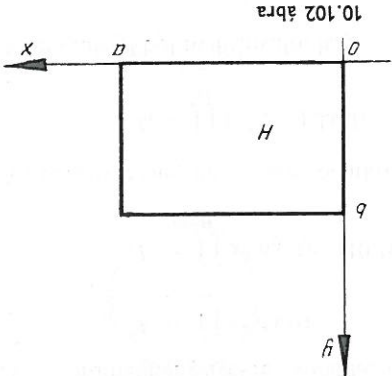


Tehát

$$I_g = I_s + a^2 A.$$

Példák

1. Határozzuk meg az a és b oldalú H téglalap oldalra vonatkozó másodrendű nyomatékait a 10.102. ábra szerinti elhelyezéssel:



$$I_z = \int_a^0 \int_b^0 y^2 dy dx = \int_a^0 \left[\frac{y^3}{3} \right]_b^0 dx = \int_a^0 \left[-\frac{y^3}{3} \right]_b^0 dx =$$

$$= \int_a^0 \frac{b^3}{3} dx = \frac{b^3}{3} \left[x \right]_a^0 = -\frac{b^3}{3} a = -\frac{3}{ab} b^3 a = -\frac{3}{ab} b^3 a.$$

$$I_y = \int_a^0 \int_b^0 x^2 dy dx = \int_a^0 \left[x^2 y \right]_b^0 dx = \int_a^0 -x^2 b dx =$$

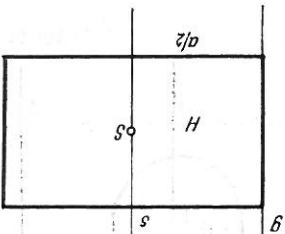
$$= \left[-\frac{x^3 b}{3} \right]_a^0 = -\frac{3}{ab} \left[-\frac{x^3}{3} \right]_a^0 = \frac{3}{ab} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{3}{ab} a^3.$$

ahol a terület $A = ab$.

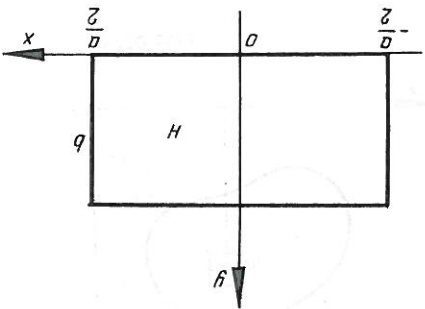
$$I_z = I_0 = I_x + I_y,$$

$$I_z = \frac{3}{ab} (a^3 + b^3).$$

10.103. ábra



10.104. ábra



$$I_z = I_y - \left(\frac{a}{2} \right)^2 A.$$

Az 1. példa eredménye szerint:

$$I_z = \frac{3}{ab} a^3.$$

Steiner tétele alapján:
 Hejyezzük el a síkidomot a 10.103. ábra szerint.
 rendű nyomatékát!

2. Határozzuk meg az a és b oldalú H téglalap valamelyik szimmetriatengelyére vonatkozó másod-

Így

$$I_z = \frac{3}{ab} a^3 - \frac{4}{ab} a^3 = \frac{12}{ab} a^3.$$

Ellenőrizzük az eredményt úgy, hogy a 10.104. ábra szerinti elhelyezéssel számoljuk ki a szimmetria-tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékot.

$$I_y = \int_a^0 \int_b^0 x^2 dy dx = \int_a^0 \left[x^2 y \right]_b^0 dx = \int_a^0 -x^2 b dx = \int_a^0 -bx^2 dx =$$

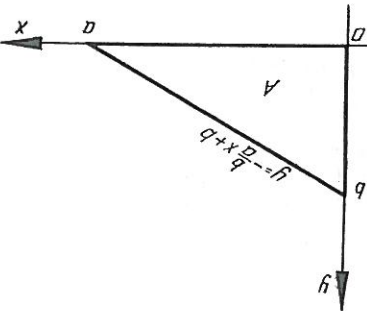
$$= b \left[-\frac{x^3}{3} \right]_a^0 = -\frac{b}{3} \left[-\frac{x^3}{3} \right]_a^0 = -\frac{b}{3} \left[-\frac{a^3}{3} \right] = \frac{b}{3} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{12}{ab} a^3.$$

3. Számítsuk ki az a és b befogójú, derékszögű háromszög alakú síkidom befogóra való másodrendű nyomatékát!

A 10.105. ábrán való elhelyezéssel ezek egyenlők az x , illetve y tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékokkal.

A háromszöget az $x = 0$, $y = 0$, $y = -\frac{a}{b}x + b$ egyenesek határolják, területe $A = \frac{ab}{2}$.

10.105. ábra



$$I_y = \int_a^0 \int_b^0 x^2 dy dx = \int_a^0 \left[x^2 y \right]_b^0 dx = \int_a^0 -x^2 b dx =$$

$$= \frac{12b}{ab} b^3 = \frac{12}{ab} b^3.$$

$$= \frac{1}{3} \int_a^0 \left(-\frac{a}{b} x + b \right) dx = \frac{1}{3} \left[-\frac{a}{2b} x^2 + bx \right]_a^0 =$$

$$I_z = \int_a^0 \int_b^0 y^2 dy dx = \int_a^0 \left[\frac{y^3}{3} \right]_b^0 dx = \int_a^0 -\frac{y^3}{3} dx = \int_a^0 -\frac{1}{3} \left(-\frac{a}{b} x + b \right)^3 dx =$$

$$= \int_a^0 \left(-\frac{a}{3b} x^3 + bx^2 + \frac{b^3}{3} x - \frac{ab^3}{3} \right) dx = \left[-\frac{a}{12b} x^4 + \frac{b}{3} x^3 + \frac{b^3}{6} x^2 - \frac{ab^3}{3} x \right]_a^0 =$$

$$I_z = I_x + I_y = \frac{6}{ab} b^3 + \frac{6}{ab} a^3 = \frac{6}{ab} (a^3 + b^3).$$

4. Határozzuk meg az R sugarú, origó középpontú K kör-
lemeznek az x tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékát
(10.106 ábra)!

$$I_x = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} y^2 dx dy$$

Polárkoordinátákkal:

$$y = r \sin \varphi$$

$$dT = r dr d\varphi$$

Az integrációs intervallum:

$$0 \leq r \leq R$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$I_x = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} y^2 dx dy = \int_{-R}^R \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2 \varphi r dr d\varphi =$$

$$= \int_{-R}^R \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr = \int_{-R}^R \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{2\pi} dy =$$

$$= \frac{R^4}{4} \int_{-R}^R \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{R^4}{4} \left[-\sin \varphi \cos \varphi + \varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{R^4}{4} \pi$$

Mivel

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} R^2 A$$

A szimmetria miatt:

$$I_y = \frac{1}{4} R^2 A$$

Igy

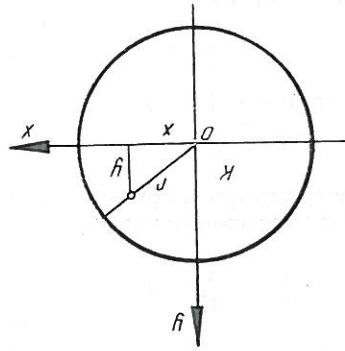
$$I_0 = \frac{1}{2} R^2 A$$

Az origóra vonatkozó másodrendű nyomatékok egyeztetésben is megkaphatjuk:

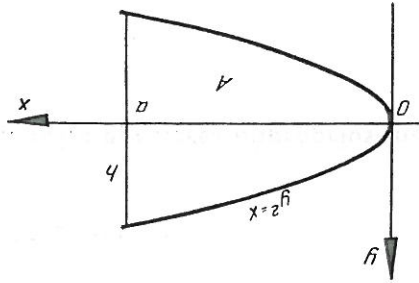
$$I_0 = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} (x^2 + y^2) dT = \int_{-R}^R \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\varphi = \int_{-R}^R \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{2\pi} dy = \frac{R^4}{4} \pi$$

Mivel

$$I_x = I_y, \quad I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{R^4}{4} \pi$$



10.106 ábra



10.107 ábra

$$y = \sqrt{x}, \quad y = -\sqrt{x}, \quad x = a \quad (10.107 \text{ ábra}).$$

5. Számítsuk ki az $y^2 = x$ egyenletű parabola és az $x = a$ egyenes által határolt síkidomnak a koordinátaengelyekre vonatkozó másodrendű nyomatékát! A határoló görbék egyenlete:

A szimmetria miatt:

$$I_x = 2 \int_0^a \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y^2 dy dx = 2 \int_0^a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^a \frac{2}{3} x^{3/2} dx = \frac{4}{3} \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^a = \frac{8}{15} a^{5/2}$$

A szimmetria miatt:

$$I_y = 2 \int_0^a \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x^2 dy dx = 2 \int_0^a x^2 \left[y \right]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^a 2x^2 \sqrt{x} dx = 4 \int_0^a x^{5/2} dx = 4 \left[\frac{x^{7/2}}{7/2} \right]_0^a = \frac{8}{7} a^{7/2}$$

Legyen $\sqrt{a} = h$:

$$I_x = \frac{8}{15} a^{5/2}, \quad I_y = \frac{8}{7} a^{7/2}$$

A síkidom területe:

$$A = 2 \int_0^a \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy dx = 2 \int_0^a 2\sqrt{x} dx = 4 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^a = \frac{8}{3} a^{3/2}$$

Így

$$I_z = \frac{4}{15} ah^3 = \frac{3}{4} ah \cdot \frac{1}{5} h^2 = \frac{3}{4} h^2, \quad I_y = \frac{7}{4} ah^3 = \frac{3}{4} ah \cdot \frac{7}{3} a^2 = \frac{7}{4} a^3.$$

$$I_z = I_0 = I_x + I_y = \left(\frac{1}{5} + \frac{7}{4} \right) a^3 = \frac{37}{20} a^3, \quad A = \frac{37}{20} (7h^2 + 5a^2).$$

10.5.2.5 A kettős integrál alkalmazása egyszerűes improperus integrál kiszámítására

Számítsuk ki a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad \text{integrált,}$$

az ún. Gauss-féle hibainTEGRÁLT.

Mivel az integrandusz páros függvény:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Megmutatjuk, hogy az $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ integrál konvergens. $t > 1$ esetén $t^2 > t$, ezért

$$e^{-t^2} < e^{-t}.$$

Így

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt < \int_0^{+\infty} e^{-t} dt.$$

Az $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ integrál konvergenciája az improperus integrál konvergenciájának definíciójából közvetlenül belátható (8.5.3).

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{\eta}^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[-e^{-t} \right]_{\eta}^{+\infty} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\eta} \right) = \frac{1}{1}.$$

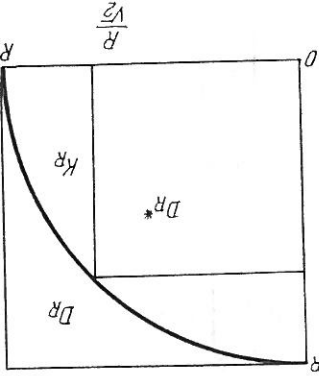
Tehát az I improperus integrál is konvergens.

Jelölje D_R a $0 \leq x \leq R$, $0 \leq y \leq R$ négyzetet, K_R az origó körüli R sugarú kör $x \geq 0$, $y \geq 0$ negyedét, D_{R^*} pedig a $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}R$, $0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}R$ négyzetet (10.108 ábra).

Mivel $D_{R^*} \subset K_R \subset D_R$ és az $e^{-x^2-y^2}$ függvény pozitív:

$$\iint_{D_{R^*}} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{K_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

Így



10.108 ábra

Így

$$I_2 = \frac{\pi}{4}, \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

A (2) és (3) egyenlet egybevetéséből:

$$(3) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4}.$$

Ha $R \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \int_R^0 e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_R^0 d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-R^2} \right) d\varphi = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-R^2} \right). \end{aligned}$$

Másképp a polárkoordináták bevezetésével:

$$(2) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = I_2.$$

Ha $R \rightarrow +\infty$, akkor ezek az integrálok I_2 -hoz tartanak, ezért (1) alapján:

$$\iint_{D_{R^*}} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \int_R^0 e^{-t^2} dt \right).$$

Hasonlóan

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_R^0 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-t^2} dt \right).$$

Az utolsó integrálban x , illetve y helyébe t -t írva:

$$\begin{aligned} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_R^0 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_R^0 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy = \int_R^0 e^{-x^2} dx \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

Nézzük az integrálokat külön-külön:

10.5.3 A hármas integrál

10.5.3.1 Mértető térfogatú halmazok

A mértető térfogatú térbeli halmazokat a mértető területű síkbeli halmazok definíciójával

analog módon határozhatjuk meg.

A téglalapok szerepét itt a téglák, azaz az $a \equiv x \equiv b$, $c \equiv y \equiv d$, $e \equiv z \equiv f$ egyenlőlen-

ségekkel megadott halmazok veszik át.

Egy ilyen E téglát V térfogatán a

$$V(E) = (b-a)(d-c)(f-e)$$

számot értjük.

Legyen H a térben korlátos halmaz. Fedjük be a H halmazt véges sok téglával.

$$H \subset \bigcup_{i=1}^n E_i.$$

Az összes lehetséges ilyen befedésekre képezzük a

$$\sum_{i=1}^n V(E_i) \quad \text{térfogatösszeget.}$$

Ezeknek az összegeknek alsó határa a H halmaz külső térfogata: $V_k(H)$.

$$V_k(H) = \inf \sum_{i=1}^n V(E_i).$$

Vegyünk fel a H halmazban véges sok, páronként közös pont nélküli téglát.

$$\bigcup_{i=1}^m E_i \subset H, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \text{ha } i \neq j.$$

Az összes lehetséges ilyen téglarendszerre képezzük a

$$\sum_{i=1}^m V(E_i) \quad \text{térfogatösszeget.}$$

Ezen összegek felső határa a H halmaz belső térfogata: $V_b(H)$.

$$V_b(H) = \sup \sum_{i=1}^m V(E_i).$$

Ha H nem tartalmaz téglát, akkor $V_b(H) = 0$.

Definíció. A H halmaz mértető térfogatú, ha

$$V_b(H) = V_k(H).$$

és a halmaz $V(H)$ térfogata a közös érték:

$$V(H) = V_b(H) = V_k(H).$$

A térfogatra vonatkozólag a területre vonatkozó tételekkel analóg tételek érvényesek (pl.

monotonitás, additivitás stb.).

A H halmaz felosztásán most is a

$$H = \bigcup_{i=1}^n H_i$$

előállítását értjük, ahol $H_i \cap H_j = \emptyset$, ha $i \neq j$.

Mértető térfogatú H halmaz felosztásakor mindig felteesszük, hogy H_i is mértető térfogatú.

A H halmaz felosztása δ -nál finomabb, ha H_i bármely két pontjának távolsága δ -nál kisebb,

$i = 1, 2, \dots, n$ esetén.

Egy felosztássorozat minden határon túl finomodó, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N = N(\varepsilon)$,

hogy $n > N$ esetén az n -edik felosztás ε -nál finomabb.

10.5.3.2 A hármas integrál fogalma, kiszámítása

Definíció. Legyen $u = f(x; y; z)$ a H mértető térfogatú halmazon korlátos függvény.

$$H = \bigcup_{i=1}^n H_i \quad \text{és}$$

$P_i \in H_i$ tetszőleges pont.

$$P_i = P(x_i; y_i; z_i).$$

Képezzük a

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) V(H_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) V(H_i)$$

integrálközelítő összeget. $f(x; y; z)$ integrálható a H halmazon, ha bármely, minden határon

túl finomodó felosztássorozat esetén az integrálközelítő összegek sorozata ugyanahhoz a

véges határértékhez tart.

Ezt a határértéket az $f(x; y; z)$ függvény H halmazon vett térfogati vagy hármas integráljá-

nak nevezzük, és így jelöljük:

$$I = \iiint_H f(x; y; z) dV$$

vagy

$$I = \iiint_H f(x; y; z) dx dy dz.$$

A hármas integrál tulajdonságaira, egzisztenciájára, kiszámítására vonatkozóan ugyanolyan

tételek érvényesek, mint a kettős integráléra. Ezért ezzel csak vázlatosan foglalkozunk.

Tétel. Legyen $u = f(x; y; z)$ folytonos az

$$E: \begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2 \\ b_1 \leq y \leq b_2 \\ c_1 \leq z \leq c_2 \end{cases}$$

tégán, és jelölje D E-nek az $(x; y)$ síkra való vetületét.

Ekkor

$$D: \begin{cases} a_1 \equiv x \equiv a_2 \\ b_1 \equiv y \equiv b_2. \end{cases}$$

$$\iiint_H f(x; y; z) dV = \iiint_H f(x; y; z) dx dy dz =$$

$$= \int_{c_2}^{c_1} \left[\int_{b_2}^{b_1} \int_{a_2}^{a_1} f(x; y; z) dx dy \right] dz = \int_{c_2}^{c_1} \left[\int_{b_2}^D \int_{a_2}^D f(x; y; z) dx dy \right] dz =$$

$$= \int_{a_2}^{a_1} \left[\int_{b_2}^{b_1} \left(\int_{c_2}^{c_1} f(x; y; z) dz \right) dy \right] dx.$$

A rövidség kedvéért az utolsó integrálnál el szoktuk hagyni a zárójleket.

$$\iiint_H f(x; y; z) dx dy dz = \int_{a_2}^{a_1} \int_{b_2}^{b_1} \int_{c_2}^{c_1} f(x; y; z) dz dy dx.$$

Vagy:

$$\iiint_H f(x; y; z) dx dy dz = \int_{a_2}^{a_1} dx \int_{b_2}^{b_1} dy \int_{c_2}^{c_1} f(x; y; z) dz.$$

A koordináták felcserélésével további hasonló típusú felbontásokat kapunk.

A tétel bizonyítása a kétváltozós esethez hasonló módon történhet.

Ugyancsak érvényes a normáltartományokra vonatkozó síkbeli megfelelő tétel is.

Definíció. Legyen A mérhető területű halmaz az $(x; y)$ síkon, amelyen értelmezve van a $c_1(x; y)$ és $c_2(x; y)$ folytonos függvény, és legyen

$$c_1(x; y) \equiv c_2(x; y).$$

Ekkor a

$$H: \begin{cases} (x; y) \in A \\ c_1(x; y) \equiv z \equiv c_2(x; y) \end{cases}$$

halmazt az $(x; y)$ síkra nézve normáltartománynak nevezzük.

Tétel. Ha $f(x; y; z)$ folytonos a H normáltartományon, akkor

$$\iiint_H f(x; y; z) dV = \iint_H f(x; y; z) dx dy dz =$$

$$= \iint_A \left[\int_{c_2(x; y)}^{c_1(x; y)} f(x; y; z) dz \right] dx dy.$$

Ha még A is normáltartomány, azaz

$$A: \begin{cases} a_1 \equiv x \equiv a_2 \\ b_1(x) \equiv y \equiv b_2(x), \end{cases} \text{ akkor}$$

$$\iiint_H f(x; y; z) dV = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1(x)}^{b_2(x)} \left[\int_{c_2(x; y)}^{c_1(x; y)} f(x; y; z) dz \right] dy dx.$$

Vagy másképpen jelölve:

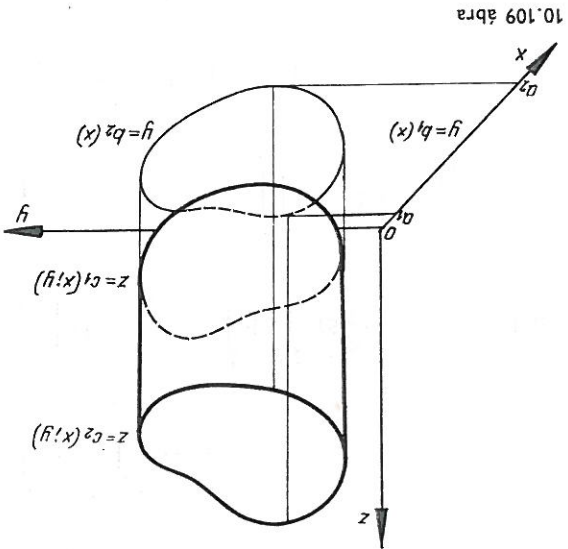
$$\iiint_H f(x; y; z) dV = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_2(x)}^{b_1(x)} dy \int_{c_2(x; y)}^{c_1(x; y)} f(x; y; z) dz.$$

Az integrálban szereplő határok jelentése a következő:

$$z = c_1(x; y) \quad z = c_2(x; y)$$

a tartományt alulról, illetve felülről határoló felület egyenlete.

Az $y = b_1(x)$, $y = b_2(x)$, $x = a_1$, $x = a_2$ egyenletű görbék annak az A tartománynak határai, amely a H tartomány vetülete az $(x; y)$ síkra (10.109 ábra).



10.109 ábra

A tétel bizonyítása a kettős integrálokra vonatkozó megfelelő tétel bizonyításához hasonlóan történhet. A koordináták felcserélésével hasonló tételket kaphatunk, ha H nem az $(x; y)$ síkra nézve, hanem valamelyik másik koordinátasíkra nézve normáltartomány. Egy tartomány lehet, több síkra nézve is normáltartomány. Ha a H tartományt burkoló felületeket vagy az A tartomány határait nem tudjuk egy-egy egyenlettel felírni, vagy a H halmaz egyetlen koordinátasíkra nézve sem normáltartomány az integrál kiszámítását H részekre bontásával kell megkísérlni.

A hármas integrál definíciójából adódik, hogy $f(x; y; z) \equiv 1$ esetén az integrál a H tartomány V térfogatát közvetlenül megadja:

$$V = \iiint_H dV = \iiint_H dx dy dz.$$

Példa

Számítsuk ki annak a térrésznek a térfogatát, amelyet a

$$z = 6 - x - y, \quad z = x + y - 4, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{egyenletű síkok}$$

zárnak be.

A tartomány határai:

$$x + y - 4 \leq z \leq 6 - x - y$$

$$0 \leq y \leq 1 - x$$

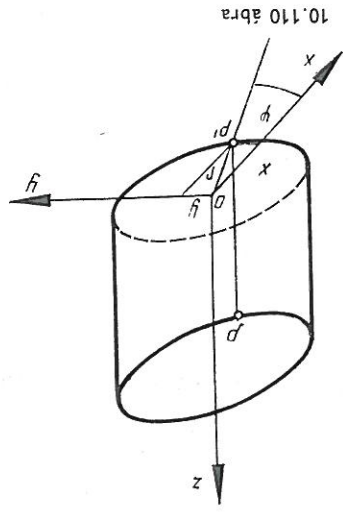
$$0 \leq x \leq 1.$$

A térfogat:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_{-x}^0 \int_{x+y-4}^{6-x-y} dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_{-x}^0 [z]_{x+y-4}^{6-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^0 (6-x-y-x-y+4) dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_{-x}^0 (10-2x-2y) dy = \int_0^1 [10y-2xy-y^2]_{-x}^0 dx = \\ &= \int_0^1 [10-10x-2x+2x^2-(1-x)^2] dx = \\ &= \left[10x-6x^2+\frac{2x^3}{3}+\frac{1}{3}(1-x)^3 \right]_0^1 = 10-6+\frac{3}{2}-\frac{1}{3} = \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

10.5.3.3 A hármas integrál transzformációja új változókra

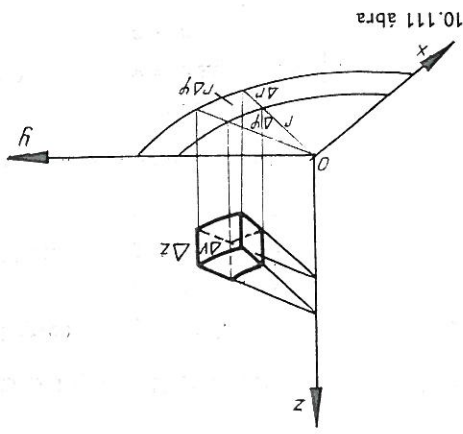
Gyakran célszerű a térbeli derékszögű koordináta-rendszer helyett a hármas integrálban más koordináta-rendszert bevezetni.



10.110 ábra

$$\Delta V \approx r \Delta \varphi \Delta r \Delta z.$$

Hengerkoordinátáknál: $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ szerepel.
a φ, r, z hengerkoordinátáknak megfelelő feldarabolást a z tengelyen átmenő $q = \text{konstans}$ síkokkal, z tengely körüli $r = \text{konstans}$ hengerekkel és az $(x; y)$ síkkal párhuzamos $z = \text{konstans}$ síkokkal hajtuk végre. Ekkor a felosztás egy tagjának térfogata (10.111 ábra)



10.111 ábra

10.5.3.3.1 Hengerkoordináták

A $P(x; y; z)$ pont hengerkoordinátái $r; \varphi; z$, azaz a P pontot hengerkoordinátáiban az $(x; y)$ síkra való P' vetületének polárkoordinátáival, r -rel és φ -vel és eredeti z koordinátájával adjuk meg (10.110 ábra).

Tehát

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z. \end{cases}$$

A kettős integrálnál alkalmazott módszerrel megmutatható, hogy

$$\iiint_H f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{H^*} f(r \cos \varphi; r \sin \varphi; z) r dr d\varphi dz,$$

ahol

$(r; \varphi; z) \in H^*$ akkor és csak akkor, ha

$$(r \cos \varphi; r \sin \varphi; z) \in H.$$

A helyettesítést tehát úgy hajtuk végre, hogy a függvény változóiba a megfelelő hengerkoordináták helyettesítését, $dx dy dz$ kifejezést helyettesítettük.

Ennek geometriai magyarázata a következő.

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben H -t téglákra bontással osztjuk fel, akkor az integrálközelítő összegben a $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ elhosszúságú téglák térfogata:

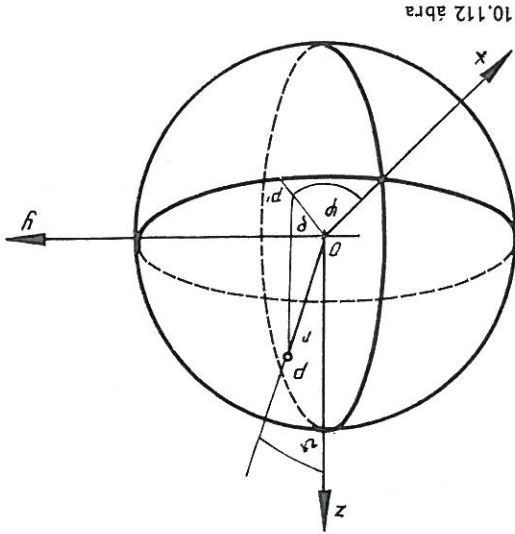
Ha az integrációs H tartomány az $x^2 + y^2 = R^2$ alapkörű, h magasságú henger, akkor H^* a

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 &\leq z \leq h \end{aligned}$$

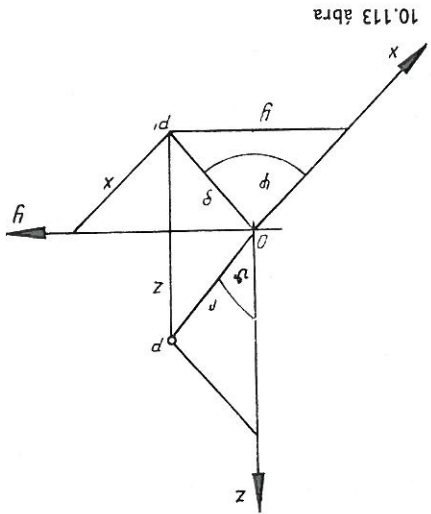
egyenlőtlenségekkel megadott téglá az $(r; \varphi; z)$ koordináta-rendszerben.

10.5.3.3.2 Gömbi koordináták

A gömbi koordinátáknál a P pont koordinátái: $r; \vartheta; \varphi$. Itt r a P pontnak a O pólustól való távolsága, $r = OP$, ϑ az OP szakasz és a z tengely pozitív ágának hajlásszöge, φ pedig az OP' szakasz és az x tengely pozitív ágának hajlásszöge (10.112 ábra). (OP' az OP -nek az $(x; y)$ síkra való merőleges vetülete.)



10.112 ábra



10.113 ábra

Összefüggés a Descartes-féle és a gömbi koordináták között (10.113 ábra).

Legyen $\varrho = OP'$

Mivel
$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \varphi \\ \varrho = r \sin \vartheta \end{cases},$$

a derékszögű koordináták:

$$(1) \quad \begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases}$$

A hármas integrál a gömbi koordinátákkal a következő módon fejezhető ki:

$$\iiint_H f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{H^*} f(r; \varphi; \vartheta) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta,$$

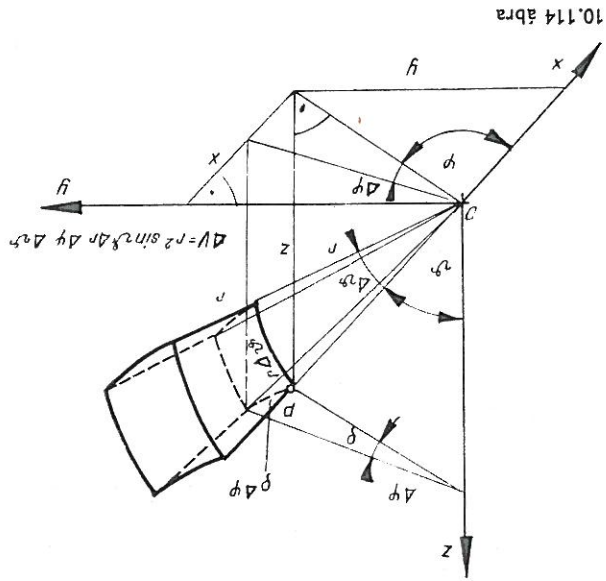
ahol $F(r; \varphi; \vartheta) = f(r \sin \vartheta \cos \varphi; r \sin \vartheta \sin \varphi; r \cos \vartheta)$ és $(r; \varphi; \vartheta) \in H^*$ akkor és csak akkor, ha az (1) egyenlőtlenségekkel kifejezett

$$(x; y; z) \in H.$$

A helyettesítést tehát úgy hajtuk végre, hogy az x, y, z változók helyett az (1) egyenlőtlenségekkel megadott gömbi koordináták értékeit helyettesítettük, $dx \, dy \, dz$ helyébe pedig az $r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$ értéket írtuk.

Ennek geometriai magyarázatát a következőképpen adhatjuk meg.

Ha a $\varphi; \vartheta; r$ gömbkoordinátáknak megfelelő feldarabolást a $\varphi = \text{konst}$ síkokkal, a z tengely



10.114 ábra

körül $\vartheta = \text{konst}$ kupfelületekkel és az O körül $r = \text{konst}$ gömbökkel hajtuk végre, akkor a felosztással létrejövő kicsiny térrészek V térfogata (10.114 ábra):

$$\Delta V \approx \varrho \Delta \varphi \cdot r \Delta \vartheta \cdot \Delta r = r^2 \sin \vartheta \Delta r \Delta \varphi \Delta \vartheta.$$

(A ΔV térfogat közelítőleg olyan hasáb térfogatának tekinthető, amelynek ele az r rádiusz vektor irányában Δr , a meridiánkörök irányában $r \Delta \vartheta$, a ϱ sugartű kör irányában $\varrho \Delta \varphi$.)

Ha H az origó körüli R sugartű gömb, akkor H^* a

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ 0 &\leq \vartheta \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

egyenlőtlenségekkel megadott téglá az $(r; \varphi)$ koordináta-rendszerben.

10.5.3.3.3 Ellipszoid koordináták

Bizonyos feladatoknál célszerű ún. ellipszoid koordinátákat használni.

Az ellipszoid koordinátákat a gömbi koordinátákra analógiájára a következőképpen határozzuk meg.

A P pont ellipszoid koordinátái r, φ és θ , ha azok kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi \\ y = br \sin \theta \sin \varphi \\ z = cr \cos \theta. \end{cases}$$

A H tartomány felosztásánál szereplő kis térfogatrészek ΔV térfogata:

$$\Delta V \approx abc r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \varphi \Delta \theta.$$

A hármas integrál:

$$\iiint_H f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{H^*} F(r; \varphi; \theta) abc r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta,$$

ahol

$$F(r; \varphi; \theta) = f(ar \sin \theta \cos \varphi; br \sin \theta \sin \varphi; r \cos \theta).$$

Ha a H integrációs tartomány

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ellipszoid által határolt térrész,}$$

akkor H^* a

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

egyenlőtlenségekkel megadott téglaz az $(r; \varphi; \theta)$ koordináta-rendszerben.

10.5.3.4 Példák hármas integrálókra

1. Határozzuk meg annak a zárt térrésznek a térfogatát, amelyet a

$$z = 18 - 2x^2 - 2y^2 \quad \text{és} \quad z = x^2 + y^2 - 9 \quad \text{egyenletű paraboloidok határolnak.}$$

A két felület metszésvonalának egyenlete:

$$18 - 2x^2 - 2y^2 = x^2 + y^2 - 9, \quad \text{azaz} \quad x^2 + y^2 = 9.$$

A metszésvonal vetülete az $(x; y)$ síkra az origó középpontú, $r = 3$ sugárú kör.

$$z = 18 - 2r^2, \quad \text{illetve} \quad z = r^2 - 9.$$

A térfogat

$$V = \int_{-2\pi}^{2\pi} \int_3^9 \int_{18-2r^2}^{r^2-9} r dr dz = \int_{-2\pi}^{2\pi} \int_3^9 \left[z \right]_{18-2r^2}^{r^2-9} r dr =$$

$$= \int_{-2\pi}^{2\pi} d\varphi \int_3^9 (18 - 2r^2 - r^2 + 9) r dr = \int_{-2\pi}^{2\pi} d\varphi \int_3^9 (27r - 3r^3) dr =$$

$$= \left[\varphi \right]_{-2\pi}^{2\pi} \left[\frac{27}{2} r^2 - \frac{3}{4} r^4 \right]_3^9 = 2\pi \left(\frac{27}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{243}{4} = \pi \cdot 121,5.$$

2. Mekkora annak a H gömbnek a súlya, amelynek fajsúlya a középponttól való távolság négyzetével egyenesen arányos, sugara 4 cm és az arányossági tényező $2 \frac{\text{cm}^3}{\text{pond}}$.

A súly

$$G = \iiint_H 2r^2 dV.$$

Gömbi koordinátákat használva:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta.$$

A határok $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 4$

$$G = 2 \int_{-2\pi}^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^4 r^2 \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = 2 \int_{-2\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^4 r^4 dr =$$

$$= 2 \left[\varphi \right]_{-2\pi}^{2\pi} \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^4 = 4\pi \cdot 2 \cdot \frac{1024}{5} = 1638,4 \quad \text{pond.}$$

3. Számítsuk ki ellipszoid koordinátákkal az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ egyenlettel adott H ellipszoid térfogatát.

$$V = \iiint_H abc r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = abc \int_{-2\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 dr =$$

$$= abc \left[\varphi \right]_{-2\pi}^{2\pi} \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 = abc \cdot 4\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3} abc.$$

10.5.3.5.1 Súlypontszámítás

10.5.3.5 A hármas integrál alkalmazása a mechanikában

Határozzuk meg a térbeli V térfogatu H halmaz súlypontjának koordinátáit! Legyen a térrész homogén, egyenletű tömegsűrűségű ($\bar{\rho} = 1$). (Homogén sűrűségű test súlypontja független a sűrűségtől.)

A súlypont definíciója szerint:

$$x_S = \frac{M_{yz}}{M}, \quad y_S = \frac{M_{xz}}{M}, \quad z_S = \frac{M_{xy}}{M}.$$

$$M = V = \int \int \int_H dx dy dz.$$

Összük fel a H halmazt H_i részhal-
mazzá:

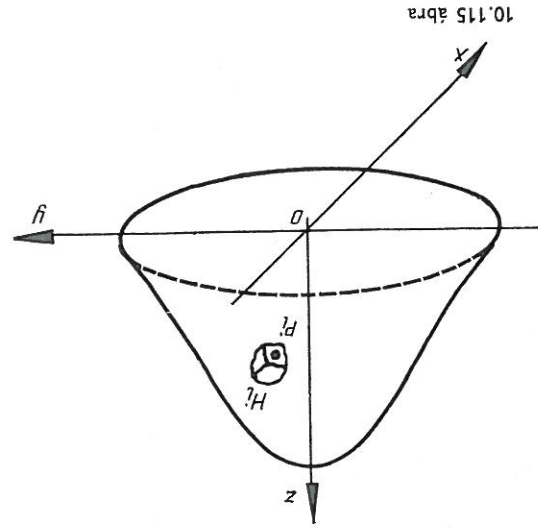
$$H = \bigcup_{i=1}^n H_i.$$

Vegyük fel a H_i halmazon a tetszős-
szerinti $P_i = P(x_i, y_i, z_i)$ pontot.
Tömörítsük H tömeget a P_i pontba.
(10.115 ábra).
A H_i részhalmaznak az (x, y) síkra
vonatközo statikai nyomatéka, mivel
 $\bar{q} = 1$,

$$\Delta M_{xy(i)} \approx z_i \Delta V_i,$$

ahol ΔV_i a H_i részhalmaz térfogata.
Összegezve

$$\sum_{i=1}^n \Delta M_{xy(i)} \approx \sum_{i=1}^n z_i \Delta V_i.$$



10.115 ábra

Mivel egymásba nem nyúló térrészek statikai nyomatékai összegeződnek, a bal oldali
összeg M_{xy} .
A jobb oldal a $\int \int \int_H z dV = \int \int \int_H z dx dy dz$ hármas integrál közelítő összege.
Ha a felosztás minden határon túl finomul, a közelítő összeg határértéke a hármas integrál.
Így

$$M_{xy} = \int \int \int_H z dx dy dz.$$

Hasonlóan

$$M_{xz} = \int \int \int_H y dx dy dz.$$

$$M_{yz} = \int \int \int_H x dx dy dz.$$

A homogén sűrűségű H térrész súlypontjának koordinátái:

$$x_S = \frac{\int \int \int_H x dx dy dz}{\int \int \int_H dx dy dz}; \quad y_S = \frac{\int \int \int_H y dx dy dz}{\int \int \int_H dx dy dz}; \quad z_S = \frac{\int \int \int_H z dx dy dz}{\int \int \int_H dx dy dz}.$$

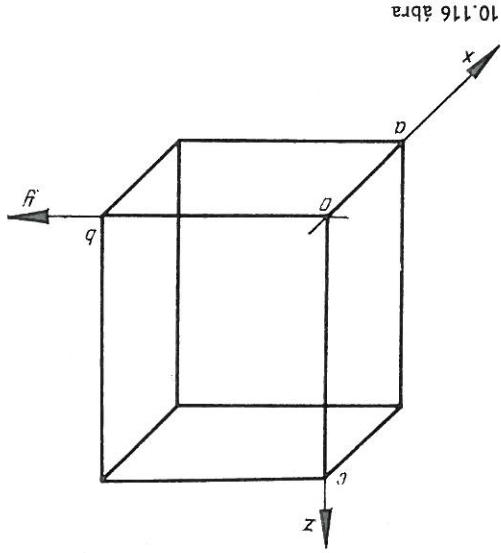
Ha a test sűrűsége nem homogén, hanem a P pont függvénye, azaz

$$\bar{q} = \bar{q}(P) = \bar{q}(x, y, z),$$

$$x_S = \frac{\int \int \int_H \bar{q}(x, y, z) x dV}{\int \int \int_H \bar{q}(x, y, z) dV}; \quad y_S = \frac{\int \int \int_H \bar{q}(x, y, z) y dV}{\int \int \int_H \bar{q}(x, y, z) dV}; \quad z_S = \frac{\int \int \int_H \bar{q}(x, y, z) z dV}{\int \int \int_H \bar{q}(x, y, z) dV}.$$

Példák

1. Számítsuk ki a 10.116 ábra szerint elhelyezett a, b, c élű homogén derékszögű H hasáb súlypont-
jának koordinátáit!



10.116 ábra

A sűrűséget egységnyiinek vesszük.
A hasáb térfogatát ismeretnek véve:

$$M = abc.$$

$$M_{xz} = \int \int \int_H z dx dy dz = \int_a^0 \int_b^0 \int_c^0 z dx dy dz = \int_a^0 \int_b^0 \left[\frac{z^2}{2} \right]_c^0 dy dz = \int_a^0 \left[\frac{z^2}{2} \right]_c^0 dz = \frac{abc^2}{2}.$$

$$z_S = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\frac{abc^2}{2}}{abc} = \frac{c}{2}.$$

Analóg módon adódik, hogy

$$x_s = \frac{a}{2}, \quad y_s = \frac{b}{2}, \quad z_s = 0.$$

2. Számítsuk ki az R sugarú homogén, $\varrho = 1$ sűrűségű félgömb súlypontjának koordinátáit! A szimmetria miatt (10.117 ábra):

$$x_s = 0, \quad y_s = 0, \quad z_s = \frac{M_{yz}}{M}.$$

Gömbi koordinátákat használva, a határok:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq R.$$

A félgömb tömege:

$$M = \frac{2R^3\pi}{3}.$$

Az $(x; y)$ síkra vonatkozó statikai nyomaték:

$$M_{xy} = \int_0^H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R z \, dV = \int_0^H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos \theta \, r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi \frac{1}{4} \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{8} R^4.$$

A súlypont z_s koordinátája:

$$z_s = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{\pi}{8} R^4}{\frac{2R^3\pi}{3}} = \frac{3}{8} R.$$

3. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ egyenletű ellipszoid $y > 0$ részének súlypontját, ha a test homogén és egységsűrűségű (10.118 ábra). Használjunk ellipszoid koordinátákat:

$$x = ar \cos \varphi \sin \theta, \quad y = br \sin \varphi \sin \theta, \quad z = cr \cos \theta,$$

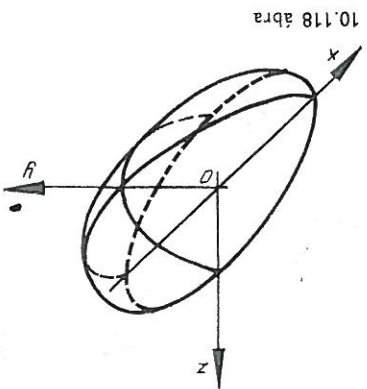
$$dV = abc r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Peldánkban az integrációs határok:

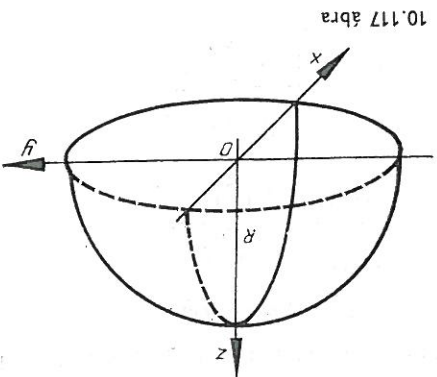
$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Szimmetriakok miatt:

$$x_s = 0, \quad z_s = 0, \quad y_s = \frac{M_{xz}}{M}.$$



10.118 ábra



10.117 ábra

A tömeg — az ellipszoid térfogatát ismeretnek véve —

$$M = \frac{2\pi}{3} abc.$$

$$M_{xz} = \int_0^H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R y \, dV = \int_0^H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R br \sin \varphi \sin \theta \, abc r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= abc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr =$$

$$= abc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sin \theta \cos \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R =$$

$$= abc \cdot 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{\pi} abc.$$

Igy a súlypont y_s koordinátája:

$$y_s = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\frac{4}{\pi} abc}{\frac{2abc\pi}{3}} = \frac{3}{8} b.$$

Forgástestek súlypontja

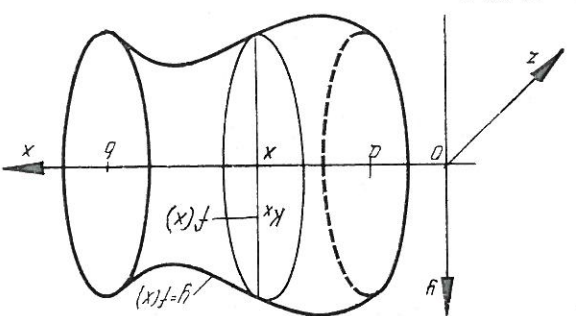
Legyen $y = f(x)$ az $a \leq x \leq b$ intervallumban pozitív és folytonosan differenciálható. Forgassuk meg az $y = f(x)$ egyenletű görbe $a \leq x \leq b$ intervallumbeli szakaszát az x tengely körül, és határozzuk meg a keletkezett forgástest súlypontját, feltételezve, hogy az homogén sűrűségű, és a sűrűség $\varrho = 1$ (10.119 ábra). Szimmetriakok miatt

$$y_s = 0, \quad z_s = 0,$$

$$x_s = \frac{M_{yz}}{M}.$$

$$M = V.$$

A forgástest térfogata (8.3.4.1 pont) 10.119 ábra



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx = \pi \int_a^b y^2 \, dx.$$

$$M_{yz} = \int_a^b \int_0^{f(x)} \int_0^{2\pi} x \, dV = \int_a^b x \left[\int_0^{f(x)} \int_0^{2\pi} dT \right] dx,$$

ahol K_x az x abszcisszájú pontban az (y, z) síkkal párhuzamos sík által a forgástestből kismetszett körtartomány.

$$\int \int_{K_z} dT = f_z^2(x) \pi = y^2 \pi.$$

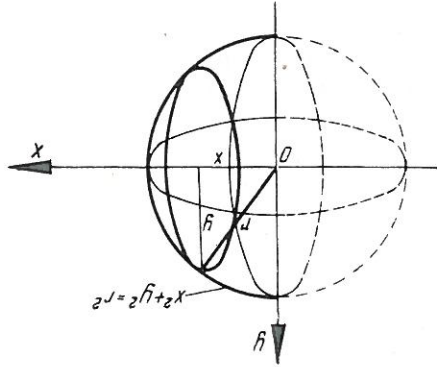
Igy

$$M_{yz} = \pi \int_b^a x f_z^2(x) dx = \pi \int_b^a xy^2 dx.$$

Tehát

$$x_s = \frac{\pi \int_b^a xy^2 dx}{\pi \int_b^a y^2 dx}, \text{ azaz}$$

$$x_s = \frac{\int_b^a xy^2 dx}{\int_b^a y^2 dx}.$$



10.120 ábra

1. Határozzuk meg a félgömb súlypontját! Legyen a gömb középpontja az origóban. A félgömböt az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű kör $x \geq 0, y \geq 0$ negyedének x tengely körüli forgatásával nyerjük (10.120 ábra). Ha $\varrho = 1$,

Ha $\varrho = 1$,

$$M = \frac{2\pi^3 r}{3}, \quad y^2 = r^2 - x^2.$$

$$M_{yz} = \pi \int_r^0 xy^2 dx = \pi \int_r^0 x(r^2 - x^2) dx =$$

$$= \pi \int_r^0 (xr^2 - x^3) dx = \pi \left[\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_r^0 = \pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) = \pi \frac{r^4}{4}.$$

$$x_s = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\frac{2\pi^3 r}{3}} = \frac{3}{8}.$$

A súlypont koordinátái:

$$x_s = \frac{3}{8}; \quad y_s = 0; \quad z_s = 0.$$

Hasonlítsuk össze az eredményt az előző pont 2. példájának eredményével!

2. Határozzuk meg az r sugarú, m magasságú egyenes körkúp súlypontját! A 10.121 ábra szerinti elhelyezéssel:

$$y_s = 0, \quad z_s = 0.$$

$$M = \frac{3}{2} \pi m.$$

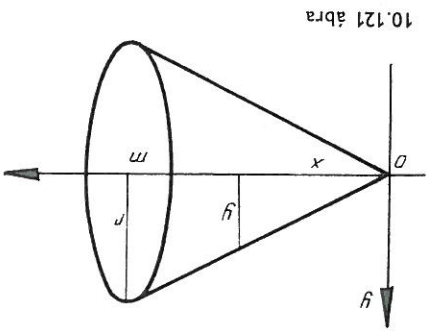
$$y = \frac{m}{r} x.$$

$$M_{yz} = \pi \int_m^0 xy^2 dx = \pi \int_m^0 x \frac{m^2}{r^2} x^2 dx =$$

$$= \pi \frac{m^2}{r^2} \int_m^0 x^3 dx = \pi \frac{m^2}{r^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_m^0 = \pi \frac{m^2}{r^2} \frac{m^4}{4} = \pi \frac{m^6}{4r^2}.$$

$$x_s = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\frac{\pi m^6}{4r^2}}{\frac{3}{2} \pi m} = \frac{4}{3} \frac{m^5}{r^2}.$$

$$x_s = \frac{4}{3} m, \quad y_s = 0, \quad z_s = 0.$$



10.121 ábra

Definíció. A $\left\{ P_i \right\}_n$ pontrendszernek az a forgástengelyre vonatkozó tehetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_a = \sum_{i=1}^n \Theta_{a(i)} = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2,$$

ahol m_i a P_i pont tömege, d_i P_i -nek az a forgástengelytől való távolsága.

10.5.3.5.2.1 Testek tehetlenségi nyomatéka

Tekintsünk a térben egy mérhető térfogatú H halmazt, amelyet anyaggal kitöltöttnek foghatunk fel, és amelynek sűrűsége valamely $\varrho(x, y, z)$ függvény. Vegyünk fel egy a forgástengelyt, és vizsgáljuk meg, hogyan definiálhatjuk a test tehetlenségi nyomatékát. Osszuk fel H -t mérhető térfogatú H_i részekre, és szemeljünk ki mindegyik részben egy P_i pontot ($P_i = P(x_i, y_i, z_i)$).

A tehetetlenségi nyomaték egy közelítő értéket kapjuk, ha H_i -ben a $\bar{q}(x; y; z)$ sűrűségfüggvényt állandónak, $\bar{q}(P_i)$ -nek vesszük, és H_i így adódó tömegét $m_i = \bar{q}(P_i) V(H_i)$ -t a P_i pontban tömörítjük (10.123 ábra). Ha egy P pont távolságát a -tól $d(x; y; z)$ -vel, P_i pontét $d(P_i)$ -vel jelöljük,

$$\Theta_a \approx \sum_{i=1}^n d^2(P_i) \bar{q}(P_i) V(H_i).$$

A jobb oldali összeg a

$$\iiint_V d^2(x; y; z) \bar{q}(x; y; z) dx dy dz$$

hármás integrál közelítő összege, tehát az anyaggal kitöltött H halmaz a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát a

$$\Theta_a = \iiint_H d^2(x; y; z) \bar{q}(x; y; z) dx dy dz$$

egyenlőséggel határoztuk meg. A koordináta-rendszer alkalmas megválasztásával mindig elérhetjük, hogy a egybeesik egyenlőséggel határoztuk meg. A koordináta-rendszer alkalmas megválasztásával mindig elérhetjük, hogy a egybeesik egyenlőséggel határoztuk meg.

nyomatékok):

$$\Theta_x = \iiint_H \bar{q}(x; y; z) (y^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$\Theta_y = \iiint_H \bar{q}(x; y; z) (x^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$\Theta_z = \iiint_H \bar{q}(x; y; z) (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Ugyanis a $P(x; y; z)$ pontnak az x tengelytől való távolsága $\sqrt{y^2 + z^2}$, az y tengelytől való távolsága $\sqrt{x^2 + z^2}$, a z tengelytől való távolsága $\sqrt{x^2 + y^2}$ (10.124 ábra).

A poláris tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_0 = \iiint_H \bar{q}(x; y; z) (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \quad (10.124 \text{ ábra}).$$

Ha a sűrűség homogén:

$$\Theta_x = \bar{q} \iiint_H (y^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$\Theta_y = \bar{q} \iiint_H (x^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$\Theta_z = \bar{q} \iiint_H (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

$$\Theta_0 = \bar{q} \iiint_H (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Steiner tételle (tehetetlenségi nyomatéokra)

Tétel. Ha az M tömegű test tehetetlenségi nyomatéka valamely, a test súlypontján átmenő s tengelyre Θ_s , akkor e tengellyel párhuzamos g tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

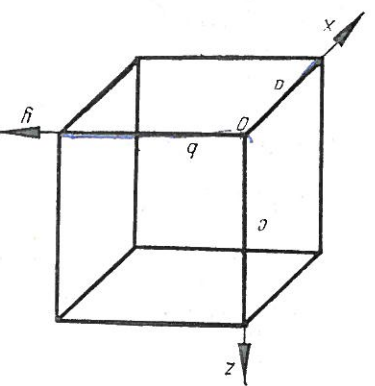
$$\Theta_g = \Theta_s + a^2 M,$$

ahol a két tengely távolsága. A tétel bizonyítását nem közöljük. A bizonyítás a síkidomok másodrendű nyomatékára vonatkozó Steiner-tétel bizonyításának analógiájára történhet.

Példák

1. Számítsuk ki a 10.125 ábrán látható $\bar{q}$ sűrűségű, a, b, c élű hasábnak a z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

10.125 ábra



$$\begin{aligned} \Theta_z &= \bar{q} \iiint_H (x^2 + y^2) dV = \bar{q} \int_0^c \int_0^b \int_0^a (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \bar{q} \int_0^c \int_0^b \left[x^2 z + y^2 z \right]_0^a dy dz = \bar{q} \int_0^c \left[x^2 z + y^2 z \right]_0^b dy dz \\ &= \bar{q} \int_0^c \left[x^2 y + y^3 \right]_0^b dy dz = \bar{q} \int_0^c \left[\frac{1}{2} b^2 x^2 + \frac{1}{4} b^4 \right] dz \\ &= \bar{q} \left[\frac{1}{2} b^2 x^2 + \frac{1}{4} b^4 \right]_0^a dz = \bar{q} \left[\frac{1}{2} a^2 b^2 + \frac{1}{4} b^4 \right] c \\ &= \bar{q} c \left[\frac{1}{2} a^2 b^2 + \frac{1}{4} b^4 \right] \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b \left(x^2 b + \frac{3}{b^2} \right) dx = \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{b^3}{3} x^3 + \frac{3}{b^2} x \right]_a^b = \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{b^3}{3} b^3 + \frac{3}{b^2} b \right] = \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{b^6}{3} + \frac{3}{b} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{3}{b^6} (a^2 + b^2) \right] = \frac{3}{b^6} (2a) = \frac{6a}{b^6}
 \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg az R sugarú, h magasságú, ϱ sűrűségű, homogén, körhenger alakú test tehetőségi nyomatékát *a)* a henger szimmetriatengelyére, *b)* a súlyponton átmenő, alapjával párhuzamos tetszőleges tengelyre! Hengerkoordinátákat használunk.

a) Válasszuk szimmetriatengelynek a z tengelyt (10.126 ábra):

$$\Theta_z = \varrho \iiint_V (x^2 + y^2) dV.$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq z \leq h \\ 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

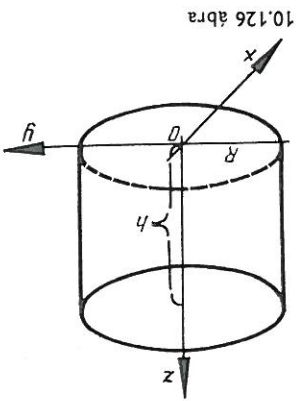
$$dV = r dr d\varphi dz$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_z &= \varrho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dz d\varphi dr = \varrho \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R d\varphi dz = \varrho \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi dz \\
 &= \varrho \frac{R^4}{4} h \int_0^{2\pi} d\varphi = \varrho \frac{R^4}{4} h \cdot 2\pi = M \frac{R^2}{2}.
 \end{aligned}$$

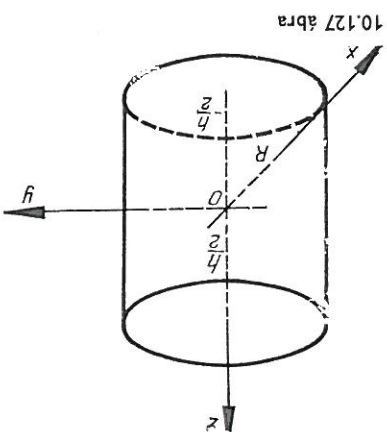
b) A súlyponton átmenő tetszőleges tengelynek válasszuk az x tengelyt (10.127 ábra)!

$$\Theta_x = \varrho \iiint_V (y^2 + z^2) dV.$$

$$y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \varphi + z^2.$$



10.126 ábra



10.127 ábra

$$\Theta_z = \varrho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) r dz dr d\varphi =$$

$$= \varrho \int_0^h \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3 \sin^2 \varphi dr + \int_0^R r z^2 dr \right) d\varphi =$$

$$= \varrho \int_0^h \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{R^2}{2} z^2 \right) d\varphi dz =$$

$$= \varrho \left[\frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} z^2 d\varphi \right]_0^h =$$

$$= \varrho \left(\frac{R^4}{4} \cdot \pi + \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi z \right) \Big|_0^h = \frac{\varrho \pi R^4 h}{4} + \varrho \pi R^2 h^3 = M \frac{R^2}{12} (3R^2 + h^2).$$

3. Határozzuk meg a homogén, ϱ sűrűségű, R sugarú gömb tehetőségi nyomatékát a középpontján átmenő tetszőleges irányú tengelyre (10.128 ábra)!

$$\Theta_z = \varrho \iiint_V (x^2 + y^2) dV.$$

Használjuk gömbi koordinátákat.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta, \\ x^2 + y^2 &= r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \theta \\ dV &= r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \end{aligned}$$

$$(x^2 + y^2) dV = r^4 \sin^3 \theta dr d\varphi d\theta.$$

Az integrációs határok:

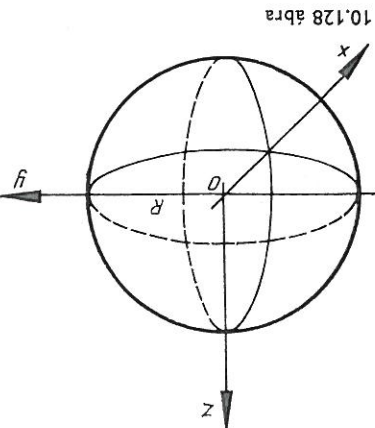
$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$\Theta_z = \varrho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^3 \theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= \varrho \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta d\varphi = \varrho \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi d\varphi =$$

$$= \varrho \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left[-(-1) + \frac{1}{3}(-1) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] d\varphi = \varrho \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} d\varphi =$$

$$= \varrho \frac{8R^5}{15} \cdot 2\pi = M \frac{R^2}{5}.$$



10.128 ábra

4. Számítsuk ki a ϱ sűrűségű, m magasságú, R sugarú kúp forgástengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát! A kúpfejlét a

$$z = \frac{R}{m} y$$

egyenletű egyenes forgásával keletkezik, így egyenlete:

$$z = \frac{R}{m} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (10.129 \text{ ábra}).$$

Hengerkoordinátákat véve:

$$z = \frac{R}{m} r.$$

$$\Theta_z = \varrho \int \int \int r^2 dV.$$

Hengerkoordinátákkal a határok:

$$\frac{R}{m} r \leq z \leq m,$$

$$0 \leq r \leq R,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$\Theta_z = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_m^{\frac{R}{m}r} r^2 dz r dr d\varphi =$$

$$= \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_m^{\frac{R}{m}r} \left[z \right]_m^{\frac{R}{m}r} r^3 dr = \varrho \cdot 2\pi \int_R \left(m r^3 - \frac{m}{R} r^4 \right) dr =$$

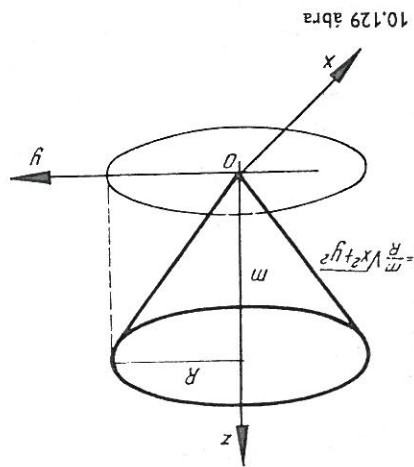
$$= \varrho 2\pi \left[m \frac{r^4}{4} - \frac{R}{5} \frac{r^5}{5} \right]_R^{\frac{R}{m}} = \varrho \cdot 2\pi \left(m \frac{R^4}{4} - \frac{R^5}{5} \right) =$$

$$= \varrho 2\pi \frac{m R^4}{20} = \varrho \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{10}{3 R^2} = M \frac{10}{3 R^2}.$$

10.5.3.5.2.2 Forgástehtetlenségi nyomatéka

Legyen $y = f(x)$ az $a \leq x \leq b$ intervallumban pozitív és folytonosan differenciálható. Forgassuk meg az $y = f(x)$ egyenletű görbe $a \leq x \leq b$ intervallumbeli szakaszát az x tengely körül. Határozzuk meg az így keletkezett testnek az x tengelyre való tehetetlenségi nyomatékát, feltéve, hogy a forgástehtetlenségi homogén és ϱ sűrűségű. Legyen az x ponthoz tartozó és az $(y; z)$ síkkal párhuzamos keresztmetszet K_x (lásd a 10.119 ábrát).

$$\Theta_x = \varrho \iiint_H (y^2 + z^2) dV = \varrho \int_a^b \left[\iint_{K_x} (y^2 + z^2) dy dz \right] dx =$$



10.129 ábra

$$z = \frac{R}{m} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tehát

$$\Theta_x = \frac{\pi \varrho}{2} \int_b^a [f(x)]^4 dx.$$

Példák

1. Határozzuk meg az R sugarú, ϱ sűrűségű gömb középpontján átmenő tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát! Legyen a tengely az x tengely, a középpont az origóban.

$$[f(x)]^4 = y^4; \quad y^2 = R^2 - x^2 \quad (\text{lásd a 10.128 ábrát}).$$

$$\Theta_x = \frac{\pi \varrho}{2} \int_R^{-R} y^4 dx = \frac{\pi \varrho}{2} \int_R^{-R} (R^2 - x^2)^2 dx =$$

$$= \pi \varrho \int_R^0 (R^4 - 2x^2 R^2 + x^4) dx = \pi \varrho \left[R^4 x - \frac{2}{3} x^3 R^2 + \frac{1}{5} x^5 \right]_R^0 =$$

$$= \pi \varrho \left(R^5 - \frac{2 R^5}{3} + \frac{R^5}{5} \right) = \pi \varrho \frac{8 R^5}{15} = \varrho \frac{4 R^5 \pi}{3} \cdot \frac{5}{2} = M \frac{2 R^2}{5}.$$

2. Határozzuk meg az R sugarú, h magasságú, ϱ sűrűségű kúp tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. A 10.121 ábra szerinti elhelyezéssel:

$$\Theta_x = \frac{\pi \varrho}{2} \int_m^0 y^4 dx.$$

Mivel

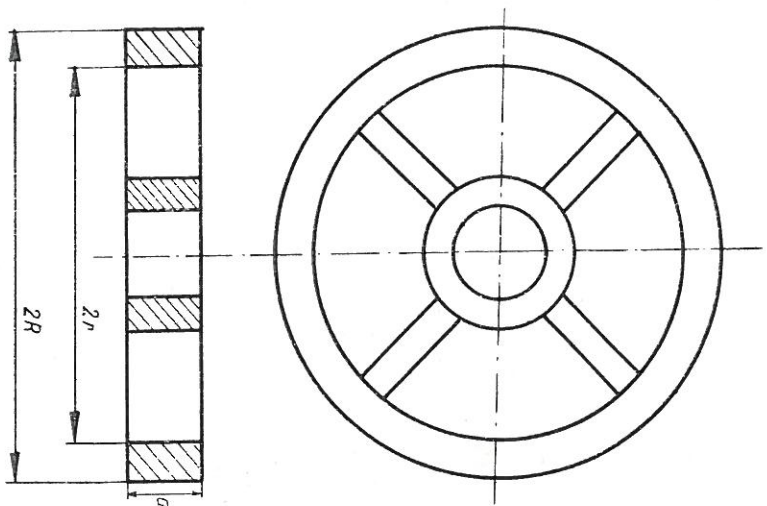
$$y = \frac{R}{m} x,$$

$$\Theta_x = \frac{\pi \varrho}{2} \frac{R^4}{m^4} \int_m^0 x^4 dx = \frac{\pi \varrho}{2} \frac{R^4}{m^4} \frac{m^5}{5} = \frac{10}{3} \varrho R^2 \pi m R^2 = \frac{10}{3} M R^2.$$

Hasonlítsuk össze az 1. és 2. példa eredményét az előző pontban használt módszerrel kapott eredményekkel!

3. Számítsuk ki egy lendkerék tehetetlenségi nyomatékát!

Legyen a lendkerék sűrűsége ϱ , a koszorú sugarai R és r , szélessége b . A gyűrűt megkapjuk, ha egy téglalapot az x tengely körül forgatunk.



10.130 ábra

A téglalapot $y = r$ és $y = R$; $x = 0$, $x = b$ egyenesek határolják (10.130 ábra).

A koszorú tehetetlenségi nyomatéka az x tengelyre

$$\Theta_x = \frac{\pi d}{2} \int_0^b (R^4 - r^4) dx = \frac{\pi b d}{2} (R^4 - r^4).$$

Mivel a koszorú (hengergyűrű) tömege $M = \pi b d (R^2 - r^2)$,

$$\Theta_x = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2).$$

A kerékagy és küllők tehetetlenségi nyomatéka a koszorúéhoz képest elhanyagolható, mert tömegük és töleg a tengelytől való távoltságuk négyzete a gyűrűhöz képest elhanyagolható. Így a lendkerek tehetetlenségi nyomatéka közelítőleg

$$\Theta_x \approx \frac{1}{2} M (R^2 + r^2).$$

A gyakorlatban szokás a tehetetlenségi nyomatékot

$$\Theta_x = MR^2\text{-nek venni,}$$

ahol M az egész lendkerek tömege és

$$R = \frac{R+r}{2} \quad \text{a közepes sugár.}$$

11. VEKTORANALÍZIS

A vektorfüggvény fogalma. A matematikai analízisben az eddig vizsgált függvényeknél a független változók és függvényük skáláris mennyiségek voltak. A fizikában igen sokszor a változó mennyiségek vektormennyiségek. Ha például egy mozgó pont sebességvektorát vizsgáljuk mint az idő függvényét, a független változó, az idő skálár, függvénye, a sebesség vektor. Az elektromos térerősség vektor, függ a pont helyétől, azaz helyvektorától: a független változó, a helyvektor vektor, a függvény, az elektromos térerősség szintén vektor. Ha viszont az elektromos potenciált, amely skálár, a helyvektor függvényeként vizsgáljuk, a független változó vektor, a függvény skálár. Azokat a függvényeket, amelyekben a független változó vagy a függvény vektormennyiség, *vektorfüggvényeknek* nevezzük. A matematikának a vektorfüggvényekkel foglalkozó ága a vektoranalízis.

11.1 VEKTOR-SKÁLÁR FÜGGVÉNYEK

11.1.1 Egyváltozós vektor-skálár függvények

Az olyan vektorfüggvényeket, amelyekben a független változó skálár, a függő változó vektor, vektor-skálár függvényeknek nevezzük. A skálármennyiség minden szóba jöhető értéknek megfelel az $\mathbf{r}$ vektormennyiség egy meghatározott értéke. A függvényt az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ szimbólummal jelöljük, a vektor-skálár függvény elnevezés a leírás sorrendjét jelöli. t a független változó vagy paraméter. Az $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektor x, y, z komponensei a t paramétertől függnek.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

azaz az $\mathbf{r}$ vektor-skálár függvény:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Mivel az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vektor-skálár függvényben az $\mathbf{r}$ vektor komponensei a t paramétertől függenek, a függvény megadható három egyváltozós skálár-skálár függvényekkel is:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Szemléltetés. Minden szóba jöhető értéke meghatározza az $\mathbf{r}$ vektor komponenseit, azaz az $\mathbf{r}$ vektort. Ábrázoljuk a t paraméter függvényeként kapott x, y, z koordinátákat a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben. Egy t értékhez egy P pont, azaz egy $\mathbf{r}$ helyvektor tartozik. Ha t értéke változik, vele változik a P pont, az $\mathbf{r}$ helyvektor egy térgörbét ír le (11.1 ábra).

Tehát az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vektor-skálár függvény képe általában térgörbe.

Példák

1. Milyen térgörbe az

$$\mathbf{r} = (t+1)\mathbf{i} + (3t-2)\mathbf{j} + (-2t-1)\mathbf{k}$$

vektor-skálár függvény képe?

$$(1) \quad \begin{cases} x = t+1, \\ y = 3t-2, \\ z = -2t-1 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer nem más, mint egy egyenes paraméteres egyenletrendszere.

Az egyenletről a t paraméter kiküszöbölve:

$$\frac{x-1}{t+1} = \frac{y+2}{3t-2} = \frac{z+1}{-2t-1}$$

Az egyenes átmegy a $P_0(1; -2; -1)$ ponton és párhuzamos az $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ vagy röviden $\mathbf{a} = [1; 3; -2]$ vektorral.

2. Milyen térgörbe fel meg az

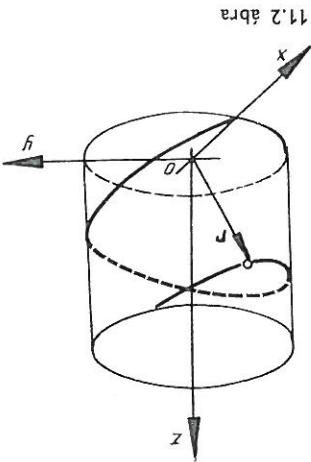
$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$$

vektor-skálár függvénynek?

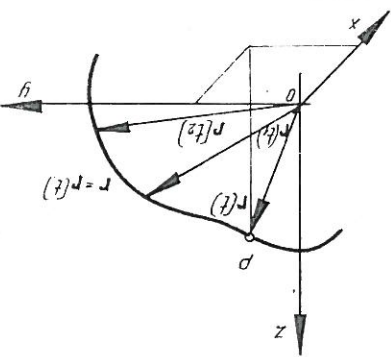
A vektor-skálár függvényt a következő három skálár függvény helyettesítheti:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt \end{cases}$$

A vektor-skálár függvény az a sugarú körhengerre írt csavarvonal egyenlete (11.2 ábra).
A koordináták kielégítik az $x^2 + y^2 = a^2$ hengerefelület egyenletét.



11.2 ábra



11.1 ábra

Ugyanis

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2.$$

Az (1) egyenletben a t paraméter minden értékét felvehet.

Ha a 11.2 ábra szerint $z \approx 0$, az értelmezési tartomány:

$$0 \leq t < +\infty.$$

3. Kimutatjuk, hogy az

$$\mathbf{r} = f(t) \cos t \mathbf{i} + f(t) \sin t \mathbf{j} + f(t) \mathbf{k}$$

egyenlet küpfelületre írt görbe egyenlete.

Határozzuk meg, hogy mekkora szöget zár be a görbe egy pontjának helyvektora az z tengely pozitív ágával! Felteesszük, hogy $f(t) \neq 0$.

$$\mathbf{r}(t) = f(t) \cos t \mathbf{i} + f(t) \sin t \mathbf{j} + f(t) \mathbf{k}.$$

$$\mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k}$$

A két vektor által bezárt szög koszinusza:

$$\cos \alpha = \frac{f(t)}{\sqrt{f^2(t) \cos^2 t + f^2(t) \sin^2 t + f^2(t)}} = \frac{f(t)}{f(t) \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{konst.}$$

A pont rádiuszvektora és a z tengely pozitív ága által bezárt szög állandó, ez azt jelenti, hogy a görbe küpfelületen van.
Másképp az $x = f(t) \cos t$, $y = f(t) \sin t$, $z = f(t)$ egyenletekből

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

tehát a görbe pontjai kielégítik a küpfelület egyenletét.
A küp csúcsa az origóban olyan t_0 -nál van, ahol $f(t_0) = 0$.

Küpos csavarvonalat jelent a következő egyenlet:

$$\mathbf{r}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

(11.3 ábra).

Ha $z \approx 0$, az értelmezési tartomány:

$$0 \leq t < +\infty.$$

Ugancsak küpos csavarvonal egyenlete:

$$\mathbf{r}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}.$$

$$x = e^t \cos t; \quad y = e^t \sin t; \quad z = e^t.$$

Az értelmezési tartomány:

$$-\infty < t < +\infty.$$

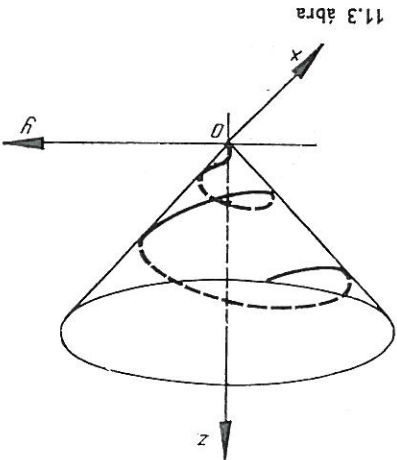
Ha $t \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$, az origót kapjuk.

4. Írjuk fel az

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y^2 + z^2 = 20 \end{cases}$$

egyenletrendszerű térgörbe vektor-skálár egyenletét!

Tegyük fel, hogy $x \approx 0$, $y \approx 0$, $z \approx 0$.
A térgörbe az $x^2 + y^2 = 5$ és $y^2 + z^2 = 20$ hengerek áthatási görbéje.



11.3 ábra

Válasszuk paraméternek az x változót:

$$x = t; \quad y = \sqrt{5-t^2}; \quad z = \sqrt{20-(5-t^2)} = \sqrt{15+t^2}.$$

Az áthatási görbe:

$$r(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{5-t^2}\mathbf{j} + \sqrt{15+t^2}\mathbf{k}.$$

Például a $t = 1$ és $t = 2$ értékekhez tartozó helyvektorok:

$$r = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad \text{és} \quad r = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{19}\mathbf{k}.$$

5. Viviani-féle görbe

Allapítsuk meg az

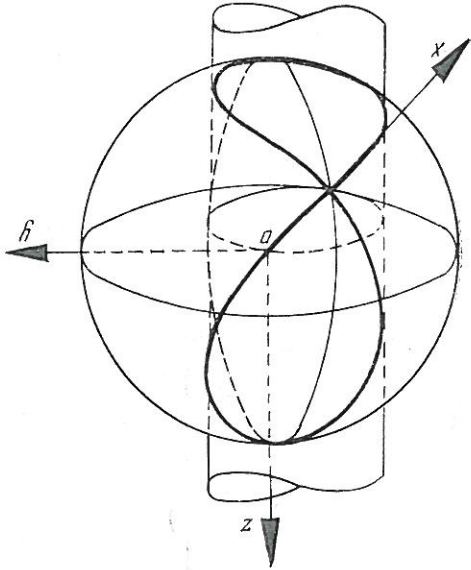
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{gömb és az}$$

$$x^2 - Rx + y^2 = 0 \quad \text{henger}$$

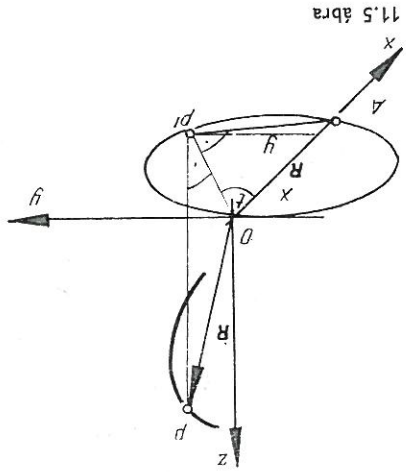
áthatási görbéjének, az ún. Viviani-féle görbének az egyenletét (11.4 ábra).

A henger egyenlete így írható:

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}, \quad \text{sugara } \frac{R}{2}.$$



11.4 ábra



11.5 ábra

A $P'OP$ és $P'O A$ derékszögű háromszögek egybevágóságából következik (11.5 ábra), hogy OP -nek az $(x; y)$ síkhoz való hajlásszöge is t .

$$OP = R.$$

A P pont a definíció értelmében a gömbön is van. Ezért

$$OP' = OA \cos t = R \cos t \quad (11.5 \text{ ábra}).$$

Válasszunk a $P'O A$ $\angle = t$ szöget:

A görbe a hengeren van. Legyen a görbe P pontjának vetülete az $(x; y)$ síkra P' . Ha paraméternek

7. Allapítsuk meg, hogy a lengőkéses reparitkító egy foga milyen típusú görbét ír le működés közben. A ritkító egy fogát kulisszás forgattyús hajtómű mozgatja. A fog hegye tehát a ritkító gép álló hely-

(a, b és c nem lehet egyszerre zérus) sík egyenletét.

$$ax + by + cz = d$$

görbe síkgörbe, ha koordinátái kielégítik valamely

$$r = r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Általában az

a görbe az $(x; z)$ koordinátasíkkal párhuzamos $y = b$ síkban van.

Ha pl. $y(t) = b$,

nátasíkkal párhuzamos síkban fekszik.

egyenletben valamelyik koordináta azonosan nulla, a görbe az egyik koordinátasíkjában van. Így ha $z(t) = 0$, a görbe az $(x; y)$ síkban van. Ha pedig az egyik koordináta állandó, a görbe az egyik koordi-

Ha az $r = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

6. Síkgörbék egyenlete

A t paraméter $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban változik.

a gömb, mind a henger egyenletét.

A koordinátákat behelyettesítve könnyen kimutathatjuk, hogy az egyenletrendszer kielégíti mind

$$z = R \sin t,$$

$$y = R \sin t \cos t,$$

$$x = R \cos^2 t,$$

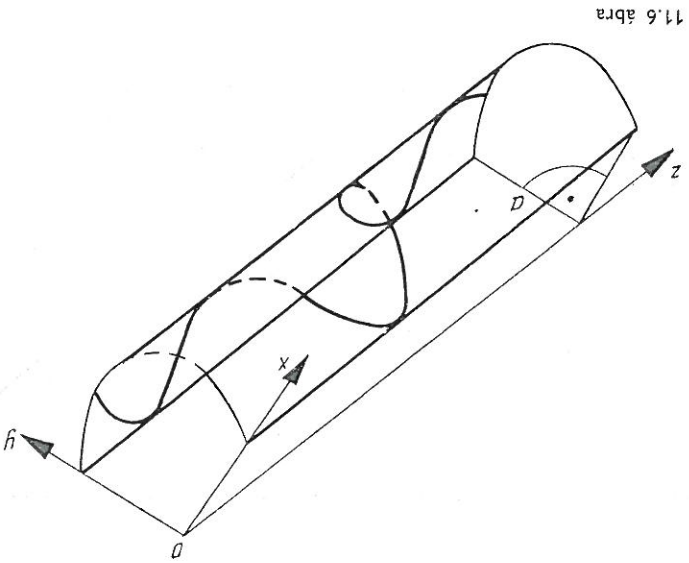
Tehát a Viviani-féle görbe egyenletrendszere:

$$z = \pm \sqrt{R^2 - OP'^2} = \pm \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 t} = R \sin t.$$

$$y = OP' \sin t = R \sin t \cos t,$$

$$x = OP' \cos t = R \cos^2 t.$$

A P pont koordinátái



11.6 ábra

zetben ingamozgást végez, vagyis vontatás közben hengerfelület egy szakaszára szinusz-szerű görbét ír. Írjuk le a görbét, ha az ingamozgás nyílásszöge 90° . Helyezzük el a koordináta-rendszer a 11.6 ábrán látható módon.

A haladó mozgás a z tengely irányában történik; az ingamozgás két szélső helyzete pedig az x és y tengelyre esnek. Legyen a kést tartó rúd hossza a . Akkor a mozgás vetülete az (x, y) síkra az a sugarú kör első negyede. Ezt úgy írjuk le, ha az x és y komponenseket

$$x = a |\cos t|$$

$$y = a |\sin t| \quad \text{nek vesszük. Ha a vontatás } b \text{ sebességgel történik, akkor a kés egy}$$

pontja az

$$r(t) = a |\cos t| i + a |\sin t| j + b r k$$

térgörbét írja le.

A t paraméter megválasztása. A térgörbe egyenletében a t paraméter helyett más paramétert is választhatunk. Válasszuk pl. az

$$r = +\sqrt{t} i + (t-2)j + \sqrt{t} k$$

térgörbe $0 \leq t \leq 1$ szakaszán

$$r = \sqrt{t} \quad \text{paramétert. Ekkor } t = t^2.$$

$$x = \sqrt{t} = t^2; \quad y = t-2 = t^2-2; \quad z = t^2,$$

$$r = t^2 i + (t^2-2)j + t^2 k.$$

Altában az

$$r = r(t) \quad \text{egyenletben}$$

akkor válasszhatjuk a t paraméter helyett a τ paramétert, ha $t = \varphi(\tau)$ függvény a megadott intervallumban monoton és folytonos, tehát inverze a $\tau = \varphi^{-1}(t) = g(t)$ függvény létezik.

Ekkor $r = x[\varphi(\tau)]i + y[\varphi(\tau)]j + z[\varphi(\tau)]k$ a térgörbe egy más módon paraméterezett alakja $t_1 \leq t \leq t_2$ nek megfelelő $t_1 \leq \tau \leq t_2$ szakaszon.

Az $r = r(t)$ egyenletben a t paraméternek különböző jelentése lehet.

Ha t időt jelent

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

az egyenlet egy mozgó pont pályagörbéje az idő függvényeként.

11.1.1.1 Vektor-skalár függvények határértéke és folytonossága

Vektor-skalár függvények határértéke

Definíció. Az $r = r(t)$ vektor-skalár függvény határértéke $t \rightarrow t_0$ esetén az r_0 vektor, ha bármely $\varepsilon > 0$ tetszős szerinti kis pozitív számhoz megadható δ úgy, hogy $|r - r_0| < \varepsilon$, ha

$$|t - t_0| < \delta; \text{ ahol } \delta = \delta(\varepsilon).$$

A határérték jelölése

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r_0.$$

jobb és bal oldali határértékek. A skalárfüggvényekhez hasonlóan a vektor-skalár függvényeknél is értelmezhető a t_0 helyen a jobb, illetve bal oldali határérték.

A jobb oldali határértéket megkapjuk, ha t jobbról közeledik t_0 -hoz, azaz $t - t_0 > 0$, a bal oldali határértéket megkapjuk, ha t balról közeledik t_0 -hoz, azaz $t - t_0 < 0$.

A jobb oldali határérték létezik, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan δ , hogy $0 < t - t_0 < \delta$ esetén $|r - r_0| < \varepsilon$.

A bal oldali határérték létezik, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan δ , hogy $0 < t_0 - t < \delta$ esetén $|r - r_0| < \varepsilon$.

Tétel. Az

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

vektor-skalár függvény határértéke a t_0 helyen akkor és csak akkor létezik, ha a koordináták határértéke külön-külön is létezik, és ha a határértékeket r_0 , illetve x_0, y_0, z_0 jelöli, akkor

$$r_0 = x_0 i + y_0 j + z_0 k.$$

Bizonyítás. a) Tegyük fel, hogy $t \rightarrow t_0$ esetén

$$x(t) \rightarrow x_0, \quad y(t) \rightarrow y_0, \quad z(t) \rightarrow z_0.$$

Ekkor

$$|r(t) - r_0| = \sqrt{[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 + [z(t) - z_0]^2} \rightarrow 0,$$

azaz

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r_0.$$

b) Tegyük fel, hogy a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r_0$$

határérték létezik. Mivel

$$|r(t) - r_0| = \sqrt{[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 + [z(t) - z_0]^2} \equiv |x(t) - x_0|,$$

ha

$$|r(t) - r_0| \rightarrow 0, \quad |x(t) - x_0| \rightarrow 0,$$

$$\text{Hasonlóan } |y(t) - y_0| \rightarrow 0 \quad \text{és} \quad |z(t) - z_0| \rightarrow 0.$$

A határérték fogalmából és a vektor-skalár függvény határérték képzéséből következik a következő tétel.

Legyen

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r_1(t) = v_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r_2(t) = v_2.$$

Ekkor

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [r_1(t) + r_2(t)] = v_1 + v_2.$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} c r_2(t) = c v_2.$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [r_1(t) \cdot r_2(t)] = v_1 \cdot v_2.$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [r_1(t) \times r_2(t)] = v_1 \times v_2.$$

Speciálisan:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} a \times r(t) = a \times v_1.$$

Vektor-skálár függvény folytonossága

Definíció. Az $r = r(t)$ vektor-skálár függvény a t_0 helyen folytonos, ha e helyen a jobb és bal oldali határérték megegyezik és egyenlő a helyettesítési értékkel.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0).$$

A határértékre vonatkozó két tételből és a folytonosság definíciójából következik.

Tétel. Az $r = r(t)$ függvény akkor és csak akkor folytonos a t_0 helyen, ha ott mindhárom koordinátájja folytonos.

Folytonosság egy intervallumban

Definíció. Az $r = r(t)$ függvény a $[t_1; t_2]$ intervallumban folytonos, ha annak minden belső pontjában folytonos, és t_1 -ben jobbról, t_2 -ben jobbról folytonos.

Egyenletes folytonosság

Definíció. Az $r = r(t)$ vektor-skálár függvény az $[a; b]$ intervallumban egyenletesen folytonos, ha minden pozitív ε -hoz található, olyan, csak ε -tól függő $\delta(\varepsilon)$ szám, hogy

$$a \leq t_1 < t_2 \leq b \quad \text{esetén} \quad |r(t_2) - r(t_1)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |t_2 - t_1| < \delta(\varepsilon).$$

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

Ha az $r = r(t)$ függvény az $[a; b]$ zárt intervallumban korlátos és folytonos, akkor ott egyenletesen folytonos.

Példák

1. Vizsgáljuk folytonosság szempontjából a $t = 0$ helyen az

$$r(t) = (1-t)i + (2+t)j + (1-t^2)k$$

az

$$r_0 = i + 2j + k \quad \text{vektor.}$$

A függvény helyettesítési értéke az

függvényt!

Ugyanennyi a jobb és bal oldali határérték, tehát a függvény a 0 helyen folytonos.

$$2. \quad r(t) = \sin t i + \cos t j + \frac{1}{t} k.$$

A függvény a $t = 0$ helyen nincs értelmezve, tehát nem folytonos.

$$3. \quad r = ti + e^{\frac{1}{t}}j + (1-t)k,$$

A függvény a $t = 0$ helyen nincs értelmezve, mert nincs értelmezve az y koordináta. A bal oldali határérték létezik és véges. Ha $t \rightarrow 0$ balról, azaz $t \rightarrow -0$, akkor $\frac{1}{t} \rightarrow -\infty$, így $e^{\frac{1}{t}} \rightarrow 0$, azaz $y \rightarrow 0$. Mivel $t \rightarrow 0$ esetén $x \rightarrow 0$ és $z \rightarrow 1$, a bal oldali határérték a $[0; 0; 1]$ vektor.

$$\text{Ha } t \rightarrow 0 \text{ jobbról, azaz } t \rightarrow +0, \text{ akkor } \frac{1}{t} \rightarrow +\infty, \text{ így } y = e^{\frac{1}{t}} \rightarrow +\infty.$$

$$x \rightarrow 0, \quad z \rightarrow 1.$$

A jobb oldali határérték nem létezik.

A két határérték nem egyezik meg és nincs helyettesítési érték, a függvénynek a $t = 0$ helyen szakadása van.

11.1.1.2 Vektor-skálár függvény differenciálhányadosa, a derivált vektor

Az $r = r(t)$ egyenlettel megadott vektor-skálár függvényt az $r = r(t)$ térgörbe ábrázolja.

Vegyük fel a vektorfüggvénynek a t és $t + \Delta t$ paraméterekhez tartozó $r(t)$ és $r(t + \Delta t)$ értékeit. Miközben a paraméter Δt értékkel változik, a függvény változása a

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$$

különbségvektor, azaz a térgörbe húrvektora (11.7 ábra). Képezzük a következő differenciálhányadost:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}.$$

A hányados a húrvektor $\frac{1}{\Delta t}$ -szeres nyújtása. Ha a P pont Q -hoz közeledik, azaz Δt csökken, a szelő az érintőhöz közeledik, a hányadosok mindegyike egy megnyújtott húrvektor.

Ha $\Delta t \rightarrow 0$, a szelőből érintő lesz, a differenciálhányados határértéke a térgörbe Q pontjában húzott érintővektor, feltéve, hogy ez a határérték létezik (11.8 ábra). A $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ differenciálhányados határértéke, az $r = r(t)$ vektor-skálár függvény differenciálhányadosa vagy derivált vektora, tehát az érintő egyenes irányvektora.

A derivált vektor jele

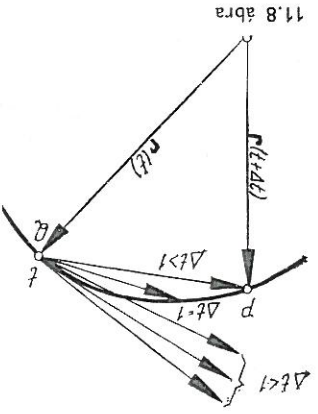
$$\frac{dr(t)}{dt}, \quad \text{vagy} \quad \frac{dr}{dt}, \quad \text{vagy} \quad \dot{r}(t),$$

(olv.: r vektor pont t , röviden: r pont t).

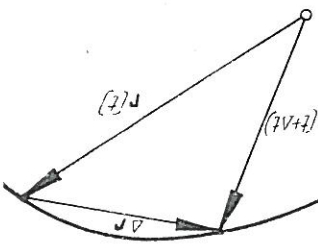
Tehát a derivált vektor definíciója:

$$\dot{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}.$$

Tétel. Az $r = r(t)$ vektor-skálár függvény derivált vektorát megkapjuk, ha komponenseit külön-külön t szerint deriváljuk.



11.7 ábra



Bizonyítás.

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \mathbf{k}.$$

Egy vektor hatáértékét megkapjuk, ha a komponensek hatáértékét képezzük:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \mathbf{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \mathbf{k},$$

ahol

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t) \quad \text{és így tovább.}$$

Igy

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Valamely adott t_0 pontban a derivált vektor:

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{t=t_0} = \mathbf{r}'(t_0),$$

vagy a koordinátákkal

$$\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}.$$

Példa

Határozzuk meg az

$$\mathbf{r} = e^t \mathbf{i} - t\mathbf{j} - 6\sqrt{t}\mathbf{j} + \sin(2t - 2)\mathbf{k}$$

tér görbe derivált vektorát a $t_0 = 1$ pontban.

$$\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} - t\mathbf{j} - 3\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{j} + 2\cos(2t - 2)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Differenciálási szabályok

A derivált vektor fogalmából és a hatáértékre vonatkozó tételből következik az alábbi deriválási szabályok.

Legyenek $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$; $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$; $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ a t paraméter vektor-skalar függvényei, és $u = u(t)$ a t paraméter skalarfüggvénye. Ekkor érvényesek a következő szabályok:

$$1. \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2.$$

$$2. \quad \frac{d}{dt} c \cdot \mathbf{r} = c \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (c = \text{konstans}).$$

$$3. \quad \frac{d}{dt} (u \cdot \mathbf{r}) = \frac{du}{dt} \cdot \mathbf{r} + u \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{u}\mathbf{r} + u\dot{\mathbf{r}}.$$

$$4. \quad \frac{d}{dt} \mathbf{r}[u(t)] = \frac{d\mathbf{r}}{du} \cdot \frac{du}{dt} \quad (\text{láncszabály}).$$

$$5. \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2.$$

$$6. \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2.$$

(Itt a tényezők sorrendje nem cserélhető fel.)

Példa

Differenciáljuk az $\mathbf{r}^2$ függvényt!

Az 5. szabály szerint skalaris szorzatként deriválva:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}^2 = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Erős derivált

Definíció. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vektor-skalar függvény erős deriválttal rendelkezik a t_0 pontban, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow t_0 \\ t_2 \rightarrow t_0}} \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

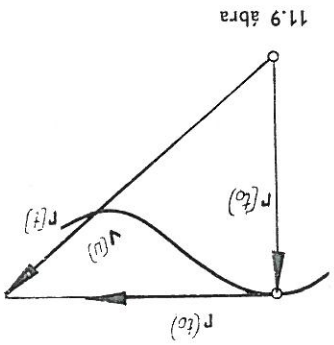
hatáérték.

A definícióból világos, hogy ha létezik az erős derivált, akkor létezik a közönséges derivált is, és a kettő megegyezik. Bebizonyítható a következő.

Tétel. A t_0 helyen akkor és csak akkor létezik az erős derivált, ha $\mathbf{r}(t)$ létezik a t_0 egy környezetében és a t_0 helyen folytonos. Ennek következménye, hogy ha $\mathbf{r}(t)$ folytonosan differenciálható az $\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumban, akkor minden pontban létezik az erős derivált.

11.1.1.3 Tégörbe érintő egyenese

Egy egyenest meghatathatunk adott pontja (irányvektora) segítségével. Húzzuk meg az adott $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ tégörbe adott t_0 paraméterű pontjában az érintőt. Az érintési pont helyvektora $\mathbf{r}(t_0)$, az érintő irányvektora $\mathbf{r}'(t_0)$. Húzzuk meg az érintő futópontjának helyvektorát. Jelöljük ezt a vektort $\mathbf{v}(u)$ -val, ahol u az érintő futópontjának az érintési ponttól való távolsága. A 11.9 ábrából látható, hogy a $\mathbf{v}(u)$ vektor az $\mathbf{r}(t_0)$ vektornak és az $\mathbf{r}'(t_0)$ vektor u -szoros nyújtásának összege.



Ekkor az érintő skaláris egyenletrendszere:

$$\begin{cases} X(u) = x(t_0) + ux'(t_0) \\ Y(u) = y(t_0) + uy'(t_0) \\ Z(u) = z(t_0) + uz'(t_0) \end{cases}$$

Az egyenletrendszerekből az u paramétert kiküszöbölve kapjuk az érintő egyenes egyenletrendszert:

$$\frac{X - x_0}{Y - y_0} = \frac{x'(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z_0}{z'(t_0)}$$

Példák

1. Írjuk fel az

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

skaláris egyenletrendszerevel megadott csavarvonal érintőjének egyenletrendszert a $t_0 = \frac{\pi}{2}$ pontban.

A komponensek deriváltjai:

$$\dot{x} = -a \sin t, \quad \dot{y} = a \cos t, \quad \dot{z} = b.$$

A $t_0 = \frac{\pi}{2}$ pontban:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = a, \quad z_0 = b \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\dot{x}_0 = -a, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = b.$$

Az érintő egyenletrendszere:

$$\frac{X - x_0}{Y - y_0} = \frac{0}{-a} = \frac{Z - z_0}{b}.$$

2. Írjuk fel a Viviani-féle görbe érintőjének egyenletét, az $R = 2$ sugárnál, a $t = \frac{\pi}{6}$ értékhez tartozó pontban.

A Viviani-féle görbe egyenlete (11.1.1.1, 5. példa):

$$\mathbf{r} = R \cos^2 t \mathbf{i} + R \sin t \cos t \mathbf{j} + R \sin t.$$

$$x = R \cos^2 t, \quad y = \frac{1}{2} R \sin 2t, \quad z = R \sin t.$$

$$x_0 = \frac{2}{3}, \quad y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_0 = 1.$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2R \cos t \sin t = -R \sin 2t \\ \dot{y} &= R \cos 2t \\ \dot{z} &= R \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -\sqrt{3}, \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 1, \\ z\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Az érintő egyenletrendszere:

$$\frac{X - \frac{2}{3}}{Y - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{Z - 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Vagy

$$X = -\sqrt{3}u + \frac{2}{3}, \quad Y = u + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad Z = \sqrt{3}u + 1.$$

11.1.1.4 Tégörbék ívhossza

Határozzuk meg az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ tégörbe $\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumhoz tartozó szakaszának, azaz az $\mathbf{r}(\alpha)$ és $\mathbf{r}(\beta)$ helyvektorok közé eső részének ívhosszát. Osszuk fel a görbét az

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta$$

paraméterpontokra megfelelő pontok segítségével részekre, és húzzuk meg a szomszédos osztópontokat összekötő húrvektorokat (11.10 ábra).

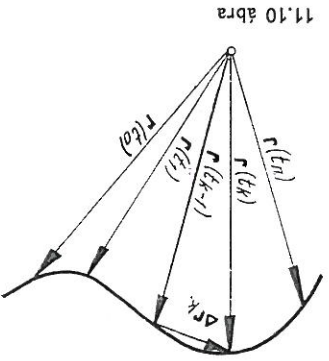
$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

A görbe ívhosszát a húrvektorok abszolút értékeinek összegével közelítjük meg.

Ha $s_n = \sum_{k=1}^n |\Delta \mathbf{r}_k|$ húrpoligon hosszának a felosztás módjától függetlenül $\max \Delta t_k \rightarrow 0$ esetén létezik határértéke, ez a határérték a görbeszakasz ívhossza.

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\Delta \mathbf{r}_k|, \quad \max \Delta t_k \rightarrow 0$$

Ha a határérték létezik és véges, a görbeszakaszt rektifikálhatónak nevezzük.



Definíció. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ térgörbe ívhossza az $\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumban

$$s = \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |\Delta \mathbf{r}_k|.$$

Igazolható, hogy a görbe ívhossza nem függ a görbe paraméterezéseinek módjától.

Tétel. Ha az $\mathbf{r}(t)$ térgörbe $\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumban $\dot{\mathbf{r}}(t)$ létezik és folytonos, az ívhossz

$$s = s(\alpha; \beta) = \int_{\beta}^{\alpha} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt.$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz felhasználjuk a következő segédtelet.

Ha egy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vektor-skalár függvény az $a \leq t \leq b$ intervallumban differenciálható, és az $\dot{\mathbf{r}}(t)$ deriváltvektorok mint helyvektorok egy G gömb valamelyik pontját határozzák meg, akkor bármely $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ esetén az

$$\frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

vektor is a G gömb valamelyik pontjának helyvektora. Ezt az állítást itt nem igazoljuk.

Legyen az $\alpha = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = \beta$ felosztásnál $t_k - t_{k-1} = \Delta t_k$.

Legyen a felosztássorozat olyan, hogy $\max \Delta t_k \rightarrow 0$. Írjuk $|\Delta \mathbf{r}_k|$ -t a következő formában

$$|\Delta \mathbf{r}_k| = \left| \frac{\Delta \mathbf{r}_k}{\Delta t_k} \right| \Delta t_k.$$

Ha $\dot{\mathbf{r}}(t)$ folytonos, akkor egyenletesen is folytonos. Ez azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$, hogy

$$|t - \tau| < \delta \quad \text{esetén,} \quad |\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{r}}(\tau)| < \varepsilon.$$

Legyen a felosztás olyan finom, hogy $\max \Delta t_k < \delta$. Ekkor a $t_{k-1} < t < t_k$ intervallumban tartozó $\dot{\mathbf{r}}(t)$ deriváltvektor benne van az $\dot{\mathbf{r}}(t_k)$ körüli ε sugarú gömbben.

Alkalmazva a segédtelet:

$$\left| \frac{\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} - \dot{\mathbf{r}}(t_k) \right| < \varepsilon.$$

Igy

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{r}_k}{\Delta t_k} - \dot{\mathbf{r}}(t_k) \right| < \varepsilon.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \left(\left| \frac{\Delta \mathbf{r}_k}{\Delta t_k} \right| \Delta t_k - |\dot{\mathbf{r}}(t_k)| \Delta t_k \right) \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\Delta \mathbf{r}_k}{\Delta t_k} - \dot{\mathbf{r}}(t_k) \right| \Delta t_k < \sum_{k=1}^n \varepsilon \Delta t_k = \varepsilon(\beta - \alpha). \\ \left| \sum_{k=1}^n |\Delta \mathbf{r}_k| - \sum_{k=1}^n |\dot{\mathbf{r}}(t_k)| \Delta t_k \right| &< \varepsilon(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Tehát

Ez pedig azt jelenti, hogy a húrpoligon hossza $\int_{\beta}^{\alpha} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$ integrál megfelelő közelítő összegétől tetszőlegesen kevéssel különbözik, ha a felosztás elég finom. A felosztás finomítása miatt — a közelítő összegek tartanak az integrálhoz, ezért a húrpoligon hossza is az integrál értékéhez tart. Létezik tehát az s ívhossz, és

$$s = \int_{\beta}^{\alpha} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt.$$

Mivel vektor abszolút értéke egyenlő a koordináták négyzetösszegének négyzetgyökével,

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \quad \text{a } k\text{-ra}$$

$$s = \int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2} dt.$$

Vagy röviden

$$s = \int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

$$\text{Ha } z \equiv 0, \quad z'(t) = 0,$$

$$s = \int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Megkaptuk a paraméteres alakban adott síkgörbék ívhosszának a 8.3.3 pontban megismert képletét.

Példák

1. Számítsuk ki a hengeres csavarvonal egy menetének ívhosszát!

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt.$$

Egy menetnél a paraméter változása $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\dot{x} = -a \sin t, \quad \dot{y} = a \cos t, \quad \dot{z} = b.$$

$$s = \int_{2\pi}^0 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

$$s = \int_{2\pi}^0 \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2} dt =$$

$$= \int_{2\pi}^0 \sqrt{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \int_{2\pi}^0 dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. Határozzuk meg az

$$\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

térgörbe ívhosszát az $1 \leq t \leq 3$ szakaszban.

$$\mathbf{r}(t) = t + 2t^{\frac{1}{2}}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}.$$

$$s = \int_3^1 \sqrt{1+4t+4t^2} \, dt = \int_3^1 \sqrt{(1+2t)^2} \, dt = \int_3^1 (1+2t) \, dt =$$

$$= \left[t + t^2 \right]_3^1 = 3 + 9 - 1 - 1 = 10.$$

Az ívhossz szerinti derivált

Ha $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ folytonosan differenciálható, akkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenletű térgörbe ívhossza az

$\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumban

$$s(t) = \int_{\beta}^{\alpha} |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, dt.$$

Vegyük az ívhosszt a görbe rögzített t_0 paraméterű pontjától a változó t paraméterű pont-
jáig. Ekkor az ívhossz a felső határ függvénye, $s(t)$.

$$s(t) = \int_t^{t_0} |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, dt.$$

Vegyük mindkét oldal t szerinti differenciálhányadosát. A bal oldal deriváltja $\frac{ds}{dt}$.
A jobb oldal felső határ szerinti differenciálhányadosa a differenciál- és integrálszámítás
alaptétele értelmében egyenlő az integrálandó függvénynel, $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ -vel.

$$\text{Így } \frac{ds}{dt} = |\dot{\mathbf{r}}(t)|.$$

Ha a vizsgált szakaszon $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$, $|\dot{\mathbf{r}}(t)| > 0$, ezért a bal oldal is pozitív.

$$\frac{ds}{dt} > 0.$$

Ha az $s(t)$ függvény t szerinti deriváltja pozitív, $s(t)$ szigorúan növekvő függvény, van inverz
függvénye: $t(s)$. Más szóval a t paraméter kifejezhető az s ívhosszúság függvényeként.
Elméleti megfontolásoknál célszerű az ívhosszt paraméternek tekinteni.

Ily módon a $t = t(s)$ helyettesítéssel az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ függvény

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[t(s)] = \mathbf{r}(s)$$

alakban adható meg.

Határozzuk meg az $\mathbf{r}$ térgörbe s ívhosszúság szerinti deriváltját:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d}{ds} \mathbf{r}[t(s)] = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}.$$

A differenciálást a differenciálási szabályok 4. pontja szerint a láncszabállyal végeztük el.

Az utolsó törtet átalakítjuk:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}}.$$

A számíló az $\mathbf{r}$ vektor t szerinti deriváltja, $\dot{\mathbf{r}}(t)$. A nevező, $\frac{ds}{dt}$, az alaptétel szerinti $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$, így

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|},$$

vagy röviden

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}.$$

A kapott vektor egységnyi hosszúságú, és párhuzamos az érintővektorral. Az ívhossz sze-
rinti derivált az érintő egységvektora.

Tehát

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \mathbf{t}.$$

Az érintő egységvektort $\mathbf{t}$ -vel jelöljük.

Az ívhossz szerinti deriváltira külön jelölést vezetünk be:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}'; \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \mathbf{r}''.$$

Mivel $\mathbf{r}' = \mathbf{t}$, az érintő egységvektora,

$$|\mathbf{r}'| = |\mathbf{t}| = 1.$$

Tétel. Az ívhossz szerinti második differenciálhányados merőleges az ívhossz szerinti első
differenciálhányadosra:

$$\mathbf{r}'' \perp \mathbf{r}'.$$

Bizonyítás. Az első derivált egységvektor:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{t}, \quad |\mathbf{r}'| = 1.$$

Mivel

$$\mathbf{r}'^2 = |\mathbf{r}'|^2,$$

$$\mathbf{r}'^2 = 1,$$

Deriváljuk mindkét oldalt újra az ívhossz szerint! A jobb oldal konstans, deriváltja nulla.
A bal oldal deriváltja $2\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''$.

$$\text{Így } 2\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 0.$$

Azaz az

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''$$

skaláris szorzat 0, tehát a két vektor merőleges:

$$\mathbf{r}' \perp \mathbf{r}''.$$

Írjuk fel az

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

hengeres csavarvonalon egyenletét ívhossz-paraméterrel, és határozzuk meg érintőjét a $t_0 = \frac{\pi}{2}$ helyen!

$$s = \int_0^t \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dt = \int_0^t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \int_0^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t$$

$$s = \sqrt{2} t,$$

Innen a t paraméter az ívhosszal kifejezve:

$$t = \frac{s}{\sqrt{2}}.$$

A térgörbe az ívhossz segítségével:

$$\mathbf{r}(s) = \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{k}.$$

A térgörbe érintőjének irányvektora:

$$\mathbf{r}'(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k}.$$

A vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

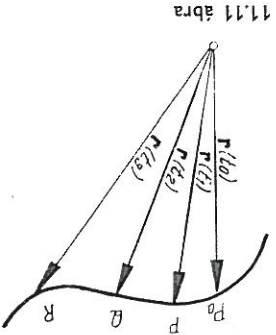
A $t_0 = \frac{\pi}{2}$ helyen:

$$\begin{aligned} s_0 &= t_0 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \frac{\pi}{2}, \\ \mathbf{r}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{2} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

11.1.15 A simuló sík

Adott az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenlettel meghatározott térgörbe. Vegyünk fel a térgörben három pontot, a P , Q , R pontokat. A három ponton síkot fektetünk keresztül. Ha a P , Q és R pontokat a P_0 ponthoz közelítjük, a három pont által meghatározott síkkal egy határhelyezethez közelítünk. A határhelyezettel meghatározott sík a térgörbe P_0 pontjához tartozó simuló sík (11.11 ábra).

Definíció. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ térgörbe simuló síkja a P_0 pontban a P , Q , R pontokon átfektetett sík határhelyezete, ha $P \rightarrow P_0$, $Q \rightarrow P_0$ és $R \rightarrow P_0$.



11.11 ábra

$$(1) \quad \mathbf{r}(t_0) \times \mathbf{r}'(t_0) \neq 0.$$

Feltételezzük, hogy az $\mathbf{r}(t)$ függvény kétszer folytonosan differenciálható és

Legyen $\mathbf{r}(t_1)$ a P , $\mathbf{r}(t_2)$ a Q és $\mathbf{r}(t_3)$ az R pont helyvektora. Feltételezzük, hogy $t_1 < t_2 < t_3$. Tekintsük a következő skalárfüggvényt:

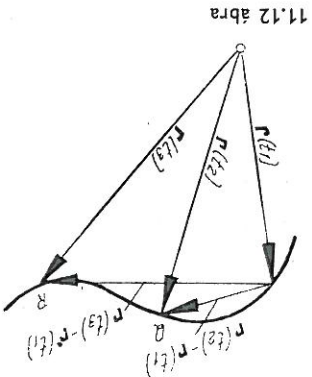
$$(2) \quad f(t) = [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1)] \cdot \mathbf{v},$$

ahol $\mathbf{v}$ a PQR sík normálvektora.

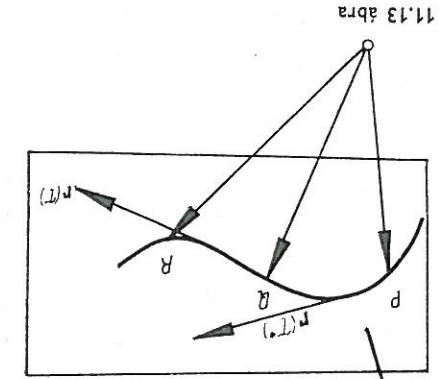
$$f(t_2) = 0 \text{ és } f(t_3) = 0, \text{ hiszen}$$

$$[\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)] \perp \mathbf{v} \text{ és}$$

$$[\mathbf{r}(t_3) - \mathbf{r}(t_1)] \perp \mathbf{v} \quad (11.12 \text{ ábra}).$$



11.12 ábra



11.13 ábra

Ezért a Rolle-tétel szerint (7.1.6. I. pont) létezik a (t_2, t_3) intervallumban olyan τ pont, hogy $f'(\tau) = 0$, azaz (2)-ből

$$\mathbf{r}'(\tau) \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\mathbf{r}'(\tau) \perp \mathbf{v}.$$

A P , Q , R pontok sorrendjének felcserélésével ugyanúgy igazolható, hogy (t_1, t_2) -ben van olyan τ^* pont, amelyre

$$\mathbf{r}'(\tau^*) \cdot \mathbf{v} = 0,$$

azaz

$$\mathbf{r}'(\tau^*) \perp \mathbf{v} \quad (11.13 \text{ ábra}).$$

Mivel $\mathbf{r}(t)$ folytonos, az (1) egyenlet miatt $\mathbf{r}(\tau)$ és $\mathbf{r}(\tau^*)$ egyike sem nulla, ha t_1, t_2, t_3 elég közel van a t_0 ponthoz. Könnyen belátható, hogy ugyane feltételek miatt $\mathbf{r}(\tau)$ és $\mathbf{r}(\tau^*)$ nem párhuzamos vektorok. A vektori szorzat értelmezése szerint (2.3.2 pont) az $\mathbf{r}(\tau) \times \mathbf{r}(\tau^*)$ vektori szorzat merőleges mindkét tényezőre, tehát megadja a PQR sík normálvektorát, $\mathbf{v}$ -t.

$$\mathbf{r}(\tau) \times \mathbf{r}(\tau^*) = \mathbf{v}.$$

Az $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t^*)$ vektor párhuzamos a következő vektorral:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{r}}(t^*)}{t - t^*}.$$

Ugyanis a disztributív szabályt alkalmazva:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = 0 \quad \text{és}$$

$$\frac{1}{t - t^*} (\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t^*)) \text{ vektor párhuzamos az:}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t^*) \text{ vektorral.}$$

Igy a PQR sík normálvektorát megadja az

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{r}}(t^*)}{t - t^*}$$

vektori szorzat.

Ha $t_1 \rightarrow t_0, t_2 \rightarrow t_0, t_3 \rightarrow t_0$, akkor

$$t \rightarrow t_0 \quad \text{és} \quad t^* \rightarrow t_0.$$

Felhasználva, hogy egyszerűen $\dot{\mathbf{r}}(t)$ folytonos, másrészt, hogy folytonosan differenciálható, azaz a 11.1.1.2 pontbeli tétel szerint a t_0 pontban létezik az erős deriváltja, a PQR sík normálvektora az

$$\mathbf{m} = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t^* \rightarrow t_0}} \left[\dot{\mathbf{r}}(t) \times \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{r}}(t^*)}{t - t^*} \right] =$$

$$= \dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \dot{\mathbf{r}}(t_0) \quad \text{határértékhez tart.}$$

Létezik tehát a simuló sík, és normálvektora

$$\mathbf{m} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \dot{\mathbf{r}}(t_0).$$

A simuló sík normálvektorát *binormális vektornak* nevezik. Egységvektorát $\mathbf{b}$ -vel jelöljük:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}.$$

Legyen a simuló sík futópontjának helyvektora $\mathbf{s}$, adott pontjáé $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$.

A normálvektor merőleges az $(\mathbf{s} - \mathbf{r}_0)$ vektorra.

Tehát a simuló sík vektori egyenlete:

$$(\mathbf{s} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (11.14 \text{ ábra}).$$

Mivel

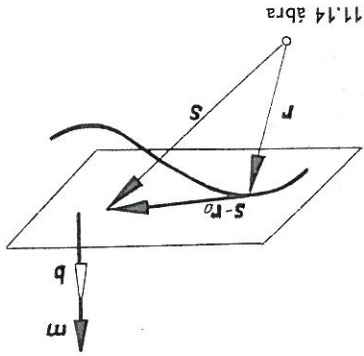
$$\mathbf{m} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \dot{\mathbf{r}}(t_0),$$

a simuló sík egyenlete

$$(\mathbf{s} - \mathbf{r}_0) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \dot{\mathbf{r}}(t_0) = 0.$$

Vagy röviden

$$(\mathbf{s} - \mathbf{r}_0) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t_0) \dot{\mathbf{r}}(t_0) = 0.$$



11.14 ábra

A simuló sík egyenletét skálár alakban megkapjuk, ha a vegyes szorzatot a determináns segítségével felírjuk.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Ha a térgörbét az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

alakban az ívhossz-paraméterrel adjuk meg, akkor a simuló sík normálvektora:

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0).$$

Tehát $\mathbf{r}'$ és $\mathbf{r}''$ mindegyike benne van a simuló síkban.

Pelda

Írjuk fel az

$$\mathbf{r} = t^2 \mathbf{i} + 2\sqrt{t} \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

térgörbe simuló síkjának egyenletét a $t = 1$ pontban. A vektor és a derivált vektorok:

$$\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + 2\sqrt{t} \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = 2t \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = 2 \mathbf{i} - \frac{1}{2\sqrt{t^3}} \mathbf{j} + 6t \mathbf{k}.$$

A $t = 1$ pontban:

$$\mathbf{r}_0 = [1; 2; 1],$$

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = [2; 1; 3],$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = \left[2; -\frac{1}{2}; 6 \right].$$

A simuló sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve:

$$(x-1) \left(6 + \frac{3}{2} \right) + (y-2)(6-12) + (z-1)(-1-2) = 0,$$

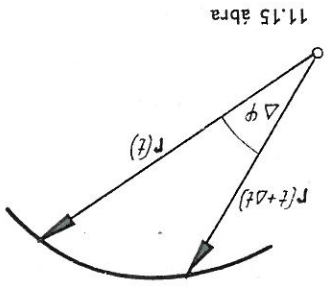
ahonnan

$$5x - 4y - 2z = -5.$$

11.1.1.6 Vektorfüggvények szögsebessége

A térgörbék görbületeinek meghatározásához vezessük be a vektorfüggvények szögsebességének fogalmát. Legyen a térgörbe az $r = r(t)$ egyenlettel adott. Legyen a $t + \Delta t$ paraméterhez tartozó két helyvektor által bezárt szög $\Delta\varphi$ (11.15 ábra).
A vektorfüggvény átlagos szögsebességén a

$$\frac{\Delta\varphi}{|\Delta t|} \text{ hányadosát értjük.}$$



11.15 ábra

A „pillanatnyi” szögsebesség ennek a hányadosnak a határértéke, ha $\Delta t \rightarrow 0$. Jele: $\frac{d\varphi}{dt}$.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta t|}.$$

Definíció. Az $r = r(t)$ vektor szögsebessége

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta t|}.$$

Tétel. Feltéve, hogy $r(t)$ létezik és $r(t) \neq 0$, az $r(t)$ függvény szögsebessége:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{|\dot{r}(t) \times r(t)|}{|r(t)|^2}.$$

Bizonyítás. Írjuk fel az $r(t)$ és $r(t + \Delta t)$ vektorok szorzatának abszolút értékét:

$$|r(t) \times r(t + \Delta t)| = |r(t)| \cdot |r(t + \Delta t)| \cdot \sin \Delta\varphi.$$

Mindkét oldal felírható más alakban.

A bal oldal így alakítható:

$$|r(t) \times r(t + \Delta t)| = |r(t) \times [r(t) + \Delta r]| = |r(t) \times \Delta r|,$$

(mivel $r(t) \times r(t) = 0$).

A jobb oldalt $\Delta\varphi$ -vel szorozva és osztva így alakul:

$$|r(t)| \cdot |r(t + \Delta t)| \sin \Delta\varphi = |r(t) \times \Delta r| \Rightarrow \sin \Delta\varphi = \frac{|r(t) \times \Delta r|}{|r(t)| \cdot |r(t + \Delta t)|}.$$

Írjuk a vektori szorzat egyenletének két oldala helyett az így kapott értékeket:

$$|r(t) \times [r(t + \Delta t) - r(t)]| = |r(t)| \cdot |r(t + \Delta t)| \sin \Delta\varphi \Rightarrow \sin \Delta\varphi = \frac{|r(t) \times \Delta r|}{|r(t)| \cdot |r(t + \Delta t)|}.$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $|\Delta r|$ -vel:

$$\left| \frac{r(t) \times [r(t + \Delta t) - r(t)]}{|\Delta r|} \right| = |r(t)| \cdot \left| \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{|\Delta r|} \right| \sin \Delta\varphi \Rightarrow \left| \frac{r(t) \times \dot{r}(t)}{|r(t)|} \right| = \left| \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{|\Delta r|} \right| \sin \Delta\varphi.$$

11.1.1.7 Térgörbék görbülete

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{|\dot{r}(t) \times r(t)|}{|r(t)|^2}.$$

Így a vektorfüggvény szögsebessége

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{|\dot{r}(t) \times r(t)|}{|r(t)|^2}.$$

$$r(t + \Delta t) \rightarrow r(t).$$

$$\frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{|\Delta t|} \rightarrow \dot{r}(t).$$

$$\frac{\Delta\varphi}{dt} \rightarrow \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{|\Delta r|}{dt} \rightarrow \frac{d\varphi}{dt}.$$

Térjünk rá a határértékre, ha $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{\Delta\varphi}{dt} = \frac{|\dot{r}(t) \times \dot{r}(t)|}{|\dot{r}(t)|^2} = \frac{|\dot{r}(t) \times \dot{r}(t)|}{|\dot{r}(t)|^2} = 0.$$

A 8.3.3.1 pontban bebizonyítottuk, hogy az $y = f(x)$ síkgörbe görbülete az (x_0, y_0) pontban:

$$\kappa = \frac{y_0'''}{(1 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

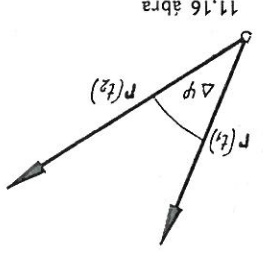
A 7.2.7 pontban pedig megállapítottuk, hogy a simuló kör sugara:

$$r = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{y_0'''}.$$

Így a görbület a simuló kör sugarának reciprok értéke:

$$\kappa = \frac{1}{r}.$$

Ha a térben megrajzoljuk egy térgörbe két pontjához tartozó érintővektort egy pontba csúsztatjuk, a két érintővektor $\Delta\varphi$ szöget zár be (11.16 ábra).



11.16 ábra

Definíció. A térgörbe átlagos görbülete

$$\frac{\Delta \varphi}{|\Delta s|}.$$

Definíció. A térgörbe lokális görbülete az átlagos görbület határértéke, ha $\Delta s \rightarrow 0$.

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{|\Delta s|} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Tétel. Ha az $r = r(t)$ egyenletű térgörbe a t_0 helyen kétszer differenciálható és $\dot{r}(t_0) \neq 0$, akkor a térgörbe görbülete a t_0 pontban:

$$\kappa = \frac{|\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)|}{|\dot{r}(t_0)|^3}.$$

Bizonyítás. A görbület definíciója szerint:

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{|\Delta s|} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

A felület miatt a t_0 környezetében $r(t)$ deriválható, ezért folytonos, így a görbe egy kezdő-

pontjától a t paraméterű pontig létezik az $s(t)$ ívhosszfüggvény.

Mivel $s(t)$ monoton nő, létezik inverze: a $r(s)$ függvény.

Ezért, ha $\Delta s \rightarrow 0$, akkor $\Delta t \rightarrow 0$.

Írjuk a $\frac{\Delta \varphi}{|\Delta s|}$ differenciáhányadost más alakban:

$$\frac{\Delta \varphi}{|\Delta s|} = \frac{|\Delta s|}{|\Delta t|} \cdot \frac{|\Delta t|}{|\Delta s|} = \frac{\Delta \varphi}{|\Delta t|} \cdot \frac{|\Delta t|}{|\Delta s|}.$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{|\Delta t|} \cdot \frac{|\Delta t|}{|\Delta s|}.$$

Azaz

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}.$$

A számítás nem más, mint az $\dot{r}(t)$ érintővektor szögsebessége. Ez az előző tétel szerint:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)|}{|\dot{r}(t)|^2}.$$

A nevező:

$$\frac{dt}{ds} = |\dot{r}(t)|.$$

Így

$$\kappa = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)|}{|\dot{r}(t)|^3}.$$

Röviden

$$\kappa = \frac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3}.$$

Példák

1. Számítsuk ki az

$$r(t) = 2ti + \frac{3}{t^3}j + \frac{2}{t^2}k$$

térgörbe görbületét a $t = 1$ pontban.

$$\dot{r}(t) = 2i + t^3j + tk.$$

$$\dot{r}(t) = 0 \cdot i + 2tj + 1 \cdot k.$$

A $t = 1$ pontban:

$$\dot{r} = [2; 1; 1],$$

$$\ddot{r} = [0; 2; 1],$$

$$|\dot{r}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

$$\dot{r} \times \ddot{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j + 4k = [-1; -2; 4].$$

$$|\dot{r} \times \ddot{r}| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}.$$

$$\kappa = \frac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{3}}{6\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

2. Számítsuk ki az

$$r = a \cos ti + a \sin tj + bk$$

csavarvonal görbületét.

$$\dot{r} = -a \sin ti + a \cos tj + 0 \cdot k.$$

$$|\dot{r}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\dot{r} \times \ddot{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = ab \sin ti - ab \cos tj + a^2 k.$$

A vektori szorzat abszolút értéke

$$|\dot{r} \times \ddot{r}| = \sqrt{a^2 b^2 \sin^2 t + a^2 b^2 \cos^2 t + a^4} = \sqrt{a^2 b^2 + a^4} = a \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tehát

$$\kappa = \frac{a \sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{(\sqrt{a^2 + b^2})^3}{a}.$$

A görbületben a t paraméter nem szerepel, a hengeres csavarvonal görbülete állandó. Ha a csavarvonal egyenlete

$$r = \cos ti + \sin tj + k,$$

a görbület

$$g = \frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}.$$

azaz $a = 1, b = 1,$

A görbület ívhossz paraméterrel

Tétel. Ha a térgörbe rádiuszvektora az ívhossz függvénye, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ és az $\mathbf{r}'$ és $\mathbf{r}''$ ívhossz szerinti deriváltak léteznek, akkor

$$g = |\mathbf{r}''|.$$

Bizonyítás. Az előző tétel értelmében a görbület ívhossz paraméterrel kifejezve

$$g = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}.$$

Az ívhossz szerinti deriváltakról tudjuk, hogy

$$|\mathbf{r}'| = 1 \quad \text{és} \quad \mathbf{r}' \perp \mathbf{r}''.$$

$$\text{Így} \quad |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = |\mathbf{r}'| \cdot |\mathbf{r}''| \sin \frac{\pi}{2} = |\mathbf{r}''|$$

$$\text{és} \quad g = |\mathbf{r}''|.$$

Az $\mathbf{r}'$ irányába mutató egységvektort $\mathbf{n}$ -nel jelöljük és a görbe főnormális egységvektorának nevezzük. $\mathbf{n}$ tehát az érintőre merőleges vektor, és a simuló síkban fekszik.

$$\mathbf{r}'' = |\mathbf{r}''| \cdot \mathbf{n} = g\mathbf{n}.$$

Simuló kör.

Definíció. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ térgörbe P, Q, R pontjaival meghatározott kör határhelyzetét, ha $P \rightarrow P_0, Q \rightarrow P_0, R \rightarrow P_0$, a P_0 pontbeli simuló körnek nevezzük, ha ez a határhelyzet létezik. Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

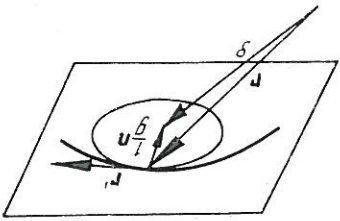
Tétel. Ha a t_0 helyen $\mathbf{r}(t)$ folytonos és $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, akkor a t_0 paraméterértékhez tartozó P_0 pontban van simuló kör, benne van a simuló síkban és középpontjának helyvektora:

$$\rho = \mathbf{r}(s_0) + \frac{1}{g} \mathbf{n}.$$

A simuló kör sugara tehát:

$$R = \frac{1}{g}.$$

Ezt az értéket görbületi sugárnak nevezzük (11.17 ábra).



11.17 ábra

Példa

Számítsuk ki az

$$\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

hengeres csavarvonal görbületét, az ívhossz szerinti derivált segítségével. A görbe egyenlete az ívhossz segítségével (11.1.1.5. pont):

$$\mathbf{r}(s) = \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{k}.$$

Az ívhossz szerinti deriváltak:

$$\mathbf{r}'(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}''(s) = -\frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \mathbf{j}.$$

A görbület az ívhossz szerinti második derivált abszolút értéke:

$$g = |\mathbf{r}''(s)| = \sqrt{\frac{1}{4} \cos^2 \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

a görbület állandó. Mint látniuk, ugyanazt az értéket kapjuk, mint a t paraméter szerinti deriváltak segítségével.

A kisérő triéder

A térgörbe minden pontjához három jellemző vektor rendelhető, amelyek egymásra merőlegesek. E három vektor:

az érintővektor: $\mathbf{r}'(t)$,
egységvektora $\mathbf{t}$,
a binormális vektor: $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$,
egységvektora $\mathbf{b}$ és
a főnormális vektor:
egységvektora $\mathbf{n}$.

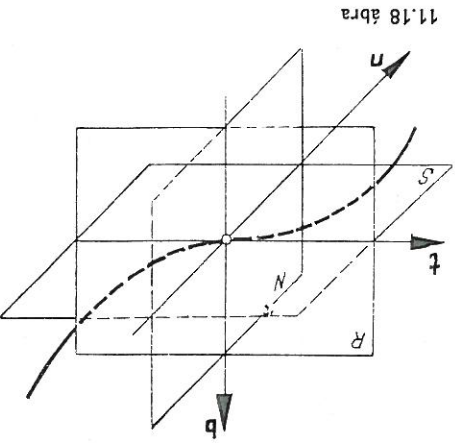
A főnormális vektor merőleges az első kettőre és a simuló síkban fekszik.

A három merőleges vektor sorrendje a jobb-csavar-rendszer sorrendjében: érintővektor, főnormális vektor, binormális vektor ($\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$). A három vektort a térgörbe adott pontjához tartozó *kisérő triédernek* nevezzük.

Ha a három vektort egy pontból kiindulva felrajzoljuk, három síkot határoznak meg:

az érintő és főnormális síkja: a *simuló sík*,
normálvektora $\mathbf{b}$;
az érintő és binormális síkja: a *rektifikáló sík*,
normálvektora $\mathbf{n}$;

a főnormális és binormális síkja: a *normál sík*,
normálvektora: $\mathbf{t}$ (11.18 ábra).



11.18 ábra

Írjuk fel az

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 4\sqrt{t}\mathbf{k} \quad \text{térgörbe}$$

$t = 1$ pontjában a simuló, a normál és a rektifikáló sík egyenletét.

A térgörbe vektora:

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 4\sqrt{t}\mathbf{k}.$$

A deriváltvektorok:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{t}}\mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{t^3}}\mathbf{k}.$$

A $t = 1$ pontban a helyvektor, illetve a deriváltvektorok:

$$\mathbf{r} = [2; 1; 4],$$

$$\dot{\mathbf{r}} = [2; 3; 2],$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = [2; 6; -1].$$

A *simuló sík* adott pontjának helyvektora: $\mathbf{r}_0 = [2; 1; 4]$.

Normálvektora:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}.$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = [-15; 6; 6].$$

A normálvektor skalárral osztható, mert iránya nem változik, így

$$\mathbf{m} = [-5; 2; 2]$$

A simuló sík egyenlete:

$$-5(x-2) + 2(y-1) + 2(z-4) = 0$$

$$-5x + 2y + 2z = 0.$$

A *normál sík* adott pontjának helyvektora: $\mathbf{r}_0 = [2; 1; 4]$.

Normálvektora:

$$\dot{\mathbf{r}} = [2; 3; 2].$$

A normál sík egyenlete:

$$2(x-2) + 3(y-1) + 2(z-4) = 0$$

$$2x + 3y + 2z = 15.$$

A *rektifikáló sík* adott pontjának helyvektora

$$\mathbf{r}_0 = [2; 1; 4].$$

Normálvektora:

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}.$$

A normálvektor iránya megmarad, ha $\frac{1}{3}(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}$ -tal szorozunk, azaz a normálvektort $(\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{r}})$ -

nak vesszük.

Jelöljük ezt $\mathbf{v}_1$ -gyel

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = [-2; 14; -19].$$

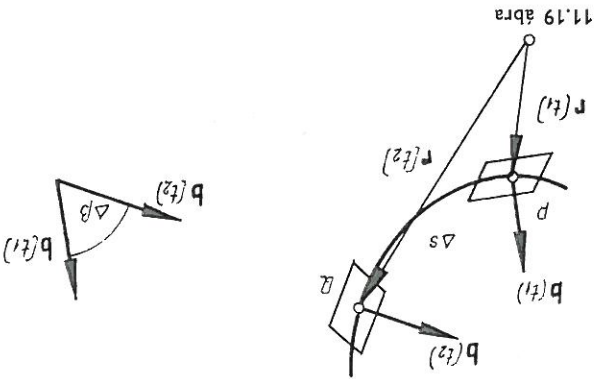
11.1.1.8 A torzió

azaz

$$-2(x-2) + 14(y-1) - 19(z-4) = 0,$$

A rektifikáló sík egyenlete:

A görbület a görbe eltérésének mértéke az egyenessétől. A torzió annak a mértéke, hogy mennyire tér el a térgörbe egy síkgörbétől. Rajzoljuk meg az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ térgörbe két tetszős



(11.19 ábra).

Definíció. Az átlagos torzió egy $|\Delta s|$ hosszúságú íven:

$$c_{\text{au}} = \frac{\Delta\beta}{|\Delta s|}.$$

ahol $\Delta\beta$ a végpontokhoz tartozó binormális vektorok hajlásszöge.

Definíció. A lokális torzió a $t = t_0$ pontban:

$$c = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\beta}{|\Delta s|} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta\beta}{|s(t) - s(t_0)|} = \frac{d\beta}{ds}.$$

A $T = \frac{1}{c}$ értéket csavarodási vagy torziós sugárnak nevezik.

Tétel. Ha $\mathbf{r}(t)$ háromszor differenciálható a t_0 pontban, és $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0$, akkor a görbe torziója az $\mathbf{r}(t_0)$ pontban.

$$c = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}|^2}.$$

ahol a deriváltakat a paraméter t_0 értékénél vesszük.

Bizonyítás. Mivel a t_0 pont környezetében $\mathbf{r}(t) \neq 0$,

$\Delta s \rightarrow 0$ esetén, $\Delta t \rightarrow 0$.

Igy

$$c = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta s|}}{\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta t|}} = \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

A nevező az ívhossz differenciáhányadosa:

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = |\mathbf{r}(t)| = |\dot{\mathbf{r}}|.$$

A számláló a binormális szögsebessége.

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{|\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}}|}{|\dot{\mathbf{b}}|^2} \quad (11.1.1.7. \text{ pont}).$$

A binormális az érintővektor segítségével kifejezve:

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \quad (11.1.1.6. \text{ pont})$$

vagy

$$\mathbf{b} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}.$$

Igy a binormális szögsebessége:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^2} = \frac{\left| \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \right|}{|\dot{\mathbf{r}}|^2} \cdot \frac{dt}{d\beta}.$$

A szorzat differenciálási szabálya szerint:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) = \ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \times \dddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \times \dddot{\mathbf{r}}.$$

Igy

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^2} \cdot \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}.$$

Az $(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})$ vektori szorzat kiszámításához felhasználjuk a kifejtési tételt (2.3.3. pont).

A kifejtési tétel szerint

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

A $\frac{d\beta}{dt}$ értékben szereplő $(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})$ vektori szorzatot a következőképpen számítjuk ki.

Legyen $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}$,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{b},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}.$$

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = [(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \ddot{\mathbf{r}}]\dot{\mathbf{r}} - [(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \dot{\mathbf{r}}]\ddot{\mathbf{r}}.$$

Mivel

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0,$$

és

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \times \ddot{\mathbf{r}} = 0,$$

Igy

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^2} \cdot \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|}.$$

Mivel

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\mathbf{r}}|,$$

$$\frac{1}{T} = c = \frac{\frac{d\beta}{ds}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\beta}{ds}}{\frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|}} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}.$$

$$c = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}.$$

Megjegyzés. A torziót szokás

$$c = \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}$$

alakban írni. Az $\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}$ vegyes szorzat pozitív vagy negatív előjele szerint a torzió is pozitív vagy negatív lesz. Ha a torzió pozitív, a térgörbe jobbsavavarodású, ha negatív, balcsavavarodású.

Példa

Állapítsuk meg az

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b \mathbf{k}$$

csavarvonal torzióját.

A derivált vektorok:

$$\dot{\mathbf{r}} = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -a \cos t \mathbf{i} - a \sin t \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = a \sin t \mathbf{i} - a \cos t \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}.$$

A vegyes szorzat:

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = ba^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = ba^2.$$

$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} > 0$, a térgörbe jobbsavavarodású.

$$c = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} = \frac{ba^2}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{ba^2}{a^2 + b^2}.$$

A hengeres csavarvonalnak nemcsak görbülete, hanem torziója is állandó.

11.1.1.9 A derivált vektor fizikai alkalmazása

Sebességvektor, gyorsulásvektor. Adjuk meg egy mozgó pont pályáját úgy, hogy megadjuk minden pont helyvektorát az idő függvényeként.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

$x(t), y(t), z(t)$ a pont koordinátáitengelyekre való vetületeinek egyenes vonalú mozgását írja le. Ha a mozgó pont pályájának egyenlete

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

és $\mathbf{r}(t)$ deriválható, akkor a mozgó pont sebességvektora:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Koordinátákkal:

$$\mathbf{v}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Ha a mozgó pont által meglett út (a térgörbe ívhossza) $s = s(t)$, akkor a sebességvektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{v}(t)| = \frac{ds}{dt}.$$

A sebességvektor abszolút értéke a pályamenti sebesség, iránya pedig megegyezik az $\mathbf{r}(t)$ érintővektorával.

Ha $\mathbf{r}(t)$ kétszer deriválható, a mozgó pont gyorsulásvektora:

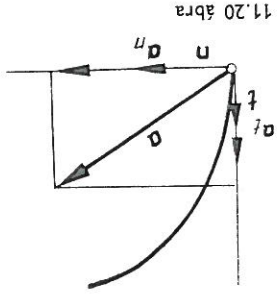
$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Ha $\mathbf{r}(t)$ kétszer deriválható és $\mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$, a befutás irányától függetlenül az $\mathbf{r}(t_0)$ ponthoz tartozó gyorsulásvektorok egy síkban, a simuló síkban vannak. Ugyanis $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}(t)$ és $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ mindig a simuló síkban van.

Tétel. Egy tetszőleges mozgás gyorsulásvektora mindig felbontható egy érintő és egy főnormális irányú összetevőre a következő alakban:

$$\mathbf{a} = at + \frac{v^2}{R} \mathbf{n} \quad (11.20 \text{ ábra}),$$

ahol t az érintő egységvektora ($t = \mathbf{r}'(s)$), $\mathbf{n}$ a főnormális egységvektora, $a = |\mathbf{a}|$, $v = |\mathbf{v}|$ és R a görbületi sugár.



11.20 ábra

Bizonyítás.

$$\mathbf{v}(t) = v \cdot \mathbf{t},$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{dt},$$

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = v \cdot \mathbf{n},$$

$$\mathbf{t}' = \mathbf{r}'(s) = \frac{1}{R} \mathbf{n}.$$

11.1.1.9 A derivált vektor fizikai alkalmazása

Sebességvektor, gyorsulásvektor. Adjuk meg egy mozgó pont pályáját úgy, hogy megadjuk minden pont helyvektorát az idő függvényeként.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

$x(t), y(t), z(t)$ a pont koordinátáitengelyekre való vetületeinek egyenes vonalú mozgását írja le. Ha a mozgó pont pályájának egyenlete

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

és $\mathbf{r}(t)$ deriválható, akkor a mozgó pont sebességvektora:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Koordinátákkal:

$$\mathbf{v}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Ha a mozgó pont által meglett út (a térgörbe ívhossza) $s = s(t)$, akkor a sebességvektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{v}(t)| = \frac{ds}{dt}.$$

A sebességvektor abszolút értéke a pályamenti sebesség, iránya pedig megegyezik az $\mathbf{r}(t)$ érintővektorával.

Ha $\mathbf{r}(t)$ kétszer deriválható, a mozgó pont gyorsulásvektora:

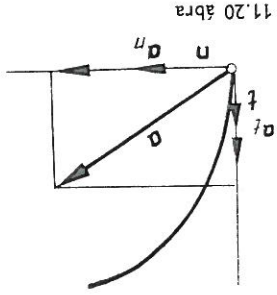
$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Ha $\mathbf{r}(t)$ kétszer deriválható és $\mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$, a befutás irányától függetlenül az $\mathbf{r}(t_0)$ ponthoz tartozó gyorsulásvektorok egy síkban, a simuló síkban vannak. Ugyanis $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}(t)$ és $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ mindig a simuló síkban van.

Tétel. Egy tetszőleges mozgás gyorsulásvektora mindig felbontható egy érintő és egy főnormális irányú összetevőre a következő alakban:

$$\mathbf{a} = at + \frac{v^2}{R} \mathbf{n} \quad (11.20 \text{ ábra}),$$

ahol t az érintő egységvektora ($t = \mathbf{r}'(s)$), $\mathbf{n}$ a főnormális egységvektora, $a = |\mathbf{a}|$, $v = |\mathbf{v}|$ és R a görbületi sugár.



11.20 ábra

Bizonyítás.

$$\mathbf{v}(t) = v \cdot \mathbf{t},$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{dt},$$

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = v \cdot \mathbf{n},$$

$$\mathbf{t}' = \mathbf{r}'(s) = \frac{1}{R} \mathbf{n}.$$

Igy

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n}.$$

A gyorsulás összetevői:

A tangenciális gyorsulás $a_t = \frac{dv}{dt}$, (abszolút értéke: $|\mathbf{a}| = \frac{dv}{dt}$ a pályamenti gyorsulás) és a normális irányú gyorsulás, a centrípétális gyorsulás:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{n} \quad \left(\text{abszolút értéke } |a_n| = \frac{v^2}{R} \right).$$

A centrípétális gyorsulás független a pályamenti gyorsulástól, csak a pályamenti sebesség, és a görbülettől függ. Mivel $\frac{R}{v^2}$ pozitív, a_n az $\mathbf{n}$ -nel egy irányú, a görbületi középpont felé mutat.

u) Egyenes vonalú mozgás: Az érintő egységvektor: $\mathbf{t} = \text{konst.}$

$$\text{Igy} \quad \mathbf{a} = v \frac{d\mathbf{t}}{dt} = 0.$$

A mozgás gyorsulásvektora:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t}.$$

b) Állandó pályasebességű mozgás:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{dt}$$

$$v = \text{konst.}, \quad \frac{dv}{dt} = 0,$$

$$\text{Igy} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_n = v \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}.$$

c) Egyenletes körmozgás:

Mozogjon a pont a 11.21 ábra szerinti elhelyezésű, R sugarú körön $|\mathbf{v}| = v = \text{konst}$ pályasebességgel. Ekkor a szögsebesség állandó:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

ahol T a körforgás ideje.

$$\mathbf{r}(t) = R \cos \omega t \mathbf{i} + R \sin \omega t \mathbf{j}$$

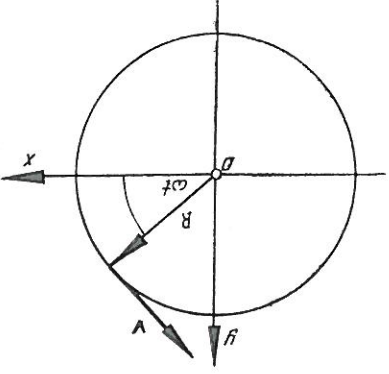
(11.21 ábra).

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t) = -R\omega \sin \omega t \mathbf{i} + R\omega \cos \omega t \mathbf{j},$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{r}}(t) = -R\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - R\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j},$$

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}, \quad (|\mathbf{r}| = R).$$

11.21 ábra



A gyorsulás a helyvektorral ellentétes irányú:

$$|a| = \omega^2 |r| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \quad |a| = \omega^2 R = \left(\frac{v}{R} \right)^2 R = \frac{v^2}{R}$$

11.1.2 Kétfázisú vektor-skalar függvények

11.1.2.1 Felületek egyenlete. Geometria szemléltetés

A kétfázisú vektor-skalar függvény egyenlete

ahol u és v egymástól függetlenül változó skalaris mennyiségek.

$$u = u_0 = \text{konst}, \quad r = r(u; v),$$

$$r = r(u_0; v),$$

u minden értékéhez egy térgörbe tartozik, az egyenlet egy görbesereg egyenlete.

$$v = v_0 = \text{konst}, \quad r = r(u; v_0),$$

az egyenlet szintén görbesereg egyenlete.

$$\text{Az } r = r(u; v)$$

egyenlet kétszeres görbesereg egyenlete.

Az $r = r(u; v)$ egyenlet felület egyenlete.

Az $u = u_0, v = v_0$ hoz tartozó egyváltozós függvények az ún. paramétergörbék.

Az $r = r(u; v)$ vektoriais egyenlet megoldható három kétfázisú skalaris függvényekkel:

$$\begin{cases} x = x(u; v), \\ y = y(u; v), \\ z = z(u; v). \end{cases}$$

A vektoriais alak a koordináták segítségével:

$$r = x(u; v)i + y(u; v)j + z(u; v)k.$$

Ha az $r = r(u; v)$ egyenletben a paraméterek az x és y változók, z -t kifejezve x és y segítségével a

$$z = f(x, y)$$

egyenlethez jutunk, amely — mint tudjuk — a felület egyenlete.

A vektoriais egyenlet:

$$r = xi + yj + f(x, y)k.$$

Példák

1. A sík egyenlete

$$r = a + bu + cv \quad (11.22 \text{ ábra}).$$

Ha

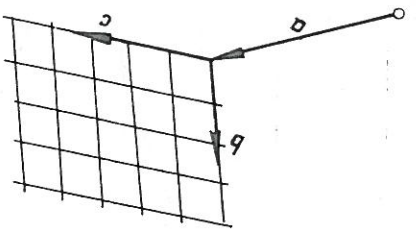
$$u = u_0,$$

$$r = a + bu_0 + cv \quad \text{egyenest egyenlet.}$$

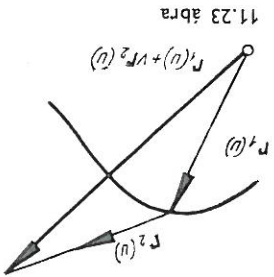
Ha

$$v = v_0,$$

$$r = a + bu + cv_0, \quad \text{egyenest egyenlet.}$$



11.22 ábra



11.23 ábra

Két párhuzamos egyenestereget kapunk. Az egyenlet sík egyenlete.

$$u = 0, \quad v = 0, \quad r = a,$$

Ha

$$a = 0,$$

$$r = bu + cv,$$

az egyenlet az origón átmenő sík egyenlete.

2. Vonalfelület egyenlete. Vonalfelületen olyan felületet értünk, amely egy egyenesnek egy térgörbe mentén való csúsztatásával állítható elő.

Legyen az adott térgörbe egyenlete $r = r_1(u)$. Illesszük a térgörbéhez az $r = r_2(u)$ vektort, illetve az $r = vr_2(u)$ egyenest.

Ha az egyenest a görbén végigcsúsztatjuk, az

$$r = r_1(u) + vr_2(u) \quad \text{felületet kapjuk} \quad (11.23 \text{ ábra}).$$

Ha

$$u = u_0,$$

$$r = r_1(u_0) + vr_2(u_0) \quad \text{egyenestereget.}$$

Ha

$$v = v_0,$$

$$r = r_1(u) + v_0 r_2(u),$$

a paramétervonalak térgörbék (11.24 ábra).

3. Lefejthető vonalfelület. Az $r_1(u)$ térgörbén csúsztatunk végig egy egyenest úgy, hogy az minden pontban

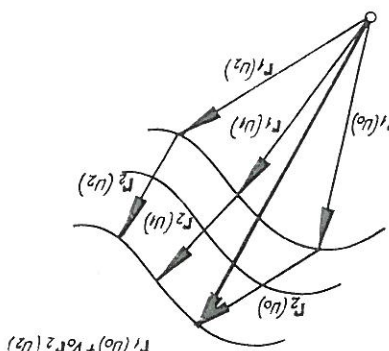
csúcs össze az érintővel. Az egyenes iránya tehát $r_1'(u)$, a

felület egyenlete:

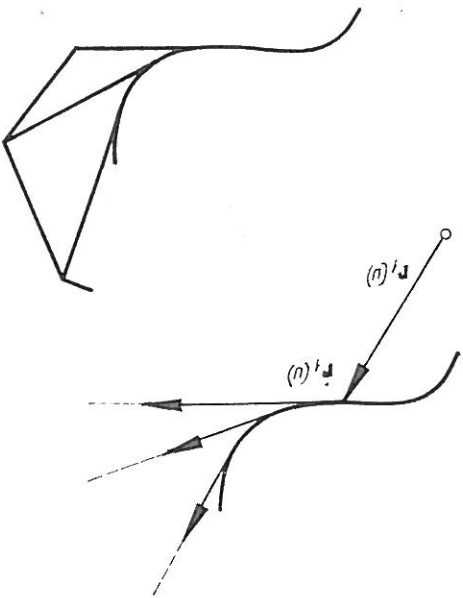
$$r = r_1(u) + ur_1'(u).$$

Az ilyen felületet lefejthető vonalfelületnek nevezzük, mert hajlítható, de nyújthatatlan lemezből készíthető (11.25 ábra).

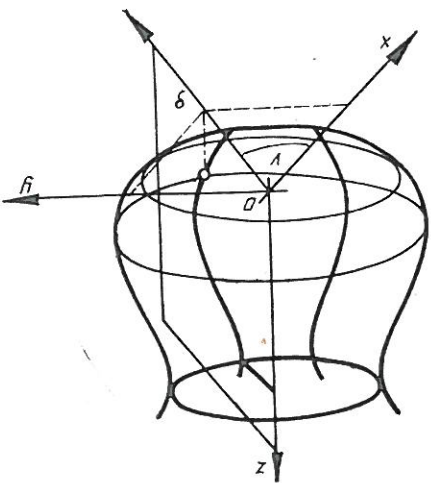
11.24 ábra



A lefethető vonalfelületeknek nagy műszaki jelentősége van. Kiteríthető felületekből az alkatrészek rendszerűben gyárthatók, és hajlítás után az anyagban kisebb mértékben maradnak káros feszültségek, vetemedések, mint egyéb felületi megmunkálások után.



11.25 ábra



11.26 ábra

4. Forgásfelület egyenlete. Legyen ϱ egy, az $(x; y)$ síkban fekvő, origón átmenő polártengely. Legyen a $(z; \vartheta)$ síkban fekvő síkgörbe egyenlete:

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \varrho(u) \\ z &= z(u) \end{aligned} \right\}$$

Forgassuk meg a görbét a z tengely körül.

Legyen v ϱ -nak az x tengely pozitív ágával bezárt szöge (11.26 ábra).

$$\text{Az} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \varrho \cos v \\ y &= \varrho \sin v \end{aligned} \right.$$

összefüggés alapján a forgásfelület egyenlete:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \varrho(u) \cos v \\ y &= \varrho(u) \sin v \\ z &= z(u) \end{aligned} \right.$$

*

Ha $u = u_0$, a paramétervonalak a z tengely körüli körök; ha $v = v_0$, a paramétervonalak a z tengelyen átfektetett síkok által kimetszett meridiángörbék.

A forgásfelület vektori egyenlete, ha a forgástengely a z tengely:

$$\mathbf{r}(u; v) = \varrho(u) \cos v \mathbf{i} + \varrho(u) \sin v \mathbf{j} + z(u) \mathbf{k}.$$

Hasonló módon írható fel a felület, ha a forgástengely az x vagy az y tengely.

Példák

1. A gömb egyenlete

Forgassuk meg a $(\varrho; z)$ koordináta-rendszerben fekvő, origó középpontú R sugarú kört a z tengely körül.

Ha u a z tengely pozitív ágától való elhajlás (11.27 ábra):

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= R \sin u, \\ z &= R \cos u. \end{aligned} \right.$$

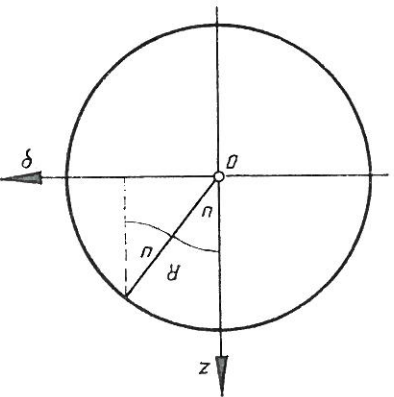
A gömb egyenlete:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= R \sin u \cos v, \\ y &= R \sin u \sin v, \\ z &= R \cos u. \end{aligned} \right.$$

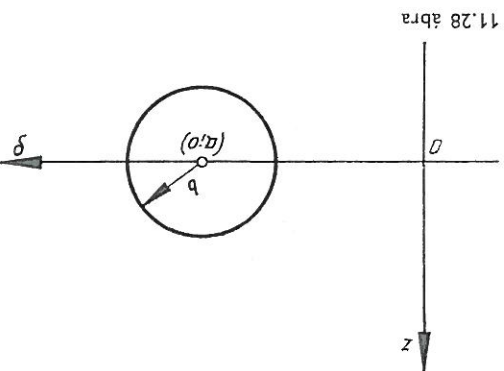
A teljes gömbfelületnél:

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &\leq u \leq \pi \\ 0 &\leq v \leq 2\pi. \end{aligned} \right.$$

Hasonlítsuk össze eredményeinket a gömbi koordinátáknál kapott eredményekkel (10.5.3.3.2 pont).



11.27 ábra



11.28 ábra

2. A gyűrűfelület vagy törzsz

Forgassuk meg a $(\varrho; z)$ síkban fekvő ($a; 0$) középpontú, b sugarú kört a z tengely körül. A $(\varrho; z)$ koordináta-rendszerben a kör egyenlete

$$(\varrho - a)^2 + z^2 = b^2, \quad (a > b).$$

11.28 ábra

Válasszuk u paraméternek a sugarának a z tengellyel párhuzamos egyenesről való elhajlási szögét.

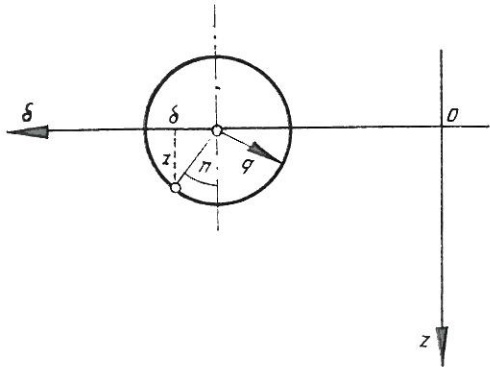
$$\left\{ \begin{aligned} \varrho &= a + b \sin u \\ z &= b \cos u \end{aligned} \right. \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

11.29 ábra

Forgassuk körbe ϱ -t az $(x; y)$ síkban.

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \varrho \cos v \\ y &= \varrho \sin v \end{aligned} \right. \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

11.30 ábra



11.29 ábra

A gyűrűfelület vagy törusz egyenlete tehát:

$$\begin{cases} x = (a+b \sin u) \cos v \\ y = (a+b \sin u) \sin v \\ z = b \cos u \end{cases} \quad (11.31 \text{ ábra}),$$

azaz

$$\mathbf{r} = (a+b \sin u) \cos v \mathbf{i} + (a+b \sin u) \sin v \mathbf{j} + b \cos u \mathbf{k},$$

ahol

$$0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

3. Csavarfelület egyenlete

Az $\mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + bv \mathbf{k}$ egyenlet csavarfelület egyenlete.

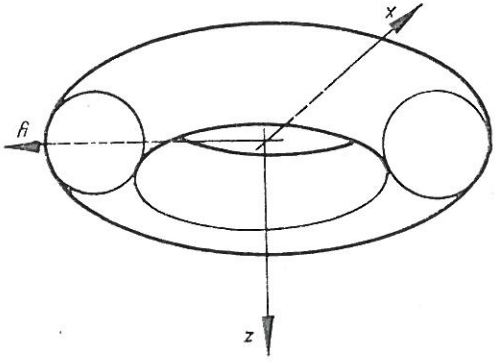
Ha $v = v_0$, $z = \text{konst}$, a paramétervonalak az $(x; y)$ síkkal párhuzamos egyenesek.

Ha $u = u_0 = \text{konst}$,

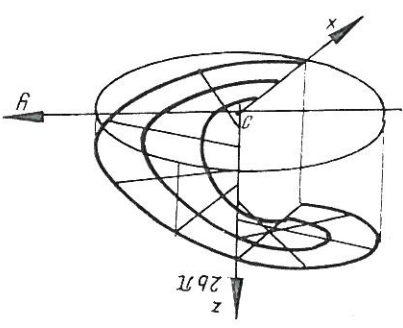
$$\mathbf{r} = u_0 \cos v \mathbf{i} + u_0 \sin v \mathbf{j} + bv \mathbf{k},$$

a paramétervonalak csavarvonalak.

A felület paramétervonalaival egyenesek, illetve csavarvonalak, a felület csavarfelület (11.32 ábra).



11.31 ábra



11.32 ábra

Kétváltozós vektor-skalár függvények határértéke, folytonossága

az egységnyi sugárú hengeres csavarfelület egy körforrásnyi részt kapjuk.

$$\text{Ha } 0 \leq v \leq 2\pi, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

A felület előállítható, ha egy, a z tengelyre merőleges egyenest egyenletesen körbemozgatunk és közben a z tengely irányában egyenletesen eltolunk.

Definíció. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u; v)$ kétváltozós vektor-skalár függvény határértéke az $\mathbf{r}_0$ vektor, ha megadva tetszős szerinti kis pozitív ε számot, található olyan δ , hogy

$$|\mathbf{r}(u; v) - \mathbf{r}_0| < \varepsilon,$$

ha

$$\sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2} < \delta,$$

ahol $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Jelölés:

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \mathbf{r}(u; v) = \mathbf{r}_0.$$

Definíció. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u; v)$ függvény az $(u_0; v_0)$ helyen folytonos, ha $u \rightarrow u_0$, $v \rightarrow v_0$ esetén van határértéke és ez megegyezik a helyettesítési értékkel.

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \mathbf{r}(u; v) = \mathbf{r}(u_0; v_0).$$

11.1.2.2 A kétváltozós vektor-skalár függvények deriváltjai

11.1.2.2.1 Parciális deriváltak

Definíció. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u; v)$ függvény u és v szerinti parciális deriváltjai:

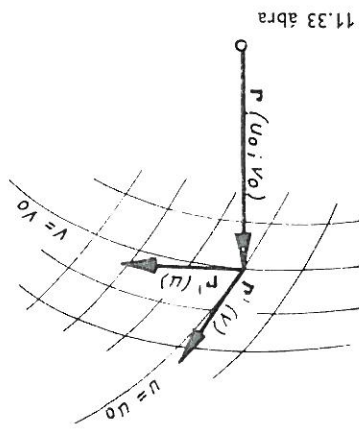
$$\mathbf{r}'_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u+\Delta u; v) - \mathbf{r}(u; v)}{\Delta u},$$

$$\mathbf{r}'_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u; v+\Delta v) - \mathbf{r}(u; v)}{\Delta v}.$$

A parciális deriváltak geometriai jelentése. Az u szerinti parciális derivált a $v_0 = \text{konst}$ térgörbe érintőjének vektora az $\mathbf{r}(u_0; v_0)$ pontban. A v szerinti parciális derivált az $u_0 = \text{konst}$ térgörbe érintőjének vektora az $(u_0; v_0)$ pontban (11.33 ábra). Könnyen kimutatható, hogy a parciális deriváltak a koordináták segítségével így írhatók:

$$\mathbf{r}'_u = x'_u \mathbf{i} + y'_u \mathbf{j} + z'_u \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v = x'_v \mathbf{i} + y'_v \mathbf{j} + z'_v \mathbf{k},$$



11.33 ábra

ahol x'_u az $x = x(u; v)$ függvény u szerinti parciális deriváltja, és így tovább. Az elsőrendű parciális deriváltakhoz hasonlóan képezhetők a másodrendű parciális deriváltak:

$$r''_{uu}, \quad r''_{uv}, \quad r''_{vu}, \quad r''_{vv}.$$

11.1.2.2.2 A felületre rajzolt térgörbe érintője

A láncszabály. Legyen az $r = r(u; v)$ felület egyenletében az u és v paraméter egy harmadik paraméternek, t -nek függvénye

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

Az egyenlet így alakul:

$$r = r(t) = r[u(t); v(t)].$$

t értéke t -től függ, az egyenlet a felületen fekvő t paraméterű térgörbe egyenletét jelenti (11.34 ábra).

Képezzük a t szerinti differenciáhányadost:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} r[u(t); v(t)].$$

A differenciáhányados az $r = r(t)$ térgörbe érintővektora.

Koordinátákra bontással igazolható a láncszabály.

Felteve, hogy r'_u és r'_v folytonos,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} r[u(t); v(t)] = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial r}{\partial v} \frac{dv}{dt}.$$

azaz

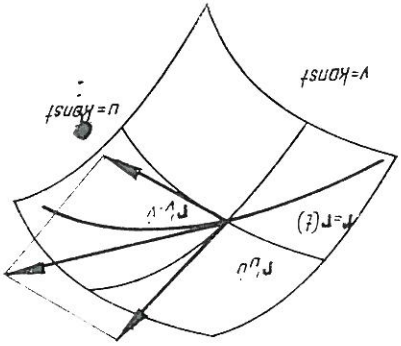
$$\frac{dr}{dt} = r'_u u + r'_v v.$$

Tehát az $r = r(t)$ térgörbe érintőjét a láncszabály segítségével a következőképpen szerkesztjük meg.

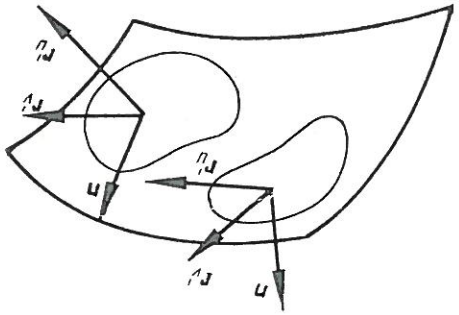
Az r'_u és r'_v vektorokat, azaz a $v = \text{konst}$ és $u = \text{konst}$ paramétergörbék érintővektorait az adott pontban u , illetve v -szorosra megnyújtjuk, és a megnyújtott vektorokat vektorialisan összegezzük (11.35 ábra).

11.1.2.2.3 A felület érintősíkjá

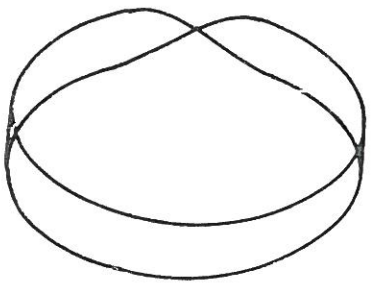
Tétel. Ha az $r = r(u; v)$ felület egy $r_0 = r(u_0; v_0)$ helyvektori pontjában r'_u és r'_v folytonos, és $r'_u(u_0; v_0) \times r'_v(u_0; v_0) \neq 0$, akkor az $r = r(u_0; v_0)$ ponton áthaladó, érintővel rendelkező felületi görbék érintői egy síkban fekszenek. Ezt a síkot a felület r_0 -beli érintősíkjának nevezzük.



11.35 ábra



11.36 ábra



11.37 ábra

A felület irányítása egy adott pontban n irányításával egyező. A felület egy adott pontbeli irányítása a ponthoz közeli pontokra kiterjeszthető, de az irányítás nem mindig terjeszthető ki az egész felületre. Az ún. Möbius-szalag egy egyszerű megcsavart és utána összeragasztott csík. Ez olyan felület, amelynél az irányítás nem terjeszthető ki az egész felületre (11.37 ábra).

vektort felületi normálisnak nevezik.

$$n = r'_u \times r'_v$$

Definíció. Az

$$n = r'_u \times r'_v$$

vektorra, azaz benne vannak abban a síkban, amelynek n a normálvektora.

Tehát a felületi görbék érintői mind merőlegesek az

$$n \perp \frac{dr}{dt}.$$

$$n \cdot \frac{dr}{dt} = 0, \quad \text{azaz}$$

A skaláris szorzat értéke nulla, mert a disztributív szabályt alkalmazva olyan két vegyes szorzatot kapunk, amelyben két-két tényező megegyezik.

$$n \cdot \frac{dr}{dt} = (r'_u \times r'_v) \cdot (r'_u u + r'_v v) = r'_u \cdot r'_v r'_u \cdot u + r'_u \cdot r'_v r'_v \cdot v = 0.$$

Képezzük az r vektor és az $n = r'_u \times r'_v$ vektor skaláris szorzatát.

$$\dot{r} = r'_u u + r'_v v.$$

Bizonyítás. A felületi görbe irányvektora:

Az érintő sík egyenlete. Legyen az r_0 pontbeli érintő sík fútpontjának helyvektora R .

Mivel $(R - r_0) \perp n$,

az érintő sík egyenlete:

$$(R - r_0)n = 0, \text{ azaz}$$

$$(R - r_0)(r'_u \times r'_v) = 0$$

Tehát az érintő sík egyenlete vektori alakban:

$$(R - r_0)r'_u r'_v = 0.$$

Az érintő sík egyenlete skálár alakban, ha

$$R = xi + yj + zk:$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Legyen a felület

$$z = f(x; y) \text{ alakban adott.}$$

$$r = xi + yj + f(x; y)k.$$

A paraméterek x és y .

$$r'_x = i + 0 \cdot j + f'_x k$$

$$r'_y = 0 \cdot i + j + f'_y k.$$

Az érintő sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve az érintő sík egyenlete:

$$-f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

Megkaptuk az érintő sík 10.2.5 pontban megismert egyenletét. Az egyenletből vagy az $r'_x \times r'_y$ vektori szorzat kifejtéséből láthatjuk, hogy az érintő sík normálvektora:

$$n = -f'_x(x_0; y_0)i - f'_y(x_0; y_0)j + 1k.$$

Pelda

Írjuk fel az

$$r = u \cos v i + u \sin v j + vk$$

csavarfelület érintő síkjának egyenletét az $u = 3$, $v = \pi$ pontban.

A parciális deriváltak:

$$r'_u = \cos v i + \sin v j + 0 k,$$

$$r'_v = -u \sin v i + u \cos v j + k.$$

11.1.2.3 Felületdarab felszíne

Valamely felületdarab felszínének kiszámításakor a következőképpen járunk el.

A felület egyenlete legyen $r = r(u; v)$.

A felület pontjai megfelelnek az $(u; v)$

sík pontjainak.

Borítsuk be az $(u; v)$ síkot egy három-

szögekből álló hálózattal.

Legyen az $(u; v)$ sík egyik három-

szöge A .

Szemeljünk ki a felületnek azt a három-

pontját, amely az A háromszög csúcs-

pontjainak felel meg. Legyen ez a

háromszög A_F (11.39 ábra).

Az összes ilyen felületi háromszöget

egyesítve a felületbe írt poléderfelü-

letet kapunk. Azt várhatjuk, hogy ha

az $(u; v)$ sík háromszögeinek hálózatait

minden határon túl finomítjuk, a

poléderfelület felszíne meghatározott

határrétekhez közeledik, és ez a határ-

Az adott pontban:

$$r_0 = [-3; 0; \pi].$$

$$r'_u = [-1; 0; 0],$$

$$r'_v = [0; -3; 1].$$

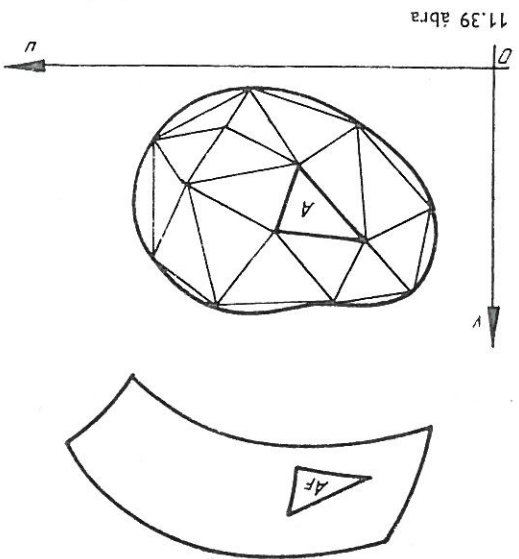
Az érintő sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x + 3 & y & z - \pi \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve:

$$(x + 3) \cdot 0 - y(-1) + (z - \pi)3 = 0$$

$$y + 3z = 3\pi.$$



11.39 ábra

Azonban már olyan egyszerű felület esetén, mint egy egyenes körhenger palástja, a beltr érték a felületdarab felszíne.

Ha a felületnek van felszíne, akkor a felületet mérhető felszínűnek nevezzük.

határrétekhez közelednek. Ezt a határréteket a felületdarab felszínűnek nevezzük.

180°-nál kisebb körlet alatt maradjon, a poléderfelületek felszínei egy meghatározott

sík hálózatait úgy készítjük, hogy valamennyi háromszög minden egyes szöge egy

Bebizonyítható, hogy ha az $(u; v)$ sík vizsgált részén r'_u és r'_v folytonosak, és az $(u; v)$

különböző véges határrétekhez tartanak.

poléderfelületek felszínei — a hálózat finomításának módjától függően — a végtelehez vagy

Azonban már olyan egyszerű felület esetén, mint egy egyenes körhenger palástja, a beltr

érték a felületdarab felszíne.

határrétekhez közeledik, és ez a határ-

poléderfelület felszíne meghatározott

minden határon túl finomítjuk, a

az $(u; v)$ sík háromszögeinek hálózatait

letet kapunk. Azt várhatjuk, hogy ha

egyesítve a felületbe írt poléderfelü-

letet kapunk. Azt várhatjuk, hogy ha

az $(u; v)$ sík háromszögeinek hálózatait

minden határon túl finomítjuk, a

poléderfelület felszíne meghatározott

határrétekhez közeledik, és ez a határ-

poléderfelület felszíne meghatározott

minden határon túl finomítjuk, a

az $(u; v)$ sík háromszögeinek hálózatait

letet kapunk. Azt várhatjuk, hogy ha

egyesítve a felületbe írt poléderfelü-

letet kapunk. Azt várhatjuk, hogy ha

az $(u; v)$ sík háromszögeinek hálózatait

minden határon túl finomítjuk, a

poléderfelület felszíne meghatározott

határrétekhez közeledik, és ez a határ-

poléderfelület felszíne meghatározott

minden határon túl finomítjuk, a

az $(u; v)$ sík háromszögeinek hálózatait

letet kapunk. Azt várhatjuk, hogy ha

egyesítve a felületbe írt poléderfelü-

letet kapunk. Azt várhatjuk, hogy ha

az $(u; v)$ sík háromszögeinek hálózatait

minden határon túl finomítjuk, a

poléderfelület felszíne meghatározott

határrétekhez közeledik, és ez a határ-

poléderfelület felszíne meghatározott

minden határon túl finomítjuk, a

az $(u; v)$ sík háromszögeinek hálózatait

letet kapunk. Azt várhatjuk, hogy ha

egyesítve a felületbe írt poléderfelü-

letet kapunk. Azt várhatjuk, hogy ha

Tétel. Tegyük fel, hogy a H paramétertartomány mérhető területű az $(u; v)$ síkon, és a H halmazon és annak határan

$$\mathbf{r}(u; v), \quad \mathbf{r}'_u \quad \text{és} \quad \mathbf{r}'_v \quad \text{folytonos.}$$

Ekkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u; v)$ felület felszíne:

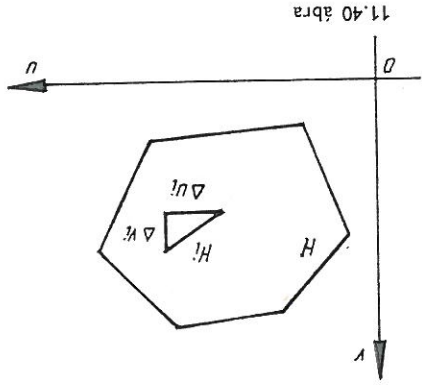
$$F = \iint_H |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du \, dv.$$

A télt nem bizonyítjuk.

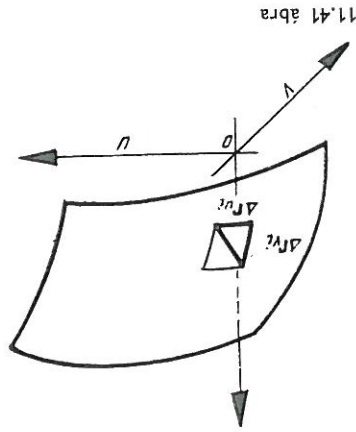
Az állítás szemléltetésére vázlatosan tárgyaljuk a következő esetet.

Legyen H egy sokszög (11.40 ábra).

Ekkor H felbontható derékszögű háromszögekre úgy, hogy a befogók párhuzamosak az u és v tengelyekkel. Nyilvánvaló, hogy akármilyen finom felosztás is elérhető ilyen módon.



11.40 ábra



11.41 ábra

Tekintsük a H_i háromszög csúcspontjainak megfelelő pontokat a felületen és az ezekkel ki

fejtett beírt háromszöget (11.41 ábra).

A H_i háromszög befogóinak megfelelő oldalak hossza:

$$|\Delta \mathbf{r}'_u| \quad \text{és} \quad |\Delta \mathbf{r}'_v|.$$

A beírt háromszög területe:

$$\frac{1}{2} |(\Delta \mathbf{r}'_u)_i \times (\Delta \mathbf{r}'_v)_i| \approx \frac{1}{2} |\mathbf{r}'_u \Delta u_i \times \mathbf{r}'_v \Delta v_i| = \frac{1}{2} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \Delta u_i \Delta v_i.$$

A parciális deriváltak a H_i háromszög valamelyik $(u_i; v_i)$ pontjához tartoznak. Az $\frac{1}{2} \Delta u_i \Delta v_i$ érték a H_i háromszög területe:

$$\frac{1}{2} \Delta u_i \Delta v_i = T(H_i).$$

A teljes felosztásnak megfelelő poléder felszíne közelítőleg megegyezik a

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_u(u_i; v_i) \times \mathbf{r}'_v(u_i; v_i) T(H_i)$$

összegegel.

Bizonyítható, hogy az elérés, a felosztás finomításával nullához tart. Az összeg pedig nem más, mint a

$$\iint_H |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du \, dv$$

integrál közelítő összege, ezért minden határon túl finomodó felosztás esetén ehhez az integrálhoz tart.

Igy a kikötött felosztáshoz tartozó poléderek felszíne meghatározott értékhez, a

$$\iint_H |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du \, dv$$

integrálhoz tart.

Tehát, ha létezik a felületdarab felszíne, akkor

$$F = \iint_H |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du \, dv.$$

Legyen az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u; v)$ felület az $z = f(x; y)$ alakban adott.

$$x = x, \quad y = y, \quad z = f(x; y),$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x; y)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_x = \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + f'_x\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_y = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + f'_y\mathbf{k}.$$

Az $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y$ vektori szorzat:

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x\mathbf{i} - f'_y\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Abszolút értéke:

$$|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| = \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1}.$$

A felzsin a H halmazon:

$$F = \iint_H \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \, dx \, dy.$$

Megkaptuk a $z = f(x; y)$ felület adott tartomány feletti részének felszínére a 10.5.2.3 pontban megismert képletet.

Példa

Számítsuk ki az

$$\mathbf{r} = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$$

csavarfelület felszínét a

$$0 \leq u \leq 1; \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

paraméter értékeknek megfelelő tartományban.

$$\mathbf{r}'_u = \cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v = -u \sin v\mathbf{i} + u \cos v\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Az $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ vektori szorzat:

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = \sin v \mathbf{i} - \cos v \mathbf{j} + u(\cos^2 v + \sin^2 v) \mathbf{k}.$$

A vektori szorzat abszolút értéke:

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{1 + u^2},$$

A felszín:

$$F = \int_{-2\pi}^0 \int_1^0 \sqrt{1 + u^2} \, du \, dv.$$

Az $\int \sqrt{1 + u^2} \, du$ határozatlan integrál kiszámítását az $u = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel végezve:

$$u = \operatorname{sh} t; \quad \sqrt{1 + u^2} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t; \quad du = \operatorname{ch} t \, dt,$$

$$\int \sqrt{1 + u^2} \, du = \int \operatorname{ch}^2 t \, dt = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t + t) + C.$$

A felszín tehát:

$$F = \int_{-2\pi}^0 \int_1^0 \sqrt{1 + u^2} \, du \, dv = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t + t \right]_1^0 \int_{-2\pi}^0 dv = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + u^2} u + \operatorname{arsh} u \right]_1^0 \int_{-2\pi}^0 dv =$$

$$= \pi (\sqrt{2} + \operatorname{arsh} 1) = \pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})].$$

11.2 SKALÁR-VEKTOR FÜGGVÉNYEK

11.2.1 A skálár-vektor függvények fogalma, szemléltetése

Azok a függvények, amelyeknél a független változó vektor, a függvény skálár, a leírás sorrendje szerint: skálár-vektor függvények.
A függvénykapcsolat jele

$$u = u(\mathbf{r}).$$

Az $\mathbf{r}$ vektormennyiség minden szóba jöhető értékéhez az u skáláris mennyiség meghatározott értéke tartozik. Skálár-vektor függvény például a tér különböző pontjaihoz (helyvektoraihoz) tartozó hőmérséklet vagy nyomás. Skálár-vektor függvény az elektromos tér potenciálja, amely skáláris mennyiség és a pont helyvektorától függ.
Mivel $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, azaz $\mathbf{r}$ a koordináták függvénye, az u skáláris változó is a koordinátáktól függ, azaz

$$u = u(x, y, z).$$

Tehát az $u = u(\mathbf{r})$ skálár-vektor függvény nem más, mint egy háromváltozós skáláris függvény. A skálár-vektor függvényeket skálártereknek is nevezik.

Háromváltozós skálár függvényt nem tudunk ábrázolni. Ezért a szemléltetés az $u = \text{konst}$ felületek, az ún. szintfelületek segítségével történik.

$$u = u(x, y, z), \\ u = \text{konst} = c, \\ u(x, y, z) = c.$$

Ez implicit alakban adott kétváltozós függvény.

Különböző konstansokhoz különböző nivófelületek vagy szintfelületek tartoznak.

Példák

Alapítsuk meg a következő skálárterek szintfelületeinek jellegét:

$$\begin{aligned} 1. \quad & u = u(\mathbf{r}) = r^2, \\ & \text{Mivel } r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{Ha } u = c \quad (c \geq 0) \\ & x^2 + y^2 + z^2 = c, \end{aligned}$$

a szintfelületek az origó körüli koncentrikus gömbök.

$$\begin{aligned} 2. \quad & u = z - x^2 - y^2, \\ & \text{Ha } u = c, \\ & z = x^2 + y^2 + c, \end{aligned}$$

a szintfelületek forgási paraboloidok.

$$3. \quad u = \frac{xy}{z},$$

$$\text{Ha } u = c, \quad z = cxy,$$

a szintfelületek hiperbolikus paraboloidok.

11.2.2 Skálár-vektor függvények hatáértéke, folytonossága

Hatáérték

Definíció. Az $u = u(\mathbf{r})$ skálár-vektor függvénynek van hatáértéke az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ helyen, u_0 , ha tetszőlegesen kis pozitív ε -hoz található olyan pozitív δ , hogy

$$|u(\mathbf{r}) - u_0| < \varepsilon, \quad \text{ha } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta, \quad \text{ahol } \delta = \delta(\varepsilon).$$

Ennek szokásos jelölése:

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} u(\mathbf{r}) = u_0.$$

Folytonosság

Definíció. Az $u = u(\mathbf{r})$ függvény az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ helyen folytonos, ha $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ esetén van u_0 hatáértéke, és ez megegyezik a helyettesítési értékkel.

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} u(\mathbf{r}) = u_0 = u(\mathbf{r}_0).$$

Egyenletes folytonosság

Definíció. A tér valamely V halmazában egyenletesen folytonos a skalártér, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$ mennyiség, hogy

$$|u(r_1) - u(r_2)| < \varepsilon,$$

ha a V halmaz r_1 és r_2 pontpárjára

$$|r_1 - r_2| < \delta(\varepsilon).$$

Tétel. Ha az $u = u(r)$ függvény folytonos a V korlátos és zárt halmazon, akkor ott egyenletesen is folytonos.

A tételt nem bizonyítottuk.

11.2.3 A skalár-vektor függvény deriváltja, a gradiensvektor

Próbáljuk értelmezni az $u = u(r)$ skalár-vektor függvény derivált vektorát.

$\frac{\Delta u}{\Delta r}$ differenciáhányadosnak nincs értelme, mert vektorral osztani nem lehet. Célzerűbb ezért a differenciálhatóságnak a *differenciál* segítségével kapott kritériumából kiindulni. Az egyváltozós $y = f(x)$ függvény az x pontban differenciálható, ha a függvénynövekmény előállítható a következő alakban (7.1.5. pont):

$$\Delta y = A \Delta x + \varepsilon \Delta x,$$

ahol $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $\Delta x \rightarrow 0$.

Az A érték a függvény differenciálhányadosa az x pontban.

Hasonlóan értelmezzük az $u = u(r)$ skalár-vektor függvény derivált vektorát.

Definíció. Legyen

$$\Delta u = u(r + \Delta r) - u(r).$$

Az $u = u(r)$ függvény deriválható az r pontban, ha létezik olyan Δr -től független v vektor,

hogy

$$\Delta u = v \cdot \Delta r + \varepsilon \cdot \Delta r,$$

$$\Delta r \rightarrow 0 \text{ esetén } \varepsilon \rightarrow 0.$$

ahol

Ezt a v vektort, amely általában függ az r helytől, az $u = u(r)$ skalártér derivált vektorának vagy gradiensvektorának, röviden gradiensének nevezzük.

Jele: $v = \text{grad } u$.

A gradiensvektor kifejezése koordinátákkal. Tegyük fel, hogy

$$u = u(r)$$

differenciálható az r helyen, és legyenek a v derivált vektor komponensei: v_1, v_2, v_3 , azaz

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k.$$

Legyen

$$\Delta r = \Delta x i + \Delta y j + \Delta z k,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j + \varepsilon_3 k,$$

A gradiens definíciója alapján

$$\Delta u = v \cdot \Delta r + \varepsilon \cdot \Delta r.$$

A skaláris szorzatokat kifejtve:

$$\Delta u = v_1 \Delta x + v_2 \Delta y + v_3 \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z.$$

Válasszunk speciálisan a Δr vektort úgy, hogy $\Delta y = \Delta z = 0$ legyen.

$$\text{Ekkor } \Delta u = v_1 \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x.$$

$$\text{Ebből } \frac{\Delta u}{\Delta x} = v_1 + \varepsilon_1.$$

$\Delta x \rightarrow 0$ esetén a jobb oldal határértéke v_1 . Létezik tehát az $u = u(x; y; z)$ függvény x szerinti parciális deriváltja az r helyen, és ez éppen a gradiens vektor x komponense: v_1 .

$$\text{Tehát } v_1 = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Hasonlóan kimutatható, hogy

$$v_2 = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{és} \quad v_3 = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Tehát az $u = u(r)$ skalár-vektor függvény derivált vektora, a gradiensvektor:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

Vesszük be a következő szimbolikus differenciáoperátort, az ún. nabla vektort!

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k.$$

A nabla vektor segítségével a gradiensvektor:

$$\text{grad } u = \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

Differenciálási szabályok. A gradiensvektorokra érvényesek a következőkönként igazolható differenciálási szabályok:

$$1. \quad \text{grad } (u_1 + u_2) = \text{grad } u_1 + \text{grad } u_2,$$

$$2. \quad \text{grad } (u_1 \cdot u_2) = u_1 \text{ grad } u_2 + u_2 \text{ grad } u_1,$$

$$3. \quad \text{grad } f(u) = f'(u) \text{ grad } u,$$

$$4. \quad \frac{d}{dt} u[r(t)] = \text{grad } u \frac{dr}{dt}.$$

Igazoljuk a 4. szabályt. Ha a skalárérték közvetett függvénye a t skalár paraméternek, keressük u -nak t szerinti differenciálhányadosát:

$$u = u(r), \quad r = r(t), \quad \text{azaz} \quad u = u[r(t)].$$

A gradiens értelmezése szerint:

$$\Delta u = \text{grad } u \cdot \Delta r + e \cdot \Delta r.$$

Összük el az egyenlet mindkét oldalát Δr -vel:

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \text{grad } u \frac{\Delta r}{\Delta r} + e \cdot \frac{\Delta r}{\Delta r}.$$

Ha $\Delta r \rightarrow 0$, akkor $\Delta r \rightarrow 0$, és emiatt $e \rightarrow 0$. Így a második tag tart a nullához. Ezért határátmenet esetén:

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = \text{grad } u \frac{dr}{dt}.$$

Ez a szabály segíti megérteni a gradiensvektor szemléletes fogalmát. A skalárérték pontjain át vegyünk fel különböző görbék, és azokat jellemezzük az $r = r(s)$ egyenlettel, azaz válasszuk paraméternek az ívhosszt.

Ekkor a skalárérték

$$u = u(r) = u[r(s)].$$

Az (1) képlet szerint:

$$\frac{du}{ds} = \text{grad } u \frac{dr(s)}{ds}.$$

$$\text{Mivel} \quad \frac{dr(s)}{ds} = t,$$

$$\frac{du}{ds} = \text{grad } u \cdot t$$

Ha $u = \text{konst.}$

$$\frac{du}{ds} = 0,$$

$$\text{grad } u \cdot t = 0.$$

$$\text{grad } u \perp t.$$

Tehát a gradiensvektor merőleges az érintő egységvektorra,

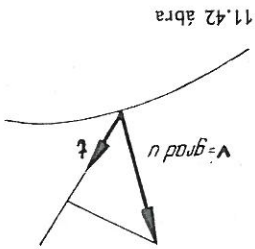
azaz a szintfelület érintősíkjára. A $\frac{du}{ds} = \text{grad } u \cdot t$ skaláris

szorzat maximális, ha a két vektor párhuzamos, azaz az érintő egységvektor merőleges a

szintfelületre.

Ekkor

$$|\text{grad } u \cdot t| = |\text{grad } u| |t| = |\text{grad } u|.$$



11.42 ábra

Fejezzük ki a

$$\frac{du}{ds} = \text{grad } u \cdot t$$

skaláris szorzatot a komponensekkel.

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

$$t = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k.$$

Így

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Ez nem más, mint az $u = u(x, y, z)$ háromváltozós skalárfüggvény iránymenti deriváltja $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ az egységvektor komponensei).

A gradiensvektor tehát olyan vektor, amely a szintfelületre merőleges, nagysága pedig a szintfelületre merőleges irányban való változási sebességet méri. A gradiensvektor értelme

a nagyobb skalárértékű szintfelület felé mutat.

A gradiensvektor a pont helyvektorától függ, tehát a gradiensvektor vektor-vektor függvény.

Példák

1. Határozzuk meg az $u = e^{|r|}$ skalárérték gradiensvektorát!

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

$$u = e^{|r|} = e^{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{|r|} e^{|r|}.$$

Hasonlóan:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{|r|} e^{|r|}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{|r|} e^{|r|}.$$

$$\text{grad } u = \frac{e^{|r|}}{|r|} x i + \frac{e^{|r|}}{|r|} y j + \frac{e^{|r|}}{|r|} z k.$$

$$\text{grad } u = \frac{e^{|r|}}{|r|} \cdot |r|.$$

2. Írjuk fel az $u = \arctg \frac{x}{y}$ skalárérték gradiensvektorát!

A skalárérték $x = 0$ -ra, azaz az y tengely mentén nincs értelmezve.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(\frac{1}{y} \right) = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$\text{grad } u = -\frac{x}{y} \mathbf{i} + \frac{x^2 + y^2}{x} \mathbf{j}.$$

3. Írjuk fel az $u = xyz - xy^2$ skalártér iránymenti deriváltját a $P(3; -1; 2)$ pontban az $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ vektor irányában. Mennyi az adott pontban az iránymenti derivált maximális értéke?

$$u = xyz - xy^2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz - y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz - 2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy.$$

$$\text{grad } u = (yz - y^2)\mathbf{i} + (xz - 2xy)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}.$$

A $P(3; -1; 2)$ pontban:

$$\text{grad } u = -3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Az a vektor irányába mutató egységvektor:

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{13}\mathbf{i} + \frac{4}{13}\mathbf{j} + \frac{12}{13}\mathbf{k}.$$

Az iránymenti derivált:

$$\frac{du}{ds} = \text{grad } u \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|},$$

$$\frac{du}{ds} = -\frac{9}{13} + \frac{48}{13} - \frac{36}{13} = \frac{3}{13}.$$

$$\left(\frac{du}{ds}\right)_{\max} = |\text{grad } u| = |-3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}| = \sqrt{9 + 144 + 9} = \sqrt{162} = 12,7.$$

11.3 VEKTOR-VEKTOR FÜGGVÉNYEK (VEKTORTÉREK)

11.3.1 A vektor-vektor függvény fogalma, szemléltetése

Ha az $\mathbf{r}$ változó vektor minden szóba jöhető értékéhez a $\mathbf{v}$ vektor meghatározott értéke tartozik, akkor a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ függvény vektor-vektor függvény.

A vektor-vektor függvényeket vagy vektortereket a következőképpen szemléltetjük. Vesszük a térbeli koordináta-rendszerben a független változókat, az $\mathbf{r}$ helyvektorokat. Végpontjaikban felmérjük a függvénykapcsolat által meghatározott $\mathbf{v}$ vektorokat. Írjuk fel az $\mathbf{r}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat, komponensek segítségével:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

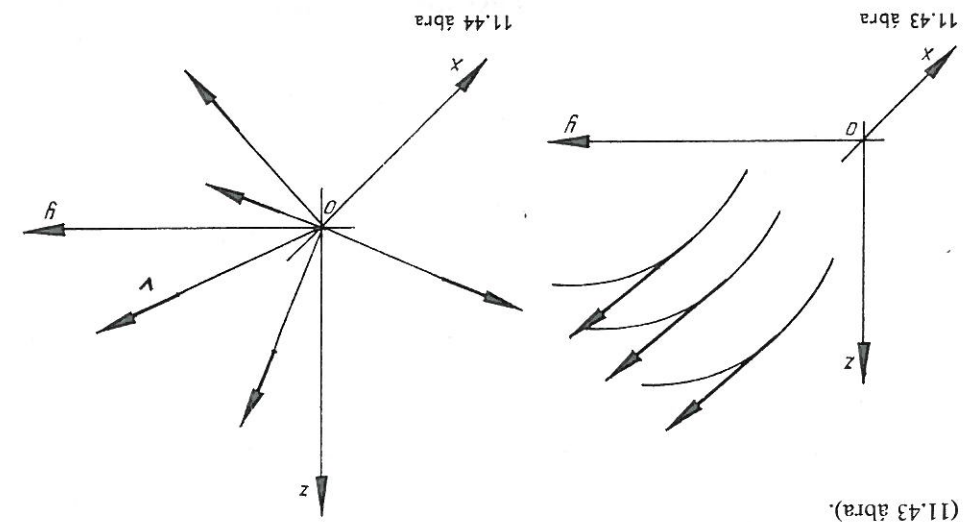
$$\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + s\mathbf{k}.$$

A $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ függvénykapcsolat miatt $\mathbf{v}$ komponensei $\mathbf{r}$ komponenseitől függnek.

$$p = p(x; y; z),$$

$$q = q(x; y; z),$$

$$s = s(x; y; z).$$



Példák

1. $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$. A tér minden pontjához hozzárendeljük a helyvektorral egyező irányú egységvektort (11.44 ábra).

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \frac{x}{|\mathbf{r}|}\mathbf{i} + \frac{y}{|\mathbf{r}|}\mathbf{j} + \frac{z}{|\mathbf{r}|}\mathbf{k}.$$

2. *Gravitációs tér.* A gravitációs tér egy adott pontjában a térintenzitás (térerősség) az egységnyi tömrege ható erő. Az erő iránya a gravitációs centrum felé mutat. Egy adott pont elég kis környezetében az erővektor jó közelítéssel párhuzamosnak vehető egy alkalmasan választott koordináta-rendszer z tengelyével, amelyet a térerősség-vektorral ellentétesen irányítunk. Legyen az erőtér helyvektora:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

A gravitációs tér erővektora:

$$\mathbf{G} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + s\mathbf{k}.$$

Tehát a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér három háromváltozós függvényvel, azaz három skálár-vektor függvényvel adható meg.

$$p(\mathbf{r}) = p(x; y; z),$$

$$q(\mathbf{r}) = q(x; y; z),$$

$$s(\mathbf{r}) = s(x; y; z)$$

komponenseket a vektortér rendezőinek nevezik.

Trajektóriák. Rajzoljuk meg azokat a görbék, amelyeknek érintői a térben az érintési ponthoz rendelt $\mathbf{v}$ vektor irányába mutatnak. Ezek a görbék a vektortér trajektóriái (11.43 ábra).

Komponensei:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad s = -g;$$

így

$$\mathbf{G} = -g\mathbf{k}.$$

Az erőter trajektóriái a $P(x_0; y_0; z_0)$ ponton áthaladó függőleges egyenesek.

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 - gt.$$

3. Pontszerű töltés által létrehozott elektrosztatikus tér. Helyez-

zünk $+Q$ elektromos töltésű testet az origóba, és $Q_1 = +1$ töltésű elektromos testet a P pontba. A két test között fellépő

elektromos taszító erő abszolút értéke:

$$|\mathbf{E}| = \frac{Q \cdot Q_1}{Q} = \frac{|\mathbf{r}|^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (11.45 \text{ ábra}).$$

A taszítóerő iránya megegyezik az $\overrightarrow{OP}$ vektor irányával, azaz a P -hez vezető irány egységvektorával

$$\frac{|\mathbf{r}|}{r} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{y} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} \mathbf{k}.$$

Az elektromos térerősség:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{|\mathbf{r}|}{r} = Q \frac{|\mathbf{r}|^3}{r^3}.$$

Komponensek segítségével:

$$\mathbf{E} = Q \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \mathbf{i} + Q \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \mathbf{j} + Q \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \mathbf{k},$$

ahol Q az elektromos töltés.

Az erőter trajektóriái az origóból kiinduló félegyenések.

11.3.2 Hataérték, folytonosság

Hataérték

Definíció. A $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortérnek az $\mathbf{r}_0$ pontban hataértéke a $\mathbf{v}_0$ vektor, ha tetszős szerint

kis pozitív ε -hez található olyan pozitív δ , hogy

$$|\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}_0| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0.$$

Tétel. A $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = p(x; y; z)\mathbf{i} + q(x; y; z)\mathbf{j} + s(x; y; z)\mathbf{k}$ vektor-vektor függvénynek az $\mathbf{r}_0$ helyen vett hataértéke

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} p(x; y; z) = v_1; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} q(x; y; z) = v_2; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0}} s(x; y; z) = v_3.$$

Folytonosság

Definíció. A $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvény az $\mathbf{r}_0$ helyen folytonos, ha $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ esetén van hataértéke, és ez megegyezik a $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$ helyettesítési értékkel.

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0).$$

A hataértékre vonatkozó tétel alapján nyilvánvaló a következő tétel.

Tétel. A $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvény akkor és csak akkor folytonos az $\mathbf{r}_0$ helyen, ha ott minden rendezője (koordinátája) folytonos.

Egyenletes folytonosság

Definíció. A $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ függvény a tér valamely V tartományában egyenletesen folytonos, ha bármely kis pozitív ε számhoz található olyan δ pozitív szám, hogy

$$|\mathbf{v}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1)| < \varepsilon,$$

ha

$$\mathbf{r}_1 \in V, \quad \mathbf{r}_2 \in V, \quad \text{és} \quad |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| < \delta.$$

Tétel. Ha a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ függvény folytonos a korlátos és zárt V tartományban, akkor ott egyen-

letesen is folytonos.

A tétel bizonyítására nem térünk ki.

11.3.3 Görbementi vagy vonalintegrál

Bevezetés. Ha egy tömegpont a rá ható $\mathbf{F}$ erő hatására s elmozdulást végez, a munka

$$W = |\mathbf{F}| \cdot |s| \cdot \cos \alpha = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \quad (11.46 \text{ ábra}).$$

Határozzuk meg a végzett munkát, ha a tömegpont a változó $\mathbf{F}$ erő hatására egy térgörbe mentén A -ból B -be jut.

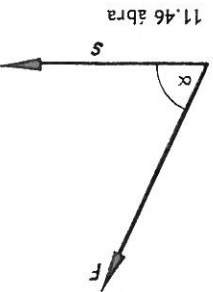
Legyen a görbe egyenlete $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, és az AB görbezakasz feleljen meg

az $\alpha \equiv t \equiv \beta$ paraméter-intervallumnak (11.47 ábra).

Osszuk fel az AB görbezakaszt az

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_n = \beta$$

felosztás osztópontjainak megfelelő görbepontokkal.



11.46 ábra

Az $r(t_{k-1})$ és $r(t_k)$ osztopontok közötti görbeszakaszon a munkát a

$$\Delta W_k = F(p_k) \Delta r_k$$

értékekkel közelítjük meg.

Itt

$$\Delta r_k = r_k - r_{k-1} \quad \text{és}$$

p_k a kis görbeszakasz egy tetszőleges pontja (11.47 ábra).

Az AB görbeszakasz mentén a munka közelítőleg:

$$W \approx \sum_{k=1}^n F(p_k) \Delta r_k.$$

Pontos értéket akkor kapunk, ha a felosztás minden határon túl finomul, azaz $\max |\Delta r_k| \rightarrow 0$.

$$W = \lim_{\max |\Delta r_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(p_k) \Delta r_k.$$

Ha a határérték létezik, így jelöljük:

$$W = \int_{AB} F(r) dr.$$

11.3.3.1 A görbementi integrál fogalma

A munka kiszámításához használt eljárást alkalmazhatjuk általánosan is. Legyen adott a

$$v = v(r) \quad \text{vektortér}$$

és a vektortérben az $r = r(t)$ térgörbe. Jelöljük a térgörbe $\alpha \equiv t \equiv \beta$ paraméter-intervallum-

nak megfelelő AB görbeszakaszát g -vel.

Osszuk fel a térgörbe AB szakaszát az

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_n = \beta$$

felosztásnak megfelelő

$$r_0, r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_n$$

helyvektori pontokkal részgörbékre.

Az osztopontokat összekötő húrvektork:

$$\Delta r_k = r_k - r_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Legyen a Δr_k húrvektorkhoz tartozó ívszakaszon egy tetszés szerinti pont helyvektora p_k

(11.47 ábra).

Definíció. A $v = v(r)$ vektortérnek az $AB = g$ görbevelre vonatkozó görbementi integrálja

$$\int_{AB} v(r) dr = \lim_{\max |\Delta r_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(p_k) \Delta r_k.$$

A görbementi integrált még a következő módon is jelölhetjük:

$$\int_{AB} v dr = \int (p dx + q dy + s dz).$$

Tétel. Tegyük fel, hogy az $\alpha \equiv t \equiv \beta$ szakaszon $r = r(t)$ folytonosan differenciálható és $v = v(r)$ folytonos a térgörbén.

Ekkor

$$\int_{AB} v dr = \int_{\beta}^{\alpha} [p x'(t) + q y'(t) + s z'(t)] dt.$$

Az egyenlet jobb oldalán p, q és s a v vektor-vektor függvény koordinátái (rendezői) az

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

helyettesítés után, azaz

$$p = p[x(t); y(t); z(t)],$$

$$q = q[x(t); y(t); z(t)],$$

$$s = s[x(t); y(t); z(t)] \quad \text{és}$$

$x(t), y(t), z(t)$ az $r(t)$ vektor koordinátái.

A tétel röviden így is írható:

$$(1) \quad \int_{AB} v dr = \int_{\beta}^{\alpha} v[r(t)] r'(t) dt$$

Bizonyítás. A jobb oldali integrál létezik, hiszen az integrandusz folytonos. Mivel $v(r)$ folytonos, ezért korlátos is, azaz van olyan K szám, hogy $\alpha \equiv t \equiv \beta$ esetén $|v[r(t)]| < K$.

Legyen ε tetszőleges pozitív szám. Mivel $r(t)$ egyenletesen is folytonos, van olyan δ , hogy

$[\alpha; \beta]$ -ban

$$|t - t^*| < \delta \quad \text{esetén}$$

$$|r(t) - r(t^*)| < \varepsilon.$$

Készítsük el az $[\alpha; \beta]$ intervallum olyan finom felosztását, az

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_n = \beta$$

felosztást, hogy egyrészt

$$t_k - t_{k-1} < \delta, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

másképp, hogy az (1) egyenlet jobb oldalán szereplő integrálnak a felosztáshoz tartozó bár-

mely közelítő összege az integráltól ε -nál kevesebb el különbözzék.

Megmutatjuk, hogy az (1) egyenlet bal oldalán szereplő integrált definiáló közelítő összegek

ilyen finom felosztások esetén a jobb oldali integráltól szintén keveset térnek el.

Legyen az (1) bal oldalán álló integrál egy ilyen közelítő összege:

$$\sum_{k=1}^n v(p_k) \Delta r_k,$$

ahol a Δr_k húrvektor:

$$\Delta r_k = r_k - r_{k-1},$$

és $r_k = [r_{k-1}, t_k]$ intervallum azon pontja, amelyre $r(t_k) = p_k$.

Az összeg így írható:

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n v(p_k) \Delta r_k = \sum_{k=1}^n v(p_k) [\Delta r_k - r(t_k) \Delta t_k] + \sum_{k=1}^n v(p_k) r(t_k) \Delta t_k.$$

Becsüljük meg a (2) egyenlet jobb oldalán álló összeget. Az első összeg abszolút értéke:

$$\left| \sum_{k=1}^n v(p_k) [\Delta r_k - \vec{r}(t_k) \cdot \Delta t_k] \right| = \left| \sum_{k=1}^n v(p_k) \left[\frac{\Delta r_k}{\Delta t_k} - \vec{r}(t_k) \right] \Delta t_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |v(p_k)| \left| \frac{\Delta r_k}{\Delta t_k} - \vec{r}(t_k) \right| \Delta t_k.$$

(Felhasználtuk az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorpárra érvényes $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ egyenlőtlenséget.) Tudjuk, hogy $|v(p_k)| < K$, és a 11.1.1.4 pont segédtele szerint:

$$\left| \frac{\Delta r_k}{\Delta t_k} - \vec{r}(t_k) \right| < \varepsilon.$$

$$\text{Tehát} \quad \left| \sum_{k=1}^n v(p_k) [\Delta r_k - \vec{r}(t_k) \cdot \Delta t_k] \right| < \varepsilon \cdot K(\beta - \alpha).$$

Továbbá a (2) jobb oldalán szereplő második összeg:

$$\sum_{k=1}^n v(p_k) \vec{r}(t_k) \Delta t_k = \sum_{k=1}^n v[\vec{r}(t_k)] \vec{r}(t_k) \Delta t_k.$$

Az utolsó összeg viszont nem más, mint az (2) egyenlet jobb oldalán álló integrál közelítő összege.

Ezért

$$\left| \int_{\beta}^{\alpha} v[\vec{r}(t)] \vec{r}(t) dt - \sum_{k=1}^n v[\vec{r}(t_k)] \vec{r}(t_k) \Delta t_k \right| < \varepsilon.$$

Tehát

$$\left| \sum_{k=1}^n v(p_k) \Delta r_k - \int_{\beta}^{\alpha} v[\vec{r}(t)] \vec{r}(t) dt \right| < \varepsilon \cdot K(\beta - \alpha) + \varepsilon.$$

Létezik tehát az

$$\int_{AB} v dt \quad \text{integrál és}$$

$$\int_{\beta}^{\alpha} v[\vec{r}(t)] \vec{r}(t) dt.$$

Koordinátákkal:

$$\int_{AB} v dt = \int_{\beta}^{\alpha} [v_x(t) + q_y(t) + s_z(t)] dt.$$

A görbementi integrál tulajdonságai. A görbementi integrál definíciójából adódnak a következő tulajdonságok:

$$1. \quad \int_{AB} v dt = - \int_{BA} v dt,$$

$$2. \quad \int_{AB} v dt + \int_{AB} v dt = \int_{AB} v dt,$$

ahol $g_1 + g_2$ a csatlakozó g_1 és g_2 görbedarabok egyesítése.

11.3.3.2 Görbementi integrál az $(x; y)$ síkban fekvő görbéknel

Legyen az $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ egyenletű görbe olyan, hogy $z = 0$. A görbe az $(x; y)$ síkban van. Ekkor a vonalintegrált így jelöljük:

$$\int_C v dt = \int_C (p dx + q dy).$$

Mivel

$$z(t) \equiv 0,$$

$$\int_{\beta}^{\alpha} v dt = \int_{\beta}^{\alpha} [p_x(t) + q_y(t)] dt,$$

ahol

$$p = p[x(t); y(t); 0],$$

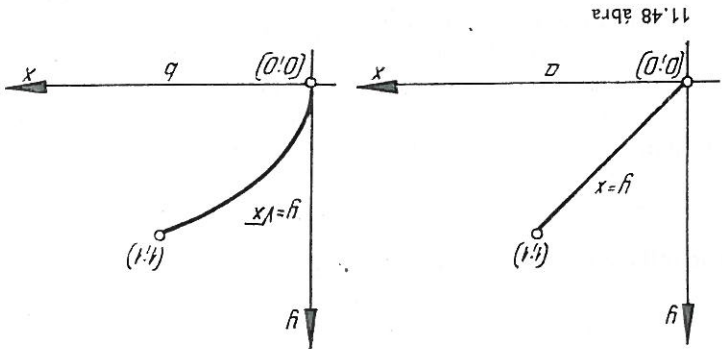
$$q = q[x(t); y(t); 0].$$

Példák

1. Számítsuk ki az

$$\int_C [(2x - y^2) dx + (x + xy) dy]$$

vonalintegrált az $A(0; 0)$ és $B(1; 1)$ pontok között, az $y = x$ és az $y = \sqrt{x}$ görbék mentén (11.48/a és 11.48/b ábra).



11.48 ábra

Az $y = x$ mentén válasszuk az x változót paraméternek. Ekkor $dy = dx$ és $0 \leq x \leq 1$.

$$\int_{AB} [(2x - y^2) dx + (x + xy) dy] = \int_0^1 [(2x - x^2 + x + x^2) dx] = \left[\frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Az $y = \sqrt{x}$ mentén válasszuk paraméternek $y-t$.

Ekkor $y = t$, $x = t^2$, $x(t) = 2t$, $y(t) = 1$ és $0 \leq t \leq 1$.

$$\int_{AB} [(2x - y^2) dx + (x + xy) dy] = \int_0^1 [(2t^2 - t^2 + t^2 + t^3) 2t dt] = \int_0^1 (2t^2 + 3t^4) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{5}t^5 \right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{17}{15}.$$

2. Számítsuk ki a

$$v = x^2y\mathbf{i} + (x - yz)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$$

vektortér görbementi integrálját az

$$r = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

csavarvonal $0 \leq t \leq 2\pi$ szakasza mentén.

$$\frac{dr}{dt} = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Vektortér a görbe mentén:

$$v = \cos^2 t \sin t\mathbf{i} + (\cos t - t \sin t)\mathbf{j} + t \sin t \cos t\mathbf{k}.$$

A vonalintegrál:

$$\int_a^b v \, dr = \int_{2\pi}^0 (-\cos^2 t \sin^2 t + \cos^2 t - t \sin t \cos t + t \sin t \cos t) \, dt =$$

$$= \int_{2\pi}^0 [-(\sin t \cos t)^2 + \cos^2 t] \, dt =$$

$$= \int_{2\pi}^0 \left(-\frac{1}{4} \sin^2 2t + \cos^2 t \right) \, dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{16} (-\sin 2t \cos 2t + 2t) + \frac{1}{2} (\sin t \cos t + t) \right]_{2\pi}^0 =$$

$$= -\frac{4}{7} + \pi = -\frac{4}{7}.$$

11.3.3.3 A görbementi integrál függetlensége az úttól, ha a görbe síkgörbe

Vizsgáljuk meg, milyen feltételek mellett független a vonalintegrál a végpontokat összekötő görbék választásától.

Az egyszerűség kedvéért most csak síkbeli vonalintegrálokra szorítkozunk. Csak olyan görbe vonalakat tekintünk, amelyek megadhatók folytonosan differenciálható $r = r(t)$ alakban, vagy ilyen tulajdonságú csatlakozó görbeszakaszokból állnak.

Az $r = r(t)$ görbe az $\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumban zárt, ha $r(\alpha) = r(\beta)$. Legyen H a síkban összefüggő nyílt halmaz, a továbbiakban tartomány, és legyen H -n értelmezve a $v = v(r)$ folytonos függvény.

Ha g a H -ban fekvő zárt görbe, $g \subset H$, a g -menti vonalintegrált így jelölük:

$$\oint_g v \, dr.$$

Ha a görbe irányítását is jelezni akarjuk, akkor az irányításnak megfelelően a

$$\oint_g v \, dr \quad \text{vagy} \quad \oint_g v \, dr$$

jelöléseket használjuk.

1. tétel. Legyen g_1 a H -ban fekvő görbe, végpontjai legyenek A és B .

A $\int_{g_1} v \, dr$ érték akkor és csak akkor független az integrációs út megválasztásától (azaz csak a kezdő és végponttól függ), ha bármely H -ban fekvő zárt g görbe mentén

$$\oint_g v \, dr = 0.$$

Bizonyítás. a) Tegyük fel, hogy

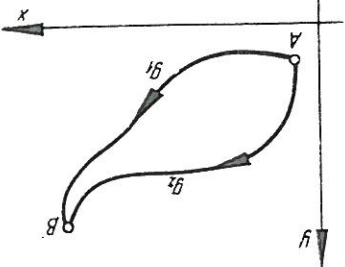
$$\oint_g v \, dr = 0$$

minden H -ban fekvő zárt görbére.

Legyen g_1 és g_2 két integrációs út. Mindkettőt az A pontot B -vel köti össze, és a paraméterértékek növekedésével mindkét úton a megfelelő görbepont A -ból B -be jut (11.49 ábra). Legyen g'_2 a g_2 görbével azonos, de ellentétes irányú. A g_1 görbét g'_2 -hez csatolva

koztatva zárt g görbét kapunk. A feltétel szerint

11.49 ábra



Így

$$0 = \oint_g v \, dr = \int_{g_1} v \, dr + \int_{g'_2} v \, dr = \int_{g_1} v \, dr - \int_{g_2} v \, dr.$$

Tehát

$$\int_{g_1} v \, dr = \int_{g_2} v \, dr.$$

b) Tegyük fel, hogy az integrál értéke független az úttól. Legyen g a H halmazon tetszőleges zárt görbe, amelynek paraméteres alakja:

$$r = r(t),$$

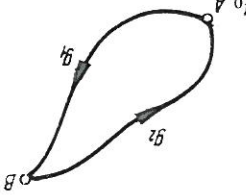
$$r(\alpha) = r(\beta) = A.$$

Legyen

$$\alpha < t_0 < \beta, \quad \text{úgy hogy}$$

$$B = r(t_0) \neq r(\alpha) = A.$$

Jelölje g_1 a g görbének azt a darabját, amely megfelel az $\alpha \leq t \leq t_0$ paraméter-intervallumnak, és g_2 azt a darabot, amely megfelel a 11.50 ábra



Legyen g'_2 a g_2 görbével ellentétes irányítású. Így g_1 és g'_2 egyaránt A -ból B -be futó görbék.

Ezért a feltétel értelmében:

$$\int_{g_1} v \, dr = \int_{g'_2} v \, dr.$$

Ezt felhasználva:

$$\oint_g v \, dr = \int_{g_1} v \, dr + \int_{g_2} v \, dr = \int_{g_1} v \, dr - \int_{g'_2} v \, dr = 0.$$

11. tétel. Legyen a H tartományon a $v = v(r)$ függvény folytonos

$$v = p(x, y)\mathbf{i} + q(x, y)\mathbf{j}.$$

A $\int_a^b v \, dt$ integrál akkor és csak akkor független az út megválasztásától, ha van olyan H -ban

differentiálható $u = u(x; y)$ függvény, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p \quad \text{és} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q, \quad \text{azaz}$$

a $p(x; y) \, dx + q(x; y) \, dy$ kifejezés teljes differenciál.

Bizonyítás. a) Tegyük fel, hogy az integrál független az úttól. Jelölje $P_0(x_0; y_0)$ H -nak egy tetszőleges rögzített pontját. Legyen $P(x; y)$ változó pont H -ban, g pedig tetszőlegesen P_0 -ból P -be futó görbe.

Legyen

$$u(x; y) = u(P) = \int_{P_0}^P v \, dt.$$

Ilyen módon csakugyan egy csak $(x; y)$ -től függő számot definiálunk, mert feltételünk szerint az integrál értéke független az úttól.

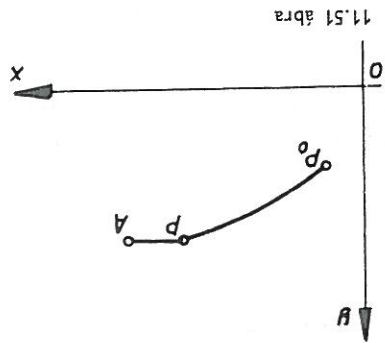
Megmutatjuk, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p \quad \text{és} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q.$$

Tekintsük a H halmaz $P(x; y)$ és $A(x + \Delta x; y)$ pontjait. Ha Δx elég kicsiny, akkor H nyíltsága miatt $(x + \Delta x; y) \in H$, sőt az $(x; y)$ és $(x + \Delta x; y)$ pontokat

$$u(x + \Delta x; y) = \int_{P_0}^P v \, dt + \int_P^{x + \Delta x} v \, dt,$$

Ekkor



hiszen integrációs útnak választhatjuk a $P_0 P$ utat kiegészítve az $l = P A$ szakasszal. Az utolsó egyenletről

$$\frac{u(x + \Delta x; y) - u(x; y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_P^{x + \Delta x} v \, dt.$$

Legyen az l egyenes szakasz paraméteres alakja:

$$\begin{cases} X = x + t \Delta x \\ Y = y \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ebből

$$\dot{X}(t) = \Delta x$$

$$\dot{Y}(t) = 0.$$

A 8.3.3.1. tétel alapján:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_0^1 v \, dt = \frac{1}{\Delta x} \int_1^0 p(x + t \Delta x; y) \Delta x \, dt.$$

Alkalmazva a

$$t = \Delta x \cdot \tau \quad \text{helyettesítést:}$$

$$dt = \Delta x \, d\tau.$$

$$t = 0, \quad \tau = 0,$$

$$t = 1, \quad \tau = \Delta x.$$

Igy

$$\frac{1}{\Delta x} \int_0^1 v \, dt = \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta x}^1 p(x + \tau; y) \, d\tau.$$

Tehát

$$\frac{u(x + \Delta x; y) - u(x; y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta x}^1 p(x + \tau; y) \, d\tau.$$

Ha $\Delta x \rightarrow 0$, akkor

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x; y),$$

mert a jobb oldali kifejezés határértéke a 8.1.5 a) tétel szerint: $p(x; y)$. Ugyanígy kimutatható, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial y} = q(x; y).$$

Mivel p és q folytonos függvények, ezért $u(x; y)$ differenciálható, és teljes differenciálja:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = p(x; y) dx + q(x; y) dy.$$

b) Tegyük fel, hogy

$$p(x; y) \, dx + q(x; y) \, dy$$

teljes differenciál, azaz H -n értelmezve van olyan differenciálható $u(x; y)$ függvény, amelyre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x; y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = q(x; y).$$

Legyen A és B a H -ban fekvő két pont, és legyen g A -ból B -be futó görbe.

Megmutatjuk, hogy az

$$\int_g v \, dt \quad \text{integrál}$$

csak A -tól és B -től függ.

Legyen g paraméteres alakban

$$r = r(t) \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Tegyük fel, hogy $r(t)$ folytonosan differenciálható. A 11.3.3.1.(1) tétel és a láncszabály alkalmazásával:

$$\int_{\beta}^{\alpha} v \, dt = \int_{\beta}^{\alpha} \{p[x(t); y(t)]x'(t) + q[x(t); y(t)]y'(t)\} \, dt = \int_{\beta}^{\alpha} \{u[r(t)]\}' \, dt.$$

Igy

$$\int v \, dt = u[r(\beta)] - u[r(\alpha)] = u(B) - u(A).$$

Ha a görbét leíró $r = r(t)$ függvény szakaszonként folytonosan differenciálható, akkor a most bebizonyított tételt az egyes szakaszokra alkalmazzuk, majd az eredményeket összeadjuk.

III. tétel. Tegyük fel, hogy H egyszerűen összefüggő tartomány, és a $v = v(r)$ függvénynek $p(x; y)$ és $q(x; y)$ komponensei differenciálhatók H -ban. E feltételek mellett az $\int v \, dr$ integrál akkor és csak akkor független az út végpontjaitól, ha

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

A tétel bizonyítására nem térünk ki.

Példák

1. Számítsuk ki a

$$\oint (2xy \cos x^2 y \, dx + x^2 \cos x^2 y \, dy)$$

integrált a 11.52 ábrán látható háromszög mentén.

$$p = 2xy \cos x^2 y$$

$$q = x^2 \cos x^2 y.$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2x \cos x^2 y - 2x^3 y \sin x^2 y$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 2x \cos x^2 y - 2x^3 y \sin x^2 y.$$

$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, p, q és a parciális deriváltak folytonosak, számítás nélkül tudjuk, hogy a zárt görbementi integrál zérus.

2. Számítsuk ki az origóközéppontú egység sugarú kör mentén az

$$\oint \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy \right)$$

körintegrált.

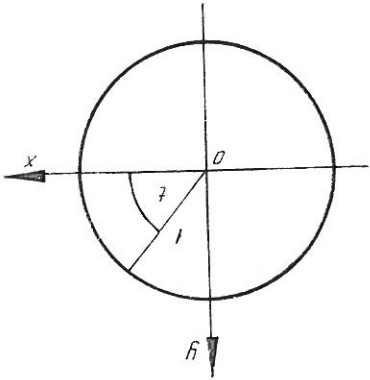
$$p = x^2 + y^2, \quad q = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 2x$$

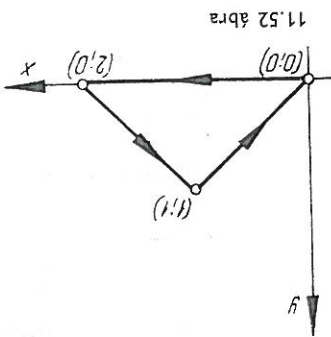
$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = -2y$$



11.53 ábra



11.52 ábra

alkal-

Mégsem hivatkozhatunk az úttól való függetlenségre vonatkozó III. tételre, mert $p, q, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial x}$ pontú egység sugarú kört tartalmazó, egyszerűen összefüggő tartományban. Az integrált kiszámítjuk. Legyen a kör paraméteres alakban adott (11.53 ábra).

az origóban nincs értelmezve, azaz az (1) egyenlet érvényességét nem állíthatjuk egy, az origó közeponti egység sugarú kört tartalmazó tartományban. Az integrált kiszámítjuk. Legyen a kör paraméteres alakban adott (11.53 ábra).

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$dx = -\sin t \, dt, \quad dy = \cos t \, dt, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\oint \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy \right) = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \left[t \right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

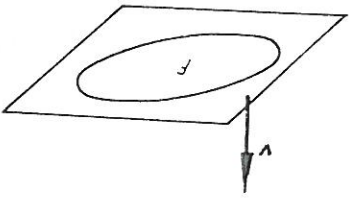
Tehát az egység sugarú körön minden egyes körforrásnál az integrál 2π .

11.3.4 Felületi integrál

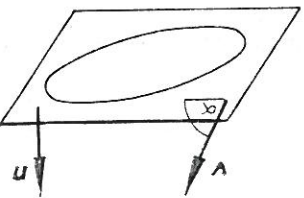
Bevetés. Határozzuk meg valamely áramlásban egy adott felületdarabon az időegység alatt átaramló folyadék mennyiségét, ha ismerjük a részecskék sebességvektorát mint a helyvektor $v = v(r)$ függvényét.

Ha az F felület síkon van, az áramlási sebesség minden részecskénél azonos és iránya merőleges a felületre, az időegység alatt átaramló folyadékmennyiség

$$Q = F|v| \quad (11.54 \text{ ábra}).$$



11.54 ábra



11.55 ábra

Ha a felület síklap, a részecskék sebessége azonos, állandó, de nem merőleges a síkra:

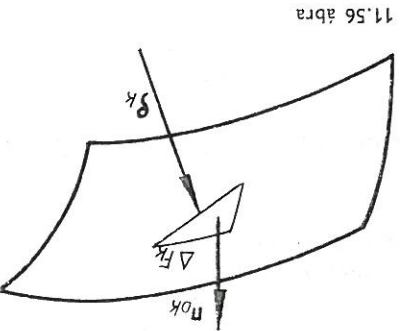
$$Q = F \cdot |v| \cos \alpha = F \cdot v \cdot n_0,$$

ahol n_0 a sík normálvektorának egységvektora (11.55 ábra).

Végül legyen az áramlás sebessége az r helyvektor függvénye, és a felület nem sík. A felületet a felületszámításnál alkalmazott módszerhez (11.1.2.3. pont) hasonlóan részecskék ΔF_K felületdarabon átaramló folyadék-mennyiség:

$$\Delta Q \approx \Delta F_K \cdot v(r_K) \cdot n_{0K},$$

ahol $r_K \Delta F_K$ egy tetszőleges szerinti helyvektora, n_{0K} pedig a r_K pontban húzott érintő sík normál egységvektora (a felületi normális egységvektora).



11.56 ábra

Az egész felületen átláramló folyadékmennyiség:

$$\bar{Q} = \lim_{\max \Delta F_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta F_k v(\rho_k) n_{0k} = \iint_F v \cdot n_0 dF.$$

n_0 értelmét minden esetben meg kell adni. Ha n_0 helyébe $(-n_0)$ -t teszünk, az integrál előjelet vált. Az integrálban szereplő $n_0 dF$ szimbólumot röviden dF -fel jelöljük, és irányított felület-elemnek nevezzük.

Igy az időegység alatti átláramló folyadékmennyiség:

$$\bar{Q} = \iint_F v(x) n_0 dF = \iint_F v(r) dF = \iint_F v dF.$$

A felületi integrál fogalma

Legyen adott a $R = R(r)$ vektortér az $r = r(u; v)$ felület

$$u_1 \equiv u \equiv u_2 \\ v_1 \equiv v \equiv v_2$$

tartományában.

Tegyük fel, hogy a felületnek létezik a felszíne. Osszuk fel a felületet n részre. A k -adik felületdarab egy tetszőleges ρ_k helyvektortól pontjában vegyük fel a ΔF_k vektort. $|\Delta F_k| = \Delta F_k$, a k -adik felületdarab felszíne, iránya pedig az ΔF_k abszolút értéke:

$$r'_u(u_k; v_k) \times r'_v(u_k; v_k)$$

vektor iránya.

$$\rho_k = r(u_k; v_k).$$

$$\Delta F_k = \Delta F_k \cdot n_{0k}.$$

ahol n_{0k} a ρ_k ponthoz tartozó felületi normális egységvektora.

Képezzük ezután a következő közelítő összeget:

$$\sum_{k=1}^n R(\rho_k) \Delta F_k.$$

Ha ezeknek az összegeknek van határértékük, amikor a felosztást minden határon túl finomítjuk, akkor a határértéket az $R = R(r)$ vektor-vektor függvény felületi integráljának nevezzük és így jelöljük:

$$\iint_F R dF.$$

A felosztás minden határon túl való finomítása azt jelenti, hogy a felosztással nyert felszín-darabok átmérőinek legnagyobbika nullához tart.

11.3.4.1 A felületi integrál kiszámítása

Tétel. Tegyük fel, hogy a felületet leíró $r = r(u; v)$ függvény folytonos a H mérhető területű paramétertartományon és annak határpontjaiban, ott az r'_u és r'_v parciális deriváltak is folytonosak, és $r'_u \times r'_v \neq 0$.

Tegyük fel továbbá, hogy az $R = R(r)$ vektor-vektor függvény folytonos a felület pontjaiban. Ekkor létezik az

$$\iint_F R dF \quad \text{felületi integrál és,} \\ \iint_F R dF = \iint_H R(r'_u \times r'_v) du dv = \iint_H R r'_u r'_v du dv.$$

A tételt nem bizonyítottuk. Az állítást, hasonlóan a felszín kiszámításának tételéhez (11.1.2.3 pont), beláthatjuk a következő megfontolással. Tegyük fel, hogy H sokszög. Ekkor felosztható az u és v tengelyekkel párhuzamos befogójú derékszögű háromszögekre. A k -adik derékszögű háromszögnek megfelelő felületdarab felszíne legyen ΔF_k . A háromszög egy tetszőleges $(u_k; v_k)$ pontjának feleljen meg a felületdarab

$$\rho_k = r(u_k; v_k)$$

helyvektori pontja.

A ΔF_k felületdarab felszíne közelítőleg:

$$\Delta F_k \approx |r'_u(u_k; v_k) \times r'_v(u_k; v_k)| \Delta u_k \Delta v_k,$$

ahol Δu_k és Δv_k a k -adik háromszög befogóinak hossza. A ρ_k pontban a felületi normális egységvektora:

$$n_{0k} = \frac{r'_u(u_k; v_k) \times r'_v(u_k; v_k)}{|r'_u(u_k; v_k) \times r'_v(u_k; v_k)|}.$$

Igy a felületi integrál közelítő összege:

$$\sum_{k=1}^n R(\rho_k) \Delta F_k \approx \sum_{k=1}^n R(\rho_k) n_{0k} \Delta F_k \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^n R(\rho_k) [r'_u(u_k; v_k) \times r'_v(u_k; v_k) \Delta u_k \Delta v_k].$$

Az utolsó összeg már a

$$\iint_H R(r'_u \times r'_v) du dv$$

kettős integrál közelítő összege.

Megmutatható, hogy a felosztás finomításával az elkövetett hiba nullához tart. Ezért a felületi integrál:

$$\iint_F R dF = \iint_H R(r'_u \times r'_v) du dv.$$

Vagy

$$\iint_F R dF = \iint_H R r'_u r'_v du dv.$$

Ha specialisan H az

$$u_1 \equiv u \equiv u_2$$

$$v_1 \equiv v \equiv v_2$$

tégialap, akkor

$$\iint_F \mathbf{R} \, dF = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{R} r'_u r'_v \, du \, dv.$$

A H -n vett kettős integrálban az

$$\mathbf{R} = p(x; y; z)\mathbf{i} + q(x; y; z)\mathbf{j} + r(x; y; z)\mathbf{k}$$

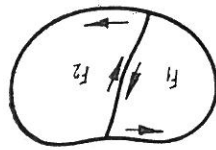
függvény rendezőbe x, y, z helyébe az $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$, $z = z(u; v)$ értékeket helyettesítjük.

A felületi integrál tulajdonságai. A felületi integrál definíciójából adódnak a következő tulajdonságok.

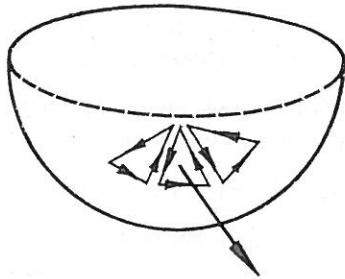
$$1. \quad - \iint_F \mathbf{v} \, dF = \iint_{-F} \mathbf{v} \, dF,$$

ahol $(-F)$ azt jelenti, hogy a felületi normális irányítását ellenkezőre változtattuk. 2. Ha c állandó,

$$\iint_F c \mathbf{v} \, dF = c \iint_F \mathbf{v} \, dF.$$



11.57 ábra



11.58 ábra

3. Ha az irányított F felületet — az irányítás megtartásával — a csatlakozó F_1 és F_2 felületdarabokra bontjuk, akkor

$$\iint_F \mathbf{R} \, dF = \iint_{F_1} \mathbf{R} \, dF + \iint_{F_2} \mathbf{R} \, dF \quad (11.57 \text{ ábra}).$$

Ha az irányított F felületet — az irányítás megtartásával — n csatlakozó részre osztjuk, akkor

$$\iint_F \mathbf{v} \, dF = \iint_{F_1} \mathbf{v} \, dF + \iint_{F_2} \mathbf{v} \, dF + \dots + \iint_{F_n} \mathbf{v} \, dF \quad (11.58 \text{ ábra}).$$

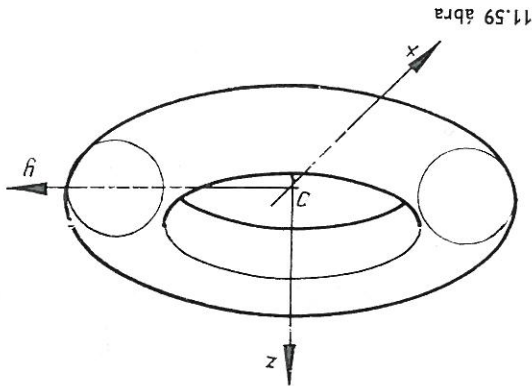
4. Ha két felületdarab határgörbéje közös, az additívítás csak mindkét felületen közös irányú (vagy kifelé, vagy befelé mutató) normálvektoroknál igaz. A zárt felületre vonatkozó integrál jele: $\iiint_{F_{\text{zárt}}} \mathbf{v} \, dF$.

Példa

Határozzuk meg a $\mathbf{v} = r$ vektortér felületi integrálját az

$$r = (3 + \sin u) \cos v \mathbf{i} + (3 + \sin u) \sin v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}$$

gyűrűfelület $(x; y)$ sík feletti darabja mentén, felfelé mutató felületi normális mellett (11.59 ábra)



11.59 ábra

Példánkban $a = 3$, $b = 1$.
A felület $(x; y)$ sík feletti részén:

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

$$\begin{aligned} r &= (3 + \sin u) \cos v \mathbf{i} + (3 + \sin u) \sin v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}, \\ r'_u &= \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \sin v \mathbf{j} - \sin u \mathbf{k}, \\ r'_v &= -(3 + \sin u) \sin v \mathbf{i} + (3 + \sin u) \cos v \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Az $r'_u \times r'_v$ vektori szorzat

$$r'_u \times r'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -(3 + \sin u) \sin v & (3 + \sin u) \cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (3 + \sin u) \sin u \cos v \mathbf{i} + (3 + \sin u) \sin u \sin v \mathbf{j} +$$

$$+ [(3 + \sin u) \cos u \cos^2 v + (3 + \sin u) \cos u \sin^2 v] \mathbf{k}.$$

$$r'_u \times r'_v = (3 + \sin u) \sin u \cos v \mathbf{i} + (3 + \sin u) \sin u \sin v \mathbf{j} + (3 + \sin u) \cos u \mathbf{k}.$$

k együtthatója $(3 + \sin u) \cos u$. Ez $a - \frac{2}{\pi} \equiv u \equiv \frac{2}{\pi}$ intervallumban pozitív, $r'_u \times r'_v$ felfelé mutat (vehető felületi normálisnak).

$$\mathbf{v} = r = (3 + \sin u) \cos v \mathbf{i} + (3 + \sin u) \sin v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}.$$

$$r'_u \times r'_v = (3 + \sin u) \sin u \cos v \mathbf{i} + (3 + \sin u) \sin u \sin v \mathbf{j} + (3 + \sin u) \cos u \mathbf{k}.$$

A $(r'_u \times r'_v)$ skaláris szorzat a koordináták szorzatösszege.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(r'_u \times r'_v) &= (3 + \sin u)^2 \sin u \cos^2 v + (3 + \sin u)^2 \sin u \sin^2 v - (3 + \sin u) \cos^2 u = \\ &= (3 + \sin u)^2 \sin u + (3 + \sin u) \cos^2 u = \\ &= 9 \sin u + 6 \sin^2 u + \sin^3 u + \sin u \cos^2 u = \\ &= 9 \sin u + 3 \sin^2 u + 3 \cos^2 u + \sin^3 u + \sin u \cos^2 u = \\ &= 9 \sin u + 3 \sin^2 u + 3(\sin^2 u + \cos^2 u) + \sin u(\sin^2 u + \cos^2 u) = \\ &= 9 \sin u + 3 \sin^2 u + 3 + \sin u(\sin^2 u + \cos^2 u) = 3 \sin^2 u + 10 \sin u + 3. \end{aligned}$$

A keresett felületi integrál:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{r}_0^0 du dv &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin^2 u + 10 \sin u + 3) du dv \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin^2 u + 10 \sin u + 3) du \\ &= \left[v \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{2} (-\sin u \cos u + u) - 10 \cos u + 3u \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \left[\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} \right) - \left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} \right) \right] = 2\pi \frac{9\pi}{2} = 9\pi^2. \end{aligned}$$

11.3.5 Vektortér divergenciája

Vizsgáljuk egy összenyomhatatlan folyadék áramlását, amelynek sebességét a

$$\mathbf{v} = p(x; y; z)\mathbf{i} + q(x; y; z)\mathbf{j} + s(x; y; z)\mathbf{k}$$

három skálár változótól függő vektor írja le.

Képezzünk el az áramlásterben egy hasáb alakú térszt, és vizsgáljuk a hasábba az időegység alatt be- és kiáramló folyadék mennyiségét.

Ha az áramlás stationárius, azaz a részecskék sebessége azonos, nagysága és iránya állandó, a beáramló és kiáramló folyadék mennyisége megegyezik. Nem stationárius áramlás esetén lehetséges, hogy

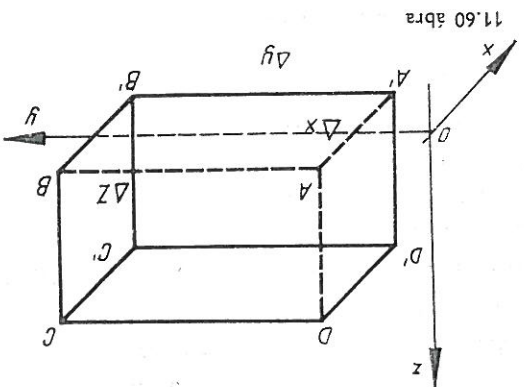
a kiáramló folyadékmennyiség nagyobb a beáramlónál, „anyagszaporulat” lép fel, a hasábban „forrás” van; a kiáramló folyadékmennyiség kisebb a beáramlónál, a hasábban „negatív forrás” (nyelő) van;

a be- és kiáramló folyadékmennyiség megegyezik.

Hehelyezzünk el a derékszögű koordináta-rendszerben, amelyben egy $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sebességű vektortér áramlását vizsgáljuk, egy derékszögű hasábot úgy, hogy lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak legyenek.

Legyenek a hasáb élei Δx ; Δy ; Δz .

Az $ABCD$ lapon átáramló folyadékmennyiséget jelöljük $Q_{x(1)}$ -gyel. Vegyük a lap mentén a sebességet állandónak, akkorának, mint az $A(x; y; z)$ pont-



11.60 ábra

ban. Kifejtés mellett a felületi normális:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{01} &= -\mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}(\mathbf{r}) = p(x; y; z)\mathbf{i} + q(x; y; z)\mathbf{j} + s(x; y; z)\mathbf{k}, \\ \Delta F &= \Delta y \cdot \Delta z, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{01} &= -p(x; y; z), \\ Q_{x(1)} &= \int_{y+\Delta y}^y \int_{z+\Delta z}^z -p(x; y; z) dz dy = -p(x; y; z) \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

Az $A'B'C'D'$ lapon átáramló folyadékmennyiséget jelöljük $Q_{x(2)}$ -vel.

A sebességet vegyük a lap mentén azonosnak, akkorának, mint az $A'(x+\Delta x; y; z)$ pontban.

A kifejté mutató felületi normális:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{02} &= \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \\ \mathbf{v} &= p(x+\Delta x; y; z)\mathbf{i} + q(x+\Delta x; y; z)\mathbf{j} + s(x+\Delta x; y; z)\mathbf{k}, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{02} &= p(x+\Delta x; y; z), \\ Q_{x(2)} &= \int_{y+\Delta y}^y \int_{z+\Delta z}^z p(x+\Delta x; y; z) dz dy = p(x+\Delta x; y; z) \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

Az x tengelyre merőleges lapokon a be- és kiáramló folyadék különbsége a normális megfelelő irányítása mellett:

$$Q_x \approx Q_{x(1)} + Q_{x(2)} = [p(x+\Delta x; y; z) - p(x; y; z)] \Delta y \Delta z.$$

Alkalmazva a differenciálnál tanultakat:

$$Q_x \approx [p(x+\Delta x; y; z) - p(x; y; z)] \Delta y \Delta z \approx \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Hasonló okoskodással:

$$Q_y \approx \frac{\partial q}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad Q_z \approx \frac{\partial s}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Igy a hasábba be- és kiáramló folyadékmennyiség különbsége, az „anyagszaporulat” közeli-
lítőleg:

$$Q \approx Q_x + Q_y + Q_z \approx \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

ahol

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial s}{\partial z}$$

$p(x; y; z)$, $q(x; y; z)$, $s(x; y; z)$ függvények parciális deriváltjai az $A(x; y; z)$ pontban. Az anyagszaporulat nem más, mint a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ sebességvektornak a ΔV hasáb felületére vonatkozó felületi integrálja (kifejté mutató felületi normális esetén).

A ΔV térfogatbeli anyagszaporulat tehát

$$\iiint_{\Delta V} v \, dF \approx \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} \right) \Delta V,$$

ahol

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Az anyagszaporulat mértékére jellemző a térfogategységre eső anyagszaporulat

$$\frac{\iiint_{\Delta V} v \, dF}{\Delta V} \approx \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z}.$$

Ha $\Delta V \rightarrow 0$, a hasáb a $P(x; y; z)$ pontba zsugorodik, az egyenlőtlenségből egyenlőség lesz. A határértéket a v vektortér divergenciájának nevezzük és $\operatorname{div} v$ -vel jelöljük.

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{F_{\text{net}}}{\Delta V}.$$

A megmondolás akkor is érvényes, ha ΔV nem hasáb, hanem tetszőleges alakú test térfogata.

Ekkor a felületi integrál a testet határoló zárt felületre vonatkozik.

A testből az anyag szétáramlik, divergál. Innen származik a divergencia elnevezés.

Az anyagszaporulat jelképes szó. Ha a divergencia pozitív, a test belsejében forrás van, ha

negatív, negatív forrás, nyelő van.

A divergencia más fizikai fogalmakra is általánosítható. Olyan esetekben is használják, amikor a v vektortér nem egy áramlás sebességére, hanem mágneses vagy elektromos erőter.

A divergencia fogalma. Függetlenül a fizikai jelentéstől a

$$v(x; y; z) = p(x; y; z)i + q(x; y; z)j + s(x; y; z)k$$

vektortér divergenciáját így definiáljuk:

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z}$$

ahol a p, q, s függvényeket az $(x; y; z)$ pontban vesszük. A divergencia a három háromváltozós függvény megfelelő parciális deriváltjainak összege.

$$v = pi + qj + sk$$

vektortér divergenciája a szimbolikus

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

differentiáloperátorral, a nabla vektorral kifejezhető.

A nabla vektorral kifejezve:

$$\operatorname{div} v = \nabla \cdot v$$

$$\operatorname{div} v = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k \right) \cdot (pi + qj + sk),$$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z}.$$

A szimbolikus vektorral való skaláris szorzás is mutatja, hogy a divergencia skaláris mennyiség.

Példa

Írjuk fel a

$$v = x\sqrt{yz}i - \frac{x}{y}j + (x-y)zk$$

függvény divergenciáját. Mi a divergencia értéke a $P_0(2; 1; 4)$ pontban?

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z},$$

$$p = x\sqrt{yz}; \quad q = -\frac{x}{y}; \quad s = (x-y)z.$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sqrt{yz}; \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial s}{\partial z} = x - y.$$

$$\operatorname{div} v = \sqrt{yz} + \frac{x}{y^2} + x - y.$$

Látjuk, hogy a divergencia háromváltozós skalárfüggvény. Értéke a $P_0(2; 1; 4)$ pontban:

$$(\operatorname{div} v)_{P_0} = \sqrt{4} + \frac{1}{2} + 2 - 1 = 2 + 2 + 1 = 5.$$

11.3.6 Vektortér rotációja

Bevetés. Vizsgáljuk egy fix tengely körül mozgó merev test sebességének vektorterét.

Tegyük fel, hogy a forgástengely átmege az

origón.

Legyen a merev test P pontjának helyvektora r . A pont körpályán mozog, tangenciális sebessége $v = \frac{dr}{dt}$.

Ha a helyvektor a tengellyel α szöget zár be, és R a körpálya sugara,

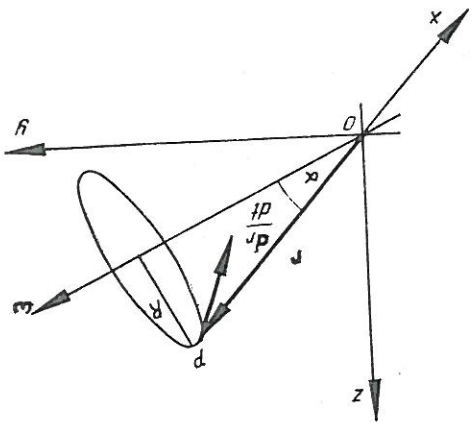
$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = R\omega = \omega |r| \sin \alpha$$

(11.61 ábra).

ahol ω a pont szögsebessége.

Merev test forgó mozgásának jellemzésére

felvesszük a szögsebességvektort, ω -t.



A szögsebességvektor olyan vektor, amelynek iránya azonos a forgás tengelyével, nagysága egyenlő a szögsebesség abszolút értékével, értelme olyan, hogy a forgásiránnyal jobb csavar-menetet alkot. Így a $\frac{dr}{dt}$ tangenciális sebesség ω és r vektori szorzataként definiálható:

$$\frac{dr}{dt} = \omega \times r.$$

Legyenek a vektorok komponenseikkel adva:

$$\begin{aligned} r &= xi + yj + zk, \\ \omega &= \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k, \\ v &= pi + qj + rk. \end{aligned}$$

A sebességvektor mint a két vektor vektori szorzata:

$$v = \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

$$A \quad v = p(x; y; z)i + q(x; y; z)j + s(x; y; z)k \quad \text{sebességvektor komponensei a determináns kifejtésével:}$$

$$p(x; y; z) = \omega_y z - \omega_z y$$

$$q(x; y; z) = \omega_z x - \omega_x z$$

$$s(x; y; z) = \omega_x y - \omega_y x.$$

Vegyünk az egyenletek parciális deriváltjait. Mivel test forgásakor az egyes pontok szögsebessége azonos (csak az idő függvénye), így az egyes pontok szögsebességvektora is azonos. A parciális deriválásnál ezért a szögsebességvektor komponenseit állandónak vehetjük.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\omega_y, & \frac{\partial p}{\partial y} &= \omega_x, \\ \frac{\partial q}{\partial x} &= \omega_z, & \frac{\partial q}{\partial y} &= -\omega_x, \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= -\omega_z, & \frac{\partial y}{\partial y} &= \omega_y. \end{aligned}$$

Ezekből az egyenletekből:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial s}{\partial y}, & \text{illetve} & \quad \omega_x = -\frac{\partial q}{\partial z}, \\ \omega_y &= \frac{\partial p}{\partial z}, & \text{illetve} & \quad \omega_y = -\frac{\partial s}{\partial x}, \\ \omega_z &= \frac{\partial q}{\partial x}, & \text{illetve} & \quad \omega_z = -\frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

Tehát a keresett szögsebességvektor kétszerese így írható fel:

$$2\omega = \left(\frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) k.$$

A képletet így nehéz volna megjegyezni. A nabla (∇) vektor segítségével a szögsebességvektor képlete igen egyszerű lesz.

$$2\omega = \nabla \times v.$$

$$\text{Mivel} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k,$$

$$2\omega = \nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & s \end{vmatrix}.$$

A harmadrendű determinánst kifejtve:

$$2\omega = \nabla \times v = \left(\frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) k.$$

Látjuk, hogy a $\nabla \times v$ vektori szorzat 2ω -ra az előbb megkapott eredményt adta.

A $\nabla \times v$ vektort, mivel speciális esetünkben a szögsebességvektor kétszeresét szolgáltatja, a $v = v(r)$ vektortér rotációjának nevezzük és így jelöljük:

$$\text{rot } v = \nabla \times v.$$

A rotáció fogalma. Függetlenül fizikai jelentésétől a $v = v(r)$ vektortér rotációját a következőképpen definiáljuk.

Definíció. Ha adott a $v = v(r)$, azaz a

$$v = p(x; y; z)i + q(x; y; z)j + s(x; y; z)k$$

vektortér, akkor a vektortér rotációja:

$$\text{rot } v = \left(\frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) k.$$

A rotáció a ∇ vektorial kifejezve:

$$\boxed{\text{rot } v = \nabla \times v.}$$

$$\text{Mivel} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k,$$

$$\text{rot } v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & s \end{vmatrix}.$$

A determinánst kifejtve:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix} \mathbf{i} + \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \end{pmatrix} \mathbf{j} + \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \mathbf{k}.$$

Látjuk, hogy $\nabla \times \mathbf{v}$ valóban megadja $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ értékét.

Példa

Határozzuk meg a

$$\mathbf{v} = \left(x^2 + \frac{y}{z} \right) \mathbf{i} + (x^3 - y^2 z) \mathbf{j} + \frac{z}{x} \mathbf{k}$$

vektortér rotációját.

Határozzuk meg a rotációvektort a $P(1; 2; -1)$ pontban.

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + \frac{y}{z} & x^3 - y^2 z & \frac{z}{x} \end{vmatrix} =$$

$$= (0 + y^2) \mathbf{i} - \left(\frac{1}{z^2} - 0 \right) \mathbf{j} + \left(3x^2 + \frac{2}{y^2} \right) \mathbf{k}.$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = y^2 \mathbf{i} - \frac{1}{z^2} \mathbf{j} + \left(3x^2 + \frac{2}{y^2} \right) \mathbf{k}.$$

Az adott pontban:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{7}{2}\mathbf{k}.$$

11.3.6.1 A rotáció és a cirkuláció kapcsolata

A $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér rotációja a

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} \quad \text{vektor.}$$

Vegyük fel ugyanabban a vektortérben egy $\mathcal{G}$ zárt görbét.

$$\mathbf{A} = \oint_{\mathcal{G}} \mathbf{v} \, d\mathbf{r}$$

görbeintegrál a cirkuláció.

(Ha $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ egy örvénylő folyadék-

térben a sebességvektor, a ΔF felület-

darabot határoló görbére vonatkozó

$\oint \mathbf{v} \, d\mathbf{r}$ integrál a sebességvektor cir-

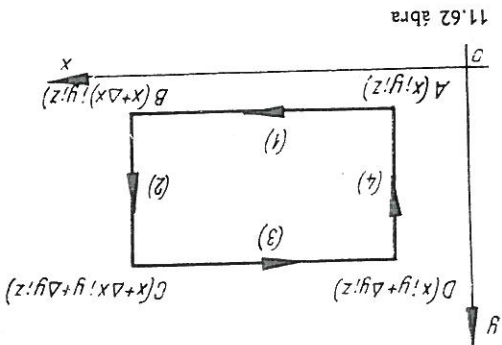
kulációja.)

Vizsgáljuk az összefüggést a v vektortér

rotációja és cirkulációja között.

Legyen a $\mathcal{G}$ zárt görbe először az $(x; y)$

síkban fekvő (11.62 ábra) téglalap.



11.62 ábra

A vonalintegrált négy részben számítjuk ki:

$$\mathbf{v} = p(x; y; z)\mathbf{i} + q(x; y; z)\mathbf{j} + r(x; y; z)\mathbf{k}.$$

Az (1) úton:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}.$$

Vegyük az út mentén a $\mathbf{v}$ függvényt állandónak, olyan értékűnek, mint az $\mathbf{A}(x; y; z)$ pontban.

$$\text{Így} \quad \int_{x+\Delta x}^x \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{x+\Delta x}^x p(x; y; z) \, dx = p(x; y; z) \Delta x.$$

A (3) úton is vegyük a $\mathbf{v}$ függvényt állandónak, olyan értékűnek, mint a $\mathbf{D}(x; y+\Delta y; z)$ pontban.

Mivel itt is

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

$$\int_x^{x+\Delta x} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_x^{x+\Delta x} p(x; y+\Delta y; z) \, dx = -p(x; y+\Delta y; z) \Delta x.$$

$$\int_{x+\Delta x}^x \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{x+\Delta x}^x [p(x; y; z) - p(x; y+\Delta y; z)] \Delta x.$$

Vagy a differenciál segítségével

$$\int_{x+\Delta x}^x \mathbf{v} \, d\mathbf{r} \approx -\frac{\partial p}{\partial y} \Delta x \Delta y.$$

A (2) és (4) úton

$$\mathbf{r} = 0\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

$$d\mathbf{r} = 0\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

A $\mathbf{v}$ függvényt most is állandónak vesszük.

A (2) úton $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{B})$; ahol $\mathbf{B}(x+\Delta x; y; z)$.

A (4) úton $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{A})$; ahol $\mathbf{A}(x; y; z)$.

$$\int_{y+\Delta y}^y \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{y+\Delta y}^y q(x+\Delta x; y; z) \, dy = q(x+\Delta x; y; z) \Delta y.$$

$$\int_y^{y+\Delta y} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_y^{y+\Delta y} q(x; y; z) \, dy = -q(x; y; z) \Delta y.$$

$$\int_{x+\Delta x}^x \mathbf{v} \, d\mathbf{r} \approx [q(x+\Delta x; y; z) - q(x; y; z)] \Delta y \approx \frac{\partial q}{\partial x} \Delta x \Delta y.$$

A zárt görbe menti integrál a négy integrál összege.

$$\oint \mathbf{v} \, d\mathbf{r} \approx \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y.$$

Az értékek közelítő. Az integrálandó függvényt állandónak vettük, és a függvényértékek különbözőségét differenciálal helyettesítettük.

Látható, hogy az integrál függ a $\Delta x \Delta y$ felületekdarab méreteitől. $\Delta F = \Delta x \Delta y$ jelöléssel:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \approx \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \Delta F.$$

Igazolható, hogy a közelítő egyenlőség általánosanabb esetben is igaz. Erőnyes akkor is, ha a g görbe a $z = \text{konst}$ síkban fekvő tetszőleges alakú zárt görbe, és ΔF a g görbe által határolt síktérsz.

Vonatkoztatásuk a g görbe menti *cirkuláció* értékét a görbe által határolt felületettségére.

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \approx \frac{\Delta F}{\Delta x} \approx \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Ha $\Delta F \rightarrow 0$, azaz a felületekdarabot egyik pontjára zsugorítjuk — jelen esetben a $P(x, y, z)$ pontra —, a közelítő egyenlőségből egyenlőség lesz.

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x}.$$

A jobb oldalon álló kifejezés a $\text{rot } \mathbf{v}$ vektor $\mathbf{k}$ irányú komponensének nagysága, hiszen a $\mathbf{v}$ vektortör rotációja

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & s \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \mathbf{k}.$$

Ezt a komponens megkapjuk, ha a $\text{rot } \mathbf{v}$ vektort a z tengelyre vetítjük. Így

$$(\text{rot } \mathbf{v})_z = \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta F}.$$

A felületi normális (most a $\mathbf{k}$ vektor) iránya olyan, hogy a g zárt görbe körüljárásával jobb-

csavarmenetet alkot.

Hasonló módon kapjuk az $(x; z)$ és $(y; z)$ koordinátasíkokkal párhuzamos síkdarabokra, illetve ezeket a síkdarabokat körülvevő zárt görbe menti integrálokra a következő kifeje-

zéseket:

$$(\text{rot } \mathbf{v})_x = \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta F},$$

$$(\text{rot } \mathbf{v})_y = \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta F}.$$

A függvények jellege szerint tehát
 gradiense csak skálartérnek van, a gradiensvektor,
 divergenciája csak vektortérnek van, a divergencia skálár,
 rotációja csak vektortérnek van, a rotáció vektor.
 A nabla operátor az így nyert vektortérre és skálartérre újra alkalmazható.

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & s \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial p} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial p} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial q} \right) \mathbf{k}.$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial p} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial q} \right) \mathbf{k} = (p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + s\mathbf{k}) \times \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial p} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial q} \right) \mathbf{k}.$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) \cdot (p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + s\mathbf{k}) = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z}.$$

$$\text{grad } u = \nabla \cdot u = \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}.$$

A koordináták segítségével:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v} \quad (\text{a rotáció vektor}).$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} \quad (\text{a divergencia skálár}).$$

A nabla vektort kétféleképpen, skálárisan és vektoriálisan lehet szorozni.

$$\nabla \cdot u = \text{grad } u \quad (\text{a gradiensvektor}).$$

vektor, ezért skálartérrel csak egyféleképpen lehet szorozni.

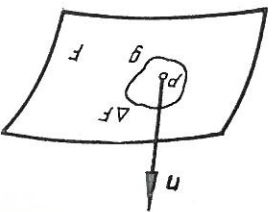
Foglaljuk össze a ∇ operátor eddigi alkalmazásait!
 A nabla operátor (∇) vektortérben vektornak tekintjük. A nabla vektor

11.3.7 A nabla operátor többszöri alkalmazása

Bizonyítható, hogy a jobb oldalon szereplő határérték és speciálisan a $\text{rot } \mathbf{v}$ vektor komponenseire az előzőekben felírt határértékek léteznek, ha a $\mathbf{v}$ vektor komponenseinek elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak.

A rotációvektor értéke invariáns, azaz független a koordináta-rendszer felvételétől. Így a rotáció invariáns a koordináta-rendszer eltolásával és elforgatásával szemben.

11.63 ábra



Legyen adott a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortérben az F felület. Legyen a felület P pontja körüli felületekdarab ΔF , amelyet a g görbe határol. A felület P pontbeli érintősíkjának normálvektora legyen $\mathbf{n}$ (11.63 ábra).

A rotációnak a P pontban az $\mathbf{n}$ vektorra való merőleges vetülete:

$$(\text{rot } \mathbf{v})_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta F}.$$

Könnyen belátható, hogy a következő, a nábli vektoral végzett, formális műveletek valóban

végrehajthatók.

1. A *gradiens függvény*, grad u vektortér, képezhető divergenciája és rotációja

a) div grad $u = \nabla(\nabla u)$.

Tegyük fel, hogy az $u = u(x; y; z)$ függvénynek (skalártérnek) létezik a másodrendű

parciális deriváltjai.

$$\nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \Delta u.$$

Bevezetjük a $\nabla^2 = \Delta$, illetve $\nabla^2 u = \Delta u$ jelölést. (Itt a Δu mást jelent, mint az $u = u(x; y; z)$ skalártér növekedésénél a Δu jelölés.)

$$\Delta u = \nabla^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) u.$$

$$\text{div grad } u = \nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

$$\Delta = \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

zimbólum függvényoperátor. *Laplace-operátor*nak nevezik.

b) rot grad $u = \nabla \times (\nabla u)$.
Mivel ∇ és ∇u vektorok párhuzamosak, vektori szorzatuk nulla.

$$\text{rot grad } u = \nabla \times (\nabla u) = 0.$$

2. A *divergencia függvény*, div v skalártér, képezhető gradiense.

$$\text{grad div } v = \nabla(\nabla v).$$

3. A *rotáció*, rot v vektortér, képezhető divergenciája és rotációja.

$$\text{a) div rot } v = \nabla(\nabla \times v).$$

Mivel $\nabla(\nabla \times v) = \nabla \cdot \nabla \cdot v$ olyan vegyes szorzat, amelyben két komponens párhuzamos, értéke nulla:

$$\text{div rot } v = \nabla(\nabla \times v) = \nabla \nabla v = 0.$$

$$\text{b) rot rot } v = \nabla \times (\nabla \times v).$$

Példák

1. Adott az $u = \frac{x^2 \ln y}{\sqrt{z}}$ skalártér.

Mennyi div grad u a $P(2; 1; 1)$ pontban?

$$\begin{aligned} \text{div grad } u &= \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x \ln y}{\sqrt{z}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2 \ln y}{\sqrt{z}}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{x^2}{y \sqrt{z}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x^2}{y^3 \sqrt{z}}, \end{aligned}$$

$$F_1(x; y) \equiv F_2(x; y).$$

folytonos, valamint

Azaz legyen T az $(x; y)$ sík mérhető területű zárt halmaza, és legyen T -ben $F_1(x; y)$ és $F_2(x; y)$

$$V = \{(x; y; z): (x; y) \in T; F_1(x; y) \equiv z \equiv F_2(x; y)\}.$$

Legyen

dinamikus felől nézve normáltartomány.

Bizonyítás. A bizonyítást olyan tartományra nézve végezzük el, amely mindhárom koor-

(A felületi integrált kifeje mutató normálissal kell venni)

$$\iint_V v(r) dF = \iint_V \text{div } v \, dx \, dy \, dz.$$

beliségben $v(r)$ koordinátáinak, p, q, s -nek parciális deriváltjai is folytonosak. Ekkor

Tétel. Legyen a $v = v(r)$ függvény folytonos a mérhető felszíni, irányítható zárt F felületen és a felület által bezárt, mérhető tért fogadó V térrészben. Legyenek a felületen és a térrész

Bizonyos felületi integrálok átalakíthatók a felület által bezárt térrészre vonatkozó hármas

integrálokká. Ezt fejezi ki a *Gauss-Osztrógradszkij-tétel*.

1. A térbeli Gauss-Osztrógradszkij-féle tétel

11.3.8 Integrálátalakítási tételek

$$\text{grad div } v = -12i + 5j + 14k.$$

A P_0 pontban

$$= (6x - 3yz^2)i + (2\sqrt{z} - 3xz^2)j + \left(\frac{\sqrt{z}}{y} - 6xyz\right)k.$$

$$\text{grad div } v = \text{grad } u = \nabla \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k =$$

$$u = \text{div } v = \nabla \cdot v = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} = 3x^2 + 2y\sqrt{z} - 3xyz^2.$$

helyvektori pontban.

$$\text{grad div } v \text{ vektort az } r_0 = -1i + 2j + 1k$$

Határozzuk meg a

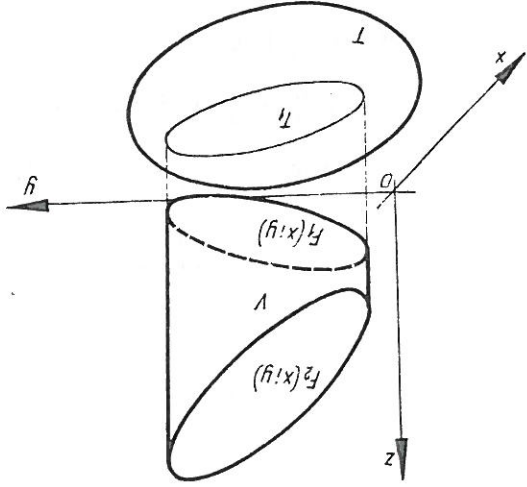
$$2. \quad v = \left(x^3 + \frac{z}{y} \right) i + y^2 \sqrt{z} j - xyz^3 k.$$

$$\text{div grad } u = -4.$$

A $P(2; 1; 1)$ pontban

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x^2 \ln y}{\sqrt{z}} = \frac{2\sqrt{z}}{3x^2 \ln y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2\sqrt{z}}{3x^3 \ln y}, \\ \text{div grad } u &= \frac{2 \ln y}{x^2} - \frac{\sqrt{z}}{x^2} + \frac{3x^2 \ln y}{4\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

Ez geometriailag azt jelenti, hogy a V tartományt a $z = F_1(x; y)$ és $z = F_2(x; y)$ egyenletű felület és egy T tartomány határvonalán az $(x; y)$ síkra merőlegesen állított hengerpálást határozza (11.64 ábra).



11.64 ábra

A divergencia definíciójából és az additivitásból adódik:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \, dy \, dz = \iiint_V (p_i + q_j + s_k) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz +$$

$$+ \iiint_V \frac{\partial q}{\partial y} dx \, dy \, dz + \iiint_V \frac{\partial s}{\partial z} dx \, dy \, dz.$$

A jobb oldalon kapott három integrál közül alakítsuk át a harmadikat. A másik kettő általa-kítása teljesen hasonló módon történik.

$$\iiint_V \frac{\partial s}{\partial z} dx \, dy \, dz = \iint_{F_2(x; y)} \left[\int_{F_1(x; y)} \frac{\partial s}{\partial z} dz \right] dx \, dy =$$

$$= \iint_V [s(x; y; z)]_{F_1(x; y)}^{F_2(x; y)} = \iint_V [s(x; y; F_2(x; y)) - s(x; y; F_1(x; y))] dx \, dy +$$

$$+ \iint_T [-s(x; y; F_1(x; y))] dx \, dy.$$

Nézzük az utolsó két integrált. Az első a $\mathbf{v} = s\mathbf{k}$ vektortér felületi integrálja a $z = F_2(x; y)$ egyenletű felületen, a második ugyancsak a $\mathbf{v} = s\mathbf{k}$ vektortér felületi integrálja a $z = F_1(x; y)$ egyenletű felületen, kettős integrállá átalakított formában.

Jelölje F_1 és F_2 egyúttal a felületeket is.

$$\text{Ezért} \quad \iiint_V \frac{\partial s}{\partial z} dx \, dy \, dz = \iint_{F_2} s\mathbf{k} \, dF + \iint_{F_1} s\mathbf{k} \, dF.$$

Az F felület az F_1 és F_2 felületen kívül csak az $(x; y)$ síkra merőleges hengerpálástól áll. A hengere felület mentén az $s(x; y; z)\mathbf{k}$ vektortér felületi integrálja zérus, mert a hengere felület normálvektora merőleges az $s\mathbf{k}$ vektorra. Így utolsó képletünk két integrálja az egész felületi integrált megadja.

$$\iint_{F_1} s\mathbf{k} \, dF + \iint_{F_2} s\mathbf{k} \, dF = \iint_F s\mathbf{k} \, dF.$$

Vagyis

$$\iiint_V \frac{\partial s}{\partial z} dx \, dy \, dz = \iint_F s\mathbf{k} \, dF.$$

Teljesen hasonló módon

$$\iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz = \iint_F p_i \, dF,$$

$$\iiint_V \frac{\partial q}{\partial y} dx \, dy \, dz = \iint_F q_j \, dF,$$

ahol a felületi normálisokat mindig kifejele irányítottoknak kell venni. Adjuk össze az utolsó három egyenletet. A bal oldalak összege:

$$\iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz + \iiint_V \frac{\partial q}{\partial y} dx \, dy \, dz + \iiint_V \frac{\partial s}{\partial z} dx \, dy \, dz =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \, dy \, dz.$$

A jobb oldalak összege

$$\iint_F p_i \, dF + \iint_F q_j \, dF + \iint_F s_k \, dF = \iint_F (p_i + q_j + s_k) \, dF = \iint_F \mathbf{v} \, dF.$$

Tehát

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \, dy \, dz = \iint_{F_{\text{zár}}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \, dF.$$

Ezzel a Gauss – Ostrogradszkij-tétel bebizonyítottuk.

A bizonyítás kiterjeszthető minden olyan V térrészre, amely az itteni típusú térrészekből rakható össze úgy, hogy az egymással fedésbe kerülő felületrészekben a felületi normálisok irányításai ellentétesek legyenek. Ekkor az egymást fedő felületi integrálok algebrai összege zérus.

Alkalmazzuk a tételt a

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} = xi + yj + zk \quad \text{vektortérre.}$$

$$\text{Mivel} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{r} = \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \iiint_V 3 \, dV = 3V.$$

A Gauss–Osztrogradszkij-tétel szerint

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \iint_{\partial V} \mathbf{v} \, dF.$$

Igy a $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ vektortérre vonatkozó felületi integrál:

$$\iint_F \mathbf{r} \, dF = 3V,$$

ahol V a V térrész térfogatát is jelöli.

11. A síkbeli Gauss – Osztrogradszkij-tétel

Tétel. Legyen T az $(x; y)$ síkban mindkét koordinátatengelyre nézve normáltartomány. Legyen ennek g határoló görbéje szakaszosan folytonosan differenciálható, és legyen a határoló görbe paraméteresen adott (11.65 ábra).

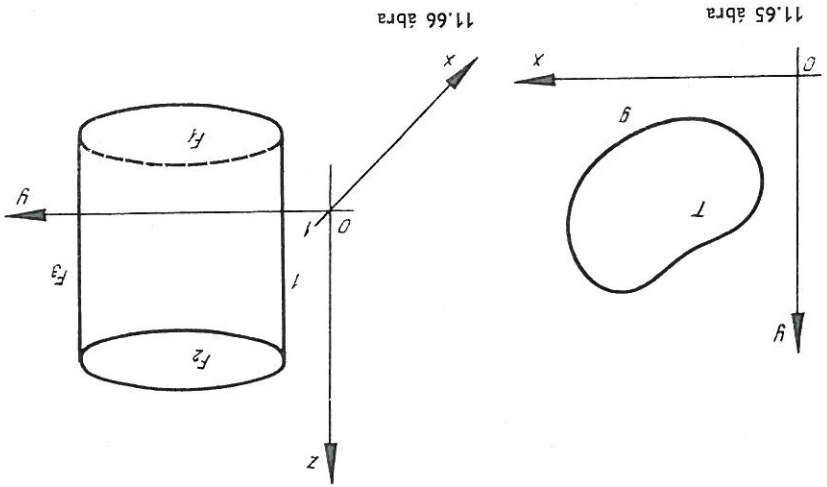
Legyen adott a $\mathbf{v} = p(x; y)\mathbf{i} + q(x; y)\mathbf{j}$ vektortér. Legyenek p, q és parciális deriváltjaik T -ben és g -n folytonosak.

Ekkor

$$\iint_T \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \, dy = \int_g [-q(x; y) \, dx + p(x; y) \, dy].$$

azaz

$$\iint_T \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_g [-q(x; y) \, dx + p(x; y) \, dy].$$



Bizonyítás. Alkalmazzuk a térbeli Gauss – Osztrogradszkij-tételt a speciális

$$\mathbf{v} = p(x; y)\mathbf{i} + q(x; y)\mathbf{j} \quad \text{vektortérre.}$$

Legyen a V térrész a T tartományra emelt egységnyi magasságú henger (11.66 ábra). A térbeli tétel:

$$\iiint_{F_{\text{zár}}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \iint_{F_{\text{zár}}} \mathbf{v} \, dF.$$

Speciális esetünkben a bal oldal így alakul:

$$s \equiv 0, \quad \text{ezért}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \\ &= \iint_1^2 \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dz \right] dx \, dy = \iint_T \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) z \right]_1^2 dx \, dy = \\ &= \iint_T \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx \, dy. \end{aligned}$$

A jobb oldalon álló felületi integrál három részből írható fel:

$$\iint_{F_{\text{zár}}} \mathbf{v} \, dF = \iint_{F_1} \mathbf{v} \, dF + \iint_{F_2} \mathbf{v} \, dF + \iint_{F_3} \mathbf{v} \, dF.$$

Mivel az F_1 és F_2 felületek kifeje mutató felületi normálisa $-\mathbf{k}$, illetve $\mathbf{k}$, a két integrál algebrailag összege zérus. (Az F_1 és F_2 felületek egybevágók és párhuzamosak.)

Az F_3 hengerfelület menti integrált a g görbementi integrállá alakítjuk át.

Legyen a g görbe egyenlete

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Ekkor a hengerpalást egyenlete:

$$\mathbf{r}(t; v) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + v\mathbf{k}.$$

$$a \equiv t \leq \beta, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

A felület normálisa:

$$\mathbf{r}'_t \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j},$$

$$\text{ahol} \quad x = x(t), \quad y = y(t).$$

Ha a g görbét pozitív irányban járjuk körbe, azaz T balra esik, a felületi normális $\mathbf{r}'_t \times \mathbf{r}'_v$ kifeje irányított.

Az F_3 hengerfelületen a felületi integrál:

$$\int_F \mathbf{v} \, dF = \int_0^T \int_1^2 (p\mathbf{i} + q\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{j}\mathbf{i} - \mathbf{x}\mathbf{j}) \, dt \, dv =$$

$$= \int_1^2 \int_0^T (py - qx) \, dv \, dt = \int_1^2 \left[\int_0^T (py - qx)v \, dt \right]_{t=1}^2 dt = \int_1^2 (py - qx) \, dt =$$

A vonalintegrált paraméterrel felírva:

$$\int_{\beta}^{\alpha} (py - qx) \, dt = \int_{\beta}^{\alpha} \{ p[x(t); y(t)]y'(t) - q[x(t); y(t)]x'(t) \} \, dt =$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} [-q(x; y) \, dx + p(x; y) \, dy].$$

$$\int_F \mathbf{v} \, dF = \int_F \mathbf{v} \, dF = \int_{\beta}^{\alpha} [-q(x; y) \, dx + p(x; y) \, dy].$$

Tehát

$$\iint_F \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_{\beta}^{\alpha} [-q \, dx + p \, dy].$$

Ezzel bizonyítottuk a síkbeli Gauss–Osztrogradskij-tételt.

*

Alkalmazzuk a tételt a $p(x; y) = x$ és $q(x; y) = y$ függvényekre, azaz a $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ vektorra.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial q}{\partial y} = 1.$$

Az utolsó egyenlet bal oldala

$$\iint_F \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx \, dy = 2 \iint_F dx \, dy = 2A,$$

ahol A a tartomány területe.

A jobb oldal

$$\int_{\beta}^{\alpha} (-q \, dx + p \, dy) = \int_{\beta}^{\alpha} (-y \, dx + x \, dy).$$

Igy a terület:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\beta}^{\alpha} (-y \, dx + x \, dy).$$

III. Forrásmentes vektorterekre vonatkozó tétel

Definíció. A $\mathbf{v} = v(\mathbf{r})$ vektortér forrásmentes egy térészben, ha ott

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Tétel. Tegyük fel, hogy az F_1 és F_2 felület a g zárt görben csatlakozik egymáshoz. Egyesítsük legyen az F zárt felület. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v} = v(\mathbf{r})$ vektortér forrásmentes az F felülettel határolt V térészben.

Ekkor

$$\iint_{F_1} \mathbf{v} \, dF = \iint_{F_2} \mathbf{v} \, dF,$$

ahol F_1 irányítása F irányításával megegyező, F_2 -é pedig ellentétes.

Bizonyítás. A Gauss–Osztrogradskij-tétel szerint

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \iint_{F_{\text{zart}}} \mathbf{v} \, dF.$$

Ha a vektortér forrásmentes, azaz

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv 0,$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = 0.$$

Igy a bal oldal is zérus:

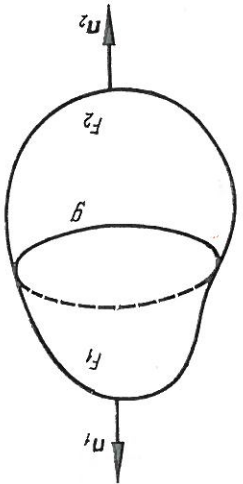
$$\iint_F \mathbf{v} \, dF = 0.$$

A felületi integrált két részből felírva, kifejezve való irányítással:

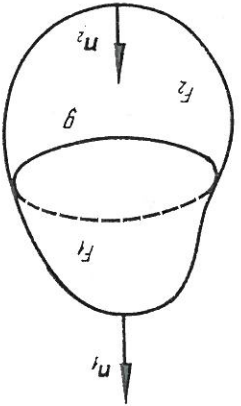
$$0 = \iint_{F_{\text{zart}}} \mathbf{v} \, dF = \iint_{F_1} \mathbf{v} \, dF + \iint_{F_2} \mathbf{v} \, dF.$$

Innen

$$\iint_{F_1} \mathbf{v} \, dF = - \iint_{F_2} \mathbf{v} \, dF \quad (11.67 \text{ ábra}).$$



11.67 ábra



11.68 ábra

Ha n_2 irányítását megváltoztatjuk:

$$\iint_{F_1} \mathbf{v} \, dF = \iint_{F_2} \mathbf{v} \, dF \quad (11.68 \text{ ábra}).$$

Ezzel a tételt igazoltuk.

Keressük, mi a feltétele annak, hogy egy vektortér forrásmentes legyen.

A v vektortör forrásmentes, ha

$$\operatorname{div} v = 0.$$

Mivel $\operatorname{div} \operatorname{rot} v_1 = \nabla(\nabla \times v_1) = 0$, ezért, ha a v vektortörre igaz, hogy egy v_1 vektortör rotációja (örvénytere) $v = \operatorname{rot} v_1$, akkor

$$\operatorname{div} v = 0.$$

Tehát, ha $v = \operatorname{rot} v_1$, a közös határgörbéjű és megfelelően irányított felületekre a felületi integrál ugyanaz:

$$\iint_{F_1} \operatorname{rot} v_1 dF = \iint_{F_2} \operatorname{rot} v_1 dF = \dots = \iint_{F_n} \operatorname{rot} v_1 dF.$$

Példák

1. Igazoljuk a Gauss–Osztrógradszkij-télt a $v(r) = r$ vektortörre, ha a V térrész az origó körüli egységssugarú gömb.

Gömbi koordinátákat használva:

$$x = r \sin u \cos v,$$

$$y = r \sin u \sin v,$$

$$z = r \cos u.$$

A teljes gömbnél

$$0 \leq r \leq 1,$$

$$0 \leq u \leq \pi, \quad (11.69 \text{ ábra})$$

$$0 \leq v \leq 2\pi.$$

Először számítsuk ki a gömbben $\operatorname{div} v$ integrálját.

$$v = r = xi + yj + zk.$$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$\iiint_V \operatorname{div} v dV = \iiint_V 3 dV = 3 \iiint_V dV = 3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 3 r^2 dr dv du = 3 \frac{4\pi}{3} = 4\pi.$$

A felületi integrál (11.3.4.1 pont):

$$\iint_F v dF = \iint_F r \cdot (r_u' \times r_v') du dv.$$

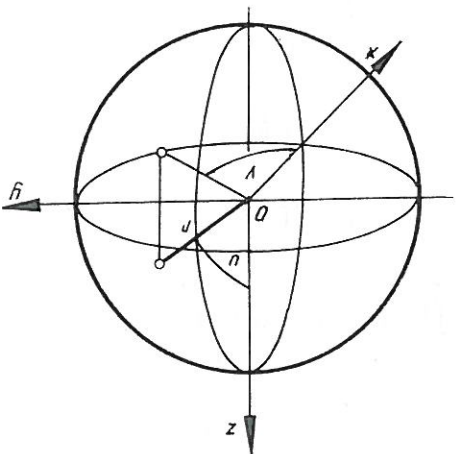
$$v = r.$$

Mivel a sugar egységnyi, a vektor-vektor függvény:

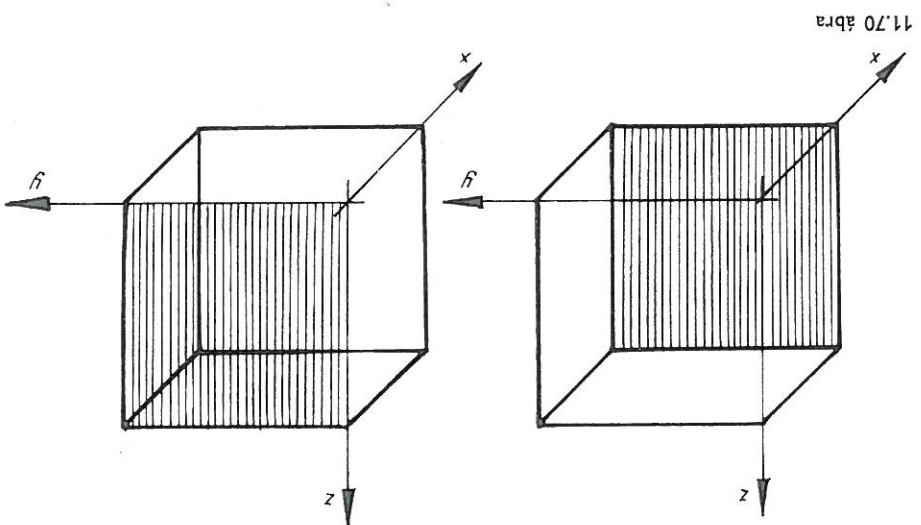
$$v = r = \sin u \cos v i + \sin u \sin v j + \cos u k,$$

$$r_u' = \cos u \cos v i + \cos u \sin v j - \sin u k,$$

$$r_v' = -\sin u \sin v i + \sin u \cos v j + 0 \cdot k.$$



11.69 ábra



11.70 ábra

vektortörre, ha az integrációs tartomány a $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ határok által bezárt kocka alakú tartomány (11.70 ábra).

$$R = (x^3 - 2y + z^2)i + (y^3 - 2z + x^2)j + (z^3 - 2x + y^2)k$$

2. Igazoljuk a Gauss–Osztrógradszkij-télt az

mint a felületi integrálé.

A két úton nyert eredmény azonos. Láthatjuk, hogy sokkal egyszerűbb $\iiint_V \operatorname{div} v dV$ kiszámítása,

$$\iiint_V v dF = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sin u du dv = \left[-\cos u \right]_0^\pi = 2\pi \cdot 2 = 4\pi.$$

A felületi integrál

$$= \sin^3 u + \sin u \cos^2 u = \sin u (\sin^2 u + \cos^2 u) = \sin u.$$

$$= \sin^3 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin u \cos^2 u =$$

$$v(r_u' \times r_v') = \sin^3 u \cos^2 v + \sin^3 u \sin^2 v + \sin u \cos^2 u =$$

A $v(r_u' \times r_v')$ skaláris szorzat:

k együtthatója a gömb felső felénél pozitív, az alsónál negatív. A felületi normális kitélé mutat.

$$\text{ha } \frac{\pi}{2} < u < \pi, \quad \sin u \cos u < 0.$$

$$\text{Ha } 0 < u < \frac{\pi}{2}, \quad \sin u \cos u > 0,$$

$$= \sin^2 u \cos v i + \sin^2 u \sin v j + \sin u \cos u k.$$

$$= \sin^2 u \cos v i + \sin^2 u \sin v j + (\cos^2 v \sin u \cos u + \sin^2 v \sin u \cos u)k =$$

$$r_u' \times r_v' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

Az $r_u' \times r_v'$ vektori szorzat:

A Gauss—Osztrogradszkij-tétel:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{R} \, dV = \iint_F \mathbf{R} \, dF.$$

Számítsuk ki egymástól függetlenül az adott vektortérre a két integrált!

A térfogati integrál:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (x^3 - 2y + z^2)\mathbf{i} + (y^3 - 2z + x^2)\mathbf{j} + (z^3 - 2x + y^2)\mathbf{k}, \\ \operatorname{div} \mathbf{R} &= \nabla \mathbf{R} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) [(x^3 - 2y + z^2)\mathbf{i} + (y^3 - 2z + x^2)\mathbf{j} + (z^3 - 2x + y^2)\mathbf{k}], \\ \operatorname{div} \mathbf{R} &= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2. \end{aligned}$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{R} \, dV = \int_1^4 \int_1^1 \int_1^1 (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) \, dz \, dy \, dx =$$

$$= \int_1^4 \int_1^1 \left[3x^2 z + 3y^2 z + 3z^3 \right]_1^1 \, dy \, dx = \int_1^4 \int_1^1 (3x^2 + 3y^2 + 1) \, dy \, dx =$$

$$= \int_1^4 \left[3x^2 y + y^3 + y \right]_1^1 \, dx = \int_1^4 (3x^2 + 2) \, dx = \left[x^3 + 2x \right]_1^4 = 1 + 2 = 3.$$

Számítsuk ki a felületi integrált a határoló lapokra külön-külön. Számítsuk ki a felületi integrált az 11.70 ábrán jelzett (a) és (b) lapokra.

Az (a) lapon a kifele mutató felületi normális $\mathbf{i}$, azaz

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

$$\mathbf{R} = (x^3 - 2y + z^2)\mathbf{i} + (y^3 - 2z + x^2)\mathbf{j} + (z^3 - 2x + y^2)\mathbf{k}.$$

Az (a) lapot adó felület egyenlete: $x \equiv 1$.

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = 1 - 2y + z^2.$$

Az (a) lapon a felületi integrál:

$$\iint_F \mathbf{R} \, dF = \int_1^4 \int_1^1 (1 - 2y + z^2) \, dz \, dy = \int_1^4 \left[z - 2yz + \frac{z^3}{3} \right]_1^1 \, dy =$$

$$= \int_1^4 \left(1 - 2y + \frac{3}{3} \right) \, dy = \left[\frac{3}{4}y - y^2 \right]_1^1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

A (b) lapot adó felület egyenlete $x \equiv 0$. A lapon a kifele mutató felületi normális $-\mathbf{i}$, azaz

$$\mathbf{n} = -\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = (-2y + z^2)(-1) = 2y - z^2.$$

A felületi integrál a (b) lapon

$$\begin{aligned} \iint_F \mathbf{R} \, dF &= \int_1^4 \int_1^1 (2y - z^2) \, dz \, dy = \int_1^4 \left[2yz - \frac{z^3}{3} \right]_1^1 \, dy = \int_1^4 \left(2y - \frac{3}{3} \right) \, dy = \\ &= \left[y^2 - \frac{3}{3}y \right]_1^1 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

A felületi integrálok összege az (a) és (b) lapokra:

$$\int_1^4 \int_1^1 \mathbf{R} \, dF + \int_1^4 \int_1^1 \mathbf{R} \, dF = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

$$\mathbf{R} = (x^3 - 2y + z^2)\mathbf{i} + (y^3 - 2z + x^2)\mathbf{j} + (z^3 - 2x + y^2)\mathbf{k}$$

Az vektortér komponenseinek szimmetrikus felépítése miatt a felületi integrálok összege a másik két-két szemben fekvő lap összegeire ugyanannyi, szintén 1.

Igy az egész felületi integrál:

$$\iiint_V \mathbf{R} \, dF = 3 \cdot 1 = 3.$$

Ezzel az adott függvényre igazoltuk a Gauss—Osztrogradszkij-télt.

*

Példáink illusztrálják, hogy a Gauss—Osztrogradszkij-tétel gyakran lehetőséget ad felületi integrálok egyszerűbb kiszámítására.

IV. Stokes tétele

Tétel. Legyenek a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + s\mathbf{k}$ függvény és parciális deriváltjai az F mérhető felületen irányított felületdarabon és annak a g görbével megadott határán folytonosak.

$$\text{Ekkor} \quad \iint_F \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dF = \oint_g \mathbf{v} \, d\mathbf{r}$$

(g -t úgy irányítjuk, hogy $\mathbf{n}$ -nel szembenézve g -t pozitív irányban járjuk körül, 11.71 ábra). A tétel kimondja, hogy a felületi integrál átalakítható a felületet határoló zárt (g) görbementi vonalintegrállá, ha a felületi integrál valamely rot $\mathbf{v}$ vektortérre vonatkozik.

Bizonyítás. A tételt először arra az esetre bizonyítjuk, amikor az F felület háromszög. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a háromszög az $(x; y)$ síkban fekszik.

Ekkor a felület felületi normálisa állando:

$$\mathbf{n}_0 \equiv \mathbf{k}.$$

Az F felület paramétertartománya az $u = x$, $v = y$ paraméter választással maga az F háromszög.

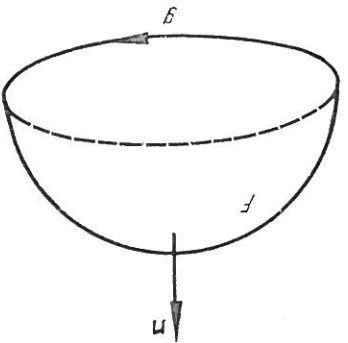
Felhasználva rot $\mathbf{v}$ képletét (11.3.6 pont):

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}.$$

$$\text{Ezért} \quad \iint_F \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dF = \iint_F \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$

A síkbeli Gauss—Osztrogradszkij-tétel szerint (11.3.8 II. pont)

$$\iint_F \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \int [-q(x; y) \, dx + p(x; y) \, dy].$$



11.71 ábra

Alkalmazzuk ezt a tételt az $(x; y)$ síkban fekvő F háromszögre úgy, hogy a képletben p helyébe q -t, q helyébe $(-p)$ -t írunk. Jelölje g a háromszög határát pozitív körüljárással.

$$\iint_F \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy = \oint_g [p(x; y) dx + q(x; y) dy] = \oint_g v dr.$$

A bizonyítás könnyen átvihető arra az esetre is, amikor a háromszög nincs az $(x; y)$ síkban. Vegyünk most egy olyan poléderfelületet, amelynek oldalai háromszöglapok, és amelyet az L törött vonal határol (11.72 ábra). A poléderfelület irányítását. Irányítsuk az egyes háromszöglapokat úgy, hogy a körüljárás pozitív legyen a normális vektor felől nézve. Jelölje F_k a k -adik háromszög lapot, g_k pedig ennek határgörbéjét a megadott azonos irányítással.

Az előzőek szerint:

$$\iint_F \text{rot } v dF = \oint_g v dr \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Az egyenleteket összegezve:

$$\iint_F \text{rot } v dF = \sum_{k=1}^n \oint_{g_k} v dr.$$

A $\oint v dr$ integrált bontsuk fel az egyes oldalakra megfelelő integrálok összegére. Ha a polédernek egy ele két szomszédos háromszög közös oldala, akkor a közös oldalak irányításának ellentétes, így a megfelelő integrálok összege zérus.

$$\sum_{k=1}^n \oint_{g_k} v dr = \oint_g v dr.$$

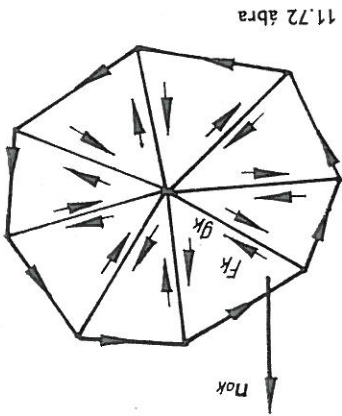
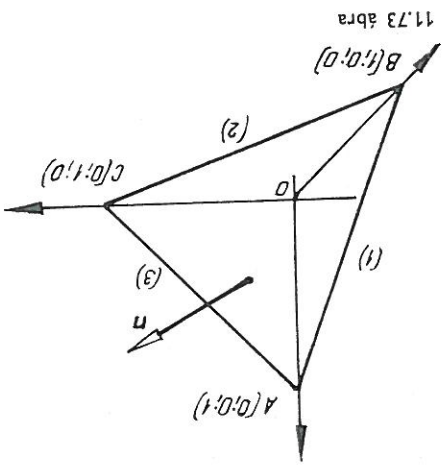
A Stokes-tételt bizonyítására abban az esetben, ha a felület nem poléder, nem térünk ki.

Igazoljuk Stokes tételét a

$$v = (x^3 + y^3)i - z^2j + y^2k$$

vektortérre, az 11.73 ábrán látható háromszögre, a jelzett irányú normális esetén.

$$\iint_F \text{rot } v dF = \oint_g v dr.$$



$$\text{rot } v = \nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 + y^3 - z^2 & y^2 & y^2 \end{vmatrix} = (2y + 2z)i + 0j - 1k.$$

Számítsuk ki a $\iint_F \text{rot } v dF$ felületi integrált!

A tartomány az $A(0; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$ pontok összekötésével előállított háromszög alakú síkrész.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ z &= 1 - x - y. \end{aligned}$$

A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} z'_x &= f'_x = -1, \\ z'_y &= f'_y = -1. \end{aligned}$$

Ha a felület $z = f(x; y)$ alakban adott, az érintő sík normálvektora (11.1.2.2.3 pont):

$$n = -f'_x i - f'_y j + 1k.$$

Igy az adott síknál:

$$n = i + j + 1k.$$

A $\text{rot } v \cdot n$ skaláris szorzat:

$$\text{rot } v \cdot n = [(2y + 2z)i + 0j - 1k] \cdot (i + j + 1k) = 2y + 2z - 1.$$

A felületi integrál kiszámításánál z helyébe $a z = 1 - x - y$ értéket helyettesítve:

$$\text{rot } v \cdot n = 2y + 2(1 - x - y) - 1.$$

$$\text{rot } v \cdot n = 1 - 2x.$$

A felületi integrál az integrálási tartomány az $(x; y)$ síkon az $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$ egyenesek által határolt háromszög (11.74 ábra).

A határok:

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 1 - x, \\ 0 &\leq x \leq 1. \end{aligned}$$

A felületi integrál:

$$\begin{aligned} \iint_F \text{rot } v n dF &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} (1 - 2x) dy dx = \int_{x=0}^1 [y - 2xy]_{y=0}^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 (1 - x - 2x^2 + 2x^2) dx = \left[x - \frac{3x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

A zárt görbe menti integrált a háromszög határain három részben számítsuk ki (11.73. ábra).

$$v = (x^3 + y^3)i - z^2j + y^2k.$$

Az (1) úton:

$$y \equiv 0, \quad x = t, \quad z = 1 - t, \quad z = -1.$$