egyenletrendszernek nincs megoldása,

2. vagy nincs olyan egyenlet, amely a többinek ellentmondana, és ekkor kell olyan egyenletnek léteznie, amely a többinek következménye. Ebben az esetben végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek.

Állításunk megvilágítása céljából nézzünk egy példát. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 3x+\ 4y-6z &= 5, \\ x+\ 2y+3z &= 4, \\ 7x+10y-9z &= b \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Látható, hogy a példánkban szereplő harmadik egyenlet bal oldala nem más, mint az első egyenlet bal oldalának kétszerese plusz a második egyenlet. Így, ha a b szám különbözik $2 \cdot 5+4 = 14$-től, akkor a harmadik egyenlet ellentmond az első két egyenletnek, és így az egyenletrendszer nem oldható meg. Míg ha $b = 14$, akkor a harmadik egyenlet következménye az első kettőnek, és így a

$$\begin{aligned} 3x+4y-6z &= 5, \\ x+2y+3z &= 4 \end{aligned} \tag{18}$$

egyenletrendszer minden megoldása egyúttal megoldása lesz a harmadik

$$7x+10y-9z = 14$$

egyenletnek is. Könnyen belátható, hogy a (18) egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

Olyan egyenletrendszerek vizsgálatával, amelyekben az ismeretlenek száma nagyobb, mint az egyenletek száma, a következő pontban foglalkozunk részletesen.

16.6. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSHALMAZÁNAK VIZSGÁLATA

Foglalkozzunk a

$$3x+4y-6z = 5, \tag{19}$$

$$x+2y+3z = 4 \tag{20}$$

egyenletrendszer megoldásával!

Ezen egyenletrendszert geometriailag vizsgálva azt mondhatjuk, hogy az egyenletek mindegyike egy síkot határoz meg, azaz azon (x, y, z) számhármasok, amelyek a (19), illetve (20) egyenletet kielégítik, egy síkon helyezkednek el. Így azt mondhatjuk, hogy ha a (19) és (20) egyenletek által meghatározott síkok egymással párhuzamosak, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ha e síkok nem párhuzamosak, akkor metszésvonaluk minden pontja kielégíti a két egyenlet mindegyikét, azaz a megoldások egy egyenesen (nevezetesen a két sík metszésvonalán) helyezkednek el.

A megoldásokat például a következő módon találhatjuk meg.

Vizsgáljuk meg, hogy van-e olyan megoldás, amelyben z értéke 0. Más szóval azt kérdezzük, hogy a

$$3x+4y = 5,$$

$$x+2y = 4$$

egyenletrendszernek van-e megoldása? Azonnal látható, hogy ezen egyenletrendszernek megoldása

$$x = -3, \quad y = \frac{7}{2}.$$

Így eredeti egyenletrendszerünknek egy megoldása

$$x=-3, \quad y=\frac{7}{2}, \quad z=0.$$

Hasonló módon megvizsgálhatjuk, hogy egyenletrendszerünknek van-e olyan megoldása, amelyben $x=0$, azaz van-e megoldása a

$$4y-6z=5,$$
$$2y+3z=4$$

egyenletrendszernek. Könnyen adódik, hogy ezen egyenletrendszer megoldása

$$y=\frac{13}{8}, \quad z=\frac{1}{4}.$$

Így eredeti egyenletrendszerünknek egy megoldása

$$x=0, \quad y=\frac{13}{8}, \quad z=\frac{1}{4}.$$

Ennek alapján azt mondhatjuk, hogy (19) és (20) egyenletrendszerünk összes megoldása a

$$P_1=\left(-3, \ \frac{7}{2}, \ 0\right), \quad P_2=\left(0, \ \frac{13}{8}, \ \frac{1}{4}\right)$$

pontokat összekötő egyenes, amit algebrailag úgy fejezhetünk ki, hogy a megoldás az

$$x=-3\lambda,$$
$$y=\frac{7}{2}\lambda+\frac{13}{8}\mu,$$
$$z=\frac{1}{4}\mu$$

alakú számhármasokból áll, ahol $\lambda+\mu=1$.
Az ezen egyenletrendszer megoldása során nyert tapasztalatokat az általános esetben is felhasználjuk.
Tekintsük az

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array} \tag{21}$$

egyenletrendszert. Feltesszük, hogy $m \leqq n$. Bevezetve az

$$\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{a}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

jelöléseket, (21) egyenletrendszerünk

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

alakban írható fel.
Első lépésként megkísérelhetjük megtalálni a (21) egyenletrendszernek egy olyan megoldását, amelyben

$$x_{m+1}=x_{m+2}=\ldots=x_n=0.$$

Más szóval megpróbálhatjuk megtalálni az

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mm}x_m=b_m \end{array} \tag{22}$$

$m\times m$-es egyenletrendszer megoldását. Az előzőkben már beszéltünk arról, hogy hogyan lehet egy $m\times m$-es egyenletrendszer megoldását megtalálni (illetve meghatározni, hogy egy $m\times m$-es egyenletrendszer megoldható-e). Így most ezt nem részletezzük, hanem feltételezzük, hogy ismerjük a (22) egyenletrendszer egy $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$ megoldását.

Következő lépésként megkísérelhetnénk megtalálni a (21) egyenletrendszernek egy olyan megoldását, amelyben

$$x_1 = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0.$$

E feladatot megoldhatnánk az

$$(23)\quad \begin{aligned} a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1,\,m+1}x_{m+1} &= b_1,\\ a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2,\,m+1}x_{m+1} &= b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m2}x_2+a_{n,3}x_3+\ldots+a_{m,\,m+1}x_{m+1} &= b_m\,. \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásával. Most azonban azt kérdezzük, hogy nem találhatnánk-e meg a (23) egyenletrendszernek egy megoldását egyszerűbben, felhasználva a (22) egyenletrendszer $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$ megoldását.
Kérdésünket a következőképpen is fogalmazhatjuk: Ismerjük a **b** vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ bázisbeli kifejtését (feltesszük, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ vektorok bázist alkotnak), ez:

$$\mathbf{a}_1x_1^{(0)}+\mathbf{a}_2x_2^{(0)}+\ldots+\mathbf{a}_mx_m^{(0)} = \mathbf{b},$$

és célunk megkapni a **b** vektor kifejtését az $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_{m+1}$ bázisban. A már megismert bázisfelcserélési eljárást alkalmazva a feladatot megoldhatjuk, ha az $\mathbf{a}_1$ vektort felcseréljük az $\mathbf{a}_{m+1}$ vektorral.
Eddigi gondolatmenetünket összefoglalva azt mondhatjuk, hogy egy

$$x_1 = x_1^{(0)},\ x_2 = x_2^{(0)}, \ldots, x_m = x_m^{(0)},\ x_{m+1} = x_{m+2} = x_n = 0$$

típusú megoldásból más megoldásokat kaphatunk a bázisfelcserélési eljárás alkalmazásával.
Most nézzünk egy példát. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$(24)\quad \begin{aligned} 3x+2y-4z \quad\;\; +v &= 0,\\ 2y \quad +3u-v &= 1,\\ x \quad +2z-\;u \quad &= 2. \end{aligned}$$

Első lépésként oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 3x+2y-4z &= 0,\\ 2y \quad &= 1,\\ x \quad +2z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Például az inverz mátrix meghatározásával nyerhető, hogy ez utóbbi egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x = \frac{3}{5},\quad y = \frac{1}{2},\quad z = \frac{7}{10},$$

és így eredeti egyenletrendszerünk egy megoldása:

$$x = \frac{3}{5},\quad y = \frac{1}{2},\quad z = \frac{7}{10},\quad u = 0,\quad v = 0.$$

Bevezetve az

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\\u\\v\end{bmatrix}$$

jelöléseket, azt mondhatjuk, hogy a **b** vektor kifejtése az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ bázisban:

$$\mathbf{b} = \frac{3}{5}\mathbf{a}_1+\frac{1}{2}\mathbf{a}_2+\frac{7}{10}\mathbf{a}_3.$$

Ahhoz, hogy bázisfelcserélési eljárásunkat alkalmazhassuk, szükséges, hogy meghatározzuk az $\mathbf{a}_4$ és $\mathbf{a}_5$ vektorok kifejtését az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ bázisban. Ezt a már ismert módszerek alapján megtehetjük és eredményül adódik, hogy:

$$\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_1+\frac{3}{2}\mathbf{a}_2,\qquad \mathbf{a}_5 = \frac{2}{5}\mathbf{a}_1-\frac{1}{2}\mathbf{a}_2-\frac{1}{5}\mathbf{a}_3.$$

Most készítsük el a következő táblázatot:

	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_1$	-1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\mathbf{a}_2$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{a}_3$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$

A (24) egyenletrendszernek egy új megoldását kaphatjuk, ha az $\mathbf{a}_1$ vektort $\mathbf{a}_4$-gyel felcseréljük. Adódik, hogy

	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_4$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\mathbf{a}_2$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{5}$
$\mathbf{a}_3$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$

azaz a (24) egyenletrendszernek egy további megoldása:

$$x=0,\quad y=\frac{7}{5},\quad z=\frac{7}{10},\quad u=-\frac{3}{5},\quad v=0.$$

Következő lépésként az $\mathbf{a}_2$ vektort $\mathbf{a}_5$-tel felcserélve kapjuk, hogy

	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_4$	5
$\mathbf{a}_5$	14
$\mathbf{a}_3$	$\frac{7}{2}$

Így a (24) egyenletrendszernek már három független megoldásvektorát találtuk meg. Ezek:

$$\mathbf{x}_1=\left(\frac{3}{5},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{7}{10},\quad 0,\quad 0\right),$$

$$\mathbf{x}_2=\left(0,\quad \frac{7}{5},\quad \frac{7}{10},\quad -\frac{3}{5},\quad 0\right),$$

$$\mathbf{x}_3=\left(0,\quad 0,\quad \frac{7}{2}\quad 5\quad 14\right).$$

Azonnal belátható, hogy az $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ vektorokkal együtt a

$$\lambda\mathbf{x}_1+\mu\mathbf{x}_2+\nu\mathbf{x}_3\qquad(\lambda+\mu+\nu=1)$$

alakú vektorok is megoldásai a (24) egyenletrendszernek. Belátható, hogy e megoldásoktól különböző megoldása a (24) egyenletrendszernek nincs.

16.7 A LINEÁRIS PROGRAMOZÁS FELADATA

A lineáris programozás alapfeladata a következő módon fogalmazható.
Legyen

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}\\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$m\times n$-es mátrix, és legyen

$$\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \cdot\,\cdot\\ \cdot\,\cdot\\ \cdot\,\cdot\\ b_m\end{pmatrix}$$

m-dimenziós oszlopvektor, továbbá legyen

$$\mathbf{c}=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

n-dimenziós sorvektor. Ekkor a feladat a következő.
Keresendő azon

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\,\cdot\\ \cdot\,\cdot\\ \cdot\,\cdot\\ x_n\end{pmatrix}$$

n-dimenziós oszlopvektor, amelyre

(25) $\quad\mathbf{x}\geqq 0,$

(26) $\quad A\mathbf{x}\leqq b\qquad$ és

(27) $\quad\mathbf{cx}$

maximális (vagy minimális).

A (25) feltétel azt jelenti, hogy az $\mathbf{x}$ vektor mindegyik koordinátája nemnegatív, azaz

(25*) $\quad x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \ldots,\ x_n\geqq 0.$

A (25) feltétel egy lineáris egyenlőtlenség-rendszer, részletesebben:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leqq b_1,\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leqq b_2,\\ (26^*)\qquad &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leqq b_m.\end{aligned}$$

A (27) feltétel azt jelenti, hogy olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, amely nemcsak a (25), (26) feltételeket elégíti ki, hanem amelyre a

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

összeg a lehető legnagyobb (vagy a lehető legkisebb).

Látni fogjuk, hogy a **cx** kifejezés maximumára vonatkozó feladat teljesen hasonlóan oldható meg, mint a minimumra vonatkozó feladat.

Megjegyezzük még, hogy a (26) feltétel helyett gyakran

$$A\mathbf{x} \geqq \mathbf{b} \qquad (26^{**})$$

típusú feltétellel találkozunk. Ez azonban nem okoz külön nehézséget, ugyanis a (26**) egyenlőtlenséget (−1)-gyel szorozva a (26) típusú feltételhez jutunk.

A továbbiakban a (25), (26), (27) feltételeket kielégítő **x** vektort azon pótfeltétel mellett keressük, hogy $b_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$.

A bevezetésben tárgyalt két feladat is nyilván lineáris programozási feladat. Úgy gondoljuk, hogy e két feladat ismeretében mindenki számos olyan gyakorlati fontosságú feladatot tud mondani, amely a lineáris programozás tárgykörébe vonható. Így most áttérhetünk az általános lineáris programozási feladat megoldására. Éppen a feladat gyakorlati fontossága miatt a megoldásra számos módszert dolgoztak ki. Ezek közül mi most csak az egyikkel, az úgynevezett szimplex módszerrel fogunk foglalkozni.

Először vegyük észre, hogy a (25*) és (26*) feltételek mindegyike az n-dimenziós tér egy félterét határozza meg. Így a (25), (26) feltételeket kielégítő **x** vektorok $n+m$ féltér közös részében, azaz egy poliéderben helyezkednek el. Ha e poliéder csúcspontjait meg tudnánk határozni, akkor a (25), (26) feltételeknek eleget tevő valamennyi **x** vektort előállíthatnánk mint a csúcspontokba vezető vektorok lineáris kombinációját. Célunk azonban nem az, hogy a (25), (26) feltételeket kielégítő összes megoldást megtaláljuk, hanem az, hogy azon megoldást találjuk meg, amelyre a **cx** kifejezés maximális (illetve minimális) lesz.

A bevezetésben szereplő második példa megoldásában lényeges szerepet játszott az az észrevétel, hogy a szélsőértéket a **cx** kifejezés (a példában $3x+4y$ mennyiség) biztosan a megoldáspoliéder (a példában egy poligon) valamelyik csúcspontjában veszi fel. Ez a tény az általános esetben is igaz, azaz általában is a **cx** kifejezés maximumát (és minimumát is) a megoldáspoliéder valamely csúcspontjában veszi fel.

A szimplex módszer lényege az, hogy egy csúcspont ismeretében a bázisfelcserélési eljárás felhasználásával újabb és újabb csúcspontokat keresünk, de úgy, hogy ha célunk **cx** maximalizálása, akkor az új csúcspontban a **cx** kifejezés értéke mindig nagyobb legyen, mint a régiben volt. Illetve, ha célunk **cx** minimalizálása, akkor csak olyan új csúcspontokat keresünk, amelyekben **cx** értéke egyre kisebb lesz.

Kitűzött feladatunk megoldásában az első lépés tehát a megoldáspoliéder egy csúcspontjának megtalálása. Könnyen belátható, hogy például az

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1m}x_m &= b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2m}x_m &= b_2,\\
&\;\;\vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mm}x_m &= b_m
\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása (ha ez létezik és egyértelmű) a megoldáspoliédernek csúcspontja. Az előzőkben már láttuk, hogy a bázisfelcserélési módszer segítségével hogy lehet egy ilyen egyenletrendszert megoldani, és egy megoldás birtokában hogy lehet a (26) egyenlőtlenség

újabb megoldásait nyerni. Természetesen elképzelhető a már ismert módszer használata, azonban most célszerűnek látszik módszerünket kissé módosítani.

A módosítás lényege az, hogy új ismeretleneket vezetünk be, amelyek segítségével a módosított feladat egy kezdeti megoldását könnyen megtalálhatjuk.

Nevezetesen a (25), (26), (27) feltételeket kielégítő $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor helyett keressük azt a

$$\mathbf{z} = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$(n+m)$-dimenziós vektort, amelyre

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \dots,\ x_n \geqq 0, \quad y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ \dots,\ y_m \geqq 0,$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n+y_1 &= b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n+y_2 &= b_2,\\
&\;\;\vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n+y_m &= b_m
\end{aligned}$$

és

$$c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n+0\cdot y_1+0\cdot y_2+\dots+0\cdot y_m = c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$$

maximális. Nyilvánvaló, hogy e módosított feladatnak bármely megoldása egyúttal az eredeti feladatnak is megoldása. E módosított feladat megoldáspoliéderének egy csúcspontja azonnal adódik, nevezetesen az

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots,\ x_n = 0, \quad y_1 = b_1,\ y_2 = b_2,\ \dots,\ y_m = b_m$$

vektor. Így erre a feladatra most már valóban minden nehézség nélkül alkalmazhatjuk a bázisfelcserélési módszert új csúcspontok megtalálása céljából. Két nehézség azonban felvetődik.

1. Miképpen lehet biztosítani, hogy csak olyan csúcspontokhoz jussunk, amelyek nemnegatívok (azaz, amelyeknek minden koordinátája nemnegatív)?

2. Hogyan lehet biztosítani, hogy az újabb csúcspontokban a **cx** kifejezés értéke egyre nagyobb legyen?

A megoldásvektor pozitív voltának biztosítására a következő módon járhatunk el. Kiválasztunk egy olyan oszlopvektort (amelyet be akarunk juttatni a bázisba), amelynek van pozitív koordinátája. Legyen ez az oszlopvektor $\mathbf{a}_k$. Ekkor az $\mathbf{a}_k$ pozitív koordinátáival elosztjuk **b** azonos sorban levő koordinátáit, és e hányadosok közül vesszük a legkisebbet. Tegyük fel, hogy ez a legkisebb a j-edik sorban lépett fel. Ekkor $\mathbf{a}_k$-t a j-edik sorban levő vektorral felcserélve — könnyen belátható módon — pozitív megoldáshoz jutunk.

Második kérdésünkre a következő választ adhatjuk. Számítsuk ki mindegyik i-re a

$$c_i-d_i = c_i-(\alpha_{i1}c_1+\alpha_{i2}c_2+\dots+\alpha_{im}c_m)$$

mennyiséget, ahol $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{im}$ az $\mathbf{a}_i$ vektor kifejtése az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ bázisban. Nyilvánvaló, hogy ha ez a különbség pozitív, akkor az $\mathbf{a}_i$ vektornak a bázisba való bevonása a $\mathbf{cx}$ értéket növeli, míg ha e különbség negatív, akkor $\mathbf{a}_i$-nek a bázisba való bevonása felesleges, mivel ennek folytán a $\mathbf{cx}$ értéke csökkenne.
Példaként oldjuk meg a következő feladatot:
Keresendő az a x_1, x_2, x_3 számhármas, amelyre

$$2x_1+3x_2-\ x_3 \leqq 1,$$

$$x_1-4x_2+2x_3 \leqq 2,$$

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0$$

és az $\qquad x_1+2x_2+3x_3$

kifejezés maximális.
A megfelelő „bővített" feladat így szól: keresendő azon x_1, x_2, x_3, y_4, y_5, amelyre

$$2x_1+3x_2-x_3+y_4 = 1,$$

$$x_1-4x_2+2x_3+y_5 = 2,$$

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0, \quad y_4 \geqq 0, \quad y_5 \geqq 0$$

és az $\qquad x_1+2x_2+3x_3+0\cdot y_4+0\cdot y_5 = x_1+2x_2+3x_3$

kifejezés maximális.
Induljunk ki a következő táblázatból:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$	2	3	−1	1	0	1
$\mathbf{e}_2$	1	−4	2	0	1	2
$\mathbf{c}$	1	2	3	0	0	0
$\mathbf{d}$	0	0	0	0	0	—
$\mathbf{c-d}$	1	2	3	0	0	—

E táblázat megfelel a bővített feladat $y_4 = 1$, $y_5 = 2$ megoldásának. A táblázat $\mathbf{b}$ oszlopának $\mathbf{c}$ sora tartalmazza az e megoldásnak megfelelő $\mathbf{cz}$ értéket. A következő két sor a $\mathbf{d}$ és $\mathbf{c-d}$ értékeket tünteti fel.
Első lépésként $\mathbf{e}_2$-t cseréljük fel $\mathbf{a}_3$-mal. Ezt megtehetjük, hiszen $\mathbf{a}_3$ oszlopában $\mathbf{c-d}$ értéke pozitív és $\mathbf{a}_3$-nak az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ bázisbeli kifejtésében, az $\mathbf{e}_2$ sorában levő elem pozitív. Adódik, hogy

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$	$\frac{5}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	2
$\mathbf{a}_3$	$\frac{1}{2}$	−2	1	0	$\frac{1}{2}$	1
$\mathbf{c}$	1	2	3	0	0	3
$\mathbf{d}$	$\frac{3}{2}$	−6	3	0	0	—
$\mathbf{c-d}$	$-\frac{1}{2}$	8	0	0	0	—

$\mathbf{e}_1$-et $\mathbf{a}_2$-vel felcserélve, adódik, hogy

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_2$	$\frac{5}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	2
$\mathbf{a}_3$	$\frac{11}{2}$	0	1	2	$\frac{3}{2}$	5
$\mathbf{c}$	1	2	3	0	0	19
$\mathbf{d}$	$\frac{43}{2}$	2	3	8	$\frac{11}{2}$	—
$\mathbf{c-d}$	$-\frac{41}{2}$	0	0	−8	$-\frac{11}{2}$	—

Mivel a $\mathbf{c-d}$ értékeket tartalmazó sorban pozitív érték nem szerepel, a $\mathbf{c}\cdot\mathbf{z}$ érték tovább már nem növelhető.
Vagyis feladatunk megoldásaként adódott, hogy

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 5.$$

TÁBLÁZATOK

1. TÁBLÁZAT

*Az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatók $n \leqq 30$ esetén**

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970
21	1	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490
22	1	22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770
23	1	23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314
24	1	24	276	2024	10626	42504	134596	346104	735471
25	1	25	300	2300	12650	53130	177100	480700	1081575
26	1	26	325	2600	14950	65780	230230	657800	1562275
27	1	27	351	2925	17550	80730	296010	888030	2220075
28	1	28	378	3276	20475	98280	376740	1184040	3108105
29	1	29	406	3654	23751	118755	475020	1560780	4292145
30	1	30	435	4060	27405	142506	593775	2035800	5852925

*$n \geqq 15$ esetén $\binom{n}{k}$ értékét csak $k \leqq \frac{n}{2}$-re adjuk meg; a többi értékek az $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ összefüggés felhasználásával szintén leolvashatók a táblázatból.

1. TÁBLÁZAT

folytatás

9	10	11	12	13	14	15	$k \backslash n$
							2
							3
							4
							5
							6
							7
							8
1							9
10	1						10
55	11	1					11
220	66	12	1				12
715	286	78	13	1			13
2002	1001	364	91	14	1		14
5005	3003	1365	455	105	15	1	15
11440	8008	4368	1820	560	120	16	16
24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17
48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	18
92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	19
167960	184756	167960	125970	77520	38760	15504	20
293930	352716	352716	293930	203490	116280	54264	21
497420	646646	705432	646646	497420	319770	170544	22
817190	1144066	1352078	1352078	1144066	817190	490314	23
1307504	1961256	2496144	2704156	2496144	1961256	1307504	24
2042975	3268760	4457400	5200300	5200300	4457400	3268760	25
3124550	5311735	7726160	9657700	10400600	9657700	7726160	26
4686825	8436285	13037895	17383860	20058300	20058300	17383860	27
6906900	13123110	21474180	30421755	37442160	40116600	37442160	28
10015005	20030010	34597290	51895935	67863915	77558760	77558760	29
14307150	30045015	54627300	86493225	119759850	145422675	155117520	30

2. TÁBLÁZAT

A Poisson-eloszlás tagjai

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05362	0,07581
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01263
4		0,00005	0,00025	0,00071	0,00158
5			0,00001	0,00005	0,00016
6					0,00001

k \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9	
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	
2	0,09878	0,12166	0,14379	0,16466	
3	0,01976	0,02838	0,03834	0,04939	
4	0,00296	0,00496	0,00766	0,01111	
5	0,00035	0,00069	0,00123	0,00200	
6	0,00003	0,00008	0,00016	0,00030	
7			0,00001	0,00003	

k \ λ	1	2	3	4	5
0	0,36788	0,13534	0,04978	0,01831	0,00673
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01532	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00306	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05040	0,10420	0,14622
7	0,00007	0,00343	0,02160	0,05954	0,10444
8		0,00085	0,00810	0,02977	0,06527
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03626
10		0,00003	0,00081	0,00529	0,01813
11			0,00022	0,00192	0,00824
12			0,00005	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00019	0,00132
14				0,00005	0,00047
15				0,00001	0,00015
16					0,00004
17					0,00001

2. TÁBLÁZAT

folytatás

k \ λ	6	7	8	9	10
0	0,00247	0,00091	0,00033	0,00012	0,00004
1	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045
2	0,04461	0,02234	0,01073	0,00499	0,00227
3	0,08923	0,05212	0,02862	0,01499	0,00756
4	0,13385	0,09122	0,05725	0,03373	0,01891
5	0,16062	0,12772	0,09160	0,06072	0,03783
6	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109	0,06305
7	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712	0,09007
8	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260
9	0,06883	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511
10	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511
11	0,02252	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374
12	0,01126	0,02635	0,04812	0,07276	0,09478
13	0,00519	0,01418	0,02961	0,05037	0,07290
14	0,00222	0,00709	0,01692	0,03238	0,05207
15	0,00089	0,00331	0,00902	0,01943	0,03471
16	0,00033	0,00144	0,00451	0,01093	0,02169
17	0,00011	0,00059	0,00212	0,00578	0,01276
18	0,00003	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709
19	0,00001	0,00008	0,00039	0,00137	0,00373
20		0,00003	0,00015	0,00061	0,00186
21			0,00006	0,00026	0,00088
22			0,00002	0,00010	0,00040
23				0,00004	0,00017
24				0,00001	0,00007
25					0,00002
26					0,00001

2. TÁBLÁZAT

folytatás

k \ λ	11	12	13	14	15
0	0,00001				
1	0,00018	0,00007	0,00002	0,00001	
2	0,00101	0,00044	0,00019	0,00008	0,00003
3	0,00370	0,00177	0,00082	0,00038	0,00017
4	0,01018	0,00530	0,00269	0,00133	0,00064
5	0,02241	0,01274	0,00699	0,00373	0,00193
6	0,04109	0,02548	0,01515	0,00869	0,00483
7	0,06457	0,04368	0,02814	0,01739	0,01037
8	0,08879	0,06552	0,04573	0,03043	0,01944
9	0,10853	0,08736	0,06605	0,04734	0,03240
10	0,11938	0,10484	0,08587	0,06628	0,04861
11	0,11938	0,11437	0,10148	0,08435	0,06628
12	0,10943	0,11437	0,10994	0,09841	0,08285
13	0,09259	0,10557	0,10994	0,10599	0,09560
14	0,07275	0,09048	0,10209	0,10599	0,10244
15	0,05335	0,07239	0,08847	0,09892	0,10244
16	0,03668	0,05429	0,07188	0,08655	0,09603
17	0,02373	0,03832	0,05497	0,07128	0,08473
18	0,01450	0,02555	0,03970	0,05544	0,07061
19	0,00839	0,01613	0,02716	0,04085	0,05574
20	0,00461	0,00968	0,01765	0,02859	0,04181
21	0,00241	0,00553	0,01093	0,01909	0,02986
22	0,00121	0,00301	0,00645	0,01213	0,02036
23	0,00057	0,00157	0,00365	0,00738	0,01328
24	0,00026	0,00078	0,00197	0,00430	0,00830
25	0,00011	0,00037	0,00102	0,00241	0,00498
26	0,00004	0,00017	0,00051	0,00129	0,00287
27	0,00002	0,00007	0,00024	0,00067	0,00159
28		0,00003	0,00011	0,00033	0,00085
29		0,00001	0,00005	0,00016	0,00044
30			0,00002	0,00007	0,00022
31				0,00003	0,00010
32				0,00001	0,00005
33					0,00002
34					0,00001

2. TÁBLÁZAT

folytatás

k \ λ	16	17	18	19	20
0					
1					
2	0,00001				
3	0,00007	0,00003			
4	0,00030	0,00014	0,00006	0,00003	0,00001
5	0,00098	0,00049	0,00024	0,00011	0,00005
6	0,00262	0,00138	0,00071	0,00036	0,00018
7	0,00599	0,00337	0,00185	0,00099	0,00052
8	0,01198	0,00716	0,00416	0,00236	0,00130
9	0,02131	0,01352	0,00832	0,00498	0,00290
10	0,03409	0,02300	0,01498	0,00946	0,00581
11	0,04959	0,03554	0,02452	0,01635	0,01057
12	0,06612	0,05035	0,03678	0,02588	0,01762
13	0,08138	0,06584	0,05092	0,03783	0,02711
14	0,09301	0,07996	0,06548	0,05135	0,03874
15	0,09921	0,09062	0,07857	0,06504	0,05165
16	0,09921	0,09628	0,08839	0,07724	0,06456
17	0,09338	0,09628	0,09359	0,08632	0,07595
18	0,08300	0,09093	0,09359	0,09112	0,08439
19	0,06989	0,08136	0,08867	0,09112	0,08883
20	0,05592	0,06915	0,07980	0,08656	0,08883
21	0,04260	0,05598	0,06840	0,07832	0,08460
22	0,03098	0,04326	0,05596	0,06764	0,07691
23	0,02155	0,03197	0,04380	0,05587	0,06688
24	0,01437	0,02265	0,03285	0,04423	0,05573
25	0,00919	0,01540	0,02365	0,03362	0,04458
26	0,00566	0,01007	0,01637	0,02456	0,03429
27	0,00335	0.00634	0,01091	0,01728	0,02540
28	0,00191	0,00385	0,00701	0,01173	0,01814
29	0,00105	0,00225	0,00435	0,00768	0,01251
30	0,00056	0,00127	0,00261	0,00486	0,00834
31	0,00029	0,00070	0,00151	0,00298	0,00538
32	0,00014	0,00037	0,00085	0,00177	0,00336
33	0,00007	0,00019	0,00046	0,00102	0,00203
34	0,00003	0,00009	0,00024	0,00057	0,00119
35	0,00001	0,00004	0,00012	0,00030	0,00068
36		0,00002	0,00006	0,00016	0,00038
37		0,00001	0,00003	0,00008	0,00020
38			0,00001	0,00004	0,00010
39				0,00002	0,00005
40					0,00002
41					0,00001

3. TÁBLÁZAT

A nem teljes gammafüggvény

$$\Gamma_n(\lambda) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\lambda} t^{n-1}e^{-t}\,dt = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

n	$\lambda = 0{,}001$	$\lambda = 0{,}002$	$\lambda = 0{,}003$	$\lambda = 0{,}004$
1	0,000999	0,001988	0,002995	0,003992
2	000001	000002	000005	000008

n	$\lambda = 0{,}005$	$\lambda = 0{,}006$	$\lambda = 0{,}007$	$\lambda = 0{,}008$
1	0,004987	0,005982	0,006976	0,007968
2	000013	000018	000024	000032

n	$\lambda = 0{,}009$	$\lambda = 0{,}01$	$\lambda = 0{,}02$	$\lambda = 0{,}03$
1	0,008960	0,009950	0,019801	0,029555
2	000040	000050	000197	000441
3			000002	000004

n	$\lambda = 0{,}04$	$\lambda = 0{,}05$	$\lambda = 0{,}06$	$\lambda = 0{,}07$
1	0,039211	0,048771	0,058236	0,067606
2	000779	001209	001730	002339
3	000010	000020	000034	000054
4				000001

n	$\lambda = 0{,}08$	$\lambda = 0{,}09$	$\lambda = 0{,}10$	$\lambda = 0{,}11$
1	0,076884	0,086069	0,095163	0,104166
2	003034	003815	004679	005624
3	000080	000114	000155	000204
4	000002	000002	000003	000006

n	$\lambda = 0{,}12$	$\lambda = 0{,}13$	$\lambda = 0{,}14$	$\lambda = 0{,}15$
1	0,113080	0,121905	0,130642	0,139292
2	006649	007752	008932	010186
3	000263	000332	000412	000503
4	000008	000011	000014	000018
5				000001

3. TÁBLÁZAT

folytatás

n	$\lambda = 0{,}16$	$\lambda = 0{,}17$	$\lambda = 0{,}18$	$\lambda = 0{,}19$
1	0,147856	0,156335	0,164730	0,173041
2	011513	012912	014381	015919
3	000606	000721	000850	000992
4	000024	000031	000038	000047
5	000001	000001	000001	000001

n	$\lambda = 0{,}20$	$\lambda = 0{,}22$	$\lambda = 0{,}24$	$\lambda = 0{,}26$
1	0,181269	0,197481	0,213372	0,228948
2	017523	020927	024581	028475
3	001149	001506	001927	002414
4	000057	000082	000114	000154
5	000002	000004	000006	000008
6				000001

n	$\lambda = 0{,}28$	$\lambda = 0{,}30$	$\lambda = 0{,}40$	$\lambda = 0{,}50$
1	0,244216	0,259182	0,329680	0,393469
2	032597	036936	061551	090204
3	002970	003600	007926	014388
4	000205	000266	000776	001752
5	000011	000015	000061	000173
6	000001	000001	000004	000014
7			000001	000001

n	$\lambda = 1{,}0$	$\lambda = 1{,}5$	$\lambda = 2{,}0$	$\lambda = 2{,}5$
1	0,63212	0,77687	0,86466	0,91792
2	26424	44218	59399	71270
3	08030	19115	32332	45619
4	01899	06564	14288	24242
5	00366	01858	05265	10882
6	00059	00446	01656	04202
7	00008	00093	00453	01419
8	00001	00017	00110	00425
9	00001	00002	00024	00114
10			00005	00028
11			00001	00006
12				00001

5. TÁBLÁZAT

A normális eloszlásfüggvény

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000						
0,01	0,5040	0,41	0,6591	0,81	0,7910	1,21	0,8869
0,02	0,5080	0,42	0,6628	0,82	0,7939	1,22	0,8888
0,03	0,5120	0,43	0,6664	0,83	0,7967	1,23	0,8907
0,04	0,5160	0,44	0,6700	0 84	0,7995	1,24	0,8925
0,05	0,5199	0,45	0,6736	0,85	0,8023	1,25	0,8944
0,06	0,5239	0,46	0,6772	0,86	0,8051	1,26	0,8962
0,07	0,5279	0,47	0,6808	0,87	0,8078	1,27	0,8980
0,08	0,5319	0,48	0,6844	0,88	0,8106	1,28	0,8997
0,09	0,5359	0,49	0,6879	0,89	0,8133	1,29	0,9015
0,10	0,5398	0,50	0,6915	0,90	0,8159	1,30	0,9032
0,11	0,5438	0,51	0,6950	0,91	0,8186	1,31	0,9049
0,12	0,5478	0,52	0,6985	0,92	0,8212	1,32	0,9066
0,13	0,5517	0,53	0,7019	0,93	0,8238	1,33	0,9082
0,14	0,5557	0,54	0,7054	0,94	0,8264	1,34	0,9099
0,15	0,5596	0,55	0,7088	0,95	0,8289	1,35	0,9115
0,16	0,5636	0,56	0,7123	0,96	0,8315	1,36	0,9131
0,17	0,5675	0,57	0,7157	0,97	0,8340	1,37	0,9147
0,18	0,5714	0,58	0,7190	0,98	0,8365	1,38	0,9162
0,19	0,5753	0,59	0,7224	0,99	0,8389	1,39	0,9177
0,20	0,5793	0,60	0,7257	1,00	0,8413	1,40	0,9192
0,21	0,5832	0,61	0,7291	1,01	0,8438	1,41	0,9207
0,22	0,5871	0,62	0,7324	1,02	0,8461	1,42	0,9222
0,23	0,5910	0,63	0,7357	1,03	0,8485	1,43	0,9236
0,24	0,5948	0,64	0,7389	1,04	0,8508	1,44	0,9251
0,25	0,5987	0,65	0,7422	1,05	0,8531	1,45	0,9265
0,26	0,6026	0,66	0,7454	1,06	0,8554	1,46	0,9279
0,27	0,6064	0,67	0,7486	1,07	0,8577	1,47	0,9292
0,28	0,6103	0,68	0,7517	1,08	0,8599	1,48	0,9306
0,29	0,6141	0,69	0,7549	1,09	0,8621	1,49	0,9319
0,30	0,6179	0,70	0,7580	1,10	0,8643	1,50	0,9332
0,31	0,6217	0,71	0,7611	1,11	0,8665	1,51	0,9345
0,32	0,6255	0,72	0,7642	1,12	0,8686	1,52	0,9357
0,33	0,6293	0,73	0,7673	1,13	0,8708	1,53	0,9370
0,34	0,6331	0,74	0,7703	1,14	0,8729	1,54	0,9382
0,35	0,6368	0,75	0,7734	1,15	0,8749	1,55	0,9394
0,36	0,6406	0,76	0,7764	1,16	0,8770	1,56	0,9406
0,37	0,6443	0,77	0,7794	1,17	0,8790	1,57	0,9418
0,38	0,6480	0,78	0,7823	1,18	0,8810	1,58	0,9429
0,39	0,6517	0,79	0,7853	1,19	0,8830	1,59	0,9441
0,40	0,6554	0,80	0,7881	1,20	0,8849	1,60	0,9452

5. TÁBLÁZAT

folytatás

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,61	0,9463	1,86	0,9686	2,22	0,9868	2,72	0,9967
1,62	0,9474	1,87	0,9693	2,24	0,9875	2,74	0,9969
1,63	0,9484	1,88	0,9699	2,26	0,9881	2,76	0,9971
1,64	0,9495	1,89	0,9706	2,28	0,9887	2,78	0,9973
1,65	0,9505	1,90	0,9713	2,30	0,9893	2,80	0,9974
1,66	0,9515	1,91	0,9719	2,32	0,9898	2,82	0,9976
1,67	0,9525	1,92	0,9726	2,34	0,9904	2,84	0,9977
1,68	0,9535	1,93	0,9732	2,36	0,9909	2,86	0,9979
1,69	0,9545	1,94	0,9738	2,38	0,9913	2,88	0,9980
1,70	0,9554	1,95	0,9744	2,40	0,9918	2,90	0,9981
1,71	0,9564	1,96	0,9750	2,42	0,9922	2,92	0,9982
1,72	0,9572	1,97	0,9756	2,44	0,9927	2,94	0,9984
1,73	0,9582	1,98	0,9761	2,46	0,9931	2,96	0,9985
1,74	0,9591	1,99	0,9767	2,48	0,9934	2,98	0,9986
1,75	0,9599	2,00	0,9772	2,50	0,9938	3,00	0,9986
1,76	0,9608	2,02	0,9783	2,52	0,9941	3,20	0,9993
1,77	0,9616	2,04	0,9793	2,54	9,9945	3,40	0,9996
1,78	0,9625	2,06	0,9803	2,56	0,9948	3,60	0,9998
1,79	0,9633	2,08	0,9812	2,58	0,9951	3,80	0,9999
1,80	0,9641	2,10	0,9821	2,60	0,9953		
1,81	0,9649	2,12	0,9830	2,62	0,9956		
1,82	0,9656	2,14	0,9838	2,64	0,9959		
1,83	0,9664	2,16	0,9846	2,66	0,9961		
1,84	0,9671	2,18	0,9854	2,68	0,9963		
1,85	0,9678	2,20	0,9861	2,70	0,9965		

6. TÁBLÁZAT

***A** t-próba $t_f(\varepsilon)$ kritikus értékei*

***f**: a szabadságfokok száma*

$$P\{|t_f| \geq t_f(\varepsilon)\} = \frac{2}{\sqrt{f\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \int_{t_f(\varepsilon)}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{f}\right)^{\frac{f+1}{2}}} = \varepsilon$$

f \ ε	0,90	0,80	f \ ε	0,90	0,80	f \ ε	0,90	0,80
1	0,158	0,325	13	0,128	0,259	25	0,127	0,256
2	0,142	0,289	14	0,128	0,258	26	0,127	0,256
3	0,137	0,277	15	0,128	0,258	27	0,127	0,256
4	0,134	0,271	16	0,128	0,258	28	0,127	0,256
5	0,132	0,267	17	0,128	0,257	29	0,127	0,256
6	0,131	0,265	18	0,127	0,257	30	0,127	0,256
7	0,130	0,263	19	0,127	0,257	40	0,126	0,255
8	0,130	0,262	20	0,127	0,257	60	0,126	0,254
9	0,129	0,261	21	0,127	0,257	120	0,126	0,254
10	0,129	0,260	22	0,127	0,256	∞	0,126	0,253
11	0,129	0,260	23	0,127	0,256			
12	0,128	0,259	24	0,127	0,256			

7. TÁBLÁZAT

A χ^2-próba $\chi^2_{[f]}(\varepsilon)$ kritikus értékei
f: a szabadságfokok száma

$$P\{\chi^2 \geqq \chi^2_{[f]}(\varepsilon)\} = \frac{1}{2^{\frac{f}{2}}\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \int\limits_{\chi^2_{[f]}(\varepsilon)}^{\infty} x^{\frac{f}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}\, dx = \varepsilon$$

f \ ε	0,99	0,98	0,95	0,90	f \ ε	0,99	0,98	0,95	0,90
1	0,000	0,001	0,004	0,016	16	5,812	6,614	7,962	9,312
2	0,020	0,040	0,103	0,211	17	6,408	7,255	8,672	10,085
3	0,115	0,185	0,352	0,548	18	7,015	7,906	9,390	10,865
4	0,297	0,429	0,711	1,064	19	7,633	8,567	10,117	11,651
5	0,554	0,752	1,145	1,610	20	8,260	9,237	10,851	12,443
6	0,872	1,134	1,635	2,204	21	8,897	9,915	11,591	13,240
7	1,239	1,564	2,167	2,833	22	9,542	10,600	12,338	14,041
8	1,646	2,032	2,733	3,490	23	10,196	11,293	13,091	14,848
9	2,088	2,532	3,325	4,168	24	10,856	11,992	13,848	15,659
10	2,558	3,059	3,940	4,865	25	11,524	12,697	14,611	16,473
11	3,053	3,609	4,575	5,578	26	12,198	13,409	15,379	17,292
12	3,571	4,178	5,226	6,304	27	12,879	14,125	16,151	18,114
13	4,107	4,765	5,892	7,042	28	13,565	14,847	16,928	18,939
14	4,660	5,368	6,571	7,790	29	14,256	15,574	17,708	19,768
15	5,229	5,985	7,261	8,547	30	14,953	16,306	18,493	20,599

8. TÁBLÁZAT

A v^2-próba kritikus $v^2_{f_1, f_2}(\varepsilon)$ értékei $\varepsilon = 0,05$-re

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,41	19,43	19,44
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,74	8,69	8,66
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,84	5,80
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,68	4,60	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,92	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,57	3,49	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,28	3,20	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,07	2,98	2,93
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,91	2,82	2,77
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,79	2,70	2,65
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,69	2,60	2,54
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,60	2,51	2,46
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,53	2,44	2,39
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,48	2,39	2,33
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,33	2,28
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,38	2,29	2,23
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,25	2,19
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,31	2,21	2,15
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,28	2,18	2,12

f_1 a nagyobb empirikus szórásnégyzetű minta elemszámának, f_2 pedig a másik minta elemszámának eggyel kisebbített értéke