

Az A pontban: $t = 0$, a B pontban $t = 1$.

$$\int_{(1)} \mathbf{v} \, dr = \int_0^1 t^3 \, dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

A (2) úton:

$$z \equiv 0, \quad \dot{z} = 0; \quad x = t, \quad \dot{x} = 1; \quad y = 1-t, \quad \dot{y} = -1.$$

A B pontban $t = 1$, a C pontban $t = 0$.

$$\int_{(2)} \mathbf{v} \, dr = \int_1^0 (t^3 + 1 - t) \, dt = \left[\frac{t^4}{4} + t - \frac{t^2}{2} \right]_1^0 = -\frac{3}{4}.$$

A (3) úton:

$$x \equiv 0, \quad \dot{x} = 0; \quad y = t, \quad \dot{y} = 1; \quad z = 1-t, \quad \dot{z} = -1.$$

A C pontban $t = 1$, az A pontban $t = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{(3)} \mathbf{v} \, dr &= \int_1^0 [-(1-t)^2 - t^2] \, dt = \int_0^1 [(1-t)^2 + t^2] \, dt = \\ &= \int_0^1 (1 - 2t + 2t^2) \, dt = \left[t - t^2 + \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

A zárt görbe menti integrál:

$$\oint \mathbf{v} \, dr = \int_{(1)} \mathbf{v} \, dr + \int_{(2)} \mathbf{v} \, dr + \int_{(3)} \mathbf{v} \, dr = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

Tehát igazoltuk az adott $\mathbf{v}$ függvényre a háromszög alakú tartományon a Stokes-tételt.

11.3.9 A görbe menti integrál függetlensége az úttól térgörbék esetén

A $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortérnek a g görbe A és B pontjai közötti szakaszán vett görbe menti integrálja

$$\int_{AB} \mathbf{v} \, dr.$$

Kérdés, mi a feltétele annak, hogy a görbe menti integrál független legyen az úttól, a kezdő és végponttól függjön, vagy mikor nulla a zárt görbe menti integrál.

I. tétel. Legyen a V térbeli tartományban, azaz a V összefüggő nyílt halmazban

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

függvény folytonos.

Legyen A és B a V tartomány tetszőleges két pontja, g_1 pedig A -ból B -be futó, V -ben fekvő tetszőleges görbe. Az

$$\int_{AB} \mathbf{v} \, dr$$

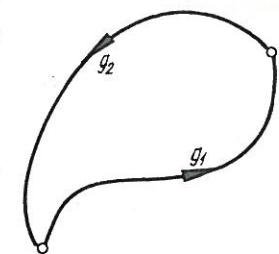
integrál akkor és csak akkor függ csupán az A és B végpontoktól és független a g_1 görbe megválasztásától, ha bármely V -ben futó zárt görbe esetén

$$\oint \mathbf{v} \, dr = 0 \quad (11.75 \text{ ábra}).$$

A bizonyítás azonos a síkbeli esetével, azaz a 11.3.3.3 I. tételének bizonyításával.

II. tétel. Tegyük fel most is az I. tétel feltételeit. Az

$$\int_{AB} \mathbf{v} \, dr$$



11.75 ábra

integrál akkor és csak akkor független az integrációs út megválasztásától, ha létezik V -ben olyan differenciálható

$$u = u(x; y; z)$$

függvény, hogy

$$\mathbf{v} = \text{grad } u.$$

A bizonyítás ugyanúgy történik, mint a 11.3.3.3. pont II. tételéé.

a) Ha az integrál független az úttól, akkor az $u(x; y; z) = u(P)$ függvény:

$$u(x; y; z) = \int_{P_0 P} \mathbf{v} \, dr,$$

ahol P_0 tetszőleges rögzített pont V -ben, és az integrált bármely P_0 -ból P -be futó görbe mentén vehetjük.

A síkbeli bizonyítás analógiájára látható be, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = s,$$

ahol $\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + s\mathbf{k}$,

tehát $\mathbf{v} = \text{grad } u$.

b) Ha van olyan

$$u = u(x; y; z)$$

függvény, amelyre

$$\mathbf{v} = \text{grad } u$$

teljesül, akkor a vonalintegrál kiszámítására a síkbeli esettel azonos módon (11.3.3.3 II. pont) adódik, hogy

$$\int_{AB} \mathbf{v} \, dr = u(B) - u(A),$$

azaz $\int_{AB} \text{grad } u \, dr = u(B) - u(A)$.

Nézzük meg végül, milyen tétel felel meg a síkbeli vonalintegrálokra vonatkozó III. tételnek (11.3.3.3 III.)!

Nézzük először a síkbeli III. tétel más megfogalmazását. Legyen

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + s\mathbf{k}.$$

Képezzük a $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ vektort.

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Ha $s \equiv 0$, továbbá p és q nem függ z -től (síkbeli vektor-vektor függvény), akkor

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

azaz a síkbeli vonalintegrálokra vonatkozó 11.3.3.3 pont III. tétel feltétele így is kifejezhető:

$$\text{rot } \mathbf{v} \equiv 0.$$

Térjünk vissza a térbeli görbékre.

A V térbeli tartomány *egyszeresen összefüggő*, ha bármely V -ben haladó zárt görbe egy pontra folytonosan összehúzható. Ennek következménye, hogy minden V -beli zárt görbéhez található olyan V -ben fekvő F felület, amely g -re illeszkedik.

Az egyszeres összefüggést és ennek említett következményét csak szemléletesen adtuk meg, a pontos definíció és a következmény igazolása hosszadalmas lenne.

III. tétel. Legyen a V tartomány egyszeresen összefüggő.

Tegyük fel, hogy a

$$\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + s\mathbf{k}$$

vektortér örvénymentes a V tartományban, azaz

$$\text{rot } \mathbf{v} \equiv 0.$$

Ekkor bármely V -ben futó zárt görbe mentén

$$\oint_g \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = 0.$$

Bizonyítás. Legyen g bármely V -ben haladó zárt görbe, és legyen F g -re illeszkedő, V -ben fekvő felület.

A Stokes-tétel szerint (11.3.8 IV. pont):

$$\iint_F \text{rot } \mathbf{v} \, d\mathbf{F} = \oint_g \mathbf{v} \, d\mathbf{r}.$$

Mivel

$$\text{rot } \mathbf{v} \equiv 0,$$

$$\oint_g \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = 0.$$

A rotáció vektorkomponenseinek kiszámítására adott összefüggés (11.3.6 pont) alapján belátható, hogy a tétel megfordítása is igaz. Ha bármely zárt görbe mentén

$$\oint_g \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = 0,$$

akkor ebből következik, hogy

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0.$$

Megjegyzés. A III. tétellel újra megkaptuk egyszeresen összefüggő V tartomány esetén a tétel b) pontját, hiszen ha

$$\mathbf{v} = \text{grad } u,$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } u = \nabla \times (\nabla u) = 0.$$

A potenciál

Definíció. Az olyan $\Phi(\mathbf{r}) = -u(\mathbf{r})$ skalárteret, amelyre nézve fennáll, hogy

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{grad } u(\mathbf{r}),$$

azaz

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{grad } [-\Phi(\mathbf{r})],$$

a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér potenciáljának vagy potenciálfüggvényének nevezzük.

Kérdés, van-e egy adott $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortérnek potenciálja, és azt hogyan határozhatjuk meg?

Tétel. Tegyük fel, hogy a

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + s\mathbf{k}$$

vektortér komponenseinek elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak a V egyszeresen összefüggő tartományban.

A

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

vektortérnek akkor és csak akkor van V -ben potenciálja, ha

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0.$$

Bizonyítás. A definíció szerint akkor van potenciál, ha

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{grad } u.$$

A 11.3.9 pont II. tétele szerint ez akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vonalintegrálja független az úttól, ami a 11.3.9 pont I. tétele szerint ekvivalens azzal, hogy a V -ben fekvő zárt görbe mentén

$$\oint_g \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = 0.$$

Ehhez a 11.3.9 pont III. tétele szerint szükséges és elegendő, hogy

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0.$$

A potenciálfüggvény meghatározása. A potenciálfüggvény kiszámítására a 11.3.9 pont II. tétel a) pontjának megfelelően a

$$\int_{P_0 P} \mathbf{v} \, d\mathbf{r}$$

vonaltintegrált kell meghatározni, ahol P_0 a V egyszeresen összefüggő tartomány rögzített, P pedig változó pontja. Az integrál kiszámítását megkönnyíthetjük oly módon, hogy speciális utakat választunk.

Célszerű például, ha ez lehetséges, a koordinátatengelyekkel párhuzamos utakon haladni.

Példák

1. $\mathbf{v} = (3x^2y - z^2)\mathbf{i} + (x^3 + 4yz)\mathbf{j} + (2y^2 - 2xz)\mathbf{k}$.
Először megnézzük, van-e potenciálja a vektortérnek. Ezért képezzük a vektortér rotációját.

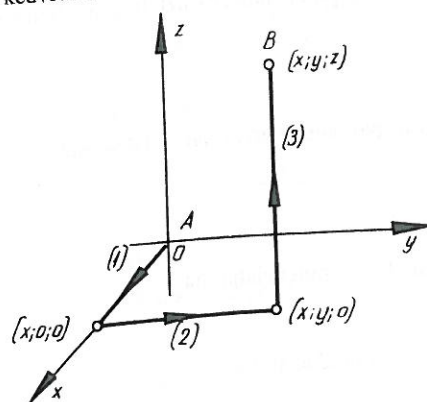
$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y - z^2 & x^3 + 4yz & 2y^2 - 2xz \end{vmatrix} =$$

$$= (4y - 4y)\mathbf{i} + (-2z + 2z)\mathbf{j} + (3x^2 - 3x^2)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$, a vektortérnek van potenciálja, tehát $\mathbf{v} = \text{grad } u$.
Az $u(x; y; z)$ függvény meghatározásához képezzük az $A(0; 0; 0)$ és $B(x; y; z)$ pontok között az

$$\int_{AB} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = u(x; y; z) \quad \text{vonaleintegrált.}$$

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Az integrál útját a 11.76 ábra mutatja.



11.76 ábra

$$\mathbf{v} = (3x^2y - z^2)\mathbf{i} + (x^3 + 4yz)\mathbf{j} + (2y^2 - 2xz)\mathbf{k}.$$

Az (1) úton $y = 0, dy = 0, z = 0, dz = 0,$
 $x = t, dx = dt, 0 \leq t \leq x.$

$$\int_{(1)} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{(1)} (p \, dx + q \, dy + s \, dz) = \int_0^x 0 \cdot dt = 0.$$

A (2) úton $x = x, dx = 0, y = t, dy = dt, z = 0, dz = 0, 0 \leq t \leq y.$

$$\int_{(2)} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{(2)} (p \, dx + q \, dy + s \, dz) = \int_0^y x^3 \, dt = \left[x^3 t \right]_0^y = x^3 y.$$

A (3) úton $x = x, dx = 0, y = y, dy = 0, z = t, dz = dt, 0 \leq t \leq z.$

$$\int_{(3)} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{(3)} (p \, dx + q \, dy + s \, dz) = \int_0^z (2y^2 - 2xt) \, dt = \left[2y^2 t - xt^2 \right]_0^z = 2y^2 z - xz^2.$$

$$u(x; y; z) = \int_{(1)} + \int_{(2)} + \int_{(3)} = x^3 y + 2y^2 z - xz^2.$$

Ugyanilyen számolás mutatja, hogy az $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ megszorítás nélkül is megkapjuk a potenciálfüggvényt.

Ha nem az origóból indulunk ki, a kapott integrálok összege az így kapott értéktől csak konstansban különbözik.

$$u(x; y; z) = x^3 y + 2y^2 z - xz^2 + c$$

és $\Phi(\mathbf{r}) = xz^2 - x^3 y - 2y^2 z + c_1.$

2. Az elektrosztatikus térerősség, $\mathbf{Q}$ -t egységnyiinek véve:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (11.3.1 \text{ pont}).$$

Van-e az elektrosztatikus térnek potenciálja, és ha van, határozzuk meg.

Az $\mathbf{E}$ függvény az origóban nincs értelmezve. Ha a tartomány nem egyszeresen összefüggő, akkor a térrészben általában nem lehet a rotációmentes $\mathbf{v}$ függvényhez potenciált találni. Ha az elektrosztatikus térből a $P(0; 0; 0)$ pontot kirekesztjük, egyszeresen összefüggő tartományt nyerünk.

$$\mathbf{E} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \mathbf{k}.$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} & \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} & \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-3 \frac{yz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}} + 3 \frac{yz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}} \right) \mathbf{i} +$$

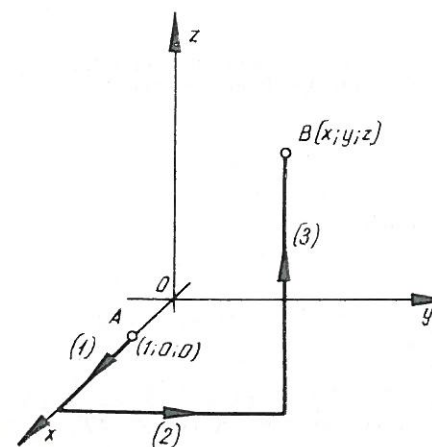
$$+ \left(3 \frac{xz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}} - 3 \frac{xz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}} \right) \mathbf{j} +$$

$$+ \left(3 \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}} - 3 \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}} \right) \mathbf{k}.$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Az $\mathbf{E}$ vektortérnek van potenciálja.

Mivel a függvény az origóban nincs értelmezve, az $\int_{AB} \mathbf{E} \, d\mathbf{r}$ vonaleintegrált az $A(1; 0; 0)$ és $B(x; y; z)$ pontok között határozzuk meg, a 11.77 ábra szerinti úton.



11.77 ábra

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy

$$x \geq 1, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

$$\mathbf{E} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \mathbf{k}.$$

Az (1) úton: $x = t, \quad y = 0, \quad z = 0,$
 $dx = dt, \quad dy = 0, \quad dz = 0, \quad 1 \leq t \leq x.$

$$\int_{(1)} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \int_1^x \frac{t}{t^3} \, dt = \int_1^x \frac{1}{t^2} \, dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

A (2) úton: $x = x, \quad y = t, \quad z = 0,$
 $dx = 0, \quad dy = dt, \quad dz = 0, \quad 0 \leq y \leq t.$

$$\int_{(2)} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \int_0^y \frac{t}{\sqrt{(x^2+t^2)^3}} \, dt = \int_0^y \frac{1}{2} (x^2+t^2)^{-\frac{3}{2}} 2t \, dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \right]_0^y = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

A (3) úton: $x = x, \quad y = y, \quad z = t,$
 $dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = dt \quad \text{és} \quad 0 \leq t \leq z.$

$$\int_{(3)} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \int_0^z \frac{t}{\sqrt{(x^2+y^2+t^2)^3}} \, dt = \int_0^z \frac{1}{2} (x^2+y^2+t^2)^{-\frac{3}{2}} 2t \, dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+t^2}} \right]_0^z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$$\int_{(1)} + \int_{(2)} + \int_{(3)} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 1 - \frac{1}{|r|}.$$

$$u(x; y; z) - u(1; 0; 0) = 1 - \frac{1}{|r|},$$

$$u(x; y; z) = -\frac{1}{|r|}.$$

Eredményünk akkor is helyes, ha az $x \geq 1, y \geq 0, z \geq 0$ kikötést elhagyjuk. Az egységnyi elektrosztatikus töltés potenciálja a 0 (0, 0, 0) pont kivételével:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -u(\mathbf{r}) = \frac{1}{|r|}.$$

Ellenőrzésként határozzuk meg az

$$u = -\frac{1}{|r|} \quad \text{függvény gradiensét.}$$

$$u = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \mathbf{k}.$$

$$\text{grad } u = \frac{\mathbf{r}}{|r|^3}.$$

12. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Számos fizikai és műszaki egyenletnél a függvénykapcsolat nemcsak a független változó és a függvény összefüggésére, hanem a független változó, a függvény és a derivált (vagy deriváltak) összefüggésére vonatkozik.

Példák

1. A rezgő mozgásnál a gyorsulás ellentétesen arányos a kitéréssel:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -ks \quad (k > 0 \text{ állandó}).$$

2. Ha egy áramkörbe sorba kapcsoljuk az R ohmikus ellenállást és az L önindukciós tekercset, akkor az I intenzitás, az U feszültség és az idő közötti összefüggés:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U$$

(ahol az $U = U(t)$ feszültség változó is lehet).

Definíció. Differenciálegyenlet az a függvénykapcsolat, amely a független változó, a függvény és a függvény deriváltjai között fennáll.

Ha a függvény egyváltozós és a deriváltak közösleges deriváltak, a differenciálegyenlet közösleges differenciálegyenlet.

Ha a függvény többváltozós és a deriváltak parciális deriváltak, a differenciálegyenlet parciális differenciálegyenlet.

Parciális differenciálegyenlet például a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Laplace-féle differenciálegyenlet}).$$

A továbbiakban csak a közösleges differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

A differenciálegyenlet rendszáma

Definíció. A differenciálegyenlet n -ed rendű, ha a benne előforduló legmagasabb rendű derivált n -ed rendű.

Így az $y' = \frac{x^2}{y^2}$ differenciálegyenlet elsőrendű,

az $yy'' = y'^2$ differenciálegyenlet másodrendű

differenciálegyenlet.

Általános jelöléssel a közönséges első, illetve magasabb rendű differenciálegyenletek így adhatók meg.

Explicit alakban:

$$y' = f(x; y)$$

$$y'' = f(x; y; y')$$

$\vdots$

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; \dots; y^{(n-1)}).$$

Implicit alakban:

$$F(x; y; y') = 0$$

$$F(x; y; y'; y'') = 0$$

$\vdots$

$$F(x; y; y'; \dots; y^{(n)}) = 0.$$

A differenciálegyenlet megoldása

Definíció. Az olyan $y = \varphi(x)$ függvény, amely az adott differenciálegyenletet kielégíti, a differenciálegyenlet megoldása.

A differenciálegyenletek megoldását a következőkben valós változójú, valós értékű függvények között keressük.

12.1 ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

12.1.1 Általános fogalmak

12.1.1.1 Bevezetés

Az $y' = f(x; y)$, illetve

$$F(x; y; y') = 0$$

differenciálegyenletek elsőrendű differenciálegyenletek.

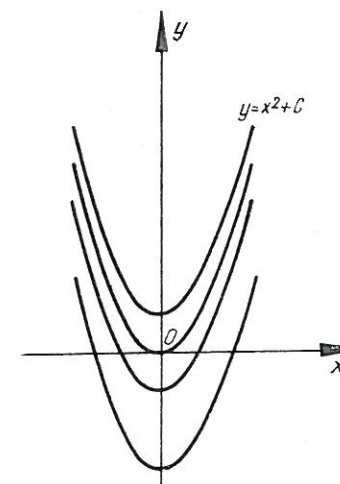
Példák

1. $y' = 2x.$

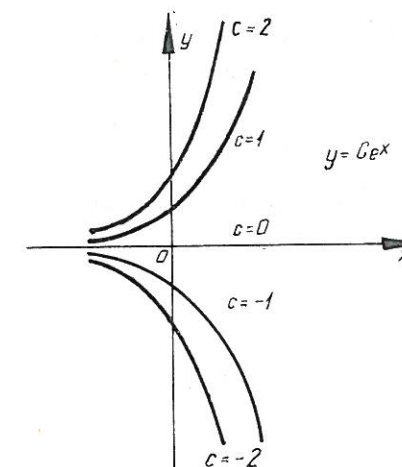
Ha az egyenlet mindkét oldalát integráljuk,

$$y = x^2 + C.$$

Az egyenletnek végtelen sok megoldása van. A megoldások görbéi parabolasereget alkotnak (12.1 ábra).



12.1 ábra



12.2 ábra

2. $y' = y.$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az

$$y = Ce^x \quad \text{függvények a differenciálegyenletet kielégítik.}$$

A függvényt deriválva:

$$y' = Ce^x.$$

A megoldások görbéit a 12.2 ábra mutatja.

3. $x + yy' = 0.$

Próbáljuk ki, kielégíti-e a differenciálegyenletet az

$$x^2 + y^2 = C^2$$

egyenlettel megadott $y = y(x)$ függvény.

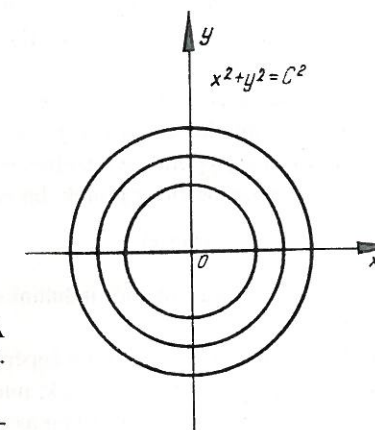
A függvényt x szerint deriválva:

$$2x + 2yy' = 0, \quad \text{azaz}$$

$$x + yy' = 0.$$

A próbált megoldás kielégíti a differenciálegyenletet. A megoldások görbéi az origó körüli körök (12.3 ábra). Mindhárom példában a megoldást görbesereg adta.

Definíció. A differenciálegyenlet *partikuláris megoldásának* olyan függvényt nevezünk, amely kielé-



12.3 ábra

gíti a differenciálegyenletet, és a függvény görbéje átmegy egy adott $P_0(x_0; y_0)$ ponton. Ha az előbbi példákban a P_0 pontot előírjuk, akkor a megoldásra talált görbeseregből az adott ponton átmenő görbe lesz a partikuláris megoldás. Ez azt jelenti, hogy a C paraméterre egy rögzített értéket kapunk.

A $P_0(x_0; y_0)$ pont megadását kezdeti feltétel megadásának nevezzük.

Példák

1. Az $y' = 2x$ feladat megoldása
 $y = x^2 + C$ volt.

Legyen $x_0 = -3, y_0 = 4$.
 $4 = 9 + C; C = -5$.

A kezdeti feltételnek megfelelő partikuláris megoldás:

$$y = x^2 - 5.$$

2.

Az $y' = y$
 $y = Ce^x$.

Legyen $x_0 = 0, y_0 = 2$.
 $2 = Ce^0; C = 2$.

A partikuláris megoldás:

$$y = 2e^x.$$

12.1.1.2 Iránymező

Definíció. Az $(x; y)$ sík egy T tartományán iránymezőt kapunk, ha a tartomány minden $P(x; y)$ pontjához egy irányt rendelünk hozzá.

Az irányt a p iránytangenssel adhatjuk meg. (Feltesszük, hogy az irány sehol sem párhuzamos az y tengellyel.)

Ha adva van egy differenciálható függvényekkel megadott függvénygörbesereg úgy, hogy a T tartomány minden egyes pontján a megfelelő függvénygörbék közül pontosan egy halad át, akkor az $(x; y)$ ponthoz hozzárendelhetjük a rajta áthaladó görbe érintőjének irányát.

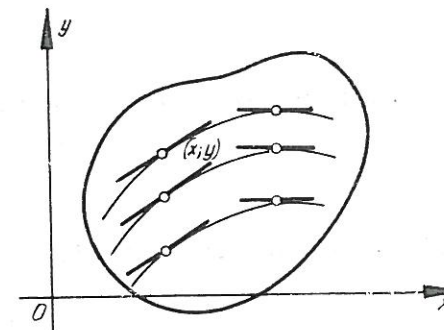
Ugyancsak iránymezőhöz jutunk, ha egy

$$y' = f(x; y)$$

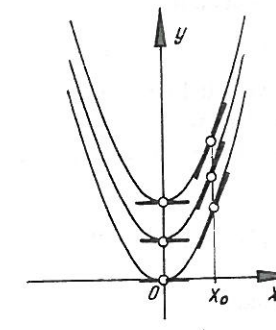
alakú differenciálegyenletből indulunk ki. Ekkor az $(x_0; y_0)$ ponthoz tartozó iránytangens értéke: $f(x_0; y_0)$.

A differenciálegyenlet megoldása éppen annak a görbeseregnek a megkeresését jelenti, amelyhez ugyanaz az iránymező tartozik, mint a differenciálegyenlethez.

Ha a T tartomány sok pontjában az adott iránynak megfelelő kicsiny egyenes darabokat veszünk fel, és felvázolunk olyan görbe íveket, amelyek érintője az adott pontban a felvett



12.4 ábra



12.5 ábra

szakasz, akkor ezek csatlakoztatásával a differenciálegyenlet közelítő grafikus megoldását kapjuk (12.4 ábra).

Azon pontok összessége, amelyekben p azonos értékű, a differenciálegyenletnek az adott p értékhez tartozó *izoklinája*.

Az izoklinák vizsgálata sokszor segítséget nyújt a differenciálegyenlet megoldásához.

Például az

$$y' = 2x$$

differenciálegyenletben azonos x_0 értékhez azonos $m = p$ érték tartozik.

Az izoklinák az y tengellyel párhuzamos

$$x = x_0 \text{ egyenesek} \quad (12.5 \text{ ábra}).$$

12.1.1.3 A differenciálegyenlet megoldása

Az $y' = f(x; y)$

differenciálegyenlet megoldása az egyenletet kielégítő

$$y = g(x; C) \text{ görbesereg.}$$

Partikuláris megoldás az adott $(x_0; y_0)$ ponton átmenő görbe. Az

$$y_0 = g(x_0; C_0) \text{ egyenletből}$$

$$C = C_0\text{-t meghatározva}$$

$$y = g(x; C_0).$$

A differenciálegyenlet megoldását sokszor nehéz vagy nem lehet explicit alakban megadni. Ilyenkor a

$$G(x; y; C) = 0$$

implicit alakban megadott görbesereget tekintjük a differenciálegyenlet megoldásának.

A megoldást alkotó görbesereg görbét integrálgörbéknek nevezzük.

Fordítva, ha

$$(1) \quad y = g(x; C)$$

egyenlettel adott egy görbesereg, akkor a differenciálegyenletet a következőképpen határozzuk meg.

Az (1) egyenletet deriválva

$$(2) \quad y' = g'(x; C).$$

A (2) egyenletből C -t kiküszöböljük, és azt az (1) egyenletbe helyettesítjük.

Példák

1. Határozzuk meg az

$$y = Cx^2 \quad \text{parabolasereg differenciálegyenletét!}$$

$$y' = 2Cx, \quad \text{innen} \quad C = \frac{y'}{2x}.$$

C értékét behelyettesítve:

$$y = \frac{y'}{2x} x^2.$$

$$y' = 2 \frac{y}{x}.$$

2. Határozzuk meg az

$$y = e^{Cx}$$

görbesereg differenciálegyenletét!

Deriválva:

$$y' = Ce^{Cx},$$

$$\text{azaz} \quad y' = Cy,$$

$$\text{innen} \quad C = \frac{y'}{y}.$$

$$y = e^{\frac{y'}{y} x}, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{y'x}{y} = \ln y.$$

A keresett differenciálegyenlet:

$$y' = \frac{y \ln y}{x}.$$

12.1.2 A változók szétválasztásával megoldható differenciálegyenletek

Definíció. Ha $p(x)$ az $a < x < b$ intervallumban

és $q(y)$ a $c < y < d$ intervallumban folytonos függvény, és $q(y) \neq 0$,

$$\text{az} \quad y' = \frac{p(x)}{q(y)}$$

a változók szétválasztásával megoldható differenciálegyenlet.

a) Legyen az egyenlet

$$y' = p(x) \quad \text{alakú.}$$

Az egyenlet megoldása a $p(x)$ függvény határozatlan integrálja.

$$y = \int p(x) dx + C.$$

A megoldás az y tengely irányában parallel eltolással származtatható görbeseregből áll. Legyen adott az

$$y' = p(x)$$

differenciálegyenlet és az x_0 értékhez tartozó

$$y = p(x_0) = y_0 \quad \text{függvényérték.}$$

Mivel $p(x)$ egy primitív függvénye

$$\int_{x_0}^x p(x) dx,$$

a $p(x)$ függvény határozatlan integrálja megadható az

$$\int_{x_0}^x p(x) dx + C$$

függvénysereggel.

Ha C -nek az adott y_0 értéket választjuk, akkor

$$y = \int_{x_0}^x p(x) dx + y_0$$

a keresett partikuláris megoldás.

Mivel a differenciálegyenlet megoldása, határozott integrál kiszámításánál adódik, a megoldás módját *kvadraturával* való megoldásnak nevezzük.

b) Legyen a differenciálegyenlet

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}$$

alakú, ahol $q(y) \neq 0$.

$q(y)$ -nal szorozva a

$$q(y) y' = p(x)$$

egyenletet kapjuk.

Mindkét oldalt integrálva

$$\int q(y) y' dx = \int p(x) dx.$$

A határozatlan integrál helyettesítési képlete szerint az egyenlet bal oldala:

$$\int q(y) y' dx = \int q(y) dy.$$

Így

$$\int q(y) dy = \int p(x) dx.$$

A megoldás formálisan úgy végezhető el, hogy a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)}$$

egyenletet „szorzással” a

$$q(y) dy = p(x) dx$$

alakra hozzuk, majd integrálunk

$$\int q(y) dy = \int p(x) dx.$$

Ha az integrálást elvégezzük és az egyenletből y -t kifejezzük, a differenciálegyenlet megoldását kapjuk.Az $(x_0; y_0)$ ponton áthaladó görbét az

$$\int_{y_0}^y q(y) dy = \int_{x_0}^x p(x) dx$$

egyenletből határozzuk meg.

Példák

Először oldjuk meg a fejezet bevezetésében próbálgatással már megadott 2. és 3. differenciálegyenletet.

$$1. \quad y' = y.$$

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Tegyük fel, hogy $y \neq 0$.

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\ln |y| = x + C_1$$

$$|y| = e^{x+C_1} = e^x \cdot e^{C_1}.$$

$$(e^{C_1} = C \text{ jelöléssel})$$

$$|y| = Ce^x.$$

$$\text{Ebből} \quad y = \pm Ce^x \quad (C \neq 0).$$

A $C = 0, y \equiv 0$ szintén megoldása a differenciálegyenletnek. Ez az egyenletbe való helyettesítéssel közvetlenül belátható. (Az integrálási állandót csak egyszer írjuk ki.)Tehát $y = Ce^x$ bármilyen valós C esetén a differenciálegyenlet megoldása.

$$2. \quad x + yy' = 0.$$

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0),$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

A változókat szétválasztva:

$$y dy = -x dx.$$

$$\text{Integrálva:} \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C,$$

$$x^2 + y^2 = 2C.$$

Mivel csak valós megoldásokat veszünk figyelembe, $2C$ nem lehet negatív.

$$2C = a^2 \quad \text{jelöléssel:}$$

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

$$3. \quad y' = xy.$$

$$\frac{dy}{dx} = xy.$$

Legyen $y \neq 0$.

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dy}{y} = x dx.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (\text{Az integrációs konstans csak az egyik oldalra írjuk ki.})$$

$$\text{Ebből} \quad |y| = e^{\frac{x^2}{2} + C_1} = Ce^{\frac{x^2}{2}} \quad (C = e^{C_1} > 0).$$

$$\text{Azaz} \quad y = \pm Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Ha $C = 0$, akkor az $y \equiv 0$ függvényt kapjuk, ami szintén kielégíti a differenciálegyenletet. Tehát a differenciálegyenlet megoldása $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$, bármilyen valós C esetén.

$$4. \quad y' \sin x = y \ln y \quad (y > 0).$$

Határozzuk meg azt a partikuláris megoldást, amely kielégíti az $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 2$ kezdeti feltételt.

$$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x} \quad (y > 0, x \neq 0 + k\pi).$$

Mindkét oldalt integráljuk:

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{1}{\ln y} \frac{1}{y} dy = \ln |\ln y|.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C_1.$$

Így $\ln |\ln y| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C_1.$

$$\ln |\ln y| = \ln e^{C_1} \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$|\ln y| = e^{C_1} \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|, \quad (e^{C_1} = c > 0).$$

$$\ln y = \pm C \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$y = e^{\pm C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

$C = 0, y \equiv 1$ szintén kielégíti a differenciálegyenletet.

Az $x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = 2$ feltétellel

$$2 = e^{\pm C} \text{ adódik.}$$

Mivel $C > 0,$
 $2 = e^C, \text{ Innen } C = \ln 2.$

Így a partikuláris megoldás:

$$y = e^{(\ln 2) \operatorname{tg} \frac{x}{2}}, \text{ azaz}$$

$$y = 2^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

5. $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0.$

a) $|y| < 1, |x| < 1.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\arcsin y = \arcsin x + C_1,$$

azaz $\arcsin y - \arcsin x = C_1.$

Az egyenletet még átalakítjuk. Vegyük mindkét oldal szinuszt.

$$\sin(\arcsin y - \arcsin x) = \sin C_1$$

A bal oldalon felhasználjuk az addíciós tételek $\sin(\alpha - \beta)$ -ra vonatkozó formuláját, a jobb oldalon $\sin C_1 = G$ -t írunk,

$$\sin(\arcsin y) \cdot \cos(\arcsin x) - \cos(\arcsin y) \cdot \sin(\arcsin x) = C.$$

Mivel $\sin(\arcsin y) = y$ és $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$, és így tovább,

$$y \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-y^2} = C.$$

b) $|x| > 1, |y| > 1.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\operatorname{arch} y = \operatorname{arch} x + C_1,$$

$$\ln(y + \sqrt{y^2-1}) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + \ln C \quad (C_1 = \ln C, C > 0).$$

$$y + \sqrt{y^2-1} = C(x + \sqrt{x^2-1}).$$

c) Ha $|y| \equiv 1$, akkor a változók szétválasztása nem alkalmazható.

Az $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

egyenletbe helyettesítve közvetlenül látható, hogy $y \equiv 1$ és $y \equiv -1$ is megoldás.

6. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyeknél ha bármely P görbepontnak az x és az y tengelyen levő merőleges vetületeit, A és B -t összekötjük, és P -ből AB -re merőlegest bocsátunk, megkapjuk a görbének a P ponthoz tartozó érintőjét (12.6 ábra). Az ábrából leolvasható, hogy az AB egyenes iránytangense: $-\frac{y}{x}$. Az érintő merőleges AB -re, így

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Ez a keresett görbesereg differenciálegyenlete.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}; \quad y dy = x dx.$$

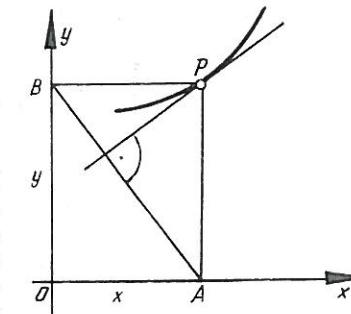
Mindkét oldalt integrálva:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

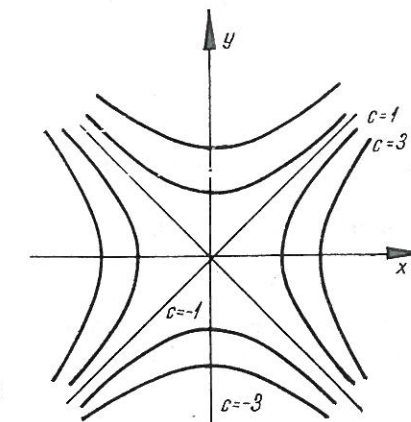
vagy $x^2 - y^2 = C \quad (12.7. \text{ ábra}).$

A feltételeknek megfelelő görbék tehát egyenlőszárú hiperbolák, $C = 0$ esetben az

$$y = x \text{ és } y = -x \text{ egyenesek.} \quad 12.7. \text{ ábra}$$



12.6 ábra



12.7 ábra

7. Vizsgáljuk egy test mozgását, ha a nehézségi erő hatására mozog ellenálló közegben úgy, hogy az ellenállás a sebesség négyzetével ellentétesen arányos. Ha a test légüres térben mozog, a gyorsulás.

$$a = \frac{dv}{dt} = g \quad \left(g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) :$$

Ellenálló közegben a differenciálegyenlet:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{\lambda^2} v^2.$$

(Az $\frac{1}{\lambda^2}$ arányossági tényező függ a test G súlyától, a mozgás irányára merőleges legnagyobb keresztmetszetétől, a közeg fajsúlyától és a test alakjától.)

A differenciálegyenlet változóit szétválasztva:

$$\frac{dv}{g - \frac{1}{\lambda^2} v^2} = dt.$$

Integráljuk mindkét oldalt:

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{g - \frac{1}{\lambda^2} v^2} &= \frac{1}{g} \int \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{\sqrt{g}\lambda} \right)^2} dv = \frac{\lambda}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{g}\lambda} \int \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{\sqrt{g}\lambda} \right)^2} dv = \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{g}} \operatorname{arth} \frac{v}{\sqrt{g}\lambda} + C_1. \\ \int dt &= t + C_2. \end{aligned}$$

$$\text{Így} \quad \frac{\lambda}{\sqrt{g}} \operatorname{arth} \frac{v}{\sqrt{g}\lambda} = t + C.$$

$$\text{Legyen} \quad t = 0 \quad \text{időpontban} \quad v = 0.$$

$$\text{Így} \quad C = 0.$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{g}} \operatorname{arth} \frac{v}{\sqrt{g}\lambda} = t$$

$$\text{és} \quad v = \sqrt{g}\lambda \operatorname{th} \frac{\sqrt{g}}{\lambda} t.$$

$$\text{Ha} \quad t \rightarrow \infty, \quad \operatorname{th} \frac{\sqrt{g}}{\lambda} t \rightarrow 1.$$

Ezért, ha elég nagy idő telt el,

$$v \approx \sqrt{g}\lambda.$$

A mozgás jó közelítéssel egyenletes lesz. Írjuk fel a mozgás út-idő függvényét:

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \sqrt{g}\lambda \operatorname{th} \frac{\sqrt{g}}{\lambda} t. \end{aligned}$$

A változókat szétválasztva:

$$ds = \sqrt{g}\lambda \operatorname{th} \frac{\sqrt{g}}{\lambda} t \, dt$$

$$ds = \sqrt{g}\lambda \frac{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{g}}{\lambda} t}{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{g}}{\lambda} t} dt.$$

$$s = \lambda^2 \ln \operatorname{ch} \frac{\sqrt{g}}{\lambda} t + C_1.$$

Legyen $t = 0$ időpontban $s = 0$, így $C_1 = 0$.

$$s = \lambda^2 \ln \operatorname{ch} \frac{\sqrt{g}}{\lambda} t.$$

8. A barométerformula

A légnyomás és a magasság kapcsolatát az ún. barometrikus magasságmérési formula adja meg. Ha a tengerszint felett h méter magasságban a légnyomás p_h (torr), a tengerszintnél p_0 ,

$$h = 18400 (\lg p_0 - \lg p_h) \quad [\text{m}].$$

A képlet csak állandó hőmérsékletre érvényes. Mivel a hőmérséklet 200 m-nél kb 1 °C-kal csökken, a képlet csak közelítő értéket ad.

A formulát a következőképpen vezethetjük le. Kis Δh magasságváltozásnál a Δp nyomásváltozás arányosnak vehető az emelkedéssel:

$$\Delta p = -\gamma \Delta h = -\rho g \Delta h \quad (12.8 \text{ ábra})$$

(γ a levegő fajsúlya, ρ a sűrűsége h magasságban, g a nehézségi gyorsulás).

$$\Delta h \rightarrow 0 \quad \text{esetén:}$$

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g.$$

A Boyle—Mariotte-törvény alapján:

$$\frac{p_0}{p} = \frac{\rho_0}{\rho}; \quad \rho = \frac{\rho_0}{p_0} p.$$

(ρ_0 a levegő sűrűsége a tengerszinten.)

$$\text{Így} \quad \frac{dp}{dh} = -\frac{\rho_0}{p_0} pg.$$

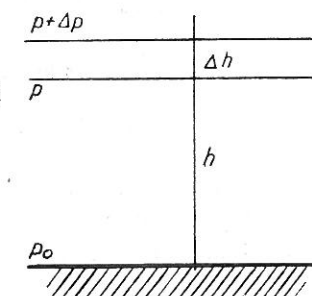
A változókat szétválasztva:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \, dh.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} gh + C.$$

$$h = 0 \quad \text{esetén} \quad p = p_0.$$



12.8 ábra

Ezért

$$C = \ln p_0.$$

$$(1) \quad \ln p - \ln p_0 = -\frac{\rho_0}{p_0} gh,$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} gh,$$

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh},$$

$$(2) \quad p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh}.$$

A (2) egyenletet a 12.9 ábra szemlélteti.

Az (1) egyenletből h értéke:

$$h = \frac{p_0}{\rho_0 g} (\ln p_0 - \ln p).$$

10-es alapú logaritmussal:

$$h = 2,3 \frac{p_0}{\rho_0 g} (\lg p_0 - \lg p).$$

Mivel a tengerszinten

$$p_0 = 1,033 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 10333 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2},$$

$$\rho_0 = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{és} \quad 1 \text{ kp} = 9,81 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2},$$

$$2,3 \frac{p_0}{\rho_0 g} = 18400 \text{ m}.$$

$$\text{Tehát} \quad h = 18400 (\lg p_0 - \lg p).$$

A képlet alapján barométerrel még lehet határozni repülőgépek, hegyek magasságát. E képlettel lehet a légnyomást átszámítani a tengerszintre.

A felezési magasság az a szint, ahol $p = \frac{p_0}{2}$.

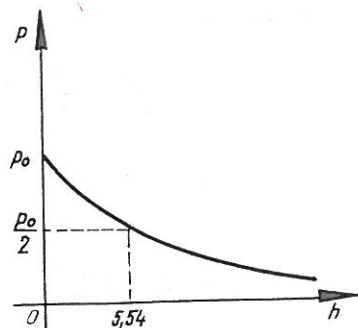
$$h_F = 18400 \lg \frac{p_0}{p} = 18400 \lg \frac{p_0}{\frac{p_0}{2}} = 18400 \lg 2 = 18400 \cdot 0,3010 = 5,54 \text{ km}.$$

9. Határozzuk meg egy kút közelében a talajvíz szintjét. Legyen a kútúrás előtt a földfelszín magassága az AB szinten, a talajvíz az $A'B'$ szinten, és a vízátnemesztő réteg nívója a CD szinten (12.10 ábra). Helyezzük el a koordináta-rendszert úgy, hogy az x tengely a vízátnemesztő rétegre essen. Ásnak egy r sugarú kút, legyen alapjának CD -től való távolsága h . Legyen az y tengely a kút szimmetriatengelyében. Képzeljünk a talajban egy x sugarú hengert. Legyen a vízszintmagasság az x távolságban y . A tapasztalat szerint az x távolságban levő P' pontokban a víz áramlási sebessége arányos a P pontbeli érintő iránytangensével.

$$v = ky'.$$

Így az x sugarú, y magasságú körhengerpaláston az időegység alatt átáramló vízmennyiség:

$$Q = 2\pi xyv = 2\pi xyky'.$$



12.9 ábra

Bármekkora x sugarú körhengerpaláston mindig Q vízmennyiség áramlik át. Így a vízmennyiség átáramlásra jellemző differenciálegyenlet:

$$y' = \frac{Q}{2\pi xyk}.$$

A változókat szétválasztva:

$$y dy = \frac{Q}{2\pi k} \frac{dx}{x}.$$

Integrálva:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{Q}{2\pi k} \ln x + \frac{C}{2},$$

$$\text{azaz} \quad y^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln x + C.$$

Kezdeti feltétel:

$$\text{ha} \quad x = r, \quad y = h.$$

$$\text{Így} \quad h^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln r + C.$$

$$\text{Innen} \quad C = h^2 - \frac{Q}{\pi k} \ln r,$$

$$\text{azaz} \quad y^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln x - \frac{Q}{\pi k} \ln r + h^2,$$

$$y^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{x}{r} + h^2.$$

Ez az egyenlet írja le implicit alakban a talajvíz szintje EF görbéjének egyenletét.

10. A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádiummennyiséggel. Legyen a kiindulási pillanatban a rádium mennyisége R_0 . A bomlási sebesség:

$$\frac{dR}{dt} = -kR.$$

(A negatív előjel azt jelzi, hogy a bomlással a rádium fogy.)

Határozzuk meg az arányossági tényezőt, ha a rádium felezési ideje 1600 év.

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dR}{R} = -k dt,$$

$$\ln R = -kt + C_1 \quad (e^{C_1} = C > 0).$$

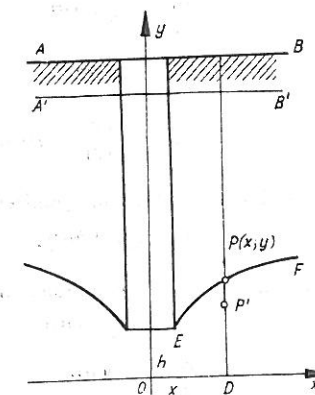
$$R = Ce^{-kt}.$$

Legyen $t = 0$ időpontban $R = R_0$.

$$R_0 = Ce^0, \quad C = R_0.$$

A rádium bomlásának egyenlete:

$$R = R_0 e^{-kt}.$$



12.10 ábra

Ha $t = 1600, R = \frac{R_0}{2}$.

$$\frac{R_0}{2} = R_0 e^{-1600k}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-1600k}$$

$$k = \frac{\ln 2}{1600} = 0,000433.$$

Így a rádium bomlásának egyenlete:

$$R = R_0 e^{-0,000433t}.$$

Számítsuk ki még, hogy a rádium hány százaléka bomlik el száz év alatt ($t = 100$).

$$R = R_0 e^{-0,0433}$$

$$\frac{R}{R_0} = e^{-0,0433}$$

$$\frac{R}{R_0} = 0,958.$$

Tehát 100 év alatt a rádiummennyiség 95,8%-a megmarad és 4,2%-a bomlik fel.

12.1.3 Szétválasztható változójú differenciálegyenletekre visszavezethető differenciálegyenletek

12.1.3.1 Az $y' = f(ax+by+c)$ alakú differenciálegyenletek

Feltehetjük, hogy $b \neq 0$, mert különben az egyenlet szétválasztható volna.

Új változót vezetünk be:

$$u = ax+by+c.$$

Innen $y' = \frac{u'-a}{b}.$

Mivel $f(ax+by+c) = f(u),$

$$\frac{u'-a}{b} = f(u).$$

$$u' = a+bf(u),$$

$$\frac{du}{dx} = a+bf(u).$$

A változók szétválaszthatók:

$$\frac{du}{a+bf(u)} = dx.$$

$$\int \frac{du}{a+bf(u)} = x+C,$$

ahol $u = ax+by+c.$

Feltéve, hogy az

$$u_1 < u < u_2, \text{ azaz az } u_1 < ax+by+c < u_2$$

intervallumban $a+bf(u)$ folytonos és sehol sem zérus, a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\int \frac{du}{a+bf(u)} = x+C \quad (u = ax+by+c).$$

Ha az $u_1 < u < u_2$ intervallumban $a+bf(u)$ az $u = u_0$ értéknél zérus, akkor

$$u = u_0,$$

a differenciálegyenletnek az általánostól különböző megoldása.

Példák

1. $y' = x+y.$

Legyen $u = x+y.$

Ekkor $u' = 1+y'$ és $y' = u'-1,$

tehát $u' - 1 = u.$

$$\frac{du}{dx} = u+1.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{du}{u+1} = dx, \quad (\text{feltéve, hogy } u+1 \neq 0).$$

$$\ln |u+1| = x+C_1,$$

$$|u+1| = e^{x+C_1} \text{ vagy}$$

$$|u+1| = e^x \cdot e^{C_1}; \quad e^{C_1} = C \text{ jelöléssel } (C > 0),$$

$$u+1 = \pm Ce^x,$$

innen $u = \pm Ce^x - 1.$

Mivel $u = y+x,$

$$y+x = \pm Ce^x - 1,$$

tehát $y = \pm Ce^x - x - 1.$

Ha a $\frac{du}{dx} = u+1$

egyenletben $u+1 = 0, \quad u = -1$ is megoldás.

Így $x+y = -1,$

$$y = -1-x.$$

Ez pedig az $y = Ce^x - x - 1$

egyenlet partikuláris esete $C = 0$ esetén. (A $P(-1; 0)$ ponton átmenő görbe.)
Tehát az $y' = x + y$ differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = Ce^x - x - 1,$$

ahol C bármilyen valós érték lehet.

2. $y' = (x + y - 4)^2.$

Legyen $u = x + y - 4.$

Innen $y = u - x + 4,$

azaz $y' = u' - 1.$

A differenciálegyenletbe helyettesítve:

$$u' - 1 = u^2,$$

$$u' = 1 + u^2,$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{du}{1+u^2} = dx.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\arctg u = x + C, \quad \text{azaz}$$

$$u = \operatorname{tg}(x + C).$$

Mivel $u = x + y - 4,$

$$x + y - 4 = \operatorname{tg}(x + C).$$

$$y = 4 - x + \operatorname{tg}(x + C).$$

3. $y' = \cos(x - y).$

Legyen $u = x - y.$

Ekkor $u' = 1 - y',$ tehát $y' = 1 - u'.$

Behelyettesítve az egyenletbe:

$$1 - u' = \cos u,$$

innen $u' = 1 - \cos u.$

$$\frac{du}{dx} = 1 - \cos u.$$

Ha $1 - \cos u \neq 0,$

$$\frac{du}{1 - \cos u} = dx.$$

Mivel $1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2},$

$$\frac{1}{2} \frac{du}{\sin^2 \frac{u}{2}} = dx.$$

Az integrálást elvégezve:

$$-\operatorname{ctg} \frac{u}{2} = x + C_1.$$

$$u = x - y \quad \text{értéket behelyettesítve:}$$

$$x + \operatorname{ctg} \frac{x - y}{2} = C.$$

Ha $1 - \cos u = 0,$ azaz $\cos u = 1,$

akkor $u = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

Így $x - y = 2k\pi,$

$$y = x + 2k\pi.$$

Ezek a függvények szintén megoldásai a differenciálegyenletnek, de nem kaphatók meg az előző általános megoldásból.

12.1.3.2 Homogén differenciálegyenletek

Definíció. Az $f(x; y)$ függvény k -ad fokú homogén függvény, ha tetszőleges t esetén fennáll az

$$f(tx; ty) \equiv t^k f(x; y)$$

azonosság.

Példák

1. $f(x; y) = x^2 + y^2$

másodfokú homogén függvény.

Ugyanis x és y helyébe tx és ty értéket írva:

$$f(tx; ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 f(x; y).$$

2. $f(x; y) = \frac{1}{x + y}$

(-1) -ed fokú homogén függvény.

Ugyanis

$$f(tx; ty) = \frac{1}{tx + ty} = t^{-1} \left(\frac{1}{x + y} \right) = t^{-1} f(x; y).$$

3. $f(x; y) = \frac{y - x}{y + x}$

0-ad fokú homogén függvény, mert

$$f(tx; ty) = \frac{ty - tx}{ty + tx} = t^0 \frac{y - x}{y + x} = t^0 f(x; y).$$

*

Definíció. Az $y' = f(x; y)$ differenciálegyenlet *homogén differenciálegyenlet*, ha az egyenlet jobb oldalán álló $f(x; y)$ kétváltozós függvény nullad fokú homogén függvény.

A nullad fokú homogenitás miatt a homogén differenciálegyenlet mindig felírható

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ alakban, feltéve, hogy az } x \text{ egy nullát nem tartalmazó inter-}$$

vallumban változik.

A homogén differenciálegyenlet visszavezethető, szétválasztható változójú differenciálegyenletekre, az

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad \text{röviden}$$

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{helyettesítéssel.}$$

Az egyenletből:

$$y = ux, \\ y' = u'x + u.$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$u'x + u = \varphi(u),$$

$$\frac{du}{dx} x = \varphi(u) - u.$$

Ha $\varphi(u) - u \neq 0$, a változók szétválaszthatók:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Feltéve, hogy az

$u_1 < u < u_2$ intervallumban $\varphi(u) - u$ sehol sem zérus, $x \neq 0$ mellett az általános megoldás:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln |x| + C.$$

A bal oldali integrál $u = \frac{y}{x}$ függvénye, így

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln |x| + C.$$

Ha az $u_1 < u < u_2$ intervallumban

$f(u) - u$ folytonos, és az $u = u_0$ helyen zérus, akkor $x \neq 0$ mellett $u = u_0$ a differenciálegyenletnek az általánostól különböző megoldása.

Példák

1. $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} \quad (x \neq 0, x^2 - y^2 \neq 0).$

Osszuk el a jobb oldali tört számlálóját és nevezőjét x^2 -tel:

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel:

$$y = ux, \quad y' = u'x + u.$$

$$u'x + u = \frac{u}{1 - u^2}.$$

Rendezve: $u'x = \frac{u}{1 - u^2} - u.$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{u - u + u^3}{1 - u^2},$$

(1) $\frac{du}{dx} x = \frac{u^3}{1 - u^2}.$

Ha $u \neq 0$, a változókat szétválaszthatjuk:

$$\frac{1 - u^2}{u^3} du = \frac{dx}{x}.$$

$$\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x}.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln |u| = \ln |x| + C.$$

Rendezve: $-\frac{1}{2u^2} = \ln |xu| + C.$

Mivel $u = \frac{y}{x},$

$$-\frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} = \ln \left| x \frac{y}{x} \right| + C,$$

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln |y| + C.$$

Az (1) egyenletet kielégíti az $u = 0$, azaz az $\frac{y}{x} = 0$ érték is.

Mivel a feltétel szerint $x \neq 0$, ez azt jelenti, hogy

$$y = 0$$

is megoldás.

Ez az eredeti differenciálegyenletből is leolvasható.

2. $y' = \frac{y-x}{y+x} \quad (x \neq 0, y+x \neq 0).$

Az egyenlet így írható:

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}.$$

Legyen $u = \frac{y}{x}$, ekkor $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{-1 + \sqrt{1+u^2}}{u}.$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{-1 + \sqrt{1+u^2}}{u} - u.$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{-1 + \sqrt{1+u^2} - u^2}{u}.$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{-(1+u^2) + \sqrt{1+u^2}}{u}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{u}{(1+u^2) - \sqrt{1+u^2}} du = -\frac{dx}{x}.$$

Integráljuk a bal oldalt

$u = \operatorname{tg} \varphi$ helyettesítéssel:

$$1+u^2 = 1+\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}; \quad \sqrt{1+u^2} = \frac{1}{\cos \varphi}; \quad du = \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi.$$

$$\int \frac{u}{(1+u^2) - \sqrt{1+u^2}} du = \int \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi}} \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= \int \frac{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}}{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi}} \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \int \frac{\sin \varphi}{(1 - \cos \varphi) \cos \varphi} d\varphi =$$

$$= \int \left(\frac{1}{1 - \cos \varphi} + \frac{1}{\cos \varphi} \right) \sin \varphi d\varphi = \ln(1 - \cos \varphi) - \ln \cos \varphi.$$

A jobb oldal integrálja:

$$\int -\frac{dx}{x} = -\ln x + \ln p \quad (p > 0),$$

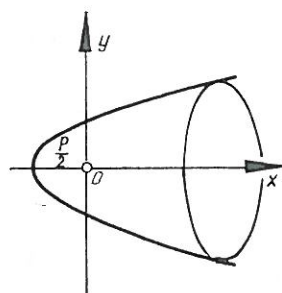
ahol $\ln p$ az integrációs konstans.

Így $\ln(1 - \cos \varphi) - \ln \cos \varphi = -\ln x + \ln p,$

azaz $\ln \cos \varphi - \ln(1 - \cos \varphi) = \ln x - \ln p.$

$$\ln \frac{p \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \ln x.$$

$$x = \frac{p \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}.$$



12.13 ábra

Mivel polárkoordinátákban $x = r \cos \varphi$,

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}.$$

Ez pedig a 7.4.1 6. példa szerint olyan parabola egyenlete, amelynek fókuszja az origóban van. A görbét az x tengely körül megforgatva kapjuk a keresett felületet. A keresett tulajdonságú tükör tehát forgási paraboloid alakú (12.13 ábra).

12.1.3.3 Az $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ alakú differenciálegyenletek

Feltesszük, hogy $c_1 \neq 0$ vagy $c_2 \neq 0$. Ha a $c_1 = c_2 = 0$ eset áll fenn, az egyenlet homogén differenciálegyenlet. Ez geometriailag azt jelenti, hogy

az $a_1x + b_1y = 0$

és $a_2x + b_2y = 0$

egyenesek metszéspontja az origó.

A $c_1 \neq 0$ vagy $c_2 \neq 0$ feltétel mellett az egyenlet megoldása során két esetet különböztünk meg.

1. Az

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

differenciálegyenletben szereplő konstansokkal adott

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

és $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

egyenletű egyenesek nem párhuzamosak, van metszéspontjuk.

Ez akkor következik be, ha

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

azaz

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ekkor a koordináta-rendszert önmagával párhuzamosan eltoljuk a két egyenes metszéspontjába. Az új koordináta-rendszerben a differenciálegyenlet homogén differenciálegyenlet lesz.

Ha az
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása $x = \alpha$ és $y = \beta$, alkalmazzuk a 3.1.1. pontban megismert lineáris transzformációt:

$$\begin{cases} x = \xi + \alpha \\ y = \eta + \beta \end{cases}.$$

A transzformációval, mivel $\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$, azaz $y' = \eta'$, a differenciálegyenlet:

$$\eta' = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right)$$

homogén differenciálegyenlet lesz.

*

Példa

Oldjuk meg az

$$y' = \frac{5y-3x-7}{y+x-3}$$

differenciálegyenletet.

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\text{Az } \begin{cases} 5y-3x-7=0 \\ y+x-3=0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása:

$$\alpha = x = 1,$$

$$\beta = y = 2,$$

amint az könnyen belátható.

$$\text{Az } \begin{cases} x = \xi + \alpha \\ y = \eta + \beta \end{cases} \text{ azaz } \begin{cases} x = \xi + 1 \\ y = \eta + 2 \end{cases}$$

transzformációval:

$$y' = \eta' \quad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}\right),$$

$$\eta' = \frac{5\eta + 10 - 3\xi - 3 - 7}{\eta + 2 + \xi + 1 - 3},$$

$$\eta' = \frac{5\eta - 3\xi}{\eta + \xi}.$$

Ez a differenciálegyenlet homogén. A jobb oldalt átalakítva:

$$\eta' = \frac{5\frac{\eta}{\xi} - 3}{\frac{\eta}{\xi} + 1}.$$

$$\text{Legyen } u = \frac{\eta}{\xi}, \quad \eta = u\xi$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{du}{d\xi} \xi + u.$$

Behelyettesítve:

$$\frac{du}{d\xi} \xi + u = \frac{5u-3}{u+1},$$

$$\frac{du}{d\xi} \xi = \frac{5u-3}{u+1} - u,$$

$$\frac{du}{d\xi} \xi = \frac{5u-3-u^2-u}{u+1},$$

$$\frac{du}{d\xi} \xi = -\frac{u^2-4u+3}{u+1}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{u+1}{u^2-4u+3} du = -\frac{d\xi}{\xi}.$$

A jobb oldal integrálja:

$$\int -\frac{d\xi}{\xi} = \ln|C| - \ln|\xi| = \ln\left|\frac{C}{\xi}\right| \quad (C \neq 0).$$

A bal oldal integrálja:

$$\int \frac{u+1}{u^2-4u+3} du = \int \frac{u+1}{(u-1)(u-3)} du.$$

Résztörtekre bontással:

$$\frac{u+1}{(u-1)(u-3)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u-3}.$$

$$u+1 = A(u-3) + B(u-1).$$

$$\text{Ha } u = 3, \quad B = 2.$$

$$\text{Ha } u = 1, \quad A = -1.$$

$$\text{Így } \int \frac{u+1}{u^2-4u+3} du = \int \left(\frac{-1}{u-1} + \frac{2}{u-3} \right) du = \ln \frac{(u-3)^2}{|u-1|}.$$

$$\text{Tehát } \ln \frac{(u-3)^2}{|u-1|} = \ln \left| \frac{C}{\xi} \right|.$$

$$\text{Innen } \frac{(u-3)^2}{|u-1|} = \left| \frac{C}{\xi} \right|,$$

$$\text{vagyis } (u-3)^2 = \pm (u-1) \frac{C}{\xi}.$$

$$\text{Mivel } u = \frac{\eta}{\xi},$$

$$\left(\frac{\eta}{\xi} - 3 \right)^2 = \pm \left(\frac{\eta}{\xi} - 1 \right) \frac{C}{\xi}.$$

$$\left(\frac{\eta}{\xi} - 3 \right)^2 = \pm C \left(\frac{\eta - \xi}{\xi^2} \right).$$

ξ^2 -tel végigszorozva:

$$(\eta - 3\xi)^2 = \pm C(\eta - \xi).$$

A transzformáció egyenleteiből:

$$\begin{aligned}\eta &= y-2, \\ \xi &= x-1.\end{aligned}$$

Így: $(y-3x+1)^2 = \pm C(y-x-1).$

Közvetlen helyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy

$$C = 0$$

esetén adódó

$$y = 3x - 1$$

függvény is megoldása az

$$y' = \frac{5y-3x-7}{y+x-3}$$

egyenletnek.

Így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$(y-3x+1)^2 = C(y-x-1),$$

ahol C bármilyen valós állandó lehet.

*

2. Az

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

differenciálegyenletben szereplő konstansokkal adott

$$a_1x+b_1y+c_1 = 0 \quad \text{és}$$

$$a_2x+b_2y+c_2 = 0$$

egyenletű egyenesek párhuzamosak, azaz nincs metszéspontjuk.

Ekkor

$$a_1b_2 = a_2b_1,$$

vagyis $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$

A differenciálegyenletet az

$$u = a_2x+b_2y+c_2$$

helyettesítéssel szétválasztható változójú differenciálegyenletre vezetjük vissza.

Feltesszük, hogy $b_1 \neq 0$ és $b_2 \neq 0$, mert $b_1 = 0$ és $b_2 = 0$ esetén a differenciálegyenlet közvetlenül integrálható.

*

Példa

$$y' = \frac{3x-3y+2}{x-y+1} \quad (x-y+1 \neq 0).$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Legyen $u = x-y+1.$

Ekkor $3x-3y+2 = 3x-3y+3-1 = 3(x-y+1)-1 = 3u-1.$

$$u' = 1-y',$$

$$y' = 1-u'.$$

Behelyettesítve:

$$1-u' = \frac{3u-1}{u},$$

$$u' = 1 - \frac{3u-1}{u},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-2u+1}{u}.$$

Ha $2u-1 \neq 0$, a változókat szétválasztva:

$$\frac{u}{2u-1} du = -dx.$$

$$\frac{2u}{2u-1} du = -2 dx,$$

$$\frac{2u-1+1}{2u-1} du = -2 dx,$$

$$\left(1 + \frac{1}{2u-1}\right) du = -2 dx.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$u + \frac{1}{2} \ln |2u-1| = -2x + C_1.$$

Mivel $u = x-y+1,$

$$\frac{1}{2} \ln |2x-2y+1| = y-3x-1 + C_1,$$

$$\ln |2x-2y+1| = 2y-6x+C.$$

12.1.4 Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció. Az $a(x)y' + b(x)y = f(x)$

differenciálegyenlet elsőrendű lineáris differenciálegyenlet.

Az elnevezés abból adódik, hogy y és y' az egyenletben első hatványon szerepel. Feltéve, hogy $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ folytonos függvények és $a(x) \neq 0$, az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet $a(x)$ -szel való osztás után így írható:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

$$\text{Ha } q(x) \equiv 0, \\ y' + p(x)y = 0,$$

a differenciálegyenlet elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenlet.

Megjegyzés. Az elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenlet nem tévesztendő össze az $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ homogén differenciálegyenlettel. A differenciálegyenletek elméletében a „homogén” kifejezést kétféle értelemben használjuk.

$$\text{Ha } q(x) \neq 0, \\ \text{az } y' + p(x)y = q(x)$$

differenciálegyenlet elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet.

12.1.4.1 Az elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek megoldása

Az

$$1) \quad y' + p(x)y = 0$$

lineáris homogén differenciálegyenlet a változók szétválasztásával megoldható.

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad (y \neq 0),$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx,$$

$$\ln |y| - \ln C = -\int p(x) dx \quad C > 0,$$

$$\ln \frac{|y|}{C} = -\int p(x) dx,$$

$$y = \pm Ce^{-\int p(x) dx}.$$

Mivel a $C = 0$ esetén adódó $y \equiv 0$ függvény is megoldás, a differenciálegyenlet általános megoldása

$$(2) \quad y = Ce^{-\int p(x) dx},$$

ahol C tetszőleges valós szám lehet. Ez azt jelenti, hogy ha x_0 hely környezetében $p(x)$ folytonos, és előírjuk az $y_0 = y(x_0)$ értéket, akkor a differenciálegyenletnek az x_0 hely illető környezetében egyetlen olyan megoldása van, amelyre $y_0 = y(x_0)$ az adott érték, és az (2) alakú.

Tehát, ha adott az $x = x_0$ -hoz tartozó $y_0 = y(x_0)$ kezdeti érték, akkor a partikuláris megoldás

$$y_0 = e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}.$$

Azt, hogy a differenciálegyenletnek egyéb megoldásai nincsenek, a következőképpen láthatjuk be.

Vegyük az

$$y_1 = e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx} \quad \text{függvényt.}$$

Ez a függvény a differenciálegyenletnek megoldása és sehol sem zérus.

Legyen y a differenciálegyenletnek egy tetszőleges megoldása. Tekintsük az

$$\frac{y}{y_1} \quad \text{függvényt.}$$

Deriválva:

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{y'y_1 - yy_1'}{y_1^2}.$$

Mivel y és y_1 (1) megoldásai:

$$y' = -p(x)y \quad \text{és} \quad y_1' = -p(x)y_1,$$

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{-p(x)yy_1 + yp(x)y_1}{y_1^2} \equiv 0.$$

Így

$$\frac{y}{y_1} = C$$

és

$$y = Cy_1.$$

Tétel. Ha az

$$y' + p(x)y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet egyik megoldása Y , akkor CY is megoldás (ahol C tetszőleges konstans).

Bizonyítás. A feltétel szerint

$$Y' + p(x)Y = 0.$$

Legyen $y = CY$.

$$y' = CY'.$$

A homogén egyenlet bal oldalába helyettesítve:

$$CY' + p(x)CY = C[Y' + p(x)Y] = 0.$$

12.1.4.2 Az elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Tekintsük az

$$y' + p(x)y = q(x)$$

lineáris inhomogén differenciálegyenletet. Legyenek az $\alpha < x < \beta$ intervallumban $p(x)$ és $q(x)$ folytonos függvények.

Jelöljük a megfelelő $[q(x) \equiv 0]$ homogén differenciálegyenletet $Y' + p(x)Y = 0$ -val.

Tétel. Ha az

$$(1) \quad y' + p(x)y = q(x)$$

inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása y_0 , és a megfelelő

$$(2) \quad Y' + p(x)Y = 0$$

homogén egyenlet tetszőleges megoldása Y , akkor $y = Y + y_0$ kielégíti az inhomogén egyenletet.

Bizonyítás. A feltétel szerint

y_0 kielégíti az (1), Y kielégíti a (2) egyenletet.

$$(3) \quad y_0' + p(x)y_0 = q(x),$$

$$(4) \quad Y' + p(x)Y = 0.$$

Helyettesítsük be az

$$y = Y + y_0 \quad \text{és}$$

$$y' = Y' + y_0'$$

értékeket az (1) egyenlet bal oldalába.

$$Y' + y_0' + p(x)Y + p(x)y_0 = [Y' + p(x)Y] + [y_0' + p(x)y_0] = 0 + q(x) = q(x).$$

Ugyanis a zárójelben levő kifejezések értéke a (4) és (3) egyenlet értelmében 0 és $q(x)$.

Tehát

$$y = Y + y_0$$

kielégíti az $y' + p(x)y = q(x)$ inhomogén lineáris differenciálegyenletet.

Érvényes a tétel megfordítása is.

Tétel. Ha az

$$y' + p(x)y = q(x)$$

inhomogén differenciálegyenlet tetszőleges megoldása y , egy partikuláris megoldása y_0 , akkor az

$$Y' + p(x)Y = 0$$

homogén differenciálegyenletet kielégíti az

$$Y = y - y_0 \quad \text{függvény.}$$

Bizonyítás. A feltétel értelmében

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$\text{és} \quad y_0' + p(x)y_0 = q(x).$$

A két egyenletet egymásból kivonva:

$$(y - y_0)' + p(x)(y - y_0) = 0.$$

Tehát $Y = y - y_0$ a homogén egyenlet megoldása.

A két tételt együttesen így fogalmazzuk meg.

$$\text{Az} \quad y' + p(x)y = q(x)$$

inhomogén lineáris egyenlet általános megoldása

$$y = y_0 + Y,$$

ahol y_0 az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása, Y a megfelelő $Y' + p(x)Y = 0$ homogén differenciálegyenlet általános megoldása.

Az állandó variálásának módszere. Legyen az $y' + p(x)y = q(x)$ differenciálegyenletnek megfelelő homogén egyenletnek,

$$Y' + p(x)Y = 0\text{-nak}$$

megoldása

$$Y = CY_1,$$

ahol Y_1 a homogén egyenlet egy partikuláris megoldása ($C = 1$ eset).

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását

$$y = k(x)Y_1 \quad \text{alakban keressük.}$$

A C konstans helyébe a $k(x)$ függvényt írtuk. A módszert az *állandó variálásának* nevezzük. A $k(x)$ függvényt úgy akarjuk meghatározni, hogy y az inhomogén differenciálegyenletet kielégítse. y -t deriválva:

$$y' = k'(x)Y_1 + k(x)Y_1'.$$

y és y' értékeit az inhomogén egyenletbe helyettesítve:

$$k'(x)Y_1 + k(x)Y_1' + p(x)k(x)Y_1 = q(x).$$

Rendezve:

$$k'(x)Y_1 + k(x)[Y_1' + p(x)Y_1] = q(x).$$

Y_1 a homogén egyenlet megoldása. A szögletes zárójelben levő kifejezés zérus, ezért

$$k'(x) = \frac{q(x)}{Y_1},$$

$$k(x) = \int \frac{q(x)}{Y_1} dx.$$

Mivel a homogén lineáris differenciálegyenlet Y_1 partikuláris megoldása

$$Y_1 = e^{-\int p(x) dx},$$

$$k(x) = \int [e^{\int p(x) dx} \cdot q(x)] dx.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása:

$$y_0 = k(x) Y_1.$$

$$y_0 = e^{-\int p(x) dx} \cdot \int [e^{\int p(x) dx} \cdot q(x)] dx.$$

Végül az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = y_0 + CY_1.$$

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left\{ C + \int [e^{\int p(x) dx} + q(x)] dx \right\}.$$

Az általános képlet használata helyett célszerűbb a módszert konkrét példában alkalmazni.

Példák

1. $y' + 3y = e^{-x}.$

A megfelelő homogén egyenlet:

$$Y' + 3Y = 0,$$

$$\frac{dY}{dx} = -3Y.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dY}{Y} = -3 dx.$$

$$\ln |Y| = -3x + C_1.$$

$$|Y| = e^{-3x + C_1}.$$

$$|Y| = e^{C_1} \cdot e^{-3x},$$

$$Y = C e^{-3x}$$

az $y' + 3y = 0$ homogén egyenlet megoldása.

Hogy az $y' + 3y = e^{-x}$

inhomogén egyenlet partikuláris megoldását megkapjuk, variáljuk a C állandót, azaz keressük az egyenlet megoldását

$$y = k(x) e^{-3x} \text{ alakban.}$$

Szorzatként differenciálva:

$$y' = k'(x) e^{-3x} - 3k(x) e^{-3x}.$$

Az $y' + 3y = e^{-x}$ egyenletbe helyettesítsük be y és y' értékeit:

$$k'(x) e^{-3x} - 3k(x) e^{-3x} + 3k(x) e^{-3x} = e^{-x}.$$

$$k'(x) e^{-3x} = e^{-x},$$

innen $k'(x) = e^{2x}.$

$k(x)$ -et integrálással kapjuk meg:

$$k(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} 2 dx = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

Az integrációs konstans nem írjuk ki (0-nak vesszük), mert csak egy partikuláris megoldást keresünk.

$$y_0 = k(x) e^{-3x},$$

$$y_0 = \frac{1}{2} e^{-x}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = y_0 + Y.$$

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} + C e^{-3x}.$$

2. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$

Keressük azt a partikuláris megoldást, amely az $x = 0, y = 0$ kezdeti feltételnek eleget tesz!

$$y' - y \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

A homogén lineáris egyenlet:

$$Y' - Y \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

Innen $\frac{dY}{dx} = Y \frac{\sin x}{\cos x}.$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dY}{Y} = \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Integrálva: $\ln |Y| = -\ln |\cos x| + \ln |C|.$

$$\ln |Y| = \ln \left| \frac{C}{\cos x} \right|.$$

Így $Y = C \frac{1}{\cos x}.$

Az állandókat variálva az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$y_0 = k(x) \frac{1}{\cos x},$$

$$y'_0 = k'(x) \frac{1}{\cos x} + k(x) \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

y_0 és y'_0 értékeit az inhomogén egyenletbe helyettesítve:

$$k'(x) \frac{1}{\cos x} + k(x) \frac{\sin x}{\cos^2 x} - k(x) \frac{1}{\cos x} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

$$k'(x) = 1,$$

$$k(x) = x,$$

$$y_0 = \frac{x}{\cos x}.$$

Az általános megoldás:

$$y = \frac{x}{\cos x} + \frac{C}{\cos x},$$

$$y = \frac{x+C}{\cos x}.$$

A (0; 0) ponton átmenő megoldásnál:

$$0 = \frac{0+C}{1}, \quad C = 0.$$

A partikuláris megoldás:

$$y = \frac{x}{\cos x}.$$

3. Kapcsoljunk egy $R(\Omega)$ ohmos ellenállást és egy $L(H)$ önindukciójú tekercset sorba kötve tartalmazó áramkörbe U_0 állandó feszültséget. Határozzuk meg az i áramerősséget (A) az idő függvényeként.

Kirchhoff törvénye szerint:

$$U_0 = Ri + L \frac{di}{dt},$$

azaz
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{U_0}{L}.$$

Ez i -re nézve t függvényeként lineáris inhomogén differenciálegyenlet. A megfelelő homogén egyenlet:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I,$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt,$$

$$\ln I = -\frac{R}{L} t + C_1,$$

$$I = Ce^{-\frac{R}{L} t}.$$

Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$i = k(t) e^{-\frac{R}{L} t} \text{ alakban.}$$

$$\frac{di}{dt} = k'(t) e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} k(t) e^{-\frac{R}{L} t},$$

i és $\frac{di}{dt}$ értékeit az inhomogén egyenletbe helyettesítve:

$$k'(t) e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} k(t) e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{R}{L} k(t) e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{U_0}{L}.$$

$$k'(t) = \frac{U_0}{L} e^{\frac{R}{L} t}.$$

$$k(t) = \frac{U_0}{R} e^{\frac{R}{L} t}.$$

$$i = k(t) e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{U_0}{R}.$$

Az általános megoldás:

$$i = i_0 + I.$$

$$i = \frac{U_0}{R} + Ce^{-\frac{R}{L} t}.$$

A kezdeti feltétel:

Ha $t = 0, \quad i = 0.$

Így $C = -\frac{U_0}{R}.$

A keresett partikuláris megoldás:

$$i = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right).$$

Az egyenletből leolvasható, hogy ha t nő, $i \rightarrow \frac{U_0}{R}$, az intenzitás közelítőleg állandó lesz.

4. Kapcsoljunk egy $R(\Omega)$ ohmos ellenállást és egy $L(H)$ önindukciójú tekercset tartalmazó áramkörbe $U = U_0 \sin \omega t$ váltakozó feszültséget (U_0 a feszültség csúcsértéke, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, a körfrekvencia). Határozzuk meg az áramerősséget az idő függvényeként! Kirchhoff törvénye alapján az összefüggés:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_0 \sin \omega t,$$

azaz
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{U_0}{L} \sin \omega t.$$

Ez i -re nézve lineáris inhomogén differenciálegyenlet.
A megfelelő homogén egyenlet:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I.$$

Ennek megoldása az előző példa alapján:

$$I = C e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$i = k(t) e^{-\frac{R}{L} t} \quad \text{alakban.}$$

$$\frac{di}{dt} = k'(t) e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} k(t) e^{-\frac{R}{L} t}.$$

i és $\frac{di}{dt}$ értékeit az inhomogén egyenletbe helyettesítve:

$$k'(t) e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} k(t) e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{R}{L} k(t) e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{U_0}{L} \sin \omega t.$$

Innen $k'(t) = \frac{U_0}{L} e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t,$

$$k(t) = \frac{U_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t dt.$$

Az integrált parciális integrálással kiszámítva:

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t dt &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t - \frac{L}{R} \omega \int e^{\frac{R}{L} t} \cos \omega t dt = \\ &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t - \frac{L^2}{R^2} \omega e^{\frac{R}{L} t} \cos \omega t - \frac{L^2}{R^2} \omega^2 \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}\right) \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t dt = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \left(\sin \omega t - \frac{L}{R} \omega \cos \omega t\right).$$

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t dt &= \frac{R^2}{R^2 + L^2 \omega^2} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \left(\sin \omega t - \frac{L}{R} \omega \cos \omega t\right) = \\ &= \frac{L}{R^2 + L^2 \omega^2} e^{\frac{R}{L} t} (R \sin \omega t - L \omega \cos \omega t). \end{aligned}$$

$$k(t) = \frac{U_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t dt.$$

$$i_0 = k(t) e^{-\frac{R}{L} t}.$$

$$i_0 = \frac{U_0}{R^2 + L^2 \omega^2} (R \sin \omega t - L \omega \cos \omega t).$$

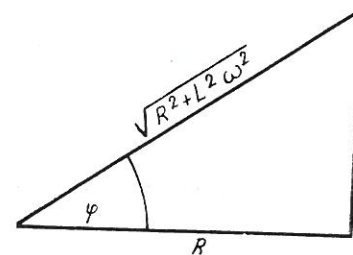
Így

Ezt így is írhatjuk:

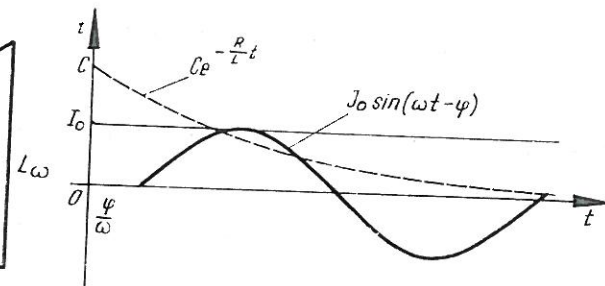
$$i_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin \omega t - \frac{L \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos \omega t \right).$$

Vezessük be a $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L \omega}{R}$ jelölést.

$$\varphi = \operatorname{Arctg} \frac{L \omega}{R}.$$



12.14 ábra



12.15 ábra

A 12.14 ábra alapján

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{L \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}.$$

Így

$$i_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi).$$

$$i_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

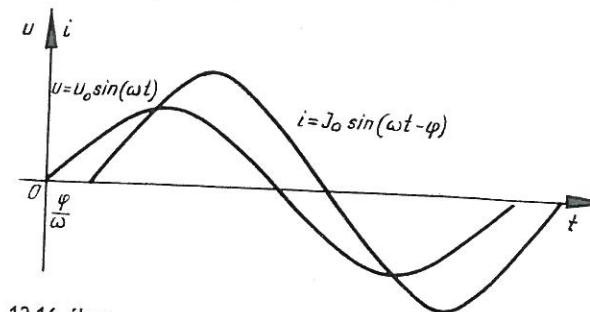
Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$i = i_0 + I.$$

$$i = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) + C e^{-\frac{R}{L} t} \quad (12.15 \text{ ábra}).$$

A bekapcsolás után bizonyos idővel a homogén egyenlet megoldása elenyésző lesz, így a stacionárius áramerősség:

$$i = i_{\text{stac}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) = I_0 \sin(\omega t - \varphi).$$



12.16 ábra

Az egyenletben φ a fáziskésés, $\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$ az eredő ellenállás vagy impedancia, I_0 a stacionárius áramerősség maximális értéke. Időre átszámítva az áramerősség, amely ugyanolyan frekvenciájú, mint a feszültség, $t = \frac{\varphi}{\omega}$ másodperccel késik a feszültséghez képest (12.16 ábra).

12.1.5 A Bernoulli-féle differenciálegyenletek

A Bernoulli-féle differenciálegyenlet általános alakja

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha.$$

A Bernoulli-féle differenciálegyenlet abban különbözik az

$$y' + p(x)y = q(x)$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenlettől, hogy a jobb oldalon $q(x)$ függvény és y^α szorzata áll (α tetszőleges valós szám).

Az $\alpha = 0$ és $\alpha = 1$ speciális esetekben a Bernoulli-egyenlet így alakul.

Ha $\alpha = 0$,

$$y' + p(x)y = q(x),$$

az egyenlet lineáris inhomogén differenciálegyenlet.

Ha $\alpha = 1$

$$y' + p(x)y = q(x)y,$$

azaz

$$y' + [p(x) - q(x)]y = 0,$$

az egyenlet lineáris homogén differenciálegyenlet.

Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $\alpha \neq 1$ és $\alpha \neq 0$.

Az

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

Bernoulli-féle differenciálegyenlet lineáris inhomogén differenciálegyenletté alakítható. Tegyük fel, hogy $y > 0$.

Osszuk el az egyenletet y^α -val:

$$y' \cdot y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Alkalmazzuk az $u = y^{1-\alpha}$ helyettesítést:

$$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y',$$

innen

$$y'y^{-\alpha} = \frac{u'}{1-\alpha}.$$

Az $y'y^{-\alpha}$ és $y^{1-\alpha}$ értékeket behelyettesítve az

$$\frac{u'}{1-\alpha} + p(x)u = q(x)$$

egyenletet kapjuk.

Ez a differenciálegyenlet u -ra már lineáris inhomogén differenciálegyenlet. Az egyenletet u -ra megoldva, az $u = y^{1-\alpha}$ egyenletből

$$y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

a Bernoulli-féle differenciálegyenlet megoldása.

Példák

$$1. \quad y' + \frac{1}{x+1}y = -y^2.$$

Osszuk végig az egyenletet $(-y^2)$ -tel:

$$-y' \cdot y^{-2} - \frac{1}{x+1}y^{-1} = 1.$$

Alkalmazzuk az

$$u = y^{-1} \quad \text{helyettesítést.}$$

$$u' = -y^{-2} \cdot y'.$$

Az u és u' értékeit behelyettesítve:

$$u' - \frac{1}{x+1}u = 1.$$

Ez u -ra inhomogén lineáris differenciálegyenlet. A megfelelő homogén egyenlet:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{x+1}U.$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{dx}{x+1}.$$

Integrálva $\ln |U| = \ln |x+1| + C_1$.

$$U = C(x+1).$$

Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$u_0 = k(x)(x+1) \quad \text{alakban.}$$

$$u'_0 = k'(x)(x+1) + k(x).$$

u'_0 és u_0 értékeit az inhomogén egyenletbe helyettesítve:

$$k'(x)(x+1) + k(x) - \frac{1}{x+1}k(x)(x+1) = 1.$$

$$k'(x) = \frac{1}{x+1}.$$

$$k(x) = \ln |x+1|.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$u_0 = (x+1) \ln |x+1|.$$

Általános megoldása:

$$u = u_0 + U,$$

$$u = (x+1)(\ln|x+1| + C).$$

Az $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$

Bernoulli-féle differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = \frac{1}{u},$$

$$v = \frac{1}{(x+1)(\ln|x+1| + C)}.$$

2. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0,$
 $y' - y \operatorname{tg} x = -y^2 \cos x \quad /: (-y^2),$
 $-y' y^{-2} + y^{-1} \operatorname{tg} x = \cos x.$

Legyen $u = y^{-1},$
 $u' = -y^{-2} y'.$

u' és u értékeit behelyettesítve:

$$u' + u \operatorname{tg} x = \cos x.$$

Az egyenlet u -ra lineáris differenciálegyenlet.
A homogén egyenlet:

$$U' + U \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\frac{dU}{dx} = -U \operatorname{tg} x,$$

$$\frac{dU}{dx} = -U \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{-\sin x}{\cos x} dx.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\ln|U| = \ln|\cos x| + C_1,$$

$$U = C \cos x.$$

Az állandót variálva keressük a homogén egyenlet partikuláris megoldását

$$u_0 = k(x) \cos x \quad \text{alakban.}$$

$$u'_0 = k'(x) \cos x - k(x) \sin x.$$

u_0 és u'_0 értékeit az

$$u' + u \operatorname{tg} x = \cos x$$

inhomogén egyenletbe helyettesítve:

$$k'(x) \cos x - k(x) \sin x + k(x) \cos x \operatorname{tg} x = \cos x.$$

Innen $k'(x) = 1.$

$$k(x) = x.$$

$$u_0 = x \cos x.$$

Az általános megoldás:

$$u = u_0 + U,$$

$$u = x \cos x + C \cos x,$$

$$u = (x + C) \cos x.$$

Mivel $y = \frac{1}{u},$

a Bernoulli-egyenlet megoldása:

$$y = \frac{1}{(x+C) \cos x}.$$

12.1.6 Egzakt differenciálegyenletek

Bevezetés. Legyen adott egy síkbeli vektor-vektor függvény

$$\mathbf{v} = p(x; y) \mathbf{i} + q(x; y) \mathbf{j}.$$

A 11.3.10 pontban megismertek szerint valamely T tartományban $\mathbf{v}$ -nek van potenciál-függvénye, ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv 0.$$

A $\Phi(x; y)$ potenciálfüggvény az a függvény, amelyre

$$\Phi(x; y) = -u(x; y) \quad \text{jelöléssel:}$$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} = p(x; y) \mathbf{i} + q(x; y) \mathbf{j} = \mathbf{v}(\mathbf{r}).$$

A potenciálfüggvény az egyszerűen összefüggő $(x; y)$ síkbeli T tartományban a $P_0(x_0; y_0)$ és $P(x; y)$ pontok közötti görbe menti integrállal számítható ki.

$$u(x; y) = \int_{P_0(x_0; y_0)}^{P(x; y)} [p(x; y) dx + q(x; y) dy].$$

A $\mathbf{v} = p(x; y) \mathbf{i} + q(x; y) \mathbf{j}$ függvényre a $\operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv 0$ feltétel azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial p}{\partial y} \equiv \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Ebből pedig az következik, hogy a

$$p(x; y) dx + q(x; y) dy$$

kifejezés teljes differenciál, és a

$$\int_g \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_g [p(x; y) dx + q(x; y) dy]$$

vonalintegrál független az integrálás útjától.

Az az $u(x; y)$ függvény, amelyre nézve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x; y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q(x; y),$$

szintvonalakkal, az ún. ekvipotenciális vonalakkal szemléltethető:

$$u(x; y) = C.$$

Ez a görbesereg a

$$p(x; y) dx + q(x; y) dy = 0$$

differenciálegyenlettel jellemezhető.

Fordítva: a görbesereg a differenciálegyenlet megoldásaiból, integrálgörbéiből áll.

Definíció. A $p(x; y) + q(x; y) y' = 0$

vagy $p(x; y) dx + q(x; y) dy = 0$

differenciálegyenlet *egzakt differenciálegyenlet*, ha van olyan folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkező $u(x; y)$ függvény, amelyre nézve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x; y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q(x; y).$$

Tegyük fel, hogy az x_0 hely egy környezetében $y = y(x)$ megoldása az egzakt differenciálegyenletnek, és x_0 -ban egy előírt y_0 értéket vesz fel: $y_0 = y(x_0)$.

Tegyük fel továbbá, hogy $q(x_0; y_0) \neq 0$.

Mivel a differenciálegyenlet egzakt, van olyan

$$u = u(x; y) \quad \text{függvény, hogy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x; y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q(x; y).$$

Az implicit függvény tétele szerint az

$$u(x; y) = u(x_0; y_0)$$

egyenlet az x_0 hely egy környezetében egyértelműen meghatározza azt az

$$y = y(x)$$

függvényt, amelyre az illető környezetben

$$u[x; y(x)] \equiv u(x_0; y_0),$$

és az implicit függvény differenciálási szabálya szerint ez a függvény azonos az előbb felvett $y = y(x)$ megoldással.

Tehát az egzakt differenciálegyenlet minden megoldása

$$u(x; y) = C$$

alakú implicit függvény.

Nyilvánvaló, hogy minden ilyen alakú implicit függvény a differenciálegyenlet megoldása (valamilyen kezdeti feltétel mellett).

Így az egzakt differenciálegyenlet megoldása, az $u(x; y)$ függvény, egyben a $\Phi(x; y)$ potenciál-függvény meghatározását jelenti.

Egyszeresen összefüggő T tartomány esetén a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

egyenlőség fennállása biztosítja, hogy a differenciálegyenlet egzakt legyen.

Az $u(x; y)$ függvény a T tartományban $P_0(x_0; y_0)$ és $P(x; y)$ pontokat összekötő bármely görbe menti integrállal kiszámítható.

$$u(x; y) = \int_{P_0(x_0; y_0)}^{P(x; y)} [p(x; y) dx + q(x; y) dy].$$

A számítást legegyszerűbb a koordinátatengelyekkel párhuzamos utakon végezni.

$$u(x; y) = \int_{x_0}^x p(x; y_0) dx + \int_{y_0}^y q(x; y) dy$$

vagy

$$u(x; y) = \int_{y_0}^y q(x_0; y) dy + \int_{x_0}^x p(x; y) dx.$$

Sokszor egyszerűbb az egzakt differenciálegyenleteket más úton megoldani. Ezt a módszer konkrét példákon mutatjuk be.

Példák

1. $2xy dx + (x^2 - 2y) dy = 0.$

$$p(x; y) = 2xy, \quad q(x; y) = x^2 - 2y.$$

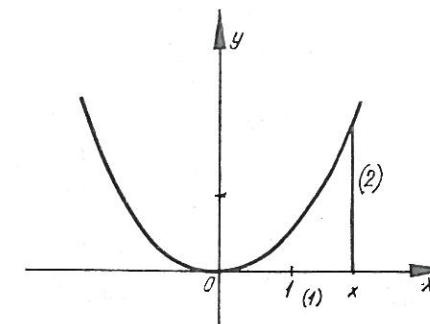
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 2x.$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

az egyenlet egzakt differenciálegyenlet.

$$q(x; y) \neq 0,$$

ha $y \neq \frac{1}{2} x^2.$



12.17 ábra

a) A vonalintegrált a $P_0(1; 0)$ és $P(x; y)$ ($y < \frac{1}{2} x^2$) pontok között keressük (12.17 ábra).

Az (1) úton $y = 0, \quad x = t, \quad dx = dt.$

$$\int_1^x 0 dt = 0.$$

A (2) úton $x = x, \quad dx = 0,$
 $y = t, \quad dy = dt.$

$$\int_0^y (x^2 - 2t) dt = \left[x^2 t - t^2 \right]_0^y = x^2 y - y^2.$$

Így $u(x; y) = x^2 y - y^2.$

A differenciálegyenlet megoldása: $x^2 y - y^2 = C.$

b) Oldjuk meg a feladatot más módon is:

$$2xy dx + (x^2 - 2y) dy = 0.$$

$$p(x; y) = 2xy, \quad q(x; y) = x^2 - 2y.$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 2x.$$

A bal oldal teljes differenciál:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Integráljuk az első egyenletet x szerint:

$$u(x; y) = x^2 y + \varphi(y).$$

A $\varphi(y)$ tag csak y -től függhet, hiszen x szerinti deriváltja zérus. Deriváljuk az $u(x; y)$ -ra így kapott függvényt y szerint:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y).$$

Ennek értéke

$$\begin{aligned} q(x; y) &= x^2 - 2y \text{-nal egyenlő.} \\ x^2 + \varphi'(y) &= x^2 - 2y, \\ \varphi'(y) &= -2y, \\ \varphi(y) &= -y^2 + C_1, \\ u(x; y) &= x^2 y - y^2 + C_1, \\ \text{azaz } x^2 y - y^2 &= C \text{ a megoldás.} \end{aligned}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha $\frac{\partial u}{\partial y}$ -ből indulunk ki:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Integráljuk a $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2y$ kifejezést y szerint:

$$u(x; y) = x^2 y - y^2 + \psi(x).$$

A $\psi(x)$ kifejezés csak x függvénye lehet. $u(x; y)$ -t x szerint deriválva:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + \psi'(x).$$

A kifejezés értéke $2xy$ -nal egyenlő.

$$2xy + \psi'(x) = 2xy.$$

Innen $\psi'(x) = 0$, azaz $\psi(x) = C_2.$

$$u(x; y) = x^2 y - y^2 + C_2.$$

Az egyenlet megoldása az

$$x^2 y - y^2 = C \quad \text{görbesereg.}$$

2. Egy végtelen hosszú vezető mágneses terét (a vezetőt a z tengelybe helyezve) a

$$\mathbf{H} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

vektortér állítja elő.

Ez a vektortér a z tengelyen nincs értelmezve. Ha a z tengelyt elhagyjuk, a tartomány már nem egy-
szeresen összefüggő. Tekintsük ezért az $x > 0$ térrészt, és határozzuk meg a vektortér potenciálját.

$$\begin{aligned} p(x; y) &= \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad q(x; y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial q}{\partial x}. \end{aligned}$$

A vektortér rendelkezik potenciálfüggvénnyel.

A potenciálfüggvény meghatározása ekvivalens a

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0$$

egzakt differenciálegyenlet megoldásával.

$$\begin{aligned} p(x; y) &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad q(x; y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ u(x; y) &= \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} dy = \arctg \frac{y}{x} + \psi(x). \end{aligned}$$

Ezt x szerint deriválva:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) + \psi'(x) = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \psi'(x).$$

Másrészt $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2},$

így $\psi'(x) = 0$, azaz $\psi(x) = C_1.$

Tehát $u(x; y) = \arctg \frac{y}{x} + C_1.$

Az $u(x; y) = C_2$, azaz az

$$\arctg \frac{y}{x} = C$$

egyenlet szolgáltatja a differenciálegyenlet megoldását.

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\text{grad} \left(\arctg \frac{y}{x} \right) = \mathbf{H}.$$

Az ekvipotenciális vonalak az

$$y = (\text{tg } C) x, \quad \text{azaz az} \\ y = C^* x \quad \text{egyenletű félegyenesek.}$$

Integráló tényező (Euler-féle multiplikátor)

Legyen adott a

$$p(x; y) + q(x; y) y' = 0,$$

$$\text{azaz a} \quad p(x; y) dx + q(x; y) dy = 0$$

differenciálegyenlet.

Tegyük fel, hogy $p(x; y)$ és $q(x; y)$ differenciálhatók.

$$\text{Ha} \quad \frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial q}{\partial x},$$

az egyenlet nem egzakt differenciálegyenlet.

Keressünk olyan $M = M(x; y)$ differenciálható függvényt, amellyel végigszorozva a differenciálegyenletet az egzakttá tehetők.

Tétel. A $p(x; y) dx + q(x; y) dy = 0$ -ból kapott

$$M(x; y) p(x; y) dx + M(x; y) q(x; y) dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt, ha $M = M(x; y)$ kielégíti a

$$\frac{\partial M}{\partial y} p - \frac{\partial M}{\partial x} q = M \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

parciális differenciálegyenletet.

Bizonyítás. Az $M(x; y) p(x; y) dx + M(x; y) q(x; y) dy = 0$

differenciálegyenlet, röviden

$$Mp dx + Mq dy$$

egzakt, ha

$$\frac{\partial(Mp)}{\partial y} = \frac{\partial(Mq)}{\partial x}.$$

A deriválást elvégezve:

$$\frac{\partial M}{\partial y} p + M \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x} q + M \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Rendezve:

$$\frac{\partial M}{\partial y} p - \frac{\partial M}{\partial x} q = M \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right).$$

Az $M(x; y) = M$ kifejezést *integráló tényezőnek* vagy *Euler-féle multiplikátornak* nevezik. A következőkben azzal a két speciális esettel foglalkozunk, amikor az integráló tényező csak x -nek, vagy csak y -nak függvénye, azaz

$$a) \quad M = M(x), \quad b) \quad M = M(y)$$

$$a) \quad M = M(x).$$

$M = M(x)$ integráló tényező, ha

$$\frac{\partial M}{\partial y} p - \frac{\partial M}{\partial x} q = M \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right).$$

Mivel M csak x -től függ, $\frac{\partial M}{\partial y} = 0$ és $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{dM}{dx}$.

Feltéve, hogy $M(x) \neq 0$ és $q(x; y) \neq 0$,

$$(1) \quad \frac{1}{M} \frac{dM}{dx} = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q}.$$

Ebből az egyenletből kiolvasható, hogy csak x -től függő $M(x)$ integráló tényezőt akkor találunk, ha az (1) egyenlet jobb oldalán csak x -től függő kifejezés áll. Másrészt ez a feltétel elégséges is, mert ha az adott p és q mellett

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q}$$

csak x -től függ,

az (1) differenciálegyenlet $M(x)$ -re megoldható a változók szétválasztásának módszerével. M -ről feltehetjük, hogy pozitív (M -mel együtt $-M$ is integráló tényező), így

$$\ln M = \int \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q} dx, \\ M(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q} dx}.$$

$$b) \quad M = M(y).$$

Az $a)$ esettel analóg módon járhatunk el.

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{dM}{dy}.$$

A feltételi egyenletből:

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dy} = \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p} \quad (M(y) \neq 0, p(x; y) \neq 0).$$

$$\ln M = \int \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p} dx,$$

$$M(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p} dy}.$$

Az integrálási konstans azért nem írtuk ki, mert elég egy integrálási tényezőt ($C = 1$) meghatározni.

Tehát a

$$p(x; y) dx + q(x; y) dy = 0$$

differenciálegyenlet $M(x)$, illetve $M(y)$ multiplikátorral való szorzással egzakttá tehető, ha a

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q} \quad \text{kifejezés csak } x\text{-től,}$$

illetve a

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p} \quad \text{kifejezés csak } y\text{-től függ.}$$

Példák

1. $(1 - yx^2) dx + x^2(y - x) dy = 0.$

A differenciálegyenlet megoldását keressük, ha $x \neq 0$, $y \neq x$,

$$p = 1 - yx^2, \quad q = x^2y - x^3.$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 2xy - 3x^2.$$

A differenciálegyenlet nem egzakt.

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y - x)} = \frac{2x(x - y)}{x^2(y - x)} = -\frac{2}{x}.$$

A kifejezés csak x -től függ:

$$\ln M = \int \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q} dx.$$

$$\ln M = \int -\frac{2}{x} dx = -2 \ln x = 2 \ln \frac{1}{x} = \ln \frac{1}{x^2}.$$

$$M(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Az eredeti differenciálegyenletet $\frac{1}{x^2}$ -tel beszorozva ($x \neq 0$):

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx + (y - x) dy = 0.$$

$$p = \frac{1}{x^2} - y, \quad q = y - x.$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -1.$$

Ez a differenciálegyenlet már egzakt.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - y.$$

$$u = \int \left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx = -\frac{1}{x} - xy + \varphi(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + \varphi'(y).$$

A kifejezés értéke $q(x; y)$ -nal egyenlő.

$$-x + \varphi'(y) = y - x,$$

$$\varphi'(y) = y,$$

$$\varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C_1,$$

$$u(x; y) = -\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} + C_1.$$

A differenciálegyenlet megoldása:

$$-\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} = C.$$

2. $2x dx + (x^2 + y^2 + 2y) dy = 0 \quad (x^2 + y^2 + 2y \neq 0).$

$$p = 2x, \quad q = x^2 + y^2 + 2y.$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 2x.$$

A differenciálegyenlet nem egzakt.

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q} = \frac{-2x}{x^2 + y^2 + 2y},$$

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p} = \frac{2x}{2x} = 1.$$

A második kifejezés értéke nem függ x -től.

$$\ln M(y) = \int \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p} dy = \int dy = y.$$

$$M = M(y) = e^y.$$

Az eredeti differenciálegyenlet az e^y multiplikátorral beszorozva:

$$2xe^y dx + e^y(x^2 + y^2 + 2y) dy = 0.$$

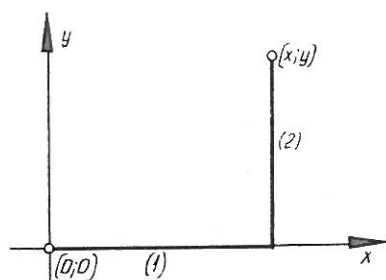
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2xe^y; \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 2xe^y.$$

Ez a differenciálegyenlet már egzakt.
Oldjuk meg a feladatot most vonalintegrállal (12.18 ábra)!

Az (1) úton: $x = t$, $dx = dt$, $y = 0$, $dy = 0$.

$$\int_{(1)} (p dx + q dy) = \int_0^x 2t dt = \left[t^2 \right]_0^x = x^2.$$

(t a 0 és x közötti értékeket futja be.)
A (2) úton: $x = x$, $dx = 0$, $y = t$, $dy = dt$.
(t a 0 és y közötti értékeket futja be.)



12.18 ábra

$$\begin{aligned} \int_{(2)} (p dx + q dy) &= \int_0^y e^t(x^2 + t^2 + 2t) dt = \left[e^t x^2 \right]_0^y + \int_0^y t^2 e^t dt + 2 \int_0^y t e^t dt = \\ &= (e^y x^2 - x^2) + \left[e^t t^2 \right]_0^y - 2 \int_0^y t e^t dt + 2 \int_0^y t e^t dt = e^y x^2 - x^2 + e^y y^2. \end{aligned}$$

$$u(x; y) = x^2 + e^y x^2 - x^2 + e^y y^2.$$

$$u(x; y) = e^y(x^2 + y^2).$$

A differenciálegyenlet megoldása:

$$e^y(x^2 + y^2) = C.$$

12.1.7 Izogonális és ortogonális trajektóriák

Két görbe metszéspontjában a két görbe által bezárt szögön az érintők által bezárt szöget értjük.

Definíció. Az $F_1(x; y; C) = 0$ és $F_2(x; y; C) = 0$ egyenletekkel adott görbeseregek izogonális trajektóriák, ha az egyik görbesereg bármely görbéje a másik görbesereg bármely görbéjét adott szög alatt metszi.

Definíció. Az $F_1(x; y; C) = 0$ és $F_2(x; y; C) = 0$ egyenletekkel adott görbeseregek ortogonális trajektóriák, ha az egyik görbesereg bármely görbéje a másik görbesereg bármely görbéjét $\alpha = \frac{\pi}{2}$ szög alatt metszi. (Az érintők merőlegesek egymásra.)

Legyen az $F_1(x; y; C_1) = 0$ egyenletű görbe és az $F_2(x; y; C_2) = 0$ egyenletű görbe metszéspontjában az érintők irányszöge α és β .

A 12.19 ábra szerint:

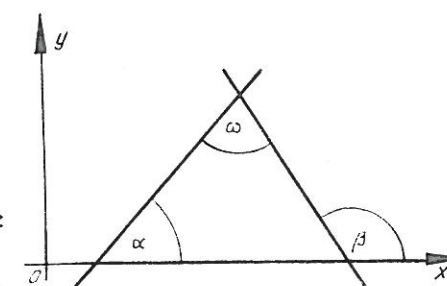
$$\beta = \alpha + \omega,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \omega}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \omega}.$$

Az izogonális trajektóriák definíciója szerint:

$$\operatorname{tg} \omega = k = \text{állandó},$$

$$(1) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + k}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot k}.$$



12.19 ábra

Ha a görbeseregek ortogonális trajektóriák:

$$\omega = \frac{\pi}{2},$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Az $F_1(x; y; C)$ görbesereg differenciálegyenletét $y' = f_1(x; y)$ alakban írva az (1), illetve (2) egyenletek alapján felírhatjuk az $F_2(x; y; C)$ görbesereg differenciálegyenletét, és abból az izogonális, illetve ortogonális trajektóriák egyenletét.

Példák

1. Írjuk fel az $y = ax^2$ görbesereg ortogonális trajektóriáinak egyenletét (12.20 ábra). A görbesereg olyan paraboláreg, amelynek csúcspontja az origó és tengelye az y tengely. Az egyenletet deriválva.

$$y' = 2ax.$$

Az $y = ax^2$ egyenletből az a paraméter:

$$a = \frac{y}{x^2}.$$

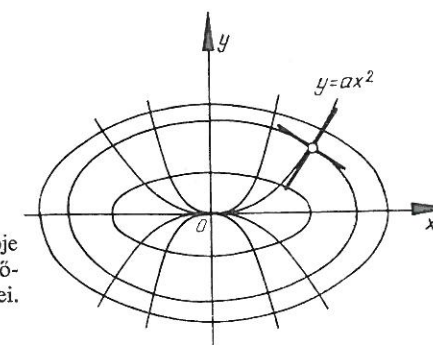
Ezt behelyettesítve:

$$y' = 2 \frac{y}{x^2} x,$$

$$y' = 2 \frac{y}{x}.$$

A merőleges görbesereg minden egyedének érintője merőleges az $y = ax^2$ görbesereg egyedeinek érintőjére, iránztangenseik egymás negatív reciprokok értékei.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2y}{x},$$



12.20 ábra

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{x}{2y}.$$

Az ortogonális trajektóriák differenciálegyenlete:

$$y' = -\frac{x}{2y},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}.$$

A változókat szétválasztva:

$$2y \, dy = -x \, dx.$$

Integrálva: $2y^2 = -x^2 + C^2.$

(Az integrációs konstans C^2 -nek vettük.)

Rendezve: $\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{C}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$

Az ortogonális görbesereg hasonló ellipszisekből áll.

2. Írjuk fel az

$$y = ax$$

egyenesre ortogonális trajektóriáit!

$$y' = a.$$

Mivel $a = \frac{y}{x},$

a görbesereg differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{y}{x}.$$

A merőleges görbesereg differenciálegyenlete:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

A változókat szétválasztva:

$$y \, dy = -x \, dx.$$

Integrálva $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C^2}{2}$

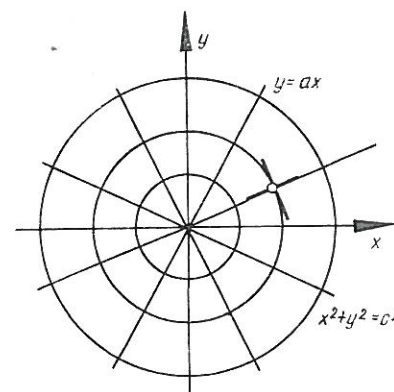
$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Az ortogonális trajektóriák az origó középpontú koncentrikus körök (12.21 ábra).

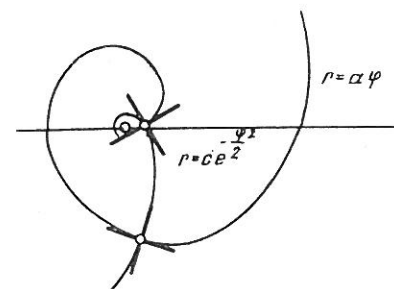
3. Határozzuk meg az

$$r = a\varphi$$

görbesereg ortogonális trajektóriáit. A sereg görbéi az ún. arkhimédieszi spirálisok (12.22 ábra). A görbéket polárkoordinátákban adtuk meg. A 7.4.2 pontban megismertek szerint a polárkoor-



12.21 ábra



12.22 ábra

dinátákkal adott görbék iránytangense:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r \, d\varphi}{dr}.$$

A görbeseregben:

$$r = a\varphi.$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = a.$$

Mivel $a = \frac{r}{\varphi},$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r}{\varphi}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r \, d\varphi}{dr} = \varphi.$$

A merőleges görbesereg iránytangense:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Az ortogonális trajektóriák differenciálegyenlete tehát

$$\frac{r \, d\varphi}{dr} = -\frac{1}{\varphi}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dr}{r} = -\varphi \, d\varphi.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\ln r = -\frac{\varphi^2}{2} + C_1,$$

$$r = C e^{-\frac{\varphi^2}{2}}.$$

4. Határozzuk meg az

$$y = ax$$

görbesereg izogonális trajektóriáinak egyenletét!

$$y' = a, \quad a = \frac{y}{x},$$

$$y' = \frac{y}{x},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Az izogonális trajektóriák egyenlete:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + k}{1 - k \operatorname{tg} \alpha}.$$

Az $y = ax$ görbesereg irántangense $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, az izogonális trajektóriáké: $\operatorname{tg} \beta = y'$.

Így az izogonális trajektóriák differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{\frac{y}{x} + k}{1 - k \frac{y}{x}} \quad (k = \operatorname{tg} \omega = \text{állandó}).$$

Az egyenlet homogén differenciálegyenlet.

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{helyettesítéssel:}$$

$$y = ux, \quad y' = u'x + u.$$

$$u'x + u = \frac{u+k}{1-ku}.$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{u+k}{1-ku} - u.$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{k+ku^2}{1-ku}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{1}{k} \frac{1-ku}{1+u^2} du = \frac{dx}{x}.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\frac{1}{k} \int \frac{1-ku}{1+u^2} du - \int \frac{u}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\frac{1}{k} \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln|x| + \ln C_1 \quad (C_1 > 0).$$

$$\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) + \ln|x| + \ln C_1.$$

$$\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln C_1 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Áttérve polárkoordinátákra:

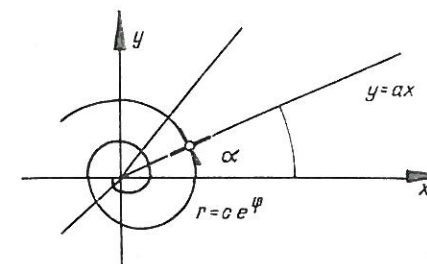
$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \varphi.$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

$$\frac{1}{k} \varphi = \ln C_1 r.$$

$$C_1 r = e^{\frac{\varphi}{k}}.$$

$$r = C e^{\frac{\varphi}{k}}.$$



12.23 ábra

Az izogonális trajektóriák logaritmikus spirálisok (12.23 ábra).

$$\text{Ha} \quad \omega = \frac{\pi}{4}, \quad k = 1, \quad r = C e^{\varphi}.$$

12.1.8 Elsőrendű differenciálegyenletek egzisztencia- és unicitási tételei

Az eddigiekben elsőrendű differenciálegyenletek különböző típusaival foglalkoztunk. A megoldás határozatlan állandót tartalmazott, tehát egy differenciálegyenletnek végtelen sok megoldása volt. Az előfordult példákban általában egy kezdeti feltételnek egy integrálgörbe felelt meg.

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, milyen feltételek biztosítják a differenciálegyenlet megoldhatóságát (egzisztenciátétel) és a megoldás egyértékűségét (unicitási tétel).

A differenciálegyenlet megoldásának létezését először CAUCHY bizonyította. Az itt közölt bizonyítás PICARDTÓL származik. A Picard-féle bizonyítás módszere a szukcesszív approximáció (fokozatos közelítés). A módszer egyben alkalmas a differenciálegyenletek közelítő megoldására.

Az egzisztencia feltételei

Legyen adott az

$$y' = f(x; y) \text{ differenciálegyenlet és az } (x_0; y_0) \text{ kezdeti érték.}$$

Az $f(x; y)$ függvény tegyen eleget a következő két feltételnek.

I. Az $f(x; y)$ függvény folytonos az R derékszögű négyszög alakú tartományban, amelynek középpontja $(x_0; y_0)$.

Tehát $f(x; y)$ folytonos az

$$\left. \begin{aligned} x_0 - a &\leq x \leq x_0 + a \\ y_0 - b &\leq y \leq y_0 + b \end{aligned} \right\} \text{ tartományban.}$$

Korlátos zárt halmazon folytonos függvény korlátos. Ezért az

I. feltétel azt is jelenti, hogy az R tartományban

$$|f(x; y)| \leq M.$$

2. Az $f(x; y)$ függvény az R tartományban az y változóra nézve eleget tesz a Lipschitz-jéle feltételnek, azaz létezik olyan N pozitív szám, hogy y két tetszőleges y_1 és y_2 értékére

$$|x - x_0| < a \quad \text{és} \quad |y_1 - y_0| < b, \quad |y_2 - y_0| < b \quad \text{esetén}$$

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| \leq N |y_1 - y_2|.$$

Megjegyzés. Bebizonyítjuk, hogy $f(x; y)$ -ra a Lipschitz-féle feltétel teljesül, ha az R tartományban $\frac{\partial f(x; y)}{\partial y}$ létezik és korlátos, azaz

$$\left| \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \right| \leq N.$$

Alkalmazva a Lagrange-féle középértéktételt:

$$f(x; y_1) - f(x; y_2) = f'_y(x; \eta)(y_1 - y_2),$$

ahol $\eta = y_2 + \theta(y_1 - y_2)$, és $0 < \theta < 1$.

Az abszolút értéket véve:

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| = |f'_y(x; \eta)| |y_1 - y_2| \leq N |y_1 - y_2|.$$

A Lipschitz-egyenlőtlenség érvényes lehet akkor is, ha $\frac{\partial f}{\partial y}$ nem létezik mindenütt.

Például az $|y|$ függvénynek az $y = 0$ helyen nincs deriváltja, mégis érvényes, hogy

$$||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|.$$

Az egzisztenciátétel bizonyítása

Bebizonyítjuk, hogy az 1. és 2. feltétel mellett az

$$y' = f(x; y)$$

egyenletnek létezik $y = Y(x)$ megoldása az $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ intervallumban, és $y = Y(x)$ az x_0 pontban az y_0 értéket veszi fel.

A h szám jelentése:

h az a és $\frac{b}{M}$ számok közül a kisebbet jelenti.

a) Megalkotjuk a keresett megoldás közelítő sorozatát.

Tegyük fel, hogy az

$$y = y(x)$$

függvény az $y_0 = y(x_0)$ kezdeti feltétel mellett eleget tesz az

$$y' = f(x; y)$$

differenciálegyenletnek.

Legyen

$$F(x) = f[x; y(x)].$$

A differenciálegyenlet szerint:

$$y'(x) = F(x).$$

$F(x)$ folytonos, ezért

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(x) dx,$$

azaz y kielégíti az

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x; y) dx$$

integrálegyenletet.

Fordítva: tegyük fel, hogy y eleget tesz az

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x; y) dx$$

integrálegyenletnek ($f(x; y)$ folytonos függvény). Ekkor az

$$F(x) = f[x; y(x)] \quad \text{jelöléssel:}$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(x) dx.$$

Mivel $F(x)$ folytonos,

$$y' = F'(x) = f[x; y(x)].$$

Tehát y kielégíti az

$$y' = f(x; y)$$

differenciálegyenletet az $y_0 = y(x_0)$ kezdeti feltétellel.

Így az $y' = f(x; y)$ egyenlet a kezdeti feltételekkel egyenértékű a következő integrálegyenlettel:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x; y) dx.$$

Nulladik közelítésnek vesszük az y_0 állandót. Az első közelítés, $y_1(x)$ a következő lesz:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x; y_0) dx.$$

Az integrálandó függvény ismert, ezért y_1 integrálással kiszámítható. Az egyenletből nyilvánvaló, ha $x = x_0$, $y = y_0$, tehát az első közelítés kielégíti a kezdeti feltételt.

Mivel $h \leq a$, $|x - x_0| < h$, $(x; y_0)$ az R tartományba esik. Ezért az 1. feltétel szerint

$$|f(x; y_0)| \leq M.$$

Így

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x; y_0) dx \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dx \right| = M|x - x_0|.$$

Vagyis $|y_1 - y_0| \leq M \cdot h$. Mivel $h \leq \frac{b}{M}$,

$$|y_1 - y_0| \leq b.$$

Ezért, ha $|x - x_0| < h$, $[x; y_1(x)]$ is az R tartományba esik, azaz az $y_1(x)$ függvény görbéje az R tartományban fekszik.

A második közelítés:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x; y_1) dx.$$

y_1 ismeretében az integrandusz ismert függvény.

Ha $x = x_0$, akkor $y_2 = y_0$, így y_2 kielégíti a kezdeti feltételt. Az $(x; y_1)$ pont $|x - x_0| \leq h$ mellett az R tartományba esik. Ezért

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{x_0}^x f(x; y_1) dx \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b.$$

Így az $y = y_2(x)$ függvény görbéje is az R tartományba esik.

A közelítések sorozatát teljes indukcióval adjuk meg.

Tegyük fel, hogy az

$$y_{n-1}(x)$$

$(n-1)$ -edik közelítést már definiáltuk, még hozzá úgy, hogy a függvény görbéje az R tartományban fekszik.

Ekkor

$$(1) \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x; y_{n-1}) dx.$$

A definícióból azonnal látható, hogy $y_n(x)$ kielégíti a kezdeti feltételt:

$$y_n(x_0) = y_0.$$

Megmutatjuk, hogy $|x - x_0| \leq h$ esetén az $y_n(x)$ függvénygörbe az R tartományba esik.

Mivel $(x; y_{n-1})$ az R tartományban van, ezért

$$(2) \quad |f(x; y_{n-1})| \leq M.$$

Az (1) és (2) egyenletek alapján:

$$|y_n - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x; y_{n-1}) dx \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b.$$

Tehát, ha $|x - x_0| \leq h$, akkor $[x; y_n(x)]$ is az R tartományba esik, vagyis az $y = y_n(x)$ függvény görbéje is az R tartományban fekszik.

Mivel y_1 -ről és y_2 -ről kimutattuk, hogy a kezdeti feltételt kielégítik, és a megfelelő függvénygörbék az R tartományba esnek, továbbá megmutattuk, hogy ha $y_{n-1}(x)$ görbéje az R tartományban van, akkor $y_n(x)$ görbéje is ott van, teljes indukcióval bebizonyítottuk, hogy az

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

közelítő függvények a kezdeti feltételt kielégítik és görbéik az R tartományba esnek.

b) Bebizonyítjuk, hogy a közelítő értékek sorozatának van véges határértéke.

Ehhez bebizonyítjuk az

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots$$

végtelen sor konvergenciáját.

A végtelen sor részletösszegei ugyanis azonosak az $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ sorozat tagjaival.

A végtelen sor tagjainak abszolút értékét megbecsüljük.

$$|y_0| = |y_0|,$$

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x; y_0) dx \right| \leq M|x - x_0|,$$

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{x_0}^x [f(x; y_1) - f(x; y_0)] dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x; y_1) - f(x; y_0)| dx \right|.$$

A Lipschitz-feltétel miatt:

$$|f(x; y_1) - f(x; y_0)| \leq N|y_1 - y_0|.$$

Így

$$|y_2 - y_1| \leq \left| \int_{x_0}^x N|y_1 - y_0| dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^x NM(x - x_0) dx \right| = \frac{MN}{2!} (x - x_0)^2.$$

Hasonlóan:

$$|y_3 - y_2| \leq \frac{MN^2}{3!} |x - x_0|^3.$$

Teljes indukcióval könnyen bizonyítható, hogy

$$|y_n - y_{n-1}| \leq \frac{MN^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n.$$

Tehát az

$$(1) \quad y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots$$

sor tagjai (ha y_0 -t figyelmen kívül hagyjuk) abszolút értékben kisebbek, mint az

$$(2) \quad Mh + M \frac{Nh^2}{2!} + M \frac{N^2 h^3}{3!} + \dots + M \frac{N^{n-1} h^n}{n!} + \dots$$

pozitív tagú numerikus sor megfelelő tagjai. Ez a sor a d'Alembert-féle hányadoskritérium szerint konvergens (6.1.6 pont):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{MN^n h^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{MN^{n-1} h^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Nh}{n+1} = 0 < 1.$$

Ezért az (1) sor nemcsak konvergens, hanem az $|x - x_0| < h$ tartományban egyenletesen konvergens.

Az (1) sor minden tagja folytonos függvény. A sor konstrukciójából következik, hogy az $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ sorozat határértéke,

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

létezik, és x -nek folytonos függvénye.

c) Kimutatjuk, hogy az

$$Y = Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

függvény kielégíti az

$$y' = f(x; y)$$

differentiálegyenletet.

A kezdeti feltételt kielégíti, mert

$$Y(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_0) = y_0.$$

Tekintsük az n -ik közelítést:

$$y_n(x) = y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x; y_{n-1}) dx.$$

Az $f[x; y_n(x)]$ az $[x_0 - h; x_0 + h]$ intervallumban egyenletesen konvergál az $f[x; Y(x)]$ értékhez, mert $f(x; y)$ egyenletesen folytonos az R tartományban, és az $y_n(x)$ függvénysorozat egyenletesen tart $Y(x)$ -hez. Ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(x; y_{n-1}) dx = \int_{x_0}^x f(x; Y) dx,$$

ha $|x - x_0| \leq h$.

Így az

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x; y_{n-1}) dx$$

egyenletből az $n \rightarrow \infty$ határátmenet után:

$$Y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x; Y) dx.$$

Vagyis az Y függvény eleget tesz az

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x; y) dx \quad \text{integrálegyenletnek.}$$

Tehát az

$$\begin{aligned} Y &= Y(x) && \text{függvény kielégíti az} \\ y' &= f(x; y) && \text{differentiálegyenletet az} \\ y_0 &= y(x_0) && \text{kezdeti feltétel mellett.} \end{aligned}$$

Ezzel az egzisztenciátételt az $[x_0 - h; x_0 + h]$ intervallumra bebizonyítottuk.

Az unicitási tétel

Az egzisztenciátételben kimutattuk, hogy az $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ intervallumban az előző pontban adott 1. és 2. feltételek mellett létezik az

$$\begin{aligned} y' &= f(x; y) && \text{differentiálegyenletnek} \\ Y &= Y(x) && \text{megoldása.} \end{aligned}$$

Most kimutatjuk, hogy az $(x_0; y_0)$ kezdeti feltétel mellett ez az egyetlen megoldás.

Tegyük fel az ellenkezőjét: létezik az $Y = Y(x)$ megoldáson kívül a $Z = Z(x)$ megoldás is, amely kielégíti a $Z(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt.

Először megmutatjuk, hogy az

$$\left(x_0 - \frac{1}{N}; x_0 + \frac{1}{N}\right) \text{ intervallumban a két megoldás egybeesik.}$$

Itt N a Lipschitz-feltételben szereplő konstans. Feltehetjük, hogy $\frac{1}{N} \leq h$, mert ellenkező esetben N helyett egy nagyobb konstans választva a Lipschitz-feltétel még inkább teljesül.

Legyen $\varepsilon > 0$ és $\varepsilon < \frac{1}{N}$.

Tekintsük az $x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon$ zárt intervallumot és tegyük fel, hogy ebben az intervallumban $Z(x)$ nem mindenütt egyenlő $Y(x)$ -szel.

Képezzük a

$$|Z(x) - Y(x)| \quad \text{függvényt.}$$

A függvény nem negatív, folytonos, nem azonosan nulla, így a zárt intervallum valamely ξ pontjában pozitív maximuma van. Ez nem lehet az x_0 helyen, mert ott a függvény zérus. Jelöljük a maximális értéket A -val:

$$|Z(\xi) - Y(\xi)| = A.$$

A feltétel szerint $Y(x)$ és $Z(x)$ megoldások.

Így

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x; Y) dx,$$

$$Z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x; Z) dx.$$

Vonjuk ki egymásból a két azonosságot, és vegyük a különbség abszolút értékét

$$|Y(x) - Z(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(x; Y) - f(x; Z)] dx \right|.$$

Vegyük felső határnak a ξ maximum helyet:

$$|Y(\xi) - Z(\xi)| = \left| \int_{x_0}^{\xi} [f(x; Y) - f(x; Z)] dx \right|.$$

A bal oldal a maximális érték: A . A jobb oldalon az integrandusz a Lipschitz-féle feltétel alapján

$$|f(x; Y) - f(x; Z)| \leq N |Y - Z|.$$

Így
$$A \leq N \int_{x_0}^{\xi} |Y(x) - Z(x)| dx.$$

Az egyenlőtlenség még inkább fennáll, ha az integrandusz helyett is a maximális

$$|Y(\xi) - Z(\xi)| = A$$

értéket vesszük, és az integrálás intervallumát $[x_0; \xi]$ -ről $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ -ra növeljük.

Tehát

$$A \leq N \int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} A dx,$$

$$A \leq NA\varepsilon, \quad \text{azaz}$$

$$1 \leq N\varepsilon.$$

Ez ellentmond ε választásának, amely szerint $\varepsilon < \frac{1}{N}$. Az $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ intervallumban tehát a két megoldás egybeesik. Ez fennáll minden $\varepsilon < \frac{1}{N}$ -re, így a megoldások azonosak az $\left[x_0; x_0 + \frac{1}{N}\right)$ intervallumban is, sőt, mivel $Y(x)$ és $Z(x)$ folytonosak, még az $x_0 + \frac{1}{N}$ pontban is megegyeznek.

Hasonló módon következtethetünk az x_0 pont bal oldali környezetére. Így azt igazoltuk, hogy

$$x_0 - \frac{1}{N} \leq x \leq x_0 + \frac{1}{N}$$

esetén

$$Y(x) = Z(x).$$

Az unicitás bizonyítása céljából meg kell még mutatnunk, hogy a két megoldás az egész $[x_0 - h; x_0 + h]$ intervallumban megegyezik.

Legyen t azon x helyek halmazának felső határa, amelyekre az $[x_0; x]$ intervallumban Y és Z megegyezik.

Előző eredményünk szerint

$$t \geq \frac{1}{N}.$$

$Y(x)$ és $Z(x)$ folytonossága miatt még

$$Y(t) = Z(t)$$

is fennáll.

Ha $t < x_0 + h$ volna, akkor az előző okoskodást x_0 helyett t -re elvégezve adódna, hogy a megoldások még egy $[t; t + \varepsilon]$ intervallumban is megegyeznek, ami ellentmond t definíciójának.

Így szükségképpen

$$t = x_0 + h.$$

Hasonlóképpen okoskodva x_0 bal oldali környezetére kapjuk, hogy

$$Y(x) = Z(x)$$

az $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ intervallumban.

Az egzisztencia- és unicitási tételek bizonyítása kiterjeszthető olyan T tartományra, amelyben $f(x; y)$ folytonos és a Lipschitz-feltételt kielégíti.

Példa

Oldjuk meg szukcesszív approximációval az

$$y' = x + y \quad \text{differenciálegyenletet}$$

az $x_0 = 0, \quad y_0 = 0$ kezdeti feltétel mellett.

$$y_0 = 0.$$

$$y_1 = 0 + \int_0^x (x + 0) dx = \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}.$$

$$y_2 = \int_0^x \left(x + \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

$$y_3 = \int_0^x \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) dx = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$

$\vdots$

$$y_n = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

$$y_n \rightarrow e^x - (x + 1).$$

Így az egyenlet megoldása:

$$y = e^x - x - 1.$$

Ellenőrizzük a megoldást úgy, hogy megoldjuk az

$$y' = x + y$$

differenciálegyenletet

a) mint lineáris inhomogén differenciálegyenletet,

b) az $y + x = u$, $y' + 1 = u'$ helyettesítéssel,

az $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ kezdeti feltétel mellett.

12.1.9 Differenciálegyenletek szinguláris megoldása

Legyen a differenciálegyenlet

$$(1) \quad F(x; y; y') = 0$$

implicit alakban adott.

Tegyük fel, hogy az F függvény elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak.

Az $(x_0; y_0; y'_0)$ számhármast az $(x; y; y')$ koordináta-rendszerben pontot jelent. Az $(x_0; y_0; y'_0)$ számhármast vonalelemnek is nevezik az $(x; y)$ síkban az $(x_0; y_0)$ ponton átfektetett y'_0 iránytangensű vonaldarab jelöléseként.

Ha valamely $(x_0; y_0; y'_0)$ pontban

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0,$$

akkor, amint azt az implicit függvények elméletéből tudjuk (10.3.3 pont), az

$$F(x; y; y') = 0$$

egyenlet egyértelműen meghatározza az $(x_0; y_0)$ pont egy környezetében az

$$y' = f(x; y)$$

függvényt úgy, hogy $f(x; y)$ elsőrendű parciális deriváltjai is folytonosak és

$$f(x_0; y_0) = y'_0.$$

Ekkor tehát az (1) egyenlet ekvivalens az

$$(2) \quad y' = f(x; y)$$

alakú egyenlettel, amelyre teljesülnek az egzisztencia- és az unicitási tétel feltételei.

(A Lipschitz-féle feltétel teljesül, mert $\frac{\partial f}{\partial y}$ korlátos $(x_0; y_0)$ egy környezetében.)

Definíció. Az $(x_0; y_0; y'_0)$ vonalelem *reguláris* az $F(x; y; y') = 0$ egyenletre nézve, ha

$$F(x_0; y_0; y'_0) = 0,$$

és ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy az $(x_0; y_0)$ pont δ sugarú környezetében minden $(x; y)$ ponthoz tartozik olyan $y' = f(x; y)$ érték, amelyre

$$F(x; y; y') = 0 \quad \text{és}$$

$$|y' - y'_0| < \varepsilon.$$

Minden egyéb esetben $(x_0; y_0; y'_0)$ *szinguláris vonalelem*.

Ha egy integrálgörbe minden pontjához szinguláris vonalelem tartozik, akkor azt *szinguláris megoldásnak* nevezik.

Tegyük fel, hogy az $(x_0; y_0; y'_0)$ számhármast kielégíti (1)-et, azaz

$$F(x_0; y_0; y'_0) = 0.$$

Az előzőek szerint ahhoz, hogy az $(x_0; y_0; y'_0)$ vonalelem szinguláris legyen, szükséges, hogy az $(x_0; y_0; y'_0)$ pontban

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

teljesüljön.

Ahhoz, hogy az $(x_0; y_0; y'_0)$ vonalelem reguláris legyen, elegendő, hogy az $(x_0; y_0; y'_0)$ pontban

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0.$$

Ha $(x_0; y_0; y'_0)$ reguláris vonalelem, akkor az $(x_0; y_0)$ ponton egy és csak egy olyan integrálgörbe megy át, amelynek érintője az $(x_0; y_0)$ pontban y'_0 meredekségű.

Lehetséges azonban, hogy az $(x_0; y_0)$ ponton több integrálgörbe is átmegy. Ha az $(x_0; y_0; y'_0)$ szinguláris vonalelem, és az $(x_0; y_0)$ ponton egyáltalán átmegy integrálgörbe, akkor szükségképpen több is átmegy, és ezeknek közös érintőjük van $(x_0; y_0)$ -ban.

Burkoló görbe. Tegyük fel, hogy az

$$F(x; y; y') = 0 \quad \text{differenciálegyenletet a}$$

$$G(x; y; C) = 0$$

egyenletű görbesereg görbéi kielégítik.

Tegyük fel továbbá, hogy ennek a görbeseregnek van

$$y = \varphi(x)$$

egyenletű burkolója (10.4.2 pont).

Mivel a burkoló görbe minden pontjában érinti a görbesereg valamelyik görbét, ezért az

$$y' = \varphi'(x)$$

derivált minden x -re megegyezik valamely C_0 paraméter mellett a

$$G(x; y; C_0) = 0$$

görbéhez tartozó $y' = y'(x)$ deriválttal.

Ez azt jelenti, hogy az $y = \varphi(x)$ függvény is kielégíti a differenciálegyenletet.

Így a burkoló szükségképpen szinguláris megoldás.

Példák

1. $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

$y^{\frac{2}{3}}$ értelmezve van, és folytonos minden y értékre.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial y^{\frac{2}{3}}}{\partial y} = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}.$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ -nak nincs értelme, ha $y = 0$.

Oldjuk meg szétválasztással a differenciálegyenletet!

$y \neq 0$ esetén:

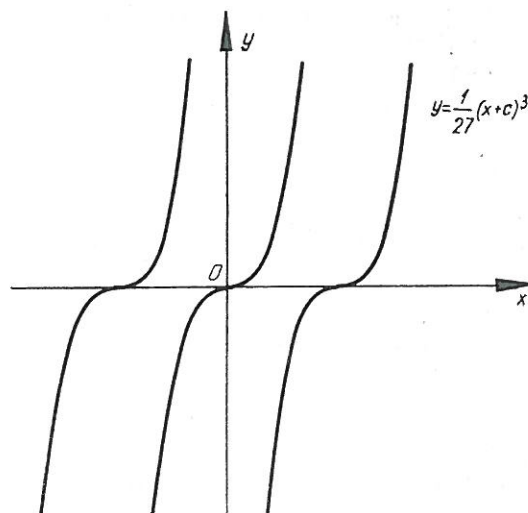
$$dy y^{-\frac{2}{3}} = dx.$$

$$3\sqrt[3]{y} = x + C$$

$$y = \frac{1}{27}(x+C)^3$$

Ez a megoldás még az $(x_0; y_0) = (-C; 0)$ kezdeti feltétel mellett is kielégíti a differenciálegyenletet, bár a megoldás során fel kellett tenni, hogy $y \neq 0$.

Az egyenlet e megoldásai parabolásereget alkotnak (12.24 ábra).



12.24 ábra

Ezenkívül az

$$y' = y^{\frac{2}{3}}$$

differenciálegyenletnek evidens megoldása:

$$y \equiv 0.$$

Tehát az x tengely minden pontján egy parabola és egy egyenes halad át, az unicitás nem áll fenn. $y \equiv 0$ a differenciálegyenlet szinguláris megoldása.

2. $F(x; y; y') = y'^2 - (1 - y^2) = 0.$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'.$$

Tegyük fel először, hogy $y' \neq 0$.

Ekkor y' előjelétől függően:

$$y' = \pm \sqrt{1 - y^2}$$

explicit differenciálegyenlethez jutunk.

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dy}{\pm \sqrt{1 - y^2}} = dx.$$

$$\arcsin y = x + C.$$

$$y = \sin(x + C)$$

ha $y' > 0$, rögzített C mellett x a $\left(-\frac{\pi}{2} - C \pm 2k\pi; \frac{\pi}{2} - C \pm 2k\pi\right)$ intervallumban változhat, ahol $k=0, 1, 2, \dots$ lehet.

Ha $y' < 0$, ugyanezzel a megfontolással ugyancsak az

$$y = \sin(x + C) \quad \text{függvény}$$

a megoldás, ahol rögzített C mellett x a $\left(\frac{\pi}{2} - C \pm 2k\pi; \frac{3\pi}{2} - C \pm 2k\pi\right)$ intervallumban változhat, ahol $k=0, 1, 2, \dots$ lehet.

Ha $y' = 0$,
 $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$

Ekkor szinguláris megoldáshoz jutunk. Ugyanis az

$$y'^2 = 1 - y^2$$

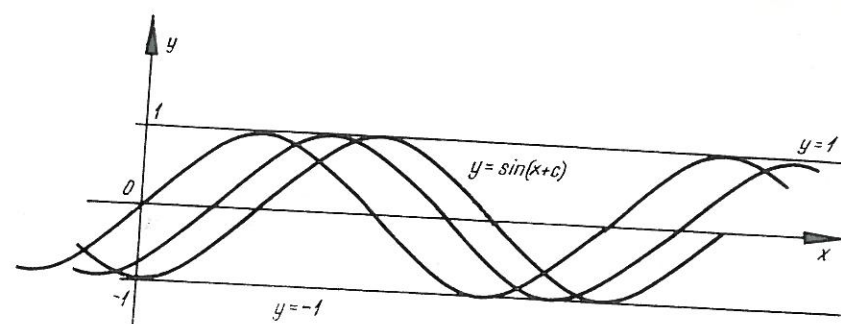
egyenletből $y = \pm 1.$

Az $y \equiv 1$ és $y \equiv -1$ egyenletek kielégítik a differenciálegyenletet. Ezért szinguláris megoldások, mert minden pontban érintkeznek alkalmas C mellett egy

$$y = \sin(x + C)$$

alakú integrálgörbével (12.25 ábra).

Az $y = 1$ és az $y = -1$ egyenletű egyenesek az $y = \sin(x + C)$ görbesereg burkoló görbéi.



12.25 ábra

3. $F(x; y; y') = xy' - y = 0.$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = x.$$

Szinguláris vonalelemek $x = 0$ esetén léphetnek fel. Az $xy' - y = 0$ egyenletből, ha $x \neq 0$,

$$y' = \frac{y}{x}.$$

A változók szétválasztásával:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln |C|.$$

$$y = Cx.$$

Az $xy' - y = 0$ egyenletből,
 $x = 0$ esetén $y = 0$,

azaz csak az origóban lehet szinguláris vonalelem.
Az $x = 0$ értékkel $y = Cx$ -ből is $y = 0$ -t kapunk, így az

$$y = Cx$$

origón áthaladó egyenessereg minden egyes egyenese eleget tesz a differenciálegyenletnek.
A $(0; 0; C)$ vonalelem szinguláris vonalelem minden C -re.

4. $F(x; y; y') = y^2(y'^2 + 1) = 0.$

(1) Az $y^2(y'^2 + 1) - 1 = 0$

egyenlet alapján y nem lehet nulla.
Tegyük fel a továbbiakban, hogy $y > 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y^2y'.$$

Nézzük, mikor áll fenn, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Mivel $y \neq 0$, ez akkor lehetséges, ha

$$y' = 0.$$

Ezt (1) be helyettesítve, mivel $y > 0$

$$y = 1 \quad \text{adódik.}$$

Az $y \equiv 1$ érték valóban kielégíti a differenciálegyenletet. Látni fogjuk, hogy ez szinguláris megoldás.

Ha $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$, akkor mivel $y \neq 0$,

$$y' \neq 0.$$

A differenciálegyenletet rendezve:

$$y'^2 = \frac{1-y^2}{y^2},$$

ahol $y > 1$.

y' előjelétől függően a következő explicit differenciálegyenletekhez jutunk.

$$y' = \frac{\pm \sqrt{1-y^2}}{y}.$$

$$\frac{y}{\pm \sqrt{1-y^2}} dy = dx.$$

$$\pm \sqrt{1-y^2} = x + C.$$

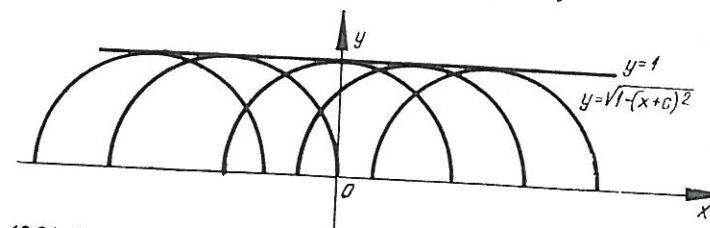
$$1-y^2 = (x+C)^2.$$

A differenciálegyenlet megoldásai:

$$(x+C)^2 + y^2 = 1, \quad (y > 0), \quad \text{azaz} \quad y = \sqrt{1-(x+C)^2}.$$

Az egyenlet megoldása olyan egységsugarú félkörsegek, amelynek középpontja az x tengelyen van.
 $x = -C$, azaz $y = 1$ esetén a félkör érinti az $y = 1$ egyenest.

Az $y = 1$ egyenes szinguláris görbe, a félkörsegek (12.26 ábra) burkolója.



12.26 ábra

12.1.9.1 A Clairaut-féle differenciálegyenlet

Az

(1) $y = xy' + \varphi(y')$

egyenlet az ún. Clairaut-féle differenciálegyenlet.

Az $F(x; y; y') = y - xy' - \varphi(y')$

jelöléssel az (1) egyenlet az

$$F(x; y; y') = 0$$

implicit differenciálegyenlet.

$$y' = p \quad \text{jelöléssel}$$

$$y = xp + q(p).$$

Az egyenlet mindkét oldalát x szerint deriválva:

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + q'(p) \frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dp}{dx} (x + q'(p)) = 0.$$

A bal oldal nulla, ha

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\text{vagy} \quad x + q'(p) = 0.$$

a) Tegyük fel, hogy valamely intervallumban

$$x + q'(p) \neq 0.$$

Ez megfelel a $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ feltételnek. Ekkor ebben az intervallumban

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{azaz} \quad p = y' = C.$$

Ezt az (1) egyenletbe helyettesítve:

$$y = xC + q(C).$$

b) Tegyük fel, hogy valamely intervallumban

$$(2) \quad x + q'(p) = 0.$$

Ez megfelel a

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0 \quad \text{feltételnek.}$$

A (2) egyenletből a

$$p = p(x)$$

függvényt kifejezve és azt az (1) egyenletbe helyettesítve kapjuk a differenciálegyenlet szinguláris megoldását.

Példa

$$(1) \quad y = xy' + y'^3.$$

$$y' = p \quad \text{jelöléssel:}$$

$$y = xp + p^3.$$

Az egyenlet mindkét oldalát x szerint deriválva:

$$y' = p + xp' + 3p^2 p',$$

$$\text{azaz} \quad p = p + xp' + 3p^2 p'.$$

$$\text{Innen} \quad p'(x + 3p^2) = 0.$$

$$a) \quad p' = 0, \quad p = C.$$

$$y = xC + C^3.$$

$$b) \quad x + 3p^2 = 0.$$

$$p^2 = -\frac{x}{3}.$$

$$p = \sqrt{-\frac{x}{3}},$$

$$\text{azaz} \quad y' = \sqrt{-\frac{x}{3}}.$$

y' értékét (1)-be visszahelyettesítve:

$$y = x \sqrt{-\frac{x}{3}} + \left(\sqrt{-\frac{x}{3}} \right)^3.$$

$$\text{Innen} \quad y = \sqrt{-\frac{x}{3}} \left(x - \frac{x}{3} \right),$$

$$y = \frac{2x}{3} \sqrt{-\frac{x}{3}}.$$

Négyzetre emelve:

$$y^2 = \frac{4x^2}{9} \left(-\frac{x}{3} \right),$$

$$y^2 = -\frac{4x^3}{27}.$$

$$\text{Vagyis} \quad 4x^3 + 27y^2 = 0.$$

Ezzel az egyenlettel adott görbe a differenciálegyenlet szinguláris megoldása, azaz az

$$y = Cx + C^3$$

egyenessereg burkolója.

12.2 MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

12.2.1 Általános fogalmak

Az $y'' = f(x; y; y')$,
illetve $F(x; y; y'; y'') = 0$

alakban adott differenciálegyenletek másodrendű differenciálegyenletek.

*

Oldjuk meg az

$$y'' = -\sin x$$

differenciálegyenletet!

Mindkét oldalt integrálva:

$$y' = \cos x + C_1.$$

Újra integrálva:

$$y = \sin x + C_1 x + C_2.$$

Az általános megoldás két paramétértől függő görbesereg.

*

Általában az

$$y'' = f(x; y; y') = 0 \quad \text{vagy} \\ F(x; y; y'; y'') = 0$$

alakban adott differenciálegyenletek megoldása a

$$G(x; y; C_1; C_2) = 0$$

két paramétértől függő görbesereg.

Egy partikuláris megoldás meghatározásához kezdeti feltételeket kell megadnunk. Ez lehet peremfeltétel, azaz két pont, amelyeken a partikuláris megoldás integrálgörbéje át-megy, de gyakoribb, hogy kezdeti feltételként az $x = x_0$ ponthoz tartozó $y_0 = y(x_0)$ függvényértéket és $y'_0 = y'(x_0)$ deriváltat adjuk meg.

*

Előző példánkban határozzuk meg azt a partikuláris megoldást, amely az

$$x_0 = 0, y_0 = 5 \quad \text{és} \quad y'_0 = -1 \quad \text{kezdeti értékekhez tartozik.}$$

$$y' = \cos x + C_1 \text{-ből} \quad -1 = 1 + C_1, \quad \text{innen} \quad C_1 = -2$$

$$y = \sin x + C_1 x + C_2 \text{-ből} \quad 5 = 0 + C_2, \quad C_2 = 5.$$

A partikuláris megoldás:

$$y = \sin x - 2x + 5.$$

*

Fordítva: ha adott a

$$G(x; y; C_1; C_2) = 0$$

kétparaméteres görbesereg, kétszeri deriválással és a C_1, C_2 paraméterek kiküszöbölésével felállíthatjuk a görbesereg differenciálegyenletét.

Példa

Írjuk fel azon körsereg differenciálegyenletét, amelyhez tartozó körök középpontja az $y = x$ egyenletű egyenesen fekszik!

A görbesereg egyenlete:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_1)^2 = c_2^2.$$

Deriválva:

$$2(x - c_1) + 2(y - c_1)y' = 0, \quad \text{azaz}$$

$$(1) \quad (x - c_1) + (y - c_1)y' = 0.$$

Újra deriválva:

$$1 + y'^2 + (y - c_1)y'' = 0.$$

$$(2) \quad 1 + y'^2 + yy'' - c_1 y'' = 0.$$

Az (1) egyenletből c_1 -et kifejezve:

$$c_1 = \frac{x + yy'}{1 + y'}.$$

c_1 értékét (2)-be helyettesítve:

$$1 + y'^2 + yy'' - \frac{x + yy'}{1 + y'} y'' = 0.$$

$$\text{Innen} \quad 1 + y'^2 + yy'' + y' + y'^3 + yy'y'' - xy'' - yy'y'' = 0.$$

$$\text{Azaz} \quad 1 + y' + y'^2 + y'^3 = (x - y)y''.$$

Ez a körsereg differenciálegyenlete.

12.2.2 Másodrendű differenciálegyenletek egzisztencia- és unicitási tételei

Legyen adott az

$$y'' = f(x; y; y')$$

differenciálegyenlet.

Tétel. Ha az x, y, y' változók valamely T tartományában $f(x; y; y')$ folytonos és korlátos, azaz

$$|f(x; y; y')| \leq M,$$

valamint a tartományban eleget tesz az

$$|f(x; y + \Delta y; y' + \Delta y') - f(x; y; y')| \leq N(|\Delta y| + |\Delta y'|)$$

Lipschitz-féle feltételnek (N pozitív szám), akkor a T tartományban létezik a differenciálegyenlet megoldása, és adott x_0, y_0, y'_0 kezdeti értékek mellett az $(x_0; y_0)$ ponton egy és csak egy $y = q(x)$ integrálgörbe halad át.

A tétel szintén a Picard-féle szukcesszív approximációval bizonyítható. A tétel bizonyítására nem térünk ki.

Ebből a tételből következik, hogy ha a T tartományban az

$$y'' = f(x; y; y')$$

differenciálegyenletben adott f függvény

$$\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y'}$$

parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, a megoldás létezik, és az x_0, y_0, y'_0 kezdeti feltételekhez csak egy integrálgörbe tartozik.

Ugyanis a parciális deriváltakra tett kikötések miatt az $f(x; y; y')$ függvény eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek.

12.2.3 Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

12.2.3.1 A másodrendű differenciálegyenletből hiányzik y és y'

Az $y'' = f(x; y; y')$ egyenletből hiányzik y és y' , tehát a differenciálegyenlet

$$y'' = f(x) \quad \text{alakú.}$$

A differenciálegyenlet, mint a bevezetésben vizsgált példában láttuk, kétszeri integrálással megoldható.

Példák

1. A szabadon eső test mozgása. Ha a levegő ellenállásától eltekintünk, a szabadon eső test gyorsulása,

$$a = g,$$

ahol g a nehézségi gyorsulás: $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Az esés mozgásegyenlete:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g.$$

$$\frac{ds}{dt} = \int g dt = gt + C_1.$$

$$s = \int (gt + C_1) dt.$$

$$s = \frac{g}{2} t^2 + C_1 t + C_2.$$

Vegyük azt a mozgást, amelynél a $t = 0$ időpontban a kezdőponttól $s_0 = 16$ m távolságban $v_0 = -10 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}$ kezdősebességgel hajtjuk el a testet (felfelé hajtás).

$$s = \frac{g}{2} t^2 + C_1 t + C_2.$$

$$v = \frac{ds}{dt} = gt + C_1.$$

Az adott kezdeti feltételeket behelyettesítve:

$$C_2 = 16 \quad C_1 = -10,$$

a mozgás lefolyását meghatározó partikuláris megoldás:

$$s = \frac{g}{2} t^2 - 10t + 16.$$

$$2. \quad y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

$$y' = \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{1+x^2} + C_1.$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{1+x^2} + C_1 \right) dx.$$

$$y = -\arctg x + C_1 x + C_2.$$

12.2.3.2 A másodrendű differenciálegyenletből hiányzik y

Az $y'' = f(x; y; y')$ differenciálegyenletből hiányzik y , a differenciálegyenlet

$$y'' = f(x; y') \quad \text{alakú.}$$

A megoldáshoz alkalmazzuk az

$$y' = p \quad \text{helyettesítést,}$$

és így a

$$p' = f(x; p)$$

elsőrendű differenciálegyenletet kapjuk. Ezt a differenciálegyenletet p -re megoldva $y' = p$ -ből y integrálással nyerhető.

Példák

$$1. \quad y'' = y' + x^2 - 2x$$

$$\left. \begin{array}{l} y' = p \\ y'' = p' \end{array} \right\} \quad \text{helyettesítéssel:}$$

$$p' = p + x^2 - 2x.$$

Ez p -re nézve lineáris inhomogén differenciálegyenlet. A megfelelő homogén egyenlet

$$p' = P.$$

$$\frac{dp}{p} = dx.$$

$$\ln p = x + C.$$

$$p = e^{x+C}.$$

$$p = C_1 e^x.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$p_0 = k(x)e^x \quad \text{alakban keresve:}$$

$$p_0' = k'(x)e^x + k(x)e^x.$$

Az inhomogén egyenletbe helyettesítve:

$$k'(x)e^x + k(x)e^x = k(x)e^x + x^2 - 2x.$$

$$\text{Innen} \quad k'(x) = x^2 e^{-x} - 2x e^{-x}.$$

$$k(x) = \int \underbrace{x^2 e^{-x}}_{v \cdot u'} dx - \int 2x e^{-x} dx.$$

Az első integrált integráljuk parciálisan:

$$k(x) = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx - \int 2x e^{-x} dx.$$

$$\text{Összevonva: } k(x) = -x^2 e^{-x}.$$

$$p_0 = k(x)e^x = -x^2.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$p = p_0 + P.$$

$$p = -x^2 + C_1 e^x.$$

$$y' = p.$$

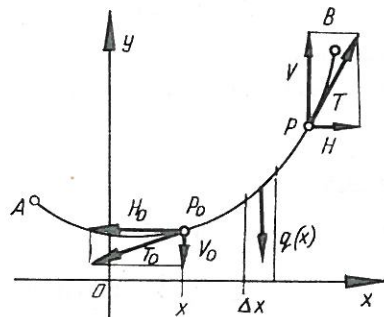
$$y' = -x^2 + C_1 e^x.$$

Ezt integrálva:

$$y = -\frac{x^3}{3} + C_1 e^x + C_2.$$

2. A láncgörbe egyenlete. Függesszünk fel két végénél egy hajlékony, súlyos, homogén fonalat (kötelet, láncot). Tegyük fel, hogy a felfüggesztési pontok egymástól olyan távolságban vannak, hogy a fonal nem feszül meg, hanem a saját súlyánál fogva belóg. Határozzuk meg a fonal alakját, vagyis annak a görbének egyenletét, amilyen alakot a fonal (lánc) felvesz.

Legyen a kötélt az A és B pontok között felfüggesztve. Tegyük fel, hogy a kötélt egyes pontjaira csak függőleges irányú terhelés hat, amelynek fajlagos értéke $q(x)$ [kp/m] (12.27 ábra).



12.27 ábra

Tekintsük most a kötélt P_0P ívszakaszát. Legyen a P_0P ívszakasz vetülete az x tengelyre Δx .

A P_0 pontban T_0 , a P pontban T irányú feszítőerő hat. Ezek vízszintes és függőleges összetevői H_0 és V_0 , illetve H és V .

A kötélt egyensúlyban van, ha

$$H - H_0 = \Delta H = 0, \quad \text{azaz } H \text{ állandó,}$$

$$\text{és} \quad V - V_0 = \Delta V = \int_{x_0}^x q(x) dx.$$

Ez utóbbiból, ha $P_0 \rightarrow P$

$$\frac{dV}{dx} = q(x).$$

A láncgörbe érintőjének iránytangense:

$$y' = \frac{V}{H}.$$

Differenciáljuk ezt az egyenletet x szerint.

Mivel H állandó,

$$y'' = \frac{1}{H} \frac{dV}{dx}.$$

$$\text{Így} \quad y'' = \frac{1}{H} q(x).$$

a) Legyen a terhelés egyenletes, azaz $q(x) = \text{konst} = q$.

$$\text{Ekkor} \quad y'' = \frac{q}{H}.$$

$$y' = \frac{q}{H} x + C_1,$$

$$y = \frac{q}{2H} x^2 + C_1 x + C_2.$$

Ha a terhelés egyenletes, a lánc alakja parabola.

b) Most húzza le a kötelet a saját súlya. Jelöljük a kötélt egységnyi hosszúságú darabjának súlyát γ -val.

Ekkor az abszcisszaegységre vonatkoztatott súly:

$$q(x) = \gamma \frac{ds}{dx} = \gamma \sqrt{1+y'^2}.$$

A P_0 és P pontok közötti ívhossz:

$$s = \int_{x_0}^x \sqrt{1+y'^2} dx, \quad \text{és ebből} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}.$$

Tehát a görbe differenciálegyenlete a következő lesz:

$$y'' = \frac{\gamma}{H} \sqrt{1+y'^2}.$$

Jelöljük $\frac{H}{\gamma}$ -t k -val:

$$y'' = \frac{1}{k} \sqrt{1+y'^2}.$$

Legyen $y' = p, \quad y'' = p' = \frac{dp}{dx}.$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{k} \sqrt{1+p^2}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{k} dx.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\operatorname{arsh} p = \frac{x+C_1}{k}.$$

Innen $p = \operatorname{sh} \frac{x+C_1}{k}.$

Mivel $y' = p,$

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x+C_1}{k}.$$

Integrálva $y = k \operatorname{ch} \frac{x+C_1}{k} + C_2.$

A saját súlyával terhelt kötélt tehát az $y = \operatorname{ch} x$ görbe alakját veszi fel, amit éppen emiatt láncgörbének is nevezünk. Az utóbbi alak azt fejezi ki, hogy az $y = \operatorname{ch} x$ függvény mindkét tengely irányában k -szorosra van széthúzva, és az x tengely irányában $-C_1$ -gyel, az y tengely irányában $+C_2$ -vel van eltolva. Adjuk meg most még a következő kezdeti feltételeket: a kötélt legmélyebb pontja legyen az $x = 0$ helyen. Ekkor $y'(0) = 0$ (minimum van).

Vegyük fel úgy a koordináta-rendszert, hogy a minimum érték $y = ON = k$. Ezeket az értékeket

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x+C_1}{k} \quad \text{és}$$

$$y = k \operatorname{ch} \frac{x+C_1}{k} + C_2 \text{-be helyettesítve:}$$

$$0 = \operatorname{sh} \frac{C_1}{k}$$

és $k = k \operatorname{ch} \frac{C_1}{k} + C_2.$

Az első egyenletből:

$$C_1 = 0.$$

A másodikból:

$$C_2 = 0.$$

Így a partikuláris megoldás:

$$y = k \operatorname{ch} \frac{x}{k}.$$

H értékét a következőképpen határozhatjuk meg. Legyen a két felfüggesztési pont egyenlő magasságban, az y tengelyre szimmetrikusan, $A(-a; b), B(a; b)$. A kötélt nyújthatatlansága miatt az AB ívhossz állandó. A kötéldarab hosszát l -lel jelölve (12.28 ábra):

$$\frac{l}{2} = \int_0^a \sqrt{1+y'^2} dx.$$

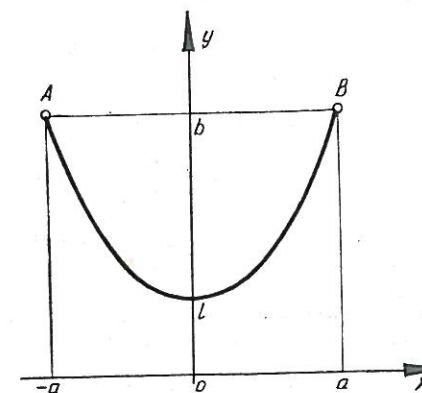
$y'(0) = 0$ miatt

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{k} \quad \text{értékkel:}$$

$$\frac{l}{2} = \int_0^a \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \frac{x}{k}} dx = k \operatorname{sh} \frac{a}{k}.$$

Mivel $k = \frac{H}{\gamma}$ és $\frac{1}{k} = \frac{\gamma}{H},$

$$\frac{l}{2} \frac{\gamma}{H} = \operatorname{sh} \frac{\gamma}{H} a.$$



12.28 ábra

Ebből az egyenletből H -t iterációval vagy grafikusan meghatározhatjuk. Grafikus meghatározással:

legyen $\frac{\gamma}{H} a = \xi,$

$$\frac{l}{2a} \xi = \operatorname{sh} \xi.$$

Az $\eta = \frac{l}{2a} \xi$ és $\eta = \operatorname{sh} \xi$

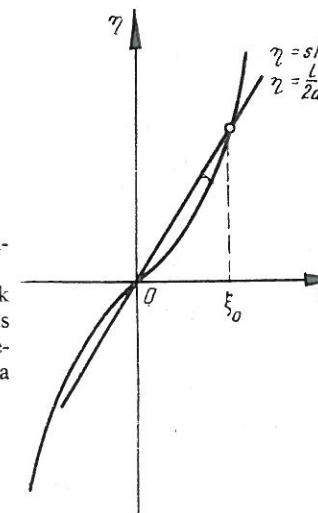
függvényeket ábrázolva és a ξ_0 metszéspontot leolvassva:

$$H = \frac{\gamma a}{\xi_0} \quad (12.29 \text{ ábra}).$$

3. Hengeres csőben nyomáskülönbség hatására folyadék áramlik. Vizsgáljuk a stacionárius folyadékáramlás sebességét! Legyen az L hosszúságú cső két végén fellépő nyomások különbsége $p_2 - p_1$. A nyomáskülönbség hatására stacionárius áramlás alakul ki. A belső súrlódás akadályozza a környezetében levő folyadékréteg mozgását. A sebességeloszlás a henger tengelyére nyilván szimmetrikus lesz. A Newton-féle súrlódási törvény értelmében a súrlódási erő:

$$F = \mu A \frac{dv}{dr},$$

ahol μ a súrlódási együttható és A az érintkezési felület.



12.29 ábra

Tekintsük az r és $r+dr$ sugarakkal határolt L hosszúságú hengergyűrűt. Az érintkezési felület (12.30 ábra):

$$A = 2\pi rL.$$

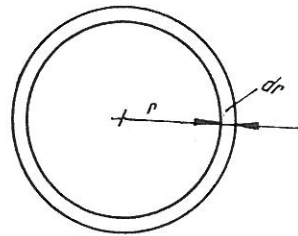
$$F = 2\pi\mu Lr \frac{dv}{dr}.$$

F -et r szerint deriválva:

$$\frac{dF}{dr} = 2\pi\mu L \left(\frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} \right).$$

Így a dr vastagságra eső súrlódási erő:

$$dF = 2\pi\mu L \left(\frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} \right) dr.$$



12.30 ábra

(Feltételezzük, hogy L nagy a cső sugarához, r -hez képest.)

A nyomáskülönbségből származik a súrlódási erővel ellentétes irányú erő. Ezért ezt negatív előjellel jelöljük.

A nyomóerők különbsége egyenlő a nyomáskülönbség és a nyomott terület szorzatával. Így a nyomáskülönbségből származó erő:

$$F_p = -(p_2 - p_1) \cdot 2\pi r dr.$$

Itt a nyomott felület a körgyűrű területe:

$$(r + dr)^2 \pi - r^2 \pi \approx 2r\pi dr.$$

A két erő egyensúlyban van:

$$dF = F_p.$$

$$2\pi\mu L \left(\frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} \right) dr = -(p_2 - p_1) \cdot 2\pi r dr,$$

$$\text{azaz} \quad \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = -\frac{p_2 - p_1}{L\mu}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$-\frac{p_2 - p_1}{L\mu} = k$$

$$\text{és} \quad \frac{dv}{dr} = z.$$

$$\text{Így} \quad \frac{d^2v}{dr^2} = \frac{dz}{dr}.$$

A differenciálegyenlet:

$$\frac{dz}{dr} + \frac{z}{r} = k.$$

Most vezessük be a

$$\frac{z}{r} = u \quad \text{változót.}$$

$$z = ur.$$

$$\frac{dz}{dr} = u + r \frac{du}{dr},$$

$$u + r \frac{du}{dr} + u = k.$$

$$r \frac{du}{dr} = k - 2u.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{du}{k - 2u} = \frac{dr}{r}.$$

$$\frac{-2 du}{k - 2u} = \frac{-2 dr}{r}.$$

Integrálva:

$$\ln |k - 2u| = -2 \ln |r| + \ln |C|,$$

$$k - 2u = \frac{C}{r^2},$$

$$k - 2 \frac{z}{r} = \frac{C}{r^2},$$

$$kr - 2z = \frac{C}{r},$$

$$2z = kr - \frac{C}{r},$$

$$z = \frac{k}{2} r - \frac{C}{2r},$$

$$z = \frac{k}{2} r + C_1 \frac{1}{r} \quad \left(-\frac{C}{2} = C_1 \quad \text{jelöléssel} \right).$$

$$\text{Így} \quad \frac{dv}{dr} = \frac{k}{2} r + C_1 \frac{1}{r}.$$

$$v = \frac{k}{4} r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Az állandókat a következő feltételekből határozhatjuk meg.

Az áramlás sebessége mindenütt csak véges érték lehet. Ha $r \rightarrow 0$, $\ln r \rightarrow -\infty$, ezért C_1 csak 0 lehet.

$$\text{Ha} \quad r = R, \quad v = 0,$$

$$\text{így} \quad 0 = \frac{k}{4} R^2 + C_2,$$

$$C_2 = -\frac{k}{4} R^2.$$

Így a stacionárius áramlás sebessége:

$$v = \frac{k}{4} (r^2 - R^2).$$

Mivel $k = -\frac{p_2 - p_1}{L\mu}$,
 $v = \frac{p_2 - p_1}{4L\mu} (R^2 - r^2)$.

Ez a fizikában ismert Hagen—Poiseuille-féle parabolikus sebességeloszlás.

12.2.3.3 A másodrendű differenciálegyenletből hiányzik x

A differenciálegyenletből hiányzik x , a differenciálegyenlet

$$y'' = f(y; y') \quad \text{alakú.}$$

Vezessük be az $y' = p$ jelölést.

Tekintsük p -t mint y függvényét. Ebből a célból feltesszük, hogy x olyan intervallumban változik, amelyben y szigorúan monoton, azaz y' állandó előjelű.

Mivel

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Az

$$y' = p \quad \text{és}$$

$$y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

értékeket az $y'' = f(y; y')$ egyenletbe helyettesítve, p -re elsőrendű differenciálegyenletet kapunk.

Ezt megoldva a $p = p(y)$ függvényt kapjuk. Ebből y -ra az

$$y' = p(y)$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet adódik.

Példák

1. $yy'' + y'^2 = 1$.

Tegyük fel, hogy $y' > 0$.

Legyen $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dy} p$.

$$y \frac{dp}{dy} p = 1 - p^2.$$

Tegyük fel, hogy $1 - p^2 \neq 0$, $y \neq 0$.

A változókat szétválasztva:

$$\frac{p dp}{1 - p^2} = \frac{dy}{y} \quad / \cdot -2$$

$$\frac{-2p dp}{1 - p^2} = -\frac{2 dy}{y}.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\ln |1 - p^2| = -2 \ln |y| + \ln |C_1|.$$

$$|1 - p^2| = \left| \frac{C_1}{y^2} \right|.$$

Válasszuk C_1 előjelét úgy, hogy

$$1 - p^2 = \frac{C_1}{y^2}$$

fennálljon:

$$p = \frac{\pm \sqrt{y^2 - C_1}}{y}.$$

Válasszuk a gyök előjelét úgy, hogy $p > 0$ legyen. Így, ha $y > 0$

$$p = \frac{\sqrt{y^2 - C_1}}{y}.$$

Mivel $p = y' = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - C_1}}{y}.$$

$$\frac{y dy}{\sqrt{y^2 - C_1}} = dx.$$

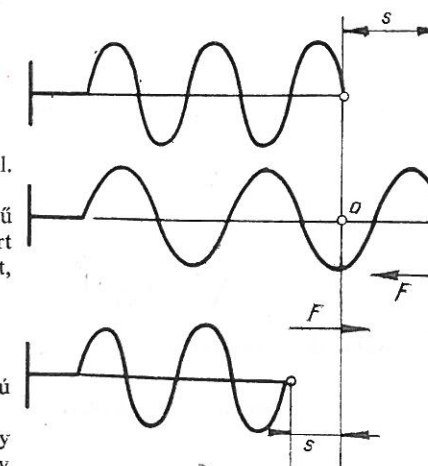
Integrálva $\sqrt{y^2 - C_1} = x + C_2$,
 $y^2 - (x + C_2)^2 = C_1$.

Ugyanerre az eredményre jutunk az $y' < 0$ feltétellel. Az egyenlet hiperbolasereg egyenlete.

2. A harmonikus rezgő mozgás. Ha egy m tömegű anyagi pontra ható F erő arányos egy O ponttól mért s távolsággal, és iránya mindig a O pont felé mutat, azaz, ha

$$F = -k \cdot s,$$

akkor az erő hatására létrejövő egyenes vonalú mozgást harmonikus rezgő mozgásnak nevezzük. Ilyen mozgást végez például vízszintes síkon egy rugóra erősített golyó (k a rugótól függő pozitív állandó) (12.31 ábra).



12.31 ábra

A mozgás alaptörvénye szerint:

$$F = m \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Az egyenlet most

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{k}{m} s.$$

Juttassuk $\frac{k}{m}$ pozitív voltát a $\frac{k}{m} = \omega^2$ jelöléssel kifejezésre:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right).$$

Mivel több más fizikai probléma megoldásakor is hasonló alakú differenciálegyenletre jutunk, az egyenletet az eredeti problémától elvonatkoztatva

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\omega^2 y \quad \text{alakban tárgyaljuk.}$$

Legyen $y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p.$

Így $\frac{dp}{dy} \cdot p = -\omega^2 y.$

A változókat szétválasztva:

$$dp \cdot p = -\omega^2 y \cdot dy.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\frac{p^2}{2} = -\omega^2 \frac{y^2}{2} + C, \quad \text{innen}$$

$$p = \pm \sqrt{2C - \omega^2 y^2}.$$

A jobb oldali kifejezésnek csak akkor van értelme, ha $2C$ pozitív, ezért jelöljük C_1^2 -tel:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1^2 - \omega^2 y^2}.$$

$$\frac{1}{C_1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{C_1} y\right)^2}} dy = dx.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega}{C_1} y = x + C_2,$$

innen $y = \frac{C_1}{\omega} \sin \omega(x + C_2).$

Jelöljük $\frac{C_1}{\omega} = a$ -val, $\omega C_2 = t$ -vel.

$$(1) \quad y = a \sin(\omega x + \varphi)$$

az általános megoldás.

Ezt az egyenletet más formában is írhatjuk. Az addíciós tételt alkalmazva:

$$y = a \sin \omega x \cos \varphi + a \cos \omega x \sin \varphi.$$

Mivel $a \cdot \cos \varphi$ és $a \cdot \sin \varphi$ állandó mennyiségek, legyen

$$a \cdot \cos \varphi = A$$

$$a \cdot \sin \varphi = B.$$

Az egyenlet így alakul:

$$(2) \quad y = A \sin \omega x + B \cos \omega x.$$

Visszatérve eredeti problémánkra az (1) egyenletben y helyébe s -et, x helyébe t -t írunk, a harmonikus mozgás mozgásegyenlete

$$s = a \sin(\omega t + \varphi).$$

E függvény azt fejezi ki, hogy az elmozdulás az idő periodikus függvénye, a test az $s = 0$ pont körül rezgő mozgást végez. A mozgás $\frac{2\pi}{\omega}$ szerint periodikus (12.32 ábra).

3. A matematikai inga lengésideje. A matematikai inga – fizikai definíciója szerint – egy nyújtathatatlant, súlytalan szálon függő súlyos anyagi pont. Vizsgáljuk az l hosszúságú fonalra függesztett m tömegpont mozgását, ha azt nyugalmi állapotából kitérítjük. Legyen az inga maximális kitérési szöge α .

Az m tömegpont l sugarú körpályán mozog. Newton törvénye értelmében a ráható erő

$$F = ma = ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (12.33 \text{ ábra}).$$

A nehézségi erő mozgató (tangenciális) komponense: $mg \sin \varphi$. Így a mozgásegyenlet:

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi.$$

A mozgás differenciálegyenlete tehát:

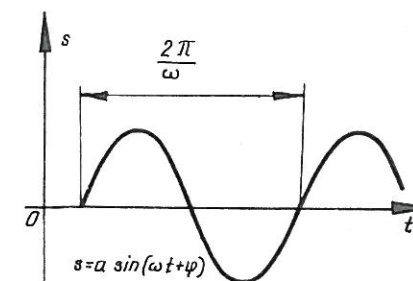
$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi.$$

Vezessük be új változónak a szögsebességet, ω -t.

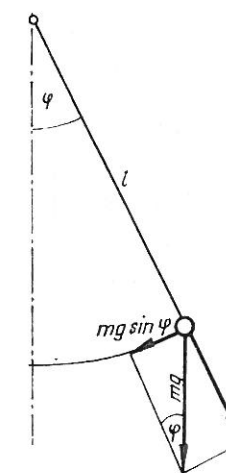
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \omega.$$

Így $\frac{d\omega}{d\varphi} \omega = -\frac{g}{l} \sin \varphi.$



12.32 ábra



12.33 ábra

A változók szétválaszthatók

$$\omega d\omega = -\frac{g}{l} \sin \varphi d\varphi.$$

Integrálva: $\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l} \cos \varphi + C_1.$

A mozgás vizsgálatához vegyük tekintetbe a következő két kezdeti feltételt:

1. Ha $t = 0, \varphi = 0.$ (Az ingát nyugalmi helyzetből térítettük ki.)
2. Ha $\varphi = \alpha, \omega = \frac{d\varphi}{dt} = 0.$ (Maximális kitérésnél φ -nek maximuma van, a szögsebesség nulla.)

A 2. kezdeti feltétellel

$$0 = \frac{g}{l} \cos \alpha + C_1, \text{ innen } C_1 = -\frac{g}{l} \cos \alpha.$$

Ezt behelyettesítve:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \alpha)}.$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \alpha)}.$$

A változókat szétválasztva:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}.$$

Integrálva és felhasználva az 1. kezdeti feltételt (ha $t = 0, \varphi = 0$):

$$\int_0^t dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}.$$

Egy negyed lengés ideje:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}.$$

A jobb oldali integrál ún. elliptikus integrál (9.2.3.7. pont), nem adható meg elemi függvényekkel zárt alakban. Az integrált sorfejtéssel közelítjük meg. Az integranduszt először átalakítjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \cos \alpha) - (1 - \cos \varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \end{aligned}$$

Az
$$\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

integrálba vezessünk be új integrációs változót.

Legyen
$$\sin z = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Ha $\varphi = 0, z = 0.$ Ha $\varphi = \alpha, z = \frac{\pi}{2}.$

φ szerint deriválva:

$$\cos z \frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$d\varphi = \frac{2 \cos z \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} dz.$$

Mivel $\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin z, \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z},$

$$d\varphi = \frac{2 \cos z \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z}} dz.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos z \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z} \cdot \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z}} dz = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \sin^2 z}} dz = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z}}. \end{aligned}$$

Fejtsük binomiális sorba az

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z}} \quad \text{kifejezést.}$$

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \sin z \right| \leq \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| < 1,$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z < 1, \quad \text{a binomiális sor konvergens.}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z}} &= 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} \left(-\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z \right) + \binom{-\frac{1}{2}}{2} \sin^4 \frac{\alpha}{2} \sin^4 z + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 \frac{\alpha}{2} \sin^4 z + \dots \end{aligned}$$

E sor minden z -re konvergens.

Majoráns sora, az

$1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots$ sor is konvergens, ezért az eredeti sor egyenletesen konvergens bármely intervallumban. Ezért az integrálást tagonként elvégezve:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 z \, dz + \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 z \, dz + \dots \end{aligned}$$

Az egyes integrálok értékeit könnyen kiszámíthatjuk (8.2.5. pont).

Így

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right].$$

Ha a maximális kitérés (α) kicsi, elegendő a sorból az első tagot figyelembe venni. Így

$$\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 z}} \approx \sqrt{2} \frac{\pi}{2}.$$

Ezt felhasználva:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \sqrt{2} \frac{\pi}{2}.$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Megkaptuk a fizikából ismert képletet a matematikai inga lengési idejére. Ez biztosítja kis kitérések esetén az inga időmérésre való alkalmasságát. Fordítva, az időt és az l hosszúságot mérve kiszámíthatjuk adott helyen a nehézségi gyorsulás értékét.

12.2.4 Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Az

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = q(x)$$

alakú differenciálegyenleteket másodrendű lineáris differenciálegyenleteknek nevezzük.

A differenciálegyenlet az ismeretlen függvényben és annak deriváltjaiban elsőfokú.

Kikötjük, hogy x olyan $[\alpha; \beta]$ intervallumban változik, ahol $a(x) \neq 0$ és az együttható függvények folytonosak.

A differenciálegyenlet így írható:

$$y'' = -\frac{b(x)}{a(x)} y' - \frac{c(x)}{a(x)} y + \frac{q(x)}{a(x)}.$$

A jobb oldal eleget tesz az egzisztencia- és unicitási tételben szereplő Lipschitz-féle feltételnek. Ezért $\alpha < x_0 < \beta$ esetén az x_0 hely egy környezetében egy és csakis egy olyan megoldása van a differenciálegyenletnek, amely az $y_0 = y(x_0)$, $y' = y'(x_0)$ adott kezdeti feltételeknek eleget tesz.

Hasonlóan, mint az elsőrendű differenciálegyenletek esetében belátható, hogy ez a megoldás az egész $[\alpha; \beta]$ intervallumra egyértelműen terjeszthető ki.

Írjuk a differenciálegyenletet a következő alakban:

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = f(x).$$

Ha az egyenlet jobb oldala azonosan zérus,

$$f(x) \equiv 0,$$

$$\text{vagyis} \quad y'' + A(x)y' + B(x)y = 0,$$

a lineáris differenciálegyenlet homogén.

$$\text{Ha} \quad f(x) \not\equiv 0,$$

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = f(x),$$

a lineáris differenciálegyenlet inhomogén.

12.2.4.1 Másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = 0.$$

A homogén lineáris differenciálegyenletre két fontos tételt bizonyítunk be.

Ehhez bevezetjük a következő fogalmat.

Legyen y_1 és y_2 a homogén differenciálegyenlet két megoldása.

Az y_1 és y_2 megoldások lineárisan függetlenek, ha

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 \equiv 0 \quad \text{esetén}$$

$$c_1 = 0 \quad \text{és} \quad c_2 = 0.$$

A feltétel, amint az könnyen belátható, $y_1 \neq 0$ esetén azonos az

$$\frac{y_2}{y_1} \neq c \quad \text{feltétellel.}$$

I. Tétel. Ha az

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek ismerjük két partikuláris megoldását, y_1 -et és y_2 -t, amelyek lineárisan függetlenek, akkor az általános megoldás:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

ahol c_1 és c_2 tetszőleges konstansok.

A tétel tehát azt mondja ki, hogy ha a partikuláris megoldások lineárisan függetlenek, az általános megoldás a partikuláris megoldások lineáris kombinációja.

A tételt Osztrogradszkij tételének nevezik.

a) Először bebizonyítjuk, hogy ha

$$y_1 \quad \text{és} \quad y_2 \quad \text{megoldás, akkor}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \text{is megoldás.}$$

(c_1 és c_2 tetszőleges konstansok.)

A feltétel értelmében

$$y_1 \quad \text{és} \quad y_2 \quad \text{az}$$

$$(1) \quad y'' + A(x)y' + B(x)y = 0$$

egyenlet megoldásai:

$$(2) \quad y_1'' + A(x)y_1' + B(x)y_1 = 0,$$

$$(3) \quad y_2'' + A(x)y_2' + B(x)y_2 = 0.$$

Deriváljuk az $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ egyenlőséget kétszer.

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2',$$

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''.$$

y , y' és y'' értékeit az (1) egyenlet bal oldalába helyettesítve:

$$\begin{aligned} c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + A(x)c_1 y_1' + A(x)c_2 y_2' + B(x)c_1 y_1 + B(x)c_2 y_2 &= \\ = c_1 [y_1'' + A(x)y_1' + B(x)y_1] + c_2 [y_2'' + A(x)y_2' + B(x)y_2] &= 0. \end{aligned}$$

A szögletes zárójelben levő kifejezések ugyanis a (2) és (3) egyenlet értelmében nullával egyenlők.

$$\text{Tehát} \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

kielégíti a differenciálegyenletet.

b) Legyen y_1 és y_2 a differenciálegyenlet két tetszőleges megoldása.

$$A \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

determinánst Wronski-féle determinánsnak nevezzük.

Segéd-tétel. Megmutatjuk a következőket.

1. Ha y_1 és y_2 lineárisan összefüggnek, akkor a Wronski-féle determináns azonosan nulla.

2. Ha y_1 és y_2 lineárisan független megoldások, akkor a Wronski-féle determináns sehol sem nulla.

1. igazolása. A feltételek értelmében van két olyan konstans, c_1 és c_2 , amelyek nem mindkettője nulla, és

$$(1) \quad c_1 y_1 + c_2 y_2 \equiv 0.$$

Ezt az egyenletet differenciálva:

$$(2) \quad c_1 y_1' + c_2 y_2' \equiv 0.$$

$$\text{Ha} \quad c_1 = 0, \quad \text{akkor (1)-ből} \quad y_2 \equiv 0,$$

$$\text{ha} \quad c_2 = 0, \quad \text{akkor (1)-ből} \quad y_1 \equiv 0.$$

Mindkét esetben

$$W \equiv 0.$$

Ha $c_1 \neq 0$ és $c_2 \neq 0$, akkor (1)-ből és (2)-ből

$$y_1 = -\frac{c_2}{c_1} y_2,$$

$$y_2' = -\frac{c_1}{c_2} y_1'.$$

Ezt a két egyenletet összeszorozva:

$$y_1 y_2' \equiv y_2 y_1'$$

vagy

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' \equiv 0.$$

2. igazolása. Tegyük fel most, hogy valamely x_0 helyen a W determináns nulla.

$$(3) \quad y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) = 0.$$

Tegyük fel, hogy

$$y_2(x_0) \neq 0.$$

Legyen

$$c_2 = \frac{y_1(x_0)}{y_2(x_0)}.$$

Ekkor

$$y_1(x_0) - c_2 y_2(x_0) = 0,$$

és ebből (3) miatt:

$$y_1'(x_0) - c_2 y_2'(x_0) = 0.$$

Így az

$$y(x) = y_1(x) - c_2 y_2(x) \quad \text{jelöléssel}$$

$y(x)$ a differenciálegyenlet olyan megoldása, amelyre

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0.$$

Az unicitási tétel szerint

$$y(x) \equiv 0, \quad \text{azaz}$$

$$y_1(x) - c_2 y_2(x) \equiv 0, \quad \text{tehát}$$

$$y_1(x) \quad \text{és} \quad y_2(x)$$

nem lineárisan függetlenek.

Ugyanígy járhatunk el az

$$y_2'(x_0) \neq 0 \quad \text{feltétel esetén.}$$

Ha viszont

$$y_2(x_0) = y_2'(x_0) = 0,$$

akkor ismét az unicitási tétel miatt

$$y_2(x) \equiv 0,$$

így y_1 és y_2 ismét nem lehetnek lineárisan függetlenek.

Ha tehát y_1 és y_2 lineárisan függetlenek, akkor a Wronski-determináns sehol sem nulla.

c) Bebizonyítjuk, hogy a differenciálegyenlet minden megoldása előállítható.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

alakban, ha y_1 és y_2 lineárisan független megoldások.

Legyen x_0 tetszőleges hely az $[a; b]$ intervallumban, és y a differenciálegyenlet egy megoldása.

A

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0)$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0)$$

lineáris egyenletrendszer c_1 -re és c_2 -re megoldható. c_2 kiküszöbölésével:

$$c_1 = \frac{y(x_0)y_2'(x_0) - y'(x_0)y_2(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)}.$$

Az osztás elvégezhető, mert a nevezőben a Wronski-determináns x_0 -nál felvett értéke áll, amely y_1 és y_2 lineáris függetlensége miatt nem nulla.

Hasonló kifejezés adódik c_2 -re. A nevező ugyancsak W értéke az x_0 helyen.

A c_1 és c_2 értékeket így meghatározva, tekintsük a

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

függvényt.

Az a) pont szerint ez megoldása a differenciálegyenletnek, c_1 és c_2 meghatározása miatt pedig az x_0 helyen vett függvényérték, illetve derivált megegyezik az $y(x_0)$, illetve $y'(x_0)$ értékkel.

Az unicitási tétel szerint:

$$y(x) \equiv c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

II. Tétel. Ha az

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = 0$$

homogén differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldását, y_1 -et ismerjük, egy másik partikuláris megoldás, y_2 integrálással meghatározható.

Bizonyítás.

$$\frac{y_2}{y_1} \neq c.$$

Feltesszük, hogy a vizsgált intervallumban $y_1 \neq 0$. Keressük a megoldást $y_2 = u(x)y_1$ alakban.

$$u(x) = u \quad \text{jelöléssel:}$$

$$y_2 = uy_1.$$

Kétszer deriválva:

$$y_2' = u'y_1 + uy_1'$$

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''.$$

u -t úgy akarjuk meghatározni, hogy y_2 az

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = 0$$

homogén egyenlet megoldása legyen.

y_2 , y_2' és y_2'' értékeit a homogén egyenletbe helyettesítve:

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + A(x)u'y_1 + A(x)uy_1' + B(x)uy_1 = 0.$$

Rendezve:

$$u''y_1 + u'[2y_1' + A(x)y_1] + u[y_1'' + A(x)y_1' + B(x)y_1] = 0.$$

y_1 megoldás, ezért a második szögletes zárójeles kifejezés értéke nulla. Így

$$u''y_1 + u'[2y_1' + A(x)y_1] = 0.$$

Legyen végül $u' = z$, ekkor $u'' = z'$.

$$z'y_1 + z[2y_1' + A(x)y_1] = 0.$$

Ez z -re nézve szétválasztható elsőrendű differenciálegyenlet. Az egyenletet z -re megoldva u integrálással meghatározható:

$$u = \int z \, dx,$$

és így $y_2 = uy_1$ -et is meghatároztuk.

Példa

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Tegyük fel, hogy

$$x \neq 0.$$

$$\text{Ezért: } y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0.$$

Próbálkozzunk az

$$y_1 = x \quad \text{megoldással.}$$

$$y_1' = 1,$$

$$y_1'' = 0.$$

A megoldás kielégíti az egyenletet.

$$\text{Legyen } y_2 = uy_1,$$

azaz $y_2 = ux$ alakú. Kétszer deriválva:

$$y_2' = u'x + u.$$

$$y_2'' = u''x + 2u'.$$

y_2 , y_2' és y_2'' értékeit a differenciálegyenletbe helyettesítve:

$$u''x + 2u' - 2u' - \frac{2u}{x} + \frac{2u}{x} = 0.$$

$$u''x = 0.$$

$$x \neq 0, \quad \text{így } u'' = 0.$$

$$\text{Innen } u' = c,$$

$$u = cx + c_0.$$

Válasszuk u értékei közül a legegyszerűbbet, hiszen már csak egy y_2 partikuláris megoldás szükséges,

$$\text{azaz } u = x\text{-et.}$$

$$y_2 = ux$$

$$y_2 = x^2.$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1x + c_2x^2.$$

12.2.4.2 Másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek

Legyen az

$$(1) \quad y'' + A(x)y' + B(x)y = f(x)$$

lineáris inhomogén differenciálegyenletnek megfelelő homogén differenciálegyenlet

$$(2) \quad Y'' + A(x)Y' + B(x)Y = 0.$$

1. Tétel. Ha y_0 az (1) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, és Y a (2) homogén egyenlet általános megoldása, akkor

$$y = y_0 + Y$$

az (1) inhomogén egyenlet általános megoldása.

Bizonyítás.

$$y = y_0 + Y\text{-t kétszer deriválva:}$$

$$y' = y_0' + Y',$$

$$y'' = y_0'' + Y''.$$

Helyettesítsük az értékeket az (1) egyenlet bal oldalába:

$$\begin{aligned} y_0'' + Y'' + A(x)y_0' + A(x)Y' + B(x)y_0 + B(x)Y &= \\ = [y_0'' + A(x)y_0' + B(x)y_0] + [Y'' + A(x)Y' + B(x)Y] &= \\ = f(x) + 0 = f(x). \end{aligned}$$

Az első zárójeles kifejezés ugyanis $f(x)$, mert y_0 (1)-nek megoldása, a második 0, mert Y (2)-nek megoldása.

Megfordítva:

ha y_1 és y_2 az

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = f(x)$$

inhomogén egyenlet két partikuláris megoldása, akkor

$$Y = y_1 - y_2$$

az $y'' + A(x)y' + B(x)y = 0$

homogén egyenlet megoldása.

A feltétel értelmében:

$$y_1'' + A(x)y_1' + B(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + A(x)y_2' + B(x)y_2 = 0.$$

A két egyenletet kivonva:

$$(y_1 - y_2)'' + A(x)(y_1 - y_2)' + B(x)(y_1 - y_2) = 0.$$

Tehát

$$Y = y_1 - y_2$$

a homogén egyenletet kielégítő megoldás.

II. Tétel. Az

$$(1) \quad y'' + A(x)y' + B(x)y = f(x)$$

inhomogén differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldását megkapjuk a megfelelő

$$(2) \quad Y'' + A(x)Y' + B(x)Y = 0$$

homogén egyenlet

$$(3) \quad Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

megoldásából, ha a c_1 és c_2 konstansok helyére olyan $c_1 = c_1(x)$ és $c_2 = c_2(x)$ függvényeket írunk, amelyek kielégítik a

$$(I) \quad \left. \begin{aligned} c_1' Y_1 + c_2' Y_2 &= 0 \\ c_1' Y_1' + c_2' Y_2' &= f(x) \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert.

Bizonyítás. Legyen a

$$c_1 = c_1(x) \quad \text{és} \quad c_2 = c_2(x) \quad \text{függvényekkel}$$

$$(a) \quad y_0 = c_1 Y_1 + c_2 Y_2.$$

Deriválva:

$$(4) \quad y_0' = (c_1' Y_1 + c_2' Y_2) + (c_1 Y_1' + c_2 Y_2').$$

Mivel (I) első egyenlete alapján

$$(5) \quad c_1' Y_1 + c_2' Y_2 = 0,$$

azért (4)-ből

$$(b) \quad y_0' = c_1 Y_1' + c_2 Y_2'.$$

Ezt újra deriválva:

$$(c) \quad y_0'' = (c_1 Y_1'' + c_2 Y_2'') + (c_1' Y_1' + c_2' Y_2').$$

y_0 , y_0' , y_0'' értékeit az (a) (b) (c) egyenletből helyettesítsük az

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = f(x) \quad (1) \text{ egyenletbe:}$$

$$(c_1 Y_1'' + c_2 Y_2'') + (c_1' Y_1' + c_2' Y_2') + A(x)(c_1 Y_1' + c_2 Y_2') + B(x)(c_1 Y_1 + c_2 Y_2) = f(x).$$

Rendezve:

$$c_1[Y_1'' + A(x)Y_1' + B(x)Y_1] + c_2[Y_2'' + A(x)Y_2' + B(x)Y_2] + (c_1' Y_1' + c_2' Y_2') = f(x).$$

A két szögletes zárójelben levő kifejezés zérus, mert Y_1 és Y_2 a (2) homogén egyenlet megoldása. Ezért

$$(6) \quad c_1' Y_1' + c_2' Y_2' = f(x).$$

Tehát y_0 kielégíti az (1) inhomogén differenciálegyenletet.

$$A \quad \left. \begin{aligned} c_1' Y_1 + c_2' Y_2 &= 0 \\ c_1' Y_1' + c_2' Y_2' &= f(x) \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerből c_1' és c_2' meghatározható, mert Y_1 és Y_2 lineárisan függetlenek, ezért a Wronski-féle determináns:

$$W = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ez pedig szükséges és elégséges az egyenletrendszer megoldásához.

c_1' és c_2' meghatározása után c_1 és c_2 integrálással nyerhető.

Így az

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = f(x)$$

inhomogén egyenlet egyik partikuláris megoldása az így megállapított $c_1 = c_1(x)$, $c_2 = c_2(x)$ változókkal:

$$y_0 = c_1 Y_1 + c_2 Y_2.$$

y_0 meghatározása az állandók variálásának módszerével történik.

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = y_0 + Y.$$

Példa

Oldjuk meg az

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^4 + x^3 \quad (x \neq 0)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet.

$$y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = x^2 + x.$$

Oldjuk meg először a megfelelő

$$Y'' - \frac{4}{x} Y' + \frac{6}{x^2} Y = 0 \quad \text{homogén egyenletet.}$$

A partikuláris megoldást

$$Y_1 = x \quad \text{alakban keresve} \quad Y_1' = 1, \quad Y_1'' = 0,$$

 Y_1 nem elégíti ki az egyenletet.

$$\text{Ha} \quad Y_1 = x^2, \quad \text{akkor} \quad Y_1' = 2x \quad Y_1'' = 2.$$

 $2 - 8 + 6 = 0$, ez a megoldás kielégíti a homogén differenciálegyenletet.

A másik partikuláris megoldást

$$\begin{aligned} Y_2 &= uY_1, \quad \text{azaz} \\ Y_2 &= ux^2 \quad \text{alakban keressük.} \end{aligned}$$

Kétszer deriválva:

$$\begin{aligned} Y_2' &= u'x^2 + 2ux \\ Y_2'' &= u''x^2 + 4u'x + 2u. \end{aligned}$$

 Y_2, Y_2', Y_2'' értékeit a homogén egyenletbe helyettesítve:

$$u''x^2 + 4u'x + 2u - 4u'x - 8u + 6u = 0.$$

Összevonva:

$$\begin{aligned} u''x^2 &= 0 & x^2 \neq 0, \quad \text{ezért} \\ u'' &= 0, \\ u' &= C, \\ u &= Cx + C_0. \end{aligned}$$

Válasszuk ezek közül a megoldások közül

$$\begin{aligned} u &= x\text{-et.} \\ \text{Így} \quad Y_2 &= ux^2, \\ Y_2 &= x^3. \end{aligned}$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$Y = c_1 x^2 + c_2 x^3.$$

$$\text{Az} \quad y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = x^2 + x$$

inhomogén egyenlet egyik partikuláris megoldását keressük

$$y_0 = c_1(x)Y_1 + c_2(x)Y_2 \quad \text{alakban.}$$

 $A'c_1$ és c_2 függvények kielégítik a

$$\left. \begin{aligned} c_1'Y_1 + c_2'Y_2 &= 0 \\ c_1'Y_1' + c_2'Y_2' &= f(x) \end{aligned} \right\},$$

azaz példánkban a

$$\left. \begin{aligned} c_1'x^2 + c_2'x^3 &= 0 \\ 2c_1'x + 3c_2'x^2 &= x^2 + x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert.

Mivel $x \neq 0$,

$$\left. \begin{aligned} c_1' + c_2'x &= 0 \\ 2c_1' + 3c_2'x &= x + 1 \end{aligned} \right\}.$$

A felső egyenlet kétszeresét az alsóból kivonva

$$c_2'x = x + 1$$

$$c_2' = 1 + \frac{1}{x}.$$

A felső egyenlet háromszorosát az alsóból kivonva.

$$\begin{aligned} -c_1' &= x + 1, \\ c_1' &= -x - 1. \end{aligned}$$

Integrálva:

$$c_1 = -\frac{x^2}{2} - x,$$

$$c_2 = x + \ln|x|,$$

$$y_0 = c_1Y_1 + c_2Y_2, \quad y_0 = c_1x^2 + c_2x^3.$$

$$y_0 = -\frac{x^4}{2} - x^3 + x^4 + x^3 \ln|x|,$$

$$y_0 = \frac{x^4}{2} - x^3 + x^3 \ln|x|.$$

Az általános megoldás:

$$y = \frac{x^4}{2} - x^3 + x^3 \ln|x| + c_1x^2 + c_2x^3.$$

12.2.4.3 Állandó együtthatójú másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Az $ay'' + by' + cy = f(x)$ differenciálegyenlet

(a, b, c konstansok, $a \neq 0$) állandó együtthatójú lineáris inhomogén differenciálegyenlet.

Ha $f(x) \equiv 0$,

$$ay'' + by' + cy = 0$$

állandó együtthatójú homogén differenciálegyenlet.

12.2.4.3.1 Állandó együtthatójú lineáris homogén differenciálegyenletek

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a \neq 0).$$

Keressük a homogén egyenlet megoldását

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{alakban.}$$

Kétszer deriválva:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Az értékeket a differenciálegyenletbe helyettesítve:

$$e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

$$e^{\lambda x} \neq 0, \quad \text{ezért}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Ezt az egyenletet karakterisztikus egyenletnek nevezzük.

A homogén egyenlet megoldásánál a karakterisztikus egyenlet gyökeinek minősége szerint három esetet különböztetünk meg.

A karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

a) $b^2 > 4ac.$

Az $a\lambda^2 + b\lambda + c$ karakterisztikus egyenlet gyökei különböző valós számok: λ_1 és λ_2 .

Ekkor a homogén egyenlet partikuláris megoldásai:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Mivel $\frac{y_2}{y_1} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq c,$

a megoldások lineárisan függetlenek.

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

b) $b^2 - 4ac = 0.$

Az $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei egyenlő valós számok.

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}.$$

A homogén egyenlet egyik partikuláris megoldása

$$y_1 = e^{\lambda x}.$$

A másik megoldást, y_2 -t az állandó variálásával keressük:

$$y_2 = ue^{\lambda x}.$$

$$y_2' = u'e^{\lambda x} + u\lambda e^{\lambda x},$$

$$y_2'' = u''e^{\lambda x} + 2\lambda u'e^{\lambda x} + \lambda^2 ue^{\lambda x}.$$

y_2, y_2', y_2'' értékeit a homogén egyenletbe helyettesítve:

$$au''e^{\lambda x} + 2a\lambda u'e^{\lambda x} + a\lambda^2 ue^{\lambda x} + bu'e^{\lambda x} + bue^{\lambda x} + cue^{\lambda x} = 0.$$

Rendezve:

$$e^{\lambda x}[au'' + u'(2a\lambda + b) + u(a\lambda^2 + b\lambda + c)] = 0.$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad \text{mert } \lambda \text{ a karakterisztikus egyenlet gyöke.}$$

$$2a\lambda + b = 0, \quad \text{a gyökök és együtthatók összefüggése alapján,}$$

$$e^{\lambda x} \neq 0.$$

Így $au'' = 0,$

$$u'' = 0,$$

$$u' = C,$$

$$u = Cx + C_0.$$

A legegyszerűbb megoldást választva:

$$u = x.$$

$$y_2 = xe^{\lambda x}.$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \quad \text{azaz}$$

$$y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x)$$

c) Az $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

karakterisztikus egyenletben

$$b^2 - 4ac < 0,$$

a gyökök konjugált komplex számok.

Legyenek a gyökök:

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i,$$

$$\lambda_2 = \alpha - \beta i,$$

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x},$$

$$y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x},$$

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{-2\beta xi} \neq c \quad (y_1 \text{ és } y_2 \text{ lineárisan függetlenek}).$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + c_2 e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

Mivel az egyenletet a valós számok tartományában adtuk meg, azt akarjuk, hogy a megoldás is a valós számok tartományába tartozzék, tehát ne tartalmazzon komplex számokat.

Ehhez két tételt használunk fel:

I. tétel. A komplex számok Euler-féle alakja (9.2.4. pont):

$$re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

azaz $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$

II. tétel. Ha az

$$ay'' + by' + cy = 0$$

differentiálegyenletet az

$$y = y_1 + iy_2$$

függvény kielégíti (y_1 és y_2 valós értékű függvények), akkor azt y_1 és y_2 is kielégíti.

Bizonyítás.

$$y = y_1 + iy_2.$$

Kétszer deriválva:

$$y' = y_1' + iy_2',$$

$$y'' = y_1'' + iy_2''.$$

Az értékeket az

$$ay'' + by' + cy = 0$$

egyenletbe helyettesítve:

$$ay_1'' + iay_2'' + by_1' + iby_2' + cy_1 + icy_2 = 0,$$

$$(ay_1'' + by_1' + cy_1) + i(ay_2'' + by_2' + cy_2) = 0.$$

Egy komplex kifejezés akkor zérus, ha mind a valós, mind az imaginárius része külön-külön zérus. Így

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0,$$

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0.$$

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy y_1 és y_2 kielégíti az egyenletet, tehát partikuláris megoldások. Visszatérve az

$$ay'' + by' + cy = 0$$

egyenlethez, ennek

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} \text{ egyik megoldása.}$$

Más formában

$$y = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

a megoldás.

Mint megmutattuk a II. tételben, ekkor

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{és} \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \quad \text{is megoldások.}$$

Ezek a megoldások lineárisan függetlenek. Ezért a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

Példák

1. $3y'' + 11y' - 4y = 0.$

A karakterisztikus egyenlet:

$$3\lambda^2 + 11\lambda - 4 = 0.$$

Ennek gyökei:

$$\lambda = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 48}}{6} = \frac{-11 \pm 13}{6}.$$

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

Tehát a homogén differentiálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{\frac{1}{3}x}.$$

2. $9y'' - 12y' + 4y = 0.$

A karakterisztikus egyenlet:

$$9\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0.$$

$$\lambda = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{2}{3}.$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{2}{3}.$$

Az egyenlet általános megoldása tehát a következő:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{2}{3}x}.$$

3. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

$$\lambda_1 = 2 + 3i, \quad \lambda_2 = 2 - 3i, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x).$$

12.2.4.3.2 Állandó együtthatójú lineáris inhomogén differenciálegyenletek

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, y_0 -t meghatározhatjuk a megfelelő

$$aY'' + bY' + cY = 0$$

homogén egyenlet

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

megoldásából, ha az állandókat variáljuk. Ehelyett, speciális esetekben, azt a módszert alkalmazzuk, hogy az y_0 partikuláris megoldást az inhomogenitást okozó $f(x)$ függvényhez hasonló alakban keressük. A megoldást ekkor „kísérletező feltevésnek” is nevezzük.

1. $f(x) = P_n(x),$

ahol $P_n(x)$ n -ed fokú polinom.

A kísérletező megoldást

$$y_0 = Q_n(x),$$

azaz $y_0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

alakban keressük.

2. Az $ay'' + by' + cy = f(x)$

egyenlet jobb oldala

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \text{ alakú,}$$

ahol $P(x)$ polinom.

A partikuláris megoldást

$$y_0 = Q(x)x^k e^{\alpha x}$$

alakban keressük.

Itt $Q(x)$ polinom, amelynek fokszáma $P(x)$ -ével megegyezik, k pedig 0, 1 vagy 2, aszerint, hogy α a karakterisztikus egyenletnek, azaz az

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

egyenletnek hány-szoros gyöke.

3. Ha az $ay'' + by' + cy = f(x)$

inhomogén egyenletben

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \text{ vagy}$$

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x,$$

akkor a partikuláris megoldást a következő alakban keressük:

$$y_0 = x^k e^{\alpha x} [R_1(x) \cos \beta x + R_2(x) \sin \beta x].$$

Itt, ha az $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenletnek $\alpha \pm \beta i$ gyöke, $k = 1$, ha nem gyöke, $k = 0$.

$R_1(x)$ és $R_2(x)$ polinomok, amelyeknek fokszáma $P(x)$ fokszámaival megegyezik.

Példák

1. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}.$

A homogén egyenlet:

$$Y'' - 3Y' + 2Y = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Gyökei:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}.$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$Y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Az inhomogéné pedig:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + y_0.$$

Az $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$ egyenlet jobb oldala

$$f(x) = 3e^{2x} = P(x)e^{2x}.$$

Itt $P(x) = 3$ 0-adfokú polinom: $\alpha = 2$. Mivel 2 a karakterisztikus egyenlet egyszeres gyöke, $k = 1$.
Így az y_0 partikuláris megoldást

$$y_0 = Q(x) \cdot x^k \cdot e^{2x} \quad \text{alakban felírva:}$$

$$y_0 = a \cdot x \cdot e^{2x}.$$

$Q(x)$ is nulladfokú polinom, azaz konstans.

Differenciálva:

$$y_0' = e^{2x}(a + 2ax),$$

$$y_0'' = e^{2x}(4a + 4ax).$$

Helyettesítsük ezeket az értékeket az egyenletbe:

$$e^{2x}(4a + 4ax) - 3e^{2x}(a + 2ax) + 2axe^{2x} = 3e^{2x},$$

$$\text{azaz} \quad e^{2x}(4a + 4ax - 3a - 6ax + 2ax) = 3e^{2x}.$$

$$\text{Összevonva: } ae^{2x} = 3e^{2x},$$

$$\text{azaz} \quad a = 3.$$

$$\text{Mivel} \quad y_0 = axe^{2x},$$

$$y_0 = 3x \cdot e^{2x}.$$

Tehát az egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 3x \cdot e^{2x}.$$

$$2. \quad y'' - 7y' + 6y = \sin x.$$

A megfelelő homogén egyenlet:

$$Y'' - 7Y' + 6Y = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

$$\text{Gyökei:} \quad \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}.$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6.$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$Y = c_1 e^x + c_2 e^{6x}.$$

Az inhomogén egyenlet jobb oldala

$$f(x) = \sin x.$$

Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_0 = a \cos x + b \sin x \quad \text{alakban.}$$

$$\text{Ekkor} \quad y_0' = -a \sin x + b \cos x,$$

$$y_0'' = -a \cos x - b \sin x.$$

Ezeket az értékeket az egyenletbe helyettesítve:

$$-a \cos x - b \sin x + 7a \sin x - 7b \cos x + 6a \cos x + 6b \sin x = \sin x.$$

Rendezve a bal oldalt:

$$(5a - 7b) \cos x + (7a + 5b) \sin x = \sin x.$$

Így az egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha a két oldalon az együtthatók megegyeznek, azaz

$$\left. \begin{aligned} 5a - 7b &= 0 \\ 7a + 5b &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenletrendszerből

$$a = \frac{7}{74}, \quad b = \frac{5}{74}.$$

Így a partikuláris megoldás:

$$y_0 = \frac{7}{74} \cos x + \frac{5}{74} \sin x.$$

Az általános megoldás pedig:

$$y = Y + y_0,$$

$$\text{azaz} \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{6x} + \frac{7}{74} \cos x + \frac{5}{74} \sin x.$$

*

Itt jegyezzük meg, hogy az elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek (12.1.4.2. pont) partikuláris megoldását is szokás kísérletező feltevéssel keresni.

Tétel. Ha az inhomogén egyenlet

$$(1) \quad y'' + A(x)y' + B(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

alakú, akkor a partikuláris megoldás:

$$y_0 = y_1 + y_2,$$

ahol y_1 és y_2 az

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = f_1(x),$$

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = f_2(x)$$

differenciálegyenletek partikuláris megoldásai.

A tétel helyességéről közvetlen helyettesítéssel győződhetünk meg.

*

$$3. \quad y'' - 3y' - 4y = \operatorname{sh} x.$$

A homogén egyenlet:

$$Y'' - 3Y' - 4Y = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Ennek gyökei: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$.

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$Y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}.$$

$$\text{Az } y'' - 3y' - 4y = \operatorname{sh} x$$

egyenlet így írható: $y'' - 3y' - 4y = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x}$.

Határozzuk meg az

$$y'' - 3y' - 4y = \frac{1}{2} e^x \quad \text{és}$$

$$y'' - 3y' - 4y = -\frac{1}{2} e^{-x}$$

egyenletek partikuláris megoldásait.

$$\text{Az } y'' - 3y' - 4y = \frac{1}{2} e^x$$

egyenletben $f_1(x) = \frac{1}{2} e^x$, $\alpha = 1$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, $k = 0$. $P(x) = \text{konst}$, így $Q(x) = a$.

$$y_1 = ae^x,$$

$$y_1' = ae^x,$$

$$y_1'' = ae^x.$$

Az értékeket az egyenletbe helyettesítve:

$$ae^x - 3ae^x - 4ae^x = \frac{1}{2} e^x,$$

$$-6a = \frac{1}{2},$$

$$a = -\frac{1}{12}.$$

$$y_1 = -\frac{1}{12} e^x.$$

Az $y'' - 3y' - 4y = -\frac{1}{2} e^{-x}$ egyenletben $f_2(x) = -\frac{1}{2} e^{-x}$.

$\alpha = -1$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek,

így $k=1$, $Q(x) = \text{konst} = b$.

$$y_2 = bxe^{-x},$$

$$y_2' = be^{-x} - bxe^{-x},$$

$$y_2'' = -2be^{-x} + bxe^{-x}.$$

y_2 értékét az egyenletbe helyettesítve:

$$-2be^{-x} + bxe^{-x} - 3be^{-x} + 3bxe^{-x} - 4bxe^{-x} = -\frac{1}{2} e^{-x}.$$

$$-5be^{-x} = -\frac{1}{2} e^{-x}.$$

$$b = \frac{1}{10},$$

$$y_2 = \frac{1}{10} xe^{-x}.$$

Az $y'' - 3y' - 4y = \operatorname{sh} x$ differenciálegyenlet partikuláris megoldása.

$$y_0 = y_1 + y_2 = -\frac{1}{12} e^x + \frac{1}{10} xe^{-x}.$$

Általános megoldása:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{12} e^x + \frac{1}{10} xe^{-x}.$$

12.2.4.3.3 A másodrendű lineáris differenciálegyenletek alkalmazása a műszaki gyakorlatban

Rezgő mozgások

Szabad rezgések

a) Csillapítatlan rezgő mozgás. Ha egy rugó egyik végét rögzítjük, a másik végére m tömegpontot helyezünk, és a rugót összenyomjuk, majd elengedjük, az m tömegpont rezgő mozgást végez. Ha a levegő ellenállását nem vesszük figyelembe, a mozgásegyenlet

$$m\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

x a kitérés, $\ddot{x}$ az idő szerinti második derivált, a gyorsulás, m a tömeg, ω^2 a rugóállandó. A feladatot a hiányos másodrendű differenciálegyenleteknél már tárgyaltuk (12.2.3.3. pont). Nézzük most másfajta megoldását!

Tekintsük az egyszerűség kedvéért a tömeget egységnyiinek

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

$$\lambda = \pm \omega i.$$

A differenciálegyenlet megoldása:

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

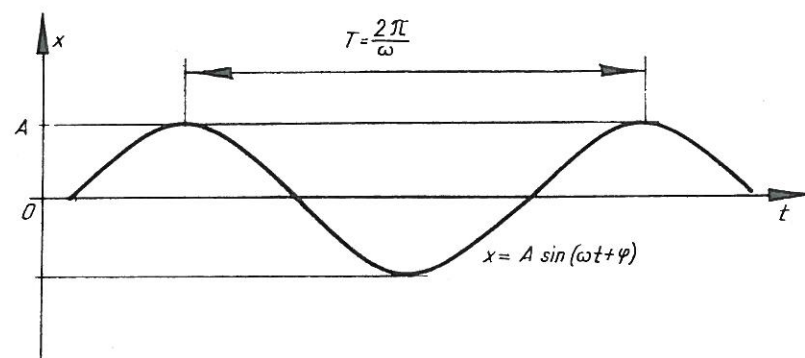
$$c_1 = A \sin \varphi \quad \text{és} \quad c_2 = A \cos \varphi \quad \text{jelöléssel:}$$

$$x = A \sin \varphi \cos \omega t + A \cos \varphi \sin \omega t,$$

$$x = A \sin(\omega t + \varphi).$$

A mozgás képe a 12.34 ábrán látható. A kezdeti értékektől függő A és φ értékek jelentése: A az amplitúdó, φ a kezdő fázis. A rezgés periódusa $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

(Megjegyzés: a valóságban csillapítatlan rezgő mozgás szabad rezgésnél nem jön létre.)



12.34 ábra

b) Csillapított rezgő mozgás. A rugó végére erősített tömegpont mozgásegyenlete a levegő ellenállása miatt:

$$m\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

$2\delta > 0$ a súrlódási együttható, ω^2 a rugóállandó.

(Hasonló mozgásegyenletek írják le a mechanikai lengőrendszerek mozgását.)

Legyen a tömeg egységnyi.

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

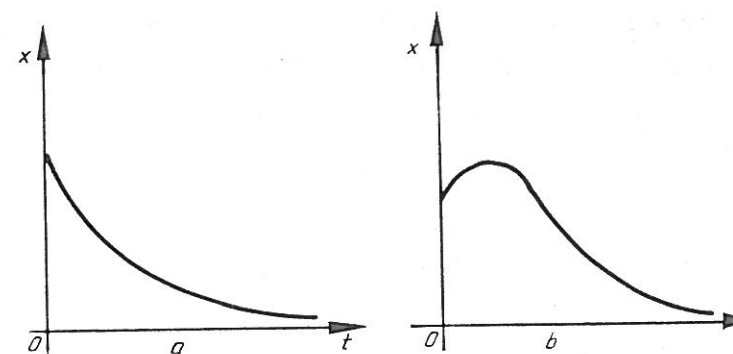
$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0,$$

$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}.$$

1. $\delta^2 > \omega^2$, két valós gyök van, mindkettő negatív, jelölje ezeket $-\lambda_1$ és $-\lambda_2$.

Ekkor $x = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$.

c_1 és c_2 értékeitől függően a kitérés exponenciálisan csökken vagy a maximum után csökken (12.35/a és 12.35/b ábra). Ekkor nincs rezgő mozgás, a mozgás aperiodikus.



12.35 ábra

2. $\delta = \omega$.

$$\lambda_{1,2} = -\delta,$$

$$x = e^{-\delta t}(c_1 + c_2 t).$$

A mozgás hasonló jellegű, mint az előző esetben.

3. $\delta < \omega$.

$$\text{Legyen} \quad \omega_0^2 = \omega^2 - \delta^2.$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = -\delta \pm \omega_0 i.$$

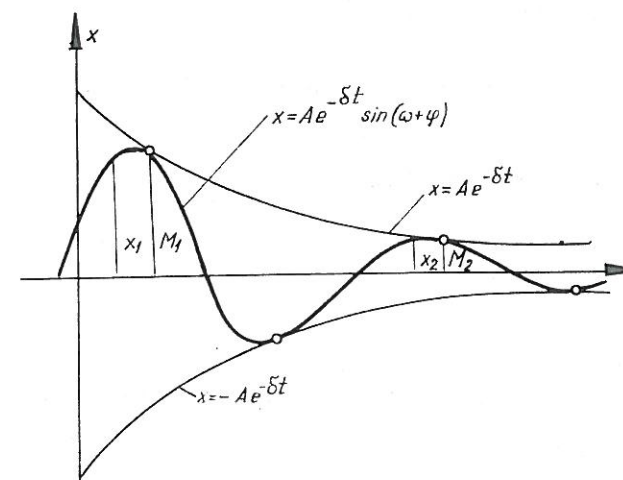
$$x(t) = e^{-\delta t}(c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t).$$

Legyenek a c_1 és c_2 állandók ilyen alakúak:

$$c_1 = A \sin \varphi, \quad c_2 = A \cos \varphi.$$

$$x(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

A mozgást ábrázoló görbét a 12.36 ábra szemlélteti.



12.36 ábra

A görbe az $x = \pm Ae^{-\delta t}$ görbék között halad. Ha $t = 0$, $x(0) = A \sin \varphi$, ahol φ a kezdő fázis. A mozgás $\frac{2\pi}{\omega_0}$ szerint periodikus. A mozgás a csillapított rezgő mozgás.

A mozgás amplitúdói azok az ordináták, amelyeknél a görbe eléri az $Ae^{-\delta t}$ görbét. Legyen az amplitúdó a T_1 pillanatban:

$$M_1 = Ae^{-\delta T_1}.$$

Egy periódussal később a $T_2 = \left(T_1 + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$ pillanatban:

$$M_2 = A \cdot e^{-\delta \left(T_1 + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)}.$$

A két amplitúdó hányadosa:

$$\frac{M_2}{M_1} = e^{-\frac{2\pi}{\omega_0} \delta}.$$

A két szomszédos amplitúdó aránya állandó. Egy periódus alatt az amplitúdó

$$e^{-\frac{2\pi}{\omega_0} \delta} \text{ -szorosra csökken.}$$

A hányados logaritmus a logaritmikus dekrementum: Δ .

$$\Delta = \ln \frac{M_2}{M_1} = -\frac{2\pi}{\omega_0} \delta.$$

Ugyanez az arány vonatkozik két olyan kitérésre, amelyek egymástól $\frac{2\pi}{\omega_0}$ időkülönbségben jönnek létre.

$$x_1 = x(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

$$\begin{aligned} x_2 = x\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) &= Ae^{-\delta\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)} \sin\left[\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + \varphi\right] = \\ &= Ae^{-\delta\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)} \sin(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = e^{-\frac{2\pi}{\omega_0} \delta}.$$

Kényszerrezgések

Hasson a rezgő mozgást végző tömegpontra külső gerjesztő erő. Legyen ez az

$$F(t) = P \sin \omega_1 t$$

csillapítatlan periodikus erő.

A mozgásegyenlet

$$m = 1 \text{ egységnyi tömeget véve:}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = P \sin \omega_1 t \quad (\delta < \omega).$$

A megfelelő homogén egyenlet:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0,$$

$$\lambda = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}.$$

Vegyük a szabad rezgést csillapított rezgő mozgásnak.

$$\text{Ekkor } \lambda = -\delta \pm \omega_0 i \quad (\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}),$$

és a homogén egyenlet megoldása:

$$X = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását kísérletező feltevéssel keressük. A jobb oldal:

$$F(t) = P \sin \omega_1 t,$$

$$P(t)e^{\alpha t} \sin \beta t \text{ alakú függvény.}$$

Esetünkben $P(t) = P$, $\alpha = 0$, $\beta = \omega_1$.

$$\alpha \pm \beta i = \pm \omega_1 i$$

a karakterisztikus egyenletnek nem gyöke.

Írjuk fel a gerjesztett rezgést a következő alakban:

$$x_0 = a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t.$$

Deriválva: $\dot{x}_0 = -a\omega_1 \sin \omega_1 t + b\omega_1 \cos \omega_1 t,$

$$\ddot{x}_0 = -a\omega_1^2 \cos \omega_1 t - b\omega_1^2 \sin \omega_1 t.$$

Az $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = P \sin \omega_1 t$ mozgásegyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 t (-a\omega_1^2 + 2\delta b\omega_1 + a\omega^2) + \sin \omega_1 t (-b\omega_1^2 - 2\delta a\omega_1 + \omega^2 b) &= \\ = P \sin \omega_1 t. \end{aligned}$$

Ez akkor lehetséges, ha

$$\left. \begin{aligned} -a\omega_1^2 + 2\delta b\omega_1 + a\omega^2 &= 0 \\ -b\omega_1^2 - 2\delta a\omega_1 + b\omega^2 &= P \end{aligned} \right\},$$

azaz

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 - \omega_1^2)a + 2\delta\omega_1 b &= 0 \\ (\omega^2 - \omega_1^2)b - 2\delta\omega_1 a &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ez utóbbi egyenletrendszer a -ra és b -re megoldva:

$$a = \frac{-2\delta\omega_1 P}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2},$$

$$b = \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)P}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}.$$

Az $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = P \sin \omega_1 t$ partikuláris megoldása:

$$x_0 = \frac{P}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2} [-2\delta\omega_1 \cos \omega_1 t + (\omega^2 - \omega_1^2) \sin \omega_1 t].$$

Ezt így is írhatjuk

$$x_0 = \frac{P}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} \left[\frac{-2\delta\omega_1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} \cos \omega_1 t + \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} \sin \omega_1 t \right].$$

Legyen

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{P}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}}, \\ -\frac{2\delta\omega_1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} &= \sin \varphi_1, \\ \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} &= \cos \varphi_1. \end{aligned} \right\}$$

Ekkor

$$x_0 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

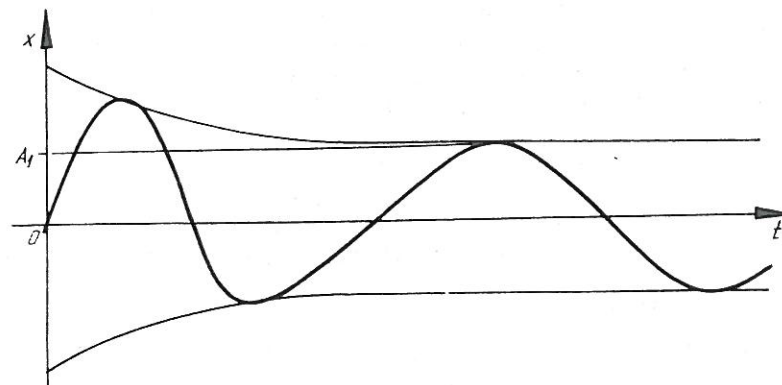
 A_1 a kényszerből (zavaró tényezőből) eredő amplitúdó, $(-\varphi_1)$ a fáziskésés.

A kényszerrezgést végző pont mozgásegyenlete

$$x = X + x_0,$$

$$x = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

A homogén egyenlet megoldásából származó szabad lengések, minthogy amplitúdójuk exponenciálisan csillapodó, bizonyos idő után elenyésznek. Hosszabb idő után tehát csak a gerjesztett rezgés okozta csillapítatlan rezgés marad fenn (12.37 ábra).



12.37 ábra

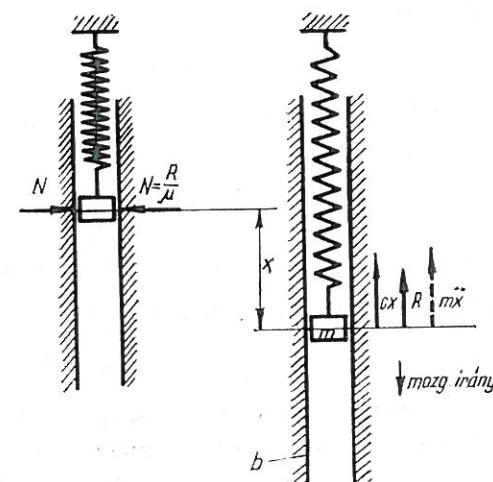
Ha $\omega \rightarrow \omega_1$, azaz $\frac{\omega}{\omega_1} \rightarrow 1$, a gerjesztett rezgés amplitúdója hirtelen megnő.

$$A_1 = \frac{P}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}}.$$

 $\frac{\omega}{\omega_1} \rightarrow 1$ esetén az amplitúdó nagy lesz, de a növekedés annál kisebb, minél nagyobb a δ csillapítás.Ha viszont a δ ellenállási együttható kicsi, és a gerjesztési frekvencia (zavaró frekvencia) közel van a rendszer saját frekvenciájához (és még inkább, ha megegyezik vele), a rendszer bizonyos időszakon keresztül a szabad lengés amplitúdóját sokszorosán meghaladó amplitúdójú rezgést végez.

A rezgés amplitúdójának kicsiny külső hatásra való növekedését rezonanciának nevezik. A rezonancia jelenségének nagyon nagy szerepe van a fizikában és a műszaki gyakorlatban. Minden rugalmas test ugyanis csak a saját tulajdonságától függő rezgő mozgást végez.

Ha rá olyan periodikus erő hat, amelynek frekvenciája közel van a test frekvenciájához, a rezonancia következtében már kis zavaró erő is nagy rombolást végezhet. Ezért gyorsforgású gépek, hidak stb. tervezésekor külön számításba veszik a rezonanciával szembeni szilárdságot is.



12.38 ábra

Száraz súrlódással csillapított harmonikus rezgő mozgás differenciálegyenlete

Vizsgáljuk meg a 12.38 ábrán feltüntetett m tömeg mozgását, ha a tömegre a mindenkor mozgásiránnyal ellentétes R súrlódási erő hat. A Coulomb-súrlódásból származó

R erő nagysága független a mozgás sebességétől. $R = \mu N$, ahol μ a súrlódási tényező, N a felületre merőleges, ún. normális erő. Ha az m tömeget kimozdítjuk nyugalmi helyzetéből x távolságra, akkor a tömegre a $c \cdot x$ rugóerő, az R súrlódási erő és a D'Alembert-elv értelmében az $m\ddot{x}$ tehetetlenségi erő hat. Az erők egyensúlyát a mozgás differenciálegyenlete írja le:

$$m\ddot{x} + cx = -R.$$

Az egyenletnek ez az alakja $x > 0$ esetre (a tömeg lefelé mozgásakor) érvényes. Ha a tömeg felfelé mozog, a súrlódási erő ellenkező előjelű, tehát a felfelé mozgás differenciálegyenlete

$$m\ddot{x} + cx = +R.$$

Ha az R súrlódási erőt $R = cb$ -vel helyettesítjük, akkor a felfelé mozgás során a lengő tömeg $x = b$ -nél egyensúlyban van ($\ddot{x} = 0$). A lefelé mozgáskor az egyensúly az $x = -b$ helyen lép fel. Látjuk tehát, hogy a száraz súrlódásnál az egyensúlyi helyzetek a 0-vonaltól $\pm b$ távolságra helyezkednek el. Ezek az egyensúlyi helyzetek statikai egyensúlyi helyzetek. Ha bevezetjük az

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

saját körfrekvenciát, akkor a felfelé, illetve a lefelé mozgás differenciálegyenletei:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \ddot{x} + \omega_0^2 x = b\omega_0^2, \\ (2) \quad & \ddot{x} + \omega_0^2 x = -b\omega_0^2. \end{aligned}$$

A mozgás amplitúdóját mint az idő függvényét az (1) és (2) egyenletek integráljaiból állítjuk elő. Feltételezzük, hogy a $t = 0$ időpontban a lengő tömeg $a_0 = x_0$ távolságra helyezkedik el a statikus nyugalmi helyzet alatt. Ha a kitérített tömeget magára hagyjuk, a rugóerő hatására mozgásba lendül. A mozgás a súrlódási erő okozta csillapítás (a kinetikus energia súrlódási hővé alakulása közben) az amplitúdó csökkenéséhez vezet (12.39 ábra).

A felfelé mozgás időfüggvényének jele legyen $\bar{x}$, a lefelé mozgásé pedig $\bar{\bar{x}}$. A kezdeti feltételek a következők:

$$x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = 0.$$

Ezekkel a kezdeti feltételekkel a felfelé mozgás egyenletének megoldása, amint az könnyen ellenőrizhető:

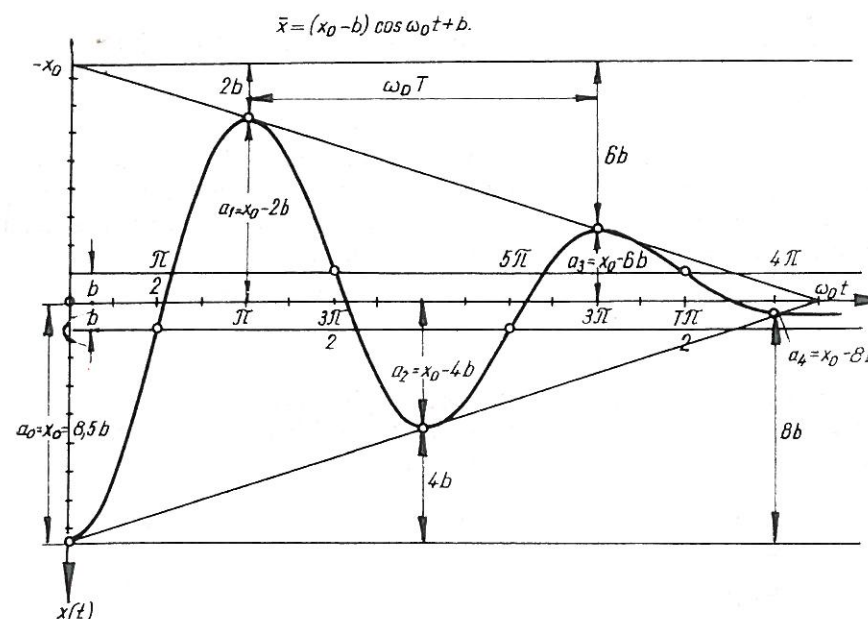
$$\bar{x} = (x_0 - b) \cos \omega_0 t + b.$$

$\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$ -nél $\bar{x} = b$, az $\omega_0 t = \pi$ helyen pedig $\dot{\bar{x}} = 0$. A kitérés maximuma tehát az $\omega_0 t = \pi$ helyen van. A maximális kitérés nagysága:

$$\bar{x}(\pi) = -a_1 = -(x_0 - 2b).$$

Ebben a helyzetben a felfelé mozgás véget ér. Az elért helyzet egyben a lefelé mozgás kezdeti feltételeit is megadja. Ezekből következik, hogy az $\omega_0 t = \pi$ helyen

$$\bar{\bar{x}} = -(x_0 - 2b) \quad (\dot{\bar{\bar{x}}} = 0).$$



12.39 ábra

A lefelé mozgást leíró (2) egyenlet megoldása:

$$\bar{\bar{x}} = (x_0 - 3b) \cos \omega_0 t - b.$$

Az $\omega_0 t = 3 \frac{\pi}{2}$ helyen $\bar{\bar{x}} = -b$, az $\omega_0 t = 2\pi$ helyen pedig a tömeg kitérésének amplitúdója:

$$\bar{\bar{x}}(2\pi) = a_2 = x_0 - 4b.$$

Most ismét egy felfelé tartó mozgási szakasz következik. Az előző, lefelé haladó mozgási szakasz végén beállt állapot adja ennek az újabb felfelé tartó mozgási szakasznak a kezdeti feltételeit. Ezekkel a kezdeti feltételekkel az (1) egyenlet megoldásának alakja:

$$\bar{x} = (x_0 - 5b) \cos \omega_0 t + b$$

lesz. Ezen a lefelé haladó mozgási szakaszon az $\omega_0 t = 5 \frac{\pi}{2}$ helyen $\bar{x} = b$ -vel, az $\omega_0 t = 3\pi$ helyen pedig

$$\bar{x}(3\pi) = -a_3 = -(x_0 - 6b).$$

A most következő lefelé tartó mozgás eleget tesz az $\omega_0 t = 3\pi$ helyen az

$$\bar{\bar{x}} = -(x_0 - 6b) \quad (\dot{\bar{\bar{x}}} = 0)$$

kezdeti feltételeknek. A (2) egyenlet megoldása ezekkel a kezdeti feltételekkel:

$$\bar{\bar{x}} = (x_0 - 7b) \cos \omega_0 t - b.$$

Az $\omega_0 t = 7 \frac{\pi}{2}$ helyen $x = -b$, az $\omega_0 t = 4\pi$ helyen pedig a lengés amplitúdója:

$$\bar{x}(4\pi) = x_0 - 8b.$$

A 4π helyhez tartozó fordulópont a 12.39 ábrán felvett x_0 és b értékek mellett belesik a $-b \equiv x \equiv b$ sávba. A tömeg tehát nyugalomban marad, mert a ráható rugóerő és tehetetlenségi erő összege ebben a helyzetben már kisebb, mint a súrlódási erő. Így a súrlódási erő nyugalomban tartja a tömeget. Ez könnyen belátható, hiszen

$$x(4\pi) < b \quad \text{vagy}$$

$$cx(4\pi) < cb = R.$$

Ha tehát a lengő tömeg amplitúdómaximuma a $\pm b$ sávba esik, a tömeg megáll. Ez bizonyos számú lengés után általában be is következik. Az egymás után következő amplitúdók abszolút értékei számtani sorozatot alkotnak:

$$a_0 = x_0$$

$$a_1 = x_0 - 2b$$

$$a_2 = x_0 - 4b$$

$$a_3 = x_0 - 6b$$

$$\dots\dots\dots$$

Ebből következik, hogy az egymás után következő és azonos előjelű amplitúdók egy egyenesre esnek.

13. A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS MATEMATIKAI MEGALAPOZÁSA

A valószínűségszámítás a matematikának az a fejezete, mely a véletlentől függő „tömegjelenségekkel” kapcsolatos eseményekkel foglalkozik. Feladatai közé tartozik a tömegjelenségek „egyszerű” eseményei bekövetkezéséből következtetni összetett események valószínűségeire. Ezek meghatározása többnyire kombinatorikus módszerekkel történik. Éppen ezért szükséges a matematika ilyen jellegű problémákkal foglalkozó fejezetének, a kombinatorikának a megismerése.

A valószínűségszámítás feladatainak matematikai formába való öntéséhez olyan matematikai eszköz megteremtése szükséges, amely alkalmas események közti formális kapcsolatok leírására és vizsgálatára. E célt szolgálja többek között a Boole-algebrák speciális esete, az eseményalgebra.

A továbbiakban mindenekelőtt a valószínűségszámítás feladatainak megoldásához, matematikai megalapozásához szükséges kombinatorika és eseményalgebra alapjait ismertetjük.

13.1 KOMBINATORIKA

A kombinatorika igen sokrétű tárgyköréből csak néhány — a valószínűségszámítás szempontjából fontos — problémával, így elsősorban a sorrendezési és kiválasztási problémával foglalkozunk.

A kombinatorikának a sorrendezési problémákat tárgyaló fejezete a permutációk elmélete, amely megkülönböztet ismétlés nélküli és ismétléses permutációt aszerint, hogy az elemek mind különbözők, vagy vannak köztük azonos típusúak is.

A kiválasztási problémákat tárgyaló fejezet a kombinációk, valamint a variációk elmélete, aszerint hogy a kiválasztott elemek sorrendje figyelmen kívül hagyható-e vagy sem. Sőt, ezen belül is van ismétlés nélküli, ill. ismétléses kombináció és variáció aszerint, hogy egy elem egyszer, ill. többször választható-e ki (vagyis a kiválasztás visszatevés nélküli, ill. visszatevéses).

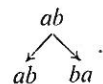
A következőkben behatóbban foglalkozunk a kombinatorika ezen fejezeteivel.

13.1.1 Ismétlés nélküli permutáció

Definíció. n különböző elem egy meghatározott sorrendben való elhelyezése: n elem egy ismétlés nélküli permutációja.

A lehetséges sorrendezések számát az ismétlés nélküli permutációk számának nevezzük és P_n -nel jelöljük.

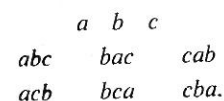
Két elemet (pl. két betűt vagy számot) kétféle sorrendben tudunk felírni:



Tehát két elem ismétlés nélküli permutációinak száma:

$$P_2 = 2 = 2!.$$

Három elemet 6-féle sorrendben tudunk felírni:



Ezt két elem permutációinak ismeretében a következő megfontolás alapján határozhatjuk meg. A permutációkat csoportosítjuk aszerint, hogy mi az első elem. Így 3 csoportot kapunk. Minden csoportban annyi permutáció lesz, ahány permutációja az első elem után álló 2 elemnek van, tehát 2. Így 3 elem ismétlés nélküli permutációinak száma:

$$P_3 = 3 \cdot 2 = 3!.$$

Tétel. n különböző elem lehetséges sorrendjeinek, ismétlés nélküli permutációinak száma:

$$P_n = n!,$$

ahol $n!$ jelenti az első n pozitív egész szám szorzatát, vagyis:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Bizonyítás. (Teljes indukció módszerével.)

Az állítás $n = 2$ esetére igaz, mert hiszen

$$P_2 = 2!.$$

Feltételezzük, hogy

$$P_{n-1} = (n-1)!.$$

azaz, hogy $(n-1)$ elem különféle sorrendjeinek száma $(n-1)!$, és ebből a feltételből igazoljuk, hogy

$$P_n = n!.$$

Legyen az n különböző elem:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

A permutációkat csoportosítjuk aszerint, hogy mi az első elem, így n csoportot kapunk. Minden csoportban annyi permutáció lesz, ahány permutációja az első elem után álló $(n-1)$ elemnek van. Mivel $(n-1)$ elem ismétlés nélküli permutációinak száma a feltétel szerint $(n-1)!$, így n elem ismétlés nélküli permutációinak száma:

$$n(n-1)! = n!.$$

A csoportosítás során nem hagytunk ki egyetlen permutációt sem, ugyanis mindegyik permutációt annyiadik csoportnál vettük figyelembe, amekkora a saját kezdő eleme (pl. az a_2 -vel kezdődőket a 2. csoportnál).

Nem számítottunk egy permutációt többször sem, hiszen az egyes csoportokban szereplő permutációk mind különbözők (ugyanaz az elem áll ugyan az első helyen, de a többi $(n-1)$ elem permutációjában van közöttük eltérés), a különböző csoportokban levők pedig már az első elemekben sem egyeznek meg.

Ezek figyelembevételével állítjuk, hogy

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n(n-1)! = n!,$$

amit éppen bizonyítani akartunk.

Megjegyzés. n különböző elem permutációinak meghatározására — nagy n értékekre — jó közelítést ad *Stirling* formulája:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

Tehát

$$P_n \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

Példák

1. 10 különböző fajta virág hányféle sorrendben ültethető

a) egymás mellé elhelyezett virágágyásokba,

b) kör alakú virágágyásokba?

A lehetséges ültetési sorrendek száma egymás melletti virágágyások esetén:

$$x = P_{10} = 10!.$$

Kör alakban elrendezett virágágyások esetén

$$x = P_9 = 9!.$$

Kör alakú elrendezés esetén ugyanis nem tekinthető különbözőnek az a sorrend, amikor a szomszédos virágágyásokban azonos virágok vannak (pl. egy adott sorrendet tekintve mindegyik típusú virágot egy virágágyással arrébb ültetünk). Így az összes lehetséges sorrendben egy fajta virág helyét rögzítjük és az összes többi, vagyis a 9-et permutáljuk.

2. A 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány olyan ötjegyű páratlan szám képezhető, melyben minden jegy csak egyszer fordul elő?

Az 5 jegy permutációi közül csak az 1-gyel és 3-mal végződők jöhetnek számításba. Ezek száma: $2 \cdot 4!$. Ebben benne vannak a 0-val kezdődők is, melyek nem tekinthetők 5 jegyű számoknak. Ezek száma: $2 \cdot 3!$. Így a kérdéses 5 jegyű számok száma

$$2 \cdot 4! - 2 \cdot 3! = 36$$

3. 5 fiú és 5 lány között 10 mozijegy hányféleképp osztható szét, hogy ne kerüljön egymás mellé sem 2 fiú, sem 2 lány?

Az 5 lány — pl. a páros számozású helyekre — $P_5 = 5!$ sorrendben, közéjük az 5 fiú ugyancsak $P_5 = 5!$ sorrendben ülhet. Tehát a páros számozású helyekre a lányok és a páratlanokra a fiúk: $5! 5!$ féle sorrendben ülhetnek. Miután fordított ülésrend is lehetséges: ülhetnek a páros számozású helyekre a fiúk és a páratlanokra a lányok, így — a feltétel figyelembevételével — az összes lehetséges ülésrendek száma

$$n = 2 \cdot 5! 5! = 28\,800.$$

13.1.2 Ismétléses permutáció

Definíció. n olyan elemnek egy sorrendezése, melyek között l különböző fajta van, éspedig mindegyikből rendre $k_1, k_2, \dots, k_l$ számú ($k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$): n elem egy ismétléses permutációja.

A lehetséges sorrendezések számát az ismétléses permutációk számának nevezzük, és $\bar{P}_{n(k_1, k_2, \dots, k_l)}$ -el, ill. $\bar{P}_{n(k)}$ -val jelöljük. (Az utóbbi jelölést abban a speciális esetben használjuk, ha az elemek közt csak k számú azonos elem van, és a többi mind különböző.) Az ismétléses permutációk száma kisebb, mint az ismétlés nélkülieké, hiszen az elemek közt azonosak is vannak, így azok cseréje nem változtatja meg a permutációt.

Például tekintsük az

$$a, a, b$$

betűk lehetséges sorrendjeit, ismétléses permutációit. Ezek a következők:

$$\begin{array}{ccc} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{array}$$

Látható, hogy 3 elem — melyek közül kettő azonos — ismétléses permutációinak száma:

$$\bar{P}_{3(2)} = 3.$$

Kérdés, hogyan határozható ez meg 3 különböző elem ismétlés nélküli permutációja segítségével.

Ha az elemek mind különbözők lennének, minden egyes ismétléses permutáció helyett 2 ismétlés nélküli permutációt kapnánk (vagyis annyit, amennyi az azonos elemek számának ismétlés nélküli permutációja)

$$\begin{array}{l} a \ a \ b = a_1 \ a_2 \ b \begin{cases} \nearrow a_1 \ a_2 \ b \\ \searrow a_2 \ a_1 \ b \end{cases} \\ a \ b \ a = a_1 \ b \ a_2 \begin{cases} \nearrow a_1 \ b \ a_2 \\ \searrow a_2 \ b \ a_1 \end{cases} \\ b \ a \ a = b \ a_1 \ a_2 \begin{cases} \nearrow b \ a_1 \ a_2 \\ \searrow b \ a_2 \ a_1 \end{cases} \end{array}$$

Tehát 3 különböző elem permutációinak száma olyan 3 elem ismétléses permutációjából számítva, melyek közül 2 azonos:

$$P_3 = \bar{P}_{3(2)} \cdot P_2,$$

amiből

$$\bar{P}_{3(2)} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!}.$$

Hasonló megfontolások alapján igazolható az ismétléses permutáció meghatározására vonatkozó általános tétel is.

Tétel. Ha n elem között l különböző fajta van, éspedig az első fajtából k_1 , a másodikból $k_2, \dots$ az l -edikből k_l (ahol $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$), akkor a lehetséges sorrendek, az ismétléses permutációk száma:

$$P_{n(k_1, k_2, \dots, k_l)} = \frac{P_n}{P_{k_1} \cdot P_{k_2} \cdot \dots \cdot P_{k_l}} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_l!}.$$

Abban a speciális esetben, amikor az n elem közül csak k számú azonos és a többi mind különböző, a lehetséges sorrendek száma:

$$P_{n(k)} = \frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}.$$

Bizonyítás. A tételt csak az utóbbi, speciális esetre bizonyítjuk.

A k számú azonos elemet tartalmazó n elem ismétléses permutációinak száma: $\bar{P}_{n(k)}$. Tekintsük a k számú azonos típusú elemet is megkülönböztethetőnek. Ekkor az n különböző elem permutációinak számát, $n!$ -t úgy is megkaphatjuk, hogy az előbbi $\bar{P}_{n(k)}$ darab ismétléses permutáció mindegyikében az eddig azonosnak tekintett k darab elemet permutáljuk. Így minden egyes ismétléses permutációból $k!$ különböző ismétlés nélküli permutáció adódik. Belátható, hogy ezzel a módszerrel n elemnek csupa különböző ismétlés nélküli permutációját kaptuk (sem ugyanabból, sem különböző ismétléses permutációból kiindulva nem nyerhetünk azonos ismétlés nélküli permutációkat), és n elemnek minden egyes ismétlés nélküli permutációját megkaptuk. Tehát az ily módon meghatározott ismétlés nélküli permutációk száma:

$$P_n = \bar{P}_{n(k)} \cdot P_k.$$

amiből a keresett ismétléses permutációk száma:

$$\bar{P}_{n(k)} = \frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!},$$

és ezzel állításunkat igazoltuk.

Hasonló okoskodással bizonyítható a tétel általános formája is.

Példák

1. 30 láda almából 15 láda első osztályú, 10 láda másodosztályú, 5 láda harmadosztályú. Hányféle sorrendben rakhatók egy polcra? Miután két azonos minőségű almát tartalmazó láda cseréje nem tekinthető különböző sorrendnek, a lehetséges sorrendek száma:

$$x = \bar{P}_{30(15, 10, 5)} = \frac{30!}{15! 10! 5!}.$$

2. Hány hatjegyű páros szám alkotható a 0, 1, 2, 2, 3, 3 számjegyekből?

A 0, 1, 2, 2, 3, 3 számjegyekből készíthető hatjegyű páros szám utolsó jegye 0 vagy 2 lehet.

A 0-val végződők száma

$$\bar{P}_{5(1, 2, 2)} = \frac{5!}{2! 2!},$$

mert a 0 előtt 1 db 1-es, 2 db 2-es, 2 db 3-as jegy összes lehetséges sorrendjei szerepelhetnek. A 2-vel végződő hatjegyű számok száma:

$$\bar{P}_{5(1, 1, 1, 2)} = \frac{5!}{1! 1! 1! 2!} = \frac{5!}{2!},$$

ugyanis a 2-es előtt 1 db 0-s, 1 db 1-es, 1 db 2-es és 2 db 3-as jegy összes permutációja szerepelhet. Ebben azonban benne vannak a 0-val kezdődő 2-vel végződő számok is. Mivel a 0 és 2 számjegyet közt 1 db 1-es, 1 db 2-es és 2 db 3-as jegy állhat, azért a 0 kezdetű, 2 végződésű hatjegyű számok száma:

$$\bar{P}_{4(1, 1, 2)} = \frac{4!}{2!}.$$

Tehát a 2-vel végződő értékes hatjegyű páros számok száma:

$$\bar{P}_{5(1, 1, 1, 2)} - \bar{P}_{4(1, 1, 2)} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!}.$$

Így a kérdéses hatjegyű páros számok száma:

$$x = \frac{5!}{2! 2!} + \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = \frac{3 \cdot 5! - 2 \cdot 4!}{4} = 78.$$

3. Három különböző színű kockával hány olyan dobáscsoport lehetséges, amelyben az egyik szám egyenlő a másik kettő összegével? (Különbözőnek tekintünk két olyan dobáscsoportot, melyekben ugyanazok a számok szerepelnek más színű kockákon.)

A dobott számok közül a 2, 3, 4, 5, 6 számok állíthatók elő az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok közül valamelyik kettő összegeként. Éspedig

$$\begin{aligned} 2 &= 1+1, \\ 3 &= 1+2, \\ 4 &= 1+3 \quad \text{vagy} \quad 2+2, \\ 5 &= 1+4 \quad \text{vagy} \quad 2+3, \\ 6 &= 1+5 \quad \text{vagy} \quad 2+4 \quad \text{vagy} \quad 3+3. \end{aligned}$$

Tehát az egyes dobáscsoportok (a színek figyelmen kívül hagyásával):

- a) 2 1 1,
- b) 3 1 2,
- c) 4 1 3,
- d) 4 2 2,
- e) 5 1 4,
- f) 5 2 3,
- g) 6 1 5,
- h) 6 2 4,
- i) 6 3 3.

A számok színek szerinti eloszlását tekintve véve mindegyik dobásból annyi új dobáscsoport lesz, amennyi a 3 szám permutációinak száma (figyelembe véve, hogy köztük azonosak is vannak). Így az egyes dobáscsoportokból képezett dobások száma rendre

$$n_a = \bar{P}_{3(2, 1)} = \frac{3!}{2! 1!} = 3,$$

$$n_b = P_3 = 3! = 6,$$

$$n_c = P_3 = 3! = 6,$$

$$n_d = \bar{P}_{3(2, 1)} = \frac{3!}{2! 1!} = 3,$$

$$n_e = P_3 = 3! = 6,$$

$$n_f = P_3 = 3! = 6,$$

$$n_g = P_3 = 3! = 6,$$

$$n_h = P_3 = 3! = 6,$$

$$n_i = \bar{P}_{3(2, 1)} = \frac{3!}{2! 1!} = 3.$$

A lehetséges dobáscsoportok száma ezek összege, vagyis:

$$n = 45.$$

13.1.3 Ismétlés nélküli kombináció

Definíció. n különböző elem közül k számú elem kiválasztása, ha a sorrendre nem vagyunk tekintettel, n elem egy k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációja. (Visszatevés nélküli kiválasztás, tehát $k \leq n$.)

A lehetséges kiválasztások számát n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációi számának nevezzük és C_n^k -al jelöljük.

Három különböző elem (például 3 betű) közül két elemet — a sorrend figyelmen kívül hagyásával — háromféleképpen tudunk kiválasztani:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ ab & ac & bc. \end{array}$$

A kiválasztások számát ismétléses permutációk segítségével határozhatjuk meg. Ugyanis a kombinációk és az ismétléses permutációk közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hozhatunk létre azáltal, hogy a kiválasztott elemek helyére 1-et, az elhagyottak helyére pedig 0-t írunk. Vagyis az a, b, c elem minden egyes másodosztályú ismétlés nélküli kombinációjának megfeleltetünk két 1-es és egy 0-s számból képezett egy-egy ismétléses permutációt és megfordítva:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \text{---} & & \\ 1 & 1 & 0 \\ a & c & b \\ \text{---} & & \\ 1 & 0 & 1 \\ b & c & a \\ \text{---} & & \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

A kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés miatt három elem másodosztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma megegyezik három olyan elem ismétléses permutációinak a számával, amelyben két db 1-es és egy db 0 szerepel. Így

$$C_3^2 = \bar{P}_{3(2, 1)} = \frac{3!}{2! 1!} = 3.$$

Mivel

$$\frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \binom{3}{2},$$

ahol $\binom{3}{2}$ az ún. binomiális együttható, tehát

$$C_3^2 = \binom{3}{2}.$$

Az eljárás tetszőleges n és k esetén is követhető.

Tétel. n különböző elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma:

$$C_n^k = \binom{n}{k},$$

ahol

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}.$$

Bizonyítás. Rendezzük el az n elemet valamilyen sorrendben. A k -ad osztályú kombinációknak kölcsönösen egyértelműen ismétléses permutációkat feleltetünk meg azáltal, hogy a kiválasztott elemek helyébe 1-es és a ki nem választottak helyébe 0-t írunk. Így n elemből, sorrendre való tekintet nélkül, k darabot annyiféleképpen tudunk kiválasztani, ahányféleképpen k darab 1-es és $(n-k)$ darab 0 elrendezhető (vagyis amennyi a k db 1-es és $(n-k)$ darab 0-s elem ismétléses permutációinak a száma). Így

$$C_n^k = \bar{P}_{n(k, n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k},$$

amivel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzések. Mivel az ismétléses permutációknak egyértelműen feleltettük meg az ismétlés nélküli kombinációkat, azért

- minden lehetséges k darabos kiválasztás szerepel,
- egyik kiválasztás sem szerepel kétszer.

Példák

1. Egy tanulmányi verseny elődöntőjében 20 diák vesz részt, közülük 6 jut a középdöntőbe. Hányféle csoportosítás lehet a középdöntőben?

Mivel csak az a lényeges, hogy ki kerül be az első 6 közé (lényegtelen, hogy az első 6 közt ki hányadik helyen végez), a lehetséges csoportosítások száma

$$x = C_{20}^6 = \binom{20}{6} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 38\,760.$$

2. Egy termelészövetkezet 500 zsák búzáját 3 malomba szállítja őrlésre. Az egyik malomba 100, a másikba 150, a harmadikba 250 zsák búzát szállít. Ha a zsákok számozottak, hányféleképpen történhet a zsákok 3 részre osztása?

Az első malomba kerülhető csoportosítások száma

$$C_{500}^{100} = \binom{500}{100},$$

a másodikba

$$C_{400}^{150} = \binom{400}{150},$$

a harmadikba

$$C_{250}^{250} = 1.$$

Az összes lehetőségek száma ezek szorzata:

$$x = C_{500}^{100} \cdot C_{400}^{150} \cdot C_{250}^{250} = \binom{500}{100} \cdot \binom{400}{150} \cdot 1.$$

3. 9 tanuló 3 csónakot bérel: egy 2, egy 3 és egy 4 üléses. Hányféleképpen foglalhatnak helyet a csónakokban, ha

- tetszőlegesen helyezkednek el,
 - 2 tanuló feltétlenül egy csónakba akar kerülni?
- a) Ha a csónakokban tetszőlegesen helyezkedhetnek el, akkor pl. először kiválasztjuk a 9 tanuló közül a 2 üléses csónakba kerülőket $C_9^2 = \binom{9}{2}$ -féleképpen; majd a többi 7 közül a 3 üléses csónakba kerülőket $C_7^3 = \binom{7}{3}$ -féleképpen és a maradék 4 tanuló kerül a 4 ülésesbe. Így az összes lehetséges elhelyezkedések száma:

$$x = C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot 1 = 1260.$$

(Ugyanerre az eredményre jutottunk volna akkor is, ha más sorrendben választjuk ki az egyes csónakok számára a tanulókat, pl. először kiválasztjuk a 4 ülésesbe, aztán a 2 ülésesbe kerülőket stb.)
b) Ha 2 tanuló egy csónakba akar kerülni, akkor külön kell összeszámolni azokat a lehetőségeket, amikor ezek a 2-, ill. a 3-, ill. a 4-üléses csónakba kerülnek, és a többi 7 ember a fennmaradó helyeket foglalja el.

Ha a 2 tanuló a 2-ülésesbe ül, akkor a többiek elhelyezkedése annyiféle lehet, ahányféleképpen a 7 közül 3 a 3-ülésesbe és a fennmaradó 4 a 4-ülésesbe kerülhet. Vagyis számuk

$$x_1 = C_7^3 \cdot C_4^4 = \binom{7}{3} \cdot 1 = 35.$$

Ha a 2 tanuló a 3-ülésesbe kerül, akkor az elhelyezkedés annyiféle lehet, ahányféleképpen a 7 ember közül még 1-et a 3-ülésesbe, 4-et a 4-ülésesbe és a fennmaradó 2-t a 2-ülésesbe elhelyezhetünk. Tehát

$$x_2 = C_7^1 \cdot C_6^4 \cdot C_2^2 = \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{4} \cdot 1 = 105.$$

Ha a 2 tanuló a 4-ülésesbe kerül, akkor az elhelyezkedés annyiféle lehet, ahányféleképpen a 7 ember közül még 2-t a 4-ülésesbe, 3-at a 3-ülésesbe és a fennmaradó 2-t a 2-ülésesbe el tudjuk helyezni. Tehát

$$x_3 = C_7^2 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 1 = 210.$$

Az összes helyfoglalási lehetőségek száma ezek összege

$$x = 35 + 105 + 210 = 350.$$

13.1.4 Ismétléses kombináció

Definíció. n különböző elem közül k számú kiválasztása, ha a sorrendre nem vagyunk tekintettel, de egy elemet többször is kiválaszthatunk: n elem egy k -ad osztályú ismétléses kombinációja. (Visszatevéses kiválasztás, tehát $k > n$ is lehet.)

Az ilyen értelemben vett kiválasztások számát n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációi számának nevezzük és $\bar{C}_n^k$ -al jelöljük.

Három különböző elem — pl. a, b, c — másodosztályú ismétléses kombinációi

$aa \ ab \ ac \ bb \ bc \ cc.$

Vagyis

$$\bar{C}_3^2 = 6.$$

Ugyanezen elemek harmadosztályú ismétléses kombinációi:

$aaa \ aab \ aac \ abb \ abc \ acc \ bbb \ bbc \ bcc \ ccc.$

Vagyis

$$\bar{C}_3^3 = 10.$$

Látható — ami a definícióból is következik —, hogy az ismétléses kombinációk száma általában nagyobb, mint az ismétlés nélkülieké:

$$\bar{C}_3^2 = 6, \quad \text{míg} \quad C_3^2 = \binom{3}{2} = 3,$$

$$\bar{C}_3^3 = 10, \quad \text{míg} \quad C_3^3 = \binom{3}{3} = 1.$$

Természetesen 3 elem elsőosztályú ismétléses és ismétlés nélküli kombinációinak száma megegyezik

$$\bar{C}_3^1 = C_3^1 = 3.$$

Az ismétléses kombinációk számát meghatározhatjuk ismétlés nélküli kombinációk segítségével. Például 3 elem harmadosztályú ismétléses kombinációinak száma megegyezik 5 elem harmadosztályú ismétlés nélküli kombinációinak számával. Ennek igazolására jelöljük az elemeket betűk helyett számokkal, és készítsük el az 1, 2, 3 számok harmadosztályú ismétléses kombinációit úgy, hogy a számokat nem csökkenő sorrendben írjuk fel:

1 1 1
1 1 2
1 1 3
1 2 2
1 2 3
1 3 3
2 2 2
2 2 3
2 3 3
3 3 3

Ezeknek az ismétléses kombinációknak megfeleltetjük 5 elem harmadosztályú ismétlés nélküli kombinációit azáltal, hogy az egyes csoportokban szereplő számjegyekhez rendre a 0, 1, 2 értékeket adjuk.

Az így kapott új számcsoportok:

1 2 3
1 2 4
1 2 5
1 3 4
1 3 5
1 4 5
2 3 4
2 3 5
2 4 5
3 4 5.

Belátható:

a) Az átalakított 3-as számcsoportokban az 1, 2, 3, 4, 5 jegyek szerepelnek.

Ugyanis az eredeti csoportokban nem csökkenő sorrendben az 1, 2, 3 jegyek szerepeltek, így rendre a 0, 1, 2 jegyek hozzáadásával a legkisebb jegy 1 és a legnagyobb $3+2=5$ lehet.

b) Minden 3-as számcsoport jegyei különbözők, azaz minden számcsoport egy-egy harmadosztályú ismétlés nélküli kombináció.

Ugyanis az eredeti számcsoportokban a jegyek nem csökkenő sorrendben szerepeltek, az új csoportok pedig úgy jöttek létre, hogy a sorrend növekedésével 1-gyel nagyobb számokat adtunk hozzájuk.

c) Az új számcsoportokban az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből képezett minden harmadosztályú ismétlés nélküli kombináció szerepel és mindegyik csak egyszer.

Ez az ismertetett eljárás megfordításával igazolható. Fölírva az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből képezett összes harmadosztályú ismétlés nélküli kombinációkat (a jegyeket növekvő sorrendben írva), majd az egyes számcsoportokban szereplő jegyekből rendre 0-t, 1-et, 2-t levonva, megkapjuk az 1, 2, 3 számjegyek harmadosztályú ismétléses kombinációit.

Ezzel az eljárással tehát 3 különböző elem harmadosztályú ismétléses kombinációi és $3+2=5$ különböző elem harmadosztályú ismétlés nélküli kombinációi közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hoztunk létre:

$\bar{C}_3^3$		C_{3+2}^3
1 1 1		1 2 3
1 1 2		1 2 4
1 1 3		1 2 5
1 2 2		1 3 4
1 2 3		1 3 5
1 3 3		1 4 5
2 2 2		2 3 4

$$\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}$$

A kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés miatt 3 elem harmadosztályú ismétléses kombinációinak száma megegyezik 5 elem harmadosztályú ismétlés nélküli kombinációinak számával

$$\bar{C}_3^3 = C_{3+2}^3 = C_5^2 = \binom{5}{2} = 10.$$

Az ismertett eljárás általánosan, n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációinak meghatározásánál is követhető.

Tétel. n különböző elem k -ad osztályú ismétléses kombinációinak száma megegyezik $(n+k-1)$ különböző elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak számával. Tehát:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. n különböző elem k -ad osztályú ismétléses kombinációi és $(n+k-1)$ különböző elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációi közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk a következőképpen.

Fölírjuk az 1, 2, 3, ..., n számokból képezett összes k -ad osztályú ismétléses kombinációt. Minden egyes ismétléses kombinációban az elemeket nem csökkenő sorrendbe rendezzük, majd az elemekhez rendre 0-t, 1-et, 2-t, ..., $(k-1)$ -et adunk.

Belátható: a) az átalakított — ugyancsak k elemet tartalmazó — számcsoporthoz az 1, 2, 3, ..., $(n+k-1)$ elemek szerepelnek.

Ugyanis az eredeti ismétléses kombinációkban a legkisebb szám 1, a lehetséges legnagyobb n ; a hozzájuk adott számok közül a legkisebb 0, a legnagyobb $(k-1)$, így az új számcsoporthoz a lehetséges legkisebb szám $1+0=1$, a lehetséges legnagyobb pedig $n+(k-1)=n+k-1$.

b) Az átalakított számcsoporthoz ismétlés nélküli kombinációk.

Ugyanis az új kombinációk egyikében sem lehet két azonos elem, mert egyrészt ha i és j az eredeti ismétléses kombináció két eleme, ahol i előbb áll, mint j , akkor a nagyságrendi elrendezésre vonatkozó megállapodás miatt $i \leq j$. Másrészt miután később álló elemhez többet adunk, azért j -hez többet adunk, mint i -hez, és így még $i = j$ esetén sem lehet belőlük az új elrendezésben két azonos elem.

c) Az átalakított számcsoporthoz az $n+k-1$ különböző elem valamennyi ismétlés nélküli kombinációja szerepel és mindegyik csak egyszer.

Ezt visszafelé való okoskodással láthatjuk be. Fölírjuk az 1, 2, 3, ..., $(n+k-1)$ elem összes ismétlés nélküli k -ad osztályú kombinációját, ahol az elemek növekvő sorrendbe vannak rendezve. Az egyes kombinációkban az elemekből rendre 0-t, 1-et, 2-t, ..., $(k-1)$ -et levonva az előző okoskodás megfordításával belátható, hogy az egyes új számcsoporthoz az 1, 2, 3, ..., n elemek k -ad osztályú ismétléses kombinációi.

Ezzel az eljárással tehát n különböző elem k -ad osztályú ismétléses kombinációinak kölcsönösen egyértelműen megfeleltettük $(n+k-1)$ különböző elem k -ad osztályú ismétlés nélküli

kombinációit, amiből következik, hogy számuk is megegyezik. Vagyis

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k},$$

amivel állításunkat igazoltuk.

Példák

1. Összevonás után hány tagból áll $(a+b+c+d)^5$?

A hatványozás során az egyes tagokban az a, b, c, d betűk olyan csoportjai szerepelnek, amelyekben a hatványkitevők összege 5 (pl.: ab^2cd , vagy ab^2c^2 , vagy a^5 stb.). Tehát az a, b, c, d betűkből vannak olyan 5 elemű csoportok, melyekben egy betű többször, akár 5-ször is szerepelhet, de a sorrend nem számít. Így az 5-ödik hatványra emelésnél a lehetséges összevonásokat elvégezve annyi tag szerepel, amennyi 4 elem 5-öd osztályú ismétléses kombinációinak száma, vagyis:

$$x = \bar{C}_4^5 = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56.$$

2. 3 egyforma kockával dobva hányféle olyan dobáscsoport lehetséges, melyben

- a) pontosan 1 db 6-os van,
- b) legfeljebb 1 db 6-os van,
- c) legalább 1 db 6-os van?

Az elemek száma 6, a kockákon levő 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek. Belőlük kell 3-as csoportokat képezni úgy, hogy egy szám többször is szerepelhet, de a sorrendre nem vagyunk tekintettel. Ezért

a) az olyan dobáscsoportok száma, amelyekben 1 db 6-os van:

$$x = \bar{C}_5^2 = \binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

Ugyanis ha az egyik kockával 6-ot dobunk, a másik kettőn a többi 5 szám valamelyike szerepelhet.

b) Hogy a dobáscsoportokban legfeljebb 1 db 6-os van, az azt jelenti, hogy vagy nincs egy 6-os sem (mind a 3 kockán a többi 5 szám valamelyike szerepel), vagy 1 db 6-os van. Tehát az ilyen dobáscsoportok száma:

$$x = \bar{C}_5^3 + \bar{C}_5^2 = \binom{5+3-1}{3} + \binom{5+2-1}{2} = \binom{7}{3} + \binom{6}{2} = 35 + 15 = 50.$$

c) Az olyan dobáscsoportok száma, amelyekben legalább 1 db 6-os szerepel:

$$x = \bar{C}_5^3 + \bar{C}_5^2 + 1 = \binom{5+3-1}{3} + \binom{5+2-1}{2} + 1 = 35 + 15 + 1 = 51.$$

Ugyanis ha 2 kockán van 6-os, akkor a harmadikon az 5 szám valamelyike lehet; az ilyen csoportok száma tehát 5. Hogy 3 kockával dobunk 6-ot, az pedig csak egyféleképpen lehet.

13.1.5 Ismétlés nélküli variáció

Definíció. n különböző elem közül k számú elem kiválasztása úgy, hogy a kiválasztás sorrendje is számít, de egy elemet csak egyszer választhatunk ki: n elem egy k -ad osztályú ismétlés nélküli variációja. (Sorrendezett, visszatevés nélküli kiválasztás, tehát $k \leq n$.) A lehetséges sorrendezett kiválasztások számát n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli variációi számának nevezzük és V_n^k -nal jelöljük.

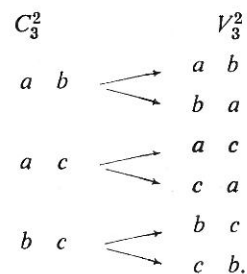
Például 3 különböző elem — a, b, c — másodosztályú ismétlés nélküli variációi:

$$ab \quad ac \quad ba \quad bc \quad ca \quad cb.$$

Vagyis

$$V_3^2 = 6.$$

3 elem másodosztályú variációinak számát úgy is meghatározhatjuk, hogy először sorrendre való tekintet nélkül kiválasztunk 3 elemből 2 elemet az összes lehetséges módon — vagyis vesszük 3 elem másodosztályú ismétlés nélküli kombinációit —, majd a kiválasztott elemeket permutáljuk. Ezzel minden egyes kombináció helyett $P_2 = 2! = 2$ variáció adódik



Tehát

$$V_3^2 = C_3^2 \cdot P_2 = \binom{3}{2} 2! = \frac{3 \cdot 2}{2!} 2! = 6.$$

Tétel. n különböző elem k -ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma megegyezik n különböző elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációi és a kiválasztott elemek permutációi számának szorzatával. Vagyis

$$V_n^k = C_n^k \cdot P_k = \binom{n}{k} k! = n(n-1) \dots (n-k+1).$$

Bizonyítás. n különböző elemből k darabot $C_n^k = \binom{n}{k}$ -féleképpen választhatunk ki, ha a sorrendet nem vesszük figyelembe. Amennyiben a sorrend is számít, minden egyes kiválasztásból — miután a kiválasztott elemek lehetséges elrendezéseinek száma $P_k = k!$ — egy mástól csak sorrendben különböző, $k!$ számú kiválasztás adódik. Tehát a lehetséges sorrendezett kiválasztások száma

$$V_n^k = C_n^k \cdot P_k = \binom{n}{k} k!,$$

amivel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzés. n elem n -ed osztályú ismétlés nélküli variációi nem egyebek, mint az n elem permutációi. Ugyanis n elemből n -et, azaz valamennyit ki kell választani, és ezeknek az elemeknek kell a permutációit venni:

$$V_n^n = C_n^n \cdot P_n = 1 \cdot P_n = P_n.$$

Ezek szerint $k=n$ esetben a variációk permutációkba mennek át, és így a permutációkat mint speciális variációkat tekinthetjük.

Példák

1. 5 különböző színből hány 3 színű zászló készíthető, ha a 2 szélső szín azonos is lehet? Az 5 színből készíthető 3 színű zászlók száma, melyekben minden szín különböző:

$$V_5^3 = \binom{5}{3} \cdot 3!$$

A két szélső helyen azonos színt tartalmazó zászlók száma megegyezik a 2 különböző színt tartalmazó 2 színű zászlók számával (ugyanis a 3. helyre ugyanaz a szín kerül, mint az 1. helyre). Ezek száma:

$$V_5^2 = \binom{5}{2} \cdot 2!$$

Tehát a feltételeknek megfelelő 3 színű zászlók száma:

$$x = V_5^3 + V_5^2 = \binom{5}{3} \cdot 3! + \binom{5}{2} \cdot 2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 80.$$

2. Egy háromülékes padba 6 fiú és bizonyos számú lány közül 3 személy 840-féleképpen ültethető le úgy, hogy 2 fiú vagy 2 lány nem ülhet egymás mellé. Mennyi a lányok száma?

A háromülékes padba — a feltételnek megfelelően — egyszerre csak 2 fiú és 1 lány, vagy 1 fiú és 2 lány ülhet.

Amennyiben n a lányok száma, 2 fiú és 1 lány esetén a lehetséges elhelyezkedések száma:

$$V_6^2 \cdot V_n^1 = \binom{6}{2} \cdot 2! \cdot \binom{n}{1} \cdot 1!,$$

1 fiú és 2 lány esetén pedig:

$$V_6^1 \cdot V_n^2 = \binom{6}{1} \cdot 1! \cdot \binom{n}{2} \cdot 2!.$$

Mivel — a feltételnek megfelelő — ültetési lehetőségek száma 840, azért

$$V_6^2 \cdot V_n^1 + V_6^1 \cdot V_n^2 = 840,$$

vagyis:

$$\binom{6}{2} \cdot 2! \cdot \binom{n}{1} \cdot 1! + \binom{6}{1} \cdot 1! \cdot \binom{n}{2} \cdot 2! = 840,$$

$$6 \cdot 5 \cdot n + 6n(n-1) = 840,$$

$$30n + 6n^2 - 6n = 840,$$

$$6n^2 + 24n - 840 = 0,$$

$$n^2 + 4n - 140 = 0,$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 560}}{2},$$

$$n = \frac{-4 \pm 24}{2} \begin{matrix} \nearrow 10 \\ \searrow -14 \end{matrix}$$

Tehát a lányok száma 10.

13.1.6 Ismétléses variáció

Definíció. n különböző elem közül k számú elem kiválasztása úgy, hogy egy elemet többször (akár k -szor) is kiválaszthatunk és a kiválasztás sorrendje is számít: n elem k -ad osztályú ismétléses variációja. (Sorrendezett, visszatéves kiválasztás, így $k > n$ is lehet.)

E feltételek mellett vett összes lehetséges kiválasztások számát n elem k -ad osztályú ismétléses variációi számának nevezzük és $\bar{V}_n^k$ -nal jelöljük.

Az ismétléses variációk száma általában több, mint az ismétlés nélkülieké. Például 3 elem — a, b, c — másodosztályú ismétléses variációi:

$$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc,$$

tehát:

$$\bar{V}_3^2 = 9 = 3^2,$$

míg:

$$V_3^2 = \binom{3}{2} \cdot 2! = 6.$$

Ugyanígy 4 elem — a, b, c, d — másodosztályú ismétléses variációi:

$$aa \ ab \ ac \ ad \ ba \ bb \ bc \ bd \ ca \ cb \ cc \ cd \ da \ db \ dc \ dd,$$

tehát:

$$\bar{V}_4^2 = 16 = 4^2,$$

míg:

$$V_4^2 = \binom{4}{2} \cdot 2! = 12.$$

Természetesen az első osztályú ismétléses variációk megegyeznek az első osztályú ismétlés nélküli variációkkal, így

$$\bar{V}_n^1 = V_n^1.$$

Példáink szerint:

$$\bar{V}_3^2 = 9 = 3^2,$$

$$\bar{V}_4^2 = 16 = 4^2,$$

$$\bar{V}_n^1 = n = n^1.$$

Ez a szabály általánosan, tetszőleges n és k esetén is fennáll.

Tétel. n különböző elem k -ad osztályú ismétléses variációinak száma:

$$\bar{V}_n^k = n^k.$$

Bizonyítás. A tétel igazolása tetszőleges rögzített n esetén k -ra vonatkozó teljes indukcióval történik.

Az állítás $k=1$ -re igaz:

$$\bar{V}_n^1 = n^1,$$

hiszen n elemből 1-et kiválasztani (és különböző sorrendben elhelyezni) n -féleképpen lehet. Feltételezzük, hogy az állítás $(k-1)$ -re igaz, azaz n elemből $(k-1)$ -et

$$\bar{V}_n^{k-1} = n^{k-1}$$

féleképpen választhatunk ki, és ebből a feltételből következik, hogy

$$\bar{V}_n^k = n^k.$$

Ugyanis n elem egy $(k-1)$ -ed osztályú ismétléses variációjából úgy nyerjük ugyanezen elemek k -ad osztályú ismétléses variációját, hogy k -adiknak odairjuk az n elem közül bármelyiket (hiszen ismétléses variációnál nem kell tekintettel lenni arra, hogy az illető elem szerepelt-e már a $(k-1)$ elemű csoportban). Így minden egyes $(k-1)$ -ed osztályú ismétléses variációból n számú k -ad osztályút nyerünk. Belátható, hogy csupa különböző k -ad osztályú ismétléses variáció adódik, sőt ily módon az összes k -ad osztályú ismétléses variációt megkapjuk (ugyanis, ha megadunk egy k -ad osztályú ismétléses variációt, akkor az utolsó elem elhagyásával megadhatjuk, hogy melyik $(k-1)$ -ed osztályúból keletkezett az előző kiválasztásnál). Ezek szerint a k -ad osztályú ismétléses variációk száma n -szer annyi, mint a $(k-1)$ -ed osztályúaké:

$$\bar{V}_n^k = n \cdot \bar{V}_n^{k-1} = n \cdot n^{k-1} = n^k.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

Példa

Hány olyan hatjegyű telefonszám van, melynek minden jegye páros?
A 0, 2, 4, 6, 8 páros számokból készíthető hatjegyű számok száma

$$\bar{V}_6^6 = 5^6.$$

Miután 0-val kezdődő telefonszám nincs, és a 0-val kezdődő páros számokat tartalmazó hatjegyű számok száma

$$\bar{V}_5^5 = 5^5,$$

azért a kérdéses telefonszámok száma

$$x = \bar{V}_6^6 - \bar{V}_5^5 = 5^6 - 5^5 = 5 \cdot 5^5 - 5^5 = 4 \cdot 5^5 = 12\,500.$$

13.2 ESEMÉNYEK ALGEBRÁJA (BOOLE-ALGEBRA)

13.2.1 Alapfogalmak

Az eseményalgebra mint matematikai elmélet absztrakt elmélet. Ennek megfelelően benne az esemény fogalma is absztrakt fogalom. Az eseményalgebra eseményei egymással bizonyos összefüggésben álló események, egyazon kísérlet különböző kimenetelei. Itt kísérleten nemcsak a természettudományokban megszokott mesterséges jelenséget értjük, hanem bármely természeti vagy társadalmi jelenséget, függetlenül attól, hogy részünk volt-e a jelenség létrejöttében vagy sem. Az ilyen értelemben vett kísérletnek általában többféle kimenetele, eredménye van; ezeket nevezzük eseményeknek.

13.2.1.1 Kísérlet

Bármely természetes vagy mesterséges jelenség, amelynek többféle kimenetele van, kísérlet.

13.2.1.2 Esemény

Egy kísérlet minden egyes kimenetele, lehetséges eredménye esemény.
Az események jelölésére általában a latin nagybetűket használjuk

$$A, B, C, \dots$$

vagy

$$A_1, A_2, A_3, \dots$$

Egy kísérlethez tartozó valamely A esemény be nem következése maga is esemény. Ezt $\bar{A}$ -sal jelöljük, és az A esemény ellentettjének (komplementumának) nevezzük.

13.2.1.3 Ellentett esemény

Valamely esemény be nem következése — mint láttuk — ellentett esemény.
A definícióból következik, hogy

$$\bar{\bar{A}} = A,$$

vagyis az A esemény kétszeres ellentettje maga az A esemény.

13.2.1.4 Lehetetlen esemény

Eseménynek tekintjük a kísérlet folyamán be nem következhető eseményt is. Ezt lehetetlen eseménynek nevezzük és O -val jelöljük.

13.2.1.5 Biztos esemény

Esemény a kísérlet folyamán minden körülmények között bekövetkező esemény is. Ezt biztos eseménynek nevezzük és E -vel jelöljük.

A definíció következménye:

$$\bar{O} = E,$$

$$\bar{E} = O,$$

tehát a lehetetlen esemény ellentéte a biztos esemény és megfordítva.

13.2.1.6 Részesemény

Az A esemény része a B eseménynek, ha az A esemény bekövetkezése maga után vonja B esemény bekövetkezését.

Jelölése:

$$A \subseteq B.$$

Tehát ha $A \subseteq B$, akkor az A esemény bekövetkezése esetén a B esemény is biztosan bekövetkezik.

A részeseményre vonatkozó definíció következményei annak következő tulajdonságai:

1. Reflexív: minden esemény része önmagának:

$$A \subseteq A.$$

2. Transzitiv: ha

$$A \subseteq B,$$

és

$$B \subseteq C,$$

akkor

$$A \subseteq C.$$

3. A lehetetlen esemény része bármely eseménynek:

$$O \subseteq A.$$

4. Bármely esemény része a biztos eseménynek:

$$A \subseteq E.$$

Az eddig ismertett alapfogalmak jól szemléltethetők a következő példán.

Legyen a kísérlet egy kör alakú céltáblára leadott lövés. A céltábla a középponton átmenő függőleges és vízszintes egyenessel négy részre van osztva. Feltesszük, hogy a lövés biztosan eltalálja a céltáblát. Hogy melyik negyedét találja el, az a véletlentől függ.

Események legyenek pl.:

A : a lövés a céltábla jobb felső negyedét találja el,

B : a lövés a céltábla bal felső negyedét találja el,

C : a lövés a céltábla bal alsó negyedét találja el,

D : a lövés a céltábla jobb alsó negyedét találja el.

Biztos esemény:

E : a lövés a céltáblát éri.

Lehetetlen esemény:

O : a lövés a céltáblán kívül esik.

Ellentett esemény:

pl.: $\bar{A}$: a lövés a céltábla jobb felső negyedén kívüli részre esik.

13.2.2 Műveletek és műveleti szabályok

13.2.2.1 Azonosság

Egy kísérlethez tartozó két eseményt azonosnak tekintünk, ha a kísérlet bármely lehetséges eredménye esetén vagy mindkettő bekövetkezik, vagy egyik sem.

Az A és B események azonos voltának jele

$$A = B.$$

Definíció. Az A és B események akkor és csak akkor azonosak, ha az A esemény bekövetkezése maga után vonja B bekövetkezését és megfordítva. Tehát, ha

$$A \subseteq B$$

és

$$B \subseteq A,$$

akkor

$$A = B.$$

Az azonosság tulajdonságai:

1. *Szimmetrikus*, ha az A esemény azonos B -vel, úgy B is azonos A -val.

Vagyis, ha

$$A = B,$$

akkor

$$B = A.$$

2. *Tranzitív*, ha két esemény azonos egy harmadikkal, akkor az eredeti két esemény is azonos egymással.

Vagyis, ha

$$\left. \begin{array}{l} A = C \\ B = C \end{array} \right\} \Rightarrow A = B.$$

3. *Reflexív*: Minden esemény azonos önmagával

$$A = A.$$

13.2.2.2 Szorzás

Ha A és B ugyanannak a kísérletnek két egymást nem kizáró eseménye, akkor vizsgálhatjuk azt az eseményt, amikor mind az A , mind a B bekövetkezik. Ezt az eseményt a két esemény szorzatának nevezzük és $A \cdot B$ -vel jelöljük.

Definíció. Az A és B esemény szorzata az az esemény, amely akkor és csak akkor következik be, ha A is és B is bekövetkezik.

Tehát $A \cdot B$: A és B együttes bekövetkezése.

Az így definiált szorzás több tényezőre is kiterjeszthető, és érvényesek rá a valós számok szorzására vonatkozó műveleti szabályok. Tehát

kommutatív: a szorzásban a tényezők sorrendje felcserélhető:

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

mert a definíció értelmében a szorzás nem függ a tényezők sorrendjétől;

asszociatív: a szorzás tényezői tetszés szerint csoportosíthatók:

$$A(BC) = (AB)C = ABC.$$

Ugyanis, ha A , B és C ugyanannak a kísérletnek az eseményei, akkor $A(BC)$ a definíció szerint azt jelenti, hogy ez az esemény akkor és csak akkor következik be, ha mind az A , mind a (BC) esemény bekövetkezik, vagyis ha az A , B , C események mindegyike bekövetkezik. Ugyanezt jelenti az $(AB)C$ esemény is.

Nyilvánvaló, hogy

$$A \cdot A = A,$$

vagyis a szorzásra nézve minden esemény idempotens.

Míthogy valamely esemény és ellentéte egyszerre nem következhet be, azért együttes bekövetkezésük a lehetetlen esemény, vagyis

$$A \cdot \bar{A} = O.$$

Fennállnak még a következő összefüggések:

$$A \cdot O = O,$$

$$A \cdot E = A.$$

13.2.2.3 Összeadás

Valamely kísérlet két eseményével kapcsolatban vizsgálhatjuk azt is, hogy közülük legalább az egyik bekövetkezett-e. Ezt az eseményt a két esemény összegének nevezzük és $A+B$ -vel jelöljük.

Definíció. Az A és B esemény összege az az esemény, amely akkor következik be, ha az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik.

$$A+B: \begin{cases} \text{vagy csak az } A \text{ esemény következett be,} \\ \text{vagy csak a } B \text{ esemény következett be,} \\ \text{vagy } A \text{ is, } B \text{ is bekövetkezett.} \end{cases}$$

Az így definiált összeadás több tagra is kiterjeszthető, és ugyancsak érvényesek rá a valós számok összeadására vonatkozó műveleti szabályok. Tehát

kommutatív:

$$A+B = B+A;$$

asszociatív:

$$(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C.$$

Mindkét tulajdonság a definícióból közvetlenül belátható. Nyilvánvaló, hogy

$$A+A = A,$$

vagyis minden esemény az összeadásra nézve is idempotens.

Mivel bármely A esemény és ennek ellentéte közül valamelyik biztosan bekövetkezik, azért:

$$A+\bar{A} = E.$$

Fennállnak még a következő összefüggések:

$$A+O = A,$$

$$A+E = E.$$

Megjegyzés. Az események szorzására és összeadására vonatkozó műveleti szabályokat vizsgálva észrevehető, hogy ez a két művelet azonos tulajdonságokkal rendelkezik: kommutatív, asszociatív, minden eleme idempotens. A két műveletre vonatkozó műveleti szabályok

szimmetrikusak: az egyes összefüggések megkaphatók egymásból, ha a szorzás jelét összeadással, a biztos eseményt a lehetetlen eseménnyel helyettesítjük és megfordítva. Az ilyen formulákat egymás *duálisainak* nevezzük.

Például:

$$A \cdot A = A \quad \text{duális} \quad A + A = A,$$

$$A \cdot \bar{A} = O \quad \text{duális} \quad A + \bar{A} = E,$$

$$A \cdot E = A \quad \text{duális} \quad A + O = A,$$

$$A \cdot O = O \quad \text{duális} \quad A + E = E.$$

A dualitás egyik jelentősége, hogy amennyiben bebizonyítjuk az eseményalgebra valamely összefüggését, egyszersmind a duálisa is fennáll.

13.2.2.4 Kivonás

Egy kísérlethez tartozó A és B eseménnyel kapcsolatban vizsgálhatjuk azt az eseményt, hogy az A esemény bekövetkezik, de B nem (ill. a B esemény bekövetkezik, de A nem). Ezt az eseményt az A és B esemény (ill. a B és A esemény) különbségének nevezzük, és $A-B$ -vel (ill. $B-A$ -val) jelöljük.

Definíció. Egy kísérlethez tartozó A és B esemény különbsége az A és $\bar{B}$ események együttes bekövetkezése.

Tehát

$$A-B = A\bar{B}.$$

Az így definiált kivonás több tagra is kiterjeszthető.

A kivonás definíciójából nyilvánvalók a következő összefüggések:

$$1. \quad A-A = O,$$

$$\text{ugyanis: } A-A = A \cdot \bar{A} = O;$$

$$2. \quad A-\bar{A} = A,$$

$$\text{ugyanis: } A-\bar{A} = A \cdot \bar{\bar{A}} = A \cdot A = A;$$

$$3. \quad A-E = O,$$

$$\text{ugyanis: } A-E = A \cdot \bar{E} = A \cdot O = O;$$

$$4. \quad A-O = A,$$

$$\text{ugyanis: } A-O = A \cdot \bar{O} = A \cdot E = A.$$

Megjegyzések. 1. A kivonás segítségével az A esemény ellentéte a következőképpen fejezhető ki:

$$\bar{A} = E-A.$$

$$\text{Ugyanis: } E-A = E \cdot \bar{A} = \bar{A}.$$

2. A kivonásra — a szorzással és összeadással ellentétben — nem érvényes a valós számok körében fennálló minden műveleti szabály.

Így például

$$(A-B)+B \neq A-(B-B).$$

Ugyanis

$$(A-B)+B = A \cdot \bar{B} + B,$$

míg

$$A-(B-B) = A-B\bar{B} = A-O = A \cdot \bar{O} = A \cdot E = A.$$

Hasonlóan

$$A+(B-C) \neq (A+B)-C.$$

Ugyanis

$$A+(B-C) = A+B\bar{C},$$

míg

$$(A+B)-C = (A+B) \cdot \bar{C} = A\bar{C} + B\bar{C}.$$

Azonban

$$A-(B+C) = (A-B)-C.$$

Ugyanis

$$A-(B+C) = A \cdot \overline{(B+C)} = A \cdot (\bar{B} \cdot \bar{C}) = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}.$$

(Később igazoljuk, hogy $\overline{B+C} = \bar{B} \cdot \bar{C}$,

és

$$(A-B)-C = A \cdot \bar{B} - C = (A \cdot \bar{B}) \bar{C} = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}.$$

Ezért valahányszor két esemény különbsége szerepel, azt mindig zárójelbe kell tenni, és a zárójel — általában — nem módosítható a valós számok körében fennálló szabályoknak megfelelően.

13.2.2.5 Szimmetrikus differencia

Valamely kísérlet két eseményével kapcsolatban vizsgálhatjuk azt az eseményt is, hogy a két esemény közül az egyik — és pontosan az egyik — bekövetkezett-e.

A kivonás definíciója értelmében

$$A-B = A\bar{B}$$

és

$$B-A = B\bar{A},$$

így

$$(A-B)+(B-A) = A\bar{B} + B\bar{A}.$$

Az $(A-B)+(B-A)$ esemény tehát nem a O -t jelenti, hanem éppen azt az eseményt, hogy A és B esemény közül pontosan az egyik bekövetkezik. Ezt az eseményt az A és B esemény *szimmetrikus differenciájának* nevezzük és $A \odot B$ -vel jelöljük.

Definíció. Az A és B esemény szimmetrikus differenciája az az esemény, amely akkor következik be, ha az A és B esemény közül az egyik és csak az egyik bekövetkezik.

Vagyis

$$A \circ B = (A - B) + (B - A),$$

illetve

$$A \circ B = A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{A}.$$

A szimmetrikus differenciára a következő műveleti szabályok érvényesek:

kommutatív szabály:

$$A \circ B = B \circ A;$$

asszociatív szabály:

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C.$$

A szimmetrikus differencia definíciójából nyilvánvalók a következő összefüggések:

$$A \circ A = 0$$

$$A \circ \bar{A} = E$$

$$A \circ E = \bar{A}$$

$$A \circ 0 = A.$$

Az ebben a fejezetben ismertetett műveletek — a szorzás, az összeadás, a kivonás és a szimmetrikus differencia — jól szemléltethetők a céltáblás példán. Jelentse most A azt az eseményt, hogy a lövés a céltábla felső felét, B pedig azt, hogy a céltábla jobb felét éri, akkor az egyes műveletek elvégzése által kapott eseményeket a 13.1 ábrák szemléltetik.

13.2.3 Műveletek egymás közti kapcsolata

13.2.3.1 Disztributív szabály (összeadásra és szorzásra)

Az eseményalgebrában is érvényes a szorzás és az összeadás együttes alkalmazására vonatkozó disztributív szabály

$$A(B+C) = AB+AC$$

és ennek duálisa

$$A+BC = (A+B)(A+C).$$

Igazolás (a műveletek értelmezése alapján).

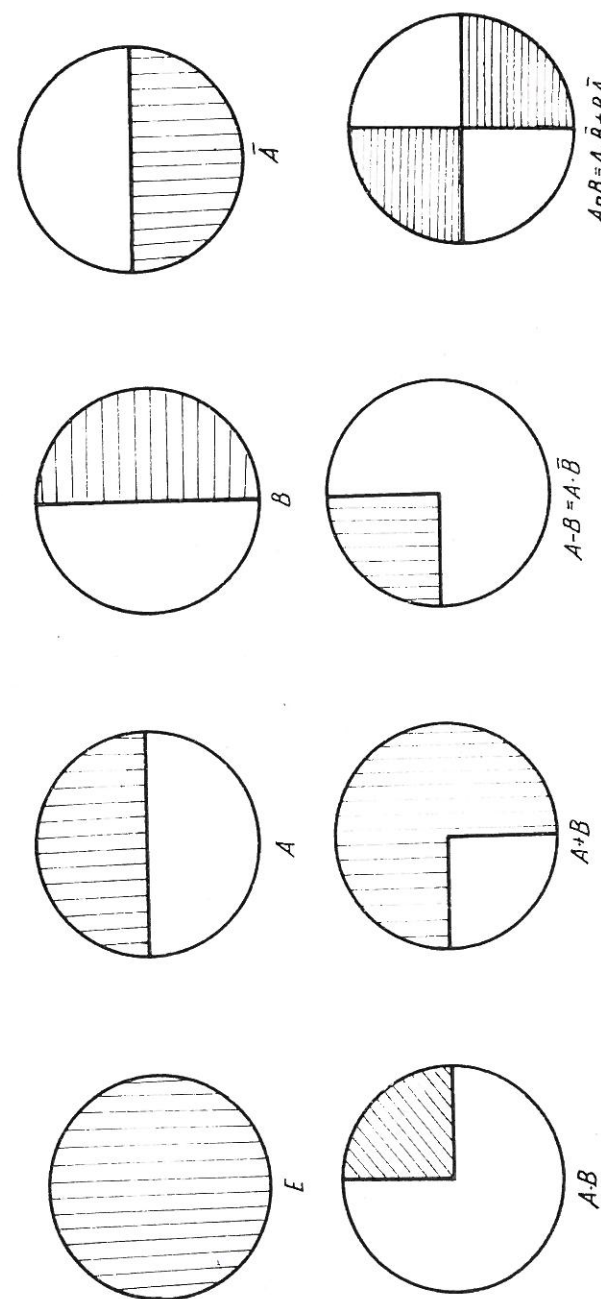
Fennáll az

$$A(B+C) = AB+AC$$

összefüggés, ugyanis az $A(B+C)$ esemény a definíció szerint akkor és csak akkor következik be, ha A -val együtt B és C valamelyike bekövetkezik. Más szóval, ha A és B vagy A és C , ill. $AB+AC$ bekövetkezik.

Az

$$A+BC = (A+B)(A+C)$$



13.1 ábra

összefüggés fennállása is nyilvánvaló. Ugyanis $A+BC$ akkor és csak akkor következik be, ha A bekövetkezik, vagy ha B és C is bekövetkezik. Márpedig az $(A+B)$ és $(A+C)$ tényezők mind az A , mind a B és C események bekövetkezése esetén fennállnak, más esetben azonban nem.

13.2.3.2 Disztributív szabály (kivonásra és szorzásra)

Az eseményalgebrában is érvényes a kivonás és szorzás együttes alkalmazására vonatkozó disztributív szabály:

$$A(B-C) = AB-AC$$

és duálisa

$$AB-C = (A-C)(B-C).$$

Igazolás (a műveletek értelmezése alapján).

Az $A(B-C) = AB-AC$

összefüggés fennáll. Ugyanis az $A(B-C)$ esemény a definíció szerint akkor és csak akkor következik be, ha A -val együtt B is bekövetkezik, de C már nem. Más szóval, ha A és B bekövetkezik, de A és C már nem. Ez pedig éppen az $AB-AC$ esemény bekövetkezését jelenti.

Hasonlóan belátható az

$$AB-C = (A-C)(B-C)$$

összefüggés fennállása is. Az $AB-C$ esemény akkor és csak akkor következik be, ha A és B bekövetkezik, de C már nem. Márpedig az $(A-C)$ és $(B-C)$ tényezők szorzata éppen ezen esemény bekövetkezését jelenti: A bekövetkezik, de C már nem, és ugyanakkor B bekövetkezik, de C már nem.

13.2.3.3 Abszorpció szabály

Egy kísérlethez tartozó tetszőleges A és B eseményre fennáll

$$A+AB = A,$$

ill. duálisa:

$$A(A+B) = A.$$

Bizonyítás. Formálisan a már ismert szabályok felhasználásával igazolható, hogy

$$A+AB = A.$$

Ugyanis:

$$A+AB = AE+AB = A(E+B) = AE = A.$$

A szorzás és összeadás műveleteinek dualitása miatt a második összefüggés is fennáll.

13.2.3.4 Részleges abszorpció szabály

Valamely kísérlet tetszőleges A és B eseményére fennáll, hogy

$$A+\bar{A}B = A+B,$$

és duálisa

$$A(\bar{A}+B) = AB.$$

Bizonyítás. Az előző relációkból formálisan igazolható, hogy fennáll az

$$A+\bar{A}B = A+B$$

összefüggés, ugyanis

$$\begin{aligned} A+\bar{A}B &= (A+AB)+\bar{A}B = A+AB+\bar{A}B = A+B(A+\bar{A}) = \\ &= A+BE = A+B. \end{aligned}$$

Ezzel — a dualitás miatt — egyben a második összefüggés fennállását is igazoltuk.

13.2.3.5 De Morgan-összefüggések

Egy kísérlet tetszőleges A és B eseményére fennáll az ellentett-képzésre vonatkozó

$$\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B},$$

és duálisa az

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

összefüggés.

Bizonyítás. Összeg ellentéte megegyezik tagjai ellentétének szorzatával:

$$\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Ugyanis tetszőleges A eseményre:

$$A \cdot \bar{A} = O$$

és

$$A+\bar{A} = E,$$

így az $A+B$ eseménynek — az ellentett esemény egyértelműsége miatt — akkor ellentéte az $\bar{A} \cdot \bar{B}$, ha szorzatuk O és összegük E , vagyis ha

$$(A+B) \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} = O$$

és

$$(A+B)+\bar{A} \cdot \bar{B} = E.$$

Márpedig valóban

$$\begin{aligned} (A+B) \cdot \bar{A} \bar{B} &= \underbrace{A\bar{A}\bar{B}}_{=O} + \underbrace{B\bar{A}\bar{B}}_{=O} = O \\ &= O = O \end{aligned}$$

és

$$(A+B)+\bar{A}\bar{B} = (A+\bar{A}B)+\bar{A}\bar{B} = A+\bar{A}B+\bar{A}\bar{B} = A+\bar{A}(B+\bar{B}) = A+\bar{A}E = \\ = A+\bar{A} = E,$$

amivel állításunkat és vele együtt a duális összefüggést is igazoltuk.

A De Morgan-összefüggések több tag, illetve tényező esetén is érvényesek.

13.2.4 Az eseményalgebra axiomatikus felépítése

13.2.4.1 Boole-algebra

Az előző fejezetben eseményekre értelmeztünk bizonyos műveleteket, és megállapítottuk az ezekre vonatkozó műveleti szabályokat. Hasonló műveleti szabályokkal más algebraik — halmazalgebra, logikai algebra, jelfogó berendezések algebraja stb. — is rendelkeznek, így célszerű azt absztrakt algebrai struktúrával, axiomatikus felépítésben ismertetni. Ez az absztrakt algebra az ún. Boole-algebra, amelynek axiomatikus értelmezését a következőkben ismertetjük.

Tetszőleges $A, B, C, \dots$ elemek H halmaza Boole-algebrát alkot, ha érvényesek rá a következő axiómák:

I. *axióma.* A H halmaznak van legalább két, egymástól különböző eleme, melyre igaz, hogy

$$A \neq B.$$

II. *axióma.* A H halmaz bármely két A és B eleméhez hozzárendelhető az összeadás és szorzás műveletével nyert

$$A+B$$

és

$$A \cdot B$$

elem, amelyek ugyancsak a H halmazhoz tartoznak.

III. *axióma.* Az összeadásra és szorzásra minden elem idempotens

$$A+A = A,$$

$$A \cdot A = A.$$

IV. *axióma.* Az összeadás és szorzás kommutatív

$$A+B = B+A,$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

és asszociatív:

$$A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C,$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = ABC.$$

V. *axióma.* Az összeadás és szorzás együttes műveletére érvényes a disztributív szabály

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

ill.

$$A+B \cdot C = (A+B) \cdot (A+C).$$

VI. *axióma.* Az algebraban van két — egyértelműen definiált — kitüntetett eleme,

E : egységelem,

O : zéruselem,

és a H halmaz bármely A elemére

$$A+O = A$$

és

$$A \cdot E = A.$$

VII. *axióma.* Az algebra minden A eleméhez egyértelműen hozzárendelhető az $\bar{A}$, ún. ellentett elem, amely ugyancsak eleme H -nak és amelyre

$$A+\bar{A} = E$$

és

$$A \cdot \bar{A} = O.$$

Megjegyzések. I. Az axiómák nem mind függetlenek egymástól, egyesek a többiekből levezethetők.

2. A felsorolt axiómákat vizsgálva is észrevehető, hogy az értelmezett műveletek és a kitüntetett elemek közt duális kapcsolat áll fenn. Ugyanis az axiómákban a „+” és „·” jelet, valamint az E és O elemet felcserélve az algebra másik — duálisan megfelelő — axiómáját kapjuk.

13.2.4.2 A Boole-algebra néhány speciális esete

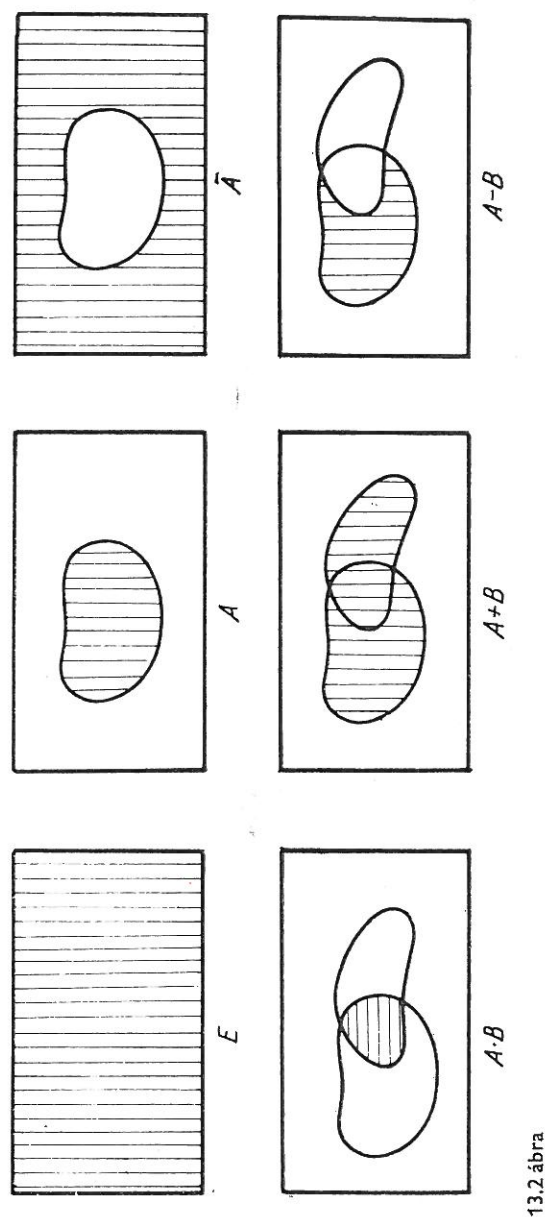
Az előző fejezetben ismertetett Boole-algebra axiómáit különböző objektumok rendszere teljesíti; ezekről a rendszerekről azt mondjuk, hogy Boole-algebrát alkotnak. Közülük néhányat itt ismertetünk röviden.

13.2.4.2.1 Eseményalgebra

A következőképpen látható be, hogy a 13.2 fejezetben ismertetett eseményalgebra Boole-algebra. Egy kísérlet lehetséges eredményeit képező események teljesítik a Boole-algebra axiómáit, ha O -n a lehetetlen eseményt, E -n a biztos eseményt, $\bar{A}$ -on az A esemény ellentettét, az A és B események $A+B$ összegén a kettő közül legalább az egyiknek a bekövetkezését, $A \cdot B$ szorzatán a két esemény egyidejű bekövetkezését értjük.

Az összeadás, szorzás és kivonás műveletei a szóban forgó eseményalgebrán belül korlátlanul elvégezhetők.

Megfordítva: egy kísérlet összes lehetséges eredményeit alkotó események halmazának minden olyan részhalmaza Boole-algebra, amely tartalmazza a O és az E eseményt, és amelyen belül az összeadás, szorzás és kivonás műveletei korlátlanul elvégezhetők.



13.2 ábra

13.2.4.2.2 Halmazalgebra

Egy tetszőleges H halmaz részhalmazainak összege Boole-algebrát alkot, ha O jelenti az üres halmazt (olyan halmazt, melynek nincsenek pontjai), E jelenti a teljes H halmazt, $\bar{A}$ jelenti az A részhalmaz H -ra vonatkozó komplementumát (azaz H halmaz azon pontjainak összességét, melyek nem tartoznak A -hoz), A és B részhalmazok $A+B$ összege jelenti az egyesített halmazt (halmazalgebrai összeadás), $A \cdot B$ szorzata a két részhalmaz közös részét (halmazalgebrai szorzás), $A-B$ jelenti az A részhalmaz azon pontjainak összességét, melyek nem tartoznak B -hez (halmazalgebrai kivonás) (l. a 13.2 ábrákat).

Általánosabban: egy H halmaz minden olyan részhalmazainak T összessége Boole-algebrát alkot, amelyben a részhalmazok összeadása, szorzása, kivonása nem vezet ki T -ből és maga a H halmaz is hozzátartozik T -hez.

Tehát Boole-algebrát alkot egy H halmaz részhalmazainak T összessége, ha

1. $A \subset T$ és $B \subset T$ esetén $A+B \subset T$
2. $A \subset T$ és $B \subset T$ esetén $A \cdot B \subset T$
3. $A \subset T$ és $B \subset T$ esetén $A-B \subset T$,

ahol $A \subset T$ -vel azt jelöljük, hogy az A részhalmaz a T összességhez tartozik.

Mivel maga a H halmaz is hozzátartozik T -hez, a 3. feltétel helyettesíthető a következővel:

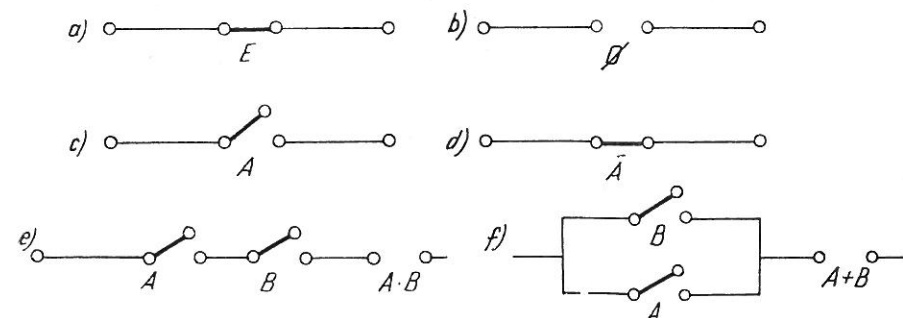
- 3.* ha $A \subset T$, akkor $\bar{A} \subset T$.

13.2.4.2.3 Logikai algebra

A logikai algebra is Boole-algebra. Ugyanis egy problémához tartozó lehetséges logikai ítéletek teljesítik a Boole-algebra axiómáit, ha O a hamis ítéletet, E az igaz ítéletet, $\bar{A}$ az A ítélet tagadását, $A \cdot B$ az A és B ítélet együttes érvényét, $A+B$ pedig a két ítélet közül legalább az egyiknek a bekövetkezését jelenti.

13.2.4.2.4 Jelfogó berendezések algebrája

Elektromos jelfogók vagy jelfogók hálózatai is Boole-algebrát alkotnak, ha O olyan hálózat, amelyben sohasem folyik áram (stabil szakadás: l. 13.3/b ábra); E olyan hálózat, amelyben mindig folyik áram (stabil kapcsolás: l. 13.3/a ábrát); $\bar{A}$ olyan hálózat, amely akkor van



13.3 ábra

kikapcsolva, ha A be van kapcsolva és megfordítva (l. a 13.3/c ábrát); $A+B$ azt jelenti, hogy a két hálózat párhuzamosan van kapcsolva (l. a 13.3/d ábrát), és $A \cdot B$ azt jelenti, hogy a két hálózat sorba van kapcsolva (l. a 13.3/e ábrát).

Hogy a fentebb ismertetett rendszerek valóban Boole-algebrát alkotnak, az az egyes rendszerekre vonatkozóan a Boole-algebra axiómáinak direkt verifikálásával igazolható.

13.2.5 Véges eseményalgebra néhány definíciója és tétele

A következőkben ismertetünk véges eseményalgebrákban (véges számú eseményből álló eseményalgebrákban) érvényes néhány fontos definíciót és tételt.

13.2.5.1 Egymást kizáró események

Definíció. „ A ” és „ B ” egymást kizáró események, ha egyszerre nem következhetnek be, vagyis ha együttes bekövetkezésük a lehetetlen esemény:

$$A \cdot B = O.$$

13.2.5.2 Elemi (egyszerű) esemény

Definíció. „ A ” elemi esemény, ha csak triviális módon bontható fel két összeadandóra, vagyis ha csak az

$$A = A + A,$$

$$\text{illetve } A = A + O$$

felbontás lehetséges.

Ezzel a definícióval ekvivalens definíció:

az $A \neq O$ esemény akkor és csak akkor elemi esemény, ha nincs olyan A -tól különböző $B \neq O$ esemény, amelyre $B \subset A$.

(Mivel minden A eseményre fennáll, hogy $A \subseteq A$, ezért megkülönböztetésül, ha B olyan eseményt jelent, amelyre $B \subseteq A$, de $B \neq A$, azt így jelöljük: $B \subset A$.)

Az elemi esemény értelmezéséből következnek az alábbi tételek.

1. Tétel. Ha $A \neq O$ elemi esemény, akkor minden B eseményre $A \cdot B = O$, vagy $A \cdot B = A$.

Éspedig
$$A \cdot B = \begin{cases} A, & \text{ha } A \subseteq B, \text{ vagyis ha } A \text{ és } B \text{ nem egymást kizáró események,} \\ O, & \text{ha } A \not\subseteq B, \text{ vagyis ha } A \text{ és } B \text{ egymást kizáró események.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Tetszőleges, egymást nem kizáró A és B eseményekre:

$$AB \subseteq A.$$

Figyelembe véve, hogy A elemi esemény, vagy az

$$AB = A$$

eset áll fenn, és akkor $B \supseteq A$, vagy pedig

$$AB = O,$$

és akkor A és B kizárja egymást. Ezzel állításunkat igazoltuk.

2. Tétel. Két különböző elemi esemény szorzata O :

$$A \cdot B = O.$$

Tehát két elemi esemény mindig egymást kizáró esemény.

Bizonyítás. Ha figyelembe vesszük, hogy A elemi esemény és $A \neq O$, akkor az 1. tétel értelmében:

$$A \cdot B = \begin{cases} A \\ O \end{cases}.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy B elemi esemény és $B \neq O$, akkor

$$A \cdot B = \begin{cases} B \\ O \end{cases}.$$

$$\text{De } AB = A = B$$

lehetetlen, mert feltételeztük, hogy $A \neq B$. Így a szorzat valóban csak O lehet.

13.2.5.3 Összetett esemény

Definíció. „ A ” összetett esemény, ha A -tól két különböző esemény összegeként állítható elő. Vagyis

$$A = B + C,$$

ahol

$$B \neq A$$

és

$$C \neq A.$$

Ezzel ekvivalens definíció: „ A ” összetett esemény, ha van olyan $B \neq O$ esemény, amelyre $B \subset A$.

Megjegyzés. Egy kísérlethez tartozó elemi események csak egyféleképpen szerepelhetnek, összetett események azonban különbözőképpen.

Ugyanis, ha A összetett esemény és

$$A = B + C,$$

ahol

$$B \neq A$$

és

$$C \neq A,$$

akkor A bekövetkezhet úgy, hogy B bekövetkezik, de úgy is, hogy C következik be. Ennek illusztrálására tekintsük a két kockával való dobás példáját.

1. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 12.

Ez az esemény elemi esemény, mert 12 csak egyféleképpen jöhet létre, ha mindkét kockával 6-ot dobunk, vagyis csak a

$$12 = 6 + 6$$

felbontás lehetséges.

2. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 8.

Ez az esemény összetett esemény, mert a 8-as dobás többféleképpen jöhet létre:

$$8 = 4 + 4$$

$$8 = 5 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$8 = 6 + 2$$

$$8 = 2 + 6.$$

3. Tétel. Véges eseményszerkezetben minden B összetett eseményhez található olyan A elemi esemény, amely része a B eseménynek.

Bizonyítás. Mivel B összetett esemény, van olyan $A_1 \neq O$, amelyre

$$A_1 \subset B.$$

Ha A_1 elemi esemény, akkor állításunk igaz; ha A_1 nem elemi esemény, akkor van olyan $A_2 \neq O$, amelyre

$$A_2 \subset A_1.$$

Ha A_2 elemi esemény, akkor megtaláltuk azt az elemi eseményt, amely része a B -nek. Ha A_2 nem elemi esemény, akkor található olyan $A_3 \neq O$, amelyre

$$A_3 \subset A_2,$$

és így tovább. Az események számának végeessége miatt az eljárás csak véges számú n lépésig folytatható, és ezen n -hez tartozó A_n szükségképpen elemi esemény.

4. Tétel. Véges számú eseményből álló eseményszerkezetben minden összetett esemény — az összeadandók sorrendjétől eltekintve — egyértelműen bontható fel elemi események összegére.

Bizonyítás. a) Bármely B összetett esemény felbontható elemi események összegére.

Ugyanis a 3. tétel értelmében van olyan A_1 elemi esemény, hogy $A_1 \subset B$, és így

$$B = A_1 + B_1,$$

ahol $A_1 B_1 = O$. Ha B_1 elemi esemény, akkor B -t sikerült elemi eseményekre bontani, ha B_1 összetett esemény, akkor a felbontás folytatható:

$$B = A_1 + A_2 + B_2,$$

ahol $A_2 \subset B_1$ és $A_2 B_2 = O$. Ha B_2 összetett esemény, akkor a felbontás folytatható. Mivel az elemi események száma véges, azért véges számú lépésben olyan felbontáshoz kell jutnunk, amelyben csak elemi események vannak, tehát:

$$B = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i,$$

ahol $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ elemi esemény és $A_i \cdot A_j = O$, ha $i \neq j$.

b) Az elemi események összegére való bontás — a sorrendtől eltekintve — egyértelmű. Ezt indirekt módon bizonyítjuk. Tételezzük fel, hogy az előállítás nem egyértelmű, vagyis B -nek van két különböző elemi események összegére történő felbontása:

$$B = A_1 + A_2 + \dots + A_n,$$

és ugyanakkor

$$B = A_1^* + A_2^* + \dots + A_m^*,$$

ahol $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ és $A_i^* (i = 1, 2, \dots, m)$ elemi események. Ha ez a két felbontás különböző, akkor köztük legalább egy olyan elemi eseménynek kell lennie, amely nincs benne mind a két felbontásban. Legyen pl. $A_k \neq O$ ilyen tulajdonságú. Ekkor egyrészt:

$$A_k \cdot B = A_k,$$

mert A_k olyan elemi esemény, amely része B -nek, hiszen A_k tagja az első felbontásnak; másrészt:

$$A_k \cdot B = O,$$

mert A_k olyan elemi esemény, amely nem része B -nek, hiszen A_k nem eleme a második felbontásnak. Így ellentmondásra jutottunk. Ha tehát valamely elemi esemény nem szerepel az egyik felbontásban, akkor nem szerepelhet a másikban sem, vagyis a felbontás egyértelmű. Az összetett esemény elemi események összegeként történő előállítását *kanonikus előállítás*-nak nevezzük.

5. Tétel. Véges számú eseményből álló eseményszerkezetben minden összetett esemény az algebra egységelemét, a biztos eseményt adja. Vagyis:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = E.$$

A tétel jelentése: az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események közül egy, de csakis egy mindig bekövetkezik.

Bizonyítás. Mivel feltételeztük, hogy az eseményszerkezet véges sok elemi eseményt tartalmaz, a 4. tétel értelmében E mint összetett esemény egyértelműen bontható fel elemi események összegére. Csak azt kell még belátni, hogy a felbontásban az összes elemi esemény szerepel. Az igazolást indirekt módon végezzük. Feltételezzük, hogy a felbontásban valamelyik elemi esemény, például $A_j \neq O$ nem szerepel. Ekkor:

$$E = A_1 + A_2 + \dots + A_i + A_k + \dots + A_n.$$

így egyrészt:

$$A_j \cdot E = O,$$

mert A_j nem szerepel a felbontásban, másrészt:

$$A_j \cdot E = A_j,$$

mert A_j eleme az eseményalgebrának. Ez ellentmondás, tehát állításunkat igazoltuk.

6. Tétel. n elemi eseményt tartalmazó véges eseményalgebrában az összes különböző esemény száma 2^n .

Bizonyítás. Az n elemű véges eseményalgebra minden eseménye előállítható valamely k számú elemi esemény összegeként. A lehetetlen eseményt is figyelembe véve ez a k szám lehet: $0, 1, 2, \dots, n$. Rögzített k esetén a k különböző elemi esemény összegeként előállítható események száma annyi, ahányféleképpen az $A_1, A_2, \dots, A_n$ elemi eseményekből k számú kiválasztható, tehát $\binom{n}{k}$. Így az n elemű véges eseményalgebra összes eseményeinek száma:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{i} + \dots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

Itt

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ a lehetetlen esemény,}$$

$$\binom{n}{1} = n \text{ az elemi események száma,}$$

$$\binom{n}{2} = \text{a 2 elemi eseményből összetett események száma,}$$

$$\binom{n}{3} = \text{a 3 elemi eseményből összetett események száma,}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{n} = 1 \text{ a biztos esemény.}$$

Példák

1. Elemi eseményeknek a dobott számokat tekintve, határozzuk meg egy kockával való dobáshoz tartozó lehetséges eseményeket.

Mivel a feladatnak megfelelő véges eseményalgebrában az elemi események száma 6, így — a 6. tétel értelmében — ebben az eseményalgebrában szereplő összes események száma:

$$2^6 = 64.$$

Ugyanis van:

- 1 db lehetetlen esemény
- 1 db biztos esemény
- 6 db elemi esemény

$\binom{6}{2}$ 2 elemi eseményből összetett esemény (2 elemi esemény közül legalább az egyik bekövetkezése),

$\binom{6}{3}$ 3 elemi eseményből összetett esemény (3 elemi esemény közül legalább az egyik a bekövetkezése),

$\binom{6}{4}$ 4 elemi eseményből összetett esemény (4 elemi esemény közül legalább az egyik a bekövetkezése),

$\binom{6}{5}$ 5 elemi eseményből összetett esemény (5 elemi esemény közül legalább az egyik a bekövetkezése).

Tehát az események száma:

$$1 + 1 + 6 + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} = 1 + 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 = 64 = 2^6.$$

2. Dobjunk fel kétszer egymás után egy pénzdarabot. Elemi eseményeknek a fej és írás lehetséges csoportjait tekintve, határozzuk meg az összes lehetséges események számát. E feladatnak megfelelő véges eseményalgebra lehetséges elemi eseményei a következők:

1. először fej és másodszor is fej (jele: A_{ff})
2. először fej és másodszor írás (jele: A_{fi})
3. először írás és másodszor fej (jele: A_{if})
4. először írás és másodszor is írás (jele: A_{ii})

Az elemi események száma 4, és így az összes lehetséges események száma:

$$2^4 = 16.$$

Ugyanis van:

1 db lehetetlen esemény: O

1 db biztos esemény: E

4 db elemi esemény: $A_{ff}, A_{fi}, A_{if}, A_{ii}$.

$\binom{4}{2}$ 2 elemi eseményből összetett esemény:

$$A_{ff} + A_{fi}; A_{ff} + A_{if}; A_{ff} + A_{ii}; A_{fi} + A_{if}; A_{fi} + A_{ii}; A_{if} + A_{ii}.$$

$\binom{4}{3}$ 3 elemi eseményből összetett esemény, vagyis az elemi események ellentettje: $A_{ff}; A_{fi}; A_{if}; A_{ii}$.

Tehát az összes események száma:

$$1 + 1 + 4 + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 1 + 1 + 4 + 6 + 4 = 16 = 2^4.$$

13.2.5.4 Teljes eseményrendszer

Definíció. Egy véges eseményalgebra $A_1, A_2, \dots, A_n$ eseményei teljes eseményrendszert alkotnak, ha egymást páronként kizárják (kettő egyszerre nem következhet be), és összegük a biztos esemény (valamelyik közülük biztosan bekövetkezik). Vagyis

$$A_i A_j = O, \quad \text{ha} \quad i \neq j,$$

és

$$\sum_{i=1}^n A_i = E.$$

Megjegyzések. 1. Teljes eseményrendszert alkotnak az egy kísérlethez tartozó elemi események, ugyanis kimutattuk, hogy az elemi események

a) egymást páronként kizárják (2. tétel),

b) összegük E -vel egyenlő (5. tétel),

ez pedig éppen a teljes eseményrendszer kritériuma.

2. Teljes eseményrendszert alkot minden esemény az ellentett eseményével együtt. Ugyanis:

$$A \cdot \bar{A} = O,$$

$$\text{és} \quad A + \bar{A} = E.$$

3. Egyazon kísérlethez többféle teljes eseményrendszer tartozhat aszerint, hogy mit tekintünk eseménynek.

Például kockadobásnál mint kísérletnél teljes eseményrendszert alkotnak az $A_1, A_2, \dots, A_6$ események, ha

A_1 : az 1-es dobás,

A_2 : a 2-es dobás,

A_3 : a 3-as dobás,

A_4 : a 4-es dobás,

A_5 : az 5-ös dobás,

A_6 : a 6-os dobás.

Ez valóban teljes eseményrendszer, ugyanis közülük két esemény egyszerre nem következhet be (a dobott szám nem lehet egyszerre pl. 2-es is meg 5-ös is), tehát:

$$A_i \cdot A_j = O, \quad \text{ha} \quad i \neq j,$$

de valamelyik esemény feltétlenül bekövetkezik (a kocka valamelyik számra esik), vagyis:

$$\sum_{k=1}^6 A_k = E.$$

Ugyanehhez a kísérlethez teljes eseményrendszert alkotnak a B_1, B_2 események is, ahol

B_1 : a páros dobás,

B_2 : a páratlan dobás.

Ugyanis a két esemény egyszerre nem következhet be (egy dobott szám nem lehet egyszerre páros is meg páratlan is), tehát

$$B_1 \cdot B_2 = O,$$

de valamelyik esemény feltétlenül bekövetkezik (a dobott szám vagy páros, vagy páratlan), így:

$$B_1 + B_2 = E.$$

13.2.6 Eseményalgebra kiterjesztése megszámlálhatóan végtelen sok eseményre

13.2.6.1 Borel-féle eseményalgebra

A valószínűségszámítás nemcsak olyan problémákkal foglalkozik, amelyeknél véges sok eseményt kell figyelembe venni, hanem olyanokkal is, amelyeknél végtelen sok a lehetséges események száma. Éppen ezért szükséges az eseményalgebra végtelen sok eseményre való kiterjesztésének, az ún. Borel-féle eseményalgebrának az ismertetése.

13.2.6.1.1 Borel-féle végtelen eseményalgebra

Definíció. Egy kísérlet bizonyos lehetséges eredményeit jellemző események Borel-féle eseményalgebrát alkotnak, ha eleget tesznek az alábbi követelményeknek:

a) teljesítik a véges eseményalgebra feltételeit (az algebrához tartozik a biztos esemény, az algebra bármely eseményével együtt annak ellentettje, és az algebra bármely két eseményével együtt azok összege, szorzata és különbsége);

b) amennyiben az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ megszámlálhatóan végtelen sok esemény hozzátartozik az algebrához, úgy összegük is hozzátartozik.

A megszámlálhatóan végtelen sok eseményre vonatkozó eseményalgebra ismerete lehetővé teszi a véges eseményalgebra definícióinak és tételeinek megszámlálhatóan végtelen sok eseményre való kiterjesztését.

Közülük a valószínűségszámítás szempontjából legfontosabb a teljes eseményrendszer definíciójának kiterjesztése.

13.2.6.1.2 Teljes eseményrendszer

Definíció. A megszámlálhatóan végtelen sok $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha egymást páronként kizárják:

$$A_i A_j = O, \quad i \neq j,$$

és valamelyik közülük „biztosan” bekövetkezik: azaz összegük, a biztos esemény:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = E.$$

Ugyancsak nagy a jelentősége a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle elméletének alapját képező következő tételnek, mely a véges eseményalgebra 4. tételének végtelen eseményalgebrára való kiterjesztése.

Tétel. Végtelen eseményalgebra minden összetett eseménye felbontható elemi események összegére.

A tételt itt nem bizonyítjuk.

13.2.7 Eseményalgebra előállítás halmazalgebrával

13.2.7.1 Kolmogorov-elmélet

Az események algebrája és egy halmaz részhalmazainak Boole-algebrája között bizonyos esetekben szoros kapcsolat áll fenn. Ezt a kapcsolatot támasztja alá — az előzőekben már ismertetett — azon tétel, amelynek értelmében akár véges, akár végtelen eseményalgebra bármely összetett eseménye előállítható elemi események összegeként. Így minden összetett esemény jellemezhető az őt alkotó elemi események halmazával, vagyis minden eseményhez hozzárendelhető az őt alkotó elemi események halmaza.

Könnyen belátható, hogy ha az A eseményt alkotó elemi események halmazát H_A -val, a B eseményt alkotókat H_B -vel jelöljük, akkor az $A \cdot B$ eseményt alkotó elemi események halmaza a H_A és H_B halmazok közös része, az $A+B$ eseményt alkotóké pedig a H_A és H_B halmazok egyesítése.

Ilyen módon minden A összetett eseményhez egy H_A halmaz, minden elemi eseményhez egy egyelemű halmaz (mely kizárólag magából az illető elemi eseményből áll), a O lehetetlen eseményhez az üres halmaz, az E biztos eseményhez a szóban forgó kísérletre vonatkozó összes lehetséges elemi események H halmaza, az $\bar{A}$ eseményhez H_A -nak H -ra vonatkozó komplementerhalmaza, $H_{\bar{A}}$ van hozzárendelve (mely a kísérlethez tartozó azon elemi eseményekből áll, melyeket az A esemény nem tartalmaz).

Bebizonyítható — a bizonyítást itt nem közöljük —, hogy bármely eseményalgebrához található egy halmazalgebra oly módon, hogy minden eseménynek megfelel egy részhalmaz. Ennél a hozzárendelésnél két esemény összegéhez, ill. szorzatához rendelt halmaz megegyezik a két eseményhez rendelt halmazok halmazelméleti összegével, ill. szorzatával, az ellentétes eseményhez rendelt halmaz pedig a kiegészítő halmaz.

Tétel. Minden eseményalgebrához hozzárendelhető egy — a fenti értelemben — vele egyenértékű halmazalgebra.

Ez a hozzárendelés véges eseményalgebrák esetén kölcsönösen egyértelmű. Minden eseményhez az eseménytér egy részhalmaza van hozzárendelve és megfordítva; az eseménytér összes részhalmazából álló teljes halmaz minden részhalmazához hozzá van rendelve az eseményalgebra egy-egy eseménye.

Az eseményalgebra és a halmazalgebra e kapcsolata képezi a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle elméletének alapját.

13.2.7.1.1 A Kolmogorov-féle elmélet feltevései

1. A vizsgálat tárgyát képező eseményalgebra minden eseménye felbontható elemi események összegére, és ennek alapján hozzárendelhető egy vele egyenértékű halmazalgebra.

2. A vizsgálat tárgyát képező eseményalgebra Borel-féle algebra, vagyis nemcsak két vagy véges sok esemény összegét, hanem az algebrához tartozó megszámlálhatóan végtelen sok esemény összegét is tartalmazza.

13.2.7.2 A halmazalgebra Kolmogorov-féle axiómái

I. *axióma.* Adva van egy kísérlet összes lehetséges kimenetelének — a kísérletre vonatkozó elemi események — H halmaza, melyet *eseménytérnek* nevezünk.

II. *axióma.* Ha a H eseménytér részhalmazainak egy T összessége, amelyeknek $A_1, A_2, A_3, \dots$ elemei a kísérletre vonatkozó eseményeknek felelnek meg, és az A_i és A_j a T -hez tartozó részhalmazok, akkor az A_i és az A_j halmazok halmazelméleti szorzata, összege és különbsége is T -hez tartozik.

III. *axióma.* H maga is T -hez tartozik.

IV. *axióma.* Az összes egyelemű részhalmazok, vagyis H elemei mint egyelemű halmazok, mind T -hez tartoznak.

V. *axióma.* A T halmazalgebra Borel-féle algebra, vagyis ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ T -hez tartozó részhalmazok, úgy T tartalmazza ezeknek a halmazoknak az egyesített halmazát, melyet $\sum A_n$ -val jelölünk.

13.2.7.3 A halmazalgebra Kolmogorov-féle axiómáinak néhány következménye

1. Ha az A halmaz T -hez tartozik, akkor az A halmaznak H -ra vonatkozó kiegészítő halmaza, $\bar{A}$ is T -hez tartozik.

Ez a II. és III. axióma következménye. Ugyanis a III. axióma szerint T tartalmazza magát a H halmazt (a teljes eseményteret) és $\bar{A}$ nem más, mint a H és A halmazok különbsége: $H - A$, márpedig a II. axióma értelmében a T tartalmazza H -val és A -val együtt azok különbségét is.

2. T tartalmazza a O , üres halmazt.

Ugyanis O nem más, mint $\bar{H}$, és az 1. következmény értelmében ez H -val együtt eleme T -nek.

3. T tartalmaz minden véges sok elemből álló halmazt.

Ez a II. és IV. axióma következménye.

4. T tartalmaz minden olyan halmazt is, amely megszámlálhatóan végtelen sok elemből áll. Ez a IV. és V. axióma következménye.

5. Ha az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ halmazok T -hez tartoznak, akkor az A_n megszámlálhatóan végtelen halmazsorozat közös elemeinek halmaza a

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n$$

szorzat is T -hez tartozik.

Ugyanis

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \prod_{n=1}^{\infty} \bar{\bar{A}_n}.$$

Ennek a relációnak az érvényessége véges sok halmazra nyilvánvaló, de végtelen sok halmazra is fennáll. Hiszen $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ azon elemek összességét jelenti, amelyek mindegyike A_n -

hez tartozik, $\prod_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$ pedig azon elemek összességét, melyek nem tartoznak egyetlen A_n halmaz kiegészítő halmazához sem. E két értelmezés jelentése megegyező.

Mindezek alapján belátható, hogy a T halmazalgebra elemeire a halmazalgebra összeadás, szorzás és kivonás műveleteit véges sokszor vagy megszámlálhatóan végtelen sokszor tetszőleges sorrendben egymás után alkalmazva újra a T halmazalgebra egy halmazához jutunk.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

A valószínűségszámítás a matematikának az a fejezete, amely „véletlen tömegjelenségek” törvényszerűségeinek meghatározásával foglalkozik.

A véletlen itt nem azt jelenti, hogy a történetesen bekövetkező esemény okozatilag nem meghatározott, hiszen minden eseménynek megvannak az indítókai. Csak általában nem ismerjük az összes indítókat, vagy ha ismerjük is, olyan bonyolultak, hogy nem tudjuk mind figyelembe venni. Valahányszor egy jelenség vizsgálatánál az okok egy olyan komplexumából indulunk ki, amely a jelenség lefolyására vonatkozó okoknak csak egy részét tartalmazza, véletlen jelenséggel állunk szemben.

A véletlen és a törvényszerű nem egymást kizáró fogalmak. Például ha egy kockát feldobunk, az a nehézségi erő hatására a földre esik; ez törvényszerű. Ellenben, hogy a kocka melyik lapjára esik, az már véletlen. A véletlen jelenségek törvényei nem kauzális, hanem ún. statisztikus törvények, melyek csak akkor érvényesek, ha a szóban forgó jelenség gyakran ismétlődik meg, tömegesen fordul elő. (Ez a tény is alátámasztja, hogy a „véletlen” logikai ellentéte nem az okozatilag meghatározott, hanem a „szükségszerű”.) Például semmiféle törvényszerűséget nem ismerünk arra nézve, hogy a feldobott kocka melyik számlapjára esik, arra nézve azonban már igen, hogy nagyon sokszor dobva ugyanazzal a kockával, az egyes dobások milyen gyakran fordulnak elő. Vagy például azt sem tudjuk előre megmondani, hogy egy családban fiú vagy lány születik, de hozzávetőlegesen meg tudjuk adni egy városban – vagy még inkább egy országban születő gyermekek nemek szerinti eloszlásának arányát. Tehát a véletlen jelenségek egyedi vizsgálatánál semmiféle törvényszerűséget nem tapasztalunk, de már sorozatos, tömeges vizsgálatuknál igen. Ily módon válik szükségessé a „véletlen tömegjelenség” fogalmának bevezetése.

Definíció. *Véletlen tömegjelenség* minden olyan természetes vagy mesterséges jelenség, amely akárhányszor bekövetkezhet, ill. nagyjából azonos körülmények között akárhányszor megismételhető, és többféle kimenetele lehetséges; továbbá a figyelembe vett körülmények a kísérlet eredményét nem határozzák meg egyértelműen.

A valószínűségszámítás módszereit gyakran olyan jelenségek vizsgálatára is alkalmazzuk, mikor a jelenséget létrehozó összes okot ismerjük ugyan, de azokat valamilyen gyakorlati szempont miatt nem vesszük mind figyelembe (pl. azért, mert a számítást túl bonyolulttá tenné, és feladatunkhoz közelítő eredmény is elégséges). Ilyen esetekben, mikor önkényesen

hagyunk figyelmen kívül bizonyos okokat, vigyáznunk kell arra, hogy azok egyenként aránylag kis hatásúak legyenek, mert különben a valószínűségszámítás módszerei nem vezetnek helyes eredményre.

14.1 A VALÓSZÍNŰSÉG

14.1.1 A valószínűség statisztikus értelmezése

14.1.1.1. Relatív gyakoriság

Tekintsünk egy véletlen tömegjelenséget. Legyenek a kísérlet lehetséges eredményei az $A_1, A_2, \dots, A_k$ események. Hajtsuk végre a kísérletet többször — nagyjából azonos körülmények között. Ha n kísérlet közül az

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$$

események

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_k \text{ -szor}$$

következnek be ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), akkor az

$$\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_3}{n}, \dots, \frac{n_k}{n}$$

hányadosokat az $A_1, A_2, \dots, A_k$ események — e kísérletsorozathoz tartozó — *relatív gyakoriságainak* nevezzük és

$$r(A_1), r(A_2), \dots, r(A_k)$$

val jelöljük.

Egyazon kísérlet különböző kísérletsorozatait tekintve ugyanannak az A_i eseménynek a relatív gyakorisága általában más és más. Vannak azonban olyan kísérletek — ilyenek a véletlen tömegjelenségek is —, amelyekhez tartozó események relatív gyakoriságai bizonyos stabilitást mutatnak.

Példaképpen tekintsük a kockadobást mint véletlen tömegjelenséget, amelyhez tartozó események legyenek az egyes dobott számok. Míg egy dobássorozaton belül az egyes dobások 1, 2, ..., 6 számok közti eloszlásában semmiféle szabályosság nem észlelhető, addig különböző dobássorozatokban egy kiszemelt dobás — pl. a 6-os dobás — relatív gyakoriságát vizsgálva, már tapasztalható valami törvényszerűség. Ennek illusztrálására foglaljuk táblázatba egy szabályos homogén tömegeloszlású kocka 6-os dobásainak relatív gyakoriságát különböző 100-as dobáscsoportokban:

Kísérlet-sorozat	A dobások száma	A 6-os számlap-ra esések száma	Relatív gyakoriság
I.	100	18	0,18
II.	100	15	0,15
III.	100	16	0,16
IV.	100	14	0,14
V.	100	17	0,17
VI.	100	16	0,16

Az adatokból kitűnik, hogy a 6-os dobás relatív gyakorisága közel esik az $\frac{1}{6}$ számértékhez. Ez az érték még jobban kidomborodna, ha nagyobb számú dobásból állnának a dobássorozatok.

Hasonló tapasztalatra teszünk szert, ha egy pénzdarab többszöri feldobásakor az írásos oldalra való esés relatív gyakoriságát vizsgáljuk. Nagyszámú dobássorozatokot végezve egyre inkább kitűnik, hogy a relatív gyakoriság a 0,5 számérték körül ingadozik, és ez az ingadozás annál kisebb, minél több dobásból áll a dobássorozat.

A relatív gyakoriság egy szám körüli ingadozását tapasztalhatjuk számos fizikai, természeti, gazdasági és társadalmi jelenséggel kapcsolatos statisztikai vizsgálat során is. Azt a számértéket, amely körül a relatív gyakoriságok ingadoznak, a kérdéses A esemény *valószínűségének* nevezzük, és a továbbiakban $P(A)$ -val jelöljük.

A valószínűség ezen értelmezését a következő — később igazolásra kerülő — tény indokolja. Egy esemény elég hosszú kísérletsorozat segítségével meghatározott relatív gyakorisága majdnem biztosan annál közelebb van a valószínűséghez, minél több egyedi kísérletből áll a kísérletsorozat. (Nagy számok törvénye.)

A valószínűség értelmezése a relatív gyakorisággal lehetővé teszi a valószínűségszámítás statisztikus megalapozását, melyhez szükséges a valószínűség néhány tulajdonságának megismerése.

a) Bármely esemény bekövetkezésének valószínűsége (ill. röviden bármely esemény valószínűsége) egy $[0; 1]$ intervallumbeli számérték.

Ugyanis az n kísérletből álló kísérletsorozat folyamán egy A_i esemény bekövetkezéseinek száma

$$0 \leq n_i \leq n,$$

így relatív gyakorisága

$$0 \leq r(A_i) = \frac{n_i}{n} \leq 1.$$

Ebből, és a valószínűség statisztikus értelmezéséből pedig már következik, hogy

$$0 \leq P(A_i) \leq 1.$$

b) A biztos esemény valószínűsége 1.

Ugyanis a biztos esemény relatív gyakorisága:

$$r(E) = \frac{n}{n} = 1,$$

így a valószínűség statisztikus értelmezése következtében

$$P(E) = 1.$$

c) A lehetetlen esemény valószínűsége 0.

Ugyanis a lehetetlen esemény előfordulásainak száma 0, így relatív gyakorisága

$$r(O) = 0,$$

tehát a valószínűség statisztikus értelmezése következtében

$$P(O) = 0.$$

d) Két, egymást kizáró esemény vagylagos bekövetkezésének valószínűsége megegyezik a két esemény valószínűségének összegével.

Ugyanis, ha A és B egy kísérlet egymást kizáró eseményei ($A \cdot B = O$), és az n -szer végrehajtott kísérlet folyamán A bekövetkezik n_A -szor és B bekövetkezik n_B -szer, akkor vagylagos bekövetkezésük száma

$$n_{A+B} = n_A + n_B.$$

A vagylagos bekövetkezés relatív gyakorisága

$$r(A+B) = \frac{n_{A+B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = r(A) + r(B).$$

Ennek megfelelően — a valószínűség statisztikus értelmezése alapján —, ha $A \cdot B = O$, akkor

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

A valószínűség relatív gyakorisággal történő értelmezése alapján igazolt tulajdonságai olyan tapasztalati tények, amelyek elvezetnek a valószínűség matematikai fogalmához, az axiomaticus definícióhoz.

Példa

Szemléltessük a valószínűség tulajdonságait egy szabályos, homogén sűrűségű kocka dobásával, amikor az egyes eseményeknek a dobott számokat tekintjük, és rendre $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ -tal jelöljük.

a) Bármelyik dobás valószínűsége

$$P(A_i) = \frac{1}{6},$$

ahol $i = 1, 2, \dots, 6$.

b) Biztos esemény, hogy a kockával egy dobást végezve az 1, 2, ..., 6 számok valamelyike látható a számlapon. Vagyis

$$E = A_1 + A_2 + \dots + A_6.$$

Ennek az eseménynek a valószínűsége:

$$P(E) = 1.$$

c) Lehetetlen esemény, hogy a kockával egy dobást végezve legalább 7-es dobásunk legyen. Ennek az eseménynek a valószínűsége:

$$P(O) = 0.$$

d) $A_1 + A_2$ jelentse azt az eseményt, hogy a kockával egyszer dobva legfőbb 2-es dobásunk van. Mivel A_1 és A_2 egymást kizáró események (1-es és 2-es dobás egyszerre nem lehet), azért valószínűségeik összegeződnek:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2),$$

és minthogy $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{6}$,

$$P(A_1 + A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

14.1.2 A valószínűség axiomaticus definíciója

A köznapi nyelvhasználatban a valószínűség kifejezésnek nincs szabatosan meghatározott jelentése. Például azt szokták mondani, hogy valamilyen esemény 50%-os valószínűséggel következik be. Ámde az ilyen számszerűségeket többnyire csak „érzés szerint”, szubjektív módon szokták megadni. Minthogy a valószínűségszámítás — mint központi fogalommal — éppen a valószínűség fogalmával dolgozik, a valószínűséget mint valamely esemény bekövetkezésének számszerű mértékét az eddigieknél pontosabban kell meghatározni. A véletlen események lehetőségeire vonatkozó szubjektív megítélések helyett objektív valószínűségekre van szükség. Ezeket az objektív valószínűségeket éppen úgy lehet „mérni”, mint a fizikai mennyiségeket. „Mérésükhöz” a valószínűségszámításnak, illetve a matematikai statisztikának saját módszerei vannak. Ezek többnyire indirekt módszerek, és végső soron mindig a relatív gyakoriságok megfigyelésén alapulnak. A valószínűséget azonban fogalmilag élesen meg kell különböztetni a relatív gyakoriságtól; a valószínűség rögzített szám, míg a relatív gyakoriság a véletlentől függ.

A valószínűség objektív meghatározásához — a modern valószínűségszámítás kifejlődését lehetővé tevő — Kolmogorov-elméletet vesszük alapul. Ez az elmélet abból a feltevésből indul ki, hogy egy kísérlet összes lehetséges (vagy legalábbis minden figyelembe vett) eredményéhez (más szóval egy eseményalgebra minden eleméhez) egy számérték van hozzárendelve: a szóban forgó esemény valószínűsége, mely a következő három axiómában megfogalmazott tulajdonságokkal rendelkezik.

I. axióma. Egy $\mathcal{A}$ eseményalgebra minden A eleméhez hozzá van rendelve egy $P(A)$ nemnegatív szám:

$$P(A) \geq 0,$$

az A esemény valószínűsége.

II. axióma. Az E biztos esemény valószínűsége 1, azaz

$$P(E) = 1.$$

III. axióma. Az egymást páronként kizáró események összegének valószínűsége megegyezik az események valószínűségeinek összegével, vagyis

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k),$$

amennyiben az események száma véges, illetve

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

amennyiben az események száma megszámlálhatóan végtelen.

Az olyan $\mathcal{A}$ eseményalgebrát, amelynek minden A eleméhez hozzá van rendelve egy $P(A)$ szám, mely eleget tesz az I., II., III. axiómáknak, valószínűségalkibrának nevezzük.

A valószínűség fogalmának ezen axiomaticus definíciójában fellépő tulajdonságaival már az előző fejezetben is megismerkedtünk, minden további tulajdonsága pedig ebből a három axiómából levezethető. Ezek az axiómák tehát magukban foglalják azokat a minimális követelményeket, amelyeket a valószínűséggel szemben támaszthatunk.

A következőkben az axiómákból levezetünk néhány tételt a valószínűségre vonatkozóan.

1. Tétel. Egy A esemény komplementerének, ellentettjének valószínűsége

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Bizonyítás. Bármely A eseményre

$$A + \bar{A} = E.$$

Így a II. axióma értelmében

$$P(E) = P(A + \bar{A}) = 1,$$

továbbá mivel A és $\bar{A}$ egymást kizáró események, a III. axióma figyelembevételével

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

amiből már következik a tétel állítása

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

2. Tétel. A lehetetlen esemény valószínűsége 0.

Bizonyítás. E és O ellentett események, így az 1. tételt alkalmazva az $A = E$ és $\bar{A} = O$ eseményre

$$P(O) = 1 - P(E).$$

A II. axióma értelmében $P(E) = 1$, tehát valóban

$$P(O) = 0.$$

3. Tétel. Tetszőleges A eseményre

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Bizonyítás. Az I. axióma értelmében $P(A) \geq 0$, így csak azt kell igazolni, hogy $P(A) \leq 1$. Az 1. tétel értelmében

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

és miután

$$P(\bar{A}) \geq 0,$$

tehát szükségképpen:

$$P(A) \leq 1.$$

4. Tétel. Ha az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 1.$$

Bizonyítás. A teljes eseményrendszer definíciója értelmében

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = E,$$

így

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(E).$$

Ezen egyenlőség bal oldalára — az A_i események páronként kizáró volta miatt — alkalmazva a III. axiómát, jobb oldalára pedig a II. axiómát, a

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 1$$

bizonyítandó összefüggésre jutunk.

5. Tétel. Ha a B esemény részeseménye A -nak, akkor

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

Bizonyítás. Felhasználjuk azt az egyszerűen belátható tényt, hogy $B \subset A$ esetén

$$A = (A - B) + B,$$

ahol $A - B = A\bar{B}$ és B egymást kizáró események, így a III. axióma értelmében

$$P(A) = P[(A - B) + B] = P(A - B) + P(B),$$

ahonnan

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

6. Tétel. Ha A és B két tetszőleges esemény, akkor

$$P(A - B) = P(A) - P(AB).$$

Bizonyítás. Felhasználjuk a következő összefüggést

$$A = (A - B) + AB.$$

Itt $A - B = A\bar{B}$ és AB egymást kizáró események, tehát a III. axióma értelmében

$$P(A) = P[(A - B) + AB] = P(A - B) + P(AB),$$

ahonnan

$$P(A - B) = P(A) - P(AB).$$

7. Tétel. Ha A és B két tetszőleges esemény, akkor

$$P(A \circ B) = P(A) + P(B) - 2P(AB).$$

Bizonyítás. Mivel

$$A \circ B = (A - B) + (B - A)$$

ahol $(A - B)$ és $(B - A)$ események egymást kizáró események,

ezért $P(A \circ B) = P(A - B) + P(B - A).$

Felhasználva a 6. tételt

$$P(A \cup B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB).$$

Tehát valóban

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 2P(AB).$$

8. Tétel. Bármely két A és B eseményre nézve fennáll a

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

összefüggés.

Bizonyítás. Bármely A és B eseményre

$$A+B = A+\bar{A}B,$$

ahol A és $\bar{A}B$ egymást kizáró események, és így a III. axióma értelmében

$$P(A+B) = P(A+\bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B).$$

Továbbá bármely B eseményre

$$B = AB + \bar{A}B,$$

amelyek ugyancsak egymást kizáró események, és így

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B),$$

amiből

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB).$$

Tehát

$$P(A+B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

amivel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzések. 1. A III. axióma a 8. tétel speciális esete. Ugyanis ha A és B egymást kizáró események, akkor $P(AB) = 0$, és így

$$P(A+B) = P(A) + P(B),$$

ami éppen a III. axióma.

2. A 8. tétel következményeképpen a két esemény együttes bekövetkezésének a valószínűségére a következő korlátok adódnak:

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(AB) \leq P(A).$$

(A jobb oldalon $P(A)$ helyett $P(B)$ is állhat.)

Ugyanis bármely esemény valószínűsége egy $[0; 1]$ intervallumbeli számérték, és így

$$0 \leq P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1,$$

amiből egyszerű átrendezéssel:

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(AB) \leq P(A).$$

A 8. tétel kiterjeszthető tetszőleges számú esemény összegére. Speciálisan három esemény esetén:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

Általánosan a 9. tételben foglaltható össze.

9. Tétel. (Poincaré-tétel.) Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ egy valószínűség algebra tetszőleges eseményei, akkor

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{n-1} S_n,$$

illetve röviden

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k,$$

ahol

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}).$$

Itt $i_1, i_2, \dots, i_k$ az $1, 2, \dots, n$ elemek egy-egy k -ad osztályú, ismétlés nélküli kombinációja, az összegezés pedig úgy értendő, hogy az összes lehetséges k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációkat kell venni.

A tétel bizonyítása — melyet itt nem részletezünk — a 8. tétel felhasználásával, teljes indukcióval történhet.

A Poincaré-tétel — a szorzatesemények valószínűségével kifejezve — megadja annak a valószínűségét, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események közül legalább az egyik bekövetkezik. Ezt a tételt Jordan általánosította. Megadta annak a valószínűségét, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események közül pontosan k következik be ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

A 9. tétel tehát speciális esete $k = 0$ -ra a következő általánosabb tételnek.

10. Tétel. (Jordan-tétel.) Jelölje P_k annak a valószínűségét, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események közül pontosan k következik be, akkor

$$P_k = S_k - \binom{k+1}{k} S_{k+1} + \binom{k+2}{k} S_{k+2} - \dots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} S_n,$$

ill. röviden

$$P_k = \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \binom{k+r}{k} S_{k+r} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

ahol $S_0 = 1$ és $S_k, S_{k+1}, \dots, S_n$ az előbbi tételben használt jelölések.

A tétel bizonyítását itt nem közöljük.

Megjegyzés. Fennáll a következő egyszerű összefüggés:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P_0.$$

Ugyanis annak az eseménynek az ellentéte, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események közül legalább az egyik bekövetkezik, az, hogy egyik esemény sem következik be.

14.1.3 Klasszikus valószínűség

Egy esemény valószínűsége igen egyszerűen határozható meg akkor, ha a kísérlethez tartozó lehetséges elemi események száma véges, és minden egyes elemi esemény bekövetkezése azonos valószínűségű. Minthogy a klasszikus valószínűségszámítás kizárólag ilyen valószínűségekkel foglalkozott, ezt a speciális körülmények esetén értelmezett valószínűséget klasszikus valószínűségnek, és minden véges eseményalgebrát, melynek elemi eseményei egyenlő valószínűségűek, „klasszikus valószínűségalkébrát”-nak nevezünk.

A valószínűségszámítás fejlődésének kezdetén minden probléma megoldását erre az esetre akarták visszavezetni. Sok feladatnál azonban ez lehetetlen vagy feleslegesen bonyolult. Minthogy a szerencsajátékoknál (pénzfeladobás, kockadobás, kártyajáték, rulett stb.) a valószínűségek tényleg így határozhatók meg, és minthogy sok természettudományi és technikai probléma megoldása is visszavezethető a klasszikus valószínűségalkébrák vizsgálatára, érdemes ezt az esetet külön tárgyalni.

A klasszikus valószínűség alkébrában bármely elemi esemény valószínűsége

$$P(A_i) = \frac{1}{n}$$

($i = 1, 2, \dots, n$), és bármely k számú elemi eseményt tartalmazó — összetett esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

$$(A = A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_k}).$$

Ugyanis ha az elemi események $A_1, A_2, \dots, A_n$, és ha

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p,$$

akkor

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = np.$$

Mivel a bal oldal egy teljes eseményrendszer elemi eseményei valószínűségeinek összege, így a 4. tétel értelmében

$$np = 1,$$

amiből

$$p = \frac{1}{n}.$$

Eni ek felhasználásával pedig, ha az A összetett esemény k különböző elemi esemény összege, vagyis

$$A = A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_k},$$

akkor

$$P(A) = P(A_{i_1}) + P(A_{i_2}) + \dots + P(A_{i_k}) = kp = \frac{k}{n}.$$

Definíció. Véges sok egyforma valószínűségű elemi eseményt tartalmazó eseményalkébra valamely A összetett eseményének valószínűsége megegyezik az A eseményben foglalt elemi események számának (k) és a teljes eseményalkébra elemi eseményei számának (n) hányadosával. Vagyis

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Ha az A -ban foglalt elemi eseményeket az A esemény számára kedvező elemi eseményeknek nevezzük, a definíció a következőképpen is megfogalmazható.

Klasszikus valószínűségalkébra esetén bármely A esemény valószínűsége megegyezik a kedvező elemi események számának (k) és az összes elemi események számának (n) hányadosával.

Valahányszor feladatok megoldásakor a klasszikus módszert akarjuk alkalmazni, meg kell állapítanunk, hogy jogosult-e ennek alkalmazása; az elemi események száma véges-e, és egyenlően valószínűek-e. Ennek eldöntése után a valószínűség meghatározása tulajdonképpen az „összes lehetőségek” és a „kedvező lehetőségek” számának meghatározására redukálódik, ami általában a kombinatorika eszközeivel oldható meg.

Példák

1. Két szabályos, homogén kocka egyidejű feldobása esetén mi a valószínűsége annak, hogy a felülre kerülő számok összege 8?

Elemi esemény a két kocka egyidejű feldobása. Minden elemi esemény két számmal jelölhető, amelyek közül az első az egyik kockán, a második a másik kockán felülre került számot jelenti. Mivel mind az első, mind a második szám az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok bármelyike lehet, az összes elemi események száma tehát 6 elem másodosztályú ismétléses variációinak a száma, vagyis:

$$n = V_6^2 = 6^2 = 36.$$

A kedvező elemi eseményeket jelentő dobások:

2, 6
3, 5
4, 4
5, 3
6, 2

Tehát a kedvező elemi események száma:

$$k = 5.$$

Így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{k}{n} = \frac{5}{36}.$$

2. Egy kongresszus 100 részvevője közül:

- a) 30-an csak oroszul és franciául,
- b) 20-an csak oroszul és németül,
- c) 50-en csak németül és angolul

beszélnek. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ha két részvevő találkozik, azok tolmács nélkül tudnak egymással beszélni?

Elemi esemény bármelyik két részvevő találkozása. Így az összes elemi események száma annyi, ahányféleképpen a 100 részvevő közül 2-t ki tudunk választani (a kiválasztás sorrendjére való tekintet nélkül). Tehát a lehetséges elemi események száma:

$$n = C_{100}^2 = \binom{100}{2} = 4950.$$

Kedvező esetek:

1. ha két *a*) csoportbeli találkozik;
2. ha két *b*) csoportbeli találkozik;
3. ha két *c*) csoportbeli találkozik;
4. ha egy *a*) és egy *b*) csoportbeli találkozik;
5. ha egy *b*) és egy *c*) csoportbeli találkozik.

Ezek száma rendre:

$$k_1 = C_{30}^2 = \binom{30}{2} = 435,$$

$$k_2 = C_{20}^2 = \binom{20}{2} = 190,$$

$$k_3 = C_{50}^2 = \binom{50}{2} = 1225,$$

$$k_4 = C_{30}^1 C_{20}^1 = \binom{30}{1} \binom{20}{1} = 600,$$

$$k_5 = C_{20}^1 C_{50}^1 = \binom{20}{1} \binom{50}{1} = 1000.$$

Így a kedvező esetek száma:

$$k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 435 + 190 + 1225 + 600 + 1000 = 3450.$$

Tehát a keresett valószínűség:

$$P = \frac{k}{n} = \frac{3450}{4950} = \frac{23}{33} = 0,697.$$

14.1.4 A valószínűség számítás néhány fogalma és tétele

Az eddigiekben megismertük a valószínűség statisztikus értelmezését, axiomatikus definícióját és annak speciális esetét, a klasszikus definíciót. Közülük matematikai szempontból az axiomatikus definíció a legértékesebb, ugyanis ez az alapja a modern valószínűség számításnak. Hátránya azonban, hogy nem teszi lehetővé az egyes események valószínűségének közvetlen meghatározását. Azokat csak közvetve, a már ismert valószínűségek segítségével lehet meghatározni az axiómákból adódó — és részben már bebizonyított — tételek alapján. Ezzel szemben a statisztikus értelmezés — a relatív gyakoriságok révén — lehetővé teszi az egyes események valószínűségének közvetlen meghatározását. Ennek viszont az a hátránya, hogy csak nagyon durva közelítést ad a keresett valószínűségekre, melynek pontossága a „szűrőpróba-elmélet” alapján ellenőrizhető. A kívánt feltételek mellett numerikus szempontból legegyszerűbben a klasszikus definíció alapján számított valószínűségek adódnak. Itt a valószínűség meghatározásához szükséges „kedvező” és „lehetséges” események számának meghatározása kombinatorikus módszerekkel történik. Minthogy azonban a klasszikus módszer érvényességi területe — az események számának véges volta és az elemi

eseményeknek tulajdonított azonos valószínűségek miatt — korlátozott, gyakrabban használatos a valószínűség statisztikus értelmezése. Ezt használjuk fel a továbbiakban is a valószínűség számítás még néhány új fogalmának bevezetésénél és tételének igazolásánál.

14.1.4.1 Feltételes valószínűség

A valószínűséget a relatív gyakorisággal értelmeztük, ennek megfelelően a feltételes valószínűséget is a feltételes relatív gyakorisággal értelmezzük.

Ismételjük meg *n*-szer azt a kísérletet, amelynek *A* is, *B* is lehetséges kimenetelei. Ha az *n* kísérlet közül a *B* esemény *n_B*-szer következett be (*n_B* a *B* esemény gyakorisága), és közülük *B*-vel együtt az *A* esemény is *n_{AB}*-szer következett be (*n_{AB}* az *AB* esemény gyakorisága), akkor az

$$\frac{n_{AB}}{n_B}$$

hányadost az *A* esemény *B* feltétel melletti *feltételes relatív gyakoriságának* nevezzük és *r(A|B)*-vel jelöljük.

Ez a relatív gyakoriság — mint látható — nem más, mint az *A* eseménynek a szóban forgó kísérletsorozat egy részsorozatában való közönséges relatív gyakorisága. Jelöljük *r(B)*-vel a *B* esemény egész kísérletsorozatbeli relatív gyakoriságát, az $\frac{n_B}{n}$ -et, és *r(AB)*-vel az $\frac{n_{AB}}{n}$ -et, vagyis annak az eseménynek a kísérletsorozatbeli relatív gyakoriságát, amikor *B*-vel együtt *A* is bekövetkezett. Akkor az *A* esemény *B* feltétel melletti relatív gyakorisága:

$$r(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{r(AB)}{r(B)}.$$

Mivel az *r(AB)* relatív gyakoriság a *P(AB)* valószínűség és *r(B)* a *P(B)* valószínűség körül ingadozik, ezért az *r(A|B)* feltételes relatív gyakoriság a $\frac{P(AB)}{P(B)}$ körül ingadozik feltéve, hogy *P(B) ≠ 0*. Ezt a számot nevezzük az *A* esemény *B* feltétel melletti feltételes valószínűségének és *P(A|B)*-vel jelöljük.

Definíció. Az *A* eseménynek egy *B* eseményre, mint feltételre vonatkozó feltételes valószínűsége: a két esemény együttes bekövetkezése valószínűségének és a feltétel valószínűségének hányadosa. Vagyis

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

feltéve, hogy *P(B) > 0*.

Matematikai szempontból a *P(A|B)* feltételes valószínűség új valószínűségmértéknek fogható fel, ugyanis belátható, hogy eleget tesz a valószínűség számítás axiómáinak. Éspedig az I. axióma követelményének teljesülése:

ha a *B* az *A₁, A₂, ..., A_n, ...* események *H* halmazának *P(B) > 0* valószínűségű eseménye, akkor

$$P(A|B) \geq 0,$$

ugyanis

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0.$$

A II. axióma követelményének teljesülése:
ha E a $\{H\}$ halmaz teljes eseményrendszere,

akkor $P(E|B) = 1,$

ugyanis

$$P(E|B) = \frac{P(EB)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

A III. axióma követelményének teljesülése:

ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ páronként egymást kizáró események, akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B).$$

Ugyanis az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ események páronként kizáró volta miatt

$$\begin{aligned} P(A_1|B + A_2|B + \dots) &= \frac{P[B(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots)]}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A_1B + A_2B + \dots + A_nB + \dots)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A_1B) + P(A_2B) + \dots + P(A_nB) + \dots}{P(B)} = \\ &= P(A_1|B) + P(A_2|B) + \dots \end{aligned}$$

Tehát valóban:

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B).$$

Ezek alapján a $P(A|B)$ feltételes valószínűség valóban új valószínűségi mérték. Így mindazok a tételek, amelyeket közönséges valószínűségekre bebizonyítottunk, érvényesek maradnak, ha bennük minden esemény valószínűségét ugyanannak az eseménynek valamely rögzített (pozitív valószínűségű) B eseményre vonatkozó feltételes valószínűségével pótoljuk.

Megjegyzés. A feltételes valószínűség meghatározására általában nem használjuk a definíciós formulát, mert az túl bonyolult, míg a feltételes valószínűség közvetlen meghatározása általában nem nehezebb, mint a feltétel nélkülié.

Példák

1. 200 munkadarab közül 10 selejtes. Találomra kiemelünk egymás után 2-t visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy a másodszorra kiemelt darab selejt, ha az első jó volt?
Legyen

A esemény: a másodszorra kiemelt darab selejt;
 B esemény: az először kiemelt darab jó.

a) Ha az első kiemelt darab jó, akkor a második kiemeléskor 199 darab közül választhatunk. Tehát a lehetséges esetek száma

$$n = 199.$$

Mivel a 199 között még mindig 10 selejtes van, a selejt húzására kedvező esetek száma

$$k = 10.$$

Tehát a kérdéses valószínűség

$$P(A|B) = \frac{10}{199}.$$

b) Ha a feladat megoldásához a feltételes valószínűség definícióját akarjuk felhasználni, akkor meg kell határoznunk a $P(AB)$ és $P(B)$ valószínűségeket. Mivel AB azt az eseményt jelenti, hogy az első kiemelt darab jó és a második selejt, az erre nézve kedvező esetek száma

$$k = \binom{190}{1} \binom{10}{1} = 190 \cdot 10.$$

A lehetséges esetek száma

$$n = \binom{200}{2} 2! = 200 \cdot 199.$$

Így $P(AB) = \frac{k}{n} = \frac{190 \cdot 10}{200 \cdot 199} = \frac{19}{2 \cdot 199}.$

B jelenti azt az eseményt, hogy az első kiemelt darab jó. Az erre nézve kedvező esetek száma

$$k = 190,$$

a lehetséges eseteké

$$n = 200.$$

Így $P(B) = \frac{190}{200} = \frac{19}{20}.$

A kérdéses feltételes valószínűség tehát:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{19}{2 \cdot 199}}{\frac{19}{20}} = \frac{20}{2 \cdot 199} = \frac{10}{199}.$$

az előző számítással megegyezően.

2. Kockajátékot játszunk egy piros és egy fehér kockával. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két 6-ost dobunk, feltéve, hogy a piros kockával 6-ost dobtunk?
Legyen

A esemény: a fehér kockával 6-ost dobtunk,
 B esemény: a piros kockával 6-ost dobtunk.

a) A keresett feltételes valószínűség közvetlen megoldása

$$P(A|B) = \frac{k}{n} = \frac{1}{6}.$$

Ugyanis feltéve, hogy a piros kockával 6-ost dobtunk, a feladat számára kedvező esetek száma 1, ti., hogy a fehér kockával 6-ost dobtunk; a lehetséges esetek száma 6, mert az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek bármelyikét dobhatjuk.

b) A keresett feltételes valószínűség definíció szerinti meghatározása:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Itt
$$P(A \cdot B) = \frac{k}{n} = \frac{1}{36},$$

ugyanis a kedvező esetek száma 1 (ti. ha a piros és a fehér kockával is 6-ost dobunk); a lehetséges esetek száma pedig 6 elem másodosztályú ismétléses variációinak száma, tehát: $V_6^2 = 6^2 = 36$. (Ugyanis annyi, ahányféleképpen a 6 számból — ismétlést megengedve és sorrendet figyelembe véve — kettes csoportokat ki tudunk választani.)

Továbbá

$$P(B) = \frac{k}{n} = \frac{1}{6},$$

mert itt a kedvező esetek száma 1 (ti. ha 6-ost dobunk), a lehetséges esetek száma pedig 6 (a 6 számjegy bármelyikét dobhatjuk).
Tehát a keresett valószínűség

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

az előző számítással megegyezően.
Mint látható mindkét feladatban a feltételes valószínűség definíciós formulája alapján meglehetősen körülményes módon jutottunk ugyanarra az eredményre, melyet közvetlen számítással egyszerűen értünk el.

14.1.4.2 Összetett valószínűségi tétel

Két tetszőleges (nem 0 valószínűségű) esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége megegyezik az első esemény valószínűsége és a második esemény elsőre vonatkozó feltételes valószínűsége szorzatával. Vagyis:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A),$$

ill.
$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Bizonyítás. Ha $P(A) \neq 0$, akkor a B eseménynek A -ra vonatkoztatott feltételes valószínűségét kifejező

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

egyenlőség mindkét oldalát $P(A)$ -val szorozva:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Hasonlóan a B esemény A -ra vonatkozó feltételes valószínűségét kifejező

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

egyenlőség mindkét oldalát $P(B) \neq 0$ -val szorozva:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B).$$

A két eredményt összevetve:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B),$$

amivel állításunkat igazoltuk.

Az összetett valószínűségi tétel kiterjeszthető több eseményre is. Tekintsük először három eseményre!

Az A_1, A_2, A_3 események együttes bekövetkezésének valószínűsége — feltéve, hogy $P(A_1 A_2) > 0$ —

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2).$$

Ugyanis alkalmazva az összetett valószínűségi tételt, az $A = A_1 A_2$ és $B = A_3$ eseményekre

$$P(A_1 A_2 A_3) = P[(A_1 A_2) A_3] = P(A_1 A_2) \cdot P(A_3|A_1 A_2),$$

ahol — ugyancsak az összetett valószínűségi tétel értelmében —

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1).$$

Tehát valóban

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2).$$

Általánosan: tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n$ eseményekre, amelyekre

$$P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0,$$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

E képlet helyessége közvetlenül adódik, ha a jobb oldalon szereplő feltételes valószínűségeket — a feltételes valószínűség definíciója alapján — közösleges valószínűségekkel fejezzük ki. Az összetett valószínűségi tétel módot nyújt arra, hogy események együttes bekövetkezésének valószínűségét meghatározzuk, ha ismert (ill. ismertek) az egyik esemény másikkra vonatkozó (ill. rendre az egyes eseményeknek a többi szorzatára vonatkozó) feltételes valószínűsége.

Példák

1. Valamely üzem által gyártott gépalkatrészek 6%-a selejt. A selejtes darabok $\frac{2}{3}$ -ad része csak szépséghibás, a többi műszakilag hibás. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy, találmra kiválasztott gépalkatrész selejt és csak szépséghibás selejt.

Legyen az

A esemény: a kiválasztott gépalkatrész selejt,

B esemény: a kiválasztott gépalkatrész szépséghibás.

Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott gépalkatrész selejt

$$P(A) = 0,06.$$

Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott gépalkatrész szépséghibás, ha már tudom, hogy selejt

$$P(B|A) = \frac{2}{3}.$$

Így a keresett valószínűség

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 0,06 \cdot \frac{2}{3} = 0,04.$$

2. Egy csemegeüzletben a vásárlók $\frac{1}{8}$ része gyümölcsöt vesz. A gyümölcsvásárlók 30%-a szőlőt, és a szőlőt vásárlók fele fekete szőlőt vesz. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a csemegeüzletbe belépő — találmra kiszemelt — vevő fekete szőlőt vesz?

Jelölje

A_1 esemény: a vásárló gyümölcsöt vesz,

A_2 esemény: a vásárló szőlőt vesz,

A_3 esemény: a vásárló fekete szőlőt vesz.

Annak a valószínűsége, hogy a csemegeüzletbe belépő vásárló gyümölcsöt vesz:

$$P(A_1) = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Annak a valószínűsége, hogy a vevő szőlőt vesz, ha már tudom, hogy a gyümölcsosztályra ment:

$$P(A_2|A_1) = 0,3.$$

Annak a valószínűsége, hogy a vásárló fekete szőlőt vesz, ha már tudom, hogy a gyümölcsosztályra ment és szőlőt vásárolt:

$$P(A_3|A_1A_2) = 0,5.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a csemegeüzletbe belépő vásárló a gyümölcsosztályon fekete szőlőt vesz:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) = 0,125 \cdot 0,3 \cdot 0,5 \approx 0,019.$$

Látható, hogy a kérdéses valószínűség nagyon kicsi, az üzletbe belépőknek kb. 1,9%-a vásárol fekete szőlőt, ami azt jelenti, hogy kb. minden 52.—53. vevő (100:1,9 = 52,6 ...).

14.1.4.3 A teljes valószínűség tétele

Legyen $B_1, B_2, \dots, B_n \dots$ egy teljes eseményrendszer, és $P(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots$). Ezen eseményalgebrahoz tartozó bármely A esemény valószínűségét megkapjuk, ha képezzük az A eseménynek a teljes eseményrendszer egyes eseményeire vonatkozó feltételes valószínűségeit és a megfelelő feltétel valószínűségei szorzatait, és az így nyert szorzatokat összegezzük. Tehát

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots,$$

$$\text{ill. } P(A) = \sum_n P(A|B_n)P(B_n).$$

Bizonyítás. A kikötött feltevések mellett az A esemény többféle módon: vagy a B_1 , vagy a $B_2, \dots$, vagy a $B_n, \dots$ eseményekkel együtt jöhet létre. Vagyis az A esemény a következőképpen állítható elő

$$A = AB_1 + AB_2 + \dots = \sum_n AB_n.$$

Mivel a B_n események egymást páronként kizárják, azért az AB_n események is, s így a III. axióma értelmében

$$P(A) = P\left(\sum_n AB_n\right) = \sum_n P(AB_n).$$

Felhasználva a feltételes valószínűség definíciójából következő

$$P(AB_n) = P(A|B_n)P(B_n)$$

összetett valószínűségi tételt:

$$P(A) = \sum_n P(AB_n) = \sum_n P(A|B_n)P(B_n),$$

amivel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzés. Minthogy $\sum_n P(B_n) = 1$, a $P(A)$ valószínűség — a teljes valószínűség tétele értelmében — felfogható, mint a $P(A|B_n)$ feltételes valószínűségek $P(B_n)$ súlyokkal képezett számtani közepe. Tehát

$$P(A) = \sum_n P(A|B_n) \cdot P(B_n) = \frac{\sum_n P(A|B_n) \cdot P(B_n)}{\sum_n P(B_n)},$$

amiből közvetlenül adódik, hogy

$$\min P(A|B_n) \leq P(A) \leq \max P(A|B_n).$$

Példák

1. 100 db műszer között 0, 1, 2 vagy 3 db hibás. Ezek előfordulásának valószínűsége rendre $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{12}$. Feltételezve, hogy mindegyik műszert egyenlő valószínűséggel vehetjük meg, mekkora annak a valószínűsége, hogy a megvásárolt műszer hibátlan. Legyen

A esemény: a megvásárolt műszer hibátlan,
 B_0 esemény: 100 db műszer között 0 db hibás,
 B_1 esemény: 100 db műszer között 1 db hibás,
 B_2 esemény: 100 db műszer között 2 db hibás,
 B_3 esemény: 100 db műszer között 3 db hibás.

A teljes eseményrendszert alkotó B_i események ($i = 0, 1, 2, 3$) valószínűségei:

$$P(B_0) = \frac{1}{6},$$

$$P(B_1) = \frac{1}{3},$$

$$P(B_2) = \frac{5}{12},$$

$$P(B_3) = \frac{1}{12}.$$

Az A esemény bekövetkezhet úgy, hogy a 100 műszer közt vagy 0, vagy 1, vagy 2, vagy 3 hibás van; vagyis az A esemény bekövetkezhet B_0, B_1, B_2 vagy B_3 módon. A megfelelő valószínűségek:

$$P(A|B_0) = 1,$$

$$P(A|B_1) = \frac{99}{100},$$

$$P(A|B_2) = \frac{98}{100},$$

$$P(A|B_3) = \frac{97}{100}.$$

A keresett $P(A)$ valószínűséget a teljes valószínűség tétele alapján meghatározva:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(A|B_i)P(B_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{98}{100} \cdot \frac{5}{12} + \frac{97}{100} \cdot \frac{1}{12} = 0,9857.$$

2. Búzavetésnél 4 fajta búzát használnak; az egyes fajtákból 94%-ot, 3%-ot, 2%-ot és 1%-ot. Annak a valószínűsége, hogy az egyes búzafajták egy-egy szeméből egy legalább 50 szemet tartalmazó kalász lesz, rendre: $P_1 = 0,5$; $P_2 = 0,2$; $P_3 = 0,15$; $P_4 = 0,05$. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy találomra kiválasztott búzaszeméből egy legalább 50 szemet tartalmazó kalász lesz?

A esemény: a búzaszeméből egy legalább 50 szemet tartalmazó kalász lesz,

B_1 esemény: a búzaszem az I. fajtából való,

B_2 esemény: a búzaszem a II. fajtából való,

B_3 esemény: a búzaszem a III. fajtából való,

B_4 esemény: a búzaszem a IV. fajtából való.

A teljes eseményrendszert alkotó B_i eseményekhez ($i = 1, 2, 3, 4$) tartozó valószínűségek

$$P(B_1) = \frac{94}{100} = 0,94,$$

$$P(B_2) = \frac{3}{100} = 0,03,$$

$$P(B_3) = \frac{2}{100} = 0,02,$$

$$P(B_4) = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Az A esemény bekövetkezhet B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) módon. A megfelelő valószínűségek

$$P(A|B_1) = 0,5,$$

$$P(A|B_2) = 0,2,$$

$$P(A|B_3) = 0,15,$$

$$P(A|B_4) = 0,05.$$

Így a keresett $P(A)$ valószínűség, a teljes valószínűség tétele alapján meghatározva:

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(A|B_i)P(B_i) = 0,5 \cdot 0,94 + 0,2 \cdot 0,03 + 0,15 \cdot 0,02 + 0,05 \cdot 0,01 = 0,4795.$$

14.1.4.4 Bayes-tétel

A teljes valószínűségi tétel arra ad felvilágosítást, hogyan lehet meghatározni egy B_i teljes eseményrendszerrel kapcsolatos A esemény valószínűségét, ha ismertek a B_i események valószínűségei és az A eseménynek a B_i eseményekre vonatkozó feltételes valószínűségei. Gyakran a probléma fordítottja érdekes: nem az A esemény valószínűségére vagyunk kíváncsiak, hanem a B_i események A -ra vonatkozó feltételes valószínűségére. Ez úgy is értelmezhető, hogy az A bekövetkezését eleve feltételezzük és azt vizsgáljuk, hogy az egyes B_i események milyen szerepet játszottak az A esemény létrejöttében. Erre nézve ad felvilágosítást a *Bayes-tétel*.

Tétel. Ha $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ egy teljes eseményrendszer, és $P(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots$); ekkor tetszőleges — a B_i eseményrendszerrel kapcsolatos — A eseményre:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciója értelmében:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cdot A)}{P(A)}.$$

Mivel az összetett valószínűségi tétel értelmében:

$$P(B_i \cdot A) = P(A|B_i)P(B_i),$$

és a teljes valószínűségi tétel értelmében:

$$P(A) = \sum_j P(A|B_j)P(B_j),$$

ezért

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)},$$

amivel állításunkat igazoltuk.

Példák

1. A teljes valószínűségi tétel 2. példája kapcsán tegyük fel a kérdés fordítottját. Keressük annak a valószínűségét, hogy egy legalább 50 szemet tartalmazó búzakarász az I., ill. a II., ill. a III., ill. a IV. fajta búzaszeméből való-e. Felhasználva a régi jelöléseket és részeredményeket, a kérdéses valószínűségek

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^4 P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{0,5 \cdot 0,94}{0,5 \cdot 0,94 + 0,2 \cdot 0,03 + 0,15 \cdot 0,02 + 0,05 \cdot 0,01} = \frac{0,47}{0,4795}.$$

Hasonlóan

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{\sum_{i=1}^4 P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{0,2 \cdot 0,03}{0,4795} = \frac{0,006}{0,4795},$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{\sum_{i=1}^4 P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{0,15 \cdot 0,02}{0,4795} = \frac{0,003}{0,4795}$$

és

$$P(B_4|A) = \frac{P(A|B_4)P(B_4)}{\sum_{i=1}^4 P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{0,05 \cdot 0,01}{0,4795} = \frac{0,0005}{0,4795}.$$

2. (Bertrand problémája.) Három szekrény mindegyikében két fiók van. Az első szekrény mindkét fiókjában egy-egy aranygolyó; a második szekrény egyik fiókjában arany-, a másik fiókjában ezüstgolyó; a harmadik szekrény mindkét fiókjában ezüstgolyó van. Találomra (azonos valószínűséggel) választunk egy szekrényt, kihúzzunk egy fiókot és abban aranygolyót találunk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a szekrény másik fiókjában is aranygolyó van.

A feltett kérdés nyilvánvalóan egyenértékű azzal a kérdéssel, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy az első szekrényt választottuk, ha már tudjuk, hogy a kihúzott fiókban aranygolyó van. Ha A -val jelöljük azt az eseményt, hogy a fiókban aranygolyót találtunk, és B_1, B_2, B_3 -mal az első, második, harmadik szekrény választását, akkor a kérdéses valószínűség:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}.$$

Mivel

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3},$$

és

$$P(A|B_1) = 1,$$

$$P(A|B_2) = \frac{1}{2},$$

$$P(A|B_3) = 0,$$

azért

$$P(B_1|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{2}{3}.$$

14.1.4.5 Események függetlensége

14.1.4.5.1 Két esemény függetlensége

I. Definíció. Legyen az A és B esemény valamely valószínűségi algebra két eleme, melyekre $P(A) > 0$ és $P(B) > 0$. Az A esemény független a B eseménytől, ha A -nak B -re vonatkozó feltételes valószínűsége megegyezik A -nak feltétel nélküli valószínűségével, vagyis

$$(1) \quad P(A|B) = P(A).$$

E definíció következménye: ha A független B -től, akkor B is független A -tól:

$$P(B|A) = P(B).$$

Ugyanis ha A független B -től, akkor

$$P(A|B) = P(A),$$

ill. a feltételes valószínűség definíciójának felhasználásával

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A).$$

Mivel $P(A) > 0$ és $P(B) > 0$, ebből

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = P(B),$$

ahol a bal oldali kifejezés B -nek A -ra vonatkozó feltételes valószínűsége, és így

$$P(B|A) = P(B),$$

ami éppen B -nek A -tól való függetlenségét jelenti.

Ezért, ha két esemény függetlenségéről beszélünk, akkor nem kell tekintettel lennünk a sorrendre, hanem egyszerűen azt mondhatjuk, hogy az A és B események függetlenek egymástól. Ezért célszerű a függetlenségnek olyan definícióját megadni, amely a két eseményre nézve szimmetrikus.

2. Definíció. A és B pozitív valószínűségű események függetlenek, ha együttes bekövetkezésük valószínűsége megegyezik a két esemény feltétel nélküli valószínűségeinek szorzatával, vagyis

$$(2) \quad P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Ez a definíció jól használható a független események együttes bekövetkezése valószínűségének meghatározásánál.

Belátható, hogy az események függetlenségére megadott két definíció ekvivalens.

Egyrészt ha az A és B az első definíció értelmében függetlenek, akkor a (2) összefüggés fennáll.

Ugyanis A és B függetlensége a

$$P(A|B) = P(A)$$

és

$$P(B|A) = P(B)$$

egyenlőségek fennállását jelenti. Ezek megegyeznek a

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A),$$

és

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$$

egyenlőségekkel, és ezek mindegyikéből a

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

összefüggés következik, amely A és B 2. definíció szerinti függetlenségét jelenti.

Másrészt, ha a (2) összefüggés fennáll, akkor A és B az első definíció értelmében függetlenek. Ugyanis, ha

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

és $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, akkor fennállnak a

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A),$$

és

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = P(B),$$

ill. az ezekkel ekvivalens

$$P(A|B) = P(A)$$

és
$$P(B|A) = P(B)$$

összefüggések, melyek éppen A és B 1. definíció szerinti függetlenségét jelentik.

Tétel. Az A és B események függetlenségéből következik A és $\bar{B}$; $\bar{A}$ és B , továbbá $\bar{A}$ és $\bar{B}$ függetlensége.

Vagyis, ha

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

akkor

1.
$$P(A\bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$$

és

2.
$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \cdot P(B),$$

továbbá

3.
$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}).$$

Bizonyítás. 1. Ha A és B függetlenek, akkor A és $\bar{B}$ is függetlenek. Ugyanis

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}),$$

amiből
$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB),$$

ahol A és B függetlensége miatt $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, és így

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(\bar{B}),$$

ami éppen A és $\bar{B}$ függetlenségét jelenti.

2. bizonyítása következik az 1.-ből A és B szerepcseréjével.

3. Ha A és B függetlenek, akkor $\bar{A}$ és $\bar{B}$ is függetlenek. Ugyanis

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}),$$

amiből

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}B),$$

ahol az A és B függetlenségéből következő $\bar{A}$ és B függetlensége miatt $P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$, és így

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}) \cdot P(B) = P(\bar{A})[1 - P(B)] = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}),$$

ami éppen $\bar{A}$ és $\bar{B}$ függetlenségét jelenti.

Példák

1. Független-e egymástól az A és B esemény, ha $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ és $P(AB) = 0,2$? Mivel

$$P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 = P(AB),$$

a két esemény független.

2. Mi a valószínűsége annak, hogy két kockával dobva, az egyikkel 3-ast, a másikkal páros számot dobunk?

A 3-as dobás valószínűsége

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

A páros dobás valószínűsége

$$P(B) = \frac{1}{2}.$$

A két dobás függetlensége miatt

$$P(AB) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}.$$

(A 2-es szorzó abból adódik, hogy dobhatunk az I-es kockával 3-at és a II-essel párosat, vagy megfordítva.)

3. Egy ládában 25 db 110 voltos, 60 wattos; 25 db 110 voltos, 40 wattos; 25 db 220 voltos, 60 wattos; 25 db 220 voltos, 40 wattos lámpa van. Jelentse A a 110 voltos lámpa választásának eseményét, B a 40 wattos lámpa választásának eseményét. Független-e ez a két esemény?

Mivel

$$P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

$$P(AB) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4},$$

ezért

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Mint ahogy várható volt, a két esemény független.

14.1.4.5.2 Több esemény függetlensége (teljes függetlenség)

Láttuk, ha két esemény független, akkor

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Kérdés, milyen feltétel mellett terjeszthető ki ez az összefüggés több eseményre, vagyis mikor áll fenn a

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n),$$

ill.
$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

összefüggés. Ehhez egy új fogalom, a teljes függetlenség definiálására van szükség.