

Definíció. Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események teljesen függetlenek, ha bárhogyan is választunk ki közülük k eseményt ($k = 2, \dots, n$), a k esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége megegyezik az egyes események valószínűségeinek szorzatával. Vagyis bármely $k = 2, 3, \dots, n$ esetén

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}),$$

ahol az $i_1, i_2, i_3, \dots, i_k$ számok az $1, 2, \dots, n$ számok tetszőleges k -ad osztályú kombinációját jelentik.

Ebben az összefüggésben $2^n - n - 1$ feltétel van összefoglalva. Ugyanis a teljes függetlenség definiálására annyi egyenlet írható fel, ahányféleképpen n eseményből $2, 3, \dots, n$ kiválasztható. A keresett szám

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}.$$

Mivel

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

ezért

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = 2^n - n - 1.$$

Például három esemény függetlenségi feltétele egy $2^3 - 3 - 1 = 4$ egyenletből álló egyenletrendszer. Valóban az A, B és C események akkor függetlenek, ha eleget tesznek a következő négy összefüggésnek:

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A) P(B), \\ P(AC) &= P(A) P(C), \\ P(BC) &= P(B) P(C), \\ P(ABC) &= P(A) P(B) P(C). \end{aligned}$$

Itt az első három egyenlőség azt fejezi ki, hogy A, B és C páronként függetlenek, a negyedik pedig azt, hogy mindegyik esemény független a másik kettő szorzatától. Ugyanis az első három feltételből következik, hogy

$$P(AB)P(C) = P(AC)P(B) = P(BC)P(A) = P(A)P(B)P(C).$$

Nyilvánvaló, hogy az események páronként való függetlensége általában még nem jelenti az összes esemény függetlenségét.

Példák

1. Dobjunk fel egy szabályos, homogén tetraédert, amelynek lapjai: piros, kék, fehér és piros-kék-fehér csíkos színűek.

Legyen

A_1 esemény: a tetraéderen piros színt látunk,

A_2 esemény: a tetraéderen kék színt látunk,

A_3 esemény: a tetraéderen fehér színt látunk.

Feltételezve, hogy a tetraéder bármelyik lapjára azonos valószínűséggel esik, állapítsuk meg, hogy az A_1, A_2, A_3 események teljesen függetlenek-e?

Bármelyik színt két esetben láthatjuk; amikor a tetraédernek a megfelelő színű lapja és amikor a csíkos lapja van fölül. Így — feltételezve, hogy a tetraéder bármelyik oldallapjára azonos valószínűséggel esik — mindegyik esemény valószínűsége

$$P(A_i) = \frac{k}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

ahol $i = 1, 2, 3$. Vagyis

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}.$$

Bármelyik két esemény együttes bekövetkezése azt jelenti, hogy a tetraéder a csíkos oldallapjával felfelé esett (ugyanis csak ebben az esetben láthatunk két színt egyszerre), és így bármelyik két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A_i A_j) = \frac{1}{4}, \quad \text{ha } i \neq j.$$

$$\text{Vagyis } P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}.$$

Míthogy

$$P(A_i A_j) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_i) P(A_j),$$

ha $i \neq j$, azért fennállnak a

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2) &= P(A_1) P(A_2), \\ P(A_1 A_3) &= P(A_1) P(A_3), \\ P(A_2 A_3) &= P(A_2) P(A_3) \end{aligned}$$

összefüggések, melyek az A_1, A_2, A_3 események páronkénti függetlenségét jelentik. Ugyanakkor ezek az események nem teljesen függetlenek, mert bármelyik két esemény együttes bekövetkezése már nem független a harmadik eseménytől. Ugyanis bármelyik két esemény együtt csak úgy következhet be, ha a tetraédernek a csíkos oldallapja van felül, akkor pedig már a harmadik esemény is bekövetkezett. Tehát

$$P[(A_i A_j) | A_k] = 1 \neq P(A_i) P(A_j) P(A_k), \quad \text{ha } i \neq j \neq k,$$

$$\text{vagyis } P[(A_1 A_2) | A_3] \neq P(A_1) P(A_2) P(A_3),$$

$$P[(A_1 A_3) | A_2] \neq P(A_1) P(A_3) P(A_2),$$

$$P[(A_2 A_3) | A_1] \neq P(A_2) P(A_3) P(A_1),$$

ami azt jelenti, hogy $(A_1 A_2)$ és A_3 , ill. $(A_1 A_3)$ és A_2 , ill. $(A_2 A_3)$ és A_1 nem függetlenek, és így az A_1, A_2, A_3 események együttesen nem függetlenek.

2. Bernstein példája. Egy urnában 4 egyforma papírlap van. Mindegyikre három számjegy van írva, mégpedig az elsőre: 0, 0, 0; a másodikra 0, 1, 1; a harmadikra 1, 0, 1 és a negyedikre 1, 1, 0. Vegyünk ki egy papírlapot és tegyük fel, hogy mindegyik papírlap azonos valószínűséggel vehető ki. Jelentsé az A_i esemény azt, hogy a kiemelt lap i -edik jegye 1-es ($i = 1, 2, 3$). Igazoljuk, hogy az A_i események páronként függetlenek, együttesen azonban nem.

Mivel 2 olyan lap van, melynek i -edik jegye 1-es, a klasszikus feltétel mellett

$$P(A_i) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\text{vagyis } P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}.$$

Továbbá

$$P(A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)P(A_2),$$

$$P(A_1 \cdot A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_2)P(A_3),$$

ami azt jelenti, hogy az adott események páronként függetlenek. Mivel

$$P(A_1 A_2 A_3) = 0,$$

mert nincs olyan lap, melyen három 1-es szerepelne, és

$$P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$\text{azért } P(A_1 A_2 A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

ami azt jelenti, hogy az adott események nem teljesen függetlenek.

14.1.4.5.3 Teljes eseményrendszerek függetlensége

Két esemény függetlenségét általánosíthatjuk és definiálhatjuk mint két teljes eseményrendszer függetlenségét.

Definíció. Két teljes eseményrendszer, az $A_1, A_2, \dots, A_m$ és a $B_1, B_2, \dots, B_n$ függetlenek, ha $i = 1, 2, \dots, m$ és $j = 1, 2, \dots, n$ minden értéke mellett A_i független B_j -től, vagyis ha fennállnak a

$$(*) \quad P(A_i B_j) = P(A_i)P(B_j)$$

$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ feltételek.

Könnyen belátható, hogy a definícióban szereplő $m \cdot n$ számú feltétel nem mind független egymástól, hiszen $A_1, A_2, \dots, A_m$ és $B_1, B_2, \dots, B_n$ teljes eseményrendszert alkotnak. Igazolható — de ezzel itt nem foglalkozunk —, hogy az $m \cdot n$ számú feltevés közül elhagyható

$$m+n-1$$

feltevés, és a megmaradó

$$mn - (m+n-1) = (m-1)(n-1)$$

számú feltevés fennállása már maga után vonja a többi teljesülését.

Megjegyzés. Ha $n = m = 2$, vagyis ha a teljes eseményrendszerek $\{A_1, A_2\}$ és $\{B_1, B_2\}$, akkor a függetlenségükre vonatkozó

$$P(A_i B_j) = P(A_i)P(B_j)$$

($i = 1, 2; j = 1, 2$) formulával megadott négy feltételből

$$m+n-1 = 2+2-1 = 3$$

feltétel elhagyható, és így csak egy feltétel marad, amely maga után vonja a többi három teljesülését.

Ezzel a már bizonyított állítást nyerjük, hogy az $\{A, \bar{A}\}$ és $\{B, \bar{B}\}$ teljes eseményrendszerek esetén a függetlenségükre vonatkozó

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A\bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$$

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$$

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

négy feltétel közül három felesleges, bármelyikből a többi három következik.

14.1.4.5.4 Kísérletek függetlensége

Eddig ugyanazon kísérlet eredményeit képező két esemény vagy két teljes eseményrendszer függetlenségét értelmeztük. A gyakorlatban azonban gyakran előfordul a függetlenség általánosabb fogalma, két különböző kísérlet függetlenségének fogalma. Ha két — egyidejűleg vagy egymás, után végrehajtott — kísérletet egynek tekintünk ezen közös kísérletben, s az egyik kísérlet bármelyik eredményeként adódó esemény független a másik kísérlet bármelyik eredményeként adódó eseményétől, akkor a két kísérletet *függetlennek* nevezzük. A függetlenség fogalmának ezen általánosítása visszavezethető az előzőekre a következőképpen. Tételezzük fel, hogy mindkét kísérlethez tartozó eseményalgebra véges. Az első kísérlethez tartozó véges valószínűségi mező elemi eseményeit jelöljük $A_1, A_2, \dots, A_m$ -mel, ezek valószínűségeit pedig $P(A_k) = p_k$ -val ($k = 1, 2, \dots, m$). A második kísérlethez tartozó véges valószínűségi mező elemi eseményeit jelöljük $B_1, B_2, \dots, B_n$ -nel, és ezek valószínűségeit $P(B_k) = q_k$ -val ($k = 1, 2, \dots, n$). Ha $\mathcal{A}$ -val, illetve $\mathcal{B}$ -vel jelöljük a két kísérlet lehetséges eredményeiből álló eseményalgebrákat, beszélhetünk egy harmadik kísérletről, amely abban áll, hogy mind a két szóban forgó kísérletet végrehajtjuk. Ennél a kísérletnél nyilván $m \cdot n$ különböző elemi esemény lehetséges. Az első kísérlet eredménye A_i és a második kísérlet eredménye B_j , ahol i végigfut az $1, 2, \dots, m$, és j az $1, 2, \dots, n$ számokon. Azt az eseményt, hogy az A kísérlet eredménye A_i és a B kísérlet eredménye B_j , jelöljük C_{ij} -vel. Képezzünk egy eseményalgebrát, amelynek elemi eseményei a C_{ij} események, vagyis tekintsük ezen C_{ij} események halmazának összes részhalmazaiából álló eseményalgebrát. Ezt nevezzük a két eseményalgebra szorzatának és $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ -vel jelöljük. Az $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ eseményalgebra valószínűségi algebrává tehető, ha az $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ -hez tartozó események valószínűségeit a következőképpen definiáljuk.

Legyen

$$P(C_{ij}) = P(A_i) \cdot P(B_j) = p_i \cdot q_j,$$

és ha C ezen eseményalgebra egy tetszőleges eleme, mely előállítható $C = C_{i_1 j_1} + C_{i_2 j_2} + \dots + C_{i_r j_r}$ alakban, akkor legyen

$$P(C) = \sum_{k=1}^r P(C_{i_k j_k})$$

vagyis

$$P(C) = \sum_{k=1}^r p_{i_k} q_{j_k}.$$

Könnyen belátható, hogy az így értelmezett $P(C)$ eleget tesz a valószínűségekre vonatkozó összes axiómáknak, tehát így módon egy valószínűségi algebrát konstruáltunk, amelyet a két kísérlethez tartozó $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ valószínűségi algebrák szorzatának nevezünk, és szintén $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ -vel jelölünk. Ebben a valószínűségi algebrában az $\mathcal{A}$ valószínűségi mező tetszőleges A eseménye független a $\mathcal{B}$ valószínűségi mező tetszőleges B eseményétől. Ugyanis legyen

$$A = A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_k}$$

és

$$B = B_{j_1} + B_{j_2} + \dots + B_{j_l}$$

az A és B események elemi események összegére való felbontása. Az A és B események az $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ eseményalgebra elemi eseményei segítségével a következőképpen állíthatók elő

$$(1) \quad A = \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^l C_{i_r j_s}.$$

(ugyanis, ha az első kísérlet eredménye A_i , ugyanakkor a második kísérlet eredménye akármi lehet)

$$(2) \quad B = \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^l C_{i j_s}.$$

Összeszorozva (1) és (2) jobb oldalait és figyelembe véve, hogy két különböző elemi esemény szorzata mindig 0, azt kapjuk, hogy

$$A \cdot B = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^l C_{i_r j_s}.$$

A valószínűség additivitása folytán ebből következik, hogy

$$P(AB) = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^l P(C_{i_r j_s}).$$

Tekintetbe véve, hogy definíciónk értelmében

$$P(C_{ij}) = p_i q_j,$$

azt kapjuk, hogy

$$P(AB) = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^l p_{i_r} q_{j_s} = \left(\sum_{r=1}^k p_{i_r} \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^l q_{j_s} \right).$$

Miután

$$\sum_{r=1}^k p_{i_r} = P(A)$$

és

$$\sum_{s=1}^l q_{j_s} = P(B),$$

azért $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$,

amivel állításunkat igazoltuk.

Hasonlóan értelmezhető az $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ szorzatalgebra abban az esetben is, ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ végtelen eseményalgebrák.

Definíció. Két egymás után vagy egyidejűleg végrehajtott kísérlet egymástól független, ha annak az eseménynek a valószínűsége, hogy az egyik kísérletből A_i és a másikkól B_j következett be, megegyezik a két esemény valószínűségének szorzatával. Vagyis

$$P(A_i B_j) = P(A_i) \cdot P(B_j).$$

Ez a definíció kiterjeszthető több kísérletre is.

Definíció. n számú, egymás után vagy egyidejűleg végrehajtott kísérlet egymástól független, ha annak a valószínűsége, hogy az elsőből A_1 , a másodikból A_2 , ..., az n -edikből A_n következett be, megegyezik az egyes események valószínűségeinek szorzatával:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n).$$

Ha egy kísérletet azonos körülmények között többször ismétlünk meg, az azonos körülményekből következik, hogy a kísérletek nem befolyásolják egymást, tehát függetlenséget tételezhetünk fel.

Gyakorlati példákban a függetlenséget definiáló

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$$

összefüggés különösen egyszerűvé válik, ha

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p.$$

akkor ugyanis az a feltétel hogy:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = p^n.$$

Ez a helyzet áll fenn, amikor ugyanezt a kísérletet többször egymás után megismétljük, és keressük annak a valószínűségét, hogy az egyik lehetséges kimenetel többször egymás után bekövetkezik.

Megjegyzés. Ha két független kísérlet elemi eseményei

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

és

$$B_1, B_2, \dots, B_n,$$

akkor ez együttes kísérlet elemi eseményei

$$A_i, B_j,$$

ahol $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Tehát az elemi események száma $m \cdot n$.

Ha mindkét kísérlet elemi eseményei egyenlően valószínűek, akkor az egyiknél $\frac{1}{m}$, a másiknál $\frac{1}{n}$ minden elemi esemény valószínűsége, és az együttes kísérlet elemi eseményei is egyenlően valószínűek, minden elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{m \cdot n}$.

Hasonlóan, ha egyidejűleg több független kísérletet tekintünk, amelyeknél az elemi események száma rendre $n_1, n_2, \dots, n_k$, és az egyes elemi események egyenlően valószínűek, mégpedig rendre $\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \dots, \frac{1}{n_k}$ valószínűségűek, akkor ezt a k számú kísérletet együtt té-

kintve az új kísérlet elemi eseményeinek száma $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$, ahol minden egyes elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k}$.

E megállapításnak az a jelentősége, hogy többször megismételt kísérlet, vagy több független kísérlet egyidejű végzésekor nem kell a sok kísérletet egy újabb kísérletnek tekinteni és abban megoldani a feladatot, hanem elegendő az egyes kísérletekre vonatkozó valószínűségeket ismerni. Ezek ismeretében már meghatározható bármelyik összetett esemény valószínűsége.

Példák

1. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy kockát egymás után háromszor feldobva a 6-os szám egyszer sem kerül felülre?

Hogy az első dobásra nem kapunk 6-ost, annak a valószínűsége a klasszikus feltétel mellett

$$P(A_1) = \frac{5}{6}.$$

Annak a valószínűsége, hogy a második dobásra nem kapunk 6-ost

$$P(A_2) = \frac{5}{6},$$

és hasonlóan annak a valószínűsége, hogy a harmadik dobásra nem kapunk 6-ost

$$P(A_3) = \frac{5}{6}.$$

Mivel a három dobás egymástól független,

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

2. Egy szövőnö 3 gépen dolgozik egyszerre, amelyek egymástól függetlenül működnek. Az első gépnél 0,9; a másodiknál 0,8; a harmadiknál 0,85 annak a valószínűsége, hogy 1 órás időtartam alatt nincs szálszakadás. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a munkaidő egy tetszőleges 1 órás időtartama alatt egyik gépen sem következik be szálszakadás?

Legyen

A_1 esemény: az első gépen 1 órás időtartam alatt nincs szálszakadás,

A_2 esemény: a második gépen 1 órás időtartam alatt nincs szálszakadás,

A_3 esemény: a harmadik gépen 1 órás időtartam alatt nincs szálszakadás.

A megfelelő valószínűségek:

$$P(A_1) = 0,9,$$

$$P(A_2) = 0,8$$

$$P(A_3) = 0,85.$$

Mivel az A_1, A_2, A_3 események függetlenek, a keresett valószínűség:

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) = 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,8 = 0,612.$$

3. Bernoulli példája.

Legyen egy kísérlethez tartozó valamely A esemény bekövetkezésének valószínűsége p , és annak a valószínűsége, hogy az A esemény nem következik be, $q = 1 - p$. Végezzük el a kísérletet azonos körülmények között egymás után n -szer. Keressük annak a valószínűségét, hogy

a) az első k kísérletnél az A esemény következik be és a többi kísérletnél nem,
b) az n kísérlet közül az A esemény pontosan k -szor következik be (a sorrendre nem vagyunk tekintettel).

a) Az egymás után végrehajtott kísérletek eseményei egymástól függetlenek, így annak az eseménynek a valószínűsége, hogy az első k kísérlet során az A esemény következett be és a többi $(n - k)$ -nál nem

$$P_{n(k)} = p^k \cdot q^{n-k}.$$

b) Ha annak a valószínűségét akarjuk meghatározni, hogy az A esemény pontosan k -szor következett be – függetlenül attól, hogy milyen sorrendben –, akkor $p^k \cdot q^{n-k}$ valószínűségeket annyszor kell venni, ahányféleképpen az n kísérlet közül a k számú kiválasztható, tehát $\binom{n}{k}$ -szor. Így a keresett valószínűség:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

14.1.5 Néhány modell a valószínűségek kombinatorikus úton történő meghatározására

14.1.5.1 Véletlen sorrendek

1. Probléma. Mi a valószínűsége, hogy n különböző elem közül egy bizonyos elem a k -adik helyen álljon?

Feltételezve, hogy minden sorrend egyformán valószínű, a lehetséges sorrendek száma

$$l = P_n = n!.$$

Kedvező eset, amikor a kiválasztott elem a k -adik helyen áll. Ez annyi elrendezésben fordul elő, amennyi a többi $(n - 1)$ elem permutációinak száma. Így a kedvező sorrendek száma

$$k = P_{n-1} = (n - 1)!.$$

Tehát a kérdéses valószínűség

$$p = \frac{k}{l} = \frac{(n - 1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

2. Probléma. Mi a valószínűsége, hogy n különböző elem egy meghatározott sorrendben helyezkedjen el?

Minden sorrendet egyformán valószínűnek tekintve a lehetséges sorrendek száma

$$l = P_n = n!$$

A kedvező sorrendek száma

$$k = 1$$

Így a kérdéses valószínűség

$$p = \frac{k}{l} = \frac{1}{n!}.$$

3. **Probléma.** n elem közül $k_1, k_2, \dots, k_i$ ($k_1 + k_2 + \dots + k_i = n$) azonos típusú. Mi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen sorba rendezve ezek egy meghatározott sorrendben helyezkednek el?

Mivel az elemek között azonosak is vannak, melyeknek egymás közti cseréje nem ad új sorrendet, a lehetséges sorrendek száma n , olyan elem ismétléses permutációinak száma, melyek közül $k_1, k_2, \dots, k_i$ darab azonos van:

$$l = P_{n(k_1 \dots k_i)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_i!}.$$

A kedvező esetek száma

$$k = 1.$$

Így a kérdéses valószínűség

$$p = \frac{k}{l} = \frac{1}{\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_i!}} = \frac{k_1! k_2! \dots k_i!}{n!}.$$

Példák

1. 4 fiú és 4 lány között 8 db, egymás melletti helyre szóló színházjegyet osztunk szét. Mi a valószínűsége annak, hogy sem 2 fiú, sem 2 lány nem kap egymás melletti helyre szóló jegyet?

A 8 db jegy a 4 fiú és 4 lány között összesen 8!-féleképpen osztható szét. Ha sem 2 fiú, sem 2 lány nem kerülhet egymás mellé, akkor a 4 lány pl. a 4 páratlan számozású helyre 4! sorrendben és közéjük a 4 páros számozású helyre a 4 fiú ugyancsak 4! sorrendben ülhet le. Figyelembe véve, hogy ülhetnek a lányok a páros számozású és a fiúk a páratlan számozású helyekre is, a kérdéses valószínűség

$$p = \frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} \approx 0,03.$$

2. 15 tagú társaság tagjai közül pontosan 5-en ismerik egymást. Mi a valószínűsége annak, hogy egy kör alakú asztal mellé — ahol a helyek nem számozottak — úgy üljenek le, hogy minden harmadik ismerje egymást?

Miután a helyek nem számozottak, a 15 ember lehetséges ülési sorrendjének száma:

$$l = 14!.$$

(Ugyanis egy ember helyét rögzíteni kell, mert nem számít más sorrendnek, ha pl. mindenki egy széssel arrébb ül.)

Az 5 ismerős minden harmadik helyre 4! sorrendben ülhet le, és közöttük a társaság többi 10 tagja 10! sorrendben helyezkedhet el. Tehát a kedvező elhelyezkedési sorrendek száma:

$$k = 4! \cdot 10!$$

Így a kérdéses valószínűség

$$p = \frac{4! \cdot 10!}{14!} \approx 0,001.$$

14.1.5.2 Mintavétel

Gyakorlati szempontból fontos feladat annak megvizsgálása, hogy a munkadarabok közül hány százalék selejtes. Erre két módszer lehetséges. Az egyiknél a véletlenszerűen kiválasztott munkadarabokat mindig visszatesszük, ez a *visszatevéses mintavétel*. A másik módszer során a kiválasztott munkadarabokat nem tesszük vissza, a következő mintát eggyel kevesebb számú munkadarabból vesszük; ez a *visszatevés nélküli mintavétel*.

14.1.5.2.1 Visszatevéses mintavétel

Mi a valószínűsége annak, hogy az S számú selejtes darabot tartalmazó N munkadarabból n elemű mintát véve — az egyenként kiemelt alkatrészeket mindig visszatesszük —, az n elemű mintában pontosan k darab selejt van?

Visszatevéses mintavétel esetén a kiemelt munkadarabok sorrendje is számít, és egy alkatrész többször, akár n -szer is kiemelhető. Ennek figyelembevételével az összes n elemű minták száma

$$\bar{V}_N^n = N^n.$$

Egy meghatározott sorrendet követve azon n elemű minták száma, melyekben k selejtes és $(n-k)$ hibátlan munkadarab van

$$\bar{V}_S^k \cdot \bar{V}_{N-S}^{n-k} = S^k \cdot (N-S)^{n-k}.$$

Mivel a k selejtes és $(n-k)$ hibátlan munkadarab összes lehetséges sorrendjeinek száma

$$\bar{P}_{n(k, n-k)} = \frac{n!}{k! (n-k)!},$$

az összes k darab selejtes munkadarabot tartalmazó n elemű minták száma

$$\frac{n!}{k! (n-k)!} S^k \cdot (N-S)^{n-k}.$$

Tehát a keresett valószínűség

$$p_n(k) = \frac{\frac{n!}{k! (n-k)!} S^k (N-S)^{n-k}}{N^n},$$

$$\text{vagyis } p_n(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{S}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{N-S}{N}\right)^{n-k}.$$

Alkalmazva az $\frac{S}{N}$ selejtarányra az

$$\frac{S}{N} = p$$

és a hibátlan alkatrészek arányára az

$$\frac{N-S}{N} = 1 - \frac{S}{N} = q$$

jelölést, a keresett valószínűség

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

Megjegyzés. A p selejtarány a selejtes alkatrész kiemelésének, a q pedig, a hibátlan alkatrész kiemelésének valószínűségét adja.

14.1.5.2.2 Visszatevés nélküli mintavétel

N munkadarab közül S számú selejtes. Mi a valószínűsége, hogy n elemű mintában k darab selejtest találunk?

Különbözőknek tekintve azon mintavételeket, amikor ugyanazokat a munkadarabokat más sorrendben emeljük ki, a lehetséges n elemű mintavételek száma

$$V_N^n = \binom{N}{n} n!.$$

A kedvező mintavételek száma megegyezik az S selejtes darabból kiemelt k számú és az $(N-S)$ hibátlan darabból kiemelt $(n-k)$ számú munkadarab lehetséges kiválasztásainak számával. Így azon esetek száma, melyekben k selejtes és $(n-k)$ hibátlan darab egy meghatározott sorrendet követ

$$V_S^k \cdot V_{N-S}^{n-k} = \binom{S}{k} k! \binom{N-S}{n-k} (n-k)!,$$

és mivel a k selejtes és $(n-k)$ hibátlan darab összes lehetséges sorrendjének száma

$$\bar{P}_{n(k, n-k)} = \frac{n!}{k! (n-k)!},$$

a kedvező mintavételek száma

$$\frac{n!}{k! (n-k)!} \binom{S}{k} k! \binom{N-S}{n-k} (n-k)! = n! \binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}.$$

Tehát a kérdéses valószínűség

$$P_n(k) = \frac{n! \binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n} n!} = \frac{\binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Elvi szempontból különböző az az eset, amikor a munkadarabokat egymás után emeljük ki, illetve amikor egyszerre emeljük ki. Az első esetben ugyanis számít a kiemelés sorrendje, a másodiknál erről nem is lehet szó. A feladat megoldása szempontjából azonban mindegy, hogy melyik kiválasztási módot tartjuk szem előtt, a szóban forgó esemény valószínűsége ugyanaz. Ugyanis, ha n számú munkadarabot egyszerre emelünk ki, a lehetséges mintavételek száma

$$C_N^n = \binom{N}{n}.$$

A kedvező mintavételek száma

$$C_S^k \cdot C_{N-S}^{n-k} = \binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}.$$

Tehát a kérdéses valószínűség

$$p_k = \frac{\binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

megegyezik az előző számítás eredményével.

Példa

1000 alkatrész közül 50 darab selejtes. 25 darabos véletlen mintavétel esetén mi a valószínűsége annak, hogy abban legfeljebb 2 db selejtes van, feltéve, hogy a mintavétel:

- visszatevés nélküli,
- visszatevéses.

Hogy a mintavételben legfeljebb 2 db selejt van, az azt jelenti, hogy vagy nincs benne selejt, vagy 1 selejt, vagy 2 selejt van benne.

Visszatevés nélküli mintavétel esetén azon mintavételek száma, amelyek nem tartalmaznak selejtet:

$$x_0 = C_{950}^{25} = \binom{950}{25},$$

amelyek 1 selejtet tartalmaznak:

$$x_1 = C_{50}^1 \cdot C_{950}^{24} = 50 \cdot \binom{950}{24},$$

amelyek 2 selejtet tartalmaznak:

$$x_2 = C_{50}^2 \cdot C_{950}^{23} = \binom{50}{2} \binom{950}{23}.$$

Tehát a kedvező esetek száma:

$$x = x_0 + x_1 + x_2 = \binom{950}{25} + 50 \binom{950}{24} + \binom{50}{2} \binom{950}{23}.$$

A lehetséges esetek száma:

$$C_{1000}^{25} = \binom{1000}{25}.$$

Így visszatevés nélküli mintavétel esetén a kérdéses valószínűség

$$p = \frac{\binom{950}{25} + \binom{50}{1} \binom{950}{24} + \binom{50}{2} \binom{950}{23}}{\binom{1000}{25}}.$$

Visszatevéses mintavétel esetén pedig:

$$p = \left(\frac{950}{1000}\right)^{25} + \binom{25}{1} \left(\frac{50}{1000}\right) \left(\frac{950}{1000}\right)^{24} + \binom{25}{2} \left(\frac{50}{1000}\right)^2 \left(\frac{950}{1000}\right)^{23}.$$

14.1.5.3 Elhelyezési problémák

Az elhelyezési problémáknak nagy szerepük van a statisztikus mechanikában, ahol bizonyos elemi részecskék (molekulák, fotonok, elektronok stb.) fázistérben való eloszlását vizsgálják. Ez a következőt jelenti: ha minden részecske n adattal jellemezhető, akkor az illető részecske „állapotának” az n -dimenziós fázistér azon pontja felel meg, amelynek koordinátái a részecskét jellemző adatok. A fázistér n -dimenziós paralelepipedonokra (cellákra) osztva, a fizikai rendszer annak megadásával írható le, hogy az egyes cellákban hány részecske van. A fizika különböző területei, a problémák különböző voltának megfelelően különböző statisztikát igényelnek.

14.1.5.3.1 Maxwell—Boltzmann-statisztika

A Maxwell—Boltzmann-statisztika feltevése, hogy a részecskék megkülönböztethetők és minden elhelyezkedésük (eloszlásuk) egyformán valószínű. Ez a statisztika jól használható a statisztikus mechanikában, pl. a gázmolekulák rendszereire.

A Maxwell—Boltzmann-statisztika szerint meghatározzuk annak a valószínűségét, hogy N számú cellában n számú ($n > N$ is lehet) különböző részecske úgy helyezkedjen el, hogy egy bizonyos cellába pontosan k darab kerüljön.

Mivel minden részecske N különböző cellába kerülhet, ezért az n részecske lehetséges elhelyezkedéseinek száma

$$V_N^n = N^n.$$

Az n részecske közül az k darab, amely a kijelölt cellába kerül, $\binom{n}{k}$ -féleképpen választható ki, a többi $(n-k)$ részecske a fennmaradó $(N-1)$ cellában $(N-1)^{n-k}$ -féleképpen helyezkedhet el. Így azon elhelyezkedések száma, melyekben k részecske egy kijelölt cellába kerül

$$\binom{n}{k} (N-1)^{n-k}.$$

A keresett valószínűség

$$p_k = \frac{\binom{n}{k} (N-1)^{n-k}}{N^n},$$

vagyis

$$p_k = \binom{n}{k} \frac{1}{N^k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k},$$

ahol $\frac{1}{N}$ jelenti egy részecske valamelyik cellában való elhelyezkedésének valószínűségét.

14.1.5.3.2 Bose—Einstein-statisztika

Az optikában, a fotonrendszerekre alkalmazható Bose—Einstein-statisztika alapja, hogy a részecskék egymástól nem különböztethetők meg, és így csak azon elhelyezkedések tekinthetők különbözőeknek, melyeknél az egyes cellákban levő részecskék száma különböző.

Meghatározzuk a Bose—Einstein-statisztika szerint annak a valószínűségét, hogy N számú cellában n meg nem különböztethető részecske úgy helyezkedjen el, hogy egy megadott cellába pontosan k számú részecske jusson.

Miután csak az a lényeges, hogy egy cellába hány részecske kerül, az n részecske N számú cellában való elhelyezkedéseinek száma

$$\bar{C}_N^n = \binom{N+n-1}{n}.$$

Így minden egyes elhelyezkedés valószínűsége $\frac{1}{\binom{N+n-1}{n}}$. Azon elhelyezkedések száma, amelyekben a kijelölt cellában pontosan k részecske van, megegyezik azon lehetőségek számával, ahányféleképpen a többi $(N-1)$ cellába az $(n-k)$ részecskét el lehet helyezni.

Tehát a feltételeknek eleget tevő elhelyezkedések száma

$$\bar{C}_{N-1}^{n-k} = \binom{N-1+n-k-1}{n-k} = \binom{N+n-k-2}{n-k},$$

és így a keresett valószínűség

$$P_k = \frac{\binom{N+n-k-2}{n-k}}{\binom{N+n-1}{n}}.$$

14.1.5.3.3 Fermi—Dirac-statisztika

Az elektronok, protonok, neutronok körében érvényes Fermi—Dirac-statisztika alapelve, hogy az egyes részecskék megkülönböztethetetlenek egymástól (Bose—Einstein-elv), és egy-egy cellába maximálisan egy részecske juthat.

Meghatározzuk a Fermi—Dirac-statisztika alapján annak a valószínűségét, hogy egy meghatározott cellában éppen egy részecske van.

A különböző elhelyezkedések (eloszlások) száma megegyezik azoknak a lehetőségeknek a számával, ahányféleképpen N elemből n elemet ki lehet választani. Ezek száma

$$C_N^n = \binom{N}{n}.$$

Azon elhelyezkedések száma, amelyeknél az illető cellában éppen egy részecske van, megegyezik azon lehetőségek számával, ahányféleképpen az $(N-1)$ cellában az $(n-1)$ részecske — a feltételeknek megfelelően — elhelyezkedhet. Ezek száma

$$C_{N-1}^{n-1} = \binom{N-1}{n-1}.$$

Tehát a kérdéses valószínűség

$$p = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{(n-1)!} \cdot \frac{n!}{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}$$

illetve egyszerűsítés után:

$$p = \frac{n}{N}.$$

Példák

1. 50 egyetemi hallgató jelentkezik 3 különböző napra kitűzött vizsgára. Mi a valószínűsége annak, hogy az első napra 10-en, a másodikra 15-en és a harmadikra 25-en jelentkeznek? Miután a hallgatók megkülönböztethetők, és egy vizsganapra akárhányszor is jelentkezhetnek, a jelölési eloszlás a Maxwell—Boltzmann-statisztika feltételeinek megfelelő. Így annak a valószínűsége, hogy az $n = 50$ hallgató a $N = 3$ vizsganapra úgy jelentkezik, hogy az első napra $k_1 = 10$, a másodikra $k_2 = 15$, a harmadikra $k_3 = 20$ hallgató jelentkezik

$$p = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} \cdot \frac{1}{N^n} = \frac{50!}{10! 15! 25!} \cdot \frac{1}{3^{50}}.$$

2. Mi a valószínűsége annak, hogy 100 db 1 forintost 5 gyerek között véletlenszerűen úgy osztunk szét, hogy a legidősebbnek 30 Ft jusson?

Mivel a forintostok nem különböztethetők meg és figyelembevéve, hogy az elosztásra olyan lehetőség is van, hogy egyesek (akár egy gyerek kivételével mind) nem kapnak pénzt, az elosztás a Bose—Einstein-statisztika feltételének megfelelő. Így annak a valószínűsége, hogy az $n = 100$ db 1 forintost a $N = 5$ gyerek között úgy osztjuk szét, hogy a legidősebbnek $k = 30$ Ft jusson.

$$p = \frac{\binom{N+n-k-2}{n-k}}{\binom{N+n-1}{n}} = \frac{\binom{5+100-30-2}{100-30}}{\binom{5+100-1}{100}} = \frac{\binom{73}{70}}{\binom{104}{100}} \approx 0,01.$$

Egyik ismert állami gazdaságunknak öt korszerű kukoricavető géprendszere van, amelyből nyolc termelőszövetkezet igényel egyet-egyet. Mi a valószínűsége annak, hogy az 5 legtávolabbi termelőszövetkezetnek teljesítik a kérését?

Mivel a gépsorok nem különböztethetők meg, és egy termelőszövetkezet csak egyet vagy 0-t kap, az elosztás feltételei tehát a Fermi—Dirac-statisztika feltételeinek felelnek meg. Annak a valószínűsége, hogy az $n = 5$ gépsort a $N = 8$ termelőszövetkezet közt úgy osztják szét, hogy az 5 legtávolabbi kap egyet-egyet,

$$p = \frac{1}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{8}{5}} = \frac{5!}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} \approx 0,018.$$

14.1.6 Valószínűségek meghatározása geometriai módszerrel

Eddig olyan klasszikus valószínűség-számítási problémákkal foglalkoztunk, amelyekben az események száma véges volt, holott már a klasszikus feladatok közt is szerepeltek olyanok, melyeknél ez a feltétel nem teljesült, az események száma végtelen volt. Ilyen esetekben az

események valószínűsége nem határozható meg a $p = \frac{k}{n}$ formula alapján, hiszen a kedvező és az összes lehetséges események száma nem véges. Ebből következik, hogy egy-egy elemi eseménynek nem tulajdoníthatunk 0-tól különböző azonos valószínűséget. Ugyanis bármilyen kis értéket tulajdonítanánk egy-egy elemi esemény valószínűségének, a teljes eseményrendszerre vonatkozó $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ axióma nem teljesülhetne. Amikor tehát az események száma végtelen, azt a klasszikus feltételt, hogy az elemi események egyenlően valószínűek, más feltétellel kell helyettesíteni, amiből következik, hogy az események valószínűségét is más módon kell meghatározni.

Olyan esetekben, amikor az események szemléltethetők egy geometriai alakzat pontjaival, a kísérlet a geometriai alakzat egy pontjának véletlenszerű kiválasztása. A valószínűség meghatározására alkalmazható az ún. geometriai módszer, feltéve, hogy a kísérlet lehetséges eredményeinek valószínűsége az illető geometriai alakzaton „egyenletesen oszlik” el. Ez azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy a pont az adott résztartományba esik, csak a résztartomány mérőszámától függ, és független annak a teljes tartománybeli elhelyezkedésétől. (Az egyenletes eloszlás feltétele helyettesíti a véges számú elemi eseményeknél alkalmazott azon feltételt, hogy minden elemi esemény egyforma valószínűségű.)

A fenti feltételek teljesülése esetén egy A esemény valószínűsége meghatározható az A esemény bekövetkezésére kedvező geometriai alakzat mérőszáma és a kísérletnek megfelelő teljes lehetséges geometriai alakzat mérőszáma hányadosaként. Tehát

$$P(A) = \frac{\text{kedvező geometriai alakzat mérőszáma}}{\text{lehetséges geometriai alakzat mérőszáma}},$$

illetve T -vel jelölve a kísérletet szemléltető, t -vel az A eseménynek megfelelő geometriai alakzatot és μ -vel az alakzatok mérőszámát

$$P(A) = \frac{\mu(t)}{\mu(T)}.$$

(Mérőszámon itt az ívhossz mérőszámát értjük, ha a geometriai alakzat egy görbe; a terület mérőszámát, ha a geometriai alakzat egy síkbeli tartomány; a térfogat mérőszámát, ha a geometriai alakzat egy térbeli tartomány.)

Példák

1. Valaki elfelejti felhúzni az óráját és így az megáll. Kérdés, mekkora a valószínűsége annak, hogy a nagymutató 6 és 9 között áll meg? (Feltételezzük: annak a valószínűsége, hogy a nagymutató a számlap kerületének valamely adott hosszúságú ívén áll meg, az illető ív hosszával arányos.) Az esemény számára kedvező geometriai alakzat mérőszáma a számlap negyed kerületének hossza,

$$t = \frac{2r\pi}{4}.$$

A lehetséges geometriai alakzat mérőszáma a számlap teljes kerületének hossza,

$$T = 2r\pi.$$

A keresett valószínűség a két mérőszám hányadosa, tehát

$$p = \frac{1}{4}.$$

2. Egy 10 cm sugarú kört körgyűrűkre osztunk sugarának öt egyenlő részre való osztásával. Mi a valószínűsége annak, hogy ezt céltáblának használva éppen a középponttól számított második körgyűrűbe dobunk? (Feltételezzük, hogy a céltáblát biztosan eltaláljuk, és hogy bármely körgyűrűre való dobás valószínűsége csak a terület nagyságától függ, vagyis a céltáblán a valószínűség egyenletes eloszlású.) A második körgyűrűbe való dobás, az A_2 esemény számára kedvező geometriai alakzat mérőszáma (lásd a 14.1. ábrát):

$$t = 4^2\pi - 2^2\pi = 12\pi.$$

A teljes geometriai alakzat mérőszáma

$$T = 10^2\pi = 100\pi.$$

Így a kérdéses valószínűség

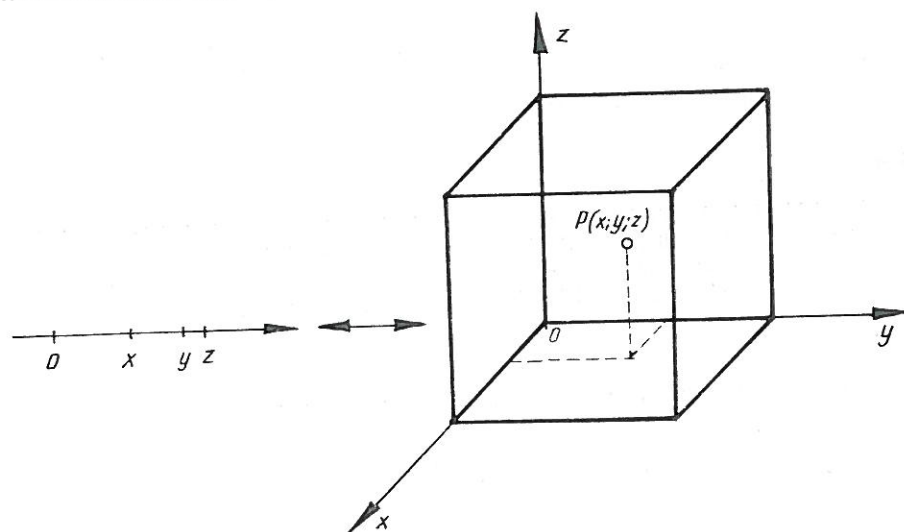
$$p(A_2) = \frac{12\pi}{100\pi} = \frac{3}{25}.$$

3. Mi a valószínűsége annak, hogy a $[0; 1]$ számközben három számot véletlenszerűen kiválasztva, azok négyzetösszege 1-nél kisebb? (Feltételezzük, hogy bármely szám kiválasztása a $[0; 1]$ számközben egyenletes eloszlású!)

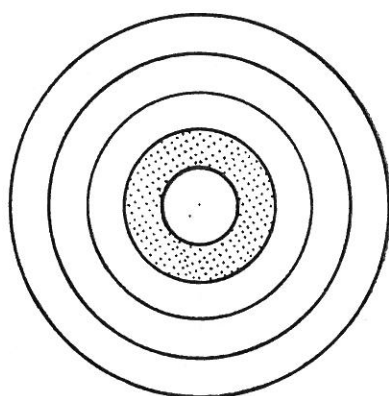
Jelöljük a három számot x, y, z -vel, így ezeket felfoghatjuk egy térbeli pont koordinátáiként. Mivel a $[0; 1]$ számköz bármely 3 pontjára

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1, \\ 0 &\leq y \leq 1, \\ 0 &\leq z \leq 1, \end{aligned}$$

a $[0; 1]$ számköz bármely 3 számának lehetséges kiválasztásához hozzárendelhetjük a tér egységnyi oldalélű kockájának egy pontját és megfordítva (14.2 ábra).



14.2 ábra



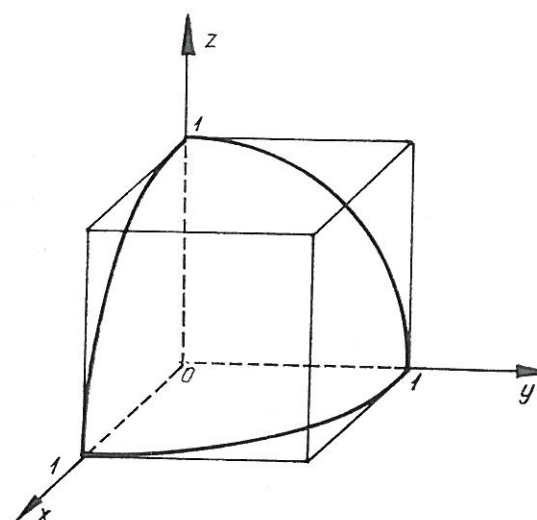
14.1 ábra

A $[0; 1]$ számköz azon 3 száma, amelyeknek négyzetösszege kisebb 1-nél, a következő feltételeknek tesz eleget

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1, \\ 0 &\leq y \leq 1, \\ 0 &\leq z \leq 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &< 1. \end{aligned}$$

E feltételeket az egységsugarú nyolcadgömb pontjai elégítik ki (14.3 ábra). Tehát a kérdéses valószínűség:

$$p = \frac{\mu(t)}{\mu(T)} = \frac{V_{\text{8-ad gömb}}}{V_{\text{kocka}}} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{4 \cdot 1^3 \pi}{3}}{1} = \frac{\pi}{6}.$$



14.3 ábra

4. Egy egységnyi hosszúságú egyenes szakaszon találmra kiválasztunk két pontot, amelyeknek egymástól való távolsága kisebb, mint $\frac{1}{4}$. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a két pontot az egyenes szakasz első felében jelöltük ki? (Feltesszük, hogy egy-egy pont kiválasztásának valószínűsége az egyenes szakaszon egyenletes eloszlású.)

A kérdéses probléma egy feltételes valószínűség.

Ha ugyanis

A esemény: a két pont az egyenes szakasz első felébe esik,

B esemény: a két pont távolsága kisebb, mint $\frac{1}{4}$.

akkor a kérdés: az A esemény B feltétel melletti bekövetkezésének valószínűsége. Mivel a feltételes valószínűség definíciója

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

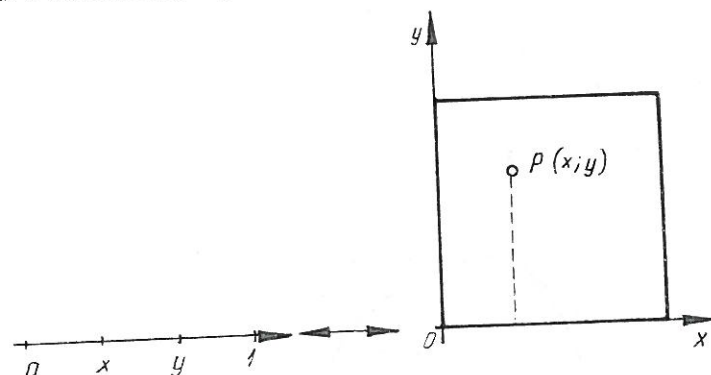
meg kell határozni az A és B esemény együttes bekövetkezésének, és a B esemény bekövetkezésének valószínűségét. Célszerű a geometriai módszert alkalmazni.

Jelöljük a két pontot x -szel és y -nal. Ezeket felfoghatjuk egy síkbeli pont koordinátáiként. A $[0; 1]$ intervallum bármely két pontjára, tehát x -re és y -ra is

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 1,$$

így a $[0; 1]$ intervallum bármely két pontjának kiválasztásához hozzárendelhető a sík egységnyi oldalú négyzetének egy pontja és megfordítva (14.4 ábra). Miután feltételeztük, hogy bármely két pont kiválasztása a $[0; 1]$ egyenes szakaszon egyenletes eloszlású, annak a valószínűsége, hogy a két pont kiválasztását reprezentáló $(x; y)$ koordinátájú



14.4 ábra

pont az egységnyi t résztartományába esik, megegyezik a résztartomány területével. (Azért egyezik vele és nemcsak arányos, mert az egységnyi területű t résztartomány területe t .) Így $P(B)$ meghatározásához azon tartomány területének meghatározására van szükség, amelynek pontjai eleget tesznek az

$$|y - x| < \frac{1}{4}$$

egyenlőtlenségnek. (Ugyanis ez fejezi ki azt a feltételt, hogy a két pont távolsága kisebb $\frac{1}{4}$ -nél.) Miután az

$$|y - x| < \frac{1}{4}$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens a

$$-\frac{1}{4} < y - x < \frac{1}{4},$$

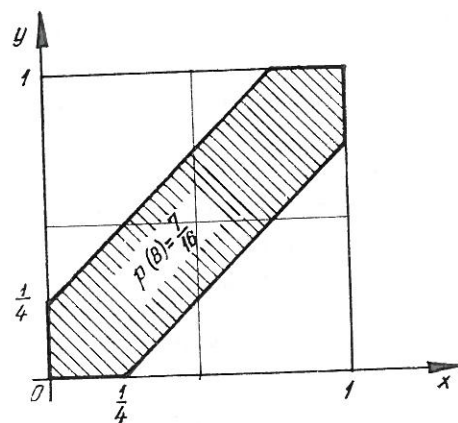
illetve az

$$x - \frac{1}{4} < y < x + \frac{1}{4}$$

egyenlőtlenség, az ennek megfelelő tartomány területe (14.5 ábra):

$$t_1 = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16},$$

és így $P(B) = t_1 = \frac{7}{16}$.



14.5 ábra

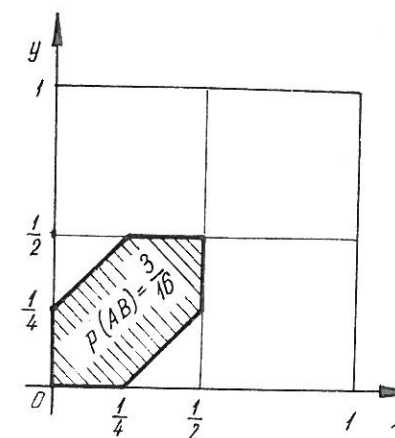
Hasonlóan a $P(AB)$ meghatározásához annak a tartománynak a területére van szükség, amelynek pontjaira fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$x < \frac{1}{2},$$

$$y < \frac{1}{2},$$

$$|y - x| < \frac{1}{4}.$$

Itt az első két egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy a két pont az intervallum első felére esik, a harmadik pedig azt, hogy a két pont távolsága $\frac{1}{4}$ -nél kisebb. Az e feltételeknek eleget tevő tartomány területe (14.6 ábra).



14.6 ábra

$$t_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16},$$

és így $P(AB) = t_2 = \frac{3}{16}$.

Tehát a keresett valószínűség

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}.$$

14.2 A VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ

14.2.1 A valószínűségi változó fogalma

A véletlen tömegjelenségek gyakori tulajdonsága, hogy eseményeik bizonyos módon meghatározott számértékekkel jellemezhetők.

Például a kockajátéknál a dobásokra jellemző a dobott számérték, mely mindig más és más. Ezt az értéket különböző körülmények befolyásolják (a kocka homogenitása, a terepviszonyok stb.).

A céllovásra jellemző például a találat helyének a céltábla középpontjától való távolsága. Ezt az értéket számos külső és belső körülmény befolyásolja (légtér viszonyok, a puska rögzítése stb.).

A gázmolekulák állapotára jellemző például azok gyorsulása, amely a más molekulákkal való ütközés folytán állandóan változik. Ha ismerjük is egy időpillanatban egy molekula gyorsulását, nem tudjuk megmondani teljes pontossággal, hogy pl. 0,01 vagy 0,001 secundum múlva mekkora lesz ugyanennek a molekulának a gyorsulása. Ezt is sok körülmény befolyásolja (a gáz hőmérséklete, a környező molekulák száma stb.).

Egy telefonközpont forgalmára jellemző egy meghatározott időintervallum alatt érkező hívások száma, amely különböző véletlen körülmények folytán (kapcsolási sebesség, áramkörüli zavarok stb.) állandóan változik.

E példánál a kísérletek eredményeinek jellemzésére tehát olyan számértékeket használtunk, melyeknek értéke nem állandó, a véletlentől függ. Ezeket az eseményekhez rendelt változó mennyiségeket, amelyeknek értéke esetről esetre más és más lehet, de meghatározható, hogy értéke milyen valószínűséggel esik megadott határok közé (ill. speciális esetben megadható, hogy mekkora valószínűséggel vesz fel meghatározott számértéket), nevezzük *valószínűségi változónak*. Tehát a valószínűségi változó az eseménytérén értelmezett olyan valós értékű függvény, amelynél — tetszőleges $a < b$ valós számokra — meghatározott valószínűsége van annak az eseménynek, hogy a függvény értéke $[a; b]$ -be esik.

Definíció. Tekintsünk egy olyan Borel-féle eseményalgebrát, amelynek eseményei egy Ω alaphalmaz bizonyos részhalmazaival jellemezhetők, akkor a valószínűségi változó ezen az alaphalmazon értelmezett olyan $\xi = \xi(\omega)$ valós függvény ($\omega \in \Omega$), amelynek összes „nívóhalmazai” az eseményalgebrához tartoznak.

(A $\xi = \xi(\omega)$ nívóhalmazai a $\xi(\omega) < x$ egyenlőtlenség által definiált Ω -beli részhalmazok, ahol x tetszőleges valós szám.)

A valószínűségi változók jelölésére általában görög kisbetűket

$$\xi, \eta, \zeta, \dots,$$

lehetséges értékeik jelölésére latin kisbetűket

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

stb. használunk.

A valószínűségi változók igen sokfélék. Az általuk felvett értékek lehetnek véges számúak, megszámlálhatók vagy meg nem számlálhatók. A hozzájuk tartozó valószínűségek lehetnek ún. diszkrét eloszlásúak, vagy kitölthetnek egy intervallumot, illetve egy intervallumban sűrűn helyezkedhetnek el anélkül, hogy azt teljesen kitöltenék stb. A sokféle lehetőség közül a továbbiakban csak két speciális típusúval, a diszkrét eloszlású (röviden: diszkrét), és a folytonos eloszlású (röviden: folytonos) valószínűségi változóval foglalkozunk.

14.2.1.1 Diszkrét valószínűségi változó

Egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez rendelt ξ valószínűségi változó *diszkrét eloszlású*, ha lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Diszkrét valószínűségi változóhoz jutunk, ha például két kockával való dobásnál a dobott számok összegét vizsgáljuk. Ennél a kísérletnél az elemi események száma véges, $6^2 = 36$, és így — bevezetve valószínűségi változónak a dobott számok összegét, $i+k$ -t — azok száma is véges (i jelenti az egyik és k a másik kockán látható pontok számát). A lehetséges értékek

$$\xi = 2, 3, 4, \dots, 12.$$

Tehát $\xi = i+k$ valóban diszkrét valószínűségi változó.

14.2.1.2 Folytonos valószínűségi változó

Egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez rendelt valószínűségi változó folytonos eloszlású, ha lehetséges értékei folytonosan töltöttek ki egy vagy több véges intervallumot, vagy a teljes $(-\infty, +\infty)$ intervallumot.

Folytonos valószínűségi változóhoz jutunk, ha egy R sugarú kör alakú céltáblára lövünk, és — feltételezve, hogy a céltáblát eltaláljuk — a becsapódás helyét vizsgáljuk. Ennél a kísérletnél az elemi események száma — a céltábla pontjainak számossága — nem megszámlálható. Bevezetve valószínűségi változónak a találat helyének a középponttól való távolságát, r -et, ennek értékei — a $[0; R]$ intervallum pontjai — ugyancsak nem megszámlálhatók. Az ily módon definiált $\xi = r$ valóban folytonos valószínűségi változó.

14.2.1.3 Valószínűségi változók összetétele

A valószínűségi változó értelmezéséből következik, hogy ha ξ egy valószínűségi változó, akkor ennek konstanssal való szorzata vagy négyzete vagy négyzetgyöke stb. ugyancsak valószínűségi változó.

Tehát, ha ξ valószínűségi változó, akkor ennek bármely valós függvénye,

$$\eta = g(\xi)$$

is valószínűségi változó.

Ugyancsak a valószínűségi változó értelmezéséből következik, hogy két vagy több valószínűségi változó összege vagy szorzata vagy hányadosa stb. is valószínűségi változó.

Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók, akkor ezek bármely n változós valós függvénye

$$\eta = g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

is valószínűségi változó.

Megjegyzések. 1. Az eddigi feladatokban olyan valószínűségi változók szerepeltek, amelyek valós értékeket vettek fel. Megjegyezzük azonban, hogy a valószínűségszámítás olyan valószínűségi változókkal is foglalkozik, amelyeknek értékészlete nem valós számokból, hanem például komplex számokból vagy többdimenziós vektorokból, vagy végtelen számsorozatokból, vagy függvényekből stb. áll.

2. Az elemi események ugyanazon halmazán több valószínűségi változó is értelmezhető. Például két kockával való dobásnál egy dobáscsoportot tekintve elemi eseménynek, valószínűségi változónak bevezethetjük a dobott számok összegét: $\xi = i+k$ -t; vagy a dobott számok szorzatát: $\eta = i \cdot k$ -t; vagy a dobott számok hányadosát: $\zeta = \frac{i}{k}$ -t stb. Hogy a végtelen sok lehetőség közül melyik valószínűségi változót választjuk, az általában a feladattól függ.

Példák

1. Egy pénzdarabbal való dobás eredményeinek jellemzésére definiáljunk valószínűségi változót! A pénz az írásos vagy a számozott oldalára eshet. Az események száma tehát 2. Így a dobási eredményeket egy diszkrét valószínűségi változóval jellemezhetjük. Például legyen a valószínűségi változó értéke 1, ha a pénz az írásos oldalára, és 2, ha a számozott oldalára esik. E hozzárendelés értelmében a valószínűségi változó lehetséges értékei

$$\xi = 1, 2.$$

2. Definiáljunk különböző valószínűségi változókat a kockadobás eredményeinek jellemzésére! A dobott számokat tekintsük a kockadobás elemi eseményeinek. Miután ezek száma véges, így diszkrét valószínűségi változókat rendelhetünk hozzá.

a) Ha valószínűségi változónak magukat a dobott számértékeket vezetjük be, akkor a valószínűségi változó lehetséges értékei

$$\xi = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

b) Ha valószínűségi változónak a dobott számok négyzetét vezetjük be, akkor a valószínűségi változó lehetséges értékei

$$\eta = 1, 4, 9, 16, 25, 36.$$

c) Bevezethetünk egy olyan valószínűségi változót is, melynek értéke pl. 0, ha páros számot dobunk, és 1, ha páratlant. Ennek a valószínűségi változónak lehetséges értékei

$$\zeta = 0, 1.$$

Jelöljük az elemi eseményeket, az 1, 2, ..., 6-os dobásokat $A_1, A_2, \dots, A_6$ -tal, így ekkor az általunk definiált különböző valószínűségi változókat a következő hozzárendelések adják

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
ξ	1	2	3	4	5	6
η	1	4	9	16	25	36
ζ	1	0	1	0	1	0

3. Defináljunk valószínűségi változót egy téglalap alakú gyümölcsösben levő gyümölcsfák elhelyezkedéseinek jellemzésére. Legyenek a telek oldalai 60, ill. 40 méter hosszúak, és a bejárat legyen a 60 m-es oldal közepén.

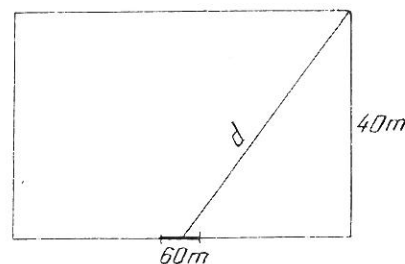
A gyümölcsfák elhelyezkedésének jellemzésére kézenfekvő a bejáratától való távolságot tekinteni. Ha ezt vesszük valószínűségi változónak, folytonos valószínűségi változót nyerünk, ugyanis a legkisebb és a legnagyobb távolság közt minden értéket felvehet. Miután a távolság akkor maximális, ha a gyümölcsfa a kapuval átellenes oldal valamelyik végén van, és ez a távolság $d = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50$ m (14.7 ábra), az általunk definiált

$$\xi = d$$

folytonos valószínűségi változó a $[0; 50]$ intervallumban tetszőleges értéket vehet föl.

14.2.2 A valószínűségi változó eloszlása. Sűrűségfüggvény

Egy kísérlethez tartozó valószínűségi változó jellemzéséhez nem elég csak azt tudni, hogy az milyen értékeket vesz fel, hanem azt is kell tudni, hogy milyen gyakran – vagy milyen valószínűséggel – veszi fel ezeket az értékeket. Diszkrét valószínűségi változó esetén ezeket meg is tudjuk határozni: a ξ diszkrét valószínűségi változó minden egyes x_k értékéhez tartozik egy $p_k = P(\xi = x_k)$ valószínűség. Folytonos valószínűségi változó esetén azonban általában bármely x_k értékre $P(\xi = x_k) = 0$, így itt csak azt tudjuk megmondani, hogy a ξ valószínűségi változó milyen valószínűséggel esik az $[x_k; x_k + \Delta x)$ intervallumba. Ennek megfelelően diszkrét valószínűségi változó esetén a valószínűségi változóról az ún. „*valószínűségeloszlás*”; folytonos valószínűségi változó esetén az ún. „*sűrűségfüggvény*” ad közelebbi felvilágosítást.



14.7 ábra

14.2.2.1 A diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlása

Definíció. Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amely a véges számú vagy megszámlálhatóan végtelen sok $x_1, x_2, x_3, \dots$ lehetséges értékét rendre $p_1, p_2, p_3, \dots$ valószínűségekkel veszi fel, akkor az összetartozó

$$(x_k; p_k) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

számpárok összességét a ξ diszkrét valószínűségi változó *valószínűségeloszlásának* nevezzük, amennyiben az eleget tesz a következő feltételeknek:

α) tetszőleges k értékre

$$0 \leq p_k \leq 1.$$

β) mivel $x_1, x_2, x_3, \dots$ egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez rendelt számértékek, szükségképpen

$$\sum_k p_k = \sum_k P(\xi = x_k) = 1.$$

Bármely diszkrét valószínűségi változó esetén teljesül az α) és β) feltétel, s megfordítva, ha ezek teljesülnek, akkor van olyan diszkrét valószínűségi változó, amelynek eloszlása éppen az adott $(x_k; p_k)$ számpárokhoz vezet.

Feltételezve, hogy

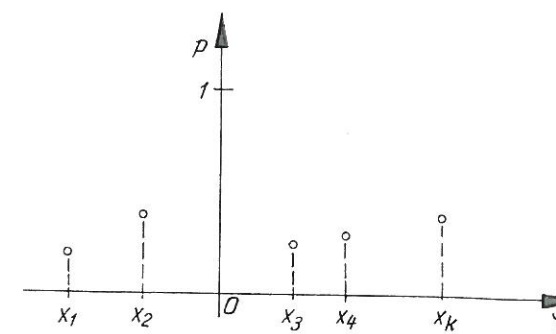
$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

a valószínűségeloszlás táblázata a következő.

ξ	x_1	x_2	x_3	$\dots$
p	p_1	p_2	p_3	$\dots$

Grafikonját a 14.8 ábra szemlélteti.

A táblázat és grafikon gyakorlatilag arról ad felvilágosítást, hogy a ξ diszkrét valószínűségi változó hogyan „oszlik el” a lehetséges értékek között. Azt az x_k értéket, amelyhez a leg-



14.8 ábra.

nagyobb valószínűség tartozik, nevezzük a valószínűségi változó „legvalószínűbb értékének”. Ez az érték nem szükségképpen egyértelmű.

Tétel. Ha ismert egy ξ diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlása, az $(x_k; p_k)$ számpárok összessége, akkor annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó lehetséges értékei a valós számegegyenes $[a; b)$ intervallumba esnek, megegyezik az $[a; b)$ intervallumba eső valószínűségi változókhoz tartozó valószínűségek összegével. Vagyis, ha a valószínűségi változónak $[a; b)$ -beli lehetséges értékei a véges számú $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}$ értékek, akkor

$$P(a \leq \xi < b) = \sum_{k=i}^{i+j} p_k,$$

és ha az $[a; b)$ -beli lehetséges értékek a megszámlálhatóan végtelen $x_i, x_{i+1}, \dots$ értékek, akkor

$$P(a \leq \xi < b) = \sum_{k=i}^{\infty} p_k.$$

Bizonyítás. A feltételek értelmében $a \leq \xi < b$ azt jelenti, hogy a valószínűségi változó vagy az x_i , vagy az $x_{i+1}, \dots$ értéket veszi fel. Mivel ezek egymást kizáró események, így valószínűségeik összegeződnek, tehát

$$\begin{aligned} P(a \leq \xi < b) &= P(\xi = x_i + \xi = x_{i+1} + \dots + \xi = x_{i+j}) = \\ &= \sum_{k=i}^{i+j} P(\xi = x_k) = \sum_{k=i}^{i+j} p_k, \end{aligned}$$

ha a valószínűségi változó lehetséges értékek száma véges, és

$$P(a \leq \xi < b) = \sum_{k=i}^{\infty} P(\xi = x_k) = \sum_{k=i}^{\infty} p_k,$$

ha a valószínűségi változó lehetséges értékek száma megszámlálhatóan végtelen.

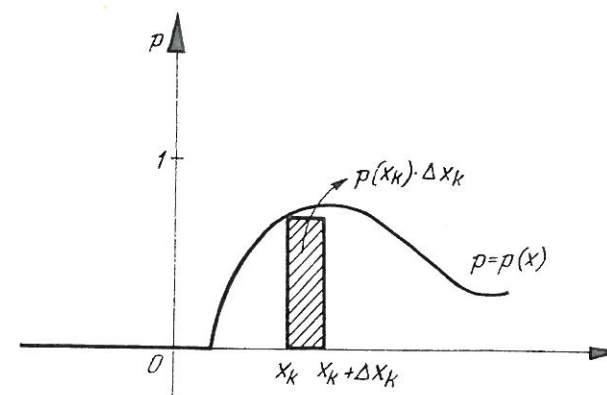
14.2.2.2 Folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Amennyiben ξ folytonos valószínűségi változó, a valószínűségi változó tetszőleges $\xi = x_k$ értékére $p_k = P(\xi = x_k) = 0$. A ξ folytonos valószínűségi változó minden x_k értékéhez tehát nem rendelhető $p_k \neq 0$ valószínűség. Helyette a ξ folytonos valószínűségi változóhoz egy a valós számok halmazán értelmezett folytonos — ill. véges számú hely kivételével folytonos — $y = p(x)$ függvényt rendelünk, amelynek az a tulajdonsága, hogy ha a valószínűségi változó bármely x_k helyét tartalmazó Δx_k intervallum hosszát megszorozzuk $p(x_k)$ -val, ez a szorzat közelítőleg megadja annak a valószínűségét, hogy a ξ valószínűségi változó az $(x_k; x_k + \Delta x_k)$ intervallumba esik (14.9 ábra),

$$p(x_k) \cdot \Delta x_k \approx P(x_k \leq \xi < x_k + \Delta x_k),$$

illetve

$$p(x_k) \approx \frac{P(x_k \leq \xi < x_k + \Delta x_k)}{\Delta x_k}.$$



14.9 ábra.

A közelítés annál jobb, minél kisebb Δx_k , és amennyiben a jobb oldali hányadosnak létezik határértéke, az ily módon értelmezett $p(x)$ függvényt a ξ valószínűségi változó „sűrűségeloszlás”-ának vagy röviden „sűrűségfüggvény”-ének nevezzük. Az értelmezésből következik, hogy a sűrűségfüggvény olyan függvény, amelynek értéke nem valószínűség, hanem olyan számérték, amelyhez az ún. „átlagvalószínűség” közeledik, ha Δx_k minden határon túl csökken.

Definíció. Ha ξ folytonos valószínűségi változó, amely meghatározott valószínűséggel esik a valós számegegyenes bármely intervallumára, akkor a folytonos (ill. véges számú elsőfajú szakadási hely kivételével folytonos) $y = p(x)$ függvényt a ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük, amennyiben az eleget tesz a következő feltételeknek: $\alpha)$ a valós számegegyenes bármely x értékére

$$p(x) \geq 0,$$

$\beta)$ tetszőleges $a < b$ valós számokra

$$\int_a^b p(x) dx = P(a \leq \xi < b),$$

$\gamma)$ a teljes valós számegegyenesre

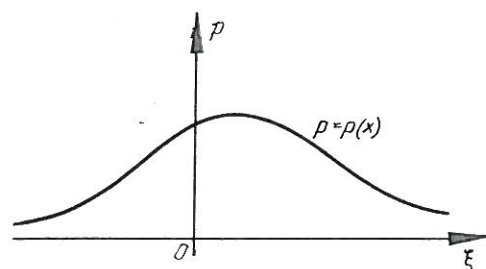
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Minden folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye eleget tesz e kikötéseknek és viszont: minden olyan — a valós számegegyenesen értelmezett — függvény, amely eleget tesz az $\alpha)$, $\beta)$ és $\gamma)$ feltételeknek, felfogható egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényének.

Megjegyzés. A folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye megfelel a diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlásának. Ez az analógia jól szemléltethető a sűrűség-

függvény geometriai interpretációja alapján. Ugyanis

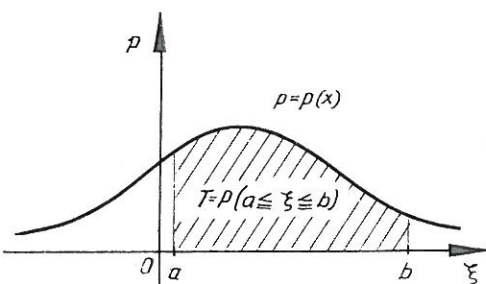
α) a $p(x)$ sűrűségfüggvény nemnegatív függvény, ami azt jelenti, hogy görbéje mindenütt a valós tengely fölött helyezkedik el (14.10 ábra). Ez felel meg annak a feltételnek, hogy diszkrét valószínűségi változó esetén a valószínűségi változó minden lehetséges értékéhez pozitív valószínűség tartozik.



14.10 ábra.

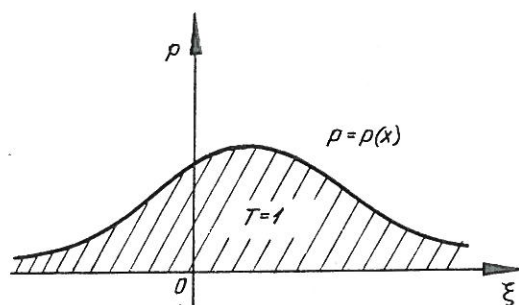
$$\beta) \int_a^b p(x) dx = P(a \leq \xi < b)$$

azt jelenti, hogy a sűrűségfüggvény görbéjének $[a; b]$ intervallumbeli görbe alatti területének mérőszáma megadja annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó az $[a; b]$ intervallumba esik (14.11 ábra). Ez felel meg annak a feltételnek, hogy diszkrét valószínűségi változó esetén annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó az $[a; b]$ intervallumba esik, megegyezik az intervallumbeli valószínűségi változók lehetséges értékeihez tartozó valószínűségek összegével.



14.11 ábra

γ) a sűrűségfüggvény $(-\infty, +\infty)$ intervallumbeli integrálja: egyenlő 1-gyel (14.12 ábra). Ez felel meg annak a feltételnek, hogy diszkrét valószínűségi változó esetén: $\sum_i p_i = 1$.



14.12 ábra

Példák

1. Valamely gyártmány 6%-a selejt. A selejtes darabok $\frac{2}{3}$ -része egy hibát, $\frac{1}{3}$ -része két hibát tartalmaz. Vezessük be valószínűségi változónak a gyártmányok hibaszámát, és készítsük el a valószínűségeloszlás táblázatát és grafikonját.

A valószínűségi változó lehetséges értékei: 0, 1, 2. Mivel a gyártmány 6%-a selejt, ezért 94%-a hibátlan, tehát annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott gyártmány hibátlan (0 hibát tartalmaz)

$$P(\xi = 0) = 0,94.$$

Mivel a 6% selejt $\frac{2}{3}$ -része, tehát 4%, egy hibát tartalmaz, azért

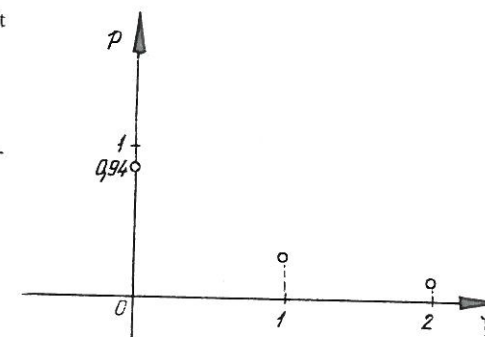
$$P(\xi = 1) = 0,04,$$

és mivel a 6% selejt $\frac{1}{3}$ -része, tehát 2%, két hibát tartalmaz, ezért

$$P(\xi = 2) = 0,02.$$

Mindezek alapján a valószínűségeloszlás táblázata a következő.

ξ	0	1	2
p	0,94	0,04	0,02



Grafikonját a 14.13 ábra szemlélteti.

2. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelynek lehetséges értékei az összes nemnegatív egész számok ($k = 0, 1, 2, \dots$). A $\xi = k$ esemény valószínűsége legyen arányos $\frac{1}{k!}$ -sal.

- Határozzuk meg az egyes események valószínűségét!
- Készítsük el a valószínűségeloszlás táblázatát és grafikonját!
- Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó az $[1; 4]$ intervallumba esik!

a) A feltétel értelmében

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{c}{k!},$$

a c állandót abból a feltételből határozzuk meg, hogy a teljes eseményrendszerre

$$\sum_k p_k = 1.$$

Mivel itt k értéke a 0-tól ∞ -ig terjedő egész számok bármelyike lehet, kell hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c}{k!} = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1$$

legyen, ahonnan

$$c = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

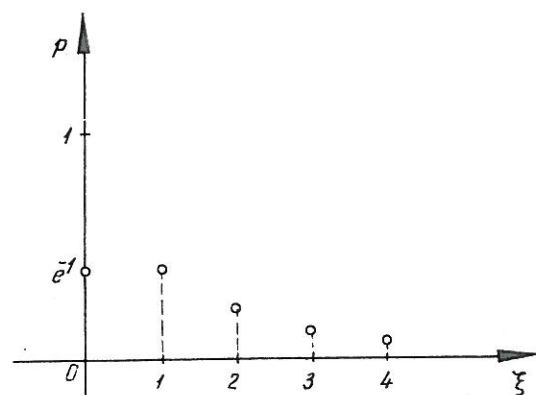
(Itt fölhasználtuk, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.) Ezzel a valószínűségi változó egyes lehetséges értékeihez tartozó valószínűségek

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

b) A valószínűségeloszlás táblázata a következő.

ξ	0	1	2	3	4	...
p	e^{-1}	e^{-1}	$\frac{e^{-1}}{2!}$	$\frac{e^{-1}}{3!}$	$\frac{e^{-1}}{4!}$	...

A grafikon pedig a 14.14 ábrán mutatjuk be.



14.14 ábra

c) Felhasználva, hogy diszkrét valószínűségi változó esetén

$$P(x_k \leq \xi < x_{k+1}) = \sum_{i=k}^{k+1-1} p_i,$$

így
$$P(1 \leq \xi < 4) = \sum_{i=1}^3 p_i = \sum_{i=1}^3 \frac{e^{-1}}{i!} = e^{-1} \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \right) \approx 0,615.$$

3. Határozzuk meg, hogy c milyen értéke mellett lehet az

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

függvény egy folytonos eloszlás sűrűségfüggvénye.

Hogy $f(x)$ egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen, kell hogy egyrészt minden x -re

$$f(x) \geq 0$$

legyen. Ez

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2}$$

esetén minden $c > 0$ -ra fennáll. Másrészt kell, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

legyen.

Mivel
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2} dx = c \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctg x]_{-A}^A = c\pi,$$

azért
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2} dx = 1,$$

ha $c = \frac{1}{\pi}.$

Tehát az

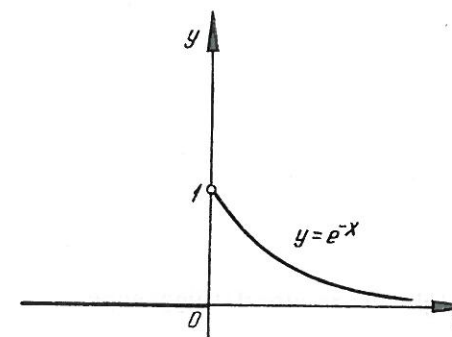
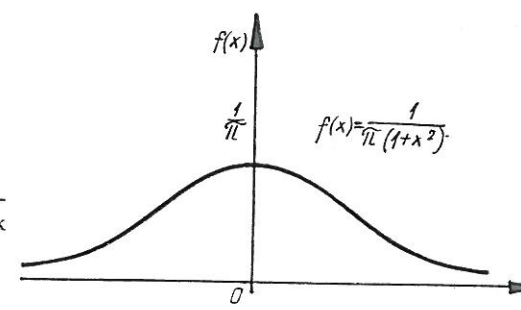
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

függvény felfogható egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényének (14.15 ábra).

4. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ e^{-x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases} \quad 14.15 \text{ ábra}$$

függvény egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, és határozzuk meg, hogy mekkora valószínűséggel esik a valószínűségi változó a $[2; 4]$ intervallumba.



14.16 ábra

A fenti függvény egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, mert egyrészt minden x -re

$$f(x) \geq 0$$

(14.16 ábra), másrészt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^A = 1.$$

A kérdéses valószínűség

$$P(2 \leq \xi < 4) = \int_2^4 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_2^4 = \left[-\frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^2} \right] \approx 0,118.$$

14.2.3 Valószínűségi változók eloszlásfüggvénye

A valószínűségi változók — mint láttuk — igen sokféle típusúak lehetnek. Hogy a sok különböző típusú valószínűségi változó értékének véletlen ingadozását egyöntetűen tárgyalhassuk, bevezetjük az ún. *eloszlásfüggvény* fogalmát.

Definíció. Tetszőleges ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a valós x -ek halmazán értelmezett

$$F(x) = P(\xi < x)$$

függvény, amely megadja annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó x -nél kisebb értéket vesz fel.

Az eloszlásfüggvények diszkrét és folytonos valószínűségi változó esetén analóg tulajdonságúak. Éspedig:

- a) $F(x)$ monoton nem csökkenő,
- b) minden x pontban balról folytonos,
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Az a), b), c) feltétel minden eloszlásfüggvényre teljesül, és viszont, minden a), b), c) feltételnek eleget tevő függvény eloszlásfüggvénynek tekinthető.

Ha már ismerjük az $F(x)$ eloszlásfüggvényt x minden értékére, akkor meg tudjuk határozni annak a valószínűségét, hogy ξ az $[a; b)$ intervallumba esik (a és b valós számok), mégpedig

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a).$$

Az eloszlásfüggvény mindezen tulajdonságait diszkrét és folytonos változó esetén külön igazoljuk.

14.2.3.1 Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

Ha ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó, mely az $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ lehetséges értékeit $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ pozitív valószínűségekkel veszi fel, akkor eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(\xi = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

Vagyis az eloszlásfüggvény értéke egy tetszőleges x helyen megegyezik a valószínűségi változó x -nél kisebb értékeihez tartozó valószínűségeinek összegével.

1. Tétel. Ha egy ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó egy $[a; b)$ intervallumba esik

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Legyen az

A esemény: $\xi < a$,

B esemény: $\xi < b$,

C esemény: $a \leq \xi < b$,

akkor fennáll, hogy

$$B = A + C.$$

Mivel A és C egymást kizáró események

$$P(B) = P(A) + P(C),$$

amiből

$$P(C) = P(B) - P(A).$$

Mivel pedig a definíció értelmében:

$$P(C) = P(a \leq \xi < b),$$

$$P(B) = F(b),$$

$$P(A) = F(a),$$

azért

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a).$$

2. Tétel. A véges sok értéket felvevő diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye monoton nem csökkenő, balról folytonos, lépcsős (szakaszonként konstans) függvény, amelynek ugráshelyei a valószínűségi változó lehetséges értékei: $x_1, x_2, \dots, x_n$ (x_i -ket növekvő sorrendben írtuk le), ugrásainak nagysága pedig a $p_1, p_2, \dots, p_n$ valószínűségek. Így

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \xi \leq x_1, \\ \sum_{i=1}^k p_i, & \text{ha } x_k < \xi \leq x_{k+1}, \\ 1, & \text{ha } \xi > x_n. \end{cases}$$

Bizonyítás. a) $F(x)$ monoton nem csökkenő függvény. Ugyanis a definíció szerint a valószínűség nemnegatív számérték, és így tetszőleges

$$x_2 > x_1$$

esetén a

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

egyenlőségből következik, hogy

$$F(x_2) > F(x_1).$$

b) $F(x)$ lépcsős függvény. A valószínűségi változó bármely két egymást követő értéke közti intervallumban az eloszlásfüggvény értéke állandó, éspedig tetszőleges

$$x_k < \xi \leq x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, (n-1))$$

esetén

$$F(x) = \sum_{i=1}^k p_i.$$

Ugyanis ebben az esetben

$$F(x) = P(\xi < x) = P[(\xi = x_1) + (\xi = x_2) + \dots + (\xi = x_k)];$$

és mivel ezek egymást kizáró események:

$$F(x) = \sum_{i=1}^k P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^k p_i.$$

c) $F(x)$ ugráshelyei a valószínűségi változó lehetséges értékei. Ez a tény a b) tulajdonságból következik.

d) $F(x)$ ugrásának nagysága bármely x_k helyen a megfelelő p_k valószínűség. Ugyanis,

$$\text{ha } x_{k-1} < \xi \leq x_k, \text{ ekkor } F(x) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i,$$

$$\text{ha } x_k < \xi \leq x_{k+1}, \text{ akkor } F(x) = \sum_{i=1}^k p_i = \left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i \right) + p_k,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_k - 0} F(x) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_k + 0} F(x) = \left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i \right) + p_k,$$

vagyis az x_k helyen az ugrás nagysága valóban p_k .

e) $F(x)$ balról folytonos. Ugyanis,

$$\text{ha } x_k < \xi < x_{k+1},$$

$$\text{akkor } F(x) = \sum_{x_i < x_{k+1}} P(\xi = x_i) = \sum_{x_i < x_{k+1}} p_i = F(x_{k+1}).$$

vagyis $F(x)$ értéke az $(x_k; x_{k+1}]$ intervallumban állandó.

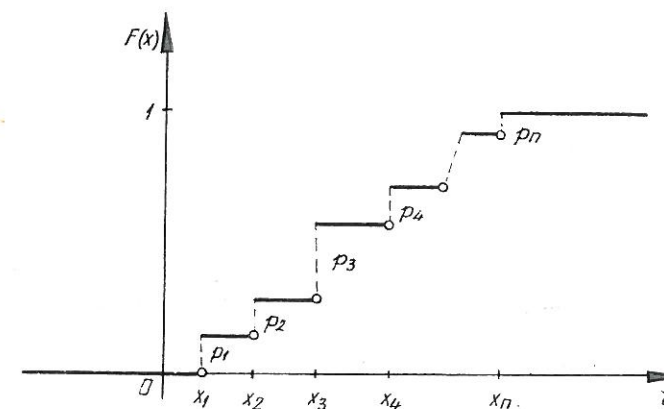
$$f) \quad F(x) = 0, \quad \text{ha } \xi \leq x_1.$$

Ugyanis x_1 a valószínűségi változó legkisebb lehetséges értéke, és így $\xi < x_1$ lehetetlen esemény, tehát valószínűsége 0.

$$g) \quad F(x) = 1, \quad \text{ha } \xi > x_n.$$

Ugyanis x_n a valószínűségi változó legnagyobb értéke, tehát $\xi > x_n$ biztos esemény, és így valószínűsége 1.

Mindezek alapján egy véges sok értéket felvevő diszkrét valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényének görbéje a 14.17 ábrán látható alakot veszi fel.



14.17 ábra.

Megjegyzések. 1. Ha a diszkrét valószínűségi változó nem véges, hanem megszámlálható sok értéket vesz fel, akkor lehet, hogy az eloszlásfüggvény nem lépcsős függvény. Ugyanis előfordulhat, a valószínűségi változó lehetséges értékei mindenütt sűrűn helyezkednek el, sehol sincs olyan intervallum, amelyben az eloszlásfüggvény konstans volna. Például amennyiben a diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei az

$$r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$$

racióális számok, és a hozzájuk tartozó valószínűségek

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^k}, \dots,$$

akkor minden racionális pont szakadási hely $p_k = \frac{1}{2^k}$ ($k = 1, 2, \dots$) nagyságú ugrásokkal.

Így nincs egyetlen olyan intervallum sem, amelyben az eloszlásfüggvény konstans volna.

2. Minthogy diszkrét eloszlású valószínűségi változó esetén a valószínűségi változó minden lehetséges x_k értékéhez tartozik egy p_k valószínűség, azért itt az eloszlásfüggvény helyett célszerűbb a

$$p_k = P(\xi = x_k)$$

$k = 1, 2, \dots$ valószínűségeloszlással dolgozni. A p_k számok meghatározzák az eloszlásfüggvényt és megfordítva, ha ismerjük az eloszlásfüggvényt, akkor annak ugrásai megadják a p_k számokat.

14.2.3.2 Folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

A folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényére is érvényes a

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$$

reláció, amely a sűrűségfüggvény felhasználásával

$$F(b) - F(a) = \int_a^b p(x) dx.$$

A sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény értelmezéséből következik, hogy a $p(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt.$$

Ennek következménye a most kifejtendő tétel.

1. Tétel. Ha a ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye mindenütt — vagy véges sok ugráshely kivételével — folytonos, akkor $p(x)$ folytonossági helyein

$$p(x) = F'(x).$$

Bizonyítás. Az előző megjegyzés alapján az

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

függvényt — az analízisből ismert módon — a felső változó határ szerint differenciálva

$$F'(x) = p(x).$$

A folytonos valószínűségi változó tulajdonságait a következő tétel fejezi ki.

2. Tétel. Egy folytonos (ill. véges számú ugráshely kivételével folytonos) $p(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye monoton, nemcsökkenő, folytonos függvény, amelynek határértéke $x \rightarrow -\infty$ esetén 0, és $x \rightarrow +\infty$ esetén 1.

Bizonyítás. a) $F(x)$ monoton, nemcsökkenő függvény. Ugyanis az eloszlásfüggvény definíciója értelmében

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt,$$

és mivel a feltétel értelmében $p(x) \geq 0$, így $\int_{-\infty}^x p(t) dt$ x -nek monoton nemcsökkenő függvénye.

b) $F(x)$ folytonos függvény, ugyanis

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt,$$

és az integrál mint a felső határ függvénye folytonos.

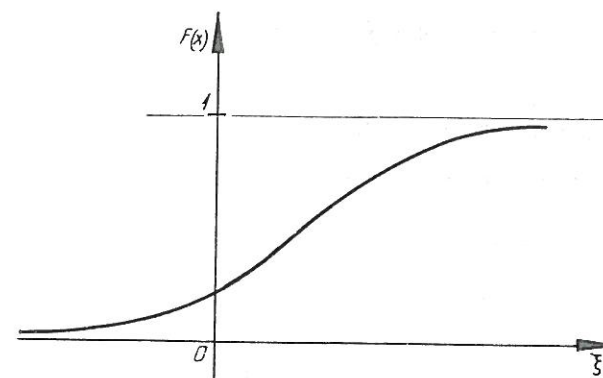
$$c) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

$$\text{Ugyanis} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x p(t) dt = 0.$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$\text{ugyanis:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = 1.$$

Ez a tétel megfordítható: minden olyan $F(x)$ függvény, amely rendelkezik a tételben felső-



14.18 ábra.

rolt tulajdonságokkal, felfogható egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényeként. A 2. tétel értelmében egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényének görbéje a 14.18 ábrán bemutatott alakot veszi fel.

Példák

1. Egy szabályos, homogén kockával való dobásnál vezessük be valószínűségi változónak a dobott számokat. Határozzuk meg az eloszlásfüggvényt és ábrázoljuk annak görbéjét. A bevezetett valószínűségi változó diszkrét. Lehetséges értékei: $\xi = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, melyeket a $p_k = \frac{1}{6}$ ($k = 1, 2, \dots, 6$) valószínűséggel vesz fel. Eloszlásfüggvénye egy monoton, nem csökkenő, lépcsős függvény, amelynek értékei

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1, \\ \sum_{i=1}^k p_i, & \text{ha } k < x \leq k+1 \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5), \\ 1, & \text{ha } x > 6. \end{cases}$$

Ha $x \leq 1$,

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 1) = 0,$$

ha $x \in (1; 2]$, akkor

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 2) = P(\xi = 1) = \frac{1}{6},$$

ha $x \in (2; 3]$, akkor

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 3) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6},$$

ha $x \in (3; 4]$, akkor

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 4) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = \frac{3}{6},$$

ha $x \in (4; 5]$, akkor

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 5) = \sum_{i=1}^4 P(\xi = x_i) = \frac{4}{6},$$

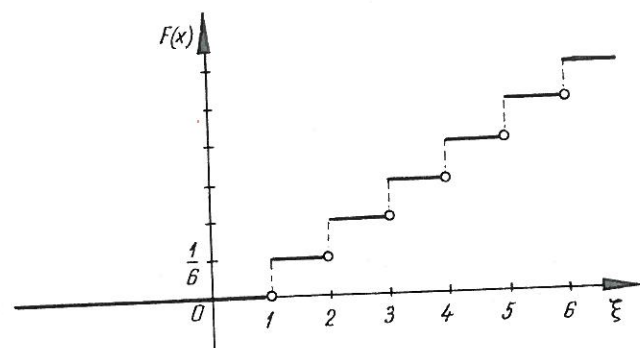
ha $x \in (5; 6]$, akkor

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 6) = \sum_{i=1}^5 P(\xi = x_i) = \frac{5}{6},$$

ha $x > 6$, akkor

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < \infty) = 1.$$

Az eloszlásfüggvény görbéje a 14.19 ábrán látható.



14.19 ábra

2. Egy gyümölcszállítmány 60%-a első osztályú, 30%-a másodosztályú, 10%-a harmadosztályú. Valószínűségi változónak vezessük be azt a számot, ahányadik osztályba tartozik a gyümölcs. Határozzuk meg az így definiált valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, és ábrázoljuk az eloszlásfüggvény görbéjét.

A definiált diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $\xi = 1, 2, 3$.

A hozzájuk tartozó valószínűségek:

$$p_1 = \frac{6}{10}; p_2 = \frac{3}{10}; p_3 = \frac{1}{10}.$$

Az eloszlásfüggvény

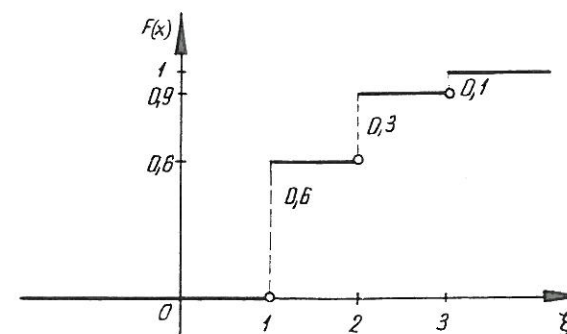
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \xi \leq 1, \\ \sum_{i=1}^k p_i, & \text{ha } k < \xi \leq k+1 \quad (k = 1, 2), \\ 1, & \text{ha } \xi > 3. \end{cases}$$

Így ha $\xi \leq 1$, akkor

$$F(x) = 0,$$

ha $\xi \in (1; 2]$, akkor

$$F(x) = P(\xi < 2) = P(\xi = 1) = p_1 = \frac{6}{10};$$



14.20 ábra

ha $\xi \in (2; 3]$, akkor

$$F(x) = P(\xi < 3) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = p_1 + p_2 = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10},$$

ha $\xi > 3$, akkor

$$F(x) = P(\xi < +\infty) = 1.$$

Az eloszlásfüggvény görbéjét a 14.20 ábrán mutatjuk be.

3. Lövéseket adunk le egy 3 dm sugarú kör alakú céltáblára. Tegyük fel, hogy minden lövés eltalálja a táblát, és a találat valószínűsége a céltáblán egyenletes eloszlású. Vezessük be valószínűségi változónak a találat középponttól való távolságát, és határozzuk meg

- a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, ábrázoljuk az eloszlásfüggvény görbéjét;
- a valószínűségi változó sűrűségfüggvényét, ábrázoljuk a sűrűségfüggvény görbéjét.

A feltételből nyilvánvaló, hogy a definiált valószínűségi változó folytonos.

a) Az eloszlásfüggvény meghatározásához szükség van a $P(\xi < x)$ valószínűségekre x különböző értékei esetén. Mivel a $\xi < x$ esemény azt jelenti, hogy a találat a középpont körüli x sugarú kör belsejébe esik, ezért a valószínűség geometriai módon való meghatározása alapján:

$$P(\xi < x) = \frac{t_x}{T_3} = \frac{x^2 \pi}{3^2 \pi} = \frac{x^2}{9},$$

ha $0 < x \leq 3$.

A $\xi < 0$ lehetetlen esemény, és így

$$P(\xi < x) = 0,$$

ha $x \leq 0$.

A $\xi < 3$ biztos esemény, és így

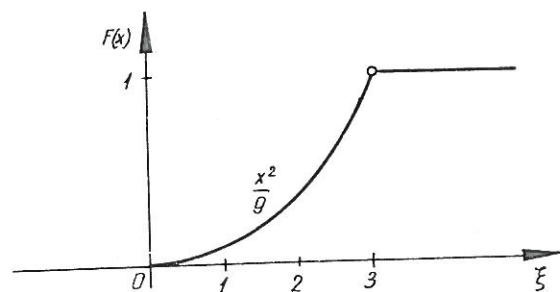
$$P(\xi < x) = 1,$$

ha $x > 3$.

Tehát az eloszlásfüggvény

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{9}, & \text{ha } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény görbéje a 14.21 ábrán tanulmányozható.

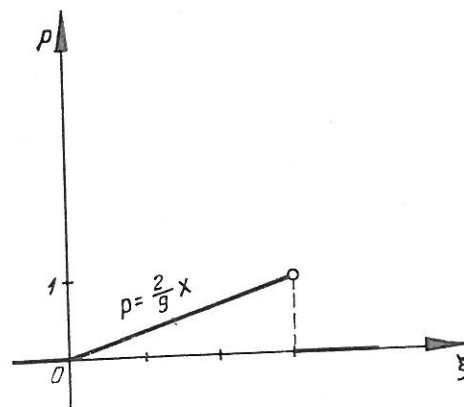


14.21 ábra

A folytonossági helyeken a sűrűségfüggvény

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{2x}{9}, & \text{ha } 0 < x \leq 3, \\ 0, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény görbét a 14.22 ábrán szemléltetjük.



14.22 ábra

4. Határozzuk meg annak a folytonos valószínűségi változónak az eloszlásfüggvényét, amelynek sűrűségfüggvénye:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Ábrázoljuk a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény görbéjét.
A 14.2.2.2 fejezet 3. példájában láttuk, hogy a

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

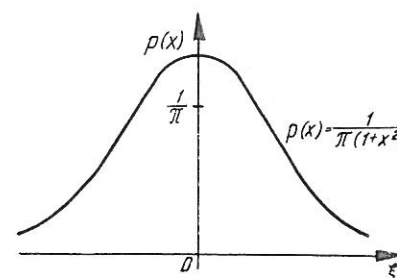
függvény lehet egy folytonos eloszlás sűrűségfüggvénye. Ezzel a sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlás eloszlásfüggvénye:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x p(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} [\operatorname{arctg} t]_{-\infty}^x = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} x - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

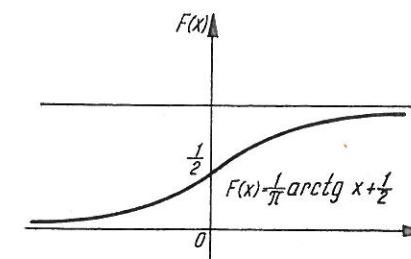
Tehát a kérdéses eloszlásfüggvény

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

A sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény görbéje a 14.23 és 14.24 ábrán szemléltethető.



14.23 ábra



14.24 ábra

5. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlás esetén

- a valószínűségi változó a $\left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ intervallumba esik,
- a valószínűségi változó abszolút értéke 1-nél kisebb,
- mekkora lehet α , hogy $\frac{3}{\pi}$ legyen annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó abszolút értéke α -nál kisebb (egyenlő) értéket vegyen fel?

a) Minthogy az adott sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlás eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2},$$

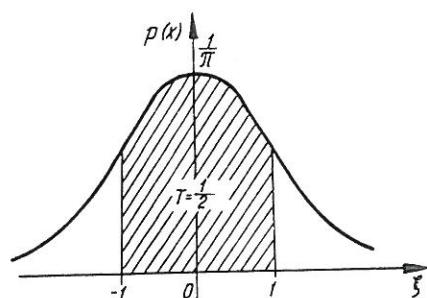
azért

$$P\left(0 < \xi \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - F(0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0.$$

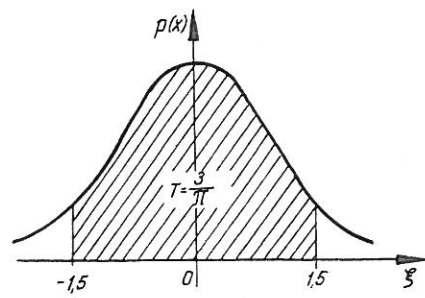
$$\begin{aligned}
 b) \quad P(|\xi| < 1) &= P(-1 < \xi < 1) = F(1) - F(-1) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\left(\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2} \right) - \left(\operatorname{arctg} (-1) + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a valószínűségi változó ugyanakkora valószínűséggel vesz fel 1-nél kisebb és 1-nél nagyobb abszolút értékű értékeket (14.25 ábra).

$$\begin{aligned}
 c) \quad \text{Amennyiben } |\xi| \leq \alpha, \\
 P(|\xi| \leq \alpha) &= P(-\alpha \leq \xi \leq \alpha) = F(\alpha) - F(-\alpha) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} (-\alpha) - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha.
 \end{aligned}$$



14.25 ábra



14.26 ábra

Tehát kell, hogy

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha = \frac{3}{\pi}$$

legyen, ami akkor áll fenn, ha

$$\operatorname{arctg} \alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{\pi} = \frac{3}{2},$$

vagyis ha

$$\alpha = 1,5$$

(14.26 ábra).

14.2.4 Többdimenziós valószínűségi változók

Definíció. A $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ vektor n -dimenziós valószínűségi változó, ha komponensei, a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók. A továbbiakban ennek csak a legegyszerűbb esetével, a $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$ kétdimenziós valószínűségi vektorváltozóval foglalkozunk.

14.2.4.1 Két valószínűségi változó együttes eloszlása

Ha ξ és η ugyanazon a H halmazon értelmezett valószínűségi változók, akkor azok együttes eloszlása — a $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$ kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó eloszlása — az összes

$$(\xi, \eta) \in H$$

számpárok — ill. pontok — és a hozzá tartozó

$$P(\xi, \eta)$$

valószínűségek eloszlása.

Az együttes eloszlás *diszkrét*, ha a $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$ síkvektor, ill. — a végpontjainak megfelelő — síkbeli pont csak véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel. Belátható ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a ξ és η valószínűségi változók külön-külön diszkrétnek legyenek. Tehát ha ξ lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$; η lehetséges értékei $y_1, y_2, \dots$, akkor a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó lehetséges értékei az (x_i, y_k) értékek között vannak, ahol $i, k = 1, 2, \dots$.

$$A \quad P(\xi = x_i, \eta = y_k) = r_{ik} \quad i, k = 1, 2, \dots$$

valószínűségek meghatározzák a (ξ, η) diszkrét valószínűségi vektorváltozó eloszlását, mégpedig

$$P[(\xi, \eta) \in H] = \sum_{(x_i, y_k) \in H} r_{ik}.$$

A (ξ, η) vektorváltozó r_{ik} együttes valószínűségei segítségével meghatározható, külön-külön a ξ és η változók valószínűségei is. Éspedig alkalmazva a

$$P(\xi = x_i) = p_i,$$

$$P(\eta = y_k) = q_k$$

jelöléseket:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_{ik} = p_i,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_{ik} = q_k.$$

Az együttes eloszlás *folytonos*, ha van olyan — legfeljebb véges számú görbe pontjai kivételével — folytonos $p(x, y)$ függvény, amely a következő tulajdonságú:

a) Az (xy) síkon mindenütt

$$p(xy) \geq 0.$$

b) Az (xy) sík bármely H tartományán

$$P[(\xi, \eta) \in H] = \iint_H p(xy) dx dy.$$

c) A teljes (xy) síkon

$$\int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} p(xy) dx dy = 1.$$

Bebizonyítható, ha van ilyen $p(xy)$ függvény, akkor csak egy ilyen van, és ezt a függvényt a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényének nevezzük. Minden folytonos kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye eleget tesz az a), b) és c) feltételeknek, és megfordítva: minden olyan — a valós számsíkon értelmezett — kétváltozós függvény, amely eleget tesz az a), b) és c) feltételeknek, egy folytonos kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényének tekinthető. A (ξ, η) vektorváltozó $p(xy)$ együttes sűrűségfüggvénye meghatározza a folytonos valószínűségi vektorváltozó eloszlását, mégpedig

$$P[(\xi, \eta) \in H] = \iint_H P(xy) dx dy.$$

Ha ξ és η együttes eloszlása folytonos, akkor ξ és η külön-külön is folytonos eloszlásúak és sűrűségfüggvényeik

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(xy) dy,$$

illetve

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(xy) dx.$$

14.2.4.2 Két valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvénye

Ugyanazon a halmazon értelmezett ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az (xy) síkon értelmezett azon $F(xy)$ függvény, amely a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó bármely lehetséges (x, y) értékére megadja annak a valószínűségét, hogy a ξ változó x -nél és ugyanakkor az η változó y -nél kisebb értéket vesz fel. Vagyis

$$F(xy) = P(\xi < x, \eta < y).$$

Az együttes eloszlásfüggvény diszkrét esetben:

$$F(xy) = \sum_{k=-\infty}^y \sum_{i=-\infty}^x r_{ik},$$

ahol $r_{ik} = P(\xi = x_i, \eta = y_k)$.

Az együttes eloszlásfüggvény folytonos esetben:

$$F(xy) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p(uv) du dv,$$

ahol $p(xy)$ az együttes eloszlás sűrűségfüggvénye.

Az együttes eloszlásfüggvényből parciális deriválással az együttes sűrűségfüggvény meghatározható:

$$p(xy) = \frac{\partial^2 F(xy)}{\partial x \partial y}$$

Az együttes eloszlásfüggvény tulajdonságai (csak felsoroljuk, de nem igazoljuk):

a) Az $F(x, y)$ függvény x és y változók monoton nem csökkenő függvénye.

b) $\lim F(xy) = 0$,

ha x és y közül legalább az egyik a $-\infty$ -hez tart;

$\lim F(xy) = \infty$,

ha x és y mindegyike a ∞ -hez tart.

c) Az $F(xy)$ függvény ún. vegyes második differenciája a

$$P(x \leq \xi < x + \Delta x; y \leq \eta < y + \Delta y) = F(x + \Delta x; y + \Delta y) - F(x + \Delta x; y) - F(x; y + \Delta y) + F(x; y)$$

reláció miatt nemnegatív érték.

Minden kétdimenziós eloszlásfüggvény eleget tesz az a), b) és c) feltételeknek, és megfordítva: minden kétváltozós függvény, amely rendelkezik az a), b) és c) tulajdonságokkal, felfogható kétdimenziós eloszlásfüggvénynek.

Ha ismertek a $\bar{\xi} = (\xi, \eta)$ kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényei, akkor meghatározhatók e vektor komponenseinek, ξ -nek és η -nak mint közönséges (egydimenziós) valószínűségi változóknak az eloszlásfüggvényei is. Ugyanis legyen a $\bar{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye $F(xy)$, és létezzon ennek folytonos sűrűségfüggvénye $p(xy)$, akkor ξ eloszlásfüggvényét $F_1(x)$ -szel, η eloszlásfüggvényét $F_2(y)$ -nal, jelölve nyilvánvaló, hogy

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(uv) dv \right] du$$

és

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^y \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(uv) du \right] dv$$

Példák

1. Legyenek a $\bar{\xi} = (\xi, \eta)$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó lehetséges értékei $(0; 1)$; $(0; -1)$; $(1; 0)$; $(-1; 0)$, és legyen $r = \frac{1}{4}$ ezek mindegyikének valószínűsége. Határozzuk meg a ξ és η valószínűségi változók lehetséges értékeinek valószínűségeit. Mivel ξ és η mindegyikének lehetséges értékei: $-1, 0, 1$; ezért

$$P(\xi = -1) = r_{(-1,0)} = \frac{1}{4}.$$

$$P(\xi = 0) = r_{(0,1)} + r_{(0,-1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$P(\xi = 1) = r_{(1,0)} = \frac{1}{4},$$

és hasonlóan

$$P(\eta = -1) = r_{(0,-1)} = \frac{1}{4}.$$

$$P(\eta = 0) = r_{(1,0)} + r_{(-1,0)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$P(\eta = 1) = r_{(0,1)} = \frac{1}{4}.$$

2. Az egységsugarú céltáblára leadott lövés találati helyét jelölje a $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$ véletlen helyzetű síkbeli pont. Területarányos valószínűségek esetén a $\vec{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó eloszlása folytonos. Határozzuk meg a ξ és η változók együttes sűrűségfüggvényének ismeretében a ξ és η változók sűrűségfüggvényét.

Mivel a feladat értelmében a találati hely valószínűsége területarányos, így ξ és η együttes sűrűségfüggvénye

$$p(xy) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{ha } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Így a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$p_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & \text{ha } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{ha } |x| > 1. \end{cases}$$

Ugyanis, ha $|x| \leq 1$, akkor

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(xy) dy = 2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2},$$

és az η valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$p_2(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, & \text{ha } |y| \leq 1, \\ 0, & \text{ha } |y| > 1. \end{cases}$$

Ugyanis, ha $|y| \leq 1$, akkor

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(xy) dx = 2 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}.$$

3. a) Igazoljuk, hogy a

$$p(xy) = \begin{cases} \frac{6}{5} (x+y^2), & \text{ha } 0 < x \leq 1 \text{ és } 0 < y \leq 1, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

a függvény egy $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$ valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye.
b) Határozzuk meg a ξ és η változók eloszlásfüggvényeit.

a) Az adott $p(xy)$ függvény felfogható egy valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvényének, mert mindenütt pozitív és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(xy) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{6}{5} (x+y^2) dx \right] dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5} y^2 \right) dy = 1.$$

b) A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{3}{5} x^2 + \frac{2}{5} x, & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Ugyanis a ξ változó eloszlásfüggvényének értelmezése alapján, ha $x \leq 0$, akkor $p(xy) = 0$ miatt:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(xy) dy \right] dx = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy \right] dx = 0.$$

Ha $0 < x \leq 1$, akkor $0 < y \leq 1$ esetén $p(xy) = \frac{6}{5} (x+y^2)$ miatt

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy \right] dx + \int_0^x \left[\int_0^1 \frac{6}{5} (x+y^2) dy \right] dx = \\ &= \int_0^x \frac{6}{5} \left(x + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{3}{5} x^2 + \frac{2}{5} x. \end{aligned}$$

Ha $x > 1$, akkor

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{-\infty}^0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy \right] dx + \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{6}{5} (x+y^2) dy \right] dx + \\ &+ \int_1^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy \right] dx = 1. \end{aligned}$$

Az η valószínűségi változó eloszlásfüggvénye;

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \leq 0, \\ \frac{2}{3} y^3 + \frac{3}{5} y, & \text{ha } 0 < y \leq 1, \\ 1, & \text{ha } y > 1. \end{cases}$$

Ugyanis az η változó eloszlásfüggvényének értelmezése alapján, ha $y \leq 0$, akkor $p(xy) = 0$ miatt

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^y \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(xy) dx \right] dy = \int_{-\infty}^y \left[\int_{-\infty}^{+\infty} 0 dx \right] dy = 0.$$

Ha $0 < y \leq 1$, akkor $0 < x \leq 1$ esetén $p(xy) = \frac{6}{5} (x+y^2)$ miatt

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot dx \right] dy + \int_0^y \left[\int_0^1 \frac{6}{5} (x+y^2) dx \right] dy =$$

$$= \int_0^y \left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5} y^2 \right) dy = \frac{2}{5} y^3 + \frac{3}{5} y.$$

($y \leq 1$)

Ha $y > 1$, akkor

$$F_2(y) = \int_{y=-\infty}^0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot dx \right] dy + \int_{y=0}^1 \left[\int_{\tau=0}^1 \frac{6}{5} (x+y^2) dx \right] dy +$$

$$+ \int_{y=1}^y \left[\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot dx \right] dy = 1.$$

14.2.5 Valószínűségi változók függetlensége

Két valószínűségi változót függetlennek nevezünk, ha a hozzájuk tartozó teljes eseményrendszerek függetlenek. Ez az értelmezés teljesen megfelel annak a természetes felfogásnak, hogy két valószínűségi változót akkor nevezünk függetlennek, ha az a tény, hogy az egyik egy meghatározott értéket vesz fel, nem befolyásolja a másik véletlen ingadozását.

Definíció. A ξ és η valószínűségi változók függetlenek, ha tetszőleges $a \leq b$ és $c \leq d$ szám-párok esetén:

$$P(a \leq \xi \leq b, c \leq \eta \leq d) = P(a \leq \xi \leq b)P(c \leq \eta \leq d).$$

Ez a definíció kiterjeszthető több valószínűségi változó esetére is.

Definíció. A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha tetszőleges $a_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) számok esetén

$$P(a_1 \leq \xi_1 \leq b_1; a_2 \leq \xi_2 \leq b_2; \dots; a_n \leq \xi_n \leq b_n) = \prod_{i=1}^n P(a_i \leq \xi_i \leq b_i).$$

Könnyen belátható, hogy az n független valószínűségi változó közül tetszőlegesen kiválasztott $s \leq n$ valószínűségi változó is független. Viszont az n független valószínűségi változó páronkénti függetlenségéből még nem következik azok teljes függetlensége.

A valószínűségi változók függetlenségére megadott e definíciók tetszőleges valószínűségi változóra érvényesek. Megadhatók azonban ezzel ekvivalens definíciók külön diszkrét és külön folytonos valószínűségi változóra.

14.2.5.1 Diszkrét valószínűségi változók függetlensége

Definíció. A ξ és η diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha i és j minden lehetséges értékére teljesülnek a

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) P(\eta = y_j)$$

összefüggések.

Tehát két független valószínűségi változó együttes eloszlását ξ és η eloszlása meghatározza. Ez a definíció általánosítható több diszkrét valószínűségi változó esetére is.

Definíció. A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ diszkrét valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha lehetséges értékeik bármely $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$ rendszerére fennáll a

$$P(\xi_1 = x_{k_1}, \xi_2 = x_{k_2}, \dots, \xi_n = x_{k_n}) = \prod_{j=1}^n P(\xi_j = x_{k_j})$$

összefüggés.

14.2.5.2 Folytonos valószínűségi változók függetlensége

Definíció. A ξ és η folytonos valószínűségi változók függetlenek, ha minden valós x és y számra

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x) \cdot P(\eta < y),$$

vagyis ha ξ és η kétdimenziós eloszlásfüggvénye megegyezik a ξ és η változók eloszlásfüggvényeinek szorzatával

$$F(xy) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Hasonlóan értelmezhető több valószínűségi változó függetlensége is.

Definíció. A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számok bármely rendszerére érvényes a

$$P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n) = \prod_{k=1}^n P(\xi_k < x_k),$$

illetve az

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \prod_{k=1}^n F_{\xi_k}(x)$$

reláció, ahol $F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye, $F_{\xi_k}(x)$ pedig a ξ_k valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. A következőkben bizonyítás nélkül közlünk a független valószínűségi változókra vonatkozó néhány — a későbbiek során felhasználásra kerülő — tételt.

1. Tétel. Egy konstans — vagyis egy olyan valószínűségi változó, mely egyetlen értéket vesz fel — minden valószínűségi változótól független.

2. Tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, és $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ az x valós változó folytonos függvényei, akkor az $\eta_1 = g_1(\xi_1), \eta_2 = g_2(\xi_2), \dots, \eta_n = g_n(\xi_n)$ valószínűségi változók is függetlenek.

Ennek a tételnek speciális esete, ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, akkor az $\eta_k = a_k \xi_k + b_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) valószínűségi változók is függetlenek. (a_k és b_k tetszőleges konstansok.)

3. Tétel. Ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, és mindegyiknek létezik sűrűségfüggvénye, akkor

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n p_k(x_k),$$

ahol $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye. $p_k(x_k)$ pedig a ξ_k valószínűségi változó ($k = 1, 2, \dots, n$) sűrűségfüggvénye.

E tétel megfordítása is igaz.

Ha a
$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n p_k(x_k)$$

reláció fennáll, akkor a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek.

Példák

1. Legyenek a $\xi = (\xi, \eta)$ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $(1; 1); (1; -1); (-1; 1); (-1; -1)$, és ezek mindegyikének valószínűsége $r_{ik} = P(\xi = x_i, \eta = y_k) = \frac{1}{4}$. Állapítsuk meg, hogy függetlenek-e a ξ és η valószínűségi változók. Mindkét valószínűségi változónak lehetséges értékei -1 és 1 , így azok bármelyikének valószínűsége

$$p = P(\xi = x_i) = P(\eta = y_k) = \frac{1}{2} \quad (x_i, y_k = -1, 1).$$

Tehát

$$P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(\xi = 1) \cdot P(\eta = 1),$$

$$P(\xi = 1, \eta = -1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(\xi = 1) \cdot P(\eta = -1),$$

$$P(\xi = -1, \eta = 1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(\xi = -1) \cdot P(\eta = 1),$$

$$P(\xi = -1, \eta = -1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(\xi = -1) \cdot P(\eta = -1).$$

Tehát a ξ és η független valószínűségi változók.

2. Legyenek a $\xi = (\xi, \eta)$ kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékei $(0; 1); (0; -1); (1; 0); (-1; 0)$, és ezek mindegyikének valószínűsége $\frac{1}{4}$. Állapítsuk meg, hogy függetlenek-e a ξ és η valószínűségi változók.

Mivel
$$P(\xi = 1) = \frac{1}{4},$$

és
$$P(\eta = 1) = \frac{1}{4},$$

de
$$P(\xi = 1, \eta = 1) = 0 \neq P(\xi = 1) \cdot P(\eta = 1),$$

ezért a két valószínűségi változó nem független.

3. A ξ és η valószínűségi változók jelentsék az egységnyezet egy véletlenszerűen kiválasztott pontjának koordinátáit. Igazoljuk, hogy területarányos (jelen esetben a területtel egyenlő) valószínűség esetén ξ és η függetlenek. Legyen $a \in [0, 1]$, $b \in [0, 1]$, $c \in [0, 1]$, $d \in [0, 1]$, akkor annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kiválasztott pont az egységnyezet valamely $(b-a)$ és $(d-c)$ oldalhosszúságú téglalap tartományába esik (14.27 ábra)

$$P(a \leq \xi \leq b; c \leq \eta \leq d) = (b-a)(d-c).$$

Mivel

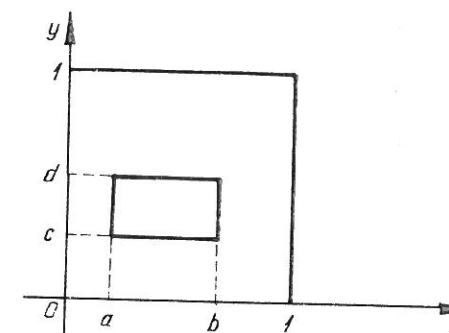
$$b-a = P(a \leq \xi \leq b),$$

$$d-c = P(c \leq \eta \leq d),$$

ezért

$$P(a \leq \xi \leq b; c \leq \eta \leq d) = P(a \leq \xi \leq b) \cdot P(c \leq \eta \leq d),$$

ami a ξ és η valószínűségi változók függetlenségét jelenti.



14.27 ábra

14.3 A VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK SZÁMSZERŰ JELLEMZŐI

Az előző fejezetben láttuk, hogy a valószínűségi változót legjobban eloszlásfüggvénye jellemzi. Az eloszlásfüggvény ugyanis egyidejűleg tájékoztat a valószínűségi változó lehetséges értékeiről és azok valószínűségeiről. Számos esetben azonban elegendő a valószínűségi változóról jóval kevesebbet tudni, csupán az szükséges, hogy a valószínűségi változóról általános, globális képet alkothassunk. A valószínűségszámítás és alkalmazásai szempontjából fontos szerepük van a valószínűségi változóra jellemző bizonyos konstansoknak, melyek a valószínűségi változó eloszlása, illetve eloszlásfüggvénye segítségével határozhatók meg. E konstansok közül — melyek a valószínűségi változó általános, kvantitatív jellemzésére szolgálnak — különösen fontosak a matematikai várható érték, a szórás és a különböző rendű momentumok. A következőkben ezeket az alapvető fogalmakat értelmezzük.

14.3.1 A valószínűségi változó várható értéke

14.3.1.1 A diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Egy ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek $x_1, x_2, \dots$, a megfelelő valószínűségek pedig $P(\xi = x_k) = p_k$, ($k = 1, 2, \dots$). Végezzünk N független megfigyelést ξ értékére! Ha N nagy szám, akkor — a valószínűségi változó jelentése szerint — körülbelül Np_1 esetben lesz $\xi = x_1$, Np_2 esetben $\xi = x_2$, és így tovább. Képezzük az N megfigyelés során megállapított ξ értékek számtani közepét, erre közelítőleg az

$$\frac{Np_1 \cdot x_1 + Np_2 \cdot x_2 + \dots}{N} = \sum_i p_i x_i$$

érték adódik. Ez nem más, mint a valószínűségi változó lehetséges értékeinek a megfelelő valószínűségekkel súlyozott számtani közepe. (Ugyanis a valószínűségekkel súlyozott számtani közép

$$\frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i p_i} = \sum_i p_i x_i,$$

mert $\sum_i p_i = 1$).

$\sum_i p_i x_i$ tehát olyan számérték, amely körül a valószínűségi változó megfigyelt értékeinek számtani közepe ingadozik.

Definíció. Ha a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, és a megfelelő valószínűségek $p_1, p_2, \dots$, akkor a valószínűségi változó *várható értéke*

$$M(\xi) = \sum_i p_i x_i,$$

feltéve, hogy a tagok száma véges vagy pedig a jobb oldalon álló sor abszolút konvergens.

14.3.1.2 A folytonos valószínűségi változó várható értéke

A folytonos valószínűségi változó várható értékét a diszkrét valószínűségi változó várható értékéhez hasonló módon határozzuk meg.

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó, melynek $p(x)$ sűrűségfüggvénye folytonos (illetve véges számú ugráshely kivételével folytonos). Végezzünk ξ értékére sok független megfigyelést. A sűrűségfüggvény értelmezéséből következik, hogy annak a valószínűsége, hogy ez az érték az $(x_i; x_i + \Delta x_i)$ intervallumba esik:

$$P(x_i \leq \xi \leq x_i + \Delta x_i) \approx p(x_i) \Delta x_i.$$

A megfigyelt értékeknek a $p(x_i) \Delta x_i$ valószínűségekkel súlyozott számtani közepe közelítőleg

$$\frac{\sum_i x_i p(x_i) \Delta x_i}{\sum_i p(x_i) \Delta x_i}.$$

Ez a közelítés annál jobb, minél kisebb Δx_i . Ez indokolja folytonos valószínűségi változó esetén a valószínűségi változó várható értékének — mint a valószínűségekkel súlyozott értékek számtani közepének — következő értelmezését.

Definíció. Ha a ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, $p(x)$ folytonos, ill. véges számú ugráshely kivételével folytonos, akkor várható értéke

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx,$$

feltéve, hogy a jobb oldali improprius integrál konvergens.

Megjegyzések. 1. A ξ valószínűségi változó megfigyelt értékeiből képezett középértéknek az $M(\xi)$ várható érték körüli ingadozására a — majd később ismertetésre kerülő — „nagy számok törvénye” utal. Egyelőre csak megjegyezzük, hogy a középérték és a várható érték között hasonló a kapcsolat, mint egy esemény relatív gyakorisága és annak valószínűsége között.

2. Az $M(\xi)$ várható érték csak ξ eloszlásától függ, így beszélhetünk ξ eloszlásának várható értékéről is.

3. Nem minden valószínűségi változónak van várható értéke.

Diszkrét valószínűségi változó esetén, ha ξ végtelen sok értéket vehet fel, akkor az $M(\xi)$ véges érték nem biztos, hogy létezik.

Például legyenek ξ lehetséges értékei.

$$\xi = 2, 2^2, 2^3, \dots,$$

és a megfelelő valószínűségek:

$$p = \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$$

Ehhez a valószínűségeloszláshoz tartozó várható érték nem létezik, mert a

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k}$$

végtelen sor divergens.

Folytonos valószínűségi változó esetén sem mindig létezik várható érték.

Például nincs véges várható értéke a valószínűségszámításban fontos szerepet játszó

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

folytonos sűrűségfüggvénnyel rendelkező, ún. Cauchy-féle eloszlásnak, mert a várható értéket definiáló

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

integrál nem konvergens.

14.3.1.3 Többdimenziós valószínűségi változó várhatóérték-vektora

Ha a $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ n -dimenziós valószínűségi vektorváltozó eloszlása ismert, akkor koordinátái $M(\xi_k)$ várható értéke ($k = 1, 2, \dots, n$) is ismert. Ezek a várható értékek egy vektor koordinátáiként foghatók fel. Ezt az $M(\vec{\xi}) = (M(\xi_1), \dots, M(\xi_n))$ vektort nevezzük a $\vec{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó *várhatóérték-vektorának*.

Definíció. A $\vec{\xi} = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi vektorváltozó várhatóérték-vektora

$$M(\vec{\xi}) = (M(\xi_1), M(\xi_2), \dots, M(\xi_n)),$$

ahol $M(\xi_1), M(\xi_2), \dots, M(\xi_n)$ a vektorváltozó koordinátáinak várható értéke. Speciálisan, ha

$$\vec{\xi} = (\xi, \eta),$$

akkor $M(\vec{\xi}) = (M(\xi), M(\eta)).$

Példák

1. Kockadobásnál — valószínűségi változónak a dobott szám számértékét bevezetve — határozzuk meg a valószínűségi változó várható értékét!

A ξ valószínűségi változó lehetséges értékeit, az 1, 2, 3, 4, 5, 6 értékeket, egyforma $p_i = \frac{1}{6}$ valószínűséggel veszi fel. Így a várható érték

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^6 p_i \xi_i = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Ez azt jelenti, hogy ha egy szabályos, homogén kockával nagy számú dobást végzünk, és a dobott számok összegét a dobások számával osztjuk, közelítőleg 3,5 számértéket kapunk.

2. A gyümölcsfák oltására rossz minőségű oltóanyagot adtak ki; az oltásoknak csak a 60%-a fogamzott meg. Átlagosan hányszor kell egy gyümölcsfát beoltani, hogy az oltás eredményes legyen, feltéve, hogy egy fa legföljebb négyszer oltható?

A tulajdonképpeni feladat az oltások száma várható értékének meghatározása. Ha valószínűségi változónak az oltások számát vesszük, a valószínűségi változó lehetséges értékei

$$\xi = 1, 2, 3, 4.$$

Annak a valószínűsége, hogy egy fát csak egyszer kell oltani (vagyis, hogy az oltás már az első alkalommal megfogamzik)

$$p_1 = 0,6.$$

Annak a valószínűsége, hogy egy fát kétszer kell oltani (vagyis hogy az oltás csak a második alkalommal fogamzik meg)

$$p_2 = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24.$$

Ugyanis ehhez két, egymástól független eseménynek kell bekövetkeznie: az első oltásnak nem szabad megfogamzania — ennek valószínűsége 0,4 —, a másodiknak viszont igen — ennek valószínűsége 0,6. A független események valószínűségei összeszoródnak, és így valóban $p_2 = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$. Annak a valószínűsége, hogy egy fát háromszor kell oltani (vagyis hogy az oltás csak a harmadik alkalommal fogamzik meg)

$$p_3 = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,096.$$

Annak a valószínűsége, hogy egy fát négyszer kell oltani, vagyis hogy az első három oltás egyike sem fogamzik meg (tekintet nélkül arra, hogy a negyedik oltás megfogamzik-e vagy sem)

$$p_4 = 0,4^3 = 0,064.$$

Így az oltások számának várható értéke

$$M(\xi) = p_1 \xi_1 = 0,6 \cdot 1 + 0,24 \cdot 2 + 0,096 \cdot 3 + 0,064 \cdot 4 = 1,624,$$

ami azt jelenti, hogy a fák többségét egyszer vagy kétszer kell beoltani.

3. Egy R sugarú kör alakú céltáblára való lövésnél — bevezetve valószínűségi változónak a találat helyének a középponttól való távolságát — határozzuk meg a valószínűségi változó várható értékét. A $\xi < x$ esemény azt jelenti, hogy a találat a középpont körüli x sugarú kör belsejébe esik, tehát

$$P(\xi < x) = \frac{I_x}{I_R} = \frac{x^2 \pi}{R^2 \pi} = \frac{x^2}{R^2}.$$

Így a valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{R^2}, & \text{ha } 0 < x \leq R, \\ 1, & \text{ha } x > R, \end{cases}$$

és sűrűségfüggvénye a folytonossági helyeken

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{2x}{R}, & \text{ha } 0 < x \leq R, \\ 0, & \text{ha } x > R. \end{cases}$$

A valószínűségi változó várható értéke:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^R x \cdot \frac{2x}{R^2} dx + \int_R^{\infty} 0 \cdot dx.$$

$$\text{Vagyis } M(\xi) = \frac{2}{R^2} \int_0^R x^2 dx = \frac{2}{R^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{2R}{3}.$$

14.3.2 A várható értékre vonatkozó néhány tétel

A következő tételek diszkrét és folytonos valószínűségi változó esetén egyaránt érvényesek. Az egyszerűség kedvéért azonban a bizonyításokat csak diszkrét esetre végezzük el.

1. **Tétel.** Egy konstans várható értéke megegyezik magával a konstanssal:

$$M(C) = C.$$

Bizonyítás. A valószínűségi változó csak egyetlen értéket, C -t, vesz fel 1 valószínűséggel.

$$\text{Így } M(C) = C \cdot 1 = C.$$

2. **Tétel.** Két valószínűségi változó összegének várható értéke megegyezik várható értékük összegével:

$$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta).$$

Bizonyítás. Legyenek a ξ valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots$, melyeket $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$ valószínűségekkel vesz fel. Az η valószínűségi változó lehetséges értékei pedig $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$, melyeket $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$ valószínűségekkel vesz fel. Ekkor a $\xi + \eta$ valószínűségi változó lehetséges értékei: $x_j + y_k$ ($j, k = 1, 2, \dots$), és jelöljük p_{jk} -val annak a valószínűségét, hogy ξ az x_j és η az y_k értéket veszi fel. A várható érték definíciója értelmében:

$$\begin{aligned} M(\xi + \eta) &= \sum_{j,k=1}^{\infty} (x_j + y_k) p_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (x_j + y_k) p_{jk} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sum_{j=1}^{\infty} p_{jk}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy a p_{jk} számértékek egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez rendelt valószínűségek:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} = p_j,$$

és
$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{jk} = q_k.$$

Ugyanis
$$p_{jk} = P(\xi = x_j, \eta = y_k),$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} &= P((\xi = x_j, \eta = y_1) + (\xi = x_j, \eta = y_2) + \dots + (\xi = x_j, \eta = y_k) + \dots) \\ &= P(\xi = x_j) = p_j. \end{aligned}$$

Hasonlóan
$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{jk} = P((\xi = x_1, \eta = y_k) + (\xi = x_2, \eta = y_k) + \dots + (\xi = x_j, \eta = y_k) + \dots) \\ = P(\eta = y_k) = q_k.$$

Ezzel
$$M(\xi + \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p_j + \sum_{k=1}^{\infty} y_k q_k = M(\xi) + M(\eta).$$

3. Tétel. Véges sok valószínűségi változó összegének várható értéke megegyezik várható értékeik összegével:

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n),$$

ill.
$$M\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n M(\xi_i).$$

4. Tétel. Konstans szorzó a várhatóérték-jele alól kiemelhető:

$$M(c\xi) = cM(\xi).$$

Bizonyítás. A várható érték definíciója értelmében:

$$M(c\xi) = \sum_i p_i(cx_i) = c \sum_i p_i x_i = cM(\xi).$$

A 3. és 4. tétel egy tételbe foglalható

5. Tétel. Véges sok $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változóra és $c_1, c_2, \dots, c_n$ konstansra:

$$M\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i M(\xi_i).$$

6. Tétel. Tetszőleges b konstans esetén

$$M(\xi + b) = M(\xi) + b.$$

Bizonyítás. A tétel felfogható a 2. tétel azon speciális esetének, amikor az egyik valószínűségi változó konstans. Legyen pl. $\eta = b$, akkor a 2. tétel értelmében:

$$M(\xi + b) = M(\xi) + M(b),$$

ahol $M(b) = b$ az 1. tétel értelmében, és így valóban

$$M(\xi + b) = M(\xi) + b.$$

7. Tétel. Két valószínűségi változó szorzatának várható értékére a következő egyenlőtlenség érvényes:

$$|M(\xi\eta)| \leq \sqrt{M(\xi^2) \cdot M(\eta^2)}.$$

Ez az egyenlőtlenség tulajdonképpen az analízisből ismert *Schwarz-féle egyenlőtlenség* következménye.

Bizonyítás. Vezessük be a

$$\zeta = (\xi - \lambda\eta)^2$$

valószínűségi változót, ahol λ valós paraméter. Ekkor egyrészt

$$\zeta \geq 0.$$

másrészt
$$\zeta = (\xi - \lambda\eta)^2 \leq 2\xi^2 + 2\lambda^2\eta^2$$

miatt
$$M(\zeta) = M(\xi - \lambda\eta)^2$$

létezik és nemnegatív, vagyis — felhasználva a 3. és 5. tételt:

$$M(\xi - \lambda\eta)^2 = M(\xi^2 - 2\lambda\xi\eta + \lambda^2\eta^2) = M(\xi^2) - 2\lambda M(\xi\eta) + \lambda^2 M(\eta^2).$$

A jobb oldalon álló, λ -ra nézve másodfokú polinom csak úgy lehet nemnegatív értékű, ha diszkriminánsa nem nagyobb, mint 0. Tehát kell, hogy

$$4M^2(\xi, \eta) - 4M(\eta^2)M(\xi^2) \leq 0,$$

illetve
$$|M(\xi\eta)| \leq \sqrt{M(\xi^2) \cdot M(\eta^2)}$$

legyen, amivel állításunkat igazoltuk.

8. Tétel. Két független valószínűségi változó szorzatának várható értéke megegyezik a várható értékek szorzatával:

$$M(\xi\eta) = M(\xi) \cdot M(\eta).$$

Bizonyítás. A ξ valószínűségi változó vegye fel az $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots$ lehetséges értékeit $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$ valószínűségekkel. Az η valószínűségi változó pedig az $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$ lehetséges értékeit $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$ valószínűségekkel. A (ξ, η) valószínűségi változó lehetséges értékeihez, (x_j, y_k) -hoz ($j, k = 1, 2, \dots$) tartozó valószínűségeket jelöljük p_{jk} -val (p_{jk} jelenti annak a valószínűségét, hogy ξ az x_j és η az y_k értéket veszi fel). Mivel ξ és η független valószínűségi változók, ezért

$$p_{jk} = p_j \cdot q_k,$$

és így a várható érték:

$$\begin{aligned} M(\xi\eta) &= \sum_{j,k=1}^{\infty} x_j y_k p_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_j y_k p_j q_k = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j p_j \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k p_k \right) = M(\xi) \cdot M(\eta). \end{aligned}$$

9. Tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ páronként független valószínűségi változók, akkor szorzatuk várható értéke megegyezik várható értékeik szorzatával:

$$M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = M(\xi_1) M(\xi_2) \dots M(\xi_n).$$

Példák

1. Két szabályos, homogén kockával való dobásnál vezessük be valószínűségi változónak a dobott számok összegét, illetve szorzatát, és határozzuk meg várható értéküket. Jelöljük egy dobásnál ξ -vel az egyik és η -val a másik kockával dobott számot úgy, hogy feladatunk a $(\xi + \eta)$, illetve a (ξ, η) valószínűségi változók várható értékének meghatározása. Mivel — mint láttuk — egy szabályos, homogén kockával végzett dobáskor a dobott szám várható értéke 3,5, ami azt jelenti, hogy

$$M(\xi) = M(\eta) = 3,5,$$

azért a várható értékre vonatkozó 2. tétel értelmében

$$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta) = 3,5 + 3,5 = 7.$$

Hasonlóan — a két kocka dobási eredményeinek függetlensége miatt — a 3. tétel értelmében

$$M(\xi\eta) = M(\xi) \cdot M(\eta) = 3,5 \cdot 3,5 = 12,25.$$

Tehát — nagy számú dobás esetén — a dobott számok összegének 7, szorzatának 12,25 a várható értéke.

2. Egy célpontot addig lőnek, amíg n találatot kap. Határozzuk meg a szükséges lövések számának várható értékét azon feltétel mellett, hogy a lövések egymástól függetlenek, és minden lövésnél a találat valószínűsége p , a nem-találaté pedig $q = 1 - p$. Jelöljük ξ_i -vel az $(i-1)$ -edik és i -edik találat közti lövések számát; ekkor az n találatához szükséges lövések száma

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

A keresett várható érték

$$M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n).$$

Mivel $M(\xi_1) = M(\xi_2) = \dots = M(\xi_n)$,

azért $M(\xi) = n \cdot M(\xi_1)$.

Tetszőleges i esetén ($i = 1, 2, \dots, n$) a ξ_i valószínűségi változó lehetséges értékei

$$1, 2, 3, \dots, k, \dots,$$

a megfelelő valószínűségek

$$p, qp, q^2p, \dots, q^{k-1}p, \dots$$

Ha például a k -edik lövés talál, akkor $(k-1)$ lövés nem talál, és így a lövések függetlensége miatt

$$p_k = q^{k-1} \cdot p.$$

Így bármelyik két találat közti lövések számának várható értéke

$$M(\xi_i) = 1 \cdot p + 2qp + 3q^2p + \dots + k \cdot q^{k-1}p + \dots,$$

$$\begin{aligned} \text{vagyis } M(\xi_i) &= \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} \cdot p = p \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dq} (q^k) = p \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \\ &= p \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} \right) = p \frac{1}{(1-q)^2} = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

(Itt fölhasználtuk, hogy $q < 1$ sorhányadosú geometriai sor esetén a differenciálás és összegezés sorrendje felcserélhető.)

$$\text{Tehát } M(\xi) = n M(\xi_i) = n \cdot \frac{1}{p} = \frac{n}{p},$$

ami azt jelenti, hogy az n találatához szükséges lövések számának várható értéke egyenesen arányos a találatok számával és fordítva arányos a találat valószínűségével.

14.3.3 A valószínűségi változó szórása

A valószínűségi változó várható értéke még nem jellemzi egyértelműen a valószínűségi változót, annak eloszlását. Különböző eloszlásoknak is lehet azonos várható értéke, viszont különböző várható értékű valószínűségi változók is rendelkezhetnek egyéb azonos tulajdonságokkal.

Például hasonlítsuk össze két különböző búzafajta terméshozamát. Az 1 m²-re eső terméshozam különböző véletlen tényezők (csapadékmennyiség, napfény, trágyaeloszlás stb.) összehatásának eredményeként jelentősen ingadozik, és így valószínűségi változónak tekinthető. Előfordulhat, hogy azonos körülmények közt két különböző búzafajta átlagos terméshozama (terméshozamának várható értéke) megegyezik, gazdasági szempontból mégsem azonos jelentőségűek. Az a búzafajta értékesebb, amelynek terméshozama az időjárás és más tényezők hatására kisebb ingadozást mutat, vagyis amelynél a termésátlag „szórása” kisebb. Látható tehát, hogy a különböző búzafajták terméshozamának vizsgálatánál azok ingadozásának mértéke éppen olyan fontos, mint az átlagos terméshozam nagysága.

Az e példánál tapasztaltakhoz hasonlóan sokszor a valószínűségi változó gyakorlatilag fontos tulajdonságai csupán a várható érték segítségével kielégítően nem jellemezhetők. Ezért szükséges még további olyan szám adatok bevezetése, amelyek több információt nyújtanak a vizsgált változó leglényegesebb tulajdonságairól. E tulajdonságok közül egyik legfontosabb a valószínűségi változó várható érték körüli *ingadozása*, vagyis a valószínűségi változó által ténylegesen felvett értéknek a várható értéktől való eltérése, a várható érték

körüli szórása. Így tehát egyik feladat olyan számadat bevezetése, amely alkalmas módon jellemzi a valószínűségi változó ingadozásának, szórásának mértékét.

Kézenfekvő volna ezen ingadozás mérőszámaként a valószínűségi változó és saját várható értéke különbségének a várható értékét, a

$$H(\xi) = M(\xi - M(\xi))$$

értéket bevezetni. Ez azonban minden valószínűségi változó esetén nulla. Ugyanis $M(\xi)$ konstans volta miatt, a várható értékre vonatkozó 4. tétel értelmében

$$M(\xi - M(\xi)) = M(\xi) - M(\xi) = 0.$$

Ezért az $M(\xi - M(\xi))$ nem alkalmas a várható érték körüli ingadozás mérésére.

A valószínűségi változó várható értéktől való eltérése abszolút értékének várható értéke – az ún. „várható eltérés” –

$$E(\xi) = M(|\xi - M(\xi)|)$$

már általában nullától különböző érték. Ez az érték jól tájékoztat az eltérés nagyságáról, és így alkalmas az ingadozás mérésére. Mégsem szokás használni, mert az abszolút érték miatt számítástechnikailag nehézkes.

Az ingadozás mértékszámaként leggyakrabban a fogalmilag valamivel mesterkéltőbb, de számítástechnikailag egyszerűbb és matematikai szempontból előnyös ún. „szórás” használjuk, amelynek értelmezése a következő.

Definíció. Tetszőleges ξ valószínűségi változó szórása, $D(\xi)$ a valószínűségi változó és várható értéke eltérése négyzetének várható értékéből vont pozitív négyzetgyök (feltéve, hogy ez véges érték). Vagyis

$$D(\xi) = +\sqrt{M([\xi - M(\xi)]^2)}.$$

A $D(\xi)$ szórás tehát mindig nemnegatív számérték, amely csak akkor nulla, ha $P(\xi = c) = 1$, ahol c tetszőleges konstans.

A szórás, illetve a szórásnégyzet meghatározásának egyszerűsítésére szolgál a következő két tétel.

1. Tétel. Ha egy ξ valószínűségi változó $D(\xi)$ szórása létezik és 0-tól különböző, akkor a szórásnégyzet megegyezik a változó négyzetének várható értéke és a változó várható értéke négyzetének különbségével. Vagyis

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2.$$

Bizonyítás. A szórás definíciója és a várható értékre vonatkozó 3. és 4. tétel felhasználásával

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= M([\xi - M(\xi)]^2) = M(\xi^2 - 2\xi M(\xi) + [M(\xi)]^2) = \\ &= M(\xi^2) - 2M(\xi) \cdot M(\xi) + [M(\xi)]^2 = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2, \end{aligned}$$

amivel állításunkat igazoltuk.

E tétel következménye a 2. tétel.

2. Tétel. Bármely valószínűségi változó négyzetének várható értéke nagyobb, mint a változó várható értékének négyzete

$$M(\xi^2) \geq M^2(\xi).$$

Bizonyítás. Bármely valószínűségi változó esetén a szórásnégyzet nemnegatív érték, vagyis

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) \geq 0,$$

amiből következik, hogy

$$M(\xi^2) \geq M^2(\xi).$$

14.3.3.1 Diszkrét valószínűségi változó szórása

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amely az $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ lehetséges értékeit $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ valószínűségekkel veszi fel, és várható értéke $M(\xi)$, akkor szórásnégyzete

$$D^2(\xi) = M([\xi - M(\xi)]^2) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - M(\xi))^2$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló sor konvergens.

Vagy – az előző tétel felhasználásával:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i \right)^2,$$

amennyiben a jobb oldali sorok konvergens.

14.3.3.2 Folytonos valószínűségi változó szórása

Ha ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $p(x)$, akkor szórásnégyzete

$$D^2(\xi) = M([\xi - M(\xi)]^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) (x - M(\xi))^2 dx,$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló improprius integrál létezik. Vagy

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \right]^2,$$

amennyiben a jobb oldali improprius integrálok léteznek.

Megjegyzés. 1. Nem minden valószínűségi változónak van véges szórása.

Diszkrét valószínűségi változó esetén, ha ξ végtelen sok értéket vesz fel, akkor nem biztos, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - M(\xi))^2$ sor konvergens, és így nem biztos, hogy van véges szórása.

Folytonos valószínűségi változónak sincs szórása, ha az $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(x - M(\xi))^2 dx$ improper integrál nem létezik.

2. Egyszerűbb számítás miatt szokás a valószínűségi változókat úgy transzformálni, hogy az új változó várható értéke 0, szórása 1 legyen. Az ily módon transzformált valószínűségi változót *standard* valószínűségi változónak nevezzük.

Definíció. Standard valószínűségi változó az olyan változó, amelynek várható értéke 0 és szórása 1.

Tétel. Tetszőleges, nem nulla szórású ξ valószínűségi változóból standard valószínűségi változó képezhető, ha vesszük a valószínűségi változó várható értéktől való eltéréseinek és szórásának hányadosát.

Ha ξ tetszőleges valószínűségi változó, akkor

$$\xi^* = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}$$

standard valószínűségi változó.

Bizonyítás. a) Az új valószínűségi változó várható értéke 0, mert

$$M(\xi^*) = M\left(\frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}\right) = \frac{1}{D(\xi)} M(\xi - M(\xi)) = 0$$

(lásd a várható értékre vonatkozó tételket, 14.3.2 pont).

b) Az új valószínűségi változó szórása: 1. Ugyanis a várható érték 0 volta miatt

$$D^2\left[\frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}\right] = M\left(\left[\frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}\right]^2\right),$$

és így a várható értékre vonatkozó 3. tétel ismételt alkalmazásával

$$D^2\left(\frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}\right) = \frac{1}{D^2(\xi)} M[(\xi - M(\xi))^2] = \frac{1}{D^2(\xi)} \cdot D^2(\xi) = 1,$$

amiből
$$D\left[\frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}\right] = 1.$$

14.3.3.3 Többdimenziós valószínűségi változó szórása

A $\vec{\xi} = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ n -dimenziós valószínűségi vektorváltozó várható érték körüli ingadozását nyilván nem lehet egyetlen számmal jellemezni. Az ingadozásról a $D(\xi_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ingadozások bizonyos felvilágosítást adnak ugyan, de ez hiányos, mert a $D(\xi_k)$ értékek csak a koordinátatengelyekre való vetületek ingadozását jellemzik, a koordinátatengelyek választása pedig önkényes. Sokkal jobb mérték kapható $\vec{\xi}$ ingadozására, ha $\vec{\xi}$ egy tetszőleges egyenesre való vetületének ingadozását vizsgáljuk.

Legyen $m_k = M(\xi_k)$ és P_0 az $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ koordinátákkal megadott pont, továbbá legyen g egy tetszőleges P_0 ponton áthaladó egyenes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ iránykoszinuszokkal $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tehát valós számok, és $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 1$. Képezzük a

$$\zeta_g = \sum_{k=1}^n \alpha_k (\xi_k - m_k)$$

valószínűségi változót! Ennek szórásnégyzete

$$D^2(\zeta_g) = M(\zeta_g^2),$$

mivel $M(\zeta_g) = 0$. Bevezetve a

$$D_{ij} = M[(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)]$$

jelölést, ezzel

$$D^2(\zeta_g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \alpha_i \alpha_j.$$

Megjegyzés. D_{ij} -t a ξ_i és ξ_j valószínűségi változók *kovarianciájának* szokás nevezni. (Ezzel majd a későbbiekben foglalkozunk.)

A D_{ij} együttthatókkal a $\vec{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó tetszőleges egyenesre való vetületének szórása kiszámítható, és így $\vec{\xi}$ ingadozása jellemezhető a

$$D = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{vmatrix}$$

ún. *szórásmátrixszal*, ahol a főátlóban levő D_{ii} számértékek az egyes változók szórásnégyzetei.

(Feltételezzük, hogy a mátrix determinánsa $|D| > 0$, ugyanis a $D^2(\zeta_g)$ értelmezése miatt a $|D|$ determináns mindig nemnegatív, a $|D| = 0$ „elfajult” esetet pedig kizárjuk.)

Speciálisan, ha $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$ kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó, akkor $\vec{\xi}$ ingadozása a

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

szórásmátrixszal jellemezhető, ahol

$$D_{11} = D^2(\xi) \quad \text{a } \xi \text{ változó szórásnégyzete,}$$

$$D_{22} = D^2(\eta) \quad \text{az } \eta \text{ változó szórásnégyzete,}$$

$$D_{12} = D_{21} = M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))] \quad \text{a } \xi \text{ és } \eta \text{ változók kovarianciája.}$$

Példák

1. Egy szabályos, homogén kockával való dobásnál tekintsük valószínűségi változónak a dobott számértéket, és határozzuk meg a valószínűségi változó várható eltérését és szórását.

A valószínűségi változó lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4, 5, 6, melyeket azonos $p = \frac{1}{6}$ valószínűséggel vesz fel. Korábbi számításaink szerint a várható érték, $M(\xi) = 3,5$, és ennek felhasználásával a várható eltérés

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{i=1}^6 p_i |x_i - M(\xi)| = \\ &= \frac{1}{6} [|1 - 3,5| + |2 - 3,5| + |3 - 3,5| + |4 - 3,5| + |5 - 3,5| + |6 - 3,5|] = 1,5, \end{aligned}$$

és a szórásnégyzet

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= \sum_{i=1}^6 p_i (x_i - M(\xi))^2 = \\ &= \frac{1}{6} [(1 - 3,5)^2 + (2 - 3,5)^2 + (3 - 3,5)^2 + (4 - 3,5)^2 + (5 - 3,5)^2 + (6 - 3,5)^2] = \\ &= 2,916. \end{aligned}$$

illetve a szórás:

$$D(\xi) = 1,71.$$

2. Egy gazdaságban a szállításhoz egyforma ládákba rakják az őszibarackot. A barackok nagyságától függően egy ládába különböző számú barack fér, így ez felfogható diszkrét valószínűségi változónak. A ládák 3%-ába 61 db, 10%-ába 62 db; 20%-ába 63 db, 40%-ába 64 db, 15%-ába 65 db, 8%-ába 66 db, 4%-ába 67 db barack fér. Határozzuk meg az egy ládába kerülő őszibarackok számának várható értékét és a tulajdonképpen barackszámnak a várható értéktől való eltérését (szórását). Az adott feltételek mellett az egy ládába kerülő őszibarackok számának várható értéke

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \sum_{i=1}^7 p_i x_i = 0,03 \cdot 61 + 0,1 \cdot 62 + 0,2 \cdot 63 + 0,4 \cdot 64 + 0,15 \cdot 65 + 0,08 \cdot 66 + 0,04 \cdot 67 = \\ &= 63,94 \approx 64. \end{aligned}$$

Az egy ládába kerülő barackok számának a várható érték körüli szórása

$$D(\xi) = \sqrt{M(\xi^2) - M^2(\xi)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^7 p_i x_i^2\right) - 63,94^2} \approx 1,3,$$

ugyanis

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 p_i x_i^2 &= 0,03 \cdot 61^2 + 0,1 \cdot 62^2 + 0,2 \cdot 63^2 + 0,4 \cdot 64^2 + 0,15 \cdot 65^2 + 0,08 \cdot 66^2 + 0,04 \cdot 67^2 = \\ &= 4090,02, \end{aligned}$$

és így

$$D(\xi) = \sqrt{4090,02 - 4088,32} \approx \sqrt{1,69} = 1,3.$$

3. Egy R sugarú kör alakú céltáblára való lövésnél, bevezetve valószínűségi változónak a találat helyének a középponttól való távolságát, határozzuk meg a valószínűségi változó szórását. Korábbi számításaink során (14.3.1 fejezet 3. példa) láttuk, hogy e valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{2x}{R}, & \text{ha } 0 \leq x \leq R, \\ 0, & \text{ha } x > R, \end{cases}$$

és várható értéke

$$M(\xi) = \frac{2}{3} R.$$

Ezek felhasználásával

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \right) - \left(\frac{2}{3} R \right)^2 = -\frac{4}{9} R^2 + \int_0^R x^2 \cdot \frac{2x}{R^2} dx = \\ &= -\frac{4}{9} R^2 + \frac{2}{R^2} \int_0^R x^3 dx = -\frac{4}{9} R^2 + \frac{2}{R^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^R = -\frac{4}{9} R^2 + \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{18} R^2. \end{aligned}$$

Tehát a valószínűségi változó szórása

$$D(\xi) = \frac{1}{3\sqrt{2}} R.$$

14.3.4 A szórásra vonatkozó néhány tétel

A következőkben a szórásra vonatkozó néhány tételt ismertetünk. Ezek rávilágítanak a szórás olyan tulajdonságaira, melyek alapján a szórás részesül előnyben minden más ingadozásjellemzővel szemben (például várható eltérés stb.).

1. **Tétel.** Egy konstans szórása nulla. Vagyis

$$D^2(c) = 0.$$

Bizonyítás. A szórás definíciója és a várható értékre vonatkozó 1. tétel értelmében

$$D^2(c) = M([c - M(c)]^2) = M([c - c]^2) = M(0) = 0.$$

2. **Tétel.** Két független valószínűségi változó összegének szórásnégyzete megegyezik a két valószínűségi változó szórásnégyzetének összegével. Vagyis

$$D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta),$$

illetve

$$D(\xi + \eta) = \sqrt{D^2(\xi) + D^2(\eta)}.$$

Bizonyítás. A szórás definíciója és a várható értékre vonatkozó 3. és 4. tétel felhasználásával

$$\begin{aligned} D^2(\xi + \eta) &= M([(\xi + \eta) - M(\xi + \eta)]^2) = \\ &= M([\xi + \eta - M(\xi) - M(\eta)]^2) = \\ &= M([\xi - M(\xi)] + [\eta - M(\eta)]^2) = \\ &= M([\xi - M(\xi)]^2 + [\eta - M(\eta)]^2 + 2[\xi - M(\xi)][\eta - M(\eta)]) = \\ &= M([\xi - M(\xi)]^2) + M([\eta - M(\eta)]^2) + 2M(\xi - M(\xi)) \cdot M(\eta - M(\eta)) = \\ &= D^2(\xi) + D^2(\eta). \end{aligned}$$

(Ugyanis egyrészt ξ és η függetlensége miatt $[\xi - M(\xi)]$ és $[\eta - M(\eta)]$ is függetlenek, így szorzatuk várható értéke megegyezik várható értékük szorzatával; másrészt — mint láttuk — $M(\xi - M(\xi)) = 0$ és $M(\eta - M(\eta)) = 0$.)

A 2. tételből teljes indukcióval adódik a

3. Tétel. Véges sok, páronként független valószínűségi változó összegének szórásnégyzete megegyezik az egyes változók szórásnégyzetének összegével. Vagyis

$$D^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2) + \dots + D^2(\xi_n),$$

röviden

$$D^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n D^2(\xi_i),$$

illetve

$$D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n D^2(\xi_i)}.$$

4. Tétel. Konstans szorzó abszolút értéke kiemelhető szórásjele alól

$$D(c\xi) = |c|D(\xi).$$

Bizonyítás. A szórás definíciója és a várható értékre vonatkozó 3. tétel értelmében

$$\begin{aligned} D^2(c\xi) &= M(c^2\xi^2) - M^2(c\xi) = c^2M(\xi^2) - c^2M^2(\xi) = \\ &= c^2[M(\xi^2) - M^2(\xi)] = c^2D^2(\xi). \end{aligned}$$

Tehát valóban

$$D(c\xi) = |c|D(\xi).$$

A 3. és 4. tétel egy tételbe foglalható:

5. Tétel. Véges sok, páronként független $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változó és $c_1, c_2, \dots, c_n$ konstans esetén

$$D^2(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_n\xi_n) = c_1^2D^2(\xi_1) + c_2^2D^2(\xi_2) + \dots + c_n^2D^2(\xi_n),$$

röviden

$$D^2\left(\sum_{i=1}^n c_i\xi_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2D^2(\xi_i),$$

illetve

$$D\left(\sum_{i=1}^n c_i\xi_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2D^2(\xi_i)}.$$

6. Tétel. A szórás értékét a valószínűségi változóhoz adott konstans nem befolyásolja. Vagyis

$$D(\xi + c) = D(\xi).$$

Bizonyítás. A tétel felfogható a 4. tétel azon speciális esetének, amikor az egyik változó például $\eta = c$ konstans. Ugyanis a konstans minden valószínűségi változótól független, és így

$$D^2(\xi + c) = D^2(\xi) + D^2(c),$$

továbbá $D^2(c) = 0$ miatt

$$D^2(\xi + c) = D^2(\xi),$$

illetve

$$D(\xi + c) = D(\xi).$$

Példák

1. Két szabályos, homogén kockával dobva vezessük be valószínűségi változónak a dobott számok összegét, és határozzuk meg a valószínűségi változó szórását.

Jelöljük ξ -vel az egyik és η -val a másik kockával dobott számot, így feladat a $(\xi + \eta)$ valószínűségi változó szórásának meghatározása.

Mivel — mint láttuk — egy szabályos, homogén kockával történő dobásnál a dobott szám várható érték körüli szórása: 1,71.; ami azt jelenti, hogy

$$D(\xi) = D(\eta) = 1,71\dots,$$

illetve

$$D^2(\xi) = D^2(\eta) = 2,916.$$

Így a szórásra vonatkozó 2. tétel értelmében

$$D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) = 2,916 + 2,916 = 5,832\dots,$$

illetve

$$D(\xi + \eta) = +\sqrt{5,832} \approx 2,42.$$

2. Hat alkatrészt kell összeszerelni. Az alkatrészek hossza — egymástól függetlenül — valamennyire eltérhet az előírt méretektől. Határozzuk meg az összeszerelt alkatrészek hosszának várható eltérését a műhelyrajzon megadottól, ha az egyes alkatrészek előírt hossza 15 cm és a tűrés szórása 2%-os.

Vezessük be valószínűségi változónak az egyes alkatrészek hosszát, és jelöljük ezeket rendre $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$ -tal. Összeszerelés után a várható hossz:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^6 M(\xi_i) = 6 \cdot 15 = 90 \text{ cm},$$

és a valószínűségi változók függetlensége miatt az ettől való eltérés, a szórás

$$D(\xi) = \sqrt{\sum_{i=1}^6 D^2(\xi_i)} = \sqrt{6 \cdot 0,3^2} \approx 0,734.$$

A lehetséges hosszeltérés ugyanis 2%, és így

$$D(\xi_i) = 15 \cdot 0,02 = 0,3,$$

ha $i = 1, 2, \dots, 6$.

Ez az érték a várható értéknek kevesebb, mint 1%-a. Tehát amíg az egyes alkatrészek hosszúsága átlag 2%-kal tér el a várható értéktől, addig az alkatrészekből álló sor kevesebb, mint 1%-kal tér el, ami azt jelenti, hogy a valószínűségi változók összeadásával a viszonylagos hiba csökken. Ennek a ténynek nagy szerepe van a finommechanikai műszerek szerelésekor.

3. Egy gyümölcsstermelő almát, körtét, szőlőt termel. Az egyes gyümölcsfajták termésmennyisége — egymástól függetlenül — évről évre változik. Vezessük be valószínűségi változónak az egyes gyümölcsfajták évi termésmennyiségét, és határozzuk meg a tényleges össztermésnek a várható összterméstől való eltérését, ha az egyes gyümölcsfajták várható termésmennyisége rendre

$$70 \text{ q, } 50 \text{ q, } 30 \text{ q,}$$

szórása pedig

$$2\%, 3\%, 2,5\%.$$

Az egyes gyümölcsfajták termésmennyiségeihez rendelt valószínűségi változókat ξ , η és ζ -val jelölve a várható termésmennyiség

$$M(\xi + \eta + \zeta) = M(\xi) + M(\eta) + M(\zeta) = 70 + 50 + 30 = 150 \text{ q.}$$

A valószínűségi változók függetlensége miatt a szórás

$$\begin{aligned} D(\xi + \eta + \zeta) &= \sqrt{D^2(\xi) + D^2(\eta) + D^2(\zeta)} = \\ &= \sqrt{(70 \cdot 0,02)^2 + (50 \cdot 0,03)^2 + (30 \cdot 0,025)^2} \approx 2,19. \end{aligned}$$

14.3.5 A valószínűségi változó momentumai

A várható értéken és a szóráson kívül a valószínűségi változónak még fontos jellemzői az ún. *momentumok*.

Momentum

Definíció. A ξ valószínűségi változó k -ad rendű momentuma a valószínűségi változó k -adik hatványának a várható értéke.

$$\text{Vagyis: } M_k = M(\xi^k).$$

Ennek speciális esete $k = 1$ esetén a várható érték:

$$M_1 = M(\xi).$$

Abszolút momentum

Definíció. A ξ valószínűségi változó k -ad rendű abszolút momentuma a valószínűségi változó abszolút értéke k -adik hatványának a várható értéke. Vagyis

$$M_k = M(|\xi|^k).$$

Centrális momentum

Definíció. A ξ valószínűségi változó k -ad rendű centrális momentuma a valószínűségi változó várható értéktől való eltérése k -adik hatványának várható értéke. Vagyis

$$m_k = M([\xi - M(\xi)]^k).$$

Ennek speciális esete, $k = 2$ esetén, a szórásnégyzet:

$$m_2 = M([\xi - M(\xi)]^2) = D^2(\xi).$$

Abszolút centrális momentum

Definíció. A ξ valószínűségi változó k -ad rendű abszolút centrális momentuma a valószínűségi változó várható értéktől való eltérése abszolút értéke k -adik hatványának várható értéke. Vagyis

$$m_k = M(|\xi - M(\xi)|^k).$$

Ennek speciális esete $k = 1$ esetén a várható eltérés:

$$m_1^* = M(|\xi - M(\xi)|) = E(\xi).$$

14.3.5.1 Diszkrét valószínűségi változó momentumai

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amely az x_i ($i = 1, 2, \dots$) lehetséges értékeit p_i valószínűségekkel veszi fel, akkor

k -ad rendű momentuma:

$$M(\xi^k) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i^k,$$

k -ad rendű abszolút momentuma:

$$M(|\xi|^k) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i |x_i|^k,$$

k -ad rendű centrális momentuma:

$$M([\xi - M(\xi)]^k) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - M(\xi))^k,$$

k -ad rendű abszolút centrális momentuma:

$$M(|\xi - M(\xi)|^k) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i |x_i - M(\xi)|^k,$$

amennyiben a jobb oldali összegek száma véges, illetve a jobb oldali sor abszolút konvergens.

14.3.5.2 Folytonos valószínűségi változó momentumai

Ha ξ folytonos valószínűségi változó $p(x)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor

k -ad rendű momentuma:

$$M(\xi^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot p(x) dx,$$

k -ad rendű abszolút momentuma:

$$M(|\xi|^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \cdot p(x) dx,$$

k -ad rendű centrális momentuma:

$$M([\xi - M(\xi)]^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(\xi)]^k \cdot p(x) dx,$$

k -ad rendű abszolút centrális momentuma:

$$M(|\xi - M(\xi)|^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - M(\xi)|^k \cdot p(x) dx,$$

amennyiben a jobb oldali improprius integrálok léteznek.

Példák

1. Határozzuk meg azon diszkrét valószínűségi változó harmadrendű momentumát és harmadrendű centrális momentumát, mely a $\xi = 1, 3, 5$ lehetséges értékeit rendre a $p = \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ valószínűségekkel veszi fel.

A valószínűségi változó harmadrendű momentuma:

$$M_3 = M(\xi^3) = \sum_{i=1}^3 p_i x_i^3 = \frac{1}{6} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 3^3 + \frac{1}{3} \cdot 5^3 = \frac{332}{6} = 55,33.$$

A valószínűségi változó harmadrendű centrális momentuma:

$$m_3 = M([\xi - M(\xi)]^3) = \sum_{i=1}^3 p_i (x_i - M(\xi))^3,$$

és mivel $M(\xi) = \sum_{i=1}^3 p_i x_i = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{20}{6},$

azért $m_3 = \sum_{i=1}^3 p_i \left(x_i - \frac{20}{6}\right)^3 = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{20}{6}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(3 - \frac{20}{6}\right)^3 + \frac{1}{3} \left(5 - \frac{20}{6}\right)^3 = -\frac{128}{6}.$

2. Egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{3}{2} \sqrt{x}, & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Határozzuk meg a valószínűségi változó harmadrendű momentumát és harmadrendű centrális momentumát!

A valószínűségi változó harmadrendű momentuma:

$$M_3 = M(\xi^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot p(x) dx = \int_0^1 x^3 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x^{\frac{7}{2}} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3}.$$

A valószínűségi változó várható értéke:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx = \int_0^1 x \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

A valószínűségi változó harmadrendű centrális momentuma:

$$\begin{aligned} m_3 &= M([\xi - M(\xi)]^3) = M\left(\left[\xi - \frac{3}{5}\right]^3\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \left(x - \frac{3}{5}\right)^3 dx = \\ &= \int_0^1 \frac{3}{2} \sqrt{x} \left(x - \frac{3}{5}\right)^3 dx \approx 1,53. \end{aligned}$$

14.4 KARAKTERISZTIKUS FÜGGVÉNYEK

14.4.1 Komplex értékű valószínűségi változók

A valószínűségszámítás feladatainak megoldásánál az analízis legkülönbözőbb területei kerülnek felhasználásra. Sok feladatnál — különösen olyanoknál, melyek független valószínűségi változók összegezésével kapcsolatosak — előnyösen alkalmazható az ún. *karakterisztikus függvény*, amelynek elmélete az analízisben *Fourier-transzformáció* néven ismert. A továbbiakban röviden ismertetjük a karakterisztikus függvényt, annak néhány fontosabb tulajdonságát és néhány valószínűségszámításbeli alkalmazását.

A ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvényén az $e^{i\xi t}$ komplex értékű valószínűségi változó várható értékét értjük. Ezért mielőtt a karakterisztikus függvény tárgyalására térünk, foglalkoznunk kell a komplex értékű valószínűségi változókkal, és meg kell vizsgálnunk, hogy hogyan lehet a valós valószínűségi változókra érvényes tételeket a komplex valószínűségi változókra kiterjeszteni.

Definíció. A ξ és η valós valószínűségi változókkal képezett

$$\zeta = \xi + i\eta$$

menyiség *komplex értékű valószínűségi változó*.

E definíció következménye, hogy a ζ komplex értékű valószínűségi változó eloszlása a ξ és az η valószínűségi változók kétdimenziós eloszlásával jellemezhető.

A $\zeta = \xi + i\eta$ várható értéke

$$M(\zeta) = M(\xi) + iM(\eta).$$

A $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ és $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$ komplex értékű valószínűségi változók függetlenek, ha a (ξ_1, η_1) és a (ξ_2, η_2) síkbeli valószínűségi vektorváltozók függetlenek. Ez a definíció kiterjeszthető több komplex értékű valószínűségi változóra is.

Könnyen belátható, ha a $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ komplex értékű valószínűségi változók függetlenek, és léteznek az $M(\zeta_k)$ várható értékek ($k = 1, 2, \dots, n$), akkor

$$M\left(\prod_{k=1}^n \zeta_k\right) = \prod_{k=1}^n M(\zeta_k).$$

Ugyancsak könnyen igazolható tetszőleges ζ komplex értékű valószínűségi változó esetén

$$|M(\zeta)| \leq M(|\zeta|).$$

14.4.2 A karakterisztikus függvény értelmezése

Definíció. A ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a t valós paraméterű $e^{it\xi}$ komplex értékű valószínűségi változó várható értéke:

$$\varphi_{\xi}(t) = M(e^{it\xi}).$$

A karakterisztikus függvény tehát a t valós változó függvénye.

14.4.2.1 Diszkrét valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amely az x_k lehetséges értékeit p_k ($k = 1, 2, \dots$) valószínűségekkel veszi fel, akkor karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_{\xi}(t) = M(e^{it\xi}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{itx_k},$$

ahol a jobb oldali összeg mindig létezik.

14.4.2.2 Folytonos valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

Ha ξ folytonos valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye $p(x)$, akkor karakterisztikus függvénye

$$\varphi_{\xi}(t) = M(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot e^{itx} dx.$$

Ez az integrál nem más, mint a $p(x)$ sűrűségfüggvény ún. *Fourier-transzformáltja*.

Megjegyzések. 1. Azonos eloszlású valószínűségi változók karakterisztikus függvényei megegyeznek.

2. Minden diszkrét és sűrűségfüggvénnyel rendelkező folytonos eloszlásnak van karakterisztikus függvénye, ugyanis $|e^{it\xi}| = 1$ miatt a karakterisztikus függvényt definiáló $\sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{itx_k}$

összeg, illetve az $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{itx} dx$ integrál abszolút konvergens.

14.4.2.3 Többdimenziós valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

Legyen $\vec{\xi} = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ n -dimenziós valószínűségi vektorváltozó, amelynek sűrűségfüggvénye $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Vezessük be a

$$(\vec{\xi}, \vec{t}) = \sum_{k=1}^n \xi_k t_k,$$

$$\text{és } (\vec{x}, \vec{t}) = \sum_{k=1}^n x_k t_k$$

jelöléseket, ahol

$$\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$\text{és } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ezekkel a jelölésekkel a $\vec{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó *karakterisztikus függvénye* a

$$\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = M(e^{i(\vec{\xi}, \vec{t})}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\vec{x}, \vec{t})} \cdot p(\vec{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

n -változós függvény, feltéve, hogy a jobb oldali n -dimenziós improprius integrál létezik.

14.4.3 A karakterisztikus függvény néhány tulajdonsága

A következőkben a karakterisztikus függvényekre vonatkozó néhány egyszerű tételt bizonyítunk be.

1. Tétel. A ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvényére tetszőleges t esetén fennáll az

$$|\varphi_{\xi}(t)| \leq 1$$

egyenlőtlenség, viszont $t=0$ esetén az egyenlőséggel érvényes.

Bizonyítás. a) $\varphi_{\xi}(t) \leq 1$, ugyanis tetszőleges t esetén

$$|e^{it\xi}| = 1,$$

és felhasználva a komplex értékű valószínűségi változóra vonatkozó $|M(\zeta)| \leq M(|\zeta|)$ összefüggést

$$|\varphi_{\xi}(t)| = |M(e^{it\xi})| \leq M(|e^{it\xi}|) = M(1) = 1.$$

Így valóban

$$|\varphi_{\xi}(t)| \leq 1.$$

$$b) \quad \varphi_{\xi}(0) = 1.$$

Ugyanis a karakterisztikus függvény definíciója, valamint a várható értékre vonatkozó 1. tétel értelmében

$$\varphi_{\xi}(0) = [M(e^{it\xi})]_{t=0} = M(1) = 1.$$

2. Tétel. A $\varphi_{\xi}(t)$ karakterisztikus függvény a $-\infty < t < +\infty$ intervallumban egyenletesen folytonos.

E tételt — hosszadalmas volta miatt — itt nem bizonyítjuk.

3. Tétel. Tetszőleges a és b konstansok esetén az

$$\eta = a\xi + b$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

$$\varphi_{\eta}(t) = e^{it\eta} \cdot \varphi_{\xi}(at).$$

Bizonyítás. A karakterisztikus függvény definíciója és a várható értékre vonatkozó 4. tétel felhasználásával

$$\varphi_{\eta}(t) = M(e^{it\eta}) = M(e^{it(a\xi+b)}) = e^{itb} M(e^{iat\xi}) = e^{itb} \cdot \varphi_{\xi}(at).$$

4. Tétel. Két független valószínűségi változó összegének karakterisztikus függvénye megegyezik a valószínűségi változók karakterisztikus függvényeinek szorzatával. Vagyis

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t).$$

A tétel fordítottja nem érvényes: a $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t)$ egyenlőségből még nem következik ξ és η függetlensége.

Bizonyítás. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, akkor $e^{it\xi}$ és $e^{it\eta}$ is függetlenek, így a karakterisztikus függvény definíciója és a várható értékre vonatkozó 5. tétel értelmében

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = M(e^{it(\xi+\eta)}) = M(e^{it\xi} \cdot e^{it\eta}) = M(e^{it\xi}) \cdot M(e^{it\eta}) = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t).$$

E tételből teljes indukcióval következik az 5. tétel.

5. Tétel. Véges számú, teljesen független (tehát bármilyen csoportosításban független) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változó összegének karakterisztikus függvénye megegyezik a karakterisztikus függvények szorzatával

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) \dots \varphi_{\xi_n}(t),$$

illetve

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n \xi_i}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(t).$$

6. Tétel. Ha létezik a ξ valószínűségi változó első n momentuma: $M_k = M(\xi^k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), akkor a $\varphi_{\xi}(t)$ karakterisztikus függvény t -szerint n -szer differenciálható, és

$$\varphi_{\xi}^{(k)}(0) = i^k M(\xi^k),$$

ahol $k = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. a) Diszkrét valószínűségi változó esetén

$$\text{a) } \varphi_{\xi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{itx_k}$$

karakterisztikus függvény t -szerint l -szer ($l \leq n$) tagonként differenciálható, és a tagonként differenciált sor egyenletesen konvergens. Így

$$\varphi_{\xi}'(t) = i \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k e^{itx_k},$$

$$\varphi_{\xi}''(t) = i^2 \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k^2 e^{itx_k},$$

$$\varphi_{\xi}'''(t) = i^3 \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k^3 e^{itx_k},$$

...

...

$$\varphi_{\xi}^{(l)}(t) = i^l \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k^l e^{itx_k}.$$

E differenciálhányadosok értéke $t = 0$ esetén

$$\varphi_{\xi}^{(l)}(0) = i^l \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k^l,$$

illetve

$$\varphi_{\xi}^{(l)}(0) = i^l M(\xi^l),$$

ha $l = 1, 2, \dots, n$.

b) Folytonos valószínűségi változó esetén

A $p(x)$ sűrűségfüggvényre tett kikötések és e^{itx} korlátos volta miatt a karakterisztikus függvényt definiál

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{itx} dx$$

improprius integrál biztosan létezik. Ha a $M(\xi^k)$ k -ad rendű momentum ($k \leq n$) létezik, akkor szabad a t szerinti k -szori deriválást az integrálás műveletével felcserélni, és így

$$\varphi_{\xi}^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} p(x) dx.$$

A deriváltak $t = 0$ helyen vett értékei

$$\varphi_{\xi}^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot p(x) dx,$$

illetve

$$\varphi_{\xi}^{(k)}(0) = i^k \cdot M(\xi^k),$$

amivel állításunkat igazoltuk.

A 6. tétel következményei

a) A karakterisztikus függvény segítségével egyszerűen határozhatók meg a valószínűségi változó jellemzői: a várható érték, a szórás és a momentumok. A várható érték

$$M(\xi) = \frac{1}{i} \varphi_{\xi}'(0).$$

A szórás

$$D(\xi) = \sqrt{-\varphi''(0) + \varphi'^2(0)},$$

ugyanis

$$D(\xi) = \sqrt{M(\xi^2) - M^2(\xi)} = \sqrt{\frac{1}{i^2} \varphi''(0) - \frac{1}{i^2} \varphi'^2(0)} = \sqrt{-\varphi''(0) + \varphi'^2(0)}.$$

A momentumok

$$M(\xi^k) = \frac{1}{i^k} \varphi^{(k)}(0),$$

ahol $k = 1, 2, \dots, n$.

b) Ha ismert egy diszkrét valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, akkor az e^{itx_k} együttthatói megadják az x_k valószínűségi változóhoz tartozó A_k esemény valószínűségét

Példák

1. Kockadobásnál a dobott számot vezetve be valószínűségi változónak, határozzuk meg a valószínűségi változó eloszlásának karakterisztikus függvényét, a karakterisztikus függvény segítségével várható értékét és szórását.

A karakterisztikus függvény

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^6 p_k e^{itx_k} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 e^{itx_k} = \frac{1}{6} [e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} + e^{5it} + e^{6it}].$$

A várható érték és a szórás meghatározásához szükséges a karakterisztikus függvény $t = 0$ helyen vett első és második differenciálhányadosa.

$$\text{Mivel} \quad \varphi'(t) = \sum_{k=1}^6 p_k i x_k e^{itx_k} = \frac{i}{6} \sum_{k=1}^6 x_k e^{itx_k}$$

$$\text{és} \quad \varphi''(t) = \sum_{k=1}^6 p_k i^2 x_k^2 e^{itx_k} = -\frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 x_k^2 e^{itx_k},$$

$$\text{azért} \quad \varphi'(0) = \frac{i}{6} \sum_{k=1}^6 x_k = \frac{i}{6} [1+2+3+4+5+6] = i \frac{21}{6},$$

$$\text{és} \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{6} [1+4+9+16+25+36] = -\frac{91}{6}.$$

Ezek felhasználásával a valószínűségi változó várható értéke

$$M(\xi) = \frac{1}{i} \varphi'(0) = \frac{21}{6} = 3,5$$

és szórása

$$D(\xi) = \sqrt{-\varphi''(0) + [\varphi'(0)]^2} = \sqrt{\frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2} \approx 1,7$$

teljes megegyezésben régebbi eredményeinkkel.

2. Két kockával dobva határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok összege 8. Az egyik kockával dobott számot jelölje a ξ és a másik kockával dobott számot jelölje az η valószínűségi változó. Ekkor a tulajdonképpeni feladat $P(\xi + \eta = 8)$ meghatározása. A karakterisztikus függvény definíciója értelmében ezt az értéket a $(\xi + \eta)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye e^{8it} -t tartalmazó tagjainak együttthatója adja meg.

A karakterisztikus függvényre vonatkozó 3. tétel értelmében

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t),$$

$$\text{és mivel} \quad \varphi_{\xi}(t) = \sum_{k=1}^6 p_k e^{itx_k} = \frac{1}{6} [e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} + e^{5it} + e^{6it}],$$

$$\varphi_{\eta}(t) = \sum_{k=2}^6 p_k e^{itx_k} = \frac{1}{6} [e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} + e^{5it} + e^{6it}],$$

$$\text{azért} \quad \varphi_{\xi+\eta}(t) = \frac{1}{6^2} [e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} + e^{5it} + e^{6it}]^2.$$

A négyzetre emelést elvégezve e^{8it} -t tartalmazó tag adódik a 2. és 6. tag kétszeres szorzatából, a 3. és 5. tag kétszeres szorzatából és a 4. tag négyzetéből:

$$\frac{1}{6^2} \cdot 2(e^{2it} \cdot e^{6it}) = \frac{2}{6^2} e^{8it},$$

$$\frac{1}{6^2} \cdot 2(e^{3it} \cdot e^{5it}) = \frac{2}{6^2} e^{8it},$$

$$\frac{1}{6^2} (e^{4it})^2 = \frac{1}{6^2} e^{8it}.$$

Így az e^{8it} -t tartalmazó tagok együttthatója

$$\frac{2}{6^2} + \frac{2}{6^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{5}{6^2}.$$

A kérdéses valószínűség tehát

$$P(\xi + \eta = 8) = \frac{5}{36}.$$

3. Egy R sugarú kör alakú céltáblára lövéseket adunk le, és bevezetjük valószínűségi változónak a találat helyének a középponttól való távolságát. Határozzuk meg a valószínűségi változó eloszlásának karakterisztikus függvényét, továbbá annak segítségével várható értékét és szórását. Mivel előző számításaink alapján ezen eloszlás sűrűségfüggvénye

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{2x}{R}, & \text{ha } 0 < x \leq R, \\ 0, & \text{ha } x > R, \end{cases}$$

azért karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{itx} dx = \int_0^R \frac{2x}{R^2} e^{itx} dx.$$

A várható érték és szórás meghatározásához szükséges a karakterisztikus függvény $t = 0$ helyen vett első és második differenciálhányadosa.

$$\text{Mivel} \quad \varphi'(t) = \int_0^R \frac{2x}{R^2} i x e^{itx} dx = \frac{2i}{R^2} \int_0^R x^2 e^{itx} dx,$$

$$\varphi''(t) = \int_0^R \frac{2x}{R^2} (ix)^2 e^{itx} dx = -\frac{2}{R^2} \int_0^R x^3 e^{itx} dx,$$

azért

$$\varphi'(0) = \frac{2i}{R^2} \int_0^R x^2 dx = \frac{2i}{R^2} \cdot \frac{R^3}{3} = i \frac{2R}{3},$$

$$\varphi''(0) = -\frac{2}{R^2} \int_0^R x^3 dx = -\frac{2}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = -\frac{R^2}{2}.$$

Ezek felhasználásával a valószínűségi változó várható értéke

$$M(\xi) = \frac{1}{i} \varphi'(0) = \frac{2}{3} R,$$

és szórása

$$D(\xi) = \sqrt{-\varphi''(0) + [\varphi'(0)]^2} = \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{4R^2}{9}} = \sqrt{\frac{R^2}{18}} = \frac{R}{3\sqrt{2}}$$

teljes megegyezésben korábbi eredményeinkkel.

14.5 NÉHÁNY BECSLÉS A VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ VÁRHATÓ ÉRTÉK KÖRÜLI ELHELYEZKEDÉSÉRE

A valószínűségi változó eloszlásának ismeretében még nem tudjuk megmondani, hogy egy kísérlet folyamán a valószínűségi változó milyen értékeket vesz fel, de nagy számú kísérlet esetén becslést tudunk adni arra nézve, hogy milyen valószínűséggel ingadoznak a valószínűségi változó értékei a várható érték körül. Ilyen jellegű becslést adnak a következő tételek.

14.5.1 Markov-féle egyenlőtlenség

Tétel. Ha ξ nemnegatív értékű tetszőleges valószínűségi változó $M(\xi)$ véges várható értékkel, akkor minden $\lambda > 1$ valós szám esetén

$$P(\xi \geq \lambda M(\xi)) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

(Az egyenlőtlenség $0 < \lambda \leq 1$ esetén is fennáll, de arra triviális, mert bármilyen valószínűség értéke ≤ 1).

14.5.1.1 A diszkrét eloszlás esete

Bizonyítás. A várható érték definíciója értelmében

$$M(\xi) = \sum_i p_i x_i,$$

ha az összegezésből elhagyjuk azokat a tagokat, amelyekre $x_i < \lambda M(\xi)$, majd a visszamaradó tagokban az x_i -ket a velük egyenlő vagy kisebb $\lambda M(\xi)$ tagokkal helyettesítjük, akkor

$$M(\xi) \geq \sum_{x_i \geq \lambda M(\xi)} p_i x_i \geq \lambda M(\xi) \sum_{x_i \geq \lambda M(\xi)} p_i,$$

és mivel $\sum_{x_i \geq \lambda M(\xi)} p_i = P(\xi \geq \lambda M(\xi))$,

valóban

$$P(\xi \geq \lambda M(\xi)) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

14.5.1.2 A folytonos eloszlás esete

Ha az eloszlás sűrűségfüggvénye $p(x)$, akkor az előzőhöz hasonló gondolatmenetet követve:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} x \cdot p(x) dx \geq \int_{\lambda M(\xi)}^{+\infty} x \cdot p(x) dx \geq \lambda M(\xi) \int_{\lambda M(\xi)}^{+\infty} p(x) dx, \end{aligned}$$

mivel $\int_{\lambda M(\xi)}^{+\infty} p(x) dx = P(\xi \geq \lambda M(\xi))$,

valóban

$$P(\xi \geq \lambda M(\xi)) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Megjegyzés. A Markov-féle egyenlőtlenség gyakorlati szempontból előnyösebb alakja:

$$P(\xi > \alpha) \leq \frac{M(\xi)}{\alpha}.$$

Ezt az előző alakból $\lambda M(\xi) = \alpha$ helyettesítéssel ($\alpha > 0$) kapjuk.

E tétel alapján a várható érték ismeretében megbecsülhető annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó egy tetszőleges $\alpha > 0$ értéknél nagyobb értéket vegyen fel.

14.5.1.3 Csebisev-féle egyenlőtlenség

Tétel. Ha ξ tetszőleges valószínűségi változó, melynek létezik véges várható értéke, $M(\xi)$, és véges szórása, $D(\xi)$, akkor tetszőleges $\lambda > 1$ valós szám esetén:

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \lambda D(\xi)) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

(Az egyenlőtlenség $0 < \lambda \leq 1$ esetén is fennáll, de triviális.)

Bizonyítás. Minthogy

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \lambda D(\xi)) = P([\xi - M(\xi)]^2 \geq \lambda^2 D^2(\xi)) = \\ = P([\xi - M(\xi)]^2 \geq \lambda^2 M[\xi - M(\xi)]^2),$$

a jobb oldali kifejezésre alkalmazzuk a Markov-féle egyenlőtlenséget (ha ξ helyett a $[\xi - M(\xi)]^2$ valószínűségi változó és λ helyett λ^2 szerepel), és így valóban

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \lambda D(\xi)) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Megjegyzés. A Csebisev-egyenlőtlenség gyakorlati szempontból előnyösebb alakja

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \alpha) \leq \frac{D^2(\xi)}{\alpha^2};$$

ezt az előző alakból $\lambda D(\xi) = \alpha$ helyettesítéssel nyerjük. Ezen egyenlőtlenség jelentősége abban áll, hogy a szórás ismeretében ennek alapján megbecsülhető a várható értéktől való tetszőleges értéknél nagyobb abszolút eltérés valószínűsége. Bár ez a becslés gyakran igen durva, de bizonyos esetekben gyakorlatilag mégis jól hasznosítható.

14.5.1.4 A nagy számok törvényének Csebisev-féle alakja

Míg egyetlen valószínűségi változó felvehet a várható értéktől távol eső értékeket is (nagy lehet a szórása), addig nagy számú valószínűségi változó számtani közepének szórása csak igen kicsi. Így a számtani közép nagy valószínűséggel csak a várható értékhez igen közel eső értékeket vesz fel. Ez azzal magyarázható, hogy a számtani középben az ellenkező irányú véletlen eltérések lerontják egymást, és ennek következtében az eltérések összege — az esetek többségében — nagyon kicsi lesz. Ezt a tényt önti matematikai formába a valószínűségszámítás egyik legalapvetőbb tétele, a Csebisev-féle „nagy számok törvénye”.

Tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ páronként független valószínűségi változók $M_i(\xi_i)$ várható értékkel és $D_i(\xi_i)$ szórással ($i = 1, 2, \dots, n$), melyek mindegyike kisebb egy pozitív D számértéknél, akkor a valószínűségi változók

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$$

számtani közepe elég nagy n esetén 1-hez tetszőlegesen közeli valószínűséggel (gyakorlatilag bizonyosan) tetszőleges kis értékkel tér el várható értékeik számtani közepétől. Vagyis minden $\alpha > 0$ -hoz és $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N(\varepsilon, \alpha)$, hogy

$$P(|\xi - M(\xi)| \leq \alpha) \geq 1 - \varepsilon,$$

$$\text{ill. } P(|\xi - M(\xi)| \geq \alpha) \leq \varepsilon,$$

ha $n > N(\varepsilon, \alpha)$. Ezt a relációt a *nagy számok* (matematikai) törvényének szokás nevezni.

Bizonyítás. A

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$$

valószínűségi változó várható értéke

$$M(\xi) = \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_n}{n}$$

és szórásnégyzete

$$D^2(\xi) = \frac{D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_n^2}{n^2}.$$

Mivel feltételünk értelmében (és ez a feltétel a gyakorlatban mindig teljesül) mindegyik változó szórása $D_i < D$, azért

$$D^2(\xi) < \frac{nD^2}{n^2} = \frac{D^2}{n}.$$

Alkalmazva a Csebisev-egyenlőtlenséget, az $M(\xi)$ várható értékű ξ valószínűségi változóra és tetszőleges $\alpha > 0$ számértékre

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \alpha) \leq \frac{D^2}{n\alpha^2},$$

$$\text{ill. } P(|\xi - M(\xi)| \leq \alpha) \geq 1 - \frac{D^2}{n\alpha^2}.$$

Ha n elég nagy, akkor

$$\frac{D^2}{n\alpha^2} \delta < \varepsilon,$$

és ezzel állításunkat igazoltuk.

E tétel speciális esete, amikor a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ páronként független valószínűségi változók $M(\xi)$ közös várható értékkel és $D(\xi)$ szórással rendelkeznek. Ez esetben a valószínűségi változók számtani közepének várható értéke a közös várható érték

$$M(\xi) = M(\xi),$$

szórása pedig a közös szórás $\sqrt{n}$ -edrészre

$$D(\xi) = \frac{D(\xi)}{\sqrt{n}}.$$

Ekkor a nagy számok törvényének Csebisev-féle alakja

$$P(|\xi - M(\xi)| \leq \alpha) \geq 1 - \frac{D^2(\xi)}{n\alpha^2},$$

$$\text{ill. } P(|\xi - M(\xi)| \geq \alpha) \leq \frac{D^2(\xi)}{n\alpha^2}.$$

Megjegyzések. 1. A nagy számok törvényének Csebisev-féle alakja nem bizonyítja a $\bar{\xi}$ számtani átlag $M(\xi)$ -hez való konvergálását, hanem csak azt, hogy $n \rightarrow \infty$ esetén a legalább α nagyságú eltérések valószínűsége a 0-hoz tart.

2. A nagy számok törvényének Csebisev-féle alakja elméleti jelentőségén kívül gyakorlati szempontból is igen hasznos. Leggyakoribb alkalmazási területe a minőségellenőrzés. Nagy mennyiségű homogén anyag minőségellenőrzése — e tétel alapján — aránylag kevés anyag megvizsgálásával elvégezhető. (Például több száz tonna gabona minőségellenőrzésénél már 100–200 gramm lemérése is elég pontos becslést ad.)

3. A nagy számok törvénye nem mindig érvényes. Nem érvényes például akkor, ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók páronként függetlenek; létezik véges várható értékük, de nem létezik véges szórásuk.

14.5.1.5 A nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakja

A valószínűség statisztikus fogalmának bevezetésekor felhasználtuk azt a tényt, hogy egy esemény relatív gyakorisága bizonyos stabilitást mutat. Azt a számértéket, amely körül egy esemény relatív gyakorisága statisztikai ingadozást mutat, neveztük az illető esemény valószínűségének. Állításunk értelmében elég hosszú kísérletsorozat segítségével meghatározott relatív gyakoriság majdnem biztosan annál közelebb van a valószínűséghez, minél több egyedi kísérletből áll a kísérletsorozat. Ezt a tényt foglalja matematikai formába a nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakja.

Tétel. Egy esemény $\frac{k}{n}$ relatív gyakoriságának a p valószínűségtől való eltérése nagy biztonsággal tetszőlegesen kicsiny, ha a független kísérletek számát minden határon túl növeljük. Vagyis tetszőleges kis $\alpha > 0$ számérték esetén:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \alpha\right) \geq 1 - \frac{D^2(\xi)}{n\alpha^2},$$

illetve

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{D^2(\xi)}{n\alpha^2},$$

ahol a ξ valószínűségi változó, az egyes kísérletsorozatok eseményeihez rendelt $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók összege.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a nagy számok törvényének Csebisev-féle alakját arra az esetre, amikor a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók egymástól függetlenül végrehajtott kísérletsorozat egy-egy eseményével kapcsolatosak, mégpedig

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{ha az } A \text{ esemény a } k\text{-edik kísérlet folyamán bekövetkezik,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ezek a valószínűségi változók — mint független kísérletekhez rendelt valószínűségi változók — páronként függetlenek. Ezért a valószínűségi változók számtani közepe az A esemény relatív gyakorisága:

$$\bar{\xi} = \frac{k}{n} = r(A),$$

A számtani közép, várható értéke az A esemény valószínűsége:

$$M(\xi) = p = P(A),$$

így a nagy számok törvénye a

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \alpha\right) \geq 1 - \frac{D^2(\xi)}{n\alpha^2},$$

illetve

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{D^2(\xi)}{n\alpha^2}$$

alakot ölti, amivel állításunkat igazoltuk.

Példák

1. Egy zsák búza átlagos súlya 200 kp. Igen sok zsákot lemérve azt tapasztaljuk, hogy a szórás 0,5 kp. Becsüljük meg a 2 kp-nál nagyobb abszolút eltérések valószínűségét.

A feladat értelmében a zsákok súlyának várható értéke

$$M(\xi) = 200,$$

szórása

$$D(\xi) = 0,5,$$

így a Csebisev-egyenlőtlenség értelmében annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott zsák súlya a várható értéktől 2 kp-nál nagyobb értékkel tér el:

$$P(|\xi - 200| \geq 2) \leq \frac{0,5^2}{2^2} = \frac{1}{16}.$$

2. Hányszor kell egy kockát feldobnunk ahhoz, hogy a 6-os dobás relatív gyakorisága legalább 0,99 valószínűséggel 10^{-1} -nél kevesebbel térjen el a 6-os dobás valószínűségétől? Meg kell határozni, hogy milyen n értékekre áll fenn

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq 10^{-1}\right) \geq 0,99.$$

A nagy számok törvényének Bernoulli-alakja értelmében

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \alpha\right) \geq 1 - \frac{D^2(\xi)}{n\alpha^2},$$

ami azt jelenti, hogy a fenti egyenlőtlenség teljesül, ha

$$1 - \frac{D^2(\xi)}{n\alpha^2} \geq 0,99,$$

azaz ha

$$n \geq \frac{D^2(\xi)}{(1 - 0,99)\alpha^2}.$$

Mivel feladatunkban $\alpha = 10^{-1}$, és az egyes kísérletsorozatokhoz bevezetett valószínűségi változók közös szórása — a kockadobás szórására vonatkozó korábbi számításaink alapján — $D^2(\xi) = 2,91$, ezért

$$n \geq \frac{2,91}{0,01 \cdot 10^{-2}},$$

ill.

$$n \geq 29\,100.$$

Tehát legalább 29 100 kockadobást kell végezni ahhoz, hogy a 6-os dobás valószínűsége legalább 0,99 valószínűséggel térjen el 0,1-nél kisebb hibával a 6-os dobás relatív gyakoriságától.

3. Automata gép adagolja a mazsolát általunk ismeretlen súlyú csomagokba. Az adagolásnál — a gép hibájából — a valódi súly körüli ingadozás, a szórás 0,2 dkg. Legalább hány csomagot kell lemérnünk ahhoz, hogy a mérési eredmények számtani átlagának a valódi súlytól való eltérése leg-
alább 0,9 valószínűséggel 0,1 dkg-nál kisebb legyen?
Jelöljük $\bar{\xi}$ -sal a lemért csomagok súlyának számtani átlagát, és M -mel egy csomag általunk nem ismert valódi súlyát. A nagy számok Csebisev-féle tétele értelmében

$$P(|\bar{\xi} - M| \leq 0,1) \geq 1 - \frac{0,2^2}{n \cdot 0,1^2}.$$

A bal oldal biztosan nagyobb vagy egyenlő, mint 0,9, ha

$$1 - \frac{0,2^2}{n \cdot 0,1^2} \geq 0,9,$$

vagyis ha:

$$n \geq 40.$$

Ez azt jelenti, hogy legalább 40 csomagot kell lemérnünk ahhoz, hogy súlyuk számtani közepe legalább 0,9 valószínűséggel, 0,1-nél nagyobb pontossággal megadja egy-egy csomag valódi súlyát.

14.6 KOVARIANCIA ÉS KORRELÁCIÓS EGYÜTTTHATÓ

14.6.1 A valószínűségi változók kapcsolatának mértéke a valószínűségi változók jellemzői segítségével

A véletlen tömegjelenségek jól jellemezhetők az eseményekhez rendelt valószínűségi változók várható értéke és szórása segítségével. A valószínűség-számítás alkalmazása szempontjából további fontos kérdés egyes tömegjelenségek kapcsolatának kvantitatív jellemzése. Láttuk, hogy két tömegjelenség, illetve a hozzájuk rendelt ξ és η valószínűségi változók — függetlensége esetén:

$$M([\xi - M(\xi)][\eta - M(\eta)]) = 0.$$

Ha ξ és η nem függetlenek, akkor

$$M([\xi - M(\xi)][\eta - M(\eta)]) = c,$$

ahol általában $c \neq 0$. Éppen ezért célszerű a bal oldali kifejezéssel mérni két tömegjelenség, illetve két valószínűségi változó függőségét, kapcsolatának szorosságát. A kapott c -érték annál nagyobb, minél szorosabb a két valószínűségi változó közti kapcsolat.

Az
$$M([\xi - M(\xi)][\eta - M(\eta)]) = c$$

számértéket a ξ és η valószínűségi változók kovarianciájának nevezzük. A kovariancia — a ξ és η valószínűségi változók értékeinek önkényes választásától függően — a $(-\infty; +\infty)$ intervallumban tetszőleges értéket vehet föl. A valószínűségi változók kapcsolatának jellemzésére azonban olyan számértéket vezetünk be, amely csak rögzített határok között — az egyszerűség kedvéért a $[-1; 1]$ intervallumban — változhat. Ehhez egy új fogalom bevezetésére van szükség.

14.6.1.1 Korrelációs együttható

Definíció. Tetszőleges (nem konstans) pozitív szórással rendelkező ξ és η valószínűségi változók korrelációs együtthatója a

$$K_{(\xi, \eta)} = \frac{M([\xi - M(\xi)][\eta - M(\eta)])}{D(\xi) D(\eta)}$$

számérték.

A definícióból közvetlenül adódik, hogy a ξ és η valószínűségi változók korrelációs együtthatója tulajdonképpen a

$$\xi^* = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}$$

$$\eta^* = \frac{\eta - M(\eta)}{D(\eta)}$$

standardizált valószínűségi változók kovarianciája. Ugyanis

$$\begin{aligned} K_{(\xi, \eta)} &= \frac{M([\xi - M(\xi)][\eta - M(\eta)])}{D(\xi) \cdot D(\eta)} = M\left(\frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)} \cdot \frac{\eta - M(\eta)}{D(\eta)}\right) = \\ &= M(\xi^* \cdot \eta^*). \end{aligned}$$

A korrelációs együtthatónak — a valószínűségi változók függősége mértékszámának — fontosabb tulajdonságait a következő tételek fejezik ki.

1. Tétel. A korrelációs együttható értéke mindig +1 és -1 közé esik

$$|K_{(\xi, \eta)}| \leq 1.$$

Bizonyítás. A valószínűségi változó várható értékére vonatkozó tétel értelmében tetszőleges ξ és η valószínűségi változó esetén

$$|M(\xi \cdot \eta)| \leq \sqrt{M(\xi^2) \cdot M(\eta^2)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Így} \quad |K_{(\xi, \eta)}| &= \left| \frac{M([\xi - M(\xi)][\eta - M(\eta)])}{D(\xi) D(\eta)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{D(\xi) D(\eta)} \sqrt{M([\xi - M(\xi)]^2 \cdot M([\eta - M(\eta)]^2)}. \end{aligned}$$

Mivel

$$M([\xi - M(\xi)]^2) = D^2(\xi),$$

$$M([\eta - M(\eta)]^2) = D^2(\eta),$$

$$\text{azért} \quad |K_{(\xi, \eta)}| \leq \frac{D(\xi) \cdot D(\eta)}{D(\xi) \cdot D(\eta)} = 1.$$

2. Tétel. A korrelációs együttható abszolút értéke 1 akkor és csak akkor, ha 1 valószínűséggel fennáll a ξ és η valószínűségi változók lineáris kapcsolata.

Vagyis $|K_{\xi, \eta}| = 1$

akkor és csak akkor, ha

$$\eta = a\xi + b,$$

ahol $a \neq 0$ és b valós konstansok. Éspedig

$$K_{(\xi, \eta)} = \pm 1$$

aszerint, hogy

$$a \geq 0.$$

Bizonyítás. a) A feltétel szükséges. A $|K_{(\xi, \eta)}| = 1$ feltételből következik ξ és η lineáris kapcsolata.

Tegyük fel, hogy

$$K_{(\xi, \eta)} = 1,$$

($K_{(\xi, \eta)} = -1$ esetén a bizonyítás ugyanúgy végezhető), és alkalmazzuk a

$$\xi^* = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)},$$

$$\eta^* = \frac{\eta - M(\eta)}{D(\eta)}$$

jelölést. Ekkor

$$K_{(\xi, \eta)} = M(\xi^* \eta^*) = 1.$$

Továbbá a várható értékre vonatkozó 3. és 4. tétel felhasználásával:

$$M([\xi^* - \eta^*]^2) = M(\xi^{*2} + \eta^{*2} - 2\xi^* \eta^*) = M(\xi^{*2}) + M(\eta^{*2}) - 2M(\xi^* \eta^*).$$

Mivel ξ^* és η^* standard valószínűségi változók, és a standard valószínűségi változó esetén a másodrendű momentum megegyezik a szórással, amelynek értéke 1, azért

$$M(\xi^{*2}) = D^2(\xi^*) = 1,$$

$$M(\eta^{*2}) = D^2(\eta^*) = 1.$$

Ezen összefüggések, valamint

$$M(\xi^* \eta^*) = 1$$

felhasználásával

$$M([\xi^* - \eta^*]^2) = 1 + 1 - 2 = 0,$$

amiből 1 valószínűséggel

$$\xi^* - \eta^* = 0,$$

illetve

$$\xi^* = \eta^*.$$

A megfelelő kifejezéseket visszahelyettesítve:

$$\frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)} = \frac{\eta - M(\eta)}{D(\eta)}.$$

Ebből

$$\eta = M(\eta) + D(\eta) \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)},$$

ami $-M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$ konstans volta miatt — azt jelenti, hogy a ξ és η változók lineáris kapcsolata 1 valószínűséggel fennáll.

b) A feltétel elégséges. Az $\eta = a\xi + b$ feltételből következik, hogy $|K_{(\xi, \eta)}| = 1$. Ugyanis $\eta = a\xi + b$ esetén:

$$\begin{aligned} K_{(\xi, \eta)} &= \frac{M([\xi - M(\xi)][a\xi + b - M(a\xi + b)])}{D(\xi) \cdot D(a\xi + b)} = \\ &= \frac{M([\xi - M(\xi)][a\xi + b - aM(\xi) - b])}{D(\xi) \cdot |a| D(\xi)} = \\ &= \frac{M([\xi - M(\xi)][a\xi - aM(\xi)])}{|a| D^2(\xi)} = \\ &= \frac{aM[\xi - M(\xi)]^2}{|a| D^2(\xi)} = \\ &= \frac{aD^2(\xi)}{|a| D^2(\xi)} = \pm 1. \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } K_{(\xi, \eta)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } a > 0, \\ -1, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

3. Tétel. Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor korrelációs együtthatójuk nulla:

$$K_{(\xi, \eta)} = 0.$$

Bizonyítás. Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor $\xi - M(\xi)$ és $\eta - M(\eta)$ is függetlenek, és így szorzatuk várható értéke megegyezik várható értékük szorzatával. Ennek felhasználásával:

$$\begin{aligned} K_{(\xi, \eta)} &= \frac{M([\xi - M(\xi)][\eta - M(\eta)])}{D(\xi) D(\eta)} = \\ &= \frac{1}{D(\xi) \cdot D(\eta)} M[\xi - M(\xi)] \cdot M[\eta - M(\eta)] = 0. \end{aligned}$$

Ugyanis bármely valószínűségi változó esetén $M(\xi - M(\xi)) = 0$.

Megjegyzés. 1. A tétel nem fordítható meg. Ha két valószínűségi változó korrelációs együtthatója nulla, abból még nem következik a két változó függetlensége.

2. Ha $K_{(\xi, \eta)} = 0$, akkor a ξ és η változókat *korrelálatlanoknak* nevezzük. Korrelálatlanság esetén további vizsgálat szükséges a kapcsolat jellegének megállapítására.

14.7 NÉHÁNY KLASSZIKUS VALÓSZÍNŰSÉG- ELOSZLÁS ÉS JELLEMZŐIK

A következőkben ismertetünk néhány — gyakorlati szempontból fontos — valószínűség-eloszlást. A leggyakrabban előfordulók a visszatevés nélküli és visszatevéses mintavétellel kapcsolatos eloszlások, így elsősorban ezekkel foglalkozunk.

14.7.1 Diszkrét eloszlások

14.7.1.1 Hipergeometrikus eloszlás

Ha N munkadarab között S selejtes, akkor — korábbi számításaink alapján — annak valószínűsége, hogy egy n elemű visszatevés nélküli mintában k selejtes

$$P_k^{(n)} = \frac{\binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

(A felső index a mintavétel elemeinek számát jelöli.)

A $P_k^{(n)}$ számértékek egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez tartozó valószínűségek. Igazolható ugyanis, hogy

$$\sum_{k=0}^n P_k^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1,$$

amiből következik, hogy

$$0 < P_k^{(n)} < 1.$$

Bevezetve valószínűségi változónak a selejtes darabok számát, a valószínűségi változó

$$\xi = k,$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n$ értékeihez tartozó

$$P_k^{(n)} = P(\xi = k) = \frac{\binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

valószínűségek eloszlását *hipergeometrikus eloszlásnak* nevezzük.

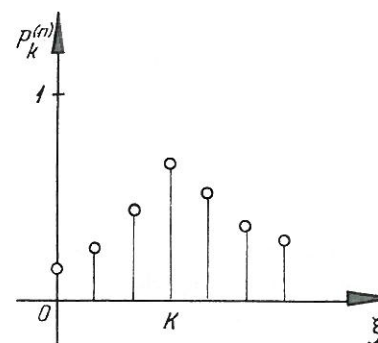
A hipergeometrikus eloszlásnak három paramétere van: N , S , n . Konkrét feladatok esetén ezek konkrét számértékek.

Megállapítható, hogy a $P_k^{(n)} = P(\xi = k)$ valószínűség értéke maximális, ha

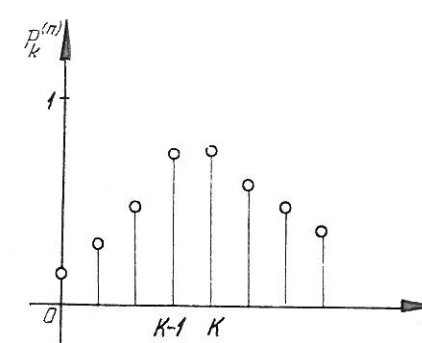
$$k = \left[(n+1) \frac{S+1}{N+2} \right].$$

Éspedig, ha az $(n+1) \frac{S+1}{N+2}$ érték nem egész szám, akkor egy maximális érték van (14.28 ábra); ha ez a szám egész, akkor ehhez és az ennél 1-gyel kisebb k értékhez tartozó valószínűségek megegyeznek, így két maximális valószínűség van (14.29 ábra).

A hipergeometrikus eloszlás grafikonja egy ideig növekszik, majd a maximális valószínűség, ill. valószínűségek után csökken (14.28 és 14.29 ábra).



14.28 ábra.



14.29 ábra.

A hipergeometrikus eloszlás eloszlásfüggvénye. Ha a ξ diszkrét valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású, akkor

$$F(x) = P(\xi = k < x) = \sum_{k < x} \frac{\binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

A hipergeometrikus eloszlás várható értéke. Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^n k \frac{\binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}} = n \cdot \frac{S}{N}.$$

Alkalmazva a selejtarányra vonatkozó

$$\frac{S}{N} = p$$

jelölést: $M(\xi) = np$.

A hipergeometrikus eloszlás szórása. A definíció értelmében:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \sum_{k=0}^n k^2 \frac{\binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}} - \left(n \frac{S}{N}\right)^2 =$$

$$= n \cdot \frac{S}{N} \left(1 - \frac{S}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}.$$

Ismét felhasználva az

$$\frac{S}{N} = p,$$

és $1 - \frac{S}{N} = 1 - p = q$ jelölést

$$D^2(\xi) = npq \frac{N-n}{N-1},$$

ill. $D(\xi) = \sqrt{npq \frac{N-n}{N-1}}.$

Megjegyzés. Visszatevés nélküli mintavétel esetén az egyes események — az egyes darabok kiemelései — nem függetlenek egymástól, mégis akárhányadik kiemelés esetén a selejthúzás valószínűsége ugyanaz. Éspedig akárhányadik kiemelés esetén a selejthúzás valószínűsége, p , megegyezik az $\frac{S}{N}$ selejtaránnyal. A hibátlan húzás valószínűsége, q pedig $\left(1 - \frac{S}{N}\right)$ -nel. Ugyanis A_k -val jelölve azt az eseményt, hogy a k -adik kiemelésre kapunk selejtet, nyilvánvaló, hogy

$$P(A_1) = \frac{S}{N},$$

és kimutatható, hogy tetszőleges $k = 2, 3, 4, \dots$ esetén

$$P(A_k) = \frac{S}{N}.$$

Ugyanis a teljes valószínűség tétele értelmében

$$P(A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2 | \bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_1),$$

tehát

$$P(A_2) = \frac{S-1}{N-1} \cdot \frac{S}{N} + \frac{S}{N-1} \cdot \frac{N-S}{N} = \frac{S(S-1) + S(N-S)}{N(N-1)} =$$

$$= \frac{S(N-1)}{N(N-1)} = \frac{S}{N},$$

és hasonlóan adódik, hogy $k = 3, 4, \dots, N$ esetén

$$P(A_k) = \frac{S}{N}.$$

Példa

Egy gyártmány 15%-a selejt. 1000 darabból 30 elemű visszatevés nélküli mintát véve, mennyi a selejtes darabok számának várható értéke, és mekkora a várható érték körüli ingadozás? Mivel a visszatevés nélküli mintavétel hipergeometrikus eloszlást eredményez, várható értéke:

$$M(\xi) = n \frac{S}{N}.$$

Feladatunkban a mintavétel elemeinek száma $n = 30$; a selejtes darabok száma $S = 1000 \cdot 0,15 = 150$; az összes munkadarab száma $N = 1000$, így

$$M(\xi) = 30 \frac{150}{1000} = 4,5.$$

(A várható értéket közvetlenül is meghatározhattuk volna. 30 elemű mintában a selejtes darabok várható száma a 30 darab 15%-a

$$30 \cdot 0,15 = 4,5.)$$

A várható érték körüli ingadozás, a szórás

$$D(\xi) = \sqrt{npq \frac{N-n}{N-1}}.$$

Mivel a selejthúzás valószínűsége $p = 0,15$, a hibátlan darab kiemelésének valószínűsége $q = 1 - p = 0,85$. Így

$$D(\xi) = \sqrt{30 \cdot 0,15 \cdot 0,85 \frac{970}{999}} \approx 1,93.$$

14.7.1.2 Polihipergeometrikus eloszlás (Többdimenziós eloszlás; a hipergeometrikus eloszlás általánosítása)

Ha N munkadarabból N_1 az 1. kategóriába, N_2 a 2. kategóriába, $\dots$, N_r az r -edik kategóriába tartozik $\left(\sum_{i=1}^r N_i = N\right)$, akkor — kombinatorikus megfontolások alapján — egyszerűen belátható annak a valószínűsége, hogy n visszatevés nélkül kiemelt munkadarabban k_1 az 1. kategóriába, k_2 a 2. kategóriába, $\dots$, k_r az r -edik kategóriába tartozik:

$$\left(\sum_{i=1}^r k_i = n\right).$$

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{(n)} = \frac{\binom{N_1}{k_1} \binom{N_2}{k_2} \dots \binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}.$$

Miután ezek egy teljes eseményrendszerhez rendelt valószínűségek,

$$\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_r = n} P_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{(n)} =$$

$$= \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_r = n} \frac{\binom{N_1}{k_1} \binom{N_2}{k_2} \dots \binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}} = 1,$$

és így bevezetve valószínűségi változóknak az egyes kategóriákból kiemelt darabok számát, a

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$$

valószínűségi változókhoz tartozó

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{(n)} = P_n(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r) = \frac{\binom{N_1}{k_1} \binom{N_2}{k_2} \dots \binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}$$

valószínűségek eloszlását *polihipergeometrikus eloszlásnak* nevezzük.

A polihipergeometrikus eloszlásban az egyes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ valószínűségi változók hipergeometrikus eloszlásúak, így ezzel az eloszlással nem szükséges külön foglalkozni.

Ennek az eloszlásnak több kategóriába sorolt áruk minőségellenőrzése során van fontos szerepe. (Ilyen kategóriák például: 1. hibátlan áruk; 2. hibás, de használható áruk; 3. használhatatlan áruk stb.)

14.7.1.3 Binomiális (Bernoulli-) eloszlás

Ha N munkadarab közül S selejtes, akkor — korábbi számításaink alapján — annak a valószínűsége, hogy n elemű mintát véve visszatevéssel, abban k számú selejt van

$$P_k^{(n)} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)^k \left(1 - \frac{S}{N}\right)^{n-k},$$

illetve bevezetve a selejthúzás valószínűségére a

$$p = \frac{S}{N}$$

és a hibátlan húzás valószínűségére a

$$q = 1 - p = 1 - \frac{S}{N}$$

jelölést:

$$P_k^{(n)} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

Ezek a valószínűségek egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez tartoznak:

$$\sum_{k=0}^n P_k^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = (p+q)^n = 1,$$

amiből következik, hogy

$$0 < P_k^{(n)} < 1.$$

Bevezetve valószínűségi változónak a mintavételben levő selejtes darabok számát, a valószínűségi változó

$$\xi = k$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n$ értékeihez tartozó

$$P_k^{(n)} = P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

valószínűségek eloszlását *binomiális* vagy *Bernoulli-eloszlásnak* nevezzük. Az elnevezés arra utal, hogy a $P_k^{(n)}$ számok $(p+q)^n$ binomiális tétel szerinti kifejezésének tagjai.

Binomiális eloszláshoz jutunk, valahányszor egymástól függetlenül n -szer megismételünk egy olyan kísérletet, amelynek két lehetséges kimenetele van: A és $\bar{A}$, melyek p és $q = 1-p$ valószínűségekkel következnek be, és keressük annak a valószínűségét, hogy az n kísérlet folyamán az A esemény k -szor következett be. A binomiális eloszlás két paramétert tartalmaz: n -et és p -t. Konkrét feladat esetén ezek konkrét számértékek.

Kimutatható, hogy a $P_k^{(n)} = P(\xi = k)$ valószínűség akkor maximális, ha

$$k = [(n+1)p].$$

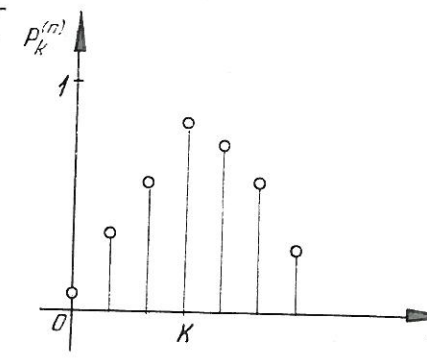
Éspedig ha $(n+1)p$ nem egész szám, akkor egy maximális érték van (14.30 ábra); ha pedig egész szám, akkor a $k = (n+1)p$, és az ennél 1-gyel nagyobb indexű valószínűségek megegyeznek, így két maximális érték van (14.31 ábra).

A binomiális eloszlás grafikonja az előbbiek alapján egy ideig növekszik, majd a maximális érték, ill. értékek után csökken.

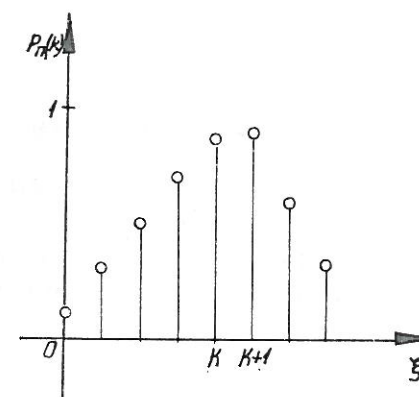
A binomiális eloszlás eloszlásfüggvénye az eloszlásfüggvény definíciója értelmében:

$$F(x) = B_k^{(n)}(x) = P(\xi = k < x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

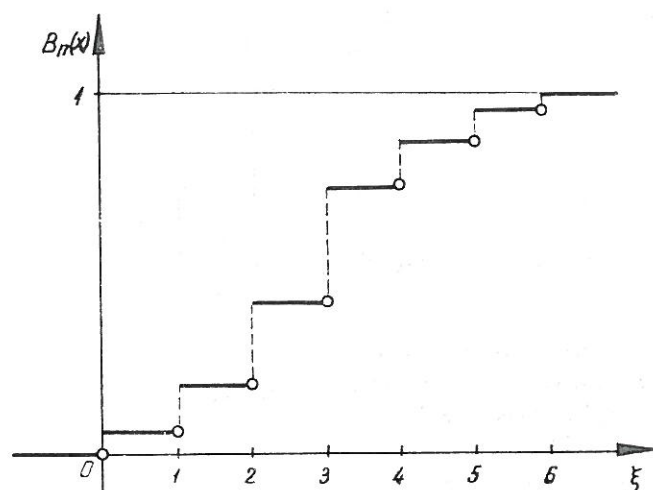
Ez monoton, nem csökkenő lépcsős függvény, melynek képe $n = 6, p = \frac{2}{3}$ esetén a 14.32 ábrán szemlélhető.



14.30 ábra.



14.31 ábra.



14.32. ábra.

A binomiális eloszlás várható értéke. A várható érték meghatározására a definíció

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^n k \cdot P_k^{(n)} = \sum_{k=0}^n k \cdot P(\xi = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

összeg kiszámítása helyett egy egyszerűbb módszert alkalmazunk. Az n kísérlethez tartozó ξ valószínűségi változót az egyes kísérletekhez tartozó valószínűségi változók összegeként állítjuk elő:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

ahol $\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik húzás selejt,} \\ 0, & \text{ha az } i\text{-edik húzás nem selejt,} \end{cases}$

és $i = 1, 2, \dots, n$.

Míthogy

$$M(\xi_i) = \sum_{k=0}^1 p_k x_k = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p,$$

$$M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n) = nM(\xi_i),$$

a binomiális eloszlás várható értéke

és $M(\xi) = np$.

A binomiális eloszlás szórása. Az előző megfontolást alkalmazva, és felhasználva, hogy a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók azonos eloszlású független valószínűségi változók

$$D^2(\xi) = D^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D^2(\xi_i) = nD^2(\xi_i).$$

Azonban

$$D^2(\xi_i) = M(\xi_i^2) - M^2(\xi_i) = \sum_{k=0}^1 (p_k x_k^2) - p^2 = p \cdot 1^2 + q \cdot 0^2 - p^2 = p(1-p) = pq,$$

így $D^2(\xi) = nD^2(\xi_i) = npq$.

Tehát a binomiális eloszlás szórása

$$D(\xi) = \sqrt{npq}.$$

Látható, hogy a binomiális eloszlás szórása akkor maximális, ha a $pq = p(1-p)$ szorzat maximális. Ez pedig akkor áll fenn, ha $p = \frac{1}{2}$. Tehát a szórásnégyzet, $D^2(\xi) = npq$ nem lehet nagyobb, mint $\frac{n}{4}$.

Megjegyzések. 1. A binomiális eloszlás várható értéke megegyezik a hipergeometrikus eloszlásával, szórása azonban valamivel nagyobb. Ez azt jelenti, hogy visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel esetén a várható értékek megegyeznek, de a véletlen ingadozások a visszatevésnél nagyobbak. A szórások közti eltérés csekély, ha a kísérletek száma, n , kicsiny az elemek számához, N -hez képest. A két szórás hányadosa $N \rightarrow \infty$ esetén 1-hez tart, ha $\frac{S}{N} = p$ értéke rögzített marad és n lassabban nő, mint N (vagyis $\lim_{nN \rightarrow \infty} \frac{n}{N} = 0$).

2. Ha a kísérletek száma, n , elég nagy, akkor a binomiális eloszlás legvalószínűbb értéke np . Tehát nagy n esetén a valószínűségi változó legvalószínűbb értéke megegyezik a várható értékével. Ez nem minden valószínűségi változónál van így; általában a legvalószínűbb érték jelentősen eltér a várható értéktől.

Tekintsük például a következő eloszlású valószínűségi változót:

ξ	0	5	10	20
p	0,5	0,2	0,1	0,2

Ennek legvalószínűbb értéke

$$\xi = 0,$$

várható értéke pedig

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^4 p_i x_i = 0 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,2 = 6.$$

Tehát valóban nagy a legvalószínűbb érték és a várható érték eltérése.

3. A binomiális eloszlás számolástechnikailag nehézkes. Ugyanis a gyakorlatban nagy n és k értékek fordulnak elő, ezekre pedig az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatók kiszámítása igen hosszadalmas. Ezért szokás a binomiális eloszlást más eloszlásokkal (Poisson-eloszlással, normális eloszlással) közelíteni, melyeket majd a későbbiek során ismertetünk.

Példák

1. Egy kerteszet területén a napi vízszolgáltatás 75%-os valószínűséggel kielégítő. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 6 napos munkahéten a vízszolgáltatás

a) csak 3 napon kielégítő,

b) legalább 3 napon kielégítő?

A szükségletnek megfelelő vízszolgáltatás valószínűsége $p = 0,75 = \frac{3}{4}$, így annak valószínűsége,

hogy a vízszolgáltatás nem kielégítő, $q = 1 - p = \frac{1}{4}$. Bevezetve valószínűségi változónak azon na-

pok számát, amikor a vízszolgáltatás kielégítő, az Bernoulli-eloszlású, így

a) annak valószínűsége, hogy a vízszolgáltatás 3 napon kielégítő:

$$P_3^{(6)} = P(\xi = 3) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0,132.$$

b) Annak valószínűsége, hogy a vízszolgáltatás legalább 3 napon kielégítő — felhasználva a Bernoulli-eloszlás eloszlásfüggvényét —

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 3) &= 1 - P(\xi < 3) = 1 - B_3^{(6)}(x) = 1 - \sum_{k=0}^2 P_k^{(6)} = \\ &= 1 - \left[\binom{6}{0} \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 + \binom{6}{1} \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^5 + \binom{6}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \right] = \\ &= 1 - \left[\frac{1}{4^6} + 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4^5} + \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{1}{4^4} \right] = 1 - \frac{1 + 18 + 135}{4^6} = \\ &= 1 - 0,0375 = 0,9625. \end{aligned}$$

Tehát kicsi a valószínűsége annak, hogy csak 3 napon (vagyis a munkanapok felében), de nagy a valószínűsége annak, hogy legalább 3 napon kielégítő a vízszolgáltatás.

2. Egy gyümölcstermelő szövetkezet I. és II. osztályú almát szállít ládákban különböző átvető helyekre. Egy-egy szállítmányban 10 láda van, amelyet válogatás nélkül, véletlenszerűen állítanak össze. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 10 ládás szállítmányban

a) nincs I. osztályú alma?

b) kevesebb, mint a felében van I. osztályú alma?

c) Mi a várható száma az I. osztályú almát tartalmazó ládákban, és mekkora e számérték körüli ingadozás, feltéve, hogy az összes ládák 60%-a tartalmaz I. osztályú almát?

Annak valószínűsége, hogy egy láda I. osztályú almát tartalmaz, $p = 0,6$, és így annak valószínűsége,

hogy II. osztályú almát tartalmaz: $q = 1 - p = 0,4$.

a) Annak valószínűsége, hogy 10 láda közt nincs I. osztályú

$$P_0^{(10)} = \binom{10}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^{10} \approx 0.$$

Tehát ez az eset gyakorlatilag kizárt.

b) Annak valószínűsége, hogy a ládák kevesebb, mint felében van I. osztályú alma

$$B_{50}^{(10)} = P(\xi < 5) = \sum_{k=0}^4 P_k^{(10)} = \sum_{k=0}^4 \binom{10}{k} 0,6^k \cdot 0,4^{10-k} \approx 0,16.$$

Tehát kb. 16% annak valószínűsége, hogy a ládák kevesebb, mint fele tartalmaz I. osztályú almát.

$B_{50}^{(10)}$ értékét táblázatból határoztuk meg, ugyanis közvetlen kiszámítása nagyon fáradságos lett volna (50 tagú összeget kellett volna előállítani, amely binomiális együtthatókat és magas hatványokat tartalmaz). A későbbiek során ugyanezt a feladatot egyszerűbb számítással — normális eloszlással közelítve — oldjuk majd meg.

c) Az I. osztályú almát tartalmazó ládák számának várható értéke:

$$M(\xi) = n \cdot p = 10 \cdot 0,6 = 6,$$

szórása

$$D(\xi) = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = \sqrt{2,4} \approx 1,55.$$

14.7.1.4 Polinomiális eloszlás (Többdimenziós eloszlás: a binomiális eloszlás általánosítása)

A binomiális eloszlás általánosítható olyan kísérletekre, amelyeknek kettőnél több lehetséges kimenetele van.

Tekintsünk egy olyan kísérletet, amelynek lehetséges eredményei, az $A_1, A_2, \dots, A_r$ esemé-

nyek $p_1, p_2, \dots, p_r$ valószínűségekkel következnek be $\left(\sum_{i=1}^r p_i = 1\right)$. A kísérletet n -szer, egy

mástól függetlenül végrehajtva keressük annak a valószínűségét, hogy az A_1 esemény

k_1 -szer, az A_2 esemény k_2 -ször, ..., az A_r esemény k_r -szer következik be $\left(\sum_{i=1}^r k_i = n\right)$.

A követelményeknek eleget tevő esemény többféleképpen valósulhat meg. Egy ilyen speciális kísérletsorozat az, amikor az első k_1 alkalommal az A_1 esemény, utána k_2 alkalommal az A_2 esemény, ..., végül az utolsó k_r alkalommal az A_r esemény következik be. E speciális kísérletsorozat megvalósulásának valószínűsége — a kísérletek függetlensége miatt —

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}.$$

Ugyanez a valószínűsége minden más, a követelményeknek eleget tevő, de a speciális sorrendtől eltérő kísérletsorozatnak. E kísérletsorozatok száma megegyezik a lehetséges permutációk számával, $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$ -sal, és mivel ezek egymást kizáróan következnek be, valószínűségeik összegeződnek, és így a kérdéses valószínűség:

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=n} P_{k_1 k_2 \dots k_r}^{(n)} = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r} \quad (k_1+k_2+\dots+k_r=n).$$

Ezek egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez tartozó valószínűségek, így

$$P_{k_1 k_2 \dots k_r}^{(n)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r} = 1.$$

Bevezetve valószínűségi változóknak az egyes események bekövetkezéseinek számát, a

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$$

valószínűségi változókhoz tartozó

$$\begin{aligned} P_{k_1 k_2 \dots k_r}^{(n)} &= P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r) = \\ &= \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r} \end{aligned}$$

valószínűségek eloszlását *polinomiális eloszlásnak* nevezzük. Az elnevezés onnan származik, hogy a $P_{k_1 k_2 \dots k_r}^{(n)}$ számok $(p_1 + p_2 + \dots + p_r)^n$ polinomiális tétel szerinti kifejtésének tagjai. A polinomiális eloszlásban a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ valószínűségi változók külön-külön binomiális eloszlásúak rendre $p_1, p_2, \dots, p_r$ paraméterekkel. Így ezzel az eloszlással nem szükséges részletesen foglalkozni.

A polinomiális eloszlás legfontosabb alkalmazási területe a termodinamika. (Maxwell–Boltzmann-statisztika.) Egy molekulának valamely cellában való elhelyezkedését kísérletnek tekintjük. Ha n molekulát helyezünk el N cellába, akkor bármelyik molekulának, bármelyik cellában való elhelyezkedésének valószínűsége

$$p_1 = p_2 = \dots = p_N = \frac{1}{N},$$

és annak a valószínűsége, hogy az I. cellába k_1 , a II. cellába $k_2, \dots$, az r -edik cellába k_r molekula kerül

$$P_{k_1 k_2 \dots k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} \cdot \frac{1}{N^n}.$$

Példa

Három különböző: A_1, A_2 és A_3 jelzésű autóbusz érkezik minden reggel ugyanarra a végállomásra.

Az A_1 jelzésű $\frac{1}{2}$, az A_2 jelzésű $\frac{1}{3}$, az A_3 jelzésű $\frac{1}{6}$ valószínűséggel érkezik elsőnek. Mi a valószínűsége annak, hogy 6 nap alatt mind a három autóbusz kétszer érkezik elsőnek?

A kérdéses valószínűség:

$$P_{2,2,2}^6 = \frac{6!}{2! 2! 2!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{6^2}.$$

14.7.1.5 Geometriai eloszlás

Tekintsünk egy olyan kísérletet, amelynek — a binomiális eloszláshoz hasonlóan — két lehetséges eredménye van, A és $\bar{A}$, és ezek p és $q = 1 - p$ valószínűségekkel következnek be. A kísérletet egymástól függetlenül többször megismételve keressük annak a valószínűségét, hogy az A esemény a k -adik alkalommal következik be először, vagyis hogy az első $(k-1)$ alkalommal az $\bar{A}$ esemény következett be.

A probléma az eddigiektől eltérő, amennyiben k tetszőlegesen nagy lehet; elvileg az is előfordulhat, hogy mindig csak az $\bar{A}$ esemény következik be. Így mindenekelőtt azt kell belátni, hogy a kérdéses események teljes eseményrendszer alkotnak. A_k -val jelölve azt az eseményt, hogy az első $(k-1)$ alkalommal az $\bar{A}$ és a k -adik alkalommal az A esemény következik be

$$P(A_k) = P_k = q^{k-1} \cdot p \quad (k = 1, 2, \dots).$$

A kísérletet sokszor — elvben végtelen sokszor — megismételve, a k különböző értékeihez tartozó A_k események egymást páronként kizárják, és a hozzájuk tartozó valószínűségek összege 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

feltéve, hogy $0 < p < 1$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a feltételeknek eleget tevő A_k események közül valamelyik majdnem biztosan bekövetkezik (0 valószínűségű az a lehetőség, hogy a kísérletet végtelen sokszor megismételve mindig az $\bar{A}$ esemény következzen be), és így a kérdéses eseményrendszer tágabb értelemben teljes. Bevezetve valószínűségi változónak annak a kísérletnek a sorszámt, amelynél az A esemény először következik be, a

$$\xi = k$$

$k = 1, 2, \dots$ értékekhez tartozó

$$P_k = P(\xi = k) = q^{k-1} \cdot p$$

valószínűségek eloszlását *geometriai eloszlásnak* nevezzük. Az elnevezés onnan ered, hogy a $q^{k-1} \cdot p$ tagok összege geometriai sort alkot.

Ez az eloszlás egy paramétert tartalmaz: p -t (ugyanis $q = 1 - p$).

A geometriai eloszlás eloszlásfüggvénye. Ha a ξ diszkrét valószínűségi változó geometriai eloszlású, akkor

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \sum_{k \leq x} p \cdot q^{k-1}.$$

A geometriai eloszlás várható értéke. A definíció értelmében:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dq^k}{dq} = p \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right) = \\ &= p \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right) = \frac{p}{(1-q)^2}, \end{aligned}$$

illetve $1 - q = p$ miatt a geometriai eloszlás várható értéke

$$M(\xi) = \frac{1}{p}.$$

(A számítás során felhasználtuk azt a tényt, hogy a geometriai sor a konvergenciatartomány belsejében tagonként differenciálható, és a tagok differenciálhányadosainak összege megegyezik a sorösszeg differenciálhányadosával.)

A geometriai eloszlás szórásnégyzete. A definíció értelmében:

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= M(\xi^2) - M^2(\xi) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k \right) - \frac{1}{p^2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} \cdot p \right) - \frac{1}{p^2} = \\ &= p \left(\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} \right) - \frac{1}{p^2} = \\ &= p q \left(\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} \right) + p \left(\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} \right) - \frac{1}{p^2} = \\ &= p q \frac{d^2}{dq^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) + p \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right) - \frac{1}{p^2} = \end{aligned}$$

$$= pq \frac{2}{(1-q)^3} + p \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q}{p^2} + \frac{p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q-1+p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Így a geometriai eloszlás szórása

$$D(\xi) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Példák

1. Egy pénzdarabot egymás után többször feldobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a 10. dobásra esik először az írásos oldalára?
Mind az írásos, mind a címeres oldalra való esés valószínűsége $\frac{1}{2}$. Bevezetve valószínűségi változónak azon dobás sorszámát, ahányadiknál először esik a pénz az írásos oldalára, az így definiált valószínűségi változó geometriai eloszlású. A kérdéses valószínűség

$$P(\xi = 10) = p_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{10}}.$$

2. Tegyük fel, 95% annak a valószínűsége, hogy egy traktor egy meghatározott napon működik.
a) Mi a valószínűsége annak, hogy munkába állításának napjától kezdve 17 napon át működik és a 18-adik napon leáll?
b) A beindítástól kezdve hányadik napon várható az első leállás és mekkora ingadozás lehet e körül?
Mivel $q = 0,95$ annak a valószínűsége, hogy a traktor működik, azért $p = 1 - q = 0,05$ annak a valószínűsége, hogy nem működik.
Vezessük be valószínűségi változónak azon nap sorszámát, amikor a traktor először áll le, így annak a valószínűsége, hogy a k -adik napon áll le először:

$$P(\xi = k) = p_k = 0,95^{k-1} \cdot 0,05.$$

Látható, hogy az így bevezetett valószínűségi változó geometriai eloszlású. Így
a) annak a valószínűsége, hogy a traktor a 18-adik napon áll le először

$$P(\xi = 18) = p_{18} = 0,95^{17} \cdot 0,05.$$

b) A várható érték

$$M(\xi) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,05} = 20,$$

tehát sok munkamenet esetén a beindítástól kezdve átlagban körülbelül a 20. napra esik az első leállás.

A szórás

$$D(\xi) = \frac{\sqrt{q}}{p} = \frac{\sqrt{0,95}}{0,05} \approx 19,4,$$

tehát a várható érték körüli ingadozás kb. 20.

14.7.1.6 Negatív binomiális eloszlás (A geometriai eloszlás általánosítása)

Tekintsünk egy kísérletet, amelynek két lehetséges kimenetele van, A és $\bar{A}$. Ezek p és $q=1-p$ valószínűségekkel következnek be. A kísérletet egymástól függetlenül többször megismételve keressük annak a valószínűségét, hogy az $(n+k)$ -adik kísérletnél következik be n -edszer az A esemény $n) \geq 1$.

A követelmény azt jelenti, hogy az $(n+k-1)$ kísérlet folyamán az A eseménynek – valamilyen sorrendben – $(n-1)$ -szer kell bekövetkeznie, míg az utolsó, az $(n+k)$ -adik alkalommal feltétlenül az A eseménynek. E követelményt kielégítő esemény többféleképpen jöhet létre aszerint, hogy az $(n+k-1)$ kísérlet közül melyik $(n-1)$ -ben következik be az A esemény. Az összes lehetőségek száma megegyezik $(n+k-1)$ elem $(n-1)$ -ed osztályú kombinációinak számával:

$$C_{n+k-1}^{(n-1)} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Jelöljük A_{n+k} -val azt az eseményt, hogy az $n+k$ -adik kísérletnél következik be az A esemény n -edszer, így

$$P(A_{n+k}) = p_{n+k} = \binom{n+k-1}{n-1} p^{n-1} \cdot q^k p = \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k,$$

ahol $k = 0, 1, 2, \dots$

Míthogy

$$\binom{n+k-1}{n-1} = (-1)^k \binom{-n}{k},$$

a kérdéses valószínűség

$$P(A_{n+k}) = p_{n+k} = (-1)^k \binom{-n}{k} p^n \cdot q^k.$$

Az A_{n+k} események tágabb értelemben teljes eseményrendszert alkotnak, mert páronként kizárják egymást, és igazolható, hogy valamelyik közülük majdnem biztosan bekövetkezik, mert valószínűségeik összege 1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} p^n \cdot q^k = p^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-q)^k = \frac{p^n}{(1-q)^n} = 1.$$

(Itt felhasználtuk, hogy tetszőleges valós x -ra

$$(1+x)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} x^k, \quad \text{ha } |x| < 1, \text{ így}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-q)^k = (1-q)^{-n},$$

mivel $0 < q < 1$).

Bevezetve valószínűségi változónak azon kísérlet sorszámát, melynél az A esemény n -edszer következik be, a

$$\xi = n+k$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ értékekhez tartozó

$$p_{n+k} = P(\xi = n+k) = (-1)^k \binom{-n}{k} q^k \cdot p^n$$

számértékek — mint egy teljes eseményrendszer elemi eseményeihez tartozó valószínűségek — valószínűségeloszlást alkotnak, melyet n -ed rendű *negatív binomiális eloszlás*nak nevezünk. Az elnevezés eredete: az egyes valószínűségeket a $p^n \frac{1}{(1-q)^n}$ kifejezés binomiális sorának tagjaiként kaphatjuk meg. A negatív binomiális eloszlás két paramétere: n és p .

A negatív binomiális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ha a ξ valószínűségi változó negatív binomiális eloszlású, akkor

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} (-q)^k p^n.$$

A negatív binomiális eloszlás várható értéke. Az n -ed rendű negatív binomiális eloszláshoz tartozó valószínűségi változót előállítjuk n számú független első rendű negatív binomiális eloszlású, vagyis geometriai eloszlású valószínűségi változó összegeként

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n,$$

ahol ξ_i jelöli annak a kísérletnek a sorszáma, amelyiknél az A esemény éppen i -edszer következett be.

Mivel $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ egymástól független valószínűségi változók, melyek mindegyikének várható értéke $\frac{1}{p}$, a várható értékre vonatkozó 4. tétel értelmében

$$M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = nM(\xi_i) = n \frac{1}{p} = \frac{n}{p}.$$

A negatív binomiális eloszlás szórása. Az előző megoldásoknak és annak figyelembevételével, hogy bármelyik ξ_i geometriai valószínűségi változó szórásnégyzete

$$D^2(\xi_i) = \frac{q}{p^2} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

alkalmazva a szórásra vonatkozó 4. tételt:

$$D^2(\xi) = \sum_{i=1}^n D^2(\xi_i) = n \frac{q}{p^2}.$$

Tehát a negatív binomiális eloszlás szórása

$$D(\xi) = \frac{\sqrt{nq}}{p}.$$

Példa

Tételezzük fel, hogy céllövésnél minden lövés 0,8 valószínűséggel találja el a céltáblát. Ha a lövések egymástól függetlenek, hány lövést kell átlagosan leadni ahhoz, hogy a céltáblát 10-szer találjuk el.

A céllövésnek, mint kísérletnek két eredménye lehetséges: A , a lövés talál (ennek $p = 0,8$ a valószínűsége); B , a lövés nem talál (ennek $q = 1 - p = 0,2$ a valószínűsége). Jelöljük ξ -vel annak a lövésnek a sorszáma, ahányadiknál a k -adik találat bekövetkezik; ekkor annak a valószínűsége, hogy a céltáblát 10-szer az $n+10$ -edik lövésnél találjuk el

$$P(\xi = n+10) = \binom{n+10-1}{10-1} 0,8^{10} 0,2^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Tehát ξ 10-ed rendű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó. Így várható értéke

$$M(\xi) = \frac{n}{p} = \frac{10}{0,8} = 12,5.$$

Tehát átlagosan 12,5 lövést kell leadnunk, hogy 10 találatunk legyen.

A feladatot általánosítva: ha a céllövésnél a találat valószínűsége p , akkor ahhoz, hogy k találat legyen, átlagosan $\frac{k}{p}$ számú lövést kell leadni.

14.7.1.7 Poisson-eloszlás (A binomiális eloszlás egy határeset)

Tekintsünk egy kísérletet, melynek két lehetséges kimenetele, az A és $\bar{A}$ esemény, p és $q = 1 - p$ valószínűséggel következik be. A kísérletet egymástól függetlenül n -szer megismételve keressük annak a valószínűségét, hogy az A esemény k -szor következik be, feltéve, hogy a kísérletek száma nagy, $n \rightarrow \infty$, miközben az A esemény bekövetkezésének valószínűsége, $p \rightarrow 0$, de úgy, hogy minden n esetén az np szorzat állandó érték maradjon, vagyis $np = \lambda > 0$ legyen.

A feltételekből következik, hogy a feladat tulajdonképpen a binomiális eloszlás határeset

$$n \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow 0, \quad np = \lambda > 0$$

esetén. Rögzített k esetén a kérdéses valószínűséget a binomiális eloszlás esetén meghatározott $P_k^{(n)}$ valószínűség fenti értelemben vett határértéke adja. Tehát — q helyébe $1 - p$ -t, p helyébe $\frac{\lambda}{n}$ -et írva és egyszerű átalakításokat végezve —

$$\begin{aligned} P_k^* &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_k^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{n \cdot n \cdot n \dots n} \frac{\lambda^k}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Ugyanis, ha k rögzített egész szám, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} = 1,$$

továbbá — mint az analízisből ismert —

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}.$$

Tehát a kérdéses valószínűség

$$P_k^* = \lim_{n \rightarrow \infty} P_k^{(n)} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Megjegyezzük, hogy

$$np = \lambda > 0$$

helyett elegendő csupán a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np = \lambda > 0$$

relációt feltételezni.

$$A \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_k^{(n)} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

reláció már ebből is következik.

Az ily módon nyert különböző k értékekhez tartozó P_k^* számértékek egy teljes eseményrendszert alkotnak, hiszen az elemi eseményekhez tartozó valószínűségek. Ugyanis a különböző k értékeknek megfelelő események páronként kizárják egymást és valószínűségeik összege 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

(Az igazolás során felhasználtuk, hogy minden x -re

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

amiből következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}.)$$

Bevezetve valószínűségi változónak az A esemény bekövetkezéseinek számát, a

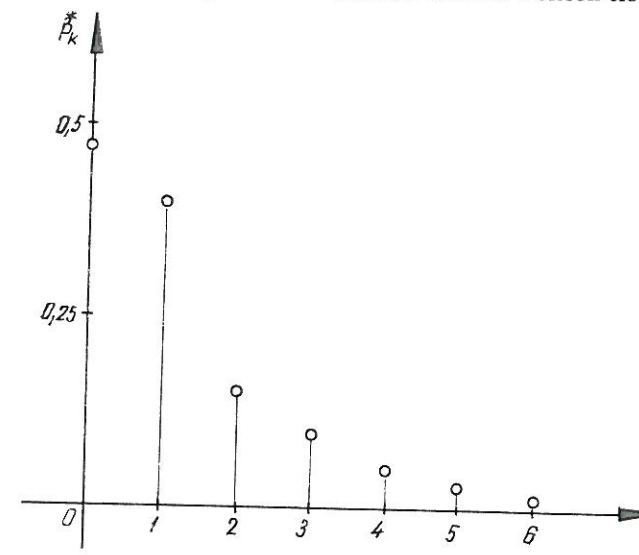
$$\xi = k$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ értékekhez tartozó

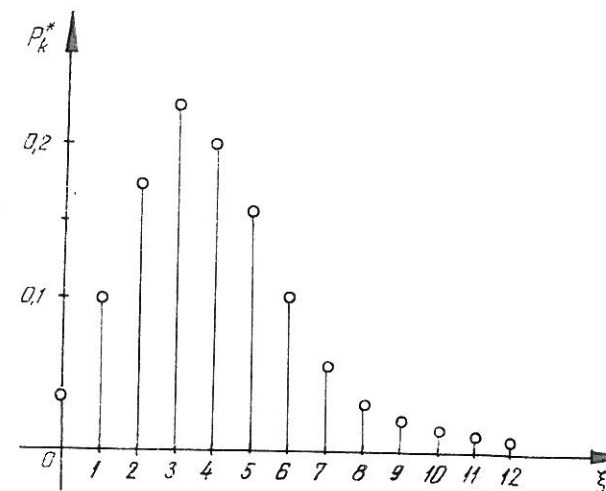
$$P_k^{(n)} = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

valószínűségek valószínűségeloszlást alkotnak, melyet λ paraméterű *Poisson-eloszlás*nak nevezünk.

A Poisson-eloszlás grafikonja. A hipergeometrikus és binomiális eloszláshoz hasonlóan ennél az eloszlásnál is megállapítható a maximális érték. A Poisson-eloszlásban P_k^* akkor



14.33 ábra.



14.34 ábra.

maximális, ha $k = [\lambda]$. Éspedig, ha λ nem egész, akkor csak egy maximális tag van, $P_{[\lambda]}^*$ (pl. a 14.34. ábrán $\lambda = 3,5$); ha λ egész, akkor $P_{\lambda}^* = P_{\lambda-1}^*$, és így ebben az esetben két maximális tag van. A maximális tagig vagy tagokig az eloszlás tagjai növekszenek, ezután csökkennek. Kivételt képez az az eset, mikor $[\lambda] = 0$ vagy $\lambda = 1$. Ebben az esetben a maximális érték az eloszlás első tagja, így a többi tag csökken (a 14.33 ábrán $\lambda = 0,6$).

A Poisson-eloszlás eloszlásfüggvénye. A definíció értelmében:

$$F(x) = P(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

A Poisson-eloszlás várható értéke. A definícióból közvetlen számítással adódik:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k \cdot x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Tehát Poisson-eloszlás esetén a várható érték az eloszlás paramétere. Így ezt az eloszlást szokás λ várható értékű Poisson-eloszlásnak is nevezni.

A Poisson-eloszlás szórása. A definícióból közvetlen számítással adódik:

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= M(\xi^2) - M^2(\xi) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k \cdot x_k^2 \right) - \lambda^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) - \lambda^2 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) - \lambda^2 = \\ &= \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \right) - \lambda^2 = \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \right) + \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \lambda^2 = \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \end{aligned}$$

Tehát a Poisson-eloszlás szórásnégyzete – akárcsak várható értéke – megegyezik az eloszlás λ paraméterével, és így szórása a paraméter négyzetgyöke:

$$D(\xi) = \sqrt{\lambda}.$$

Megjegyzések. 1. A definíció értelmében a Poisson-eloszlás a binomiális eloszlás közelítése. Kérdés, véges n érték esetén milyen pontos ez a közelítés, vagyis mekkora a hiba konkrét n , k és p esetén. Igazolható, hogy a relatív hiba

$$|H| < \frac{k^2(3k+4)}{12(n-k)^2} + \frac{1}{3}(n-k) \frac{p^3}{q^3},$$

amiből látható, hogy ha n nagy, de p és k kicsi, úgyhogy np is kicsi, akkor jó a közelítés. Ennek illusztrálására tekintsük $n = 500$ és $p = \frac{1}{365}$ esetén a binomiális és a Poisson-eloszlás néhány értékét és a megfelelő eltéréseket:

ξ	$B(x)$	$\dot{P}(x)$	$\Delta x = B(x) - \dot{P}(x)$
0	0,2537	0,2541	-0,0004
1	0,3484	0,3484	0
2	0,2388	0,2385	0,0003
3	0,1089	0,1089	0
4	0,0372	0,0372	0
5	0,0101	0,0102	-0,0001
6	0,0023	0,0023	0

2. A Poisson-eloszlással kapcsolatos feladatok megoldását könnyítik azok a táblázatok, melyek a Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\dot{P}_k$ valószínűségeit, illetve $\dot{P}(x)$ eloszlásfüggvényének értékeit tartalmazzák különböző λ és k értékek esetén.

3. A Poisson-eloszlás nemcsak a binomiális eloszlás közelítéseként alkalmazható, több valószínűség-számítási probléma pontos megoldásaként is fellép. Igen gyakori a természeti jelenségek, fizikai, kémiai, biológiai, csillagászati problémák körében.

a) Poisson-eloszlású az egy időintervallum alatt bekövetkező radioaktív bomlások száma. Annak valószínűsége, hogy t időtartam alatt k atom bomlik el

$$P(\xi = k) = \frac{(\mu t)^k \cdot e^{-\mu t}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

ahol μ az időegységre eső bomlások átlagos száma.

b) Poisson-eloszlású egy időintervallum alatt lehulló csillagok száma. Annak a valószínűsége, hogy t időtartam alatt k csillag hullik le

$$P(\xi = k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

ahol λ az időegység alatt lehulló csillagok átlagos száma.

c) Poisson-eloszlású egy T területen levő vértetek száma. Annak valószínűsége, hogy a T látómezejű mikroszkóp alatt éppen k vértet látható

$$P(\xi = k) = \frac{(\lambda T)^k \cdot e^{-\lambda T}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

ahol λ a területegységre eső vértetek átlagos száma.

d) Poisson-eloszlást követ az automatikus telefonközpontba egy időintervallum alatt beérkező telefonhívások száma. Annak valószínűsége, hogy egy t időtartam alatt k számú telefonhívás érkezik be

$$P(\xi = k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

ahol λ az időegységre eső telefonhívások átlagos száma.

Poisson-eloszlású egy folyadékban levő kolloid részecskék száma; homogén anyag adott részében található idegen részecskék, buborékok száma; elektroncsőben az izzó katódrol kilépő elektronok száma; textilgyárban adott időtartamra eső fonalszakadások száma stb.

Példák

1. Egy 450 oldalas könyvben 150 sajtóhiba van. Feltéve, hogy ezek véletlenszerűen oszlanak el, mi a valószínűsége annak, hogy egy találmásra felütött oldalon legalább két sajtóhiba van?

Az egy oldalon levő sajtóhibák átlagos száma: $\frac{150}{450} = \frac{1}{3}$. Tételezzünk fel Poisson-eloszlást ezzel az átlaggal, azaz

$$\lambda = np = \frac{1}{3};$$

$$\begin{aligned} \text{így} \quad P(\xi \geq 2) &= 1 - P(\xi < 2) = 1 - \sum_{k=0}^1 \frac{\frac{1}{3}^k \cdot e^{-\frac{1}{3}}}{k!} = 1 - \left(e^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}} \right) = \\ &= 1 - \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}} = 0,005. \end{aligned}$$

Tehát igen kicsi annak a valószínűsége, hogy egy oldalon 2 vagy annál több sajtóhiba van.

2. Egy magtárban rozs keveredett a búza közé 0,5%-os arányban. Melyik az a legkisebb k egész szám, amelyre 0,1-nél kisebb annak a valószínűsége, hogy egy 100 szemből álló véletlen mintában k , vagy annál több rozsszemet találunk?

Mivel $p = 0,005$, $n = 100$ és $\lambda = np = 0,5$, használhatunk Poisson-közelítést. Ebben az esetben feladatunk értelmében

$$P(\xi \leq k) \approx 0,1.$$

Ezzel ekvivalens

$$P(\xi \leq k-1) \approx 0,9,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\sum_{l=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^l}{l!} \approx 0,9,$$

$$\text{ill.} \quad \sum_{l=0}^{k-1} \frac{e^{-0,5} \cdot 0,5^l}{l!} \approx 0,9.$$

A Poisson-eloszlás eloszlásfüggvényének táblázatából:

$$k-1 = 1,$$

ahonnan

$$k = 2.$$

Tehát 0,1-nél kisebb annak a valószínűsége, hogy a 100 szemből álló mintában legalább 2 rozsszem van.

3. Egy üzemben naponta átlag 5 gép válik hibássá. A termelés szempontjából kritikus eset, amikor a hibás gépek száma ≥ 10 . Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy év 300 munkanapján legalább 12 napon következik be a 10 vagy ennél nagyobb számú gép meghibásodása.

A hibás gépek száma mint valószínűségi változó Poisson-eloszlást követ, melynek paramétere — feladatunkban — $\lambda = 5$. Így annak valószínűsége, hogy egy napon 10 vagy ennél több gép romlik el:

$$P(\xi \geq 10) = \sum_{k=10}^{\infty} \frac{5^k}{k!} e^{-5} = 0,0318,$$

mint az a Poisson-eloszlás táblázatából leolvasható. Mivel ez a valószínűség kicsi, és az évi munkanapok száma nagy, ugyancsak Poisson-eloszlással határozható meg annak a valószínűsége, hogy a 300 munkanapból legalább 12 alkalommal következik be a 10 vagy ennél több gép hibássá válása. Ennek a Poisson-eloszlásnak a paramétere:

$$\lambda = np = 300 \cdot 0,0318 = 9,54.$$

Tehát a keresett valószínűség

$$P \approx \sum_{k=12}^{\infty} \frac{9,54^k}{k!} e^{-9,54} \approx 0,25.$$

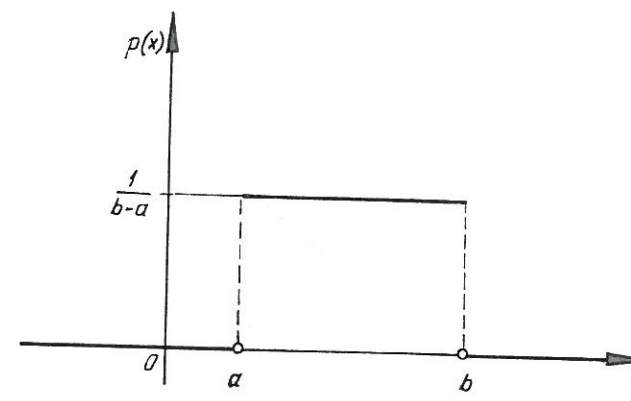
14.7.2 Folytonos eloszlások

14.7.2.1 Egyenletes eloszlás

A ξ folytonos valószínűségi változó az $(a; b)$ intervallumban egyenletes eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényének képe a 14.35 ábrán szemlélhető.



14.35 ábra.

Igazolható, hogy az így definiált $p(x)$ függvény kielégíti a sűrűségfüggvény tulajdonságait:

$$\text{a) } p(x) \geq 0,$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1.$$

Az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye. Ha a ξ folytonos valószínűségi változó az $(a; b)$ intervallumban egyenletes eloszlású, akkor eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}(x-a), & \text{ha } a < x < b, \\ 1, & \text{ha } x \geq b. \end{cases}$$

Ugyanis az eloszlásfüggvény definíciója értelmében,

ha $x \leq a$, akkor $p(x) = 0$ miatt

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = 0.$$

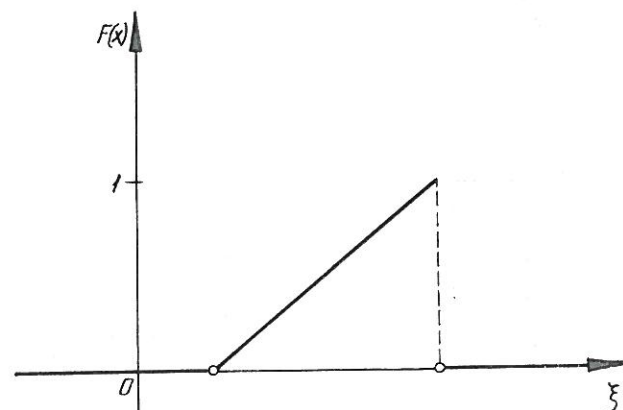
Ha $a < x < b$, akkor

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 \cdot dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a}(x-a).$$

Ha $x \geq b$, akkor

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 \cdot dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_b^x 0 \cdot dt = 1.$$

Az eloszlásfüggvény képét lásd a 14.36 ábrán.



14.36 ábra.

Az egyenletes eloszlás várható értéke. A definíció értelmében

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Tehát egyenletes eloszlás esetén a várható érték az $(a; b)$ intervallum középpontjába esik.

Az egyenletes eloszlás szórása. A szórásnégyzet definíciója értelmében

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12},$$

és így a szórás

$$D(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Tehát egyenletes eloszlás esetén a szórás arányos az intervallum hosszával.

Megjegyzés. Az egyenletes eloszlásnak van diszkrét változata is.

A ξ diszkrét valószínűségi változó az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számokon egyenletes eloszlású, ha ezek alkotják ξ lehetséges értékeit, és mindegyik egyenlően valószínű, vagyis

$$P(\xi = x_i) = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Végtelen sok különböző számértéken nem értelmezhető az egyenletes eloszlás. Ugyanis ha minden $x_1, x_2, \dots$ szám egyenlően valószínű volna, akkor a

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\xi = x_i) = 1$$

feltétel ellentmondást tartalmazna, hiszen $p > 0$ esetén ez az összeg végtelen, $p = 0$ esetén pedig nulla.

Az egyenletes eloszlású diszkrét valószínűségi változó várható értéke:

$$M(\xi) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

szórásnégyzete:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

Példák

1. Telefonhívásnál a tárcsázás után a kapcsolásig eltelt idő 10 másodperctől 110 másodpercig terjedhet. Vezessük be valószínűségi változónak a kapcsolás időtartamát, melyről tételezzük föl, hogy egyenletes eloszlású.

a) Írjuk föl a valószínűségi változó sűrűségfüggvényét és eloszlásfüggvényét.

b) Határozzuk meg a várható értéket és a szórást.

c) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a kapcsolásra legalább 1,5 percig kell várnunk.

Feladatunk értelmében a ξ valószínűségi változó a $[10; 110]$ intervallumban egyenletes eloszlású.

a) A valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 10, \\ \frac{1}{100}, & \text{ha } 10 < x < 110, \\ 0, & \text{ha } x > 110, \end{cases}$$

és eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 10, \\ \frac{x-10}{100}, & \text{ha } 10 < x \leq 110, \\ 1, & \text{ha } x > 110. \end{cases}$$

b) A valószínűségi változó várható értéke

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2} = \frac{10+110}{2} = 60 \text{ s} = 1 \text{ min},$$

és szórása

$$D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{110-10}{\sqrt{12}} = \frac{50\sqrt{3}}{3} \approx 28,71 \text{ s}.$$

c) Annak valószínűsége, hogy a kapcsolási idő legalább 1,5 perc = 90 másodperc:

$$P(\xi \geq 90) = 1 - P(\xi < 90) = 1 - F(90) = 1 - \frac{90-10}{100} = 0,2.$$

2. Egy műszer kör alakú számlapján a beosztások 1° -onként következnek, így mérésnél a mutatóhoz legközelebb eső egész számot olvassuk le.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a leolvasási hiba $10'$ -nél kisebb?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a leolvasási hiba a várható értéktől a szórásnál nagyobb értékkel tér el?

Bevezetve valószínűségi változónak a leolvasás abszolút hibáját és feltételezve, hogy az egyenletes eloszlású a $[0; 30]$ intervallumban (ui. a maximális hiba $30'$), az eloszlásfüggvény:

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{30}, & \text{ha } 0 < x \leq 30, \\ 1, & \text{ha } x > 30. \end{cases}$$

Ennek felhasználásával:

a) annak valószínűsége, hogy a hiba $10'$ -nél kisebb,

$$P(\xi < 10) = F(10) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

b) Minthogy a bevezetett valószínűségi változó egyenletes eloszlású

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2} = 15,$$

$$D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{15}{\sqrt{3}},$$

és így a kérdéses valószínűség

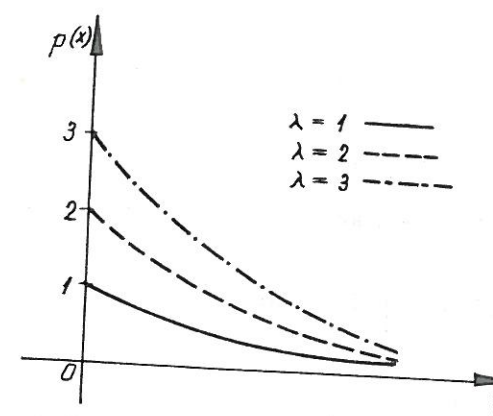
$$P\left(\xi > 15 + \frac{15}{\sqrt{3}}\right) = 1 - P(\xi \leq 23,77) = 1 - F(23,77) \approx 0,2.$$

14.7.2.2 Exponenciális eloszlás

A ξ folytonos valószínűségi változó exponenciális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

ahol λ pozitív állandó az eloszlás paramétere.



14.37 ábra

A sűrűségfüggvény képét a 14.37 ábrán mutatjuk be.

Igazolható, hogy a fenti definícióval megadott $p(x)$ függvény eleget tesz a sűrűségfüggvény követelményeinek:

$$a) \quad p(x) = \lambda e^{-\lambda x} > 0,$$

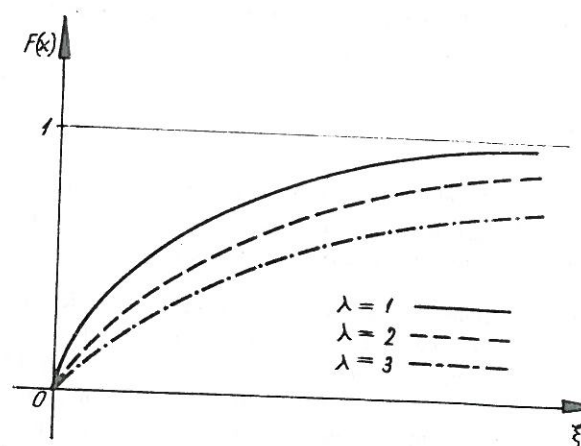
$$b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1.$$

Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ha ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Ugyanis, ha $x < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dt = 0.$$



14.38 ábra

Ha $x \geq 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Az eloszlásfüggvény képe a 14.38 ábrán tanulmányozható.

Az exponenciális eloszlás várható értéke. A várható érték definíciója értelmében

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

amit parciális integrálással nyerünk.

Ezzel megkaptuk az exponenciális eloszlás paraméterének valószínűségi számításai jelentését. A λ paraméter a várható érték reciproka. Így, ha ismert egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke, $M(\xi)$, akkor ezzel az eloszlás egyértelműen meghatározott, ugyanis ekkor sűrűségfüggvénye

$$p(x) = \frac{1}{M(\xi)} e^{-\frac{1}{M(\xi)} x}.$$

Az exponenciális eloszlás szórása. A szórásnégyzet definíciója értelmében

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

(az eredmény kétszeri parciális integrálással adódott). Így a szórás:

$$D(\xi) = \frac{1}{\lambda}.$$

Tehát exponenciális eloszlás esetén a szórás és a várható érték megegyezik. Mindkettő egyenlő az eloszlás paraméterének reciprokával:

$$M(\xi) = D(\xi) = \frac{1}{\lambda}.$$

A gyakorlatban az exponenciális eloszlásnak fontos szerepe van. Exponenciális eloszlást követnek a különféle várakozási idők (telefonhívásra, közlekedési eszközre), az élet-tartamok (radioaktív atomok, gépi berendezések élettartama) stb.

Megjegyzések. 1. Az exponenciális eloszlásnak van egy alapvető jellemző tulajdonsága, amely az eloszlást egyértelműen meghatározza. Az exponenciális eloszlású véletlen idő-tartamok „nem emlékeznek” arra, hogy mióta vannak folyamatban. Ha például egy textil-gépnél a szakadásmentes működési idő exponenciális eloszlású, akkor abból, hogy tudjuk, a gép már negyed órája szakadásmentesen működik, semmiféle következtetést nem vonhatunk le arra vonatkozólag, hogy mennyi ideig fog még szakadásmentesen működni. Tehát

bármely y időpontot is választunk ki — ha az a véletlen időtartam az y ideig nem ért véget — úgy tekinthető, mintha az egész folyamat az y időpontban kezdődött volna. Az exponenciális eloszlás ezen tulajdonsága a következőképpen igazolható.

Vizsgáljuk annak valószínűségét, hogy az esemény — pl. szakadásmentes működési idő — $(x+y)$ idő előtt véget érjen, ha már y ideje folyik. Ha ξ jelenti az esemény időtartamát, akkor a feladat a $P\left(\frac{\xi < x+y}{\xi \geq y}\right)$ feltételes valószínűség meghatározása. A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$P\left(\frac{\xi < x+y}{\xi \geq y}\right) = \frac{P(y \leq \xi < x+y)}{P(\xi \geq y)} = \frac{F(x+y) - F(y)}{1 - F(y)}.$$

$F(x+y)$ és $F(y)$ helyébe az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényét írva:

$$\begin{aligned} \frac{F(x+y) - F(y)}{1 - F(y)} &= \frac{1 - e^{-\lambda(x+y)} - (1 - e^{-\lambda y})}{1 - (1 - e^{-\lambda y})} = \frac{e^{-\lambda y}(1 - e^{-\lambda x})}{e^{-\lambda y}} = \\ &= 1 - e^{-\lambda x} = F(x). \end{aligned}$$

Tehát annak valószínűsége, hogy az esemény $(x+y)$ idő előtt véget érjen, ha már y ideje folyik

$$P\left(\frac{\xi < x+y}{\xi \geq y}\right) = F(x).$$

Ez azt jelenti, hogy a kérdéses valószínűség csak x -től függ, y -tól nem, és ugyanakkora, mintha az esemény nem folyna már y ideje, hanem éppen most kezdődött volna.

Ennek a jelenségnek az a magyarázata, hogy pl. a fonalszakadásnál a szakadás a fonal lokális tulajdonságaitól, illetve az igénybevétel pillanatnyi ingadozásaitól függ, és nem függ attól, hogy mennyi időn át nem volt előzőleg szakadás.

2. Az exponenciális eloszlás szoros kapcsolatban van az időparaméterrel arányos várható értékű Poisson-eloszlással.

Ezt a tényt a következő — itt bizonyításra nem kerülő — tételek igazolják.

1. Tétel. Ha a ξ valószínűségi változó a t idővel arányos várható értékű Poisson-eloszlású, akkor az az η valószínűségi változó, amellyel egy esemény bekövetkezéséig eltelt időintervallumot jellemezzük, exponenciális eloszlású.

2. Tétel. Ha az η exponenciális eloszlású valószínűségi változó egy eseménysorozat két tetszőleges eseménye között eltelt időtartamot jellemzi, akkor ezen eseménysorozatban a t hosszúságú időintervallumon bekövetkező események számát leíró ξ valószínűségi változó Poisson-eloszlású, s várható értéke t -vel arányos.

Láttuk, hogy t -vel arányos Poisson-eloszlással jellemezhető például a t időintervallum alatti radioaktív atomok bomlásának száma, az automatikus telefonközpontba beérkező hívások száma, az egységnyi térfogatból kilépő koloid részecskék száma, az izzó katódról kilépő elektronok száma, a fonalszakadások száma stb. Így — az előző két tétel értelmében — két atom radioaktív bomlása, két telefonhívás befutása, két koloid részecske kilépése, két elektron kilépése, két telefonhívás befutása közti időintervallum exponenciális eloszlású.

*

3. Igazolható, hogy n számú azonos paraméterű, exponenciális eloszlású — tehát $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$) sűrűségfüggvénnyel rendelkező — független valószínűségi változó összegének sűrűségfüggvénye

$$p_n(x) = \frac{\lambda^n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Ez az eredmény felhasználható egy fontos gyakorlati problémánál, a gépalkatrészek elhasználódására és kicserélésére vonatkozó számításoknál.

Tegyük fel, hogy egy gépalkatrész élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

sűrűségfüggvénnyel (tehát $\frac{1}{\lambda}$ várható élettartammal). Valahányszor egy alkatrész elhasználódik, azt egy újjal kell pótolni. Kérdés, hogy T idő alatt hány alkatrész cseréjére van szükség? Az, hogy $[0; T]$ időtartam alatt pontosan n cseréjére van szükség, azt jelenti, hogy az n -edik alkatrész elhasználódása a T időpont előtt, az $(n+1)$ -edik viszont a T időpont után következik be. Amennyiben $\xi_1, \xi_2, \dots$ jelöli az egyes alkatrészek élettartamát, a feladat a

$$P_n = P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n < T \leq \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1})$$

valószínűség meghatározása. Belátható, hogy

$$P_n = P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n < T) - P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} < T),$$

illetve $p_n(T)$ -vel és $F_n(T)$ -vel jelölve a $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét

$$P_n = F_n(T) - F_{n+1}(T).$$

Felhasználva, hogy

$$p_n(t) = \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!},$$

ha $t > 0$, és $n = 2, 3, \dots$, továbbá hogy

$$F_n(T) = \int_0^T p_n(t) dt,$$

parciális integrálással adódik, hogy

$$P_n = F_n(T) - F_{n+1}(T) = \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $[0; T]$ időtartam alatt szükségessé vált cserék száma (λT) paraméterű Poisson-eloszlású. Ha η -val jelöljük a cserélendő darabok számát, akkor — felhasználva a Poisson-eloszlás várható értékére kapott formulát —

$$M(\eta) = \lambda T.$$

Tehát a T időtartam alatt szükségessé vált cserealkatrészek száma λT .

Példák

1. Egy autóbusz $t = 0$ időpontban érkezik egy útkereszteződéshez. A várakozási idő átlagosan 20 másodperc. Bevezetve valószínűségi változónak a várakozási időt és feltételezve, hogy az exponenciális eloszlású, határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy

- a) a várakozási idő legfeljebb 5 másodperccel tér el az átlagos (várható) értéktől,
b) a várakozási idő a szórásnál nagyobb értékkel tér el a várható értéktől.

A feladat értelmében adott az exponenciális eloszlás várható értéke

$$M(t) = \frac{1}{\lambda} = 20.$$

Ebből meghatározható az eloszlás paramétere

$$\lambda = \frac{1}{20}.$$

Így az eloszlásfüggvény

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0, \\ 1 - e^{-\frac{t}{20}}, & \text{ha } t > 0, \end{cases}$$

és ennek segítségével a kérdéses valószínűségek meghatározhatók.

a) Az az esemény, hogy a várakozási idő az átlagos értéktől — vagyis a 20 másodperctől — legfeljebb 5 másodperccel tér el, azt jelenti, hogy a várakozási idő a (15; 25) intervallumba esik. Ennek a valószínűsége

$$\begin{aligned} P(15 < t < 25) &= F(25) - F(15) = \\ &= \left(1 - e^{-\frac{25}{20}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{15}{20}}\right) = e^{-0.75} - e^{-1.25} = 0,189. \end{aligned}$$

Tehát kb. 0,189 annak a valószínűsége, hogy a tilos jelzéshez érkezve az autóbusz várakozási ideje 15 és 25 másodperc közé esik.

b) Mivel exponenciális eloszlás esetén a szórás megegyezik a várható értékkel, feladatunknál

$$D(t) = M(t) = 20 \text{ másodperc.}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a várakozási idő a szórásnál nagyobb értékkel tér el az átlagos értéktől

$$\begin{aligned} P(t > 20 + 20) &= P(t > 40) = 1 - P(t \leq 40) = \\ &= 1 - F(40) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{40}{20}}\right) = e^{-2} \approx 0,135. \end{aligned}$$

Tehát kb. 0,135 annak a valószínűsége, hogy tilos jelzés esetén az autóbusz várakozási ideje 40 másodpercnél nagyobb.

2. Jelentse ξ azt az időtartamot, amely egy mezőgazdasági gép — pl. cséplőgép — beindításától az első műszaki hibáig eltelik. Tételezzük fel, hogy ξ exponenciális eloszlású, és várható értéke (két egymást követő műszaki hiba közt eltelt idő) 5 óra. Határozzuk meg, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy

- a) két egymást követő műszaki hiba közt eltelt idő 5 óránál kevesebb,
b) egy 8 órás munkanap alatt a gép egyszer sem áll le műszaki hiba miatt.
Feltételünk értelmében ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 5.

$$\text{így} \quad M(\xi) = \frac{1}{\lambda} = 5,$$

amiből az eloszlás paramétere:

$$\lambda = \frac{1}{5}.$$

Így az eloszlásfüggvény

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\frac{1}{5}x}, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

és ennek segítségével a kérdéses valószínűségek meghatározhatók.

a) Annak a valószínűsége, hogy két egymást követő műszaki hiba közt eltelt idő 5 óránál kevesebb

$$P(\xi < 5) = F(5) = 1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 5} = 1 - e^{-1} = 0,632.$$

b) Annak a valószínűsége, hogy 8 óras munkaidő alatt egyszer sem romlik el a gép

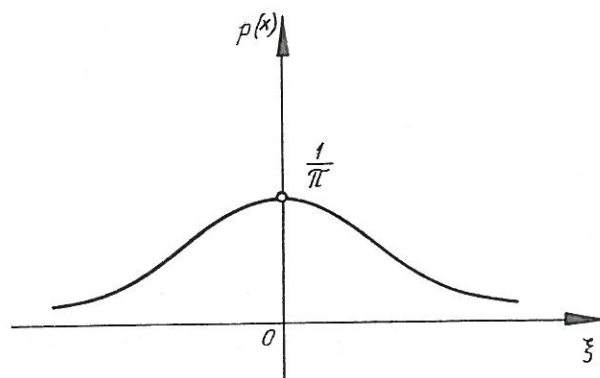
$$P(\xi > 8) = 1 - P(\xi \leq 8) = 1 - F(8) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 8}) = e^{-\frac{8}{5}} = 0,2.$$

14.7.2.3 A Cauchy-eloszlás

A ξ folytonos valószínűségi változó Cauchy-eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

A sűrűségfüggvény képe a 14.39 ábrán szemlélhető.



14.39 ábra

Igazolható, hogy az így definiált $p(x)$ függvény kielégíti a sűrűségfüggvény tulajdonságait:

a) $p(x) > 0,$

b)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \left[\arctg x \right]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

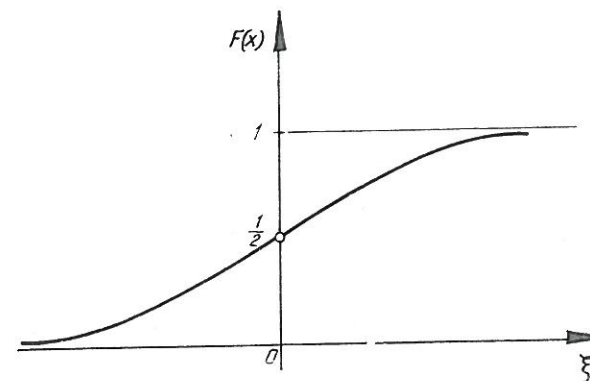
A Cauchy-eloszlás eloszlásfüggvénye. Ha a ξ folytonos valószínűségi változó Cauchy-eloszlású, akkor eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2}.$$

Ugyanis az eloszlásfüggvény definíciója értelmében

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2}.$$

Az eloszlásfüggvény képét a 14.40 ábrán mutatjuk be.



14.40 ábra

A Cauchy-eloszlás várható értéke. A definíció értelmében

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx,$$

és mivel ez az improprius integrál nem konvergens, a Cauchy-eloszlás várható értéke nem létezik. Ugyanez a helyzet a szórással is.

Példa

Egy fényforrásból a tőle 1 méter távolságra levő ernyőre fényt bocsátunk. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a fényforrás és az ernyő síkbeli vetületét. Tételezzük fel, hogy az ernyőre eső fénysugarak beesési szöge α , egyenletes eloszlású a $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ intervallumban, vagyis sűrűségfüggvénye

$$p(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a fénysugarak becsapódási helyének eloszlását (l. a 14.41 ábrát). Bevezetve x valószínűségi változónak a fénysugár becsapódási helyének (T) a fényforrás ernyőn levő vetületétől (P^*) való távolságát, rá és az α szögre a következő összefüggés áll fenn:

$$x = \overline{P^*T} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Ebből $\alpha = \arctg x,$

ill. $\Delta \alpha \approx \frac{1}{1+x^2} \Delta x.$

Mivel α egyenletes eloszlású,

azért $P(\alpha \leq \text{szög} \leq \alpha + \Delta \alpha) = \frac{1}{\pi} \Delta \alpha,$

és így $P(x \leq T \leq x + \Delta x) = P(\alpha \leq \text{szög} \leq \alpha + \Delta \alpha) = \frac{1}{\pi} \Delta \alpha \approx \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \Delta x.$

Amennyiben Δx és vele együtt $\Delta \alpha$ elég kicsi, felhasználva a sűrűségfüggvény definícióját

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq T \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2},$$

ami a Cauchy-eloszlás sűrűségfüggvénye.

Tehát a fénysugarak becsapódási helyének a vetületi ponttól való távolsága Cauchy-eloszlású.

14.7.2.4 Normális (Gauss-) eloszlás

Általános és standard normális eloszlás. A ξ folytonos valószínűségi változó normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty),$$

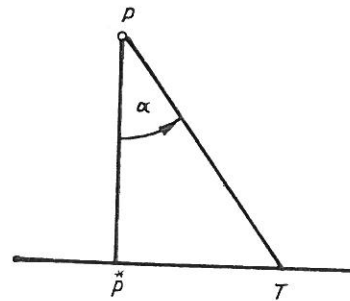
ahol m tetszőleges valós és σ pozitív állandó.

σ és m az eloszlás paraméterei, amelyeknek valószínűségi számítási jelentését később adjuk meg.

Az ily módon megadott $p(x)$ függvény rendelkezik a sűrűségfüggvény tulajdonságaival:

a) $p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} > 0,$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$



14.41 ábra

Ugyanis alkalmazva az

$$u = \frac{x-m}{\sigma}$$

helyettesítést:

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1.$$

(Itt felhasználtuk az analízisből ismert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$$

összefüggést.)

A sűrűségfüggvény görbéje a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

a) Szimmetrikus az $x = m$ pontra.

b) $x \rightarrow \pm \infty$ esetén aszimptótája az x -tengely.

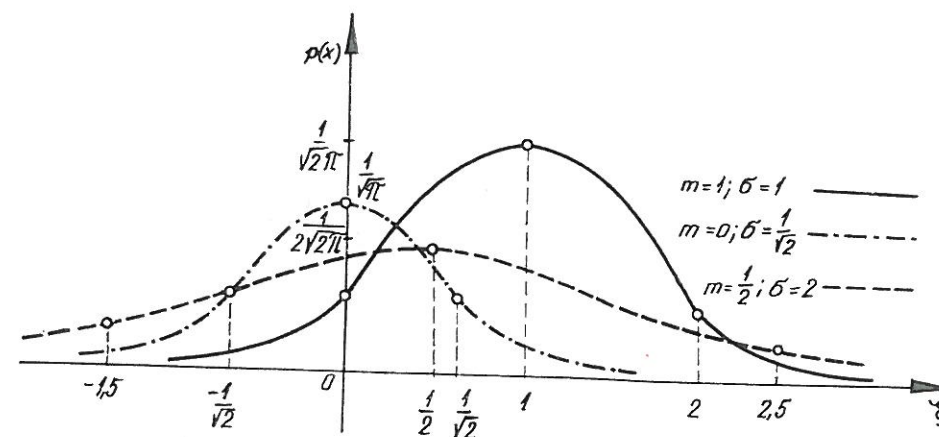
c) Maximuma van az $x = m$ pontban. E pontban a függvényérték $p(m) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}.$

d) Inflexiós pontjai vannak az $x = m \pm \sigma$ pontokban. E pontokban a függvényérték $p(m \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi} e}.$

Az m és σ paraméterű $p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ függvény a valószínűségi számításban igen

fontos, központi szerepet játszó függvény, amelynek görbét *Gauss-féle görbének*, *hiba-görbének*, vagy — alakja miatt — *haranggörbének* szokás nevezni (14.42 ábra).

Az ábrából is kitűnik, hogy a normális eloszlású valószínűségi változó annál nagyobb valószínűséggel vesz fel az $[m - \Delta x; m + \Delta x]$ intervallumba eső értékeket, minél kisebb a σ paraméter értéke.

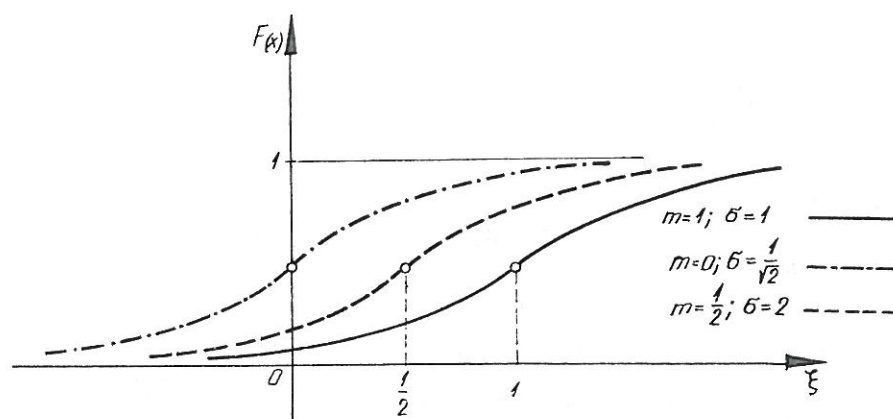


14.42 ábra

A normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ha a ξ folytonos valószínűségi változó normális eloszlású, akkor eloszlásfüggvénye

$$F(x) = N(x, m, \sigma) = P(\xi < x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Az eloszlásfüggvény képe különböző m és σ értékek esetén a következő (14.43 ábra):



14.43 ábra

A normális eloszlás várható értéke. A definíció értelmében

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Alkalmazva az

$$\frac{x-m}{\sigma} = u$$

helyettesítést:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma u + m) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \\ &+ \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \end{aligned}$$

Mivel $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$

és $\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0,$

adódik, hogy

$$M(\xi) = m.$$

Ezzel megkaptuk a normális eloszlás egyik paraméterének valószínűségi számítási jelentését. A normális eloszlás m paramétere az eloszlás várható értéke, centruma.

A normális eloszlás szórása. A szórásnégyzet definíciója értelmében

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(\xi))^2 p(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Alkalmazva az

$$\frac{x-m}{\sigma} = u$$

helyettesítést:

$$D^2(\xi) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

és parciálisan integrálva

$$D^2(\xi) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[-u e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right\}.$$

Mivel $\left[u e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$

és $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi},$

azért $D^2(\xi) = \sigma^2,$

ill. $D(\xi) = \sigma.$

Ezzel megkaptuk a normális eloszlás másik paraméterének valószínűségi számítási jelentését. A normális eloszlás σ paramétere az eloszlás szórása.

A normális eloszlással kapcsolatos feladatok megoldásánál szükség van az $N(x, m, \sigma)$ eloszlásfüggvény különböző helyeken felvett értékeire. Ugyanis annak valószínűsége, hogy egy folytonos valószínűségi változó az $[a; b]$ intervallumba esik

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a),$$

és így normális eloszlás esetén

$$P(a \leq \xi < b) = N(b, m, \sigma) - N(a, m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Mivel az $\int e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$

határozatlan integrál nem fejezhető ki elemi függvényekkel véges, zárt alakban, az $N(b, m, \sigma) - N(a, m, \sigma)$ érték közelítéssel történő meghatározása nehézkes volna. Célszerű tehát áttérni a számolástechnikailag egyszerűbben kezelhető $m = 0$ várható értékű és $\sigma = 1$ szórású standardizált normális eloszlásra.

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

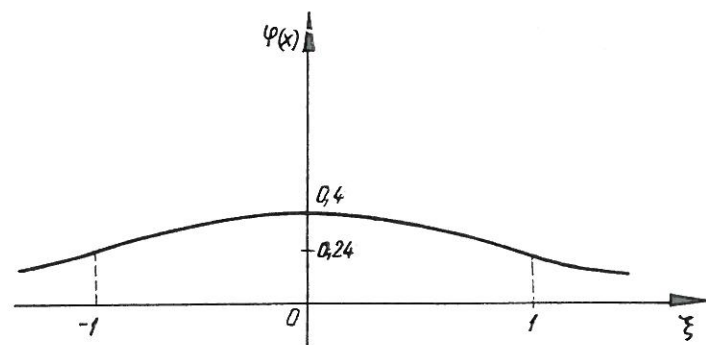
Ez a függvény az $x = 0$ pontra szimmetrikus páros függvény, amely maximális értékét az $x = 0$ helyen veszi fel, és pedig

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,4;$$

inflexió pontjai az $x = \pm 1$ helyek, ahol a függvényértékek

$$\varphi(\pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \approx 0,24.$$

Mindezek alapján a sűrűségfüggvény képe a 14.44 ábrán látható.

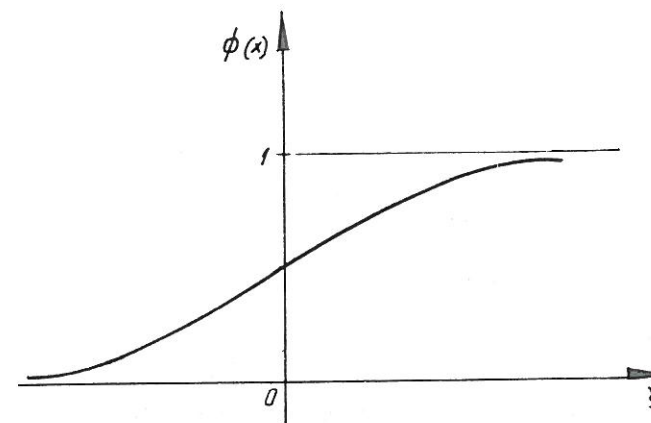


14.44 ábra

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye

$$\Phi(x) = N(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Az eloszlásfüggvény képe a 14.45 ábrán szemlélhető.

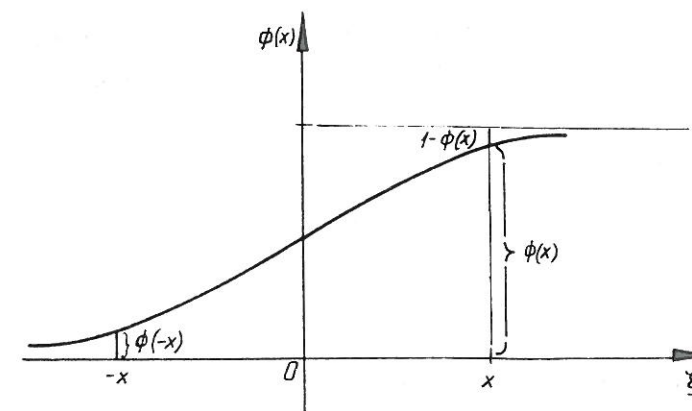


14.45 ábra

Az így értelmezett $\varphi(x)$ és $\Phi(x)$ függvényekre értéktáblázatok készültek, amelyek általában csak pozitív x értékekre vannak kiszámítva. Ezek azonban a

- (1) $\varphi(-x) = \varphi(x)$ és
(2) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

összefüggések miatt természetesen negatív x értékekre is használhatók. Az (1) összefüggés a $\varphi(x)$ függvény páros voltából következik. A (2) összefüggés — az eloszlás-



14.46 ábra

függvény definíciójának és szimmetriájának felhasználásával a következő módon igazolható:

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(x) dx = \int_x^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx = 1 - \Phi(x).$$

Ezt az összefüggést a 14.46 ábra szemlélteti.

Megjegyzések. 1. Az $M(\xi) = m$ várható értékű és $D(\xi) = \sigma$ szórású normális eloszlású, valamint az $M(\xi) = 0$ várható értékű $D(\xi) = 1$ szórású ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó közti kapcsolat:

$$\xi^* = \frac{\xi - m}{\sigma},$$

amiből következik, hogy a sűrűségfüggvények közti kapcsolat

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

és az eloszlásfüggvények közti kapcsolat

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Ezek felhasználásával tetszőleges m és σ paraméterű normális eloszlással kapcsolatos feladat a táblázatból leolvasható $\varphi(x)$, illetve $\Phi(x)$ függvény segítségével oldható meg.

2. Az általános és a standard normális eloszlás kapcsolatának figyelembevételével egyszerűen igazolható, igen kicsi annak a valószínűsége, hogy egy normális eloszlású valószínűségi változó a várható értéktől a szórás 3-szorosánál nagyobb értékkel térjen el.

Ugyanis

$$\begin{aligned} P(|x - M(\xi)| > 3D(\xi)) &= 1 - P(|x - M(\xi)| \leq 3D(\xi)) = \\ &= 1 - P(-3D(\xi) + M(\xi) \leq x \leq 3D(\xi) + M(\xi)) = \\ &= 1 - \{F[3D(\xi) + M(\xi)] - F[-3D(\xi) + M(\xi)]\}. \end{aligned}$$

Felhasználva $F(x)$ és $\Phi(x)$ kapcsolatát

$$\begin{aligned} P(|x - M(\xi)| > 3D(\xi)) &= 1 - [\Phi(3) - \Phi(-3)] = 1 - \Phi(3) + 1 - \Phi(3) = \\ &= 2 - 2\Phi(3), \end{aligned}$$

és $\Phi(3)$ értékét táblázatból leolvassva

$$P(|x - M(\xi)| > 3D(\xi)) = 2 - 2 \cdot 0,9986 \approx 0,003.$$

Ez azt jelenti, hogy a várható értéktől való, a szórás 3-szorosát meghaladó eltérések átlag az esetek 3 ezrelékében fordulnak elő, és így ekkora eltérések elhanyagolhatók.

Példák

1. Legyen egy normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 1, szórása 3. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a valószínűségi változó

- a $(-2; 1)$ intervallumba esik,
- 4-nél nagyobb értéket vesz fel?

Felhasználva az általános és a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényei közti kapcsolatot:

$$\begin{aligned} a) \quad P(-2 < x < 1) &= F(1) - F(-2) = \Phi\left(\frac{1-1}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2-1}{3}\right) = \Phi(0) - \Phi(-1) = \\ &= \Phi(0) - [1 - \Phi(1)]. \end{aligned}$$

A $\Phi(x)$ függvény értékeit táblázatból leolvassva

$$P(-2 < x < 1) = 0,5 + 0,8413 - 1 \approx 0,3413.$$

b) Az előző eljáráshoz hasonlóan:

$$P(x > 4) = P(4 < x < \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{x-1}{3}\right) - \Phi\left(\frac{4-1}{3}\right).$$

Mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1$, azért

$$P(x > 4) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 \approx 0,1587.$$

Tehát az 1 várható értékű és 3 szórású normális eloszlású valószínűségi változó kb. 0,3413 valószínűséggel esik a $(-2; 1)$ intervallumba, és kb. 0,1587 valószínűséggel vesz fel 4-nél nagyobb értéket.

2. Melyik normális eloszlású valószínűségi változó rendelkezik a tulajdonsággal, hogy a valószínűségi változó 95%-os valószínűséggel esik a várható érték egységsugarú környezetébe? Keressük azt a normális eloszlást, amelyre

$$P(|x - M(\xi)| < 1) = 0,95.$$

Ezzel ekvivalens

$$P(-1 + M(\xi) < x < 1 + M(\xi)) = 0,95,$$

illetve az

$$F(1 + M(\xi)) - F(-1 + M(\xi)) = 0,95,$$

összefüggés. Felhasználva $F(x)$ és $\Phi(x)$ kapcsolatát:

$$\Phi\left(\frac{1}{D(\xi)}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{D(\xi)}\right) = 0,95,$$

és alkalmazva a $\Phi\left(-\frac{1}{D(\xi)}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{D(\xi)}\right)$ összefüggést:

$$2\Phi\left(\frac{1}{D(\xi)}\right) - 1 = 0,95,$$

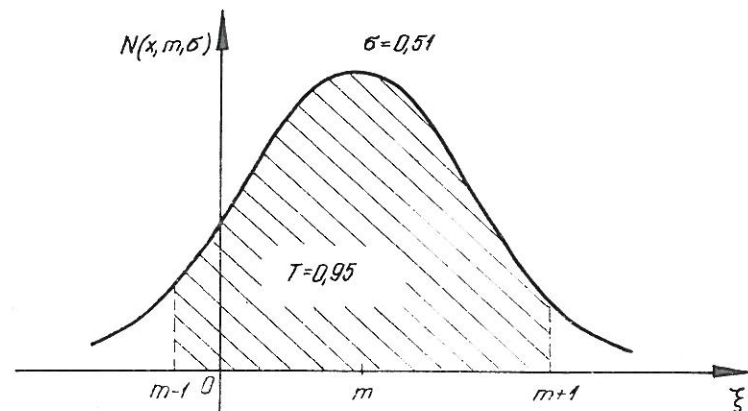
amiből $\Phi\left(\frac{1}{D(\xi)}\right) = 0,97.$

Mivel $\Phi(x)$ táblázatából leolvasható, hogy

$$\Phi(1,96) = 0,97,$$

azért $\frac{1}{D(\xi)} = 1,96,$

vagyis $D(\xi) \approx 0,51.$



14.47 ábra

Tehát minden $D(\xi) = 0,51$ szórású normális eloszlású valószínűségi változó olyan tulajdonságú, hogy a valószínűségi változó 95%-os valószínűséggel esik a várható érték egységsugarú környezetébe (14.47 ábra).

3. Egy tengely hossza normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető. Legyen e valószínűségi változó várható értéke 20 mm és a szórása 0,2.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a tengely hossza 19,7 és 20,3 mm közé esik?

b) Mekkora tűrést kell megengedni, hogy a legyártott tengelyek 96%-a megfelelő hosszúságú legyen?

Felhasználva az általános és standard normális eloszlás eloszlásfüggvényei közti kapcsolatot.

a) Annak valószínűsége, hogy a tengely hossza 19,7 és 20,3 mm közé esik:

$$\begin{aligned} P(19,7 \leq x \leq 20,3) &= F(20,3) - F(19,7) = \Phi\left(\frac{20,3-20}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{19,7-20}{0,2}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{0,3}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{-0,3}{0,2}\right) = 2\Phi(1,5) - 1 \approx 0,8664. \end{aligned}$$

b) Keressük, hogy mekkora lehet $\alpha > 0$ értéke, hogy

$$P(|x - 20| < \alpha) = 0,95$$

legyen. Ezzel ekvivalens a

$$P(-\alpha + 20 < x < \alpha + 20) = 0,95,$$

illetve az

$$F(\alpha + 20) - F(-\alpha + 20) = 0,95$$

összefüggés. Áttérve a $\Phi(x)$ függvényre:

$$\Phi\left(\frac{\alpha}{0,2}\right) - \Phi\left(-\frac{\alpha}{0,2}\right) = 0,95.$$

$$\text{ill. } 2\Phi\left(\frac{\alpha}{0,2}\right) - 1 = 0,95,$$

$$\text{amiből } \Phi\left(\frac{\alpha}{0,2}\right) = 0,97.$$

$\Phi(x)$ táblázatából leolvasható, hogy

$$\frac{\alpha}{0,2} = 1,96,$$

és így $\alpha = 0,4$.

Tehát kb. 0,8664 annak a valószínűsége, hogy a tengelyek hossza 19,7 és 20,3 mm közé essék, és kb. 0,4 mm lehet az a tűrés, hogy a tengelyek 95%-a megfelelő hosszúságú legyen.

4. Súlyméréskor általában a mért érték a tényleges értéktől különböző nagyságú eltérést mutat. Vezessük be valószínűségi változónak a mérési hibát. Ez tekinthető normális eloszlású valószínűségi változónak, melynek várható értéke 0, és a szórása legyen 60 gramm. Legalább hány mérést kell végezni ahhoz, hogy 0,9-nél nagyobb valószínűséggel legalább az egyik mérés hibájának az abszolút értéke ne lépje túl a 7,5 grammot.

Egyszerűbb meghatározni az ellentett esemény valószínűségét, vagyis annak a valószínűségét, hogy minden mérés hibájának abszolút értéke nagyobb 7,5 grammnál.

Annak a valószínűsége, hogy egy mérés hibájának abszolút értéke nagyobb 7,5 grammnál

$$P(|\xi| > 7,5) = 1 - P(|\xi| \leq 7,5) = 1 - [F(7,5) - F(-7,5)],$$

illetve áttérve a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényére

$$\begin{aligned} P(|\xi| > 7,5) &= 1 - \left[\Phi\left(\frac{7,5}{60}\right) - \Phi\left(-\frac{7,5}{60}\right) \right] = 1 - \Phi(0,125) + \Phi(-0,125) = \\ &= 2 - 2\Phi(0,125) = 2 - 2 \cdot 0,55 = 0,9. \end{aligned}$$

Az egyes mérések eredményei egymástól függetlenek, és így annak a valószínűsége, hogy n számú mérés esetén mindegyik mérés hibájának abszolút értéke nagyobb 7,5 grammnál

$$p_n = 0,9^n.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy legalább egy mérés hibája kisebb 7,5 grammnál:

$$p = 1 - p_n = 1 - 0,9^n.$$

Feladatunk értelmében erre kell teljesülnie az

$$1 - 0,9^n > 0,9,$$

$$\text{ill. } 0,9^n < 0,1$$

egyenlőtlenségnek, melyből az

$$n \log 0,9 < \lg 0,1,$$

$$\text{vagyis } n > \frac{\lg 0,1}{\lg 0,9} \approx 21,7$$

érték adódik.

Tehát legkevesebb 22 mérést kell végezni ahhoz, hogy legalább az egyik esetben a mérési hiba abszolút értéke 0,9 valószínűséggel kisebb legyen 7,5 grammnál.

A normális eloszlás mint a binomiális eloszlás közelítése. Célunk a binomiális eloszlás valószínűségeinek, vagyis a

$$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (q = 1-p)$$

mennyiségeknek közelítő meghatározása.

Láttuk, hogy ha

$$n \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow 0, \quad np = \lambda > 0,$$

akkor viszonylag kis k értékekre a binomiális eloszlás jól közelíthető a Poisson-eloszlással. Tehát ekkor:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \frac{e^{-np} (np)^k}{k!}.$$

Ha azonban p nem változik (azaz n növekedésével nem csökken), továbbá az n , k és $(n-k)$ számok egyidejűleg mindhárman nagyok, ez a közelítés nem alkalmazható. Figyelembe véve azonban, hogy az

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

binomiális együtthatókban szereplő mindhárom faktoriális közelítő kifejezésére felhasználható a Stirling-formula, ennek segítségével igazolható, hogy a binomiális eloszlás P_k valószínűségei az

$$n \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty, \quad (n-k) \rightarrow \infty, \quad np \rightarrow \infty$$

feltételek mellett jól közelíthetők az np várható értékű és $\sqrt{npq}$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvényének $x = k$ helyeken felvett értékeivel.

Moivre—Laplace-tétel. Ha a kísérletek száma n , és vele együtt az A esemény bekövetkezéseinek száma k is tart a végtelenhez, de úgy, hogy $\left| \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \right|$ korlátos marad, akkor a binomiális eloszlást jól közelíti a normális eloszlás. Vagyis:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty \\ np \rightarrow \infty}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}},$$

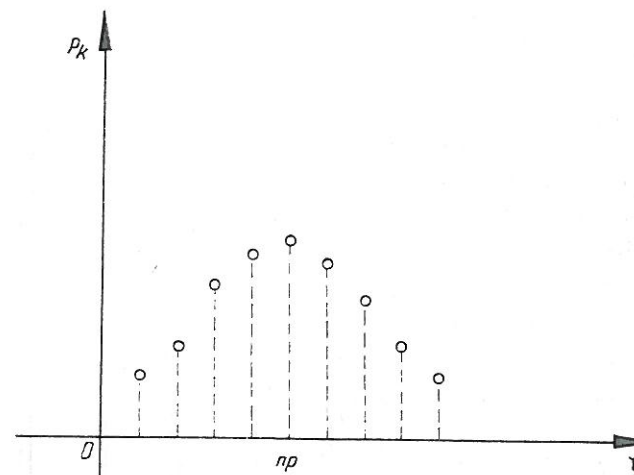
és ez a konvergenciafeltételek teljesülése esetén egyenletes.

A tétel bizonyítására itt nem térünk ki.

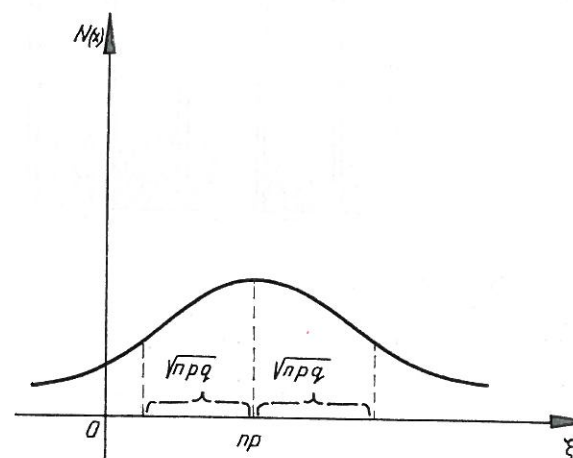
A tétel szemléletes jelentése: nagy n és nagy k érték esetén a binomiális eloszlás valószínűség-eloszlásának diagramját jól közelíti a normális eloszlás sűrűségfüggvénye (14.48 és 14.49 ábra).

A tétel következménye, hogy a binomiális eloszlás számítástechnikailag nehezen megoldható feladatai a fenti feltételek mellett jó közelítéssel számíthatók a standard normális eloszlás táblázatból leolvasható $\varphi(x)$ sűrűségfüggvénye és $\Phi(x)$ eloszlásfüggvénye segítségével. Ugyanis a binomiális eloszlás egyes tagjai jól közelíthetők a $\varphi(x)$ függvénnyel:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty \\ np \rightarrow \infty}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),$$



14.48 ábra



14.49 ábra

míg a binomiális eloszlás eloszlásfüggvénye a $\Phi(x)$ függvénnyel:

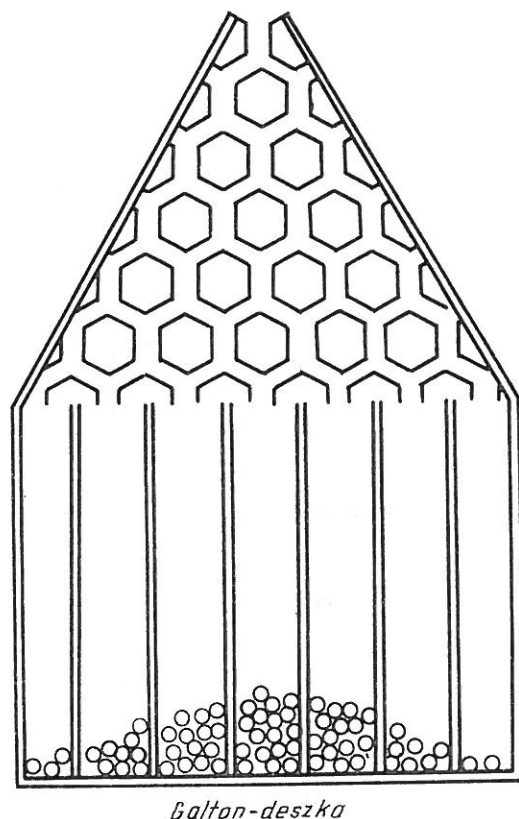
$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ np \rightarrow \infty}} \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Megjegyzés. A binomiális eloszlás normális eloszlással történő közelítése annál jobb, minél közelebb esik egymáshoz a p és q értéke.

Ha $p = q = \frac{1}{2}$, akkor ez a közelítés az úgynevezett Galton-deszkával kísérletileg is szemléltethető.

A Galton-deszka függőlegesen (vagy lejtősen) felállított szabályos háromszög alakú deszka, melyen n sorban szabályosan elrendezve ékek helyezkednek el, és pedig a k -edik sorban éppen k ék. A háromszög felső csúcsánál a háromszög magassága irányába eső csatornán golyók bocsáthatók a deszkára, amelyeket minden sorban egy ék $p = \frac{1}{2}$ valószínűséggel jobbra vagy balra térít el. Az utolsó sor alatt — tehát az $(n+1)$ -edik sorban — $(n+1)$ tartály található a golyók összegyűjtésére. Egy golyó akkor esik a balról számított k -edik tartályba ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), ha k sornál jobbra, a többi $(n-k)$ sornál pedig balra térítődik el. A binomiális eloszlás értelmében ennek az eseménynek a valószínűsége:

$$P_k = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{n-k}} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$



A tartályokban összegyűlt golyók az egyes tartályokat a számukkal arányos magasságig töltik meg (14.50 ábra), és ha elég nagy számú, golyót futtatunk le, akkor ezeknek egy Gauss-görbéhez hasonló eloszlása alakul ki.

Példák

1. Egy szabályos érmét 900-szor feldobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy az írásos oldalra esések száma pontosan 420. Bevezetve valószínűségi változónak azon dobások számát, amikor az érme az írásos oldalra esik, a kérdéses valószínűség:

$$P(\xi = 420) = p_{420} = \binom{900}{420} \left(\frac{1}{2}\right)^{420} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{480}$$

(ugyanis $p = \frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy az érme az írásos oldalra esik).

Mivel $n = 900$, $k = 420$, $np = 450$ elég nagy értékek, ez a valószínűség — mint a binomiális eloszlás tagja — jól közelíthető az $np = 450$ várható értékű és $\sqrt{npq} = 15$ szórással normális eloszlás sűrűségfüggvényének az $x = k = 420$ helyen felvett értékével. Vagyis:

$$p_{420} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} = \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(420-450)^2}{2 \cdot 225}}.$$

illetve áttérve a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényére

$$p_{420} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{15} \varphi(-2) = 0,066(1-0,054) = 0,0624.$$

Tehát igen kicsi — kb. 0,0624 — annak a valószínűsége, hogy a 900-szor feldobott érme pontosan 420-szor esik az írásos oldalra.

2. Egy tétel áru 70%-a hibátlan. Egyenként, visszatevéssel kiveszünk közülük véletlenszerűen 200 darabot. Számítsuk ki közelítőleg annak a valószínűségét, hogy 50-nél kevesebb esetben vettünk ki hibásat.

Bevezetve valószínűségi változónak a kivett hibás darabok számát, az binomiális eloszlású, amely az $x_k = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 200$) értékeket veheti fel. Jelöljük A -val azt az eseményt, hogy a kivett darab hibás, ill. $\bar{A}$ -sal, hogy a kivett darab hibátlan. Ezek valószínűsége

$$P(A) = p = \frac{30}{100} = \frac{3}{10},$$

$$\text{illetve } P(\bar{A}) = q = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}.$$

Így annak valószínűsége, hogy $\xi < 50$, a binomiális eloszlás eloszlásfüggvénye segítségével

$$P(\xi < 50) = B_{50} = \sum_{k=0}^{49} \binom{200}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{200-k}.$$

Ezt a valószínűséget az $np = 200 \cdot \frac{3}{10} = 60$ várható értékű és $\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}} = \sqrt{42}$ szórással normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényének $x = k = 50$ helyen felvett értékével közelítjük. A számítást a standard normális eloszlás $\Phi(x)$ eloszlásfüggvényének felhasználásával végezzük, és így

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{49} \binom{200}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{200-k} &\approx \Phi\left(\frac{50-60}{\sqrt{42}}\right) = \Phi\left(-\frac{10}{\sqrt{42}}\right) = \Phi(-1,54) = \\ &= 1 - \Phi(1,54) = 1 - 0,1219 = 0,8781. \end{aligned}$$

Tehát közelítőleg 0,8781 annak a valószínűsége, hogy a 200 elemű visszatevéses mintavételben 50-nél kevesebb hibás darab van.

14.7.2.5 Pearson-féle χ^2 -eloszlás

Definíció. n számú, egyforma standard normális eloszlású független valószínűségi változó ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$) négyzetösszegének eloszlása az n szabadságfokú χ^2 -eloszlás.

Az így definiált eloszlás — a

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$$

valószínűségi változó eloszlása — folytonos eloszlás.

Mivel a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek és mind standard normális eloszlásúak, a $\xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_n^2$ valószínűségi változók is függetlenek és azonos eloszlásúak. Ezért a $\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvénye a ξ_k^2 valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvénye segítségével határozható meg.

A ξ_k^2 valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_k(x) = P(\xi_k^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

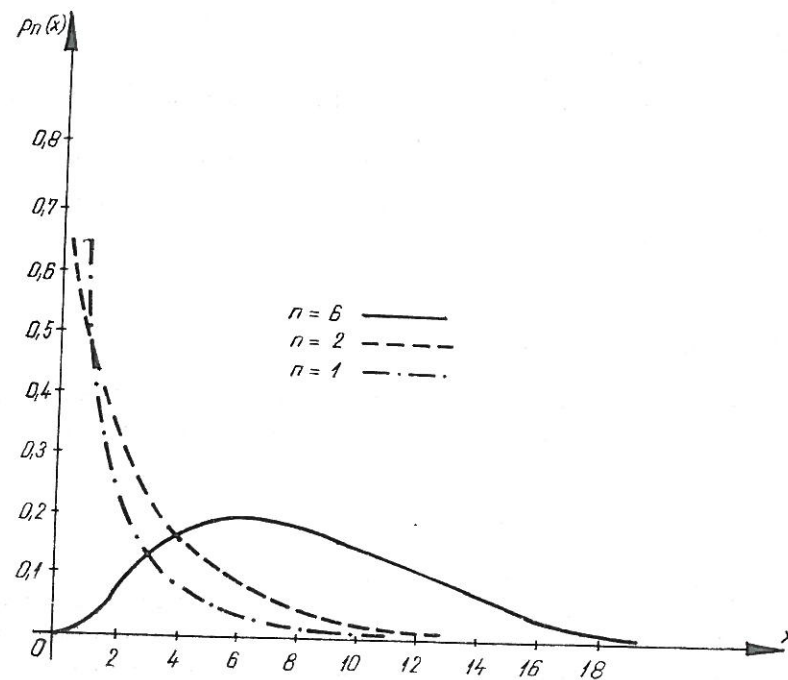
A ξ_k^2 sűrűségfüggvénye

$$p_k(x) = F'_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Ezek felhasználásával, teljes indukcióval bebizonyítható — de a bizonyítást hosszadalmas volna miatt itt nem közöljük —, hogy a χ^2 -eloszlás sűrűségfüggvénye

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

mely minden pozitív egész n -re fennáll.



14.51 ábra.

Az itt szereplő $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, a $p = \frac{n}{2}$ számértékre vett ún. *gamma-függvény*, mely tetszőleges p -re a következő improprius integrállal van értelmezve:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx.$$

A χ_n^2 -eloszlás sűrűségfüggvényét $n = 1, 2, 6$ esetekben a 14.51 ábra szemlélteti.

A χ_n^2 -eloszlás eloszlásfüggvénye

$$F_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt.$$

A χ_n^2 -eloszlás várható értéke. A várható érték definíciójának és a $\xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_n^2$ változók függetlenségének felhasználásával

$$M(\chi^2) = M(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) = nM(\xi_k^2).$$

Mivel a ξ_k valószínűségi változók standard normális eloszlásúak, $M(\xi_k) = 0$ és $D^2(\xi_k) = M(\xi_k^2) - M^2(\xi_k) = 1$. Ebből következik, hogy $M(\xi_k^2) = 1$, és így

$$M(\chi^2) = n.$$

A χ_n^2 -eloszlás szórása. A szórásnégyzet definíciójának és a $\xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_n^2$ változók függetlenségének felhasználásával

$$D_n^2(\chi^2) = D^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) = nD^2(\xi_k^2) = n[M(\xi_k^4) - M^2(\xi_k^2)].$$

Mivel

$$M(\xi_k^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3,$$

és $M(\xi_k^2) = 1$.

Ezért $D^2(\chi^2) = n(3-1) = 2n$.

Tehát $D(\chi^2) = \sqrt{2n}$.

Megjegyzés. A χ^2 -eloszlás speciális esete az *exponenciális* eloszlás.

A két szabadságfokú χ^2 -eloszlás sűrűségfüggvénye megegyezik a $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterű ($M(\xi)=2$ várható értékű) exponenciális eloszlással. Ugyanis az n szabadságfokú χ_n^2 eloszlás sűrűségfüggvénye

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Ha $n = 2$, akkor

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2 \cdot (1)} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

ami egyben a $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye.

15. MATEMATIKAI STATISZTIKA

A gyakorlati vagy elméleti kutatásokat végző szakember kísérletének eredményeként gyakran nagy mennyiségű számadatot kap, ilyenkor általában matematikushoz vagy statisztikushoz fordul, hogy legyen segítségére a kapott adatok kiértékelésében, a belőlük levonható következtetések megtalálásában.

A statisztikus és a hozzáforduló szakember közös munkája néha meghozza a várt eredményt, és az együttműködés során a felvetett kérdésekre pontos választ kapnak. Gyakran előfordul azonban az is, hogy a felek — esetleg mindkettőjük csalódására — nem tudnak eredményesen együttműködni. Ennek természetesen több oka lehet. Talán a leggyakoribb ok, hogy nem találják meg a közös nyelvet, nem értik meg egymás problémáit. Természetesen könnyebb a helyzet, ha a segítséget nyújtó statisztikus már ismeri a szóban forgó területet, annak problémáit, szakkifejezéseit, azonban még ilyenkor is szükséges, hogy a statisztikus segítségét igénybe vevő szakember tudja, hogy milyen esetekben érdemes statisztikushoz fordulni, milyen kérdésekre milyen típusú válaszokat tud adni a statisztika. Jelen fejezetben sem tekintjük célunknak, hogy az olvasó képes legyen az itt nyert ismeretek alapján a mezőgazdaságban előforduló valamennyi statisztikai problémát önállóan megoldani. Mindössze néhány példa és módszer bemutatásával a mezőgazdaságban dolgozó szakember (vagy jövőbeni szakember) számára akarjuk megmutatni, hogy milyen kérdésekben nyújthat segítséget a statisztika és meg akarjuk könnyíteni a statisztikussal való együttműködést.

Mint említettük, ahhoz, hogy egy statisztikussal való együttműködés sikeres legyen, több feltétel szükséges. Ezek közül az egyik legfontosabb, hogy *időben* kell a statisztikussal megbeszélni a kísérlettel kapcsolatos kérdéseket. Ugyanis a statisztikus nemcsak a kísérlet eredményeinek kiértékelésében tud segítséget nyújtani, hanem abban is, hogy hogyan célszerű a kísérletet megtervezni ahhoz, hogy a lehető legkevesebb munkával és költséggel a lehető legtöbb információt nyerjük. Sőt egy olyan kísérletnél, amelynek tervezésénél nem gondoltuk meg előre, hogy az eredményeket milyen statisztikai módszerekkel fogjuk értékelni, esetleg nem is lehet a felvetett kérdésekre kielégítő választ kapni.

Jelen fejezet 1. pontjában azzal foglalkozunk, hogy milyen tényezőkre kell gondot fordítanunk a kísérlet tervezése során, és csak később térünk ki arra, hogy kísérletünk eredményeit milyen módszerekkel lehet értékelni.