

Bizonyítás. A sorozatok konvergenciájának Cauchy-féle konvergenciakritériuma szerint az $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha adott $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N = N(\varepsilon)$, hogy

$$|s_m - s_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) \quad \text{és} \quad m > N(\varepsilon)$$

(6.1.6).

Alkalmazzuk a sorozatok Cauchy-féle konvergenciakritériumát a részletösszegek sorozatára. A konvergencia *szerűsége* és *elégősége* feltétele: $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N = N(\varepsilon)$, hogy

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon,$$

ha $n > N$ és p tetszős szerinti pozitív egész szám, azaz

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

Korlátos sorok

Definíció. A $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ végtelen sor korlátos, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

Tétel. Ha egy végtelen sor konvergens, akkor egyben korlátos is.

Bizonyítás. A konvergenciából adódik, hogy a részletösszegek sorozatának van véges határértéke, azaz az $\{s_n\}$ sorozat korlátos, ez pedig azt jelenti, hogy a végtelen sor is korlátos.

A tétel megfordítása nem igaz.

Lehet korlátos sor, amely nem konvergens.

Példa erre a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad \text{sor.}$$

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = 0, \quad \dots, \quad s_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}.$$

$$s_{2n} = 0, \quad s_{2n+1} = 1.$$

$$|s_n| \leq 1, \quad \text{a sor korlátos,}$$

viszont az $\{s_n\}$ sorozat és vele együtt a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \quad \text{sor divergens.}$$

Műveletek végtelen sorokkal

A végtelen sorokra érvényesek a következő bizonyítható szabályok.

I. Legyen az

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad \text{sor konvergens és összege } S.$$

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

A végtelen sor összegének λ -szorosát megkapjuk, ha minden egyes tagját λ -val szorozzuk.

Ez a sor is konvergens és összege $\lambda \cdot S$.

$$\lambda S = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \dots + \lambda u_n + \dots$$

II. Ha $S_1 = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ és

$$S_2 = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

konvergens sorok, akkor az

$$S_1 \pm S_2 = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots$$

sor is konvergens.

III. Konvergens sorban a sor tagjai sorrendjük megbontása nélkül tetszőlegesen csoportosíthatók (zárójeljelezhetők). A csoportosítással kapott új sor is konvergens, és összege megegyezik az eredeti sor összegével. A tétel érvényességét bizonyítja, hogy az új sor részletösszegei egyben az eredeti sor részletösszegei is.

A tétel megfordítása már nem mindig igaz, a zárójel nem mindig bontható fel.

Például az

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 \quad \text{sor konvergens, míg a zárójelek elhagyá-}$$

sával kapott

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad \text{sor, mint azt az előző pontban láttuk, divergens.}$$

Sorok konvergenciájának megállapítása általában elég nehéz feladat. Viszonylag könnyebb a konvergenciára következtetni a pozitív tagú soroknál.

9.1.2 Pozitív tagú sorok

Definíció. Ha egy végtelen sor tagjai mind pozitívak, a sor pozitív tagú sor.

Tétel. Ha a pozitív tagú sor korlátos, a sor konvergens.

Bizonyítás. A feltevésből következik, hogy a részletösszegek sorozata $\{s_n\}$ is korlátos.

Mivel az $u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$ sor tagjai pozitívak, a részletösszegek sorozata növekvő. A részletösszegek sorozata korlátos és növekvő, a részletösszegek sorozatának van véges határértéke, tehát a végtelen sor konvergens.

Pozitív tagú sorokra érvényesek a következő konvergenciakritériumok.

I. Majoráns (minoráns) kritérium

Tétel. Ha az

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad \text{és}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad \text{végtelen sorok pozitív tagúak, és minden } n\text{-re}$$

$$u_n \leq v_n,$$

továbbá, ha a $v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$ sor konvergens, akkor az

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad \text{sor is konvergens.}$$

Bizonyítás. A $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ sor konvergenciájából következik, hogy részletösszegei korlátosak.

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n < K,$$

ahol K alkalmasan választott korlát.

Az $u_n \leq v_n$ feltétel miatt

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq K.$$

Ez pedig a

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ sor konvergenciáját jelenti.}$$

Hasonlóan igaz, ha a két pozitív tagú sorban

$$u_n \geq v_n, \quad v_n \text{ az } u_n \text{ minoráns sora,}$$

és a $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ sor divergens, akkor

a $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sor is divergens.

Példák

1. Az $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$

sor konvergens, mert tagjai a harmadik tagtól kezdve:

$$u_n = \frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n},$$

az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ mértani sor pedig konvergens.

2. Az $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

sor divergens, mert tagjai nagyobbak a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor tagjainál.

II. A hányadoskritérium (d'Alembert-kritérium)

(D'ALEMBERT — 1717 — 1783 — francia matematikus és enciklopédista.)

Tétel. Ha egy végtelen pozitív tagú sor általános tagjának és a megelőzőnek hányadosa bizonyos N -től kezdve egy 1-nél kisebb q számnál, a sor konvergens.

Azaz, ha $n > N$ re

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q < 1, \quad \text{a sor konvergens.}$$

Bizonyítás. A feltétel értelmében

$$u_{n+1} < q \cdot u_n.$$

$$u_{n+2} < q \cdot u_{n+1} < q^2 \cdot u_n.$$

$\vdots$

A $qu_n + q^2u_n + \dots$ sor a $q < 1$ feltétel miatt konvergens mértani sor. Ez a sor adott sorunk majoránsa, így az

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \text{ sor konvergens.}$$

Hasonló módon bizonyítható, hogy ha bizonyos N -től kezdve

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \quad \text{a sor divergens.}$$

Megjegyzés. A d'Alembert-féle kritérium konvergenciafeltételét,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q < 1$$

nem helyettesíthetjük a gyengébb

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ feltétellel.}$$

Nem nélkülözhető feltétel, hogy az $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ hányados nem közelíthet az 1-hez.

Az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$

harmonikus sornál

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$$

feltétel fennáll minden n -re, a sor mégis divergens.

Ugyanis, ha $n \rightarrow \infty$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$, tehát a d'Alembert-féle feltétel nem áll fenn, nincs olyan 1-nél kisebb q szám, amelyre érvényes a hányadoskritérium.

A kritériumnak egy speciális esete a szintén d'Alembert-kritérium néven ismert *határérték formula*.

Ha a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ határérték létezik, $q < 1$ esetében a sor konvergens, $q > 1$ esetében a sor divergens, $q = 1$ esetben a konvergenciát nem tudjuk megállapítani e kritériummal (a sor lehet $q = 1$ esetén konvergens is, divergens is).

Példák

1. Mikor konvergens $x > 0$ esetén az

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \text{ sor?}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow +\infty.$$

A sor minden $x > 0$ -ra konvergens.

2. Milyen x -ekre konvergens az

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \text{ sor?}$$

Feltesszük, hogy $x \geq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} = \frac{n}{n+1} x \rightarrow x, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Ha $0 \leq x < 1$, a sor konvergens, ha $x \geq 1$, a sor divergens.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = 1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} + \dots,$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1, \text{ a sor konvergens.}$$

III. A Cauchy-féle kritérium (gyökkritérium)

Tétel. Ha az $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ végtelen pozitív tagú sor n -edik tagjának n -edik gyöke bizonyos tagtól kezdve kisebb egynél, a sor konvergens.

Tehát, ha $\sqrt[n]{u_n} < q < 1$, $n > N$ esetén, a sor konvergens.

Bizonyítás. $\sqrt[n]{u_n} < q$, azaz $u_n < q^n$.

Hasonlóan

$$\sqrt[n+1]{u_{n+1}} < q, \text{ azaz } u_{n+1} < q^{n+1}.$$

A sor majoránsa a

$$q + q^2 + \dots + q^n + \dots \text{ konvergens mértani sor, tehát a sor konvergens.}$$

Ha $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, a sor divergens.

Mivel itt $u_n \geq 1$,

$$u_{n+1} \geq 1 \dots,$$

a sor általános tagja nem tart a zérushoz, a sor divergens.

A d'Alembert-féle kritériumhoz hasonlóan a Cauchy-féle

$\sqrt[n]{u_n} < q < 1$ kritérium sem helyettesíthető az

$\sqrt[n]{u_n} < 1$ kritériummal.

A Cauchy-féle kritérium határérték alakja

$$\text{Ha } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$$

határérték létezik, $q < 1$ esetén a sor konvergens, $q > 1$ esetén a sor divergens, $q = 1$ esetben a sor konvergenciája a gyökkritériummal nem dönthető el.

Példa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ a sor konvergens.}$$

IV. A Cauchy-féle integrálkritérium

Tétel. Ha az $f(x)$ függvény monoton fogyó, az $1 \leq x < +\infty$ intervallumban, és az

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

improprius integrál konvergens, akkor

a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ végtelen sor is konvergens.

Ha az $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ improprius integrál divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ sor is divergens.

Bizonyítás. Legyenek az $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ sor tagjai pozitívak és csökkenők.

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \dots > 0.$$

Legyen $y = f(x)$ olyan monoton fogyó függvény,

hogy $f(n) = u_n$.

A részletösszegeket így mint téglalapösszegeket ábrázolhatjuk.

A 9.1 ábra szerint belátható:

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n > \int_1^{n+1} f(x) dx,$$

és $s_{n+1} - u_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx.$

Tegyük fel, hogy az

$$I = \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

integrál létezik (véges érték),

azaz az improprius integrál konvergens.

Mivel $f(x) \geq 0$,

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

Tehát érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$s_n < s_{n+1} < u_1 + I.$$

Az s_n sorozat monoton nő és korlátos, tehát a vizsgált sor konvergens.

Tegyük fel, hogy az

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

improprius integrál divergens.

Ha $n+1 > n_0$, ahol n_0 alkalmasan választott szám, az

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \text{ integrál bármilyen nagy előre megadott } M \text{ számnál nagyobbá válik.}$$

Mivel

$$s_n > \int_1^{n+1} f(x) dx,$$

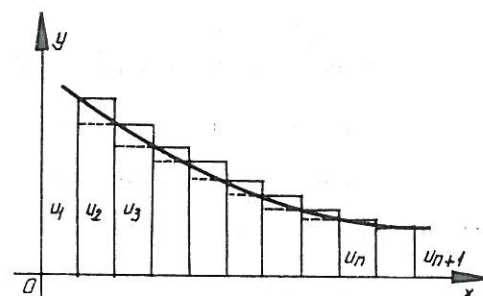
$$s_n > M.$$

Tehát a végtelen sor is divergens.

Példák

1. Állapítsuk meg mikor konvergens az

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \text{ sor!}$$



9.1 ábra

A keresett függvény

$$f(x) = \frac{1}{x^p}.$$

Az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ improprius integrál $p > 1$ esetben létezik (konvergens), $p \leq 1$ esetben nem létezik

(divergens, lásd 8.5.3. pontot).

Tehát a sor $p > 1$ esetben konvergens.

2. Vizsgáljuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \text{ sor konvergenciáját.}$$

$$u_n = \frac{1}{2n+3}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+3} = \frac{1}{2n+5}.$$

A hányadoskritériummal:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+5}}{\frac{1}{2n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{5}{n}} = 1.$$

A konvergencia nem dönthető el a hányadoskritériummal.

A gyökkritériummal:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+3} \right)^{\frac{1}{n}} = L.$$

A l'Hospital-szabállyal:

$$\ln L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [-\ln(2n+3)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(2n+3)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{2n+3}}{1} = 0.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n+3}} = 1.$$

A konvergencia így sem dönthető el.

Ha viszont minoráns sorral hasonlítjuk össze a sort, annak tagjai a negyedik tagtól kezdve nagyobbak a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} \text{ sornál.}$$

Ez a sor pedig:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3n} + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right),$$

így a harmonikus sor divergenciája miatt divergens.

Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$ sor divergens.

Az integrálkritériummal a sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \cdot$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} \cdot$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \left| \ln(2x+3) \right|_1^{+\infty} = +\infty,$$

a sor divergens.

Láthatjuk, hogy a divergencia vagy a minoráns- vagy az integrálkritériummal vált eldönthetővé.

9.1.3 Váltakozó előjelű sorok

Definíció. Legyenek $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ pozitív számok. Ekkor a $\pm(u_1 - u_2 + u_3 - \dots)$ sort váltakozó előjelű sornak nevezzük.

Vegyünk a zárójel előtt álló előjelet pozitívnak, negatív előjel esetén a sor vizsgálata erre visszavezethető.

Írjuk fel a sort a következő alakban:

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots = u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + R_n,$$

ahol R_n az ún. *maradékösszeg*.

$$R_n = (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \dots$$

A váltakozó előjelű sorokra érvényes a *Leibniz-tétel*.

Tétel. Ha egy váltakozó előjelű sorban a tagok abszolút értékben csökkennek, azaz

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots \text{ és az } u_n \text{ általános tag zérushoz tart, a sor konvergens.}$$

A sor összege abszolút értékben nem nagyobb a sor első tagjánál, a sor R_n maradékösszege abszolút értékben nem nagyobb a benne szereplő tagok közül az első abszolút értékénél.

Bizonyítás. Legyen az s_n részletösszegben n páros, azaz $n = 2m$.

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

A feltételből következik, hogy az egyes zárójelekben álló kifejezések pozitívak. Ez azt jelenti, hogy s_{2m} nő, ha $2m$ nő, tehát s_{2m} növekvő sorozat. Írjuk fel s_{2m} -et más csoportosítással:

$$s_{2m} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \dots + u_{2m}].$$

A feltételből következik, hogy a szögletes zárójelben levő kifejezés pozitív. Ez azt jelenti, hogy

$$s_{2m} < u_1, \text{ azaz korlátos.}$$

Az s_{2m} sorozat monoton nő és korlátos, van határértéke:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = S.$$

Legyen az s_n részletösszegek sorozatában n páratlan:

$$n = 2m+1.$$

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}.$$

Mivel a feltétel szerint $u_{2m+1} \rightarrow 0$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = S.$$

Tehát az s_n sorozatnak van határértéke: S , és ez kisebb, mint u_1 . Írjuk fel a sort a maradékösszeggel:

$$u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots = u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + R_n,$$

ahol a maradékösszeg:

$$R_n = (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \dots$$

A maradékösszeg is végtelen, váltakozó előjelű, csökkenő abszolút értékű tagokból áll, így kisebb abszolút értékű, mint az első tag abszolút értéke.

$$|R_n| < |u_{n+1}|.$$

Példa

$$\text{Az } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

sor a Leibniz-tétel értelmében konvergens. Ha a sor összegét az első n tagból határozzuk meg, a hiba:

$$R_n < \frac{1}{n+1}.$$

A Leibniz-tétel értelmében a sor összege (S) korlátok közé szorítható. Nyilvánvaló, hogy

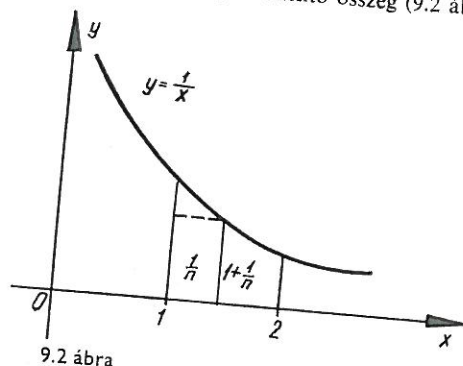
$$\frac{1}{2} < S < 1.$$

A sor összegét a következőképpen határozhatjuk meg.

A $2n$ -edik részletösszeg:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} = \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Ez az összeg nem más, mint az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényhez az $[1; 2]$ intervallum n egyenlő részre való felosztásával kapott alsó integrálközelítő összeg (9.2 ábra).



9.2 ábra

Ha $n \rightarrow \infty$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2.$$

Tehát

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

9.1.4 Abszolút konvergens sorok

Definíció. Az $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ sor abszolút konvergens (feltétlenül konvergens), ha a belőle alkotott $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$ sor konvergens.

Tétel. Minden abszolút konvergens sor konvergens, és összegét megkapjuk, ha a pozitív tagok összegéhez hozzáadjuk a negatív tagok összegét.

Bizonyítás. A pozitív tagok összegét megkapjuk, ha az eredeti sorban a negatív tagokat nullával helyettesítjük; a negatív tagok összegét megkapjuk, ha az eredeti sorban a pozitív tagokat nullával helyettesítjük.

Jelöljük a pozitív és negatív tagok összegét P -vel, illetve Q -val.

Az eredeti sor összege

$$S = P + Q.$$

Jelölje p_n és q_n a pozitív, illetve negatív tagú sorok részletösszegét. A csak pozitív vagy csak negatív előjelek miatt a részletösszegek sorozata monoton.

A $\{p_n\}$ és $\{q_n\}$ sorozatok korlátosak is.

Ugyanis a feltétel miatt $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ véges.

$$|p_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \quad \text{azaz} \quad p_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

$$|q_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \quad \text{azaz} \quad q_n \geq -\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

A $\{p_n\}$ sorozat monoton nő és felülről korlátos, a $\{q_n\}$ sorozat monoton fogy és alulról korlátos, így a p_n és q_n sorozatoknak van véges határértékük.

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n, \quad Q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n.$$

Mivel

$$s_{2n} = p_n + q_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n + q_n), \quad \text{így}$$

$$S = P + Q.$$

Tehát az abszolút konvergens sor konvergens, és összegét megkapjuk, ha a pozitív tagok összegéhez hozzáadjuk a negatív tagok összegét.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

Tétel. Abszolút konvergens sor összege nem függ a tagok sorrendjétől.

9.1.5 Feltételesen konvergens sorok

Definíció. Az olyan végtelen konvergens sorok, amelyek nem abszolút konvergenssek, feltételesen konvergens sorok.

Példa

$$\text{Az} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

sorról a Leibniz-tétellel bebizonyítottuk, hogy konvergens. Az abszolút értékekből képzett sor az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

harmonikus sor divergens.

Tehát az $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ sor feltételesen konvergens.

Bizonyítás nélkül közöljük, hogy a feltételesen konvergens sor összege függ a tagok sorrendjétől. Az is bizonyítható, hogy a sor úgy rendezhető, hogy összege előre megadott szám legyen.

Példa

Az $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ sorról bebizonyítottuk, hogy konvergens. Jelöljük összegét

S -sel.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = S.$$

Rendezzük át a sort úgy, hogy egy pozitív tagot két negatív tag kövessen. Az így kapott sor

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) + \dots = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{1}{2} S. \end{aligned}$$

Az átrendezett sor összege az eredeti sor összegének fele. Más elrendezéssel más összeget kaphatunk.

9.2 FÜGGVÉNYSOROK

Definíció. Az olyan végtelen sor, amelynek tagjai függvények, függvénysor. A függvénysort így jelöljük:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

A függvénysor olyan sor, amelynek tagjai a független változó bizonyos tartományában értelmezve vannak.

A függvénysor n -edik tagja

$$u_n(x), \quad n\text{-nek és } x\text{-nek is függvénye.}$$

9.2.1 Függvénysorok konvergenciája

Konvergenciapont

Definíció. Az $x = x_0$ pontban a függvénysor konvergens, ha az

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad \text{numerikus sor konvergens.}$$

Legyen a sor

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + u_{n+1}(x_0) + \dots = s_n(x_0) + R_n(x_0).$$

(Itt $R_n(x_0) = u_{n+1}(x_0) + \dots + u_{n+2}(x_0) + \dots$)

A konvergencia definíciója szerint a sor az x_0 pontban konvergens, ha megadva bármilyen kis ε számot, $n > N$ esetén a maradékösszeg:

$$|R_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Konvergenciatartomány

Az $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ függvénysor konvergenciatartománya azon pontok összessége, amelyekben a függvénysor konvergens.

Egyenletes konvergencia

Definíció. Az $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ konvergens függvénysor egy tartományban egyenletesen konvergens, ha megadva bármilyen kis $\varepsilon > 0$ számot, van olyan N egész szám, hogy $n \geq N$ -re a tartomány minden tetszőleges x helyén

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

ahol $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$ a sor maradékösszege.

A függvénysor egyenletes konvergenciájára elégséges feltételt ad a következő tétel: *a Weierstrass-kritérium.*

Tétel. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor konvergens, és minden n -re: $|u_n(x)| \leq a_n$, ha $a \leq x \leq b$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens $[a; b]$ -ben.

Bizonyítás. A $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ sornak a feltétel értelmében van majoráns sora, ezért ez a sor $[a; b]$ -ben mindenütt konvergens, és így a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ sor az $[a; b]$ intervallum minden helyén abszolút konvergens.

Legyen ε tetszőleges pozitív szám.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciája miatt van olyan $N = N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy

$$\sum_{k=n+1}^m a_k < \varepsilon, \quad \text{ha } m > n > N.$$

Ekkor az $[a; b]$ intervallum bármely x helyén, ha szintén $m > n > N$:

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m a_k < \varepsilon.$$

Ebből $m \rightarrow \infty$ esetén következik:

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Mivel ez az egyenlőtlenség, ha $n > N$, az egész $[a, b]$ intervallumban érvényes, a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ sor egyenletesen konvergens.

Függvénysor folytonossága

Tétel. Folytonos függvényekből álló és valamely tartományban egyenletesen konvergens sor összege folytonos függvény.

Bizonyítás. Jelöljük a sor összegét $f(x)$ -szel.

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad \text{azaz}$$

$$f(x) = s_n(x) + R_n(x).$$

Adjunk meg tetszőleges kis $\varepsilon > 0$ számot.
A feltétel szerint a sor egyenletesen konvergens:

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha } n > N.$$

Képezzük a következő különbséget:

$$f(x+h) - f(x).$$

Ez így írható:

$$f(x+h) - f(x) = [s_n(x+h) - s_n(x)] + [R_n(x+h) - R_n(x)].$$

Az abszolút értékekre vonatkozó tételek szerint:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |s_n(x+h) - s_n(x)| + |R_n(x+h)| + |R_n(x)|.$$

Ha n rögzített szám, $s_n(x)$ véges számú folytonos függvény összege, ezért $s_n(x)$ is folytonos függvény. Ez viszont azt jelenti a folytonosság definíciója értelmében, hogy

$$|s_n(x+h) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha } h = h\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \text{ megfelelően kis szám.}$$

Így elég kis h -ra

$$|f(x+h) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

tehát $f(x)$ folytonos függvény.

9.2.2 Függvénysorok integrálása és differenciálása

I. tétel. Ha az $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ függvénysor az $[a; b]$ intervallumban egyenletesen konvergens, és összege $f(x)$, továbbá az $u_n(x)$ függvények integrálhatók $[a; b]$ -ben, akkor az $f(x)$ függvény integrálja az $[a; b]$ intervallumban minden $a \leq x \leq b$ esetén egyenlő a tagok integráljainak összegével.

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^x u_1(x) dx + \int_a^x u_2(x) dx + \dots + \int_a^x u_n(x) dx + \dots$$

Vagy

$$\int_a^x f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x s_n(x) dx.$$

Bizonyítás. A tétel bizonyításához azt kell igazolni, hogy

$$\int_a^x R_n(x) \rightarrow 0, \quad \text{ha } n > N.$$

A feltétel szerint a sor egyenletesen konvergens, azaz megadva $\varepsilon_1 > 0$ kis számot, $n > N$ esetén

$$|R_n(x)| < \varepsilon_1.$$

Legyen ε_1 értelmezése a következő:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \text{ahol } b > a.$$

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ezért az integrált így becsülhetjük meg:

$$\left| \int_a^x R_n(x) dx \right| < (x-a) \frac{\varepsilon}{b-a} \leq (b-a) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Tehát a maradékösszeg integrálja nullához tart.

Így

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^x u_1(x) dx + \int_a^x u_2(x) dx + \dots + \int_a^x u_n(x) dx + \dots$$

II. tétel. Ha az $[a; b]$ intervallumban az

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ függvénysor konvergens, tagjai differenciálhatók, és az } u'_n(x)$$

deriváltak folytonosak, továbbá a $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ sor egyenletesen konvergens $[a; b]$ -ben, akkor ebben az intervallumban $f(x)$ differenciálható és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

A tétel bonyolultabb, mint az integrálásra vonatkozó tétel, mert érvényességéhez az is szükséges, hogy a deriváltakból alkotott sor egyenletesen konvergens legyen.

Például:

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2^3 x}{2^2} + \dots + \frac{\sin n^3 x}{n^2} + \dots$$

sor egyenletesen konvergens, mert tagjai abszolút értékben nem nagyobbak az

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \text{ konvergens sor megfelelő tagjainál.}$$

A deriválással kapott sor viszont nem minden x -re konvergens, mert a

$$\cos x + 2 \cos 2^3 x + \dots + n \cos n^3 x + \dots$$

általános tagja nem minden x -re tart nullához.

A tétel tehát így írható.

Ha $f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$

konvergens, és

$$F(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots$$

egyenletesen konvergens, akkor

$$F(x) = f'(x).$$

Bizonyítás. Az egyenletesen konvergens sorok integrálhatóságára vonatkozó I. tétel szerint:

$$\begin{aligned} \int_a^x F(x) dx &= \int_a^x u_1'(x) dx + \int_a^x u_2'(x) dx + \dots + \int_a^x u_n'(x) dx + \dots = \\ &= [u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)] - [u_1(a) + u_2(a) + \dots + u_n(a)] = \\ &= f(x) - f(a). \end{aligned}$$

Így

$$\int_a^x F(x) dx = f(x) - f(a).$$

Differenciáljuk az egyenlet mindkét oldalát x szerint:

$$F(x) = f'(x).$$

9.2.3 Hatványsorok

Definíció. Hatványsor az

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$
 alakú függvénysor.

A hatványsort röviden így jelöljük:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Hasonlóképpen hatványsor a következően definiált függvénysor:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

(A függvénysor $(x-a)$ hatványai szerint halad; a állandó.)

Példák hatványsorokra

1. $x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$
2. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$
3. $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

Konvergenciaintervallum

Tétel. Ha az $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ hatványsor valamely $x = x_0 \neq 0$ pontban konvergens, akkor abszolút és egyenletesen konvergens minden $\delta > 0$ -ra a

$$(-|x_0| + \delta; |x_0| - \delta) \text{ intervallumban.}$$

Bizonyítás. Legyen $|x| < |x_0|$.

A feltétel szerint a sor az x_0 helyen konvergens. Ez maga után vonja, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0. \text{ Annál inkább igaz, hogy a sorozat tagjainak abszolút értéke}$$

korlátos.

$$|a_n x_0^n| < M.$$

Az $a_n x^n$ tag így írható: $a_n x^n = a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$.

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

azaz

$$|a_n x^n| < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Az x helyen a sor tagjai kisebbek a konvergens

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \text{ mértani sor tagjainál,}$$

tehát a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor a $(-|x_0| + \delta; |x_0| - \delta)$ tartományban abszolút és egyenletesen konvergens.

A fentiekből következik, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ sor valamely $x = x_0$ helyen divergens, akkor minden $|x| > |x_0|$ helyen is divergens.

Hatványsor konvergenciasugara

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor vagy minden x értékre konvergens, vagy csak $x = 0$ értéknél konvergens, vagy van olyan $R > 0$ szám, hogy a hatványsor $|x| < R$ esetén konvergens, $|x| > R$ esetén divergens.

Az R számot a hatványsor konvergenciasugarának nevezzük. Ha a hatványsor minden x -re konvergens, azt mondjuk, a konvergenciasugár végtelen, ha a hatványsor csak $x = 0$ -ra konvergens, akkor a konvergenciasugár zérus.

Az állítás az előző — a konvergenciaintervallumra vonatkozó — tételből következik.

Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor nemcsak $x = 0$ -ra konvergens és nem minden x

értékre konvergens. Ezek szerint van olyan $x_1 \neq 0$ hely, ahol a sor konvergens, és van olyan x_2 hely, ahol divergens.

Jelöljük a konvergenciahelyek felső határát R -rel. A konvergenciaintervallumra vonatkozó tétel szerint:

$|x_1| \leq R \leq |x_2|$, R tehát véges pozitív szám. Ez az R szám a konvergenciasugár. Ugyanis az R szám definíciója szerint $|x| > R$ esetén a sor divergens az x helyen, és $|x| < R$ esetén pedig van olyan x_0 konvergenciahely, amelyre $|x_0| > |x|$. Így az előző tétel értelmében x konvergenciahely.

Megjegyzés. Az $x = -R$ és $x = R$ végpontokban a hatványsor lehet konvergens is, divergens is.

A konvergenciasugár meghatározása

I. tétel. Legyen adott a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor.

Ha a $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ határérték véges vagy végtelen és $g \neq 0$, a hatványsor konvergenciasugara:

$$R = \frac{1}{g}.$$

Ha $g = 0$, $R = +\infty$; ha $g = +\infty$, $R = 0$ (a sor csak az $x = 0$ pontban konvergens).

Bizonyítás. A d'Alembert-féle kritérium értelmében a végtelen sor konvergens, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1.$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hatványsornál:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = g \cdot |x|.$$

Mivel a feltétel értelmében $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$,

a sor konvergens, ha

$$g \cdot |x| < 1, \text{ azaz } |x| < \frac{1}{g} = R,$$

és divergens, ha $g \cdot |x| > 1$, azaz $|x| > \frac{1}{g}$.

Ha $g = 0$, minden x -re $|x| \cdot g = 0$, a sor minden x -re konvergens.

Ha $g = +\infty$, $x \neq 0$ esetén $|x| \cdot g = \infty$, a sor minden $x \neq 0$ pontban divergens.

II. tétel. Legyen adott a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor.

Ha a $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ határérték létezik, és $g \neq 0$, a konvergenciasugár: $R = \frac{1}{g}$.

Ha $g = 0$, $R = \infty$; ha $g = \infty$, $R = 0$.

A bizonyítást csak arra az esetre részletezzük, ha $g \neq 0$ véges érték.

A Cauchy-féle gyökkritérium szerint a sor konvergens, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

A hatványsor konvergens, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1.$$

A feltétel szerint:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} |x| = g \cdot |x|.$$

A sor konvergens, ha

$$g \cdot |x| < 1, \text{ azaz } |x| < \frac{1}{g} = R.$$

Hasonlóan látható be, hogy a sor divergens, ha $g \cdot |x| > 1$, azaz $|x| > \frac{1}{g}$.

Hatványsorok differenciálása

Az $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

hatványsor tagonkénti differenciálásával újabb hatványsor keletkezik:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$$

Tétel. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$ sorok konvergenciasugarai egyenlők.

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = f'(x), \text{ minden } |x| < R \text{ helyen,}$$

ahol R a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor konvergenciasugara.

Bizonyítás. Legyen $0 < |x| < R$.

Legyen q olyan pozitív szám, amelyre

$$|x| < q < R.$$

Majov János

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, található olyan N szám, hogy $n > N$ esetén

$$\sqrt[n]{n} < \frac{Q}{|x|}.$$

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n$ sor n -edik tagja abszolút értékére igaz:

$$|a_n \cdot n x^n| = |a_n| \cdot \left| \sqrt[n]{n} \cdot x \right|^n < |a_n| Q^n.$$

Tehát a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Q^n$ sor majoránsa a $\sum_{n=0}^{\infty} |n a_n x^n|$ sornak.

Mivel a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Q^n$ sor konvergens ($Q < R$), a $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ sor abszolút konvergens.

Ha ez utóbbi konvergens sort $|x|$ -kel elosztjuk, a kapott $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ sor abszolút konvergens $|x| < R$ -re.

Hasonlóan kimutatható, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor $|x| > R$ esetén divergens, a $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ sor is divergens.

Így kimutattuk, hogy a deriválással nyert sor konvergenciasugara egyenlő a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sorével.

Jelöljük a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ összeget $f(x)$ -szel.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

A II. tétel alapján a derivált sor $f'(x)$ -et állítjuk elő:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

Az eljárást ismételten alkalmazva:

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots$$

Tehát egy hatványsor a konvergenciaintervallumban tetszőlegesen sokszor, tagonként deriválható.

Hatványsorok integrálása

Tétel. A hatványsor a konvergenciaintervallumban tagonként integrálható.

Bizonyítás. A tétel a függvénysorok integrálására vonatkozó tételből közvetlenül adódik, mert a konvergenciaintervallum minden zárt részintervallumában a hatványsor egyenletesen konvergens.

Legyen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (\text{és konvergenciasugara } R), \text{ akkor}$$

$$\int_0^x f(x) dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots,$$

ha $|x| < R$.

9.2.3.1 A Taylor-sor. A Taylor-formula

A Taylor-sor

A matematikai eljárások során igen hasznos, ha egy függvényt elő tudunk állítani hatványsor összegeként. (Ilyen alkalmazások például: helyettesítési értékek kiszámítása, függvénytáblázatok készítése, integrálok közelítő számítása.)

Ezért vizsgáljuk, hogyan lehet adott $y = f(x)$ függvényt hatványsor alakjában felírni.

Tegyük fel, hogy

a) az $f(x)$ függvény az $x = 0$ helyet tartalmazó valamely intervallumban konvergens hatvány sorba fejthető, azaz

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Az előzőekből tudjuk, hogy az intervallumban $f(x)$ differenciálható, és a derivált az $f(x)$ -et előállító hatványsor tagonkénti deriválásával nyerhető:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

Ez a hatványsor ugyanabban az intervallumban konvergens, mint $f(x)$ hatványsora.

Az eljárást ismételten alkalmazva:

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots \quad f^{(n)}(x) = n! a_n + \dots$$

$\vdots$

Tehát $f(x)$ akárhányszor differenciálható.

A hatványsor együtthatóit meghatározhatjuk a függvénynek és deriváltjainak az $x = 0$ helyen vett értékeivel.

Az $x = 0$ helyettesítéssel:

$$f(0) = a_0; \quad f'(0) = a_1; \quad f''(0) = 2a_2; \quad \dots; \quad f^{(n)}(0) = n! a_n; \quad \dots$$

Innen:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \dots$$

Tehát, ha $f(x)$ az $x = 0$ helyet tartalmazó intervallumban hatványsorba fejthető, így írható:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots,$$

azaz
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Ha az $f(x)$ függvény az $x = 0$ helyen akárhányszor differenciálható, akkor az

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

sort a függvény *Taylor-sorának* nevezzük, függetlenül attól, hogy ez a sor konvergens vagy divergens, illetve konvergencia esetén előállítja-e a függvényt vagy sem.

Előző eredményünk szerint, ha egy függvény hatványsor összege, akkor a hatványsor azonos a Taylor-sorral.

Kérdés, mikor állítja elő az $f(x)$ függvény Taylor-sora magát az $f(x)$ függvényt? Tekintsük a Taylor-sor n -edik részletösszegét, az ún. n -edik Taylor-polinomot, $T_n(x)$ -et.

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

A $f(x)$ függvény a Taylor-sor összege, ha $n \rightarrow \infty$ esetén

$$f(x) - T_n(x) \rightarrow 0.$$

Az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ különbséget a Taylor-sor maradéktagjának nevezik.

b) Tegyük fel most, hogy az $f(x)$ függvény az $x = a$ helyet tartalmazó intervallumban $(x-a)$ hatványai szerinti konvergens hatványsorba fejthető, azaz

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

Az a pontban ismertett gondolatmenet szerint ebben az intervallumban $f(x)$ akárhányszor differenciálható, és hatványsora így írható:

$$\begin{aligned} f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \end{aligned}$$

Ha $f(x)$ az $x = a$ helyen akárhányszor differenciálható, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \text{ sor a függvény } a \text{ körüli Taylor-sora.}$$

Ha egy függvény $(x-a)$ hatványai szerinti hatványsor összege, akkor a hatványsor azonos az a körüli Taylor-sorral.

A Taylor-sor összege az $f(x)$ függvény, ha tekintve a

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

n -edik Taylor-polinomot, az

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \text{ maradéktag nullához tart, ha } n \rightarrow \infty.$$

Az a pontban vizsgált sor a b pontban vizsgált sor speciális esete, ha $a = 0$.

A 0 körüli Taylor-sort *Maclaurin-sornak* is nevezik.

A továbbiakban keressük annak a feltételét, hogy a Taylor-sor maradéktagja tartson a nullához.

A Taylor-formula

Tétel. Tegyük fel, hogy n nem negatív egész szám, és az $y = f(x)$ függvény n -edik deriváltja egy $[a_1; a_2]$ intervallumban létezik és folytonos, $(n+1)$ -edik deriváltja pedig legalább az intervallum belsejében létezik.

Ha x és a az $[a_1; a_2]$ intervallumba esik, érvényes a következő Taylor-féle formula:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n.$$

Az R_n maradéktag leggyakrabban használt két alakja:

1. a Lagrange-féle maradéktag:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \text{ ahol } \xi \text{ az } a \text{ és } x \text{ közé esik;}$$

2. a Cauchy-féle maradéktag:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-a), \text{ ahol } \xi' \text{ az } a \text{ és } x \text{ közé esik.}$$

A tétel azt mondja ki, hogy a és x között létezik olyan ξ , illetőleg ξ' hely, amely a Taylor-formulát kielégíti (ξ és ξ' általában különböző helyek).

Megjegyzés. A feltételben szereplő $f^{(n)}(x)$ derivált létezéséből és folytonosságából következik, hogy

$$f^{(n-1)}(x); f^{(n-2)}(x); \dots; f'(x); f(x) \text{ is létezik és folytonos.}$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n$$

alakú Taylor-formulában x -et állandónak és a -t változónak. Hogy ezt a jelölésben is kifejezésre juttassuk, írjunk a helyébe t -t. R_n ekkor t -től függ; jelöljük $R_n(t)$ -vel.

A Taylor-formulát $R_n(t)$ -re rendezve

$$R_n(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!} (x-t) - \frac{f''(t)}{2!} (x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n.$$

Határozzuk meg $R_n(t)$ -nek t szerinti deriváltját:

$$\begin{aligned} R'_n(t) = -f'(t) - \frac{f''(t)}{1!} (x-t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f'''(t)}{2!} (x-t)^2 + \\ + \frac{2f''(t)}{2!} (x-t) + \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + \frac{nf^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^{n-1}. \end{aligned}$$

Az összevonást elvégezve:

$$R'_n(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n.$$

Írjuk fel $R_n(t)$ -re és a $g(t) = (x-t)^p$ függvényre a Cauchy-féle középértéktételt (p pozitív egész szám):

$$\frac{R_n(t) - R_n(x)}{g(t) - g(x)} = \frac{R'_n(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ ahol } \xi \text{ } t \text{ és } x \text{ közé esik.}$$

Mivel a $t = x$ helyen $R_n(t) = 0$, és
 $t = x$ helyen $g(t) = 0$.

$$\frac{R_n(t)}{g(t)} = \frac{R'_n(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Írjuk fel $R'_n(\xi)$ -t és $g'(\xi)$ -t:

$$R'_n(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n,$$

$$R'_n(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-\xi)^n.$$

$$g(t) = (x-t)^p,$$

$$g'(t) = -p(x-t)^{p-1},$$

$$g'(\xi) = -p(x-\xi)^{p-1}.$$

Így

$$\frac{R_n(t)}{(x-t)^p} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n}{-p(x-\xi)^{p-1}}.$$

Innen

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{p(x-\xi)^{p-1} \cdot n!} (x-t)^p.$$

1. Legyen $p = n+1$:

$$R_n(t) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Írjunk t helyett újra a -t

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

ahol ξ az a és x közé esik. Ez a Taylor-formula Lagrange-féle maradéktagja.

2. Legyen $R_n(t)$ képletében $p = 1$:

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi')}{n!} (x-\xi')^n (x-t).$$

t helyett a -t írva

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi')}{n!} (x-\xi')^n (x-a)$$

ahol ξ' az a és x közé esik. Ez a Taylor-formula Cauchy-féle maradéktagja.

Mivel $R_n(t)$ képletében ξ helye a p számtól függ, a Lagrange- és Cauchy-féle maradéktagban szereplő ξ és ξ' helyek általában különbözőek.

Tehát a Taylor-formula:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n.$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad \text{ahol } \xi \text{ az } a \text{ és } x \text{ közé esik,}$$

vagy

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi')}{n!} (x-\xi')^n (x-a), \quad \text{ahol } \xi' \text{ az } a \text{ és } x \text{ közé esik.}$$

Írjunk x helyébe (x_0+h) -t, a helyébe x_0 -t.

Ekkor

$$x-a = h,$$

$$x = x_0 + h,$$

$$\xi = x_0 + \vartheta h \quad (0 < \vartheta < 1),$$

$$\xi' = x_0 + \vartheta' h \quad (0 < \vartheta' < 1),$$

$$x-\xi' = (1-\vartheta')h.$$

A Taylor-formula így alakul:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + R_n.$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

$0 < \vartheta < 1$ (Lagrange-féle maradéktag).

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta' h)}{n!} (1-\vartheta')^n h^{n+1}$$

$0 < \vartheta' < 1$ (Cauchy-féle maradéktag).

A Lagrange- és a Cauchy-féle maradéktag segítségével sokszor igazolható, hogy a Taylor-sor előállítja a kifejtett függvényt.

A Maclaurin-formula

Írjuk fel a Taylor-formulát, ha $a = 0$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n.$$

$$R_n = f^{(n+1)}(\xi) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = f^{(n+1)}(\vartheta x) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

ahol $0 < \vartheta < 1$ (Lagrange-féle maradéktag).

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n x = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta'x)}{n!} (1 - \vartheta')^n x^{n+1},$$

ahol $0 < \vartheta' < 1$ (Cauchy-féle maradéktag).

Ez az ún. Maclaurin-formula.

9.2.3.2 Néhány függvény Maclaurin-sora

$$\begin{aligned} 1. \quad & f(x) = e^x \\ & f(x) = e^x \quad f(0) = 1 \\ & f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1 \\ & f''(x) = e^x \quad f''(0) = 1 \\ & \vdots \\ & f^{(n)}(x) = e^x \quad f^{(n)}(0) = 1 \\ & f^{(n+1)}(x) = e^x \quad f^{(n+1)}(\vartheta x) = e^{\vartheta x} \end{aligned}$$

A Maclaurin-formula:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n,$$

$$\text{ahol } R_n = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1), \quad \text{a Lagrange-féle maradéktag.}$$

Behelyettesítve:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x}.$$

a) Legyen $x = 1$.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} e^{\vartheta} \quad (0 < \vartheta < 1).$$

A 6.1.7 pont szerint

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{és} \quad e < 3.$$

Mivel $\vartheta < 1$

$$R_n = \frac{e^{\vartheta}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Ezért $R_n \rightarrow 0$.

Hány tagot kell venni, hogy e -t négy tizedes pontossággal kiszámíthassuk? Ehhez az kell, hogy

$$R_n < \frac{1}{2} \cdot 0,0001,$$

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{20\,000},$$

azaz $(n+1)! > 60\,000$.

Ez bekövetkezik, ha $n = 8$.

Tehát négy tizedes pontossáig:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}$$

Négy tizedes pontossáig, mivel $\frac{1}{8!} \approx 0,00002$ elhanyagolható:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2,5000$$

$$\frac{1}{3!} \approx 0,1667$$

$$\frac{1}{4!} \approx 0,0417$$

$$\frac{1}{5!} \approx 0,0083$$

$$\frac{1}{6!} \approx 0,0014$$

$$\frac{1}{7!} \approx 0,0002$$

$$e \approx 2,7183$$

A kerekítéssel elkövetett hiba:

$$H < 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}.$$

Tehát négy tizedes pontossáig: $e \approx 2,7183$

Pontossabb számítással $e = 2,718281 \dots$

b) Legyen x tetszőleges valós szám.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n.$$

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

A 6.1.6 pontban bebizonyítottuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} = 0.$$

Mivel x rögzített szám, $e^{\theta x}$ véges érték,

$$|R_n| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x} \rightarrow 0.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy e^x Maclaurin-sorral előállítható.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Hogy e^x kiszámításához hány tagot kell venni a Taylor-polinomból, az $|x|$ értékétől és a megadott pontosságtól függ.

2.

$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$\vdots$	
$f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n-1} \cos x$	$f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$
$f^{2n}(x) = (-1)^n \sin x$	$f^{(2n)}(0) = 0$
$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$	$f^{(2n+1)}(\theta x) = (-1)^n \cos \theta x.$

Behelyettesítve a Maclaurin-formulába:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}.$$

A Lagrange-féle maradéktag

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x.$$

Ha x tetszőleges szám

$$|\cos \theta x| \leq 1.$$

Így

$$|R_{2n}| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} |\cos \theta x| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightarrow 0.$$

Tehát $f(x) = \sin x$ Maclaurin-formulával előállítható.

Legyen $|x| \leq 1$ (ahol $1 = 1$ radián $\approx 57,3^\circ$)

$$|R_{2n}| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} |\cos \theta x|.$$

Mivel $|x| \leq 1$, $|\cos \theta x| \leq 1$,

$$|R_{2n}| < \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Ha négy tizedes pontosságot akarunk elérni:

$$|R_{2n}| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10\,000},$$

$$\frac{1}{(2n+1)!} < \frac{1}{20\,000}.$$

$$(2n+1)! > 20\,000.$$

Ez bekövetkezik, ha $2n+1 = 9$.

Tehát, ha $|x| \leq 1$, négy tizedes pontossáig

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

A $\sin x$ függvény Maclaurin-sora:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

3.

$f(x) = \cos x$	
$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin x$	$f'''(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x$	$f^{(4)}(0) = 1$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$	$f^{(2n)}(0) = (-1)^n$
$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$	$f^{(2n+1)}(0) = 0$
$f^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \cos x$	$f^{(2n+2)}(\theta x) = (-1)^{n+1} \cos \theta x.$

Behelyettesítve a Maclaurin-formulába a Lagrange-féle maradéktaggal:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2},$$

$$R_{2n+2} = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \vartheta x.$$

Mivel $|\cos \vartheta x| \leq 1$, $R_{2n+2} \rightarrow 0$ minden x -re.

Ha $|x| \leq 1$,

$$|R_{2n+2}| = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot |\cos \vartheta x| < \frac{1}{(2n+2)!}.$$

$$|R_{2n+2}| < \frac{1}{20\,000}, \quad \text{ha } 2n+2 > 8, \quad n > 3.$$

Ezért, ha $|x| \leq 1$,

$f(x) = \cos x$ kiszámításához a Taylor-polinom négy tagja elegendő.

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \quad (|x| < 1).$$

(A szögfüggvénytáblázat készítésekor $\sin x$ és $\cos x$ értékeit

$$0 < x \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{értékekre készítik el} \quad \left(\frac{\pi}{4} < 1\right).$$

Ha $x > \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{4}$, akkor

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

összefüggésekkel írjuk fel a szögfüggvények értékét.)

A $\cos x$ függvény Maclaurin-sora:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Hasonló módon kaphatjuk meg az $f(x) = \operatorname{sh} x$ és az $f(x) = \operatorname{ch} x$ függvények Maclaurin-sorát.

4. A számok természetes logaritmusai

Írjuk fel

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \text{Maclaurin-formuláját!}$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad f'''(0) = 2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \quad f^{(n+1)}(\vartheta x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+\vartheta x)^{n+1}}.$$

A Maclaurin-formula:

$$(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n.$$

A Lagrange-féle maradéktag:

$$R_n = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \quad (\text{ahol } 0 < \vartheta < 1).$$

Ha $0 \leq x \leq 1$, $x^{n+1} \leq 1$; $(1+\vartheta x)^{n+1} > 1$,

$$|R_n| < \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Ha $-1 < x < 0$, a Lagrange-féle maradéktag alkalmazása nem vezet eredményre.

A Cauchy-féle maradéktag:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta' x)}{n!} (1-\vartheta')^n x^{n+1} \quad (0 < \vartheta' < 1).$$

Példánkban

$$f^{(n+1)}(\vartheta' x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+\vartheta' x)^{n+1}}.$$

$$R_n = (-1)^n \frac{n!}{(1+\vartheta' x)^{n+1}} \cdot \frac{1}{n!} (1-\vartheta')^n x^{n+1}.$$

$$R_n = (-1)^n \frac{(1-\vartheta')^n}{(1+\vartheta' x)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Kissé átalakítva:

$$|R_n| = \left| \frac{1-\vartheta'}{1+\vartheta'x} \right|^n |x|^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\vartheta'x}.$$

$$|x|^n \rightarrow 0, \quad |1-\vartheta'| < |1+\vartheta'x|, \quad \text{így} \quad \left| \frac{1-\vartheta'}{1+\vartheta'x} \right|^n < 1,$$

$$0 < \frac{1}{1+\vartheta'x} \leq \frac{1}{1+x}.$$

Ha $-1 < x \leq 0$, $\frac{1}{1+x}$ véges érték, így n növekedésével a Cauchy-féle maradéktag:

$$R_n \rightarrow 0.$$

Tehát

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n,$$

$$R_n \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad -1 < x \leq 1.$$

Legyen $x = 1$.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + R_n.$$

R_n nagyon lassan tart a 0-hoz, $\ln 2$ -nek négy tizedes pontossáig való meghatározásához már több mint tízezer tagra lenne szükség.

Ezenkívül a maradéktag csak $-1 < x \leq 1$ esetén tart a nullához, ezért csak a $0 < a \leq 2$ számok logaritmusát tudjuk felírni.

Hogyan készíthető a logaritmustábla? Először is meggyorsítjuk a konvergenciát.

Felírjuk $\ln(1+x)$ Maclaurin-formulájából [x helyébe $(-x)$ -et írva] $\ln(1-x)$ Maclaurin-formuláját.

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} + R_n$$

$$R_n \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad -1 \leq x < 1.$$

Felírjuk $\ln(1+x)$ és $\ln(1-x)$ Maclaurin-formuláját, és a két egyenlőséget kivonjuk egymásból.

$$\left. \begin{aligned} \ln(1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1} \\ \ln(1-x) &= -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}^* \end{aligned} \right\} -1 < x < 1.$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) + \bar{R}_{2n+1}$$

(ahol $\bar{R}_{2n+1} = R_{2n+1} - R_{2n+1}^*$).

Ha $-1 < x < 1$, $0 < \frac{1+x}{1-x} < +\infty$,

tehát megkaphatjuk az összes pozitív szám logaritmusát.

Legyen $\frac{1+x}{1-x} = 2$, ekkor $x = \frac{1}{3}$

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \right) + \bar{R}_{2n+1}.$$

A maradéktag vizsgálatával kimutatható, hogy négy tizedes pontossáig elég három tagot vennünk. Figyelembe véve a kerekítési hibát:

$$\ln 2 \approx 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} \right) \approx 0,6931.$$

Legyen $x = \frac{1}{2k+1}$, ahol $k > 1$ egész szám.

Így

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1 + \frac{1}{2k+1}}{1 - \frac{1}{2k+1}} = \frac{k+1}{k}.$$

$$\ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2k+1)^3} + \dots + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}} \right] + \bar{R}_{2n+1}.$$

Minél nagyobb a k , a maradéktag annál gyorsabban tart a nullához. Így elegendő négy tizedes pontossáig három tagot venni.

$$\ln(k+1) \approx \ln k + 2 \left[\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2k+1)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2k+1)^5} \right].$$

Minden egész szám logaritmusa meghatározható az eggyel kisebb szám logaritmusa segítségével.

Például

$$\ln 3 \approx \ln 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} \right).$$

Csak a törzsszámok logaritmusát határozzák meg. Az összetett számok logaritmusai a logaritmus azonosságai segítségével a törzsszámokéból kaphatók meg.

A természetes logaritmus kiszámítására a bemutatott módszeren kívül más módszerek is felhasználhatók.

A számok tízes alapú logaritmusa a természetes logaritmus segítségével határozható meg.

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{\ln x}{2,3258} = 0,43429 \ln x.$$

9.2.3.3 A binomiális sor

a) Fejtsük sorba az

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$ függvényt (α tetszős szerinti valós szám, és $x > -1$). A függvény végtelen sokszor deriválható.

$$\begin{array}{ll} f(x) = (1+x)^{\alpha} & f(0) = 1 \\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) = \alpha \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) = \alpha(\alpha-1) \\ f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} & f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} & f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

A Maclaurin-sor szerint:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n.$$

Az R_n maradéktag vizsgálata a szokásos módokon nehézkes.

Írjuk fel az $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ függvény Maclaurin-sorát:

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Ez a binomiális sor.

Vizsgáljuk a sor konvergenciáját a d'Alembert-kritériummal:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n+1}}{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^n} = \frac{\alpha-n+1}{n}x.$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n} - 1 \right| \cdot |x|.$$

Ha $n \rightarrow \infty$ és $|x| < 1$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow |x|$ a sor konvergens.

Vezessük be az együtthatókra a következő szimbólumokat (binom együtthatók):

$$\frac{\alpha}{1!} = \binom{\alpha}{1} \quad (\text{olv.: alfa alatt 1}).$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} = \binom{\alpha}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n} \quad (\text{olv.: alfa alatt } n)$$

$$\vdots$$

A binomiális sor így írható:

$$1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots \quad (\text{konvergens, ha } |x| < 1).$$

Megállapodás szerint $\binom{\alpha}{0} = 1$, a sor:

$$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n \quad (\text{ha } |x| < 1).$$

Megmutatjuk, hogy a sor összege $(1+x)^{\alpha}$.

Legyen $s(x) = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots$

Tekintsük az

$$F(x) = \frac{s(x)}{(1+x)^{\alpha}} \quad \text{függvényt.}$$

$|x| < 1$ esetén $s'(x)$ tagonkénti differenciálással:

$$s'(x) = \binom{\alpha}{1} + 2\binom{\alpha}{2}x + \dots + n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} + \dots$$

$$\text{Így} \quad F'(x) = \frac{s'(x)(1+x)^{\alpha} - s(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} [s'(x)(1+x) - \alpha s(x)].$$

A zárójelben álló különbség:

$$\begin{aligned} s'(x)(1+x) - \alpha s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} - \alpha\binom{\alpha}{n} \right] x^n \equiv 0. \end{aligned}$$

Ugyanis

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^n,$$

és minden n -re:

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} - \alpha\binom{\alpha}{n} = 0.$$

A bal oldalt felírva:

$$\begin{aligned} (n+1) \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} + (n-\alpha) \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} &= \\ = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} [(\alpha-n) + (n-\alpha)] &= 0. \end{aligned}$$

Tehát

$$F'(x) \equiv 0, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

és

$$F(0) = 1, \quad \text{amiből a középértéktétel alapján következik:}$$

$$F(x) \equiv 1.$$

$$s(x) = (1+x)^x, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

Tehát

$$(1+x)^x = 1 + \binom{x}{1}x + \binom{x}{2}x^2 + \dots + \binom{x}{n}x^n + \dots, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

Példák

1. $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}.$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{1} = \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2 \cdot 4},$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad \text{és így tovább.}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

Ha x elég kis érték, azaz $x \ll 1$, elég jó közelítéssel:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x.$$

Így pl.: $\sqrt{402} = \sqrt{400+2} = 20\sqrt{1+\frac{1}{200}} \approx 20\left(1+\frac{1}{400}\right) =$

$$= 20 + \frac{20}{400} = 20 + \frac{1}{20} = 20,05.$$

2. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}.$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}x + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3 + \dots$$

Az együtthatók:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}; \quad \binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4};$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad \text{és így tovább.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

*

b) $f(x) = (1-x)^x.$

Az $(1+x)^x = 1 + \binom{x}{1}x + \binom{x}{2}x^2 + \binom{x}{3}x^3 + \dots + \binom{x}{n}x^n + \dots$

binomiális sorba x helyébe $(-x)$ -et írva:

$$(1-x)^x = 1 - \binom{x}{1}x + \binom{x}{2}x^2 - \binom{x}{3}x^3 + \dots + (-1)^n \binom{x}{n}x^n + \dots$$

Példák

1. $\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad (\text{ha } |x| < 1).$

Ha $|x|$ kicsi

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x.$$

Például $\sqrt{8,64} = \sqrt{9-0,36} = 3\sqrt{1-0,04} \approx 3(1-0,02) = 2,94.$

2. $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots, \quad \text{ha } |x| < 1.$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}} = (1-x^3)^{-\frac{1}{3}}, \quad |x^3| < 1.$

$$(1-x^3)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \binom{-\frac{1}{3}}{1}(-x^3) + \binom{-\frac{1}{3}}{2}(-x^3)^2 + \binom{-\frac{1}{3}}{3}(-x^3)^3 + \dots,$$

$$(1-x^3)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{\binom{-\frac{1}{3}}{1}}{1}(-x^3) + \frac{\binom{-\frac{1}{3}}{2}(-5)}{1 \cdot 2}x^6 + \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3})}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-x^9) + \dots,$$

$$(1-x^3)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)(-x^3) + \frac{5}{9}x^6 - \frac{40}{81}(-x^9) + \dots,$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}} = 1 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{9}x^6 + \frac{40}{81}x^9 + \dots$$

*

c) $f(x) = (1+x)^n \quad (n \text{ egész szám}).$

Ha $\alpha = n$ pozitív egész szám, akkor $f(x) = (1+x)^n$ n -edfokú polinom, tehát véges hatvány-sorba fejthető.

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$

A sor együtthatói közül:

$$\binom{n}{n+1} = \binom{n}{n+2} = \dots = 0,$$

vagyis az $n+2$ -edik tagtól kezdve az összes együttható $= 0$.

Ugyanis, ha az $\binom{n}{n+1}$; $\binom{n}{n+2}$ stb. értékeket felírjuk, a számláló tényezői között előfordul a 0 tényező, így a tört értéke nulla.

A binomiális tétel. Írjuk fel az $(a+b)^n$ kifejezést hatványsor alakjában.

$$(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \quad (\text{feltéve, hogy } |a| > |b|)$$

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{b}{a} + \binom{n}{2} \frac{b^2}{a^2} + \binom{n}{3} \frac{b^3}{a^3} + \dots + \binom{n}{n} \frac{b^n}{a^n}.$$

$(a+b)^n$ -t megkapjuk, ha a jobb oldal minden tagját a^n -nel szorozzuk.

$$(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = a^n + \binom{n}{1} \frac{b}{a} \cdot a^n + \binom{n}{2} \frac{b^2}{a^2} a^n + \dots + \binom{n}{n} \frac{b^n}{a^n} \cdot a^n.$$

Tehát

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n.$$

Megkaptuk a Newton-féle binomiális tétel ismert alakját.

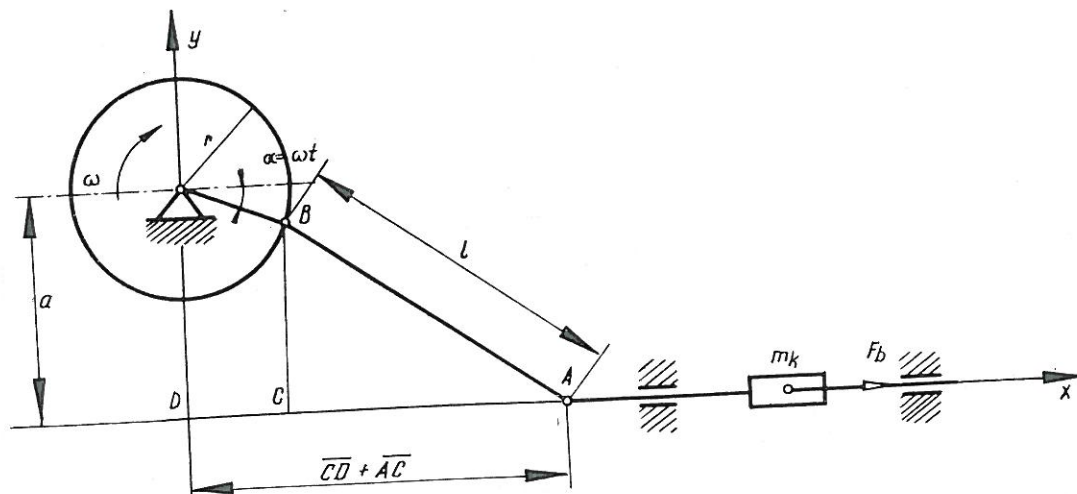
*

Példa a binomiális sor gyakorlati alkalmazására

Milyen nagy F_b tömegerő ébred a dezaxiális hajtóművel működtetett m_k tömegű fűkasza A jelű gömbcsuklójában, ha a dezaxialitás a , a forgattyúsugár r , a hajtórúd hossza l , és a forgattyú ω szögsebességgel forog (9.3. ábra)?

A tömegerő az A pont gyorsulásából számítható:

$$\begin{aligned} x_A &= \overline{CD} + \overline{AC} = r \cos \alpha + \sqrt{AB^2 - BC^2} = r \cos \alpha + \sqrt{l^2 - (a - r \sin \alpha)^2} = \\ &= l \sqrt{1 - \left(\frac{a - r \sin \alpha}{l}\right)^2} + r \cos \alpha. \end{aligned}$$



9.3 ábra

A gyökjel alatti kifejezést a sorfejtéses alakkal helyettesítve:

$$\text{mivel } \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots,$$

$$l \sqrt{1 - \left(\frac{a - r \sin \alpha}{l}\right)^2} = l \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a - r \sin \alpha}{l}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{a - r \sin \alpha}{l}\right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{a - r \sin \alpha}{l}\right)^6 - \dots \right].$$

A szögletes zárójelen belül a zárójeleket felbontva és rendezve:

$$\begin{aligned} l \sqrt{1 - \left(\frac{a - r \sin \alpha}{l}\right)^2} &= l \left[1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{l^2} + \frac{ar}{l^2} \sin \alpha - \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{2l^2} - \frac{1}{8} \frac{a^4}{l^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4a^3r \sin \alpha}{8l^4} - \frac{6a^2r^2 \sin^2 \alpha}{8l^4} + \frac{4ar^3 \sin^3 \alpha}{8l^4} - \frac{r^4 \sin^4 \alpha}{8l^4} - \dots \right]. \\ x_A &= r \cos \alpha + l \left\{ \left[1 - \frac{a^2}{2l^2} - \frac{a^4}{8l^4} \right] + \left[\sin \alpha \left(\frac{ar}{l^2} + \frac{4a^3r}{8l^4} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sin^2 \alpha \left(\frac{r^2}{2l^2} + \frac{6a^2r^2}{8l^4} \right) \right] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

A gyakorlatban szükséges pontossághoz elegendő, ha:

$$x_A \approx r \cos \alpha + l - \frac{a^2}{2l} - \frac{a^4}{8l^3} + \sin \alpha \frac{ar}{l} + \frac{1}{2} \frac{a^3r}{l^3} \sin \alpha.$$

A sebesség, mivel $\alpha = \omega t$:

$$\frac{dx_A}{dt} = v_m \approx \omega \left(-r \sin \alpha + \frac{ar}{l} \cos \alpha + \frac{a^3r}{2l^3} \cos \alpha \right) \approx r\omega \left(-\sin \alpha + \frac{a}{l} \cos \alpha + \frac{a^3}{2l^3} \cos \alpha \right).$$

A gyorsulás:

$$b_x = \frac{dv_m}{dt} = \frac{d^2x_A}{dt^2} \approx r\omega^2 \left(-\cos \alpha - \frac{a}{l} \sin \alpha - \frac{a^3}{2l^3} \sin \alpha \right).$$

Bevezetve a $\lambda = \frac{a}{l}$ excentricitást:

$$b_x = -r\omega^2 \left(\cos \alpha + \lambda \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \right) \sin \alpha \right),$$

és a $\gamma = \lambda \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \right)$ állandót a tömegerőre, az

$$F_b = -m_k b_x = m_k r \omega^2 (\cos \omega t + \gamma \sin \omega t)$$

összefüggést kapjuk.

9.2.3.4 Sorfejtés végtelen mértani sor segítségével

Fejtsük binomiális sorba az $y = \frac{1}{1-x}$ függvényt!

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= (1-x)^{-1} = 1 + \binom{-1}{1} (-x) + \binom{-1}{2} (-x)^2 + \binom{-1}{3} (-x)^3 + \dots = \\ &= 1 + \frac{-1}{1} (-x) + \frac{(-1)(-2)}{1 \cdot 2} (-x)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-x)^3 + \dots = \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \end{aligned}$$

A sor konvergens, ha $|x| < 1$.

Ezt az eredményt sokkal egyszerűbben megkaphatjuk, ha észrevesszük, hogy $\frac{1}{1-x}$ olyan végtelen mértani sor összege, ahol az első tag, $a = 1$, a hányados, $q = x$ ($|x| < 1$).

Így
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Példák

1. Fejtsük sorba $y = \frac{1}{1+x}$ -et, $|x| < 1$!

Most $a = 1$; $q = -x$; így a sor:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

2. $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$, $a = 1$; $q = \sqrt{x}$, $|\sqrt{x}| < 1$.

$$\frac{1}{1-\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + x + x\sqrt{x} + x^2 + \dots$$

9.2.3.5 Sorfejtés integrálás segítségével

A 9.2.2 pontban megismert I. tétel szerint egyenletesen konvergens sor tagonként integrálható.

Ez a tétel megkönnyíti bizonyos kifejezések sorbafejtését, ha azt konvergens sorok integrálásával megkaphatjuk.

Példák

1. $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$ konvergens, ha $x^2 < 1$.

Mivel

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Arctg } x + C \quad \text{és} \quad \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \text{Arctg } x.$$

$$\text{Arctg } x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots) dt.$$

$$\text{Arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Megkaptuk $f(x) = \text{Arctg } x$ sorbafejtését.

A sor konvergens, ha $|x| < 1$.

Ha $x = 1$, $\text{Arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$.

A Leibniz-féle kritérium alapján a sor $x = 1$ értékre is konvergens, és bebizonyítható, hogy itt is az $\text{Arctg } x$ függvény megfelelő értékét, azaz $\text{Arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$ -et állítja elő.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

A π számnak ilyen egyszerű sorbafejtéssel való előállítás Leibniztől származik. A sor az ún. Leibniz-féle sor. Összege megfelelő csoportosítással számítható ki. A sor igen lassan konvergál. π meghatározása gyorsabban érhető el a következőképpen:

Legyen $\text{tg } u = \frac{1}{2}$; $\text{tg } v = \frac{1}{3}$, azaz

$$u = \text{Arctg } \frac{1}{2}; \quad v = \text{Arctg } \frac{1}{3} \quad \left(u + v < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{tg } (u + v) = \frac{\text{tg } u + \text{tg } v}{1 - \text{tg } u \cdot \text{tg } v} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1.$$

$$u + v = \text{Arctg } 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\pi}{4} = u + v = \text{Arctg } \frac{1}{2} + \text{Arctg } \frac{1}{3}.$$

$\text{Arctg } x$ sorába x helyébe $\frac{1}{2}$ -et, illetve $\frac{1}{3}$ -ot helyettesítve:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \dots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \dots\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5^3}\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - \dots \end{aligned}$$

Ez a sor az ún. Euler-féle sor.

2. $f(x) = \text{Arcsin } x$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^6 + \dots$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots \quad (\text{konvergens, ha } x^2 < 1.)$$

$$\text{Arcsin } x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

Megkaptuk $f(x) = \text{Arcsin } x$ sorfejtését.

Ha $|x| < 1$,

$$\text{Arcsin } x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

Mivel $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

$$\frac{\pi}{6} = \text{Arcsin } \frac{1}{2},$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

A sorból $\frac{\pi}{6}$, és így π értéke tetszőleges pontossággal meghatározható.

3. Analóg módon kaphatjuk meg $f(x) = \operatorname{arsh} x$ sorbafejtését.

$$\begin{aligned}\operatorname{arsh} x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt. \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} &= (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) t^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) t^4 + \left(-\frac{1}{2}\right) t^6 + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} t^6 + \dots \quad (t^2 < 1). \\ \operatorname{arsh} x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots\end{aligned}$$

A sor konvergens, ha $x^2 < 1$, azaz $-1 < x < 1$.

4. $f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$, konvergens, ha $|x| < 1$.

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln \left[(1+t) \right]_0^x = \ln(1+x).$$

Így $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

Megkaptuk $\ln(1+x)$ ismert sorfejtését. Ez konvergens $-1 < x < 1$ -ben. Bebizonyítható, hogy a sorfejtés érvényes az $x = 1$ helyen is.

9.2.3.6 Integrálás sorfejtéssel

A határozatlan integrál számítása során megemlítettük, hogy vannak függvények, amelyeknek integráljai nem adhatók meg elemi függvények segítségével.

Ilyen például:

a si x , úgynevezett integrál-színusz függvény,

$$\operatorname{si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \right).$$

Hasonlóan nem adhatók meg elemi függvényekkel

az $\int \frac{e^x}{x} dx$; $\int e^{-x^2} dx$ stb. integrálok.

Az integrálokat megkapjuk végtelen sor segítségével, ha az integranduszt sorba fejtjük, majd tagonként integráljuk.

Példák

1. $\int \frac{\sin x}{x} dx.$

A $\sin x$ függvény Maclaurin-sora:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

ebből a sorból x -szel való osztással a $\frac{\sin x}{x}$ sorát kapjuk.

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Az integrál tehát

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx.$$

Tagonkénti integrálással:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = C + x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \frac{x^7}{7! \cdot 7} + \dots$$

2. $\int e^{-x^2} dx.$

e^x Maclaurin-sora.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Helyettesítsünk x helyébe $(-x^2)$ -et:

$$\begin{aligned}e^{-x^2} &= 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \dots \\ \int e^{-x^2} dx &= \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \dots \right) dx = \\ &= C + x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \frac{x^9}{4! \cdot 9} - \frac{x^{11}}{5! \cdot 11} + \dots\end{aligned}$$

9.2.3.7 Elliptikus integrálok

Az ellipszis kerülete. Határozzuk meg az a és b féltengelyű ellipszis kerületét (ív hosszát) (9.4 ábra)!

Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis egyenlete paraméteres alakban:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}.$$

Innen $\begin{cases} \dot{x} = -a \sin t \\ \dot{y} = b \cos t \end{cases}.$

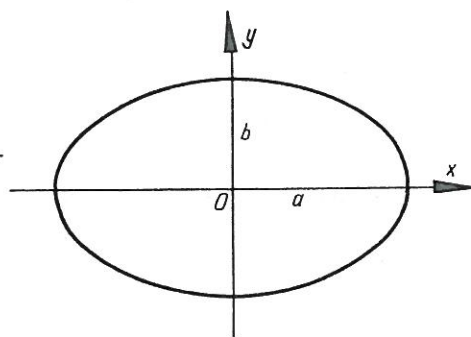
Az ellipszis kerülete:

$$\begin{aligned}
 s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x^2 + y^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\
 &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t} dt = \\
 &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t} dt.
 \end{aligned}$$

Vezessük be az ellipszis numerikus excentricitását, ε -t.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

$$s = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt.$$



9.4 ábra

Az $\int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt$ integrál nem adható meg elemi függvények segítségével.

Az ilyen típusú integrálok az ún. *elliptikus integrálok*. Az ellipszishoz $\varepsilon < 1$, ezért $\varepsilon^2 \cos^2 t < 1$, az integrandusz binomiális sorba fejthető.

Felhasználva $\sqrt{1-x}$ sorbafejtését:

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^2 t - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \cos^4 t - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 \cos^6 t + \dots$$

Az ellipszis kerületét a sor tagonkénti integrálásával kapjuk:

$$\begin{aligned}
 s &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^2 t - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \cos^4 t - \dots \right) dt = \\
 &= 2a\pi - 4a \left[\frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt + \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t dt + \dots \right].
 \end{aligned}$$

A 8.3.1 pontban bebizonyítottuk, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt,$$

és ha n páros,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Így

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\pi}{2}, \quad \text{és így tovább.}$$

Így az ellipszis kerülete:

$$s = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} \dots \right].$$

Kis ε esetén az ellipszis kerületének kiszámításához már 4 tag elegendő. Így

$$s \approx 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 - \frac{3}{64} \varepsilon^4 - \frac{5}{256} \varepsilon^6 \right).$$

9.2.4 Komplex tagú sorok

Definíció. A $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ komplex tagú számsorozat határértéke a z_0 komplex szám, ha megadva tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ számot, található olyan $N = N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy

$$|z_0 - z_n| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon).$$

Definíció. A $z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$ komplex tagú sor konvergens, ha a részletösszegek sorozata konvergens. Ekkor a sorozat határértékét a komplex tagú sor összegének nevezzük.

Tétel. Egy komplex tagú sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a tagok valós, illetve képzetes részéből alkotott sorozatok konvergensek. Ezek határértéke a komplex határérték valós, illetve képzetes része.

A tétel bizonyítására itt nem térünk ki, de könnyen elvégezhető.

Ennek a tételnek egyszerű következménye a sorokra vonatkozó analóg állítás.

Könnyű igazolni, hogy a Cauchy-féle konvergenciakritérium érvényes a komplex tagú sorokra is.

Definíció. A $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ sor abszolút konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ sor konvergens.

Megjegyzés. Ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.

Abszolút konvergens sorban a tagok sorrendjét tetszőlegesen megváltoztathatjuk, illetve a sort részsorok összegeként írhatjuk fel.

Az e^z , $\sin z$, $\cos z$, függvényeket komplex z értékekre Taylor-soruk segítségével definiáljuk.

$$\begin{aligned} \text{Definíció.} \quad e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots, \\ \sin z &= \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Mínthogy ezek a sorok abszolút konvergensek, ezért konvergensek is.

A komplex szám Euler-féle alakja

Tétel. $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Bizonyítás. A definíció értelmében

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Helyettesítsünk z helyébe $i\varphi$ -t, ahol φ tetszőleges valós érték.

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\varphi)^n}{n!} + \dots$$

Használjuk fel, hogy $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ és így tovább.

$$e^{i\varphi} = 1 + i \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i \frac{\varphi^7}{7!} + \dots$$

Csoportosítva:

$$e^{i\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots\right) + i \left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots\right).$$

Tehát

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

A komplex szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ennek alapján az ún. Euler-féle alak:

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Az $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

egyenletbe φ helyére $(-\varphi)$ -t írva, mivel $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$ és $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$,

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

Adjuk össze és vonjuk ki egymásból az

$$\left. \begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos \varphi - i \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{ egyenleteket.}$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Tehát

$$\cos \varphi = \operatorname{ch} i\varphi; \quad \sin \varphi = \frac{1}{i} \operatorname{sh} i\varphi, \quad \text{és így} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{i} \operatorname{th} i\varphi.$$

Írjunk az utolsó egyenletekbe φ helyett $(i\Psi)$ -t:

$$\cos i\Psi = \operatorname{ch}(i^2\Psi) = \operatorname{ch}(-\Psi) = \operatorname{ch} \Psi,$$

$$\sin i\Psi = \frac{1}{i} \operatorname{sh}(i^2\Psi) = \frac{1}{i} \operatorname{sh}(-\Psi) = -\frac{1}{i} \operatorname{sh} \Psi = i \operatorname{sh} \Psi.$$

Tehát

$$\operatorname{ch} \Psi = \cos i\Psi, \quad \operatorname{sh} \Psi = \frac{1}{i} \sin i\Psi \quad \text{és} \quad \operatorname{th} \Psi = \frac{1}{i} \operatorname{tg} i\Psi.$$

Az egyenleteket az x változóval felírva:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

$$\cos x = \operatorname{ch} ix; \quad \sin x = \frac{1}{i} \operatorname{sh} ix; \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{th} ix, \quad \text{illetve}$$

$$\operatorname{ch} x = \cos ix; \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{i} \sin ix; \quad \operatorname{th} x = \frac{1}{i} \operatorname{tg} ix.$$

Ezek az ún. Euler-féle egyenletek mutatják az összefüggéseket a trigonometrikus és exponenciális, illetve ciklometrikus függvények között.

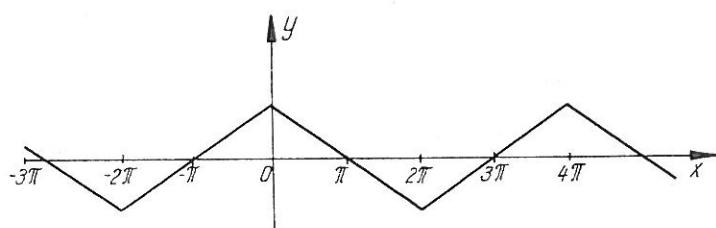
9.3 FOURIER-SOROK

Bevezetés

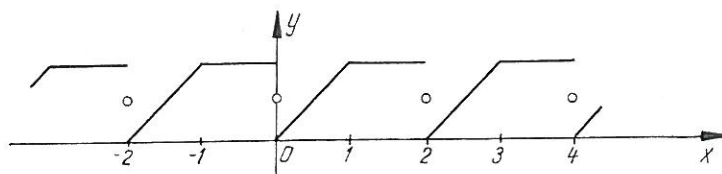
Gyakorlati számításoknál, műszaki alkalmazásoknál sokszor előnyös bizonyos, számítás-technikailag nehezebben kezelhető függvények értékeit közelítő számításokkal meghatározni.

Közelítő módszert alkalmaztunk, amikor függvényértékek kiszámítására a Taylor-polinomot, illetve a Taylor-sort használtuk. Erre csak akkor van lehetőség, ha a kiszámítandó függvény $(n+1)$ -szer, illetve akárhányszor differenciálható.

A következőkben olyan periodikus függvények sorba fejtésével foglalkozunk, amelyek a periódusban nem mindenütt deriválhatók, vagy nem is mindenütt folytonosak. Ilyen függvények a 9.5 és 9.6 ábrán adott függvények.



9.5 ábra



9.6 ábra

Az első függvény 2π szerint periodikus, és a $0, \pm 2\pi, \dots, \pm 2k\pi$ helyeken nem deriválható. A második függvény periódusa 2, és a $0, \pm 2, \dots, \pm 2k, \dots$ helyeken szakadása van, a függvény értéke a szakadási helyeken $\frac{1}{2}$.

Először olyan függvények sorba fejtésével foglalkozunk, amelyek 2π szerint periodikusak. A tetszőleges periódusú függvények sorbafejtését a koordináta-rendszer transzformációjával a 2π szerint periodikus függvények sorba fejtésére vezetjük vissza.

9.3.1 A 2π szerint periodikus függvények sorba fejtése

Legyen adott valamely 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény:

$$f(x) = f(x + 2k\pi), \quad \text{ahol } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Tegyük fel, hogy a függvények előállíthatók a következő egyenletesen konvergens végtelen trigonometrikus sorral:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

Rövidebben jelölve:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Határozzuk meg a végtelen sorban szereplő

$$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots \quad \text{együtthatókat!}$$

Az együtthatók meghatározására számítsunk ki a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban három határozott integrált. Az integrálokban m és n pozitív egész számok.

$$a) \quad \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx.$$

Ha $m = n \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 mx \, dx = \frac{1}{2m} \left[-\sin mx \cos mx + mx \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Ha $m \neq n$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \cos (m+n)x + \frac{1}{2} \cos (m-n)x \right] dx = \\ &= \left[-\frac{1}{2(m+n)} \sin (m+n)x + \frac{1}{2(m-n)} \sin (m-n)x \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

$$b) \quad \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx.$$

Ha $m = n \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{2m} \left[\sin mx \cos mx + mx \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Ha $m \neq n$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \cos (m+n)x + \frac{1}{2} \cos (m-n)x \right] dx = \\ &= \left[\frac{1}{2(m+n)} \sin (m+n)x + \frac{1}{2(m-n)} \sin (m-n)x \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

$$c) \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx.$$

Ha $m = n \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \cos mx \, dx = \frac{1}{2m} \left[\sin^2 mx \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Ha $m \neq n$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \sin(m+n)x + \frac{1}{2} \sin(m-n)x \right] dx = \\ &= \left[-\frac{1}{2(m+n)} \cos(m+n)x - \frac{1}{2(m-n)} \cos(m-n)x \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Tehát

$$\int_0^{2\pi} \sin m \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi, & \text{ha } m = n \neq 0 \\ 0, & \text{ha } m \neq n, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi, & \text{ha } m = n \neq 0 \\ 0, & \text{ha } m \neq n, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \quad \text{minden } m \text{ és } n \text{ érték mellett.}$$

Feltételeink szerint $f(x)$ a következő egyenletesen konvergens sorral írható fel:

$$(1) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

1. Integráljuk az (1) egyenlet mindkét oldalát 2π hosszúságú intervallumban, például a $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx &= \int_0^{2\pi} a_0 \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} a_n \cos nx \, dx + \int_0^{2\pi} b_n \sin nx \, dx \right] = \\ &= a_0 \int_0^{2\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Míthogy } \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = 0, \text{ és } \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = 0, \quad (n > 0 \text{ egész szám):}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \, dx = a_0 \cdot 2\pi.$$

Innen

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx.$$

2. Szorozzuk végig az (1) egyenlet mindkét oldalát $\cos mx$ -szel!

$$f(x) \cos mx = a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos mx \cos nx + b_n \cos mx \sin nx).$$

Ilyen módon újra egyenletesen konvergens sort kapunk.

A $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban mindkét oldalt integrálva:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx &= a_0 \int_0^{2\pi} \cos mx \, dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx + b_n \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx \right]. \end{aligned}$$

Felhasználva az előzőleg kiszámított határozott integrálokat:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_m \pi.$$

Innen

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx.$$

3. Szorozzuk végig az (1) egyenletet $\sin mx$ -szel:

$$f(x) \sin mx = a_0 \sin mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx).$$

Ez a sor is egyenletesen konvergens.

Tagonkénti integrálással:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx \, dx &= a_0 \int_0^{2\pi} \sin mx \, dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx \right). \end{aligned}$$

Felhasználva a kiszámított határozott integrálokat:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx \, dx = b_m \pi, \quad \text{innen}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx \, dx.$$

A Fourier-sort általában a következőképpen definiáljuk.

Definíció. A 2π szerint periodikus és integrálható függvény *Fourier-sora* az

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

végtelen trigonometrikus sor, amelyben az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx.$$

(FOURIER, Jean Baptiste francia matematikus [1768–1830].)

Röviden összefoglalva: ha $f(x)$ egyenletesen konvergens trigonometrikus sorba fejthető, akkor e sor $f(x)$ Fourier-sora.

Megjegyzés. $f(x)$ -et olyankor is előállíthatja Fourier-sora, ha a sor nem egyenletesen konvergens.

Könnyen bizonyítható, hogy az együtthatók meghatározásához kiszámított határozott integrálok értéke nem változik, ha az integrálások intervalluma az $a \leq x \leq a+2\pi$ periódus. Ezért a Fourier-együtthatók általánosabb alakja:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx,$$

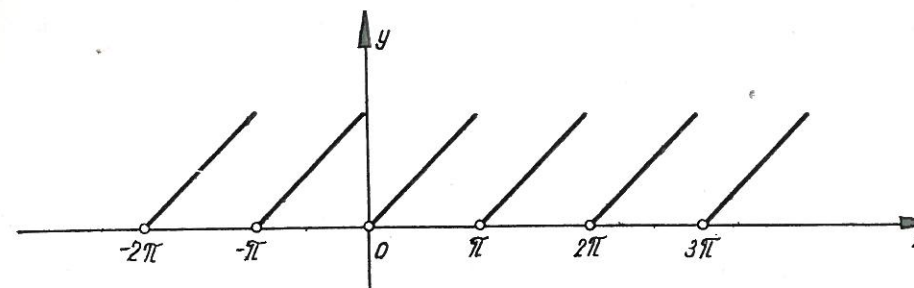
$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos mx dx,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin mx dx.$$

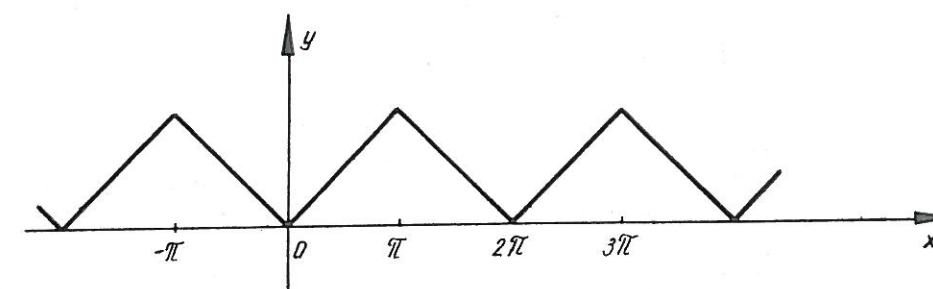
Ha az $f(x)$ függvény a perióduson belül szakadós vagy a függvény folytonos, de deriváltja szakadós, azaz a függvénynek törése van, az integrálás szakaszonként végzendő el (9.7 és 9.8 ábra).

Tétel. Páros függvény Fourier-sora nem tartalmaz szinuszfüggvényeket; páratlan függvény Fourier-sora csak szinuszos tagokból áll.

A tétel bizonyításához felhasználjuk a határozott integrál fogalmából adódó két eredményt.



9.7 ábra



9.8 ábra

Ha $y = g(x)$ páros függvény (9.9 ábra):

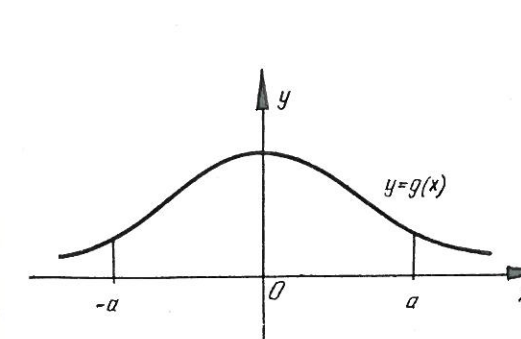
$$\int_{-a}^{+a} g(x) dx = 2 \int_0^{+a} g(x) dx.$$

Ha $y = g(x)$ páratlan függvény (9.10 ábra):

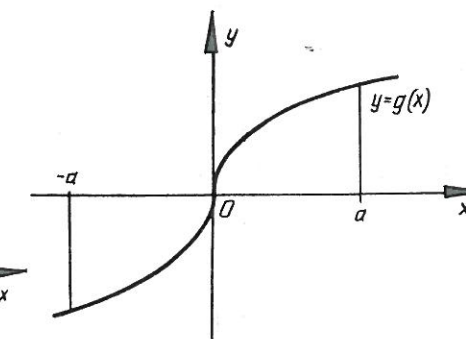
$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0$$

A tétel bizonyítása:

a) $f(x)$ páros függvény.



9.9 ábra



9.10 ábra

Mivel $\cos mx$ páros, $\sin mx$ páratlan függvény, $f(x) \cos mx$ páros és $f(x) \sin mx$ páratlan függvény.

Válasszuk integrációs intervallumnak a $[-\pi; \pi]$ intervallumot. A Fourier-együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx.$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx dx.$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = 0.$$

b) $f(x)$ páratlan függvény.

Mivel $\cos mx$ páros, $\sin mx$ páratlan függvény, $f(x) \cos mx$ páratlan, $f(x) \sin mx$ páros függvény. Az integrálás intervallumát szintén $[-\pi; \pi]$ -nek vesszük. A Fourier-együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = 0.$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin mx dx.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Röviden összefoglalva: ha $f(x)$ 2π szerint periodikus és páros,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx dx,$$

$$b_m = 0.$$

Ha $f(x)$ 2π szerint periodikus és páratlan,

$$a_0 = 0,$$

$$a_m = 0,$$

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin mx dx.$$

A Fourier-sor konvergenciája. A matematikai analízis igen fontos fejezetét alkotja a Fourier-sorok vizsgálata. Kérdés, milyen feltételek mellett konvergál az $f(x)$ periodikus függvény Fourier-sora, és mikor állítja elő a Fourier-sor az $f(x)$ függvényt. Ezeknek a kérdéseknek részletes vizsgálatára nem térünk ki.

A Fourier-sorok konvergenciájáról röviden a következőket közöljük.

A 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény eleget tesz a *Dirichlet-féle* feltételnek, ha korlátos, és a $(0; 2\pi)$ intervallum véges számú olyan részre bontható, amelyek mindegyikének belsejében $f(x)$ monoton.

Ha a függvény eleget tesz e feltételnek, szükségképpen *integrálható*.

A Dirichlet-féle feltételnek eleget tevő függvénynek lehet végtelen sok szakadási helye, de ezeken a helyeken a függvénynek első fajú szakadása van, mert van jobb oldali és bal oldali határértéke.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő konvergenciakritériumokat.

Tétel. Ha elég kis $\delta > 0$ mellett $f(x)$ az $(x; x+\delta)$, valamint az $(x-\delta; x)$ intervallum belsejében monoton, akkor $f(x)$ Fourier-sora az x helyen konvergens és összege:

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

(Dirichlet-féle kritérium.)

E tételből adódik a következő konvergenciakritérium, amely a Fourier-soroknak adott x helyen való konvergenciájára szolgáltat elegendő feltételt.

Tétel. Ha a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény eleget tesz a Dirichlet-féle feltételnek, akkor Fourier-sora mindenütt konvergens, és a Fourier-sor összege a folytonossági helyeken $f(x)$, első fajú szakadási helyeken pedig $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$.

Példák

1. Fejtsük Fourier-sorba a következő függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{ha } x = k\pi \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots), \end{cases}$$

$$f(x) = f(x+2k\pi) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

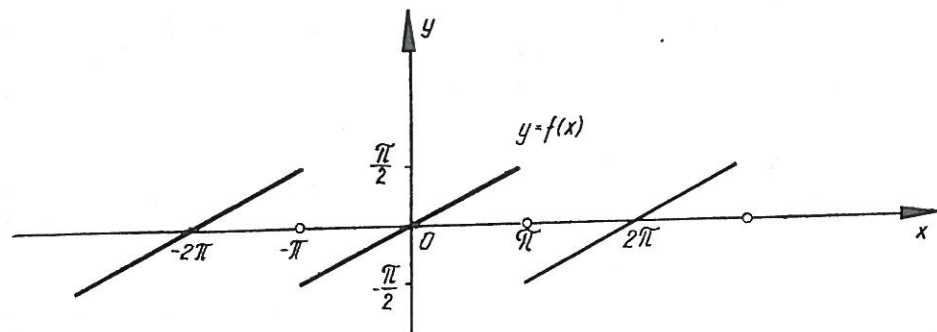
A függvény képe a 9.11 ábrán szemlélhető.

A függvény páratlan. Így

$$a_0 = 0; \quad a_m = 0.$$

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{2} \sin mx dx,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin mx dx.$$



9.11 ábra

Parciális integrálással:

$$u' = \sin mx, \quad v = x,$$

$$u = -\frac{1}{m} \cos mx, \quad v' = 1.$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin mx \, dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\frac{x}{m} \cos mx \right]_0^\pi + \frac{1}{m} \int_0^\pi \cos mx \, dx \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\frac{x}{m} \cos mx \right]_0^\pi + \left[\frac{1}{m^2} \sin mx \right]_0^\pi \right\}. \end{aligned}$$

Mivel $\sin m\pi = 0$, $\cos m\pi = (-1)^m$,

$$b_m = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{m} \right) (-1)^m = \frac{1}{m} (-1)^{m+1}.$$

A függvény Fourier-sorba fejtvé:

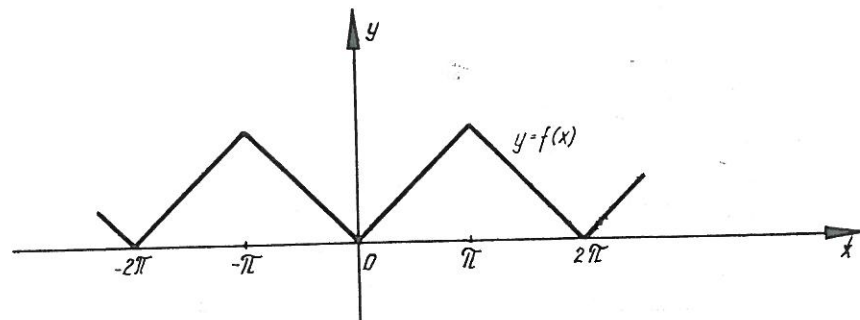
$$f(x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

2. Fejtsük Fourier-sorba a következő függvényt:

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$f(x) = f(x+2k\pi) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

A függvény képe (9.12 ábra).



9.12 ábra

A függvény páros: $b_m = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Parciális integrálással:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos mx \, dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{x}{m} \sin mx \right]_0^\pi - \frac{1}{m} \int_0^\pi \sin mx \, dx \right\} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{x}{m} \sin mx \right]_0^\pi + \left[\frac{1}{m^2} \cos mx \right]_0^\pi \right\}. \end{aligned}$$

$$\left[\frac{x}{m} \sin mx \right]_0^\pi = 0.$$

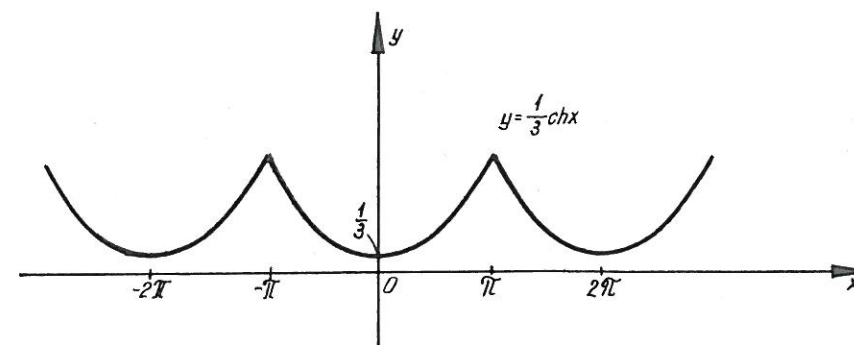
Ha m páros, $\left[\cos mx \right]_0^\pi = 0$.

Ha m páratlan, $\left[\cos mx \right]_0^\pi = -2$.

Ezért $a_m = 0$, ha m páros és

$$a_m = -\frac{4}{\pi m^2}, \text{ ha } m \text{ páratlan.}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$



9.13 ábra

3. Fejtsük Fourier-sorba a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{ch} x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$f(x) = f(x+2k\pi) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

A függvény képe (9.13 ábra).

A függvény páros.

$$b_m = 0.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \operatorname{ch} x \, dx = \frac{1}{3\pi} [\operatorname{sh} x]_0^{\pi} = \frac{\operatorname{sh} \pi}{3\pi}.$$

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \operatorname{ch} x \cos mx \, dx,$$

$$a_m = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch} x \cos mx \, dx.$$

Parciális integrálással:

$$\begin{aligned} \int_v \operatorname{ch} x \cos mx \, dx &= \frac{1}{m} \operatorname{ch} x \sin mx - \frac{1}{m} \int_v \operatorname{sh} x \sin mx \, dx = \\ &= \frac{1}{m} \operatorname{ch} x \sin mx + \frac{1}{m^2} \operatorname{sh} x \cos mx - \frac{1}{m^2} \int \operatorname{ch} x \cos mx \, dx. \end{aligned}$$

$$\text{Rendezve: } \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) \int \operatorname{ch} x \cos mx \, dx = \frac{1}{m} \operatorname{ch} x \sin mx + \frac{1}{m^2} \operatorname{sh} x \cos mx + C_1.$$

$$\text{Innen: } \int \operatorname{ch} x \cos mx \, dx = \frac{1}{1+m^2} (m \operatorname{ch} x \sin mx + \operatorname{sh} x \cos mx) + C.$$

$$a_m = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{1}{1+m^2} \left\{ \left[m \operatorname{ch} x \sin mx \right]_0^{\pi} + \left[\operatorname{sh} x \cos mx \right]_0^{\pi} \right\}.$$

$$\text{Mivel } \sin m\pi = 0, \quad \sin 0 = 0, \quad \operatorname{sh} 0 = 0,$$

$$\cos m\pi = (-1)^m,$$

$$a_m = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{\operatorname{sh} \pi}{1+m^2} (-1)^m.$$

A függvény Fourier-sora:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} \pi}{3\pi} - \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{3\pi} \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{5} \cos 2x + \frac{1}{10} \cos 3x - \dots \right).$$

4. Fejtsük Fourier-sorba a következő függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{ha } \pi < x < 2\pi \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } x = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{cases}$$

$$f(x) = f(x+2k\pi) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

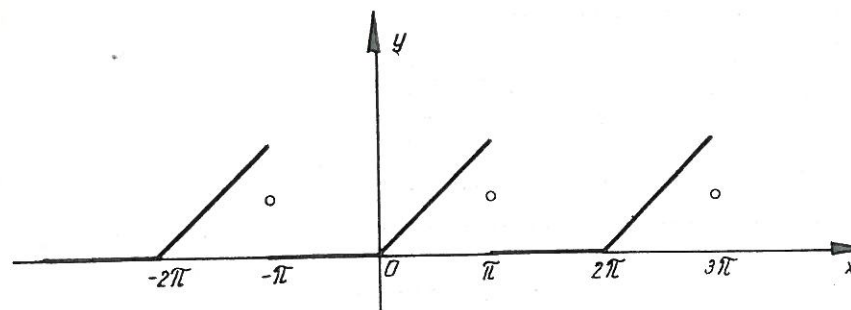
A függvény képe (9.14 ábra).

A függvény nem páros és nem páratlan:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \, dx \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

$$a_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x \cos mx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cos mx \, dx \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos mx \, dx.$$



9.14 ábra

Parciális integrálással:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos mx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{m} \sin mx \right]_0^{\pi} - \frac{1}{m\pi} \int_0^{\pi} \sin mx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{m} \sin mx \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{\pi m^2} \cos mx \right]_0^{\pi}. \end{aligned}$$

$$\left[\frac{x}{m} \sin mx \right]_0^{\pi} = 0 \quad \text{és}$$

$$\text{ha } m \text{ páros, } \left[\cos mx \right]_0^{\pi} = 0,$$

$$\text{ha } m \text{ páratlan, } \left[\cos mx \right]_0^{\pi} = -2.$$

Ezért

$$a_m = 0, \quad \text{ha } m \text{ páros,}$$

$$a_m = -\frac{1}{\pi} \frac{2}{m^2}, \quad \text{ha } m \text{ páratlan.}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin mx \, dx.$$

Parciálisan integrálva:

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin mx \, dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\frac{1}{m} x \cos mx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \cos mx \, dx \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\frac{1}{m} x \cos mx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{m^2} \left[\sin mx \right]_0^{\pi} \right\} = -\frac{1}{m} (-1)^m. \end{aligned}$$

A függvény Fourier-sora a Dirichlet-féle kritérium alapján előállítja a függvényt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{4} - \left(\frac{2 \cos x}{\pi \cdot 1^2} - \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{2 \cos 3x}{\pi \cdot 3^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{2 \cos 4x}{\pi \cdot 4^2} + \dots \right), \end{aligned}$$

a szakadási helyeken a Fourier-sor összege $\frac{\pi}{4}$.

5. Fejtsük Fourier-sorba a következő függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} -x + \frac{\pi}{2}, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

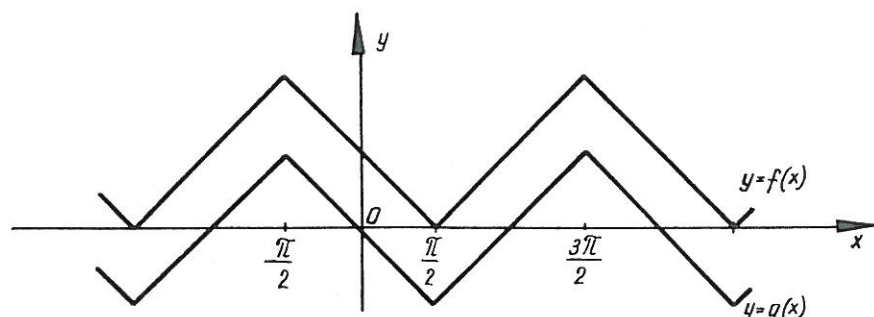
A függvény nem páros és nem páratlan. A függvényt azonban könnyen megkaphatjuk az $y = g(x)$

páratlan függvénynek az y tengely irányában $\frac{\pi}{4}$ -gyel való eltolásával.

$$f(x) = g(x) + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{ahol } g(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ x - \pi, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

$$g(x) = g(x + 2k\pi) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$



9.15 ábra

Az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket a 9.15 ábra szemlélteti. Fejtsük Fourier-sorba a $g(x)$ függvényt. A függvény páratlan.

$$a_0 = 0, \quad a_m = 0.$$

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -x \sin mx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x - \pi) \sin mx \, dx.$$

Mindkét integrálást parciális integrálással elvégezve:

$$b_m = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{x}{m} \cos mx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos mx \, dx - \left[\frac{x - \pi}{m} \cos mx \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos mx \, dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{x}{m} \cos mx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{m^2} \left[\sin mx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{x - \pi}{m} \cos mx \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{m^2} \left[\sin mx \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right\}.$$

$$\left[\frac{x}{m} \cos mx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{x - \pi}{m} \cos mx \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(\frac{\pi}{2m} \cos \frac{m\pi}{2} - 0 \right) - \left(0 + \frac{\pi}{2m} \cos m \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

$$\sin 0 = 0, \quad \sin m\pi = 0,$$

$$\sin \frac{m\pi}{2} = (-1)^k, \quad \text{ha } m = 2k + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\sin \frac{m\pi}{2} = 0, \quad \text{ha } m = 2k.$$

$$\text{Ezért } b_m = 0, \quad \text{ha } m \text{ páros, azaz } m = 2k,$$

$$b_m = -\frac{4}{\pi m^2} (-1)^k, \quad \text{ha } m \text{ páratlan, azaz } m = 2k + 1.$$

$$\text{Így } g(x) = -\frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \right).$$

Az eredeti függvény sorba fejtvé pedig,

$$\text{mivel } f(x) = g(x) + \frac{\pi}{2},$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \right).$$

9.3.2 Tetszőleges periódusú függvények sorba fejtése

Legyen adott a $2l$ szerint periodikus $f(x)$ függvény:

$$f(x) = f(x + 2kl) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Definíció. A $2l$ szerint periodikus $f(x)$ függvény Fourier-sora:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

ahol az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) \, dx; \quad a_m = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} \, dx;$$

$$b_m = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} \, dx.$$

Tétel. Legyen $f(x)$ $2l$ szerint periodikus függvény. A $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ 2π szerint periodikus függvény Fourier-sora a $t = \frac{\pi}{l} x$ helyettesítés után azonos az $f(x)$ függvénynek a fenti definícióval megadott Fourier-sorával.

Bizonyítás. Az $f(x)$ függvény $2l$ szerint periodikus:

$$f(x) = f(x+2kl) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Vezessük be a következő új változót:

$$t = \frac{\pi}{l} x.$$

Innen $x = \frac{l}{\pi} t.$

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \varphi(t).$$

$$f(x+2kl) = f\left(\frac{l}{\pi} t + 2kl\right) = f\left[\frac{l}{\pi} (t+2k\pi)\right] = \varphi(t+2k\pi).$$

Mivel $f(x) = f(x+2kl),$
 $\varphi(t) = \varphi(t+2k\pi).$

A $\varphi(t)$ függvény már 2π szerint periodikus. Az együtthatók meghatározásához írjuk fel dt -t és az új integrálási határokat.

Ha $x = 0, \quad t = 0,$

ha $x = 2l, \quad t = 2\pi.$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\pi}{l}, \quad dt = \frac{\pi}{l} dx.$$

A Fourier-együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2l} f(x) \frac{\pi}{l} dx = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) dx.$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos mt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2l} f(x) \left(\cos \frac{m\pi x}{l}\right) \frac{\pi}{l} dx = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin mt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2l} f(x) \left(\sin \frac{m\pi x}{l}\right) \frac{\pi}{l} dx = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

Tehát

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) dx,$$

$$a_m = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx,$$

$$b_m = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Páros függvény esetén:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx,$$

$$a_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx,$$

$$b_m = 0.$$

Páratlan függvény esetén:

$$a_0 = 0, \quad a_m = 0,$$

$$b_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx.$$

Példák

1. Fejtsük Fourier-sorba a következő függvényt:

$$f(x) = x^2, \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$f(x) = f(x+2k) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

A függvény periódusa 2.

A függvény képe a 9.16 ábrán szemlélhető.

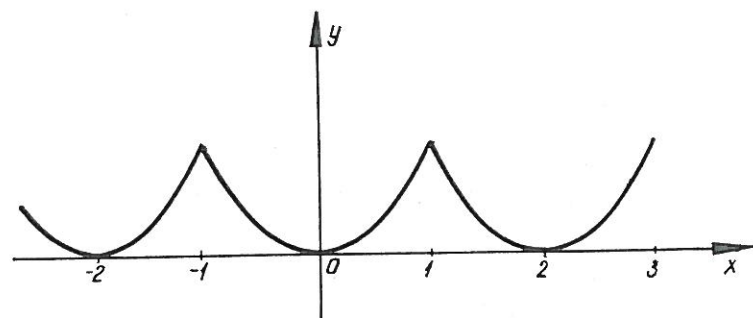
A függvény páros:

$$b_m = 0.$$

$$2l = 2, \quad l = 1.$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$a_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 2 \int_0^1 x^2 \cos m\pi x dx.$$



9.16 ábra

Kétszer parciálisan integrálva:

$$\begin{aligned} a_m &= 2 \int_0^1 x^2 \cos m\pi x \, dx = 2 \left\{ \left[\frac{x^2}{m\pi} \sin m\pi x \right]_0^1 - \frac{2}{m\pi} \int_0^1 x \sin m\pi x \, dx \right\} = \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{x^2}{m\pi} \sin m\pi x \right]_0^1 + \left[-\frac{2x}{m^2\pi^2} \cos m\pi x \right]_0^1 - \frac{2}{m^2\pi^2} \int_0^1 \cos m\pi x \, dx \right\} = \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{x^2}{m\pi} \sin m\pi x \right]_0^1 + \left[-\frac{2x}{m^2\pi^2} \cos m\pi x \right]_0^1 - \left[\frac{2}{m^3\pi^3} \sin m\pi x \right]_0^1 \right\} = \\ &= \frac{4}{m^2\pi^2} \cos m\pi = \frac{4}{m^2\pi^2} (-1)^m. \\ f(x) &= \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\cos \pi x}{1^2} - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \dots \right). \end{aligned}$$

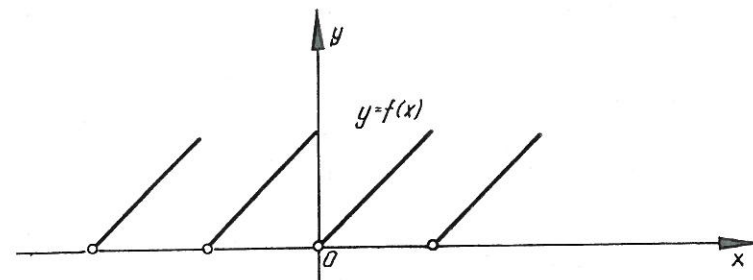
2. Fejtsük Fourier-sorba az

$$y = \{x\} \quad \text{függvényt.}$$

Az $y = \{x\} = x - [x]$ (x mínusz egész rész x) függvényt a 6.3.2 pontban már vizsgáltuk. A függvény képe a 9.17 ábra.

$$\begin{cases} f(x) = x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ f(x) = f(x+k) & (k = \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases}$$

A függvény periódusa 1, $(2l = 1, \quad l = \frac{1}{2})$.



9.17 ábra

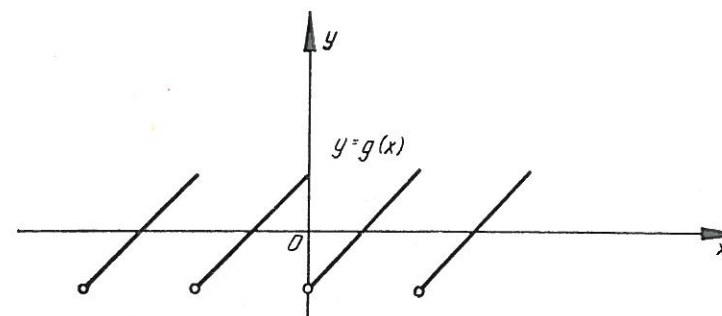
A függvény nem páros és nem páratlan.

A függvényt azonban megkaphatjuk a $g(x)$ páratlan függvénynek $\frac{1}{2}$ -del való eltolásával.

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{2},$$

$$\text{ahol } \begin{cases} g(x) = x - \frac{1}{2}, & \text{ha } 0 \leq x < 1, \\ g(x) = g(x+k) & (k = \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases}$$

A $g(x)$ függvény képe (9.18 ábra).



9.18 ábra

A $g(x)$ függvény páratlan, Fourier-együtthatói:

$$a_0 = 0, \quad a_m = 0.$$

$$b_m = \frac{2}{1} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \sin \frac{m\pi x}{\frac{1}{2}} \, dx.$$

$$b_m = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \sin 2m\pi x \, dx =$$

$$= 4 \left\{ \left[-\frac{x - \frac{1}{2}}{2m\pi} \cos 2m\pi x \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2m\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos 2m\pi x \, dx \right\} =$$

$$= 4 \left\{ \left[-\frac{x - \frac{1}{2}}{2m\pi} \cos 2m\pi x \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4m^2\pi^2} [\sin 2m\pi x]_0^{\frac{1}{2}} \right\} = -\frac{1}{m\pi}.$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2n\pi x.$$

$$g(x) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin 2\pi x}{1} + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \dots \right).$$

Az $f(x) = \{x\}$ függvény Fourier-sora:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin 2\pi x + \frac{1}{2} \sin 4\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x + \dots \right).$$

A szakadási helyeken a Fourier-sor összege: $\frac{1}{2}$, ugyanis

$$\frac{f(1-0) + f(1+0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

10. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

10.1 A TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK FOGALMA

A fizikai és műszaki feladatokban a mennyiségek értékei általában nem egy, hanem több más mennyiség értékétől függenek.

A derékszögű paralelogramma A területe két, egymástól függetlenül változó változónak — a paralelogramma a és b oldalának — a függvénye:

$$A = ab.$$

Az ideális gáz V térfogata a p nyomásnak és T hőmérsékletnek a függvénye.

Az összefüggést az általános gáztörvény adja:

$$V = \frac{RT}{p} \quad (R = \text{konst}).$$

A derékszögű hasáb térfogata három, egymástól függetlenül változó változónak — az a , b , c éleknek — függvénye:

$$V = abc.$$

A váltakozó áram P teljesítménye az U effektív feszültségnek, I effektív áramerősségnek és a φ fázisszögnek függvénye:

$$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi.$$

10.1.1 A többváltozós függvény megadása

Kétváltozós függvények

Definíció. Két változó függvényének vagy kétváltozós függvénynek nevezzük azt a harmadik mennyiséget, amelynél az első két változó mennyiség minden egyes szóba jövő értékpárjának a harmadik mennyiség egy meghatározott értéke felel meg.

Azt a két változót, amelyek függetlenül változnak, független változónak vagy argumentumnak nevezzük.

A kétváltozós függvények definícióját a következőképpen is megadhatjuk. Legyen D az $(x; y)$ sík tetszőleges pontthalmaza. Ha a D halmaz bármely $(x; y)$ pontjához (eleméhez) hozzá van rendelve egy z valós szám, akkor a z függvényt a D halmazon értelmeztük. A függvénykapcsolatot így jelöljük:

$$z = f(x; y).$$

Ez a függvény megadása explicit alakban. Megadhatjuk a változók közötti kapcsolatot az

$$F(x; y; z) = 0$$

implicit alakban is, azaz az adott x, y értékpárnak az a z függvényérték felel meg, amely x -szel és y -nal együtt az egyenlőséget kielégíti.

A kétváltozós függvényeket az egyváltozós függvényekhez hasonlóan táblázattal vagy képlettel is megadhatjuk.

a) Táblázat segítségével a függvényeket úgy adják meg, hogy a független változók bizonyos értékpárjaira vonatkozóan feltüntetik a megfelelő függvényértékeket. Ez például a következő módon történhet. Legyenek x és y független változók, z a függvény. A táblázat felső sorában az egyik független változónak, mondjuk x -nek értékeit tüntetik fel, míg balról az első oszlopban a második független változónak, y -nak az értékeit.

A táblázat minden egyes rovatába az összetartozó x és y értékeknek megfelelő z értéket írjuk.

1. Adjuk meg táblázattal a $z = xy$ függvény néhány értékét:

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	-2	-3
1	1	2	3	4	5	-2	-3
2	2	4	6	8	10	-4	-6
3	3	6	9	12	15	-6	-9
4	4	8	12	16	20	-8	-12
5	5	10	15	20	25	-10	-15
-2	-2	-4	-6	-8	-10	4	6
-3	-3	-6	-9	-12	-15	6	9

2. Ilyen táblázat a logaritmustábla, ahol a függőleges oszlopba a numerus első két jegyét, a vízszintes oszlopba a numerus harmadik jegyét, a szám logaritmusának mantisszáját pedig a kettőnek megfelelő rovatba írják.

b) A kétváltozós függvényeknek is legfontosabb megadási módja az analitikus, vagyis a képlettel való megadás.

Ilyenek például a

$$z = ax + by + c, \quad z = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - y}}; \quad z = \sin \frac{x}{y}$$

képletek, amelyek segítségével z -t mint x és y függvényét meghatároztuk.

Helyettesítési érték. A $z = f(x; y)$ függvény helyettesítési értéke az a z érték, amely a változók meghatározott értékpárjának felel meg.

Ha a z függvény az $x = a$ és $y = b$ értékeknél c -vel egyenlő, a helyettesítési értéket így jelöljük

$$c = f(a; b).$$

Példák

1. $z = \sin(x + y)$ helyettesítési értéke az

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad y = -\frac{\pi}{6} \quad \text{pontban:}$$

$$z = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. A $z = \log_2 \frac{3x}{y}$ függvény helyettesítési értéke az $x = 1, y = 6$ pontban:

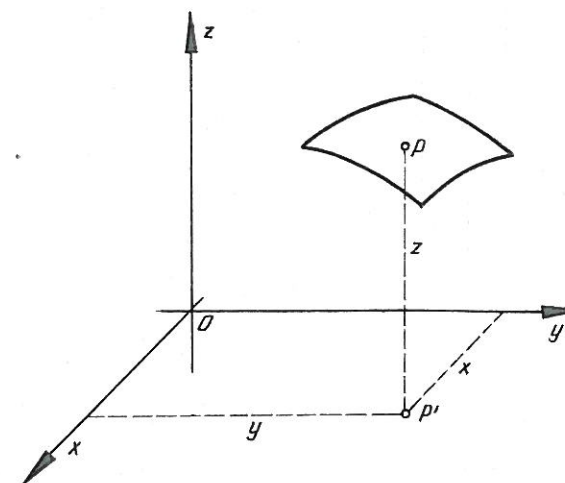
$$z = \log_2 \frac{3}{6} = \log_2 \frac{1}{2} = -1.$$

Geometriai ábrázolás. A kétváltozós függvényeket a térbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben ábrázoljuk (jobbrendszert használunk). Az $(x; y)$ sík minden egyes $P'(x; y)$ pontjához megszerkesztjük a térnek azt a P pontját, amelynek koordinátái

$$x; y \quad \text{és} \quad z = f(x; y) \quad (10.1 \text{ ábra}).$$

A függvényt ábrázoló pontok összessége felületet alkot.

Tehát a $z = f(x; y)$ függvény képe felület.



10.1 ábra

Többváltozós függvények

A kétváltozós függvények definíciójával analóg módon definiálhatjuk a kettőnél több független változójú függvényeket.

Definíció. n -változós függvény egy olyan változó mennyiség, amelynek egy meghatározott értékét n függetlenül változó mennyiség értékösszessége határozza meg.

Ha az n független változót $x_1, x_2, \dots, x_n$ -nel, a függvényt y -nal jelöljük, a függvény jele:

$$y = f(x_1; x_2; \dots; x_n).$$

Ha a függvény háromváltozós, így is jelöljük:

$$u = f(x; y; z).$$

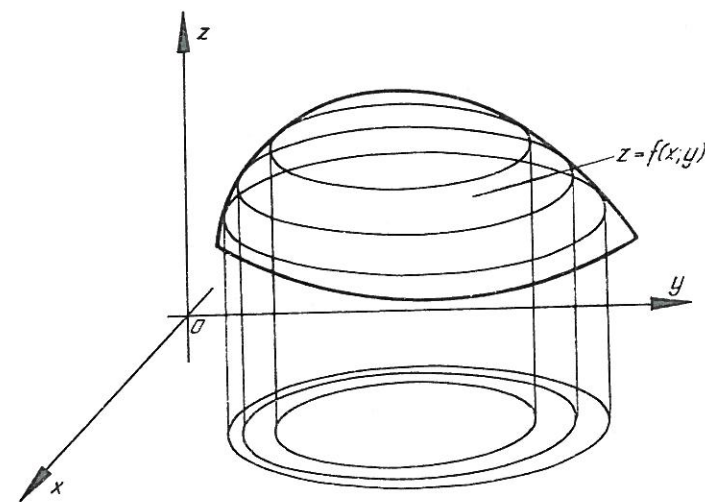
A kettőnél több változós függvények megadása táblázattal nehézkes. A többváltozós függvényeket rendszerint képletekkel adjuk meg.

10.1.2 Felületek jellemzése síkokkal való metszésvonalak segítségével

A kétváltozós függvények vizsgálatát megkönnyíti, ha olyan görbék segítségével jellemezzük azokat, amelyeket akkor kapunk, ha a felületet különböző síkokkal metsszük.

a) Messük a $z = f(x; y)$ felületet a z tengelyre merőleges, azaz $z = \text{konst.}$ síkokkal.

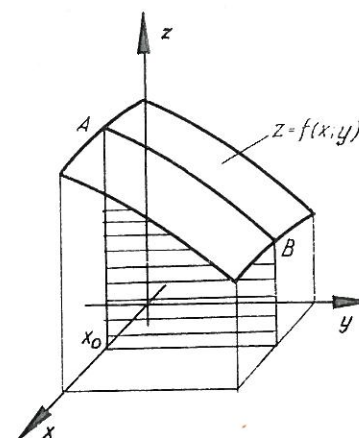
A $z = z_0$ síkkal kapott metszésvonal egyenlete: $z_0 = f(x; y)$.



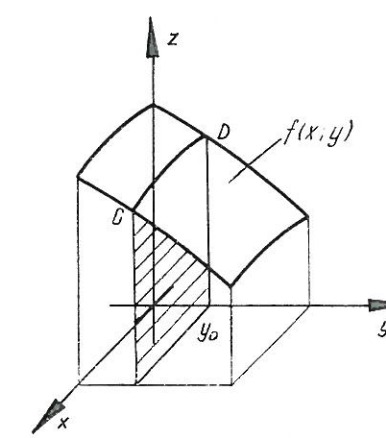
10.2 ábra

Vetítsük a metszésvonalakat merőlegesen az $(x; y)$ síkra! Az így kapott görbéket a felület *nívóvonalainak* vagy *szintvonalainak* nevezzük (10.2 ábra).

A z bizonyos értékeihez tartozó nívóvonalak összességét a $z = f(x; y)$ függvény *görbehálózatának* nevezzük.



10.3 ábra



10.4 ábra

b) Messük a $z = f(x; y)$ egyenletű felületet az $(y; z)$ síkkal párhuzamos $x = \text{konst.}$ síkokkal. A metszősík egyenlete:

$$x = x_0.$$

A metszetek x_0 különböző értékeinél a

$$z = f(x_0; y) \text{ egyváltozós függvények grafikonjai (10.3 ábra).}$$

c) A felületet az $(x; z)$ síkkal párhuzamos $y = \text{konst.}$ síkokkal metszve, a metszősík egyenlete:

$$y = y_0.$$

A $z = f(x; y)$ egyenletű felülettel való metszésvonalak egyenlete:

$$z = f(x; y_0) \quad (10.4 \text{ ábra}).$$

d) Messük a felületet a z tengelyen átmenő, az x tengellyel α szöget bezáró síkkal.

Ha az $(x; y)$ síkban felvesszük az origótól t távolságban levő pontot, P -t:

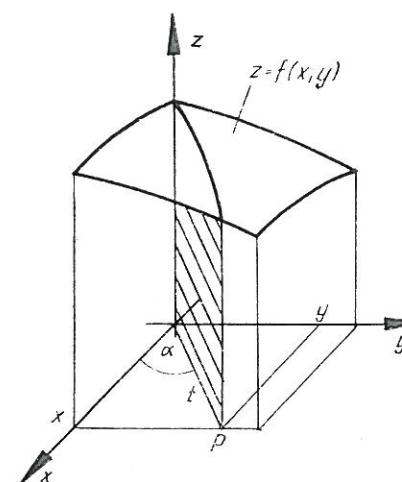
$$\left. \begin{aligned} x &= t \cos \alpha \\ y &= t \sin \alpha \end{aligned} \right\}.$$

Ez az egyenletrendszer a függőleges síknak és egyben az $(x; y)$ síkra való vetületének egyenlete. A felülettel való metszésvonal egyenlete:

$$z = f(t \cos \alpha; t \sin \alpha) = \varphi(t).$$

Adott α szög mellett tehát a metszésgörbe z értéke a t változó függvénye (10.5 ábra).

e) A metszősík párhuzamos a z tengellyel. Ha a sík átmegy az $(x_0; y_0)$ ponton, és az x ten-



10.5 ábra

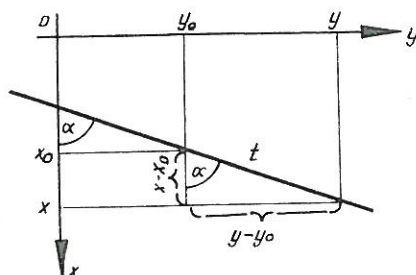
gellyel α szöget zár be, a síknak, illetve nyomvonalának paraméteres egyenletrendszere

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases} \quad (10.6 \text{ ábra}).$$

A $z = f(x; y)$ egyenletű felülettel való M_0M metszéspont egyenlete:

$$z = f(x_0 + t \cos \alpha; y_0 + t \sin \alpha) = q(t),$$

ahol z t -nek a függvénye (t a P pont távolsága P_0 -tól), x_0, y_0, α pedig állandók (10.7 ábra).



10.6 ábra

10.1.2.1 Felületek metszése síkokkal

Forgási paraboloid

$$z = x^2 + y^2.$$

$z = z_0$ síkokkal metszve a felületet:

$$x^2 + y^2 = z_0, \quad (z_0 > 0),$$

a metszetgörbék koncentrikus körök.

Ha $x = x_0$ síkkal metszünk, $z = x_0^2 + y^2$, a metszetgörbék parabolák, ha $y = y_0$ a metsző sík, $z = x^2 + y_0^2$, a metszetgörbék parabolák.

A metszetgörbe ugyancsak parabola, ha a felületet bármely függőleges síkkal metsszük.

Például az $x = t \cos \alpha$
 $y = t \sin \alpha$

egyenletrendszerű síkkal való metszet:

$$\begin{aligned} z &= t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha, \\ z &= t^2. \end{aligned}$$

A $z = x^2 + y^2$ egyenletű felületet — mivel a vízszintes síkokkal való metszetei körök, a függőleges síkokkal való metszetei parabolák — *forgási paraboloidnak* nevezzük (10.8 ábra).

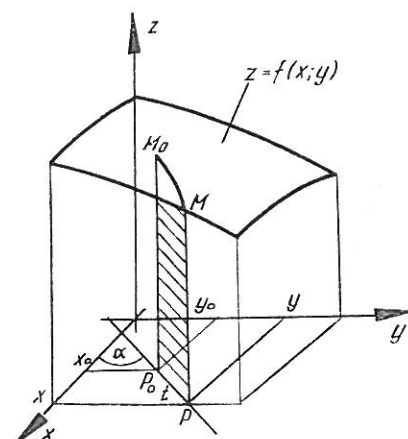
Síkfelület

Tekintsük az $(x$ -ben és y -ban) elsőfokú

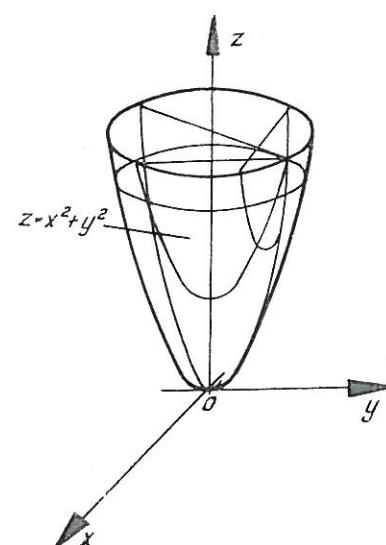
$$z = ax + by + c \quad \text{függvényt.}$$

A vektoralgebrából tudjuk, hogy a $z = ax + by + c$ egyenletű felület sík. E sík szintvonalai az

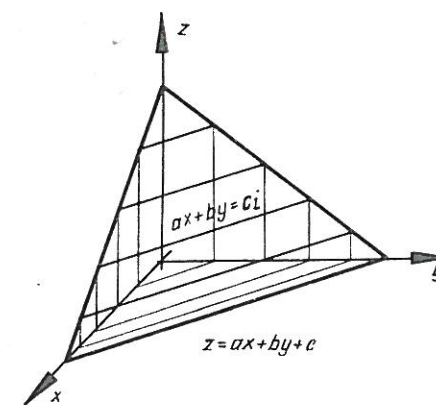
$$ax + by = c_i \quad (i = 0, \pm 1, \dots, \pm n)$$



10.7 ábra



10.8 ábra



10.9 ábra

egyenletű párhuzamos egyenesek (10.9 ábra).

Ha $a = 0, b = 0$, akkor a

$$z = c$$

sík párhuzamos az $(x; y)$ síkkal (10.10 ábra).

Ha $a \neq 0, b = 0$, akkor a sík egyenlete $z = ax + c$, a nívóvonalak az y tengellyel párhuzamosak, a sík párhuzamos az y tengellyel (10.11 ábra). Hasonlóan látható, hogy ha $a = 0, b \neq 0$, a sík az x tengellyel párhuzamos (10.12 ábra).

A *hiperbolikus paraboloid*

Vizsgáljuk a

$$z = cxy \quad \text{függvényt.}$$

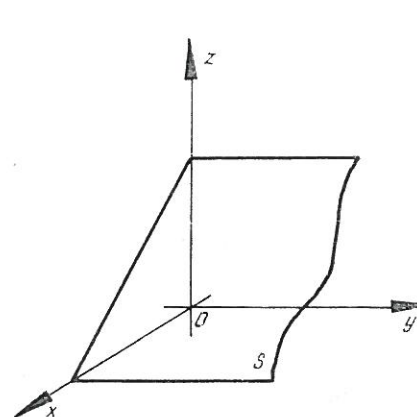
Ha $x = 0$, akkor $z = 0$, azaz az $(x; y)$ sík a felületet az y tengelyben metszi.

Ha $x = 1$, $z = cy$. Ha $x = 2$, $z = 2cy$.

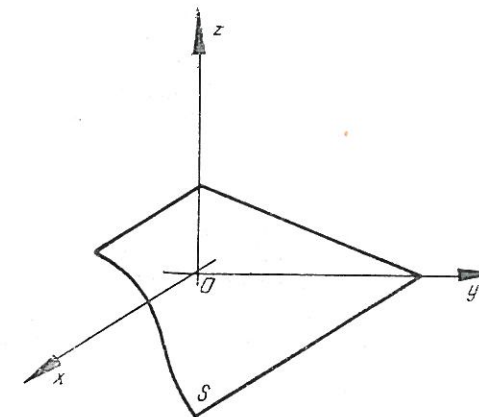
A szimmetria miatt

ha $y = 0$, $z = 0$,

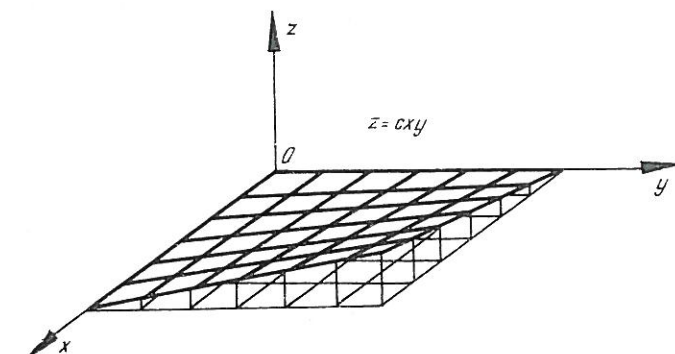
ha $y = 1$, $z = cx$, ha $y = 2$, $z = 2cx$.



10.11 ábra



10.12 ábra



10.13 ábra

Az $(x; z)$ és $(y; z)$ síkokkal párhuzamos síkok a felületet egyenesekben metszik, de ezek meredeksége egyre nő, tehát a felület nem sík (10.13 ábra).

Ha a felületet a $z = \text{konst.}$ síkokkal metsszük,

$$z = z_0 \text{ és } z = cxy \text{ metszete:}$$

$$z_0 = cxy, \text{ akkor } y = \frac{z_0}{cx},$$

a metszetgörbe egyenlőszárú hiperbola.

A felületet $y = x$ és $y = -x$ szögfelező síkokkal metszve, a metszetek a

$$z = cx^2 \text{ és } z = -cx^2 \text{ egyenletű parabolák.}$$

Messzük a $z = cxy$ egyenletű felületet a z tengelyen átmenő síkkal!

Ekkor $x = t \cos \alpha$, $y = t \sin \alpha$, és így

$$z = ct^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$z = \left(\frac{c}{2} \sin 2\alpha\right) t^2.$$

Ez parabola egyenlete. Ha $\alpha = 0$ és $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$, a metszet az x , illetve y tengely. Hason-

lóan kimutatható, hogy bármely függőleges síkkal metszve, a metszet parabola.

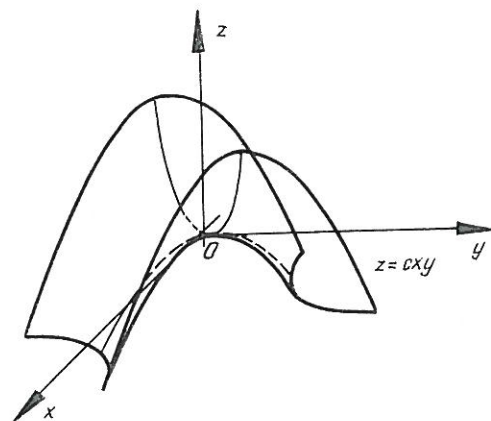
A $z = cxy$ nyereghez hasonlít, neve *hiperbolikus paraboloid* (nyeregfelület) (10.14 ábra).

Forgásfelületek

Forgassuk meg a $(t; z)$ síkban fekvő $z = f(t)$ egyenletű görbét a z tengely körül. A forgatás miatt valamennyi, a z tengelyen átmenő sík ugyanilyen görbét metssz ki a felületből, tehát egyenleteik:

$$z = f(t).$$

$$\text{Mivel } t = \sqrt{x^2 + y^2},$$



10.14 ábra

a forgásfelület egyenlete

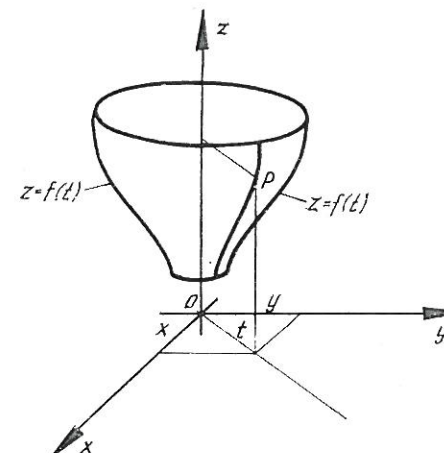
$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (10.15 \text{ ábra}).$$

Tehát a $z = f(t)$, illetve $z = f(x)$ vagy $z = f(y)$ egyenletű görbék forgatásával nyert felület egyenletét úgy állítjuk elő, hogy t , x , illetve y helyébe $\sqrt{x^2 + y^2}$ -et írunk.

Hasonlóan az x , illetve y tengelyeket forgástengelyeknek véve, a forgási felületek egyenlete:

$$x = f(\sqrt{y^2 + z^2});$$

$$y = f(\sqrt{x^2 + z^2}).$$



Példák

1. A $z = cxy$ ($x; z$) síkban fekvő parabolát a z tengely körül forgatva, a forgásfelület a

$$z = c(x^2 + y^2) \text{ egyenletű forgási paraboloid.}$$

2. A $(t; z)$ síkban fekvő, origó körüli a sugarú kör egyenlete:

$$t^2 + z^2 = a^2.$$

A z tengely körül forgatva a kört az

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ egyenletű gömbfelületet kapjuk.}$$

3. Forgassuk a

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ egyenletű ellipszist az } x \text{ tengely körül.}$$

z helyébe $\sqrt{z^2 + y^2}$ -et írva, a felület

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ egyenletű forgási ellipszoid.}$$

4. Határozzuk meg a z tengellyel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ szöget bezáró, az origón átmenő egyenes z tengely körüli forgatásával leírt kúpfelület egyenletét.

Az egyenes egyenlete a $(t; z)$ koordináta-rendszerben

$$z = \operatorname{tg} \alpha \cdot t.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = a \text{ jelöléssel}$$

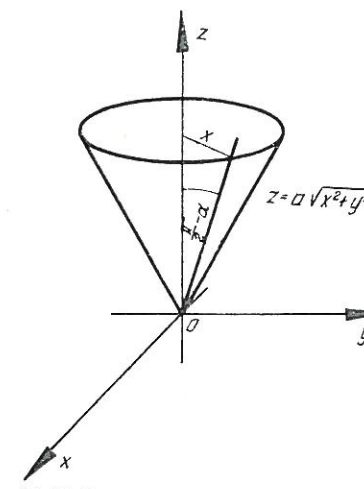
$$z = at.$$

A forgatás miatt $t = \sqrt{x^2 + y^2}$, a forgásfelület (10.16 ábra) egyenlete:

$$z = a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Hengerfelület

A $z = f(x)$ egyenletű felület hengerfelület, amelynek alkotói az y tengellyel párhuzamosak, vezérgörbéjének egyenlete pedig $z = f(x)$.



10.16 ábra

A felületet megkapjuk, ha az $(x; z)$ síkban fekvő $z = f(x)$ görbét az $(x; z)$ síkra merőlegesen, önmagával párhuzamosan *eltoljuk* (10.17 ábra).

Példa

A $z = ax^2 + bx + c$

olyan hengerfelület egyenlete, amelynek vezérgörbéje parabola.

Hasonlóan hengerfelületek a

$$z = f(y),$$

$$y = f(x)$$

egyenletű felületek.

Transzlációs felületek

A $z = f(x) + g(y)$

alakú egyenletek, amelyekben a függvény egy, csak x -től és egy, csak y -től függő függvény összege, transzlációs felületeket adnak.

A felületet megkapjuk, ha

a $z = g(y)$ egyenletű görbét a $z = f(x)$ egyenletű görbe mentén eltoljuk.

Ugyancsak megkapjuk a felületet, ha a $z = f(x)$ egyenletű görbét toljuk el a $z = g(y)$ egyenletű görbén.

Példa

Transzlációs felület a

$$z = x^2 - y^2 \quad \text{függvény képe.}$$

A felületet megkapjuk, ha a $z = x^2$ egyenletű görbét a $z = -y^2$ egyenletű görbe mentén eltoljuk.

Másodrendű felületek

Az egyváltozós függvényeknél az implicit függvényekre példaként a másodrendű görbék (kúpszeletek) egyenleteit tárgyaltuk. A másodrendű görbék egyenlete legfeljebb másodfokú tagokat, de legalább egy másodfokú tagot tartalmazott.

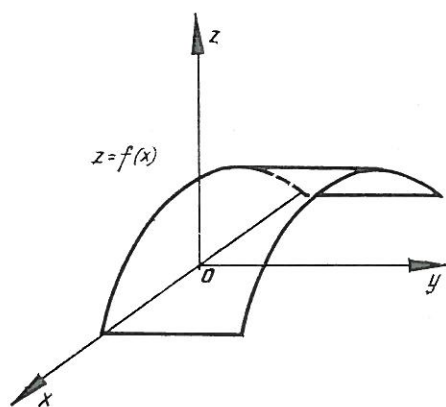
Analóg módon definiáljuk a *másodrendű felületeket*. Ezeknek a felületeknek hasonló szerepük van a felületek között, mint a kúpszeleteknek a síkgörbék között.

A másodrendű felületek egyenlete *legfeljebb másodfokú tagokat tartalmaz, de legalább egy másodfokú tag szerepel benne*. (Itt csak olyan másodrendű felületekkel foglalkozunk, amelyeknek tengelyei a koordinátatengelyekkel egybeesnek.)

Példák

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Az egyenlet jobb oldala 1, a bal oldalon az előjelek pozitívak. Ha a felületet a $z = \text{konst}$, $x = \text{konst}$, $y = \text{konst}$ síkokkal metsszük, a metszetgörbék ellipszisek. Valós ellipszist $|x| \leq a$; $|y| \leq b$; $|z| \leq c$ értékekre kapunk (10.18 ábra).



10.17 ábra

A felület neve *ellipszoid*.

Ha $a = c$ vagy $a = b$ vagy $b = c$, a felület forgási ellipszoid.

Ha $a = b = c = r$, a felület gömb.

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

A jobb oldalon 1, a bal oldalon két tag előjele pozitív, egy tagé negatív.

Ha a felületet a $z = \text{konst}$ síkokkal metsszük, a metszetgörbék ellipszisek, ha $x = \text{konst}$, illetve $y = \text{konst}$ síkokkal metsszük a felületet, a metszetgörbék hiperbolák (10.19 ábra).

A felület neve *egyköpenyű hiperboloid*.

Ha $a = b$, a felület forgási hiperboloid.

3. $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

A jobb oldalon 1, a bal oldalon két tag előjele negatív.

Ha a felületet a $z = \text{konst}$ síkokkal metsszük, a metszet ellipszis (ha $|z| < c$, az ellipszis nem valós). Ha a felületet az $x = \text{konst}$, $y = \text{konst}$ síkokkal metsszük, a síkmetszet hiperbola (10.20 ábra). A felület kétköpenyű hiperboloid. (Ha $a = b$, a felületet forgási hiperboloid.)

Hasonlóan az

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

egyenletű felület is kétköpenyű hiperboloid (10.21 ábra).

4. $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.$

a) p és q előjele egyenlő.

Ha a felületet az $x = \text{konst}$, $y = \text{konst}$ síkokkal metsszük, a metszetgörbék parabolák.

Ha a metszősík $z = \text{konst}$, a metszet ellipszis (pozitív p és q esetén csak $z > 0$ -ra kapunk valós ellipszist) (10.22 ábra); a felület *elliptikus paraboloid*, ha $p = q$, forgási paraboloid.

b) p és q előjele különböző.

Ha a felületet $x = \text{konst}$, $y = \text{konst}$ síkokkal metsszük, a metszetgörbék parabolák, ha $z = \text{konst}$ síkokkal metsszük, a metszetgörbék hiperbolák, a felület *hiperbolikus paraboloid* (10.23 ábra).

5. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$

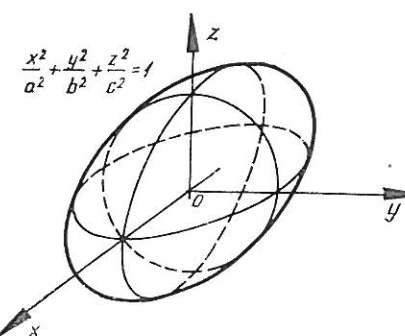
(a, b, c nem mind egyenlő előjelűek).

Az egyenletből

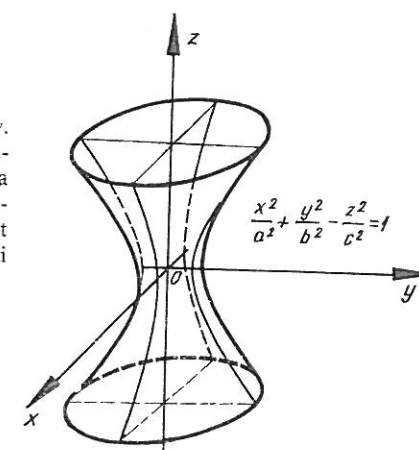
$$z^2 = -\frac{a}{c}x^2 - \frac{b}{c}y^2.$$

*Ilyen felület egyenlete például:

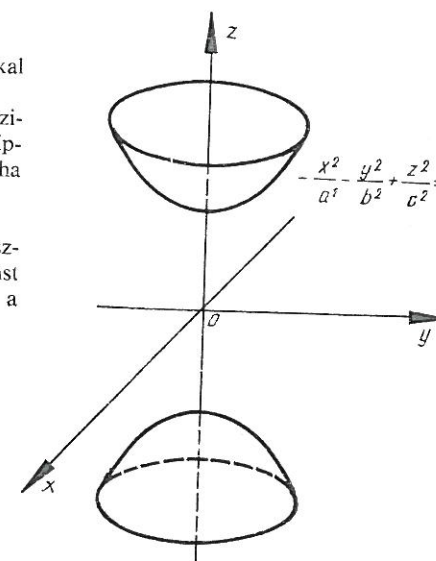
$$z^2 = x^2 + 3y^2.$$



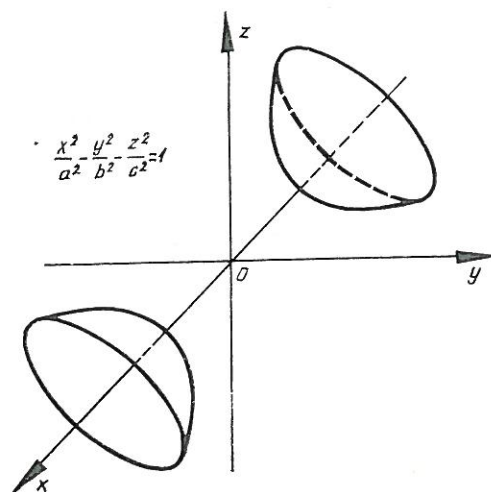
10.18 ábra



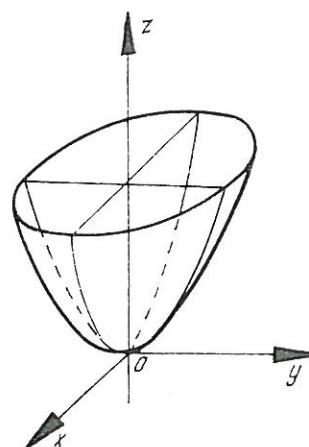
10.19 ábra



10.20 ábra



10.21 ábra



10.22 ábra

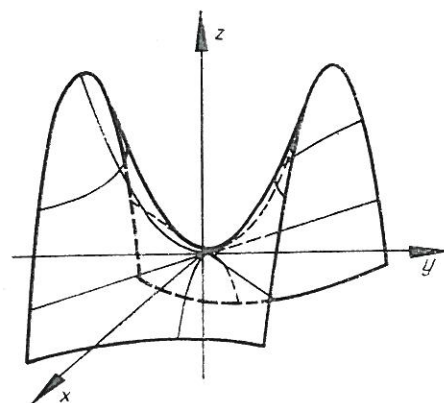
Ha a felületet a $z = \text{konst}$ síkkal metsszük, a metszet ellipszis.

Ha $x = \text{konst}$, illetve $y = \text{konst}$ síkkal metsszük, a metszet hiperbola, ha $x = 0, y = 0$, a metszet elfajuló hiperbola (egyenespár).

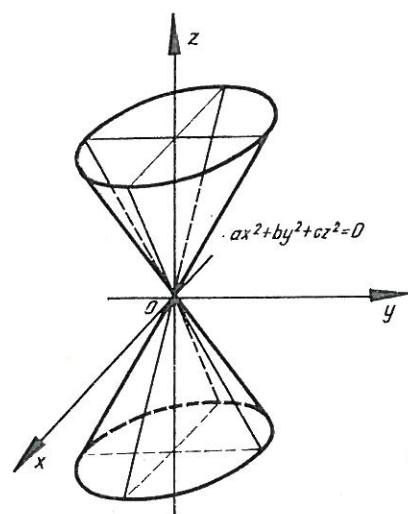
Ha a felületet a z tengelyen átmenő síkkal metsszük, a metszet egyenespár, ha pedig a z tengellyel párhuzamos síkkal, a metszet hiperbola.

Az $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ egyenletű felület kúp (10.24 ábra).

Ha $a = b$, pl. $z^2 = x^2 + y^2$, a felület körkúp.



10.23 ábra



10.24 ábra

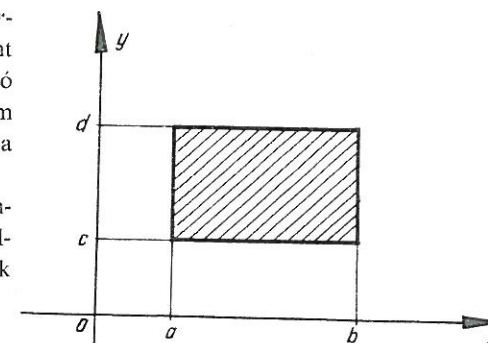
10.1.3 A kétváltozós függvények értelmezési tartománya

Síkbeli ponthalmaz. Tartomány

Definíció. Egy síkbeli P pont környezete minden olyan kör belseje, amelynek P a középpontja. Ha egy adott síkbeli ponthalmaz valamely pontjának van olyan környezete, amely maga is a ponthalmazban van, akkor a pont a ponthalmaz *belső* pontja. Az olyan ponthalmazt, amely csak belső pontokból áll, *nyílt halmaznak* nevezzük.

Definíció. Valamely síkbeli halmaz *határpontjának* nevezünk egy pontot, ha a pont minden környezetében egyaránt található a halmazhoz tartozó és a halmazhoz nem tartozó pont. A határpontok összessége a halmaz határa.

Zártnak nevezünk egy halmazt, ha minden határpontját tartalmazza. Egyes halmazokat egyenlőtlenségekkel adhatunk meg.

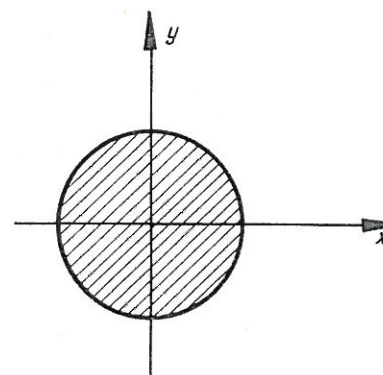


10.25 ábra

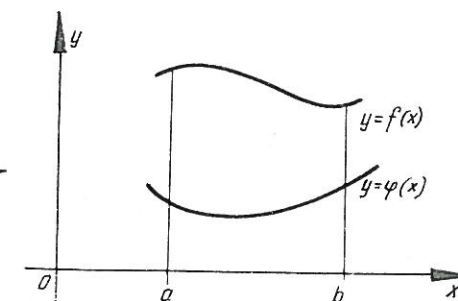
Példák

1.
$$\left. \begin{aligned} a < x < b \\ c < y < d \end{aligned} \right\} \text{ téglalap alakú nyílt halmaz.}$$
2.
$$\left. \begin{aligned} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{aligned} \right\} \text{ téglalap alakú zárt halmaz (10.25 ábra),}$$
3. $x^2 + y^2 < r^2$ kör alakú nyílt halmaz,
4. $x^2 + y^2 \leq r^2$ kör alakú zárt halmaz (10.26 ábra).
5. Az
$$\left. \begin{aligned} a \leq x \leq b \\ \varphi(x) \leq y \leq f(x) \end{aligned} \right\}$$

egyenlőtlenségek olyan zárt halmazt jelentenek, amelyet az $x = a, x = b$ egyenletű egyenesek és az $y = \varphi(x)$, továbbá $y = f(x)$ egyenletű folytonos görbék határolnak (10.27 ábra).



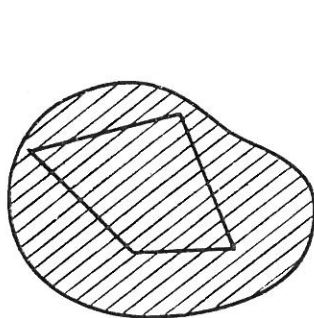
10.26 ábra



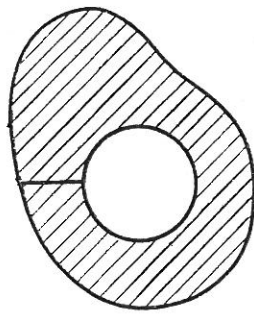
10.27 ábra

Összefüggő halmazok. Egy halmaz összefüggő, ha bármely két pontja összeköthető olyan törött vonallal, amely teljes egészében a halmazban halad. Az előbb megadott halmazok összefüggő halmazok. Két közös pont nélküli kör belseje nem alkot összefüggő halmazt. Egyszeresen összefüggő az a halmaz, amely tartalmazza bármely benne haladó zárt törött vonal által határolt halmazt.

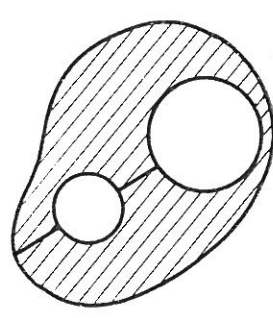
A 10.28 ábra egyszeresen, a 10.29 ábra kétszeresen, a 10.30 ábra háromszorosan összefüggő



10.28 ábra



10.29 ábra



10.30 ábra

halmazt mutat. Ha az utóbbi kettőt a megjelölt vonalak mentén szétvágjuk, egyszeresen összefüggő halmazokat kapunk.

Tartomány. A továbbiakban tartományon síkbeli egyszeresen összefüggő nyílt halmazt értünk.

Értelmezési tartomány. Valamely $z = f(x; y)$ függvény értelmezési tartománya az $(x; y)$ sík azon pontjainak halmaza, amelyben a függvény értelmezve van.

Példák

1. A $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ függvény értelmezési tartománya az $x^2 + y^2 \leq r^2$ kör alakú zárt halmaz.

2. A $z = \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$ függvény értelmezési tartománya az $x^2 + y^2 < r^2$ tartomány.

3. $z = \frac{1}{y-x}$.

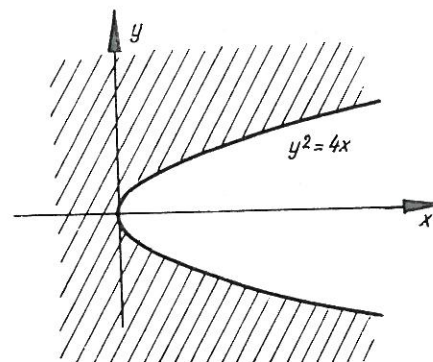
A függvény értelmezési tartománya az $(x; y)$ sík, kivéve az $y = x$ egyenest.

4. $z = \ln(y^2 - 4x)$.

A függvény ott van értelmezve, ahol

$$y^2 > 4x.$$

Ábrázolva az $y^2 = 4x$ egyenletű parabolát, az értelmezési tartomány az $(x; y)$ síknak az a nyílt részhalmaza, amelyet a parabola határol, és nem tartalmazza az $x > 0, y = 0$ félegyenest (10.31 ábra).



10.31 ábra

10.1.4 Többváltozós függvények határértéke és folytonossága

Kétváltozós függvények határértéke

Definíció. A $z = f(x; y)$ függvény határértéke az $(a; b)$ helyen az A szám, azaz

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x; y) = A,$$

ha megadva bármilyen kis ε pozitív számot, ehhez van olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$, hogy

$$|f(x; y) - A| < \varepsilon,$$

ha $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$.

Gyakran használjuk a $z = f(x; y)$ jelölés helyett a

$z = f(P)$ jelölést, ahol

P az $(x; y)$ pont.

A $z = f(P)$ függvény határértéke a Q pontban a véges A szám, azaz

$$\lim_{P \rightarrow Q} f(P) = A,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$, hogy

$$|f(P) - A| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \overline{PQ} < \delta.$$

Könnyű bizonyítani a következő tételt.

Tétel.

$$\lim_{P \rightarrow Q} f(P) = A,$$

akkor és csak akkor, ha bármely $P_n \rightarrow Q$ pontsorozat esetén:

$$f(P_n) \rightarrow A.$$

A határérték létezésének fontos feltétele, hogy a határérték független legyen a határátmenet módjától.

Példák

1. $f(x; y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

A függvény az origóban nincs értelmezve.

Az $y = ax$ egyenes mentén közeledve az origóhoz

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x; ax) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 ax}{x^4 + a^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x^2 + a^2} = 0.$$

Az $y = x^2$ parabola mentén közeledve az origóhoz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x; x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

A határérték a parabola mentén más, mint az egyenes mentén, a határérték-kritériumnak a függvény tehát az origóban nem tesz eleget, nincs véges határértéke.

$$2. \quad z = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

A függvény az origóban nincs értelmezve. Határértéke azonban létezik, és ez 0.

$$\text{Ugyanis} \quad |z| = |x| |y| \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| |y| < \varepsilon,$$

$$\text{hacsak} \quad |x| < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{és} \quad |y| < \sqrt{\varepsilon}, \quad \text{és ez bekövetkezik, mert} \\ (x-0)^2 + (y-0)^2 \leq \varepsilon, \quad \text{azaz}$$

$$a \quad \delta = \sqrt{\varepsilon} \quad \text{választás megfelel.}$$

Kétváltozós függvények folytonossága

Definíció. A $z = f(x; y)$ függvény az $(a; b)$ helyen folytonos, ha ott értelmezve van, és helyettesítési értéke megegyezik a határértékével.

Példa

$$z = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, y = 0. \end{cases}$$

A függvény helyettesítési értéke az origóban 0. A határérték kiszámítása céljából közeledjünk az origóhoz az origón átmenő egyenesekkel. Írjuk ezek egyenletét paraméteres alakban:

$$\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases} \quad (10.32 \text{ ábra}).$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin \alpha \cos \alpha}{t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

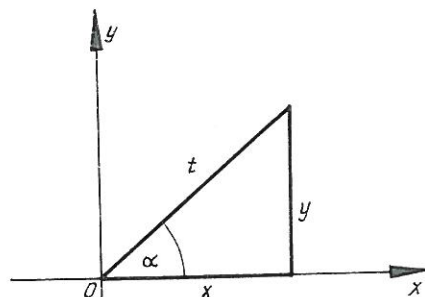
A határérték α különböző értékeinél más és más.

A függvény csak az x és y tengelyek mentén folytonos, mert ekkor $\alpha = 0$, illetve $\frac{\pi}{2}$, és a határérték nulla. A függvény tehát a folytonosság definíciója értelmében az origóban nem folytonos.

A kétváltozós függvényekéhez hasonló módon definiálhatjuk a többváltozós függvények határértékét és folytonosságát.

Az egyváltozós függvényekre vonatkozó tételekhez hasonlóan érvényesek a kétváltozós függvényekre a következő tételek.

I. Tétel. Ha egy kétváltozós függvény egy korlátos, zárt halmazon folytonos, akkor a halmazban van olyan pont, ahol a függvény felveszi értékészletének maximumát, és van olyan pont, ahol felveszi értékészletének minimumát. (A függvénynek van abszolút maximuma és abszolút minimuma.)



10.32 ábra

Definíció. A $z = f(x; y)$ függvény egyenletesen folytonos a H halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$, hogy

$$|f(x_2; y_2) - f(x_1; y_1)| < \varepsilon,$$

ha $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ a H halmaz két olyan pontja, amelyre

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta.$$

II. Tétel. Korlátos, zárt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos.

III. Tétel. Legyen $f(x; y)$ egy összefüggő tartományban folytonos függvény. Ha a tartomány két $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ pontjához tartozó függvényértékek

$$c_1 = f(x_1; y_1) \quad \text{és} \quad c_2 = f(x_2; y_2),$$

akkor a függvény a c_1 és c_2 közé eső bármely c értéket a tartományban legalább egy pontban felvesz.

A tételek bizonyítására nem térünk ki.

10.2 A TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLHÁNYADOSAI ÉS DIFFERENCIÁLJAI

10.2.1 Parciális differenciálhányadosok

Legyen adott a $z = f(x; y)$ kétváltozós függvény. Tekintsük a $z = f(x; y)$ függvényt rögzített y_0 mellett csupán x függvényének.

$$\text{Definíció. A } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}$$

határérték az $f(x; y)$ függvény x szerinti *parciális differenciálhányadosa* vagy *parciális deriváltja* az $(x_0; y_0)$ pontban.

Az x szerinti parciális derivált jelölése:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x} = f'_x(x_0; y_0) = z'_x(x_0; y_0) = \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{(x_0; y_0)}.$$

A $\frac{\partial z}{\partial x}$ szimbólumot z per x -nek olvassuk. A ∂ jel az egyváltozós függvények deriválásától való megkülönböztetésül szolgál.

Tekintsük a $z = f(x; y)$ függvényt rögzített x_0 mellett csupán y függvényének.

$$\text{Definíció. A } \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}$$

határérték az $f(x; y)$ függvény y szerinti *parciális differenciálhányadosa* vagy *parciális deriváltja* az $(x_0; y_0)$ pontban.

Az y szerinti parciális derivált jelölése:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y} = f'_y(x_0; y_0) = z'_y(x_0; y_0) = \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{(x_0; y_0)}.$$

A parciális differenciálhányadosok geometriai értelmezése. Legyen adott a $z = f(x; y)$ függvény. Tekintsük a függvényt ábrázoló felületet. A felület $(x_0; y_0; z_0)$ pontján az y tengelyre merőleges $y = y_0$ síkot fektetünk. Ez a felületből a

$z = f(x; y_0)$ egyenletű görbét metszi ki (10.33 ábra AB görbe).

(z csak x -től függ, mert y_0 konstans.)

A görbe érintőjének iránytangense az $(x_0; y_0)$ helyen

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}, \quad 10.33 \text{ ábra}$$

a $z = f(x; y)$ függvény x szerinti parciális differenciálhányadosa vagy parciális deriváltja. Messük a $z = f(x; y)$ egyenletű felületet a $P_0(x_0; y_0; z_0)$ pontban az x tengelyre merőleges $x = x_0$ síkkal. A sík a felületből a $z = f(x_0; y)$ egyenletű görbét metszi ki (10.33 ábra CD görbe). A görbe érintőjének iránytangense az $(x_0; y_0)$ pontban:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y},$$

a $z = f(x; y)$ függvény y szerinti parciális differenciálhányadosa vagy parciális deriváltja az $(x_0; y_0)$ pontban.

Vegyük a parciális deriváltakat a rögzített $P_0(x_0; y_0)$ pont helyett a változó $P(x; y)$ pontban. A parciális deriváltakat így jelöljük:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x} = f'_x = z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x},$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y} = f'_y = z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x; y)}{\partial y}.$$

A $z = f(x; y)$ függvény x szerinti parciális deriváltját megkapjuk, ha y -t konstansnak tekintjük, és a függvényt x szerint deriváljuk.

A $z = f(x; y)$ függvény y szerinti parciális deriváltját megkapjuk, ha x -et konstansnak tekintjük, és a függvényt y szerint deriváljuk.

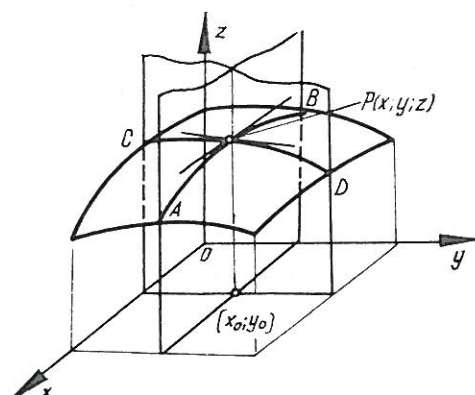
Példák

1. Határozzuk meg a

$z = 3x^2y + xy^2$ függvény parciális deriváltjait!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy + y^2 \quad (y\text{-t konstansnak vesszük}).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + x \cdot 2y \quad (x\text{-et konstansnak vesszük}).$$



2. Képezzük a

$z = x^y$ függvény parciális differenciálhányadosait!

Ha x szerint differenciálunk, akkor y konstansnak vehető, és így hatványfüggvényt differenciálunk.

$$\text{Ezért} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}.$$

Ha y szerint differenciálunk, x konstans és y változó, tehát exponenciális függvényt differenciálunk.

$$\text{Ezért} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Határozzuk meg a parciális deriváltakat a $P_0(2; 1)$ pontban:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{(2; 1)} = 1 \cdot 2^0 = 1,$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{(2; 1)} = 2 \cdot \ln 1 = 0.$$

3. $z = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

*

Többváltozós függvények parciális deriváltjai. Hasonló módon definiálhatók a kettőnél több változójú függvények parciális deriváltjai.

Definíció. Az $y = f(x_1; x_2; \dots; x_i; \dots; x_n)$ függvény x_i szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1; x_2; \dots; x_i + \Delta x_i; \dots; x_n) - f(x_1; x_2; \dots; x_i; \dots; x_n)}{\Delta x_i}.$$

Tétel. Ha a $z = f(x; y)$ függvénynek létezik egy bizonyos tartományban az x és y szerinti parciális deriváltja, és azok korlátosak, akkor ott a függvény folytonos.

Bizonyítás. A feltevés értelmében

$$|f'_x(x; y)| \leq M \quad \text{és} \quad |f'_y(x; y)| \leq M \quad (M > 0).$$

Legyen Δx és Δy két, zérustól különböző növekmény.

Írjuk fel az $f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$ függvénynövekményt a következő alakban:

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) = [f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x + \Delta x; y)] + [f(x + \Delta x; y) - f(x; y)].$$

Alkalmazzuk a zárójelekben lévő függvénynövekményekre a Lagrange-féle középértéktételt (7.1.6). A különbség így írható:

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) = \Delta y f'_y(x + \Delta x; y + \theta_1 \Delta y) + \Delta x f'_x(x + \theta_2 \Delta x; y),$$

ahol θ_1 és θ_2 két alkalmas szám 0 és 1 között.

A feltétel szerinti parciális deriváltak, f'_x és f'_y korlátosak, így

$$|f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y)| \leq M(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

Ha $|\Delta x| \rightarrow 0$ és $|\Delta y| \rightarrow 0$, akkor a jobb oldal tetszőleges kis ε számnál kisebbé tehető. Így a bal oldal is.

$$|f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y)| < \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy a függvény folytonos.

Magasabb rendű parciális deriváltak. A parciális deriváltak parciális deriváltjait is képezhetjük. A két elsőrendű deriváltból így módon négy másodrendű derivált származtatható. Ezeket így jelöljük:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx} = z''_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = z''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy} = z''_{yy}.$$

Megjegyzés. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ olvasva: dé duo z per dé x négyzet,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ olvasva: dé duo z per dé y dé x és így tovább.

Példa

Képezzük a $z = f(x; y) = x^2 y^3 - 3xy^4$ függvény másodrendű parciális deriváltjait.

$$f'_x = 2xy^3 - 3y^4, \quad f'_y = 3x^2 y^2 - 12xy^3,$$

$$f''_{xx} = 2y^3, \quad f''_{xy} = 6xy^2 - 12y^3,$$

$$f''_{yy} = 6x^2 y - 36xy^2, \quad f''_{yx} = 6xy^2 - 12y^3.$$

*

A példában feltűnik, hogy $f''_{xy} = f''_{yx}$, azaz a vegyes másodrendű deriváltak megegyeznek. Ez nem véletlen. Érvényes a következő tétel.

Tétel. Ha az f'_x, f'_y parciális deriváltak az $(x; y)$ pont valamely környezetében folytonosak és f''_{xy} és f''_{yx} az $(x; y)$ helyen folytonosak, akkor ebben a pontban.

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

A tétel azt mondja ki, hogy a deriváltak folytonossága esetén a másodrendű vegyes parciális deriváltak megegyeznek, azaz értékük független a deriválás sorrendjétől.

Bizonyítás. Legyenek Δx és Δy nullától különböző értékek, és tekintsük a következő kifejezést:

$$u = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y+\Delta y) - f(x+\Delta x; y) + f(x; y).$$

Ezt a kifejezést kétféleképpen alakítjuk át. Először x -et tekintjük változónak. Bevezetve a $\varphi(x) = f(x; y+\Delta y) - f(x; y)$ kifejezést, az u függvény így írható:

$$u = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x).$$

Alkalmazzuk a jobb oldalra a Lagrange-féle középértéktételt!

$$u = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \Delta x \varphi'(x + \theta_1 \Delta x),$$

ahol $0 < \theta_1 < 1$.

Viszont

$$\varphi'(x) = f'_x(x; y+\Delta y) - f'_x(x; y).$$

Ennek az egyenletnek jobb oldalára újra alkalmazva a középértéktételt:

$$\varphi'(x) = f'_x(x; y+\Delta y) - f'_x(x; y) = \Delta y f''_{xy}(x; y + \theta_2 \Delta y),$$

ahol $0 < \theta_2 < 1$.

Így

$$u = \Delta x \cdot \Delta y f''_{xy}(x + \theta_1 \Delta x; y + \theta_2 \Delta y).$$

Másodszor y -t tekintjük változónak. Most bevezetve a

$$\psi(y) = f(x+\Delta x; y) - f(x; y) \quad \text{kifejezést:}$$

$$u = \psi(y+\Delta y) - \psi(y).$$

A középértéktételt alkalmazva:

$$u = \psi(y+\Delta y) - \psi(y) = \Delta y \psi'(y + \theta'_1 \Delta y),$$

ahol $0 < \theta'_1 < 1$.

Viszont

$$\psi'(y) = f'_y(x+\Delta x; y) - f'_y(x; y).$$

Ez pedig a középértéktétellel átalakítva:

$$\psi'(y) = \Delta x f''_{yx}(x + \theta'_2 \Delta x; y) \quad (0 < \theta'_2 < 1).$$

$\psi'(y)$ ezen alakjával az u függvény így írható

$$u = \Delta x \Delta y f''_{yx}(x + \theta'_2 \Delta x; y + \theta'_1 \Delta y).$$

Az u -ra kapott kétféle kifejezést egyenlővé téve, és $\Delta x \Delta y$ -nal átosztva:

$$f''_{xy}(x + \theta_1 \Delta x; y + \theta_2 \Delta y) = f''_{yx}(x + \theta'_2 \Delta x; y + \theta'_1 \Delta y).$$

Ha $\Delta x \rightarrow 0$ és $\Delta y \rightarrow 0$, akkor f''_{xy} és f''_{yx} folytonossága miatt

$$f''_{xy}(x; y) = f''_{yx}(x; y).$$

A másodrendű deriváltak differenciálásával létrehozhatók a harmad, negyed, ... n -edrendű parciális deriváltak. A deriváltak folytonosságát feltételezve itt is igaz, hogy a derivált értéke független a differenciálás sorrendjétől. Például

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx}.$$

Példák

1. Írjuk fel a

 $z = e^{2x} \sin y - x \ln y$ függvény másodrendű parciális deriváltjait!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x} \sin y - \ln y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x} \cos y - \frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4e^{2x} \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2e^{2x} \cos y - \frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^{2x} \sin y + \frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 2e^{2x} \cos y - \frac{1}{y}.$$

2. Igazoljuk, hogy a

 $z = e^x \cos y$ függvény kielégíti a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Laplace-féle differenciálegyenletet!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ és } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ kifejezését a Laplace-féle egyenlet bal oldalába helyettesítve:}$$

$$e^x \cos y - e^x \cos y = 0.$$

10.2.2 A teljes differenciál

Legyen adott a kétváltozós $z = f(x; y)$ függvény, amelynek f'_x és f'_y parciális deriváltjai folytonosak.

Az $(x_0; y_0)$ és $(x; y)$ pontok közötti távolságnak megfelelő függvény-növekmény:

$$\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0).$$

A Δx és Δy növekményekkel:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0).$$

A kifejezést írjuk a következő alakban:

$$\Delta z = [f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0 + \Delta y)] + [f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)].$$

Mindkét szögletes zárójelben levő kifejezésre alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt.

$$\Delta z = \Delta x f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \Delta y) + \Delta y f'_y(x_0; y_0 + \theta_2 \Delta y)$$

(ahol θ_1 és θ_2 0 és 1 közötti értékek).

A feltétel szerint a parciális deriváltak folytonosak. Ezért

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0; y_0) + \varepsilon_1,$$

$$f'_y(x_0; y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0; y_0) + \varepsilon_2,$$

ahol $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ és $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, ha $\Delta x \rightarrow 0$ és $\Delta y \rightarrow 0$.

Ezeket az értékeket Δz -be helyettesítve:

$$\Delta z = f'_x(x_0; y_0) \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

$$(\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \text{ ha } \Delta x \rightarrow 0 \text{ és } \Delta y \rightarrow 0).$$

Δz kifejezésben Δx -től és Δy -től csak az ε_1 és ε_2 értékek függenek, a parciális deriváltak függetlenek Δx és Δy értékétől.

Definíció. A kétváltozós $z = f(x; y)$ függvény az $(x_0; y_0)$ helyen akkor differenciálható, ha található olyan Δx -től és Δy -től független A és B mennyiség, hogy

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y,$$

amelyben $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ esetén $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ és $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

Könnyen belátható, hogy A és B az $f(x; y)$ függvény $(x_0; y_0)$ helyen vett parciális deriváltjaival egyenlő.

Bebizonyítottuk tehát a következő tételt.

Tétel. Ha valamely helyen f'_x és f'_y létezik és folytonos, akkor ott $z = f(x; y)$ differenciálható.

Ha Δz parciális deriváltakkal felírt értékéből az ún. hibatagot elhagyjuk, a véges növekményre a következő értéket vehetjük:

$$\Delta z \approx f'_x(x_0; y_0) \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \Delta y.$$

E képlet segítségével kis Δx és Δy változásoknál közelítőleg kiszámíthatjuk a Δz változást.

$z = f(x; y)$ teljes vagy totális differenciálját megkapjuk, ha Δx és Δy helyébe a dx és dy differenciálokat írjuk.

Definíció. Az $f(x; y)$ függvény teljes differenciálja az $(x_0; y_0)$ pontban:

$$dz = f'_x(x_0; y_0) dx + f'_y(x_0; y_0) dy.$$

Vagy a változó $(x; y)$ helyet véve

$$dz = f'_x(x; y) dx + f'_y(x; y) dy.$$

A formulát röviden így is írjuk

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Többváltozós függvények teljes differenciálja

Definíció. Ha $z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, a teljes differenciál:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n.$$

Példa

Mennyit változik az $r = 5$ cm sugarú, 10 cm magasságú kúp köbtartalma, ha sugara 0,1 cm-rel, magassága 0,2 cm-rel változik?

$$z = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{2r \cdot \pi \cdot m}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial m} = \frac{r^2 \cdot \pi}{3}$$

$$dz = \frac{2r \cdot \pi \cdot m}{3} dr + \frac{r^2 \cdot \pi}{3} dm,$$

$$dz = \frac{\pi}{3} (2rm dr + r^2 dm).$$

Mivel $r = 5$, $m = 10$, $dr = 0,1$, $dm = 0,2$,

$$dz = \frac{\pi}{3} (2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 0,1 + 5^2 \cdot 0,2),$$

$$dz = \frac{\pi}{3} (10 + 5) = \frac{15\pi}{3} = 5\pi.$$

A térfogatváltozás közelítőleg $5\pi \text{ cm}^3$.

10.2.2.1 Hibaszámítás

A teljes differenciál segítségével való hibaszámítás a fizikai, műszaki mérések során a hibanagyság meghatározásának igen fontos módszere.

Fejezze ki a $z = f(x; y)$ képlet a z fizikai mennyiség függését a mérés közvetlen tárgyát képező x és y mennyiségektől. Ha az x mennyiséget Δx hibával mértük, az y -t pedig Δy hibával, akkor a képlet z értékét is hibával adja meg. Jelöljük ezt a hibát Δz -vel. Ha a mérési hibák elég kicsinyek, akkor

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Ha a mérés hibájának abszolút értéke $|\Delta z|$, z tényleges értéke $z - |\Delta z|$ és $z + |\Delta z|$ értékek között van.

Az abszolút értékekre vonatkozó egyenlőtlenségek (1.3) szerint:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\text{Így} \quad |\Delta z| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \cdot |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \cdot |\Delta y|.$$

Példák

1. Mennyi egy bikonvex lencse fókusz távolsága és a fókusz távolság kiszámításakor elkövetett hiba, ha egy mérésnél a tárgy távolság $t = 40$ cm, leolvasásának hibája $\Delta t = \pm 0,1$ cm, a képtávolság $k = 120$ cm, leolvasásának hibája $\Delta k = \pm 2$ cm?

A lencse fókusz távolsága az

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \quad \text{képletből:}$$

$$f = \frac{tk}{t+k}.$$

$$f = \frac{40 \cdot 120}{160} = 30 \text{ cm.}$$

A fókusz távolság abszolút hibáját a következőképpen becsülhetjük:

$$|\Delta f| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |\Delta t| + \left| \frac{\partial f}{\partial k} \right| |\Delta k|,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{k(t+k) - tk}{(t+k)^2} = \frac{k^2}{(t+k)^2} = \frac{120^2}{160^2} = \frac{9}{16} = 0,563,$$

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \frac{t(t+k) - tk}{(t+k)^2} = \frac{t^2}{(t+k)^2} = \frac{40^2}{160^2} = \frac{1}{16} = 0,063.$$

Az abszolút hiba korlátja:

$$|\Delta f| \leq 0,563 \cdot 0,1 + 0,063 \cdot 2 = 0,18 \text{ cm.}$$

Tehát a fókusz távolság f értéke:

$$f - |\Delta f| \quad \text{és} \quad f + |\Delta f|, \quad \text{azaz}$$

29,82 és 30,18 cm között van.

A relatív hiba korlátja

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| \leq \frac{0,18}{30} = 0,006.$$

A százalékos hiba korlátja

$$p \leq \left| \frac{\Delta f}{f} \right| \cdot 100 \leq 0,6\%.$$

2. Határozzuk meg két fontos speciális függvény, a szorzat és a hányados relatív hibáját általánosan.

$$z = x \cdot y.$$

$$z = \frac{x}{y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

$$|\Delta z| \leq |y| \cdot |\Delta x| + |x| \cdot |\Delta y|.$$

$$|\Delta z| \leq \left| \frac{1}{y} \right| |\Delta x| + \left| \frac{x}{y^2} \right| |\Delta y|.$$

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| \leq \frac{|y| |\Delta x|}{|xy|} + \frac{|x| |\Delta y|}{|xy|}.$$

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| \leq \frac{\left| \frac{1}{y} \right| |\Delta x|}{\left| \frac{x}{y} \right|} + \frac{\left| \frac{x}{y^2} \right| |\Delta y|}{\left| \frac{x}{y} \right|}.$$

$$\frac{|\Delta z|}{|z|} \leq \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|}.$$

$$\frac{|\Delta z|}{|z|} \leq \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|}.$$

$$\frac{|\Delta x|}{|x|} \quad \text{és} \quad \frac{|\Delta y|}{|y|} \quad \text{éppen } x \text{ és } y \text{ viszonylagos hibája.}$$

Eredményünk röviden így fejezhető ki:

Szorzat relatív hibája kisebb vagy egyenlő, mint a tényezők relatív hibáinak összege. Tört relatív hibája kisebb vagy egyenlő, mint a számláló és nevező relatív hibáinak összege.

3. A képlet alkalmazásaként számítsuk ki, milyen pontossággal tudjuk az R ellenállású vezetõn átfutó I erősségű áram által t idő alatt termelt energiát kiszámítani.

Az energia $W = I^2 R t$ joule.

Legyenek a mérési adatok:

$$\begin{aligned} I &= 10 \text{ (amper)} & |\Delta I| &= 0,05 \text{ A} \\ R &= 30 \, \Omega \text{ (ohm)} & |\Delta R| &= 0,1 \, \Omega \\ t &= 120 \text{ s} & |\Delta t| &= 1 \text{ s} \\ W &= 10^2 \cdot 30 \cdot 120 = 360\,000 \text{ joule.} \end{aligned}$$

A relatív hibára:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta W}{W} \right| &\cong 2 \left| \frac{\Delta I}{I} \right| + \left| \frac{\Delta R}{R} \right| + \left| \frac{\Delta t}{t} \right| \\ \left| \frac{\Delta W}{W} \right| &\cong 2 \cdot \frac{0,05}{10} + \frac{0,1}{30} + \frac{1}{120} < 0,0217. \end{aligned}$$

A százalékos hiba $\cong 2,17\%$.

10.2.3 Az iránymenti differenciálhányados

Legyen adott a $z = f(x; y)$ felület.

Fekessünk az $(x_0; y_0)$ ponton át egy α irányszögű vetítősíkot. E sík által kimetszett görbe egyenlete (10.1.2 e):

$$z = f(x_0 + t \cos \alpha; y_0 + t \sin \alpha)$$

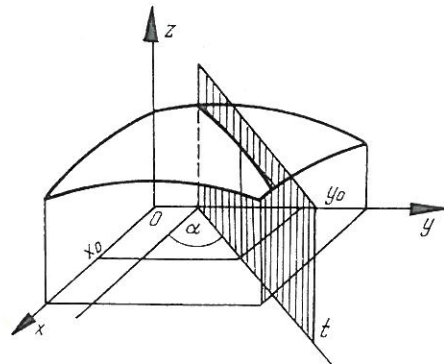
(10.34 ábra).

Ebből az egyenletből kiszámítható a $\frac{dz}{dt}$ differenciálhányados, és ez megadja a metszet-görbe érintőjének iránytangensét.

Az $(x_0; y_0)$ pontbeli differenciálhányadost megkapjuk, ha t helyébe 0-t helyettesítünk.

A kapott $\left[\frac{dz}{dt} \right]_{t=0}$ értéket a $z = f(x; y)$ függvény $(x_0; y_0)$ pontbeli α irányú differenciálhányadosának nevezzük.

Az α irányhoz tartozó iránymenti differenciálhányados tehát az α irányszögű vetítősík által kimetszett görbe érintőjének iránytangense. Jele: f'_α .



10.34 ábra

Példa

Számítsuk ki a $z = xy$ függvény $x = 1; y = 1$ helyén az α irányhoz tartozó iránymenti differenciálhányadost!

Az α irányú függőleges síkmetszet egyenlete:

$$z = (1 + t \cos \alpha)(1 + t \sin \alpha),$$

azaz $z = (\sin \alpha \cdot \cos \alpha)t^2 + (\cos \alpha + \sin \alpha)t + 1.$

$$\frac{dz}{dt} = 2(\sin \alpha \cdot \cos \alpha)t + \cos \alpha + \sin \alpha.$$

Az $x = 1, y = 1$ -hez tartozó deriváltérték:

$$z'_\alpha = f'_\alpha = \left[\frac{dz}{dt} \right]_{t=0} = \cos \alpha + \sin \alpha.$$

*

Az iránymenti deriváltat a parciális deriváltak segítségével egyszerűbben megkaphatjuk.

A $\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$ határérték kiszámításához osszuk el a

$$\Delta z = \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{(x_0; y_0)} \cdot \Delta x + \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{(x_0; y_0)} \cdot \Delta y + H,$$

vagy röviden $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + H$ egyenlet mindkét oldalát Δt -vel:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{H}{\Delta t}.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy (10.35 ábra):

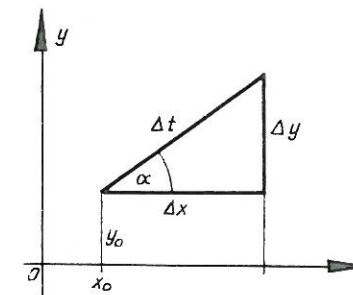
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \cos \alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = \sin \alpha,$$

akkor rögzített α mellett Δt értékét 0-hoz közelítve:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \rightarrow \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{H}{\Delta t} = \frac{H}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \rightarrow 0, \quad \text{így}$$

$$z'_\alpha = f'_\alpha = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha.$$



10.35 ábra

Példák

1. Számítsuk így ki a $z = xy$ függvény α irányú deriváltját az $x_0 = 1, y_0 = 1$ helyen!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{(1; 1)} = 1, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{(1; 1)} = 1.$$

$$\frac{dz}{dt} = \cos \alpha + \sin \alpha.$$

2. Számítsuk ki a $z = \ln \frac{x}{y^2}$ függvény $\alpha = 30^\circ$ irányú iránymenti deriváltját a $P(1; -1)$ pontban!

$$z = \ln \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x}, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{(1; -1)} = 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \left(-\frac{2x}{y^3} \right) = -\frac{2}{y}, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{(1; -1)} = 2,$$

$$\cos \alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$z'_\alpha = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0,8660 + 1 = 1,8660.$$

10.2.4 Az érintő egyenes egyenletrendszere

Messük el a $z = f(x; y)$ felületet egy, a z tengellyel párhuzamos síkkal. Mint tudjuk, a sík által kimetszett görbe érintőjének iránytangense az α irányú iránymenti derivált:

$$z'_\alpha = f'_x \cos \alpha + f'_y \sin \alpha$$

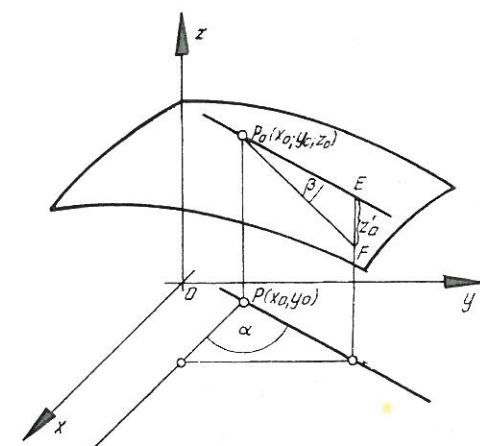
(ahol α a síknak az x tengellyel bezárt szöge).

Határozzuk meg az $(x_0; y_0; z_0)$ pontban húzott érintő egyenes egyenletrendszerét.

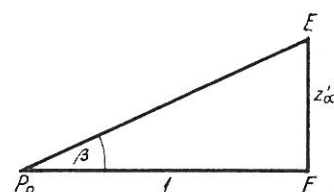
Húzzunk a felület P_0 pontjából a metszősíkban a nyomvonal PB egyenesével párhuzamos, egységnyi hosszúságú szakaszt, és jelöljük ki erre merőlegesen az érintő egyenes emelkedését (10.36 ábra).

Két derékszögű háromszögünk van.

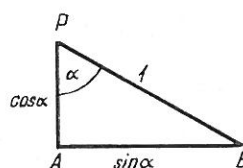
A $P_0FE\Delta$ -ben $\tan \beta = EF$ nem más, mint az érintő egyenes egységnyi hosszúságához tartozó emelkedése, azaz az iránymenti derivált: z'_α (10.37 ábra).



10.36 ábra



10.37 ábra



10.38 ábra

A $PAB\Delta$ befogói viszont $\cos \alpha$, illetve $\sin \alpha$ (10.38 ábra).

Írjuk fel most már a $\vec{P_0E}$ vektort:

$$\vec{P_0E} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha + \mathbf{k} z'_\alpha.$$

Ez nem más, mint az érintő egyenes irányvektora.

Mivel az egyenes átmegy a $P_0(x_0; y_0; z_0)$ ponton, az érintő egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha} = \frac{y-y_0}{\sin \alpha} = \frac{z-z_0}{z'_\alpha}.$$

Az érintő egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} z'_\alpha &= z'_x \cos \alpha + z'_y \sin \alpha: \\ x &= x_0 + t \cos \alpha \\ y &= y_0 + t \sin \alpha \\ z &= z_0 + t(z'_x \cos \alpha + z'_y \sin \alpha) \end{aligned} \right\}$$

Példa

A $z = \ln(x^2 + y^2)$ egyenletű felületet elmetsszük az $(x; y)$ sík $P(0; 1)$ pontján átmenő, az x tengellyel 60° -ot bezáró, a z tengellyel párhuzamos síkkal. Mi a metszetgörbe érintőjének egyenletrendszere, ha az érintési pont két koordinátája:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1?$$

$$z_0 = \ln(0+1) = \ln 1 = 0.$$

$$\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A parciális deriváltak:

$$z'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad z'_{x(0,1)} = 0.$$

$$z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad z'_{y(0,1)} = 2.$$

$$z'_\alpha = z'_x \cos \alpha + z'_y \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}.$$

Így az érintő egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{z}{\sqrt{3}},$$

vagy paraméteres alakban:

$$x = \frac{1}{2} t$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} t + 1$$

$$z = \sqrt{3} t.$$

10.2.5 Az érintősík egyenlete

Az iránymenti differenciálhányados:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha$$

értéke adott α szög mellett csak a parciális deriváltaktól függ.

Ezért mindazon függvényeknek, amelyeknek parciális deriváltjai egy pontban megegyeznek, bármely irányban vett iránymenti deriváltjai is megegyeznek.

Tétel. Legyen a $z = f(x; y)$ függvény a $P_0(x_0; y_0)$ pontban és annak egy környezetében folytonos. Ha a felületet a $P_0(x_0; y_0)$ pontban bármilyen függőleges síkkal metsszük, akkor a kimetszett görbék érintői egy síkban fekszenek. Ezt a síkot érintősíknak nevezzük.

Bizonyítás. Vegyük fel a felület $(x_0; y_0; z_0)$ pontjában azt a síkot, amelyet a $y = y_0$ és $x = x_0$ függőleges síkok által kimetszett görbék érintői meghatároznak. Megmutatjuk, hogy ez a sík a felület érintősíkja (10.39 ábra).

Legyen a sík egyenlete

$$z = ax + by + c.$$

Ennek parciális deriváltjai

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b.$$

A sík definíciója szerint a és b értékek megegyeznek a $z = f(x; y)$ felület parciális deriváltjaival.

Tehát

$$a = f'_x(x_0; y_0), \quad b = f'_y(x_0; y_0).$$

A sík egyenletéhez még meg kell határozni a c konstans értékét. A $z = ax + by + c$ sík átmegy a $P_0(x_0; y_0; z_0)$ ponton:

$$z_0 = ax_0 + by_0 + c.$$

Innen $c = z_0 - ax_0 - by_0$.

Helyettesítsük a c értéket $z = ax + by + c$ egyenletbe:

$$z = ax + by + z_0 - ax_0 - by_0, \\ z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

Az $a = f'_x(x_0; y_0)$, $b = f'_y(x_0; y_0)$ értékekkel a sík egyenlete:

$$(1) \quad z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0),$$

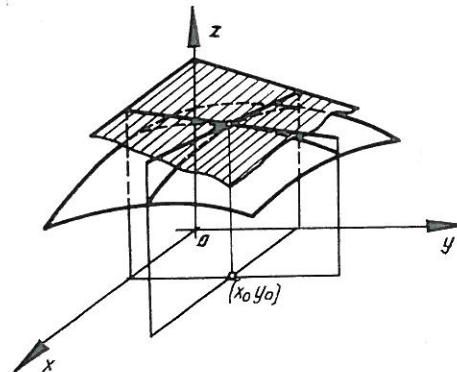
vagy

$$z - z_0 = \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{(x_0; y_0)} \cdot (x - x_0) + \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{(x_0; y_0)} \cdot (y - y_0).$$

Írjuk fel e sík α irányú iránymenti deriváltjait:

$$z'_\alpha = \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{(x_0; y_0)} \cdot \cos \alpha + \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{(x_0; y_0)} \cdot \sin \alpha.$$

Ez az érték megegyezik a $z = f(x; y)$ felület $(x_0; y_0)$ pontjában vett α irányú iránymenti deriváltjainak értékével.



10.39 ábra

Ezzel megmutattuk, hogy a felületet azonos pontban metsző függőleges síkok által kimetszett görbék érintői az (1) egyenletű síkban fekszenek. Így ez a sík a definíció szerint a felület érintősíkja. Tehát az érintősík egyenlete az $(x_0; y_0)$ pontban:

$$z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0).$$

Az érintősík egyenletében $z - z_0$ -t Δz -vel jelölve

$$\Delta z = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0).$$

Látjuk, hogy az érintősík emelkedése a teljes differenciállal egyenlő, tehát, ha a $z = f(x; y)$ függvény az $(x_0; y_0)$ helyen differenciálható, a pont közelében a felület emelkedése az érintő sík emelkedésével helyettesíthető.

Példa

Írjuk fel a $z = \sqrt{x^2 - 3y^2}$ egyenletű felület

$x_0 = 4$, $y_0 = -2$, $z > 0$ pontjában az érintősík egyenletét!

$$z_0 = \sqrt{16 - 3 \cdot 4} = 2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3y^2}}, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{(4; -2)} = 2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3y}{\sqrt{x^2 - 3y^2}}, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{(4; -2)} = 3.$$

Az érintősík egyenlete:

$$z - 2 = 2(x - 4) + 3(y + 2), \quad \text{azaz}$$

$$2x + 3y - z = 0.$$

10.2.6 Többváltozós összetett függvények differenciálása

Legyen a $z = f(x; y)$ függvényben x és y egy közös t változó (paraméter) függvénye:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Ez esetben z mint t függvénye:

$$z = f[x(t); y(t)].$$

Tegyük fel, hogy z differenciálható x és y szerint, $x(t)$ és $y(t)$ pedig t szerint.

Ha t megváltozik Δt -vel, x és y változásai Δx , illetve Δy . A megfelelő Δz változás:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

ahol $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, ha $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Az egyenletet Δt -vel osztva:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Ha

$$\Delta t \rightarrow 0, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t} \rightarrow \frac{dz}{dt}, \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t), \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \dot{y}(t).$$

$$\varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0.$$

Így

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Ez a szabály a többváltozós közvetett függvény differenciálási szabálya vagy láncszabály. A szabályt így is felírhatjuk:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y}(t).$$

A $\frac{dz}{dt}$ deriváltat a $z = f[x(t); y(t)]$ függvény teljes differenciáhányadosának vagy teljes deriváltjának nevezzük.

Legyen a $z = f(x; y)$ függvényben x és y másik két független változó (paraméter), u és v függvénye:

$$x = x(u; v), \quad y = y(u; v).$$

Ekkor $z = f[x(u; v); y(u; v)] = g(u; v)$.

Állítsuk elő a függvény u és v szerinti deriváltját. Ha u szerint deriválunk, v -t konstansnak tekintjük. Így z csak egy változó függvénye, ezért az u szerinti parciális deriválásnál az előző esettel állunk szemben. Ugyanez a helyzet, ha v szerint deriválunk, ekkor u -t tekintjük konstansnak.

Az u és v szerinti parciális deriváltak tehát:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Ezt a szabályt általános láncszabálynak is nevezik.

Példa

$$z = f(x; y).$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

$$z = f[r \cos \varphi; r \sin \varphi] = g(r; \varphi).$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial z}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \varphi.$$

10.3 TAYLOR-FORMULA ÉS TAYLOR-SOR. IMPLICIT FÜGGVÉNYEK DERIVÁLÁSA. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK SZÉLSŐÉRTÉKE

10.3.1 Kétváltozós függvények Taylor-formulája és Taylor-sora

Tekintsük az $(x_0; y_0)$ és $(x_0 + h; y_0 + k)$ pontokat összekötő szakaszt. Legyen a $z = f(x; y)$ függvény minden parciális deriváltja legalább az $(n+1)$ -ed rendűig folytonos ezen a szakaszon.

A szakasz pontjainak koordinátái:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + th \\ y &= y_0 + tk \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq 1.)$$

Mivel x_0, y_0, h és k rögzített, a függvény a t paraméter függvénye:

$$f(x; y) = f(x_0 + th; y_0 + tk) = q(t).$$

Ha $t = 0$, $q(0) = f(x_0; y_0)$,

ha $t = 1$, $q(1) = f(x_0 + h; y_0 + k)$.

Állítsuk elő a $q(t)$ egyváltozós függvény Taylor-formuláját.

$$q(t) = f(x_0 + th; y_0 + tk),$$

ahol $x = x_0 + th, y = y_0 + tk$.

A láncszabályt alkalmazva, mivel x_0, y_0, h és k rögzített érték

$$q'(t) = hf'_x(x_0 + th; y_0 + tk) + kf'_y(x_0 + th; y_0 + tk)$$

$$q''(t) = h^2 f''_{xx}(x_0 + th; y_0 + tk) + 2kh f''_{xy}(x_0 + th; y_0 + tk) + k^2 f''_{yy}(x_0 + th; y_0 + tk).$$

Ezt röviden így jelöljük:

$$q''(t) = [hf'_x(x_0 + th; y_0 + tk) + kf'_y(x_0 + th; y_0 + tk)]^{(2)}.$$

Mivel $x = x_0 + th, y = y_0 + tk$,

$$q''(t) = [hf'_x(x; y) + kf'_y(x; y)]^{(2)}.$$

Teljes indukcióval bizonyítható, hogy

$$q^{(n)}(t) = [hf'_x(x; y) + kf'_y(x; y)]^{(n)}.$$

Itt az (n) szimbólummal jelölt „hatványozás” a Newton-féle binomiális formulával analóg módon a következőt jelenti:

$$[hf'_x(x; y) + kf'_y(x; y)]^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} h^i k^{n-i} \underbrace{f^{(n)}_{x \dots x}}_i \underbrace{y \dots y}_k.$$

A h és k együtthatókat tehát a szokásos módon hatványozzuk, a parciális deriváltak viszont a megfelelő n -edrendű parciális deriváltakat jelentik.

Hasonlóan:

$$q^{(n+1)}(t) = [hf'_x(x; y) + kf'_y(x; y)]^{(n+1)}.$$

Írjuk fel a $q(t)$ függvényre az egyváltozós függvények Maclaurin-formuláját:

$$q(t) = q(0) + \frac{q'(0)}{1!} t + \frac{q''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{q^{(n)}(0)}{n!} t^n + R_n.$$

$t = 1$ -et helyettesítve:

$$q(1) = q(0) + \frac{q'(0)}{1!} + \frac{q''(0)}{2!} + \dots + \frac{q^{(n)}(0)}{n!} + R_n.$$

ahol $R_n = \frac{q^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}, \quad \text{és} \quad 0 < \vartheta < 1.$

$$q(1) = f(x_0 + h; y_0 + k) \quad \text{és}$$

$$q(0) = f(x_0; y_0).$$

A $z = f(x; y)$ kétváltozós függvény Taylor-formulája:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h; y_0 + k) &= f(x_0; y_0) + [hf'_x(x_0; y_0) + kf'_y(x_0; y_0)] + \\ &+ [hf'_x(x_0; y_0) + kf'_y(x_0; y_0)]^2 + \dots + \\ &+ [hf'_x(x_0; y_0) + kf'_y(x_0; y_0)]^n + R_n, \end{aligned}$$

ahol $R_n = [hf'_x(x_0 + \vartheta h; y_0 + \vartheta k) + kf'_y(x_0 + \vartheta h; y_0 + \vartheta k)]^{(n+1)}$

és $0 < \vartheta < 1.$

Definíció. Az $f(x; y)$ függvény n -szer differenciálható, ha $(n-1)$ -edrendű parciális deriváltjai differenciálhatók.

Ha a $z = f(x; y)$ függvény az $(x_0; y_0)$ helyen akárhányszor differenciálható, a kétváltozós függvény Taylor-sora:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h; y_0 + k) &= f(x_0; y_0) + [hf'_x(x_0; y_0) + kf'_y(x_0; y_0)] + \dots + \\ &+ [hf'_x(x_0; y_0) + kf'_y(x_0; y_0)]^n + \dots \end{aligned}$$

Ha $x_0 = 0, y_0 = 0$ és $x_0 + h$ helyébe x -et, $y_0 + k$ helyébe y -t írunk, a kétváltozós függvény Maclaurin-formuláját, illetve Maclaurin-sorát kapjuk.

A Maclaurin-formula:

$$\begin{aligned} f(x; y) &= f(0; 0) + [xf'_x(0; 0) + yf'_y(0; 0)] + \dots + \\ &+ [xf'_x(0; 0) + yf'_y(0; 0)]^n + R_n, \end{aligned}$$

ahol $R_n = [xf'_x(\vartheta x; \vartheta y) + yf'_y(\vartheta x; \vartheta y)]^{(n+1)}$

és $0 < \vartheta < 1.$

A Maclaurin-sor pedig

$$\begin{aligned} f(x; y) &= f(0; 0) + [xf'_x(0; 0) + yf'_y(0; 0)] + \dots \\ &+ [xf'_x(0; 0) + yf'_y(0; 0)]^n + \dots \end{aligned}$$

10.3.2 A Lagrange-féle középértéktétel kétváltozós függvényekre

Legyenek a $z = f(x; y)$ függvény elsőrendű parciális deriváltjai az

$$(x + th; y + tk), \quad 0 \leq t \leq 1$$

szakasz mentén folytonosak.

A Taylor-formulából $n+1 = 1$ esetén a kétváltozós függvényekre vonatkozó középértéktétel adódik.

$$f(x+h; y+k) - f(x; y) = hf'_x(x + \vartheta h; y + \vartheta k) + kf'_y(x + \vartheta h; y + \vartheta k),$$

ahol $0 < \vartheta < 1.$

10.3.3 Implicit függvények deriválása

1. Az $F(x; y) = 0$ egyváltozós implicit függvények deriválásával a 7.13 pontban már foglalkoztunk. A kétváltozós függvények parciális deriváltjainak segítségével a deriválás egyszerűbbé tehető.

Legyen $F(x; y) = 0$ olyan implicit függvény, amelyből y -t explicite nehezen vagy egyáltalán nem tudjuk kifejezni.

$y = f(x)$ az x változó olyan függvénye, amelyre az x tengely bizonyos intervallumában érvényes az

$$F[x; f(x)] \equiv 0 \quad \text{azonosság.}$$

$F(x; y) = 0$ a $z = F(x; y)$ kétváltozós függvény felületének és a $z = 0$ síknak metszészvonala feltéve, hogy ez létezik (a $z = x^2 + y^2 + 5$ egyenletű függvénynél például nem létezik).

Tegyük fel, hogy az $F(x; y)$ kétváltozós függvény differenciálható.

Differenciáljuk az

$$F[x; y(x)] \equiv 0$$

azonosságot x szerint. A láncszabály alapján

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0.$$

Ha $F'_y \neq 0$, akkor ebből

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Ahhoz, hogy az $y = f(x)$ függvény létezzék, és az x_0 helyen és egy környezetében is differenciálható legyen, elegendő, hogy

$$F(x_0; y_0) = 0, \quad (y_0 = f(x_0)),$$

az F'_x és F'_y deriváltak folytonosak (x_0, y_0) egy környezetében, és

$$F'_y(x_0; y_0) \neq 0.$$

2. Állítsuk elő a

$$z = f(x; y)$$

függvény

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{parciális deriváltjait}$$

feltéve, hogy a függvényt $F(x; y; z) = 0$ alakban adtuk meg.Az $F(x; y; z) = 0$ implicit függvény olyan függvény, amelyre az $(x; y)$ sík bizonyos tartományában fennáll az

$$F[x; y; f(x; y)] \equiv 0 \quad \text{azonosság.}$$

Deriváljuk az

$$F(x; y; z) = 0 \quad \text{azonosságot parciálisan, } x \text{ és } y \text{ szerint:}$$

$$F'_x + F'_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$F'_y + F'_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Az egyenletekből:

$$f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z},$$

$$f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Ahhoz, hogy a $z = f(x; y)$ függvény létezzék az $(x_0; y_0)$ pont egy környezetében, és a pontban differenciálható legyen, elegendő, hogy

$$F(x_0; y_0; z_0) = 0 \quad (z_0 = f(x_0; y_0)), \quad \text{az} \quad F'_x, F'_y, F'_z$$

deriváltak folytonosak legyenek az $(x_0; y_0; z_0)$ pont egy környezetében, és $F'_z(x_0; y_0; z_0) \neq 0$.**Példák**1. Vizsgáljuk az $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ egyenletű görbe (Descartes-féle levél) (7.4.1.4) néhány érintőjét (10.40 ábra).

$$F(x; y) = x^3 + y^3 - 3axy,$$

$$F'_x = 3x^2 - 3ay,$$

$$F'_y = 3y^2 - 3ax,$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{3ay - 3x^2}{3y^2 - 3ax}.$$

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

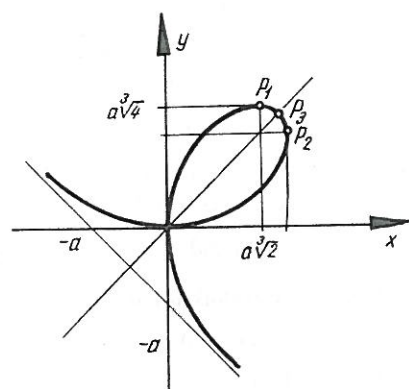
$$y' = 0, \quad \text{ha} \quad ay - x^2 = 0,$$

azaz

$$y = \frac{x^2}{a}.$$

Ezt az $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ egyenletbe helyettesítve

$$x^3 + \frac{x^6}{a^3} - 3a \frac{x^3}{a} = 0,$$



10.40 ábra

$$\text{innen} \quad x = a \sqrt[3]{2} \quad \text{és} \\ y = a \sqrt[3]{4}.$$

Az érintő tehát a $P_1(a \sqrt[3]{2}; a \sqrt[3]{4})$ pontban vízszintes, és a szimmetria miatt a

$$P_2(a \sqrt[3]{4}; a \sqrt[3]{2}) \text{ pontban függőleges.}$$

Az $y = x$ szimmetriatengely és a görbe metszéspontját megkapjuk, ha

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \text{ -ban } y \text{ helyére } x\text{-et írunk.}$$

$$2x^3 - 3ax^2 = 0.$$

$$x^2(2x - 3a) = 0.$$

$$x = 0, \quad x = \frac{3a}{2}.$$

Tehát a metszéspontok

$$P_0(0; 0) \quad P_3\left(\frac{3a}{2}; \frac{3a}{2}\right).$$

Ha $x = 0, y = 0$, a görbének nincs érintője.

$$\text{Ha} \quad x = y = \frac{3a}{2},$$

$$y' = \frac{\frac{3a^2}{2} - \frac{9a^2}{4}}{\frac{9a^2}{4} - \frac{3a}{2}} = -1.$$

2. Állítsuk elő az

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1 = 0$$

függvény f'_x és f'_y parciális deriváltjait!

$$F(x; y; z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1.$$

$$F'_x = \cos y - z \sin x,$$

$$F'_y = -x \sin y + \cos z,$$

$$F'_z = -y \sin z + \cos x.$$

$$f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z},$$

$$f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}.$$

3. Írjuk fel az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 169 \text{ egyenletű gömb érintősíkjának egyenletét a } P_0(12; -4; 3) \text{ pontban!}$$

$$F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 169.$$

$$F'_x = 2x; \quad F'_y = 2y; \quad F'_z = 2z.$$

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{x}{z}, \quad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{y}{z}.$$

$$f'_z(x_0; y_0) = -\frac{12}{3} = -4, \quad f'_y(x_0; y_0) = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}.$$

Az érintősík egyenlete:

$$z - 3 = -4(x - 12) + \frac{4}{3}(y + 4), \quad \text{azaz}$$

$$12x - 4y + 3z = 169.$$

10.3.4 Kétváltozós függvények szélsőértékei

Definíció. A $z = f(x; y)$ függvénynek az (x_0, y_0) helyen helyi maximuma van, ha a hely egy környezetének minden $(x_0 + h; y_0 + k)$ pontjában fennáll, hogy:

$$f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0) < 0.$$

A $z = f(x; y)$ függvénynek az $(x_0; y_0)$ helyen helyi minimuma van, ha a hely egy környezetének minden $(x_0 + h; y_0 + k)$ pontjában

$$f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0) > 0.$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Tétel. Tegyük fel, hogy a $z = f(x; y)$ függvénynek az $(x_0; y_0)$ helyen léteznek elsőrendű parciális deriváltjai.

A függvénynek az $(x_0; y_0)$ helyen csak akkor lehet szélsőértéke, ha

$$f'_x(x_0; y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f'_y(x_0; y_0) = 0.$$

Bizonyítás. A szélsőérték definíciójából következik, hogy az x_0 , illetőleg y_0 helyen differenciálható egyváltozós $f(x; y_0)$ és $f(x_0, y)$ függvényeknek is szélsőértékük van az x_0 , illetve az y_0 pontban. Ezeknek szélsőértékük csak akkor lehet, ha első deriváltjuk nulla, azaz

$$f'_x(x_0; y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f'_y(x_0; y_0) = 0.$$

A szélsőérték létezésének elégséges feltétele

Tétel. Tegyük fel, hogy a $z = f(x; y)$ függvény első és második parciális deriváltjai az $(x_0; y_0)$ hely környezetében folytonosak, és $f'_x(x_0; y_0) = 0$, $f'_y(x_0; y_0) = 0$.
Képezzük a következő kifejezést:

$$\Delta = f''_{xx}(x_0; y_0) \cdot f''_{yy}(x_0; y_0) - [f''_{xy}(x_0; y_0)]^2.$$

a) $\Delta > 0$ esetén a függvénynek az $(x_0; y_0)$ helyen szélsőértéke van, mégpedig

maximuma, ha $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0$,

minimuma, ha $f''_{xx}(x_0; y_0) > 0$.

b) $\Delta < 0$ esetén a függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban nincs szélsőértéke.

c) $\Delta = 0$ esetén a szélsőérték fennállása így nem dönthető el (előfordulhat, hogy van szélsőérték, de előfordulhat, hogy nincs).

Bizonyítás. A Taylor-formula szerint $n+1 = 2$ esetén, mivel az $(x_0; y_0)$ helyen $f'_x = 0$ és $f'_y = 0$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0) &= \\ &= \frac{1}{2!} [h^2 f''_{xx}(x_0 + \theta h; y_0 + \theta k) + 2hk f''_{xy}(x_0 + \theta h; y_0 + \theta k) + k^2 f''_{yy}(x_0 + \theta h; y_0 + \theta k)], \end{aligned}$$

ahol $0 < \theta < 1$.

Legyen $f''_{xx}(x_0; y_0) = A$; $f''_{xy}(x_0; y_0) = B$; $f''_{yy}(x_0; y_0) = C$.

A másodrendű parciális deriváltak folytonossága miatt:

$$f''_{xx}(x_0 + \theta h; y_0 + \theta k) = f''_{xx}(x_0; y_0) + \varepsilon_1,$$

$$f''_{xy}(x_0 + \theta h; y_0 + \theta k) = f''_{xy}(x_0; y_0) + \varepsilon_2,$$

$$f''_{yy}(x_0 + \theta h; y_0 + \theta k) = f''_{yy}(x_0; y_0) + \varepsilon_3,$$

ahol $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \varepsilon_3 \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$, azaz $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$.

Legyen: $\varepsilon = \varepsilon_1 h^2 + 2\varepsilon_2 hk + \varepsilon_3 k^2$.

$$\Delta = f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0) = \frac{1}{2} [(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + \varepsilon].$$

Belátható, hogy $\rho \rightarrow 0$ esetén ε az $(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)$ értékhez képest elhanyagolható, ezért Δ előjelét $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ szabja meg, feltéve, hogy a kifejezés nem zérus.

A kifejezést így alakítjuk:

$$\begin{aligned} Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 &= \frac{1}{A} (A^2 h^2 + 2ABhk + B^2 k^2 - B^2 k^2 + ACk^2) = \\ &= \frac{1}{A} [(Ah + Bk)^2 + k^2(AC - B^2)]. \end{aligned}$$

a) A függvénynek $AC - B^2 > 0$ esetben szélsőértéke van,

ha $A < 0$, maximuma,

ha $A > 0$, minimuma.

A vagy C nem lehet zérus, mert akkor $AC - B^2 = -B^2 < 0$ lenne, ez pedig a feltétellel ellentétes.

A és C előjele csak azonos lehet, mert ellenkező előjel esetén $AC < 0$, így $AC - B^2 < 0$, ami szintén ellentétes a feltétellel.

Ezért, ha $A < 0$, akkor $C < 0$, így $AC > 0$,

ha $A > 0$, akkor $C > 0$, így $AC > 0$.

A függvényértékek különbségének előjele Δ előjelével egyenlő.

$$\Delta \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} [(Ah + Bk)^2 + k^2(AC - B^2)].$$

Δ előjele $h=0, k=0$ esettől eltekintve — az $AC - B^2 > 0$ feltétel miatt — A előjelével egyenlő.

Ezért, ha $A < 0, \Delta < 0$ maximum van,

ha $A > 0, \Delta > 0$ minimum van.

Tehát a függvénynek $AC - B^2 > 0$, azaz

$$f''_{xx} f''_{yy} - f''_{xy}{}^2 > 0$$

esetben szélsőértéke van. Ha $f''_{xx} > 0$, minimum, ha $f''_{xx} < 0$, maximum van.

b) A függvénynek $AC - B^2 < 0$ esetben biztosan nincs szélsőértéke.

Ha $A \neq 0$, a

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} [(Ah + Bk)^2 + k^2(AC - B^2)]$$

kifejezés alkalmasan választott h és k mellett akármilyen előjelet felvehet.

Így például, ha $k = 0$ és $h \neq 0$, akkor Δ előjele A előjelével azonos; ha $\frac{h}{k} = -\frac{B}{A}$, akkor

Δ előjele A előjelével ellentétes.

Ha $A = 0$, akkor $B \neq 0$, különben $AC - B^2 = 0$ volna,

így: $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = k(2Bh + Ck)$.

Ez a kifejezés megint pozitív és negatív is lehet, ha h -t és k -t alkalmasan választjuk.

Tehát, ha $AC - B^2 < 0$, azaz $f''_{xx}f''_{yy} - f'^2_{xy} < 0$, a $z = f(x; y)$ függvénynek Δ változó előjele miatt az $(x_0; y_0)$ pontban nincs szélsőértéke.

c) Ha végül $AC - B^2 = 0$,

azaz $f''_{xx}f''_{yy} - f'^2_{xy} = 0$,

az $(x_0; y_0)$ pontban a függvénynek lehet szélsőértéke, és lehet, hogy nincs szélsőértéke.

Például a $z = x^4 + y^4$ és $z = x^3 + y^3$

függvények mindegyikénél a $(0; 0)$ pontban $\Delta = 0$. Az első függvénynek az origóban minimuma van, a másodiknak nincs szélsőértéke.

Példák

1. Az $(x; y)$ síkban egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Állapítsuk meg a síkban azt a pontot, amelynek a három ponttól való távolságai négyzetének összege a legkisebb!

Legyen $P(x; y)$ egy tetszőleges pont. A távolságok négyzetének összege (10.41 ábra):

$$f(x; y) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2.$$

$$f'_x = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + 2(x - x_3),$$

$$f'_y = 2(y - y_1) + 2(y - y_2) + 2(y - y_3).$$

Szélsőérték ott lehet, ahol $f'_x = 0$ és $f'_y = 0$.

Azaz $\begin{cases} x - x_1 + x - x_2 + x - x_3 = 0 \\ y - y_1 + y - y_2 + y - y_3 = 0 \end{cases}$.

Innen

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Ez a pont a háromszög súlypontja.

$$f''_{xx} = 6 > 0, \quad f''_{yy} = 6, \quad f''_{xy} = 0.$$

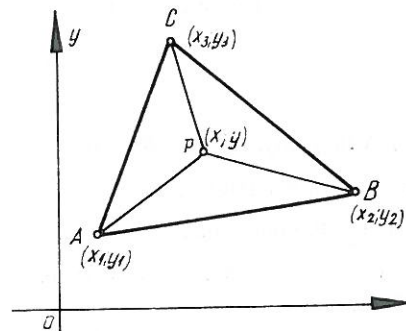
$$f''_{xx}f''_{yy} - f'^2_{xy} = 36 > 0. \quad \text{Valóban minimum van.}$$

A súlypontban tehát lokális minimum van. Levezetésünk azt is mutatja, hogy ez az egyetlen lokális szélsőérték hely.

Kimutatjuk, hogy itt veszi fel a függvény abszolút minimumát.

Tekintsünk a háromszög A pontja mint középpont körüli, elegendően nagy sugarú kört.

Nyilvánvaló, hogy bármely, a körön kívüli $P(x; y)$ pontban $f(x; y)$ nagyobb, mint például az A pontban. Emiatt a függvény, amely folytonos, minimumát a zárt körlapon veszi fel (6.3.1. pont, I. tétel).



10.41 ábra

Létezik tehát abszolút minimum, és ez szükségképpen lokális is, hiszen az értelmezési tartomány az egész sík. Mivel csak a súlypontban van lokális szélsőérték, itt veszi fel a függvény abszolút minimumát.

2. Adott kerületű háromszögek közül melyiknek a területe a legnagyobb?
Legyenek a háromszög oldalai x, y, z .

$$x + y + z = 2s.$$

A háromszög területe Heron képletével (2.2.5):

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}.$$

$$z = 2s - x - y, \quad \text{így} \quad s - z = x + y - s.$$

Ha a terület maximális, négyzete is az. Így a vizsgálandó függvény:

$$f(x; y) = s(s-x)(s-y)(x+y-s).$$

$$f'_x = -s(s-y)(x+y-s) + s(s-x)(s-y).$$

$$f'_y = -s(s-x)(x+y-s) + s(s-x)(s-y).$$

Szélsőérték ott lehet, ahol $f'_x = 0$ és $f'_y = 0$.

Ez bekövetkezhet akkor, ha $s - y = 0$, illetve $s - x = 0$. Ez azonban nem lehetséges, mert ha pl. $s = y$, akkor $x + z = y$, ami a háromszögnél nem lehetséges.

Így $f'_x = 0$, ha $x + y - s = s - x$, azaz $2x + y = 2s$.

Hasonlóan $f'_y = 0$, ha $2y + x = 2s$.

A $2x + y = 2s$

$$x + 2y = 2s$$

egyenletrendszer megoldása:

$$x = \frac{2s}{3}, \quad y = \frac{2s}{3}.$$

Ekkor $z = \frac{2s}{3}$.

$$f''_{xx} = -s(s-y) - s(s-y) = -2s(s-y),$$

$$f''_{yy} = -s(s-x) - s(s-x) = -2s(s-x),$$

$$f''_{xy} = s(x+y-s) - s(s-y) - s(s-x) = s(2x+2y-3s).$$

Ha $x = \frac{2s}{3}, \quad y = \frac{2s}{3}$

$$f''_{xx} = -\frac{2s^2}{3}, \quad f''_{yy} = -\frac{2s^2}{3}, \quad f''_{xy} = -\frac{s^2}{3},$$

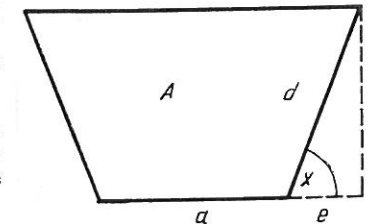
$$f''_{xx}f''_{yy} - f'^2_{xy} = \frac{4s^4}{9} - \frac{s^4}{9} = \frac{s^4}{3} > 0. \quad \text{Van szélsőérték.}$$

$$f''_{xx} < 0, \quad \text{maximum van.}$$

Igazolható, hogy ez a helyi maximum egyben abszolút maximum is. Tehát adott kerületű háromszögek közül legnagyobb területe az egyenlő oldalú háromszögnek van.

3. Hogyan válasszuk meg az adott A keresztmetszetű, trapéz alakú csatornánál az m magasság és α hajlásszög értékét, hogy a vízzel érintkező felület felszíne minimális legyen?

A feladat megoldásához a csatorna hossza mellékes, a feladatot az A keresztmetszet meghatározza (10.42 ábra).



10.42 ábra

Legyen a hajlásszög $\alpha = x$, a magasság $m = y$.

$$e = y \operatorname{ctg} x, \quad d = \frac{y}{\sin x}.$$

$$A = ay + ey; \quad A = ay + y^2 \operatorname{ctg} x.$$

Innen: $a = \frac{A}{y} - y \operatorname{ctg} x.$

A vízzel érintkező felületnek megfelelő elősszeg:

$$f(x; y) = a + 2d.$$

$$f(x; y) = \frac{A}{y} - y \operatorname{ctg} x + \frac{2y}{\sin x}.$$

Minimum akkor lehet, ha $f'_x = 0$ és $f'_y = 0$.

$$f'_x = \frac{y}{\sin^2 x} - \frac{2y \cos x}{\sin^2 x},$$

$$f'_y = -\frac{A}{y^2} - \operatorname{ctg} x + \frac{2}{\sin x}.$$

$$f'_x = 0, \quad \text{ha} \quad \frac{y}{\sin^2 x} = \frac{2y \cos x}{\sin^2 x}, \quad \text{azaz} \quad \cos x = \frac{1}{2},$$

vagyis $x = \frac{\pi}{3}.$

$$f'_y = 0, \quad \text{ha} \quad \frac{A}{y^2} = \frac{2}{\sin x} - \operatorname{ctg} x. \quad \text{Az} \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \text{értékkel:}$$

$$\frac{A}{y^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$y = \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}}.$$

Szélsőérték akkor lehetséges, ha a hajlásszög $\frac{\pi}{3}$, a magasság $\sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}}.$

$$f''_{xx} = -\frac{2y \cos x}{\sin^3 x} + \frac{2y \sin^3 x + 4y \sin x \cos^2 x}{\sin^4 x} =$$

$$= \frac{-2y \cos x + 2y + 2y \cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{2y}{\sin^3 x} (1 - \cos x + \cos^2 x).$$

Ha $x = \frac{\pi}{3}, \quad y = \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}};$

$$f''_{xx} = \frac{4 \cdot \sqrt{A}}{\sqrt{3} \sqrt[4]{3}} > 0.$$

$$f''_{yy} = \frac{2A}{y^3}, \quad \text{ha} \quad y = \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}};$$

$$f''_{yy} = 2A \frac{(\sqrt[4]{3})^3}{A \sqrt{A}} = \frac{2}{\sqrt{A}} \sqrt{3} \sqrt[4]{3} > 0;$$

$$f''_{xy} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2 \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1 - 2 \cos x}{\sin^2 x}; \quad \text{ha} \quad x = \frac{\pi}{3}, \quad f''_{xy} = 0.$$

Így

$$f''_{xx} f''_{yy} - f''_{xy}^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{A}} \sqrt{3} \sqrt[4]{3} = 8 > 0.$$

Az $x = \frac{\pi}{3}, \quad y = \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}}$

méretezés mellett valóban minimális a felszín, mert igazolható, hogy ez a helyi minimum abszolút minimum.

10.3.5 Kétváltozós függvények feltételes szélsőértékei

Keressük a $z = f(x; y)$ függvény szélsőértékét a $\varphi(x; y) = 0$ feltétel mellett. Ha ebből az egyenletből y kifejezhető, azaz $y = y(x)$, akkor a feladat visszavezethető a $z = f[x; y(x)]$ egyváltozós függvény szélsőértékének meghatározására.

A kérdés geometriai szemléltetése a következő:

$z = f(x; y)$ felületet jelent, $\varphi(x; y) = 0$ pedig az $(x; y)$ sík g' görbét implicit alakban.

Legyen a feltétellel megadott görbe P' pontja a felület P pontjának merőleges vetülete az $(x; y)$ síkra. A felület minden ilyen P pontjának összessége a g térgörbét állítja elő, amelynek vetülete a $\varphi(x; y) = 0$ egyenletű g' síkgörbe (10.43 ábra).

A $z = f(x; y)$ függvény maximumának vagy minimumának a $\varphi(x; y) = 0$ feltétel melletti keresése azt jelenti, hogy keressük azokat a pontokat, amelyekben a g térgörbe z koordinátájának szélsőértéke van.

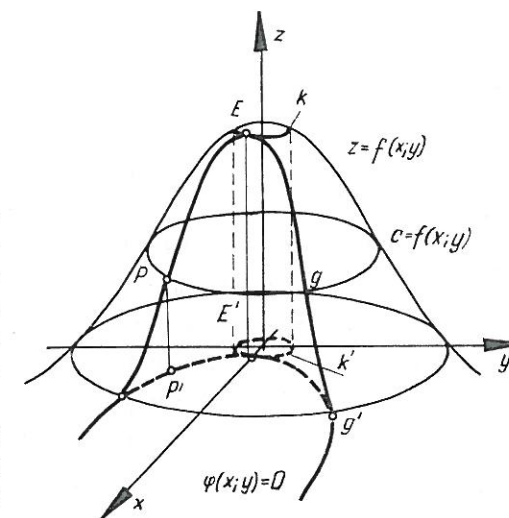
Legyen $(x_0; y_0; z_0)$ a térgörbe ilyen pontja.

a) Ha z_0 egyben $z = f(x; y)$ -nak lokális szélsőértéke, akkor tudjuk, hogy $(x_0; y_0)$ -ban

$$f'_x(x_0; y_0) = f'_y(x_0; y_0) = 0.$$

Ez az eset azonos a feltétel nélküli szélsőérték megkeresésével.

b) Tegyük fel, hogy $(x_0; y_0)$ $z = f(x; y)$ -nak nem lokális szélsőérték helye. Ekkor az $(x_0; y_0; z_0)$ pontban a függvényt ábrázoló felület érintősíkja nem vízszintes. Minthogy a g görbe $(x_0; y_0; z_0)$ pontbeli érintője egyfelől benne van a felület érintősíkjában, másfelől párhuzamos az $(x; y)$ síkkal, az érintő azonos az érintősík és az $(x_0; y_0; z_0)$ ponton áthaladó vízszintes sík metszéspontjával.



10.43 ábra

Tekintsük a felületen a $z_0 = f(x; y)$ egyenlettel megadott k görbét, amelynek vetülete az $(x; y)$ síkban a z_0 értékhez tartozó k' nivógörbe. A felületen haladó k görbe benne van a $z = z_0$ egyenletű vízszintes síkban, ezért $(x_0; y_0; z_0)$ -beli érintője is benne van ebben a síkban. Továbbá ez az érintő benne van a felület érintősíkjaiban is, így azonos a két sík metszéspontjával, azaz megegyezik a g görbe $(x_0; y_0; z_0)$ -beli érintőjével.

Emiatt a $z = f(x; y) - z_0 = 0$ egyenletű k görbe $(x; y)$ síkra való k' vetületének és a $q(x; y) = 0$ egyenletű g' görbének is közös az érintője az $(x_0; y_0)$ pontban.

$$f(x; y) - z_0 = 0\text{-t implicit deriválva: } y' = -\frac{f'_x(x; y)}{f'_y(x; y)}.$$

$$q(x; y)\text{-t deriválva } y' = -\frac{q'_x(x; y)}{q'_y(x; y)}$$

(feltéve, hogy $f'_y \neq 0$ és $q'_y \neq 0$).

Az érintkezési pontban a deriváltak egyenlők:

$$\frac{f'_x(x_0; y_0)}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{q'_x(x_0; y_0)}{q'_y(x_0; y_0)}, \quad \text{ami így is írható:}$$

$$\frac{f'_x(x_0; y_0)}{q'_x(x_0; y_0)} = \frac{f'_y(x_0; y_0)}{q'_y(x_0; y_0)}.$$

Jelöljük a közös hányados értékét $(-\lambda)$ -val.

$$f'_x(x_0; y_0) = -\lambda q'_x(x_0; y_0) \quad \text{és}$$

$$f'_y(x_0; y_0) = -\lambda q'_y(x_0; y_0),$$

azaz

$$f'_x(x_0; y_0) + \lambda q'_x(x_0; y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0; y_0) + \lambda q'_y(x_0; y_0) = 0.$$

Tehát x_0, y_0 és λ kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} f'_x(x; y) + \lambda q'_x(x; y) &= 0 \\ f'_y(x; y) + \lambda q'_y(x; y) &= 0 \\ q(x; y) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

A feltételes szélsőérték helyeket tehát az egyenletrendszer x, y megoldásai adják. (λ meghatározása a feladat szempontjából el is hagyható.)

A három egyenlet azt fejezi ki, hogy az

$$F(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda q(x; y)$$

függvény mindhárom parciális deriváltja nulla.

A feltételes (kötött) szélsőértékek meghatározása így az $F(x; y; \lambda)$ függvény szabad szélsőértékeinek meghatározására vezethető vissza.

Ezt a módszert a *Lagrange-féle multiplikátormódszernek* nevezzük.

Példák

1. Határozzuk meg a

$$z = f(x; y) = x^2 + y^2$$

függvény szélsőértékét, az $x + y - 2 = 0$ feltétel mellett!

Képezzük az

$$F(x; y; \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2) \quad \text{függvényt.}$$

Szélsőérték ott lehet, ahol $F'_x = 0$ és $F'_y = 0$.

$$F'_x = 2x + \lambda, \quad 2x + \lambda = 0.$$

$$F'_y = 2y + \lambda, \quad 2y + \lambda = 0.$$

Az egyenletekből $x = y$.

Az értékeket az $x + y - 2 = 0$ feltételi egyenletbe helyettesítve:

$$2x - 2 = 0, \quad x = 1, \quad y = 1,$$

$$z_{(1; 1)} = 2.$$

A $z = x^2 + y^2$ egyenletű felületet ismerve mondhatjuk, hogy az $x = 1, y = 1$ helyen minimum van.

2. Határozzuk meg ezzel a módszerrel, hogy adott kerületű háromszögek közül melyiknek a területe maximális.

A terület négyzete:

$$A^2 = s(s-x)(s-y)(s-z).$$

A mellékfeltétel: a kerület $= 2s$.

$$x + y + z = 2s, \quad \text{azaz} \quad x + y + z - 2s = 0.$$

$$F(x; y; z; \lambda) = s(s-x)(s-y)(s-z) + \lambda(x + y + z - 2s).$$

$$F'_x = -s(s-y)(s-z) + \lambda,$$

$$F'_y = -s(s-x)(s-z) + \lambda,$$

$$F'_z = -s(s-x)(s-y) + \lambda.$$

Szélsőérték ott lehet, ahol a parciális deriváltak nullák:

$$s(s-y)(s-z) = \lambda,$$

$$s(s-x)(s-z) = \lambda,$$

$$s(s-x)(s-y) = \lambda.$$

Az első két egyenletből $y = x$.

A második és harmadik egyenletből $y = z$.

$$\text{Így} \quad x = y = z = \frac{2s}{3}.$$

Igazolható, hogy ezzel a választással valóban a legnagyobb függvényértéket kapjuk, azaz maximális területe az egyenlő oldalú háromszögnek van.

3. Hogyan válasszuk meg az a, b, c, d 10.44 ábra

oldalú négyszög szögeit, hogy a terület

maximális legyen? Legyenek a 10.44 ábrán megjelölt szögek x és y . A keresett terület:

$$A = \frac{1}{2} ad \sin x + \frac{1}{2} bc \sin y.$$

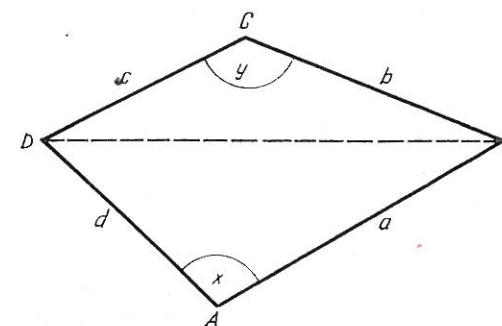
Maximum esetén a terület kétszerese is maximális.

$$f(x; y) = ad \sin x + bc \sin y.$$

A mellékfeltételt ugyanazon átlóra kétszer felírt koszinusztétel adja.

$$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos x,$$

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos y.$$



$$\text{Így} \quad a^2 + d^2 - 2ad \cos x - b^2 - c^2 + 2bc \cos y = 0.$$

$$F(x; y; \lambda) = ad \sin x + bc \sin y + \lambda(a^2 + d^2 - 2ad \cos x - b^2 - c^2 + 2bc \cos y).$$

Szélsőérték ott lehet, ahol a parciális deriváltak nullák.

$$F'_x = ad \cos x + 2\lambda ad \sin x = 0,$$

$$F'_y = bc \cos y - 2\lambda bc \sin y = 0.$$

Ebből következik:

$$-\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y}, \quad \text{azaz}$$

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = 0.$$

$$\sin(x+y) = 0.$$

Ez akkor következhet be, ha

$$x+y = 0, \quad \text{ami lehetetlen,}$$

$$\text{vagy} \quad x+y = \pi.$$

Igazolható, hogy ekkor abszolút maximum van, tehát maximális területe a húrnégyszögnek van.

10.4 SÍKGÖRBÉK SZINGULÁRIS PONTJAI GÖRBESEREK BURKOLÓ GÖRBÉI

10.4.1 Síkgörbék szinguláris pontjai

Legyen egy síkgörbe egyenlete az

$$F(x; y) = 0$$

implicit alakban adott.

Definíció. Egy görbe egy adott pontja reguláris, ha a pontban és környezetében y folytonosan differenciálható függvénye x -nek, vagy fordítva, x folytonosan differenciálható függvénye y -nak. A görbének mindkét esetben a pontban érintője van, és az érintő a pont környezetében csak kevéssé tér el a görbétől. A görbe minden nem reguláris pontját *szinguláris pontnak* nevezzük.

Tegyük fel, hogy az $(x_0; y_0)$ pont egy környezetében $F(x; y)$ elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak. Az implicit függvények differenciálására vonatkozó tétel alapján (10.3.3 pont), ha $F'_y(x_0; y_0) \neq 0$, akkor y' a pont környezetében kifejezhető x folytonosan differenciálható függvényeként, és

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Ha pedig $F'_x(x_0; y_0) \neq 0$, akkor x a pont környezetében kifejezhető y folytonosan differenciálható függvényeként, és

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_x}.$$

Tehát mindkét esetben $(x_0; y_0)$ reguláris pont.

Ahhoz, hogy az $F(x; y) = 0$ egyenletű görbének $(x_0; y_0)$ *szinguláris pontja* legyen, szükséges feltétel, hogy ebben a pontban:

$$(1) \quad F(x_0; y_0) = 0, \quad F'_x(x_0; y_0) = 0, \quad F'_y(x_0; y_0) = 0.$$

Megjegyzés. A szinguláris pont létezéséhez az (1) alatti feltétel csak szükséges, de nem mindig elegendő.

A szinguláris pontok vizsgálatához tegyük fel, hogy $F(x; y)$ az $(x_0; y_0)$ pont egy környezetében folytonos másodrendű parciális deriváltakkal rendelkezik, és azok nem mindegyike nulla az $(x_0; y_0)$ helyen.

A másodrendű Taylor-formula alapján:

$$F(x; y) = F(x_0; y_0) + F'_x(x_0; y_0)(x-x_0) + F'_y(x_0; y_0)(y-y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} [F''_{xx}(x_0; y_0)(x-x_0)^2 + 2F''_{xy}(x_0; y_0)(x-x_0)(y-y_0) +$$

$$+ F''_{yy}(x_0; y_0)(y-y_0)^2] + R_3,$$

ahol

$$\frac{R_3}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad (x; y) \rightarrow (x_0; y_0).$$

Feltételezve, hogy az $(x; y)$ pont a görbén van, és felhasználva az (1) alatti feltételeket:

$$(2) \quad F''_{xx}(x-x_0)^2 + 2F''_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + F''_{yy}(y-y_0)^2 = -2R_3.$$

Legyen az $(x_0; y_0)$ és $(x; y)$ pontokat összekötő egyenes az

$$\left. \begin{aligned} x-x_0 &= at \\ y-y_0 &= bt \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerrel adott.

Feltehetjük, hogy $a^2 + b^2 = 1$, így irányvektornak az egységvektort választottuk.

Ezeket az értékeket a (2) egyenletbe helyettesítve, a görbe és az egyenes közös pontjai kielégítik az

$$a^2 F''_{xx} t^2 + 2ab F''_{xy} t^2 + b^2 F''_{yy} t^2 = -2R_3$$

egyenletet.

A $t = 0$ eset adja az $(x_0; y_0)$ pontot. Ha $t \neq 0$, akkor

$$a^2 F''_{xx} + 2ab F''_{xy} + b^2 F''_{yy} = -\frac{2R_3}{t^2}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen határhelyzete lehet a szelőnek, azaz milyen érintőegyeneseket kaphatunk.

$$\text{Ha} \quad t \rightarrow 0; \quad \text{akkor} \quad -\frac{2R_3}{t^2} \rightarrow 0 \quad (\text{mert } t^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2),$$

ezért az érintő $\mathbf{v} = [a; b]$ irányvektora kielégíti az

$$(3) \quad a^2 F''_{xx} + 2ab F''_{xy} + b^2 F''_{yy} = 0$$

egyenletet.

1. Tegyük fel, hogy $F''_{yy} \neq 0$.

Ekkor $a \neq 0$, mert $a = 0$ esetben a (3) egyenlet alapján $b = 0$ is bekövetkeznék, holott $a^2 + b^2 = 1$. Így a^2 -tel osztva

$$(4) \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 F''_{yy} + 2\frac{b}{a} F''_{xy} + F''_{xx} = 0.$$

Az egyenletből a $\frac{b}{a}$ értéket meghatározva megkapjuk az érintő irányvektorát.

A $P(x_0; y_0)$ szinguláris pont jellegét a (4) alatti egyenlet diszkriminánsa határozza meg.

a) $F''_{xy}{}^2 - F''_{xx}F''_{yy} > 0.$

A görbének a szinguláris pontban két különböző valós érintője van. A szinguláris pont *csomópont* (önmetszési pont).

b) $F''_{xy}{}^2 - F''_{xx}F''_{yy} = 0.$

A görbének a szinguláris pontban két egybeeső valós érintője van. A szinguláris pont vagy *csúcspont*, vagy a görbe két vagy több különböző ága érinti egymást az illető pontban.

c) $F''_{xy}{}^2 - F''_{xx}F''_{yy} < 0.$

A görbének a szinguláris pontban nincs érintője.

E feltétel alapján $F(x; y)$ -nak az $(x_0; y_0)$ pontban szélsőértéke van (az $F(x_0; y_0)$ érték vagy maximum, vagy minimum). Ezért van $(x_0; y_0)$ -nak olyan környezete, amelyben az $F(x; y) = 0$ egyenletnek nincs $(x_0; y_0)$ -tól különböző megoldása, azaz ebbe a környezetbe a görbének csak az $(x_0; y_0)$ pontja esik. Ekkor azt mondjuk, hogy az $(x_0; y_0)$ pont *izolált* pont.

2. Tegyük fel, hogy $F''_{xx} \neq 0$. Az 1. ponthoz hasonló gondolatmenettel következtethetünk az $\frac{b}{a}$ hányadosra, azaz az érintő irányvektorára.

3. Tegyük fel, hogy

$$F''_{xx} = 0 \quad \text{és} \quad F''_{yy} = 0.$$

Ekkor $F''_{xy} \neq 0$.

A (3) egyenlet ekkor így alakul

$$abF''_{xy} = 0.$$

Ebből az egyenletből:

vagy $a = 0$ és $b = \pm 1,$

vagy $b = 0$ és $a = \pm 1.$

Tehát két érintő van, amelyek egymásra merőlegesek és párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.

Megjegyzés. A tárgyalt esetekben feltételeztük, hogy $(x_0; y_0)$ valóban szinguláris pont. Mint már említettük, ehhez az (1) alatti feltételek csak szükségesek, de általában nem elegendők.

Előfordulhat az az eset is, hogy mindhárom másodrendű parciális derivált is nulla az adott helyen. Ekkor a görbe jellegének megállapításához vizsgálni kell a görbe viselkedését a pont környezetében.

Az elégséges feltételek vizsgálatára nem térünk ki.

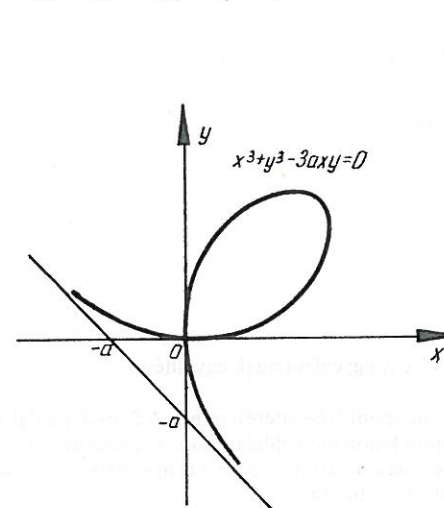
Példák

1. Hol és milyen szinguláris pontja van az

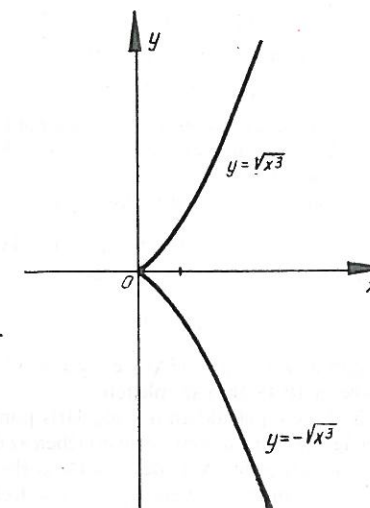
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$$

egyenlettel megadott görbének, az ún. Descartes-féle levélnek (10.45 ábra)?

$$F'_x = 3x^2 - 3ay, \quad F'_y = 3y^2 - 3ax.$$



10.45 ábra



10.46 ábra

Az origóban: $F'_x = 0, F'_y = 0$, itt lehetséges szinguláris pont.

$$F''_{xx} = 6x, \quad F''_{xy} = -3a, \quad F''_{yy} = 6y.$$

A $O(0;0)$ pontban:

$$F''_{xx} = 0, \quad F''_{xy} = -3a, \quad F''_{yy} = 0.$$

Az origóban csomópont (önmetszési pont) van.

A tárgyalt harmadik esetnek megfelelően az érintők a koordinátatengelyek.

2. $F(x; y) \equiv y^2 - x^3 = 0.$

A görbe az $y = \sqrt{x^3}$ és $y = -\sqrt{x^3}$ egyenletű ágakból áll (10.46 ábra).

$$F'_x = -3x^2, \quad F'_y = 2y.$$

$$F''_{xx} = -6x, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{yy} = 2.$$

Az $O(0; 0)$ pontban lehetséges szinguláris pont.

Az origóban

$$F''_{xx} = 0, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{yy} = 2.$$

$$F''_{xy}{}^2 - F''_{xx}F''_{yy} = 0; \quad F''_{yy} \neq 0.$$

A görbének az origóban csúcspontja van.

A két egybeeső félérntőt a (3) egyenletből határozzuk meg:

$$b^2 F''_{yy} = 0, \text{ azaz } b = 0.$$

Az érintő irányvektora: $[1; 0]$, a félérntő az x tengely.

$$3. \quad F(x; y) \equiv y^3 - x^2 = 0.$$

A görbe képe (10.47 ábra)

A görbe az $y = x$ egyenesre való tükrözéssel a 2. példában szereplő görbéből kapható. A görbének az origóban csúcspontja van, a félérntő az y tengely.

$$4. \quad y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5 = 0.$$

Az origóban: $F(x; y) = 0$.

$$F'_x = -4xy + 4x^3 - 5x^4, \quad F'_y = 2y - 2x^2.$$

$$F''_{xx} = -4y + 12x^2 - 20x^3,$$

$$F''_{xy} = -4x, \quad F''_{yy} = 2.$$

Az origóban $F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \quad F''_{xx} = 0, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{yy} = 2.$

$$F''_{xy} - F''_{xx}F''_{yy} = 0.$$

Az origóban csúcspont (visszatérési pont) van.

A (3) egyenlet alapján: $b^2 F''_{yy} = 0$, azaz $b = 0$.

Az érintő az x tengely.

Az implicit egyenletből y -t kifejezve:

$$y = \frac{2x^2 \pm \sqrt{4x^4 - 4x^4 + 4x^5}}{2}$$

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$$

A görbe az $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}}\sqrt{x}$ és az $y = x^2 - x^{\frac{5}{2}}\sqrt{x}$ egyenletű ágak egyesítése.

Képét a 10.48 ábra szemlélteti.

A 2., 3. és 4. példákban a szinguláris pont csúcspont (visszatérési pont). A 2. és 3. példánál a görbe két ága az érintési pont környezetében az érintő különböző oldalain van, a visszatérési pont elsőrendű visszatérési pont. A 4. példában a görbe két ága az érintési pont környezetében az érintő azonos oldalain van, a visszatérési pont másodrendű visszatérési pont.

$$5. \quad F(x; y) \equiv y^3 - x^4 = 0.$$

$$F'_y = 3y^2, \quad F'_x = -4x^3.$$

Az origóban $F(x; y) = 0, \quad F'_x = 0, \quad F'_y = 0$.

$$F''_{xx} = -12x^2, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{yy} = 6y.$$

Az origóban mind a három parciális derivált nulla. A görbének nincs szinguláris pontja. Ez belátható ha az explicit alakra hozott függvényt vizsgáljuk:

$$y = x^{\frac{4}{3}}, \quad y_{(-x)} = (-x)^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{4}{3}},$$

$$y' = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}, \quad y'_{(0)} = 0.$$

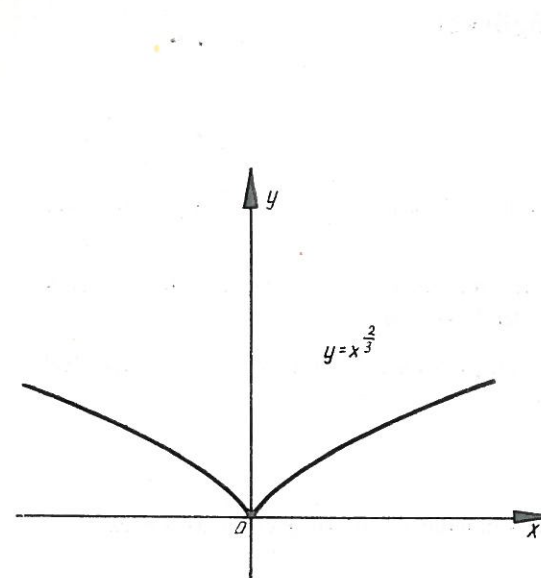
A függvény páros, és érintője az origóban az x tengely.

$$y'' = \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}.$$

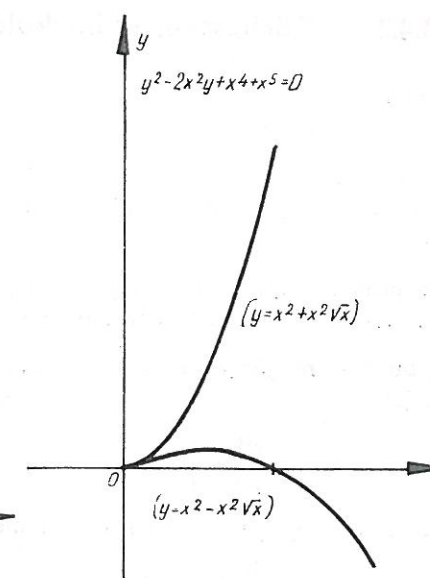
Az $x = 0$ helyen a második derivált végtelenné válik, a görbület nulla (görbületi kör nincs) (10.49 ábra).

$$6. \quad F(x; y) \equiv x^2y - x^2 + y^3 - y^2 = 0.$$

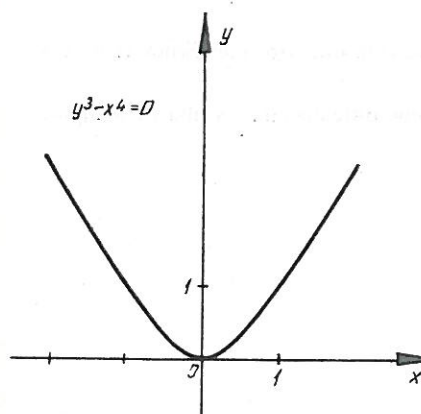
$$F'_x = 2xy - 2x, \quad F'_y = x^2 + 3y^2 - 2y.$$



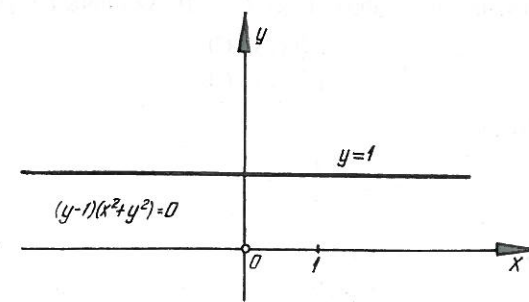
10.47 ábra



10.48 ábra



10.49 ábra



10.50 ábra

Az origóban: $F(x; y) = 0, \quad F'_x = 0, \quad F'_y = 0$.

$$F''_{xx} = 2y - 2, \quad F''_{xy} = 2x, \quad F''_{yy} = 6y - 2.$$

Az origóban:

$$F''_{xx} = -2, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{yy} = -2.$$

$$F''_{xy} - F''_{xx}F''_{yy} = -4 < 0.$$

Az origóban izolált pont van. Az implicit függvényt átalakítva:

$$x^2y - x^2 + y^3 - y^2 = x^2(y-1) + y^2(y-1) = (y-1)(x^2+y^2).$$

$$F(x; y) = (y-1)(x^2+y^2).$$

A görbe az $y = 1$ egyenesből és az izolált $(0; 0)$ pontból áll (10.50 ábra).

10.4.2. Görbeseregek burkológörbéi

Legyen adott az

$$(1) \quad F(x; y; C) = 0$$

görbesereg.

C a görbesereg paramétere. A C paraméter különböző értékeihez a sereg különböző görbéi tartoznak.

Definíció. Az olyan görbe, amely a görbesereg minden egyes görbáját legalább elsőrendben érinti, a görbesereg burkológörbéje, röviden burkolója.

A burkoló meghatározása. Legyen a burkológörbe egyenlete a C paraméter segítségével kifejezve:

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} x &= \varphi(C) \\ y &= \psi(C) \end{aligned} \right\}.$$

Tegyük fel, hogy a koordináták a C paraméter differenciálható függvényei, azaz léteznek az

$$\dot{x} = \dot{\varphi}(C)$$

$$\dot{y} = \dot{\psi}(C)$$

deriváltak.

1. Tegyük fel, hogy az $F(x; y; C) = 0$ egyenletű görbesereghez tartozó görbéknek és a burkolónak nincsenek szinguláris pontjai.

Tegyük fel továbbá, hogy $F'_y \neq 0$. Az implicit függvény differenciálási szabálya alapján:

$$y' = -\frac{F'_x(x; y; C)}{F'_y(x; y; C)}.$$

Röviden

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Az $x = \varphi(C)$

$$y = \psi(C)$$

egyenletű görbe érintőjének irántangense, ha $\dot{\varphi}(C) \neq 0$:

$$y' = \frac{\dot{\psi}(C)}{\dot{\varphi}(C)}.$$

A burkoló definíciója értelmében a két derivált értéke megegyezik:

$$-\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{\dot{\psi}(C)}{\dot{\varphi}(C)}, \quad \text{innen}$$

$$F'_x \dot{\varphi}(C) + F'_y \dot{\psi}(C) = 0,$$

azaz

$$(3) \quad F'_x(x; y; C) \dot{\varphi}(C) + F'_y(x; y; C) \dot{\psi}(C) = 0.$$

Írjuk fel az

$$F(x; y; C) = 0 \quad \text{függvény}$$

teljes differenciálhányadosát, feltéve, hogy x és y a görbesereg és a burkoló érintkezési pontjának koordinátái, tehát $x = \varphi(C)$ és $y = \psi(C)$. Így

$$F(x; y; C) = F[\varphi(C); \psi(C); C] = 0.$$

A teljes differenciálhányados, a láncszabályt alkalmazva:

$$(4) \quad F'_x(x; y; C) \dot{\varphi}(C) + F'_y(x; y; C) \dot{\psi}(C) + F'_C(x; y; C) = 0.$$

Behelyettesítve a (3) egyenletet:

$$(5) \quad F'_C(x; y; C) = 0.$$

Ezt az egyenletet kielégítik az érintkezési pontok koordinátái.

Tehát az (1) és (5) egyenletekből alkotott

$$(a) \quad F(x; y; C) = 0$$

$$F'_C(x; y; C) = 0$$

egyenletrendszer meghatározza a görbesereg burkolójának, esetleg burkolóinak x és y koordinátáit, mint a C paraméter függvényét.

2. Tegyük fel, hogy az $F(x; y; C) = 0$ egyenletű görbesereg görbéin az $x = \varphi(C)$, $y = \psi(C)$ pontok szinguláris pontok.

$$\text{Ekkor} \quad F'_x = 0 \quad \text{és} \quad F'_y = 0.$$

A (4) egyenlet most is fennáll:

$$F'_x(x; y; C) \dot{\varphi}(C) + F'_y(x; y; C) \dot{\psi}(C) + F'_C(x; y; C) = 0.$$

Az egyenletből F'_x és F'_y zérus volta miatt most is

$$F'_C(x; y; C) = 0.$$

Innen következik, hogy az (a) egyenletrendszer által meghatározott görbe nemcsak burkoló, hanem a görbesereg görbéin található szinguláris pontok mértani helye is lehet.

Kiküszöbölve az (a), azaz

$$\left. \begin{aligned} F(x; y; C) &= 0 \\ F'_C(x; y; C) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerből a C paramétert, kapjuk az x és y koordináták közötti közvetlen kapcsolatot adó

$$(b) \quad \Phi(x; y) = 0$$

egyenletet. A (b) egyenlet által adott görbe a görbesereg *diszkrimináns* görbéje.

A diszkrimináns görbéhez tartozhat a burkoló, a szinguláris pontok geometriai helye és a sereg egyes görbéi. A diszkrimináns görbét meghatározva, esetenként vizsgálni kell az adott görbesereghez való viszonyát.

Példák

1. Határozzuk meg az

$$(x-C)^2 + (y-C)^2 = a^2 \quad (a > 0 \text{ állandó})$$

egyenletű görbesereg burkolóit!

Az egyenlet olyan a sugarú körsereg egyenlete, amelynek középpontja az $y = x$ egyenesen fekszik (10.51 ábra). Az $(x-C)^2 + (y-C)^2 = a^2$ egyenletet C szerint deriválva:

$$-2(x-C) - 2(y-C) = 0.$$

Innen $y-C = -x+C$, azaz

$$C = \frac{y+x}{2}.$$

C értékét a sereg egyenletébe helyettesítve:

$$\left(x - \frac{y+x}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y+x}{2}\right)^2 = a^2.$$

Innen $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = a^2$

vagy $2\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = a^2$

$$(y-x)^2 = 2a^2$$

$$y-x = \pm a\sqrt{2}.$$

A burkolók az

$$y = x + a\sqrt{2} \quad \text{és}$$

$$y = x - a\sqrt{2}$$

egyenletű egyenesek.

2. Határozzuk meg a különböző α szögek alatt adott, v_0 sebességgel kilőtt lövedékek röppályáinak seregét. Írjuk fel a pályagörbék burkoló görbéjének egyenletét. Az α irányú v_0 sebességnek a koordináta-tengelyek irányába eső vetületei (10.52 ábra):

$$v_0 \cos \alpha \quad \text{és} \quad v_0 \sin \alpha.$$

A lövedék mozgása a v_0 sebességű egyenletes mozgás és a szabadesés eredője. A sebesség komponensei:

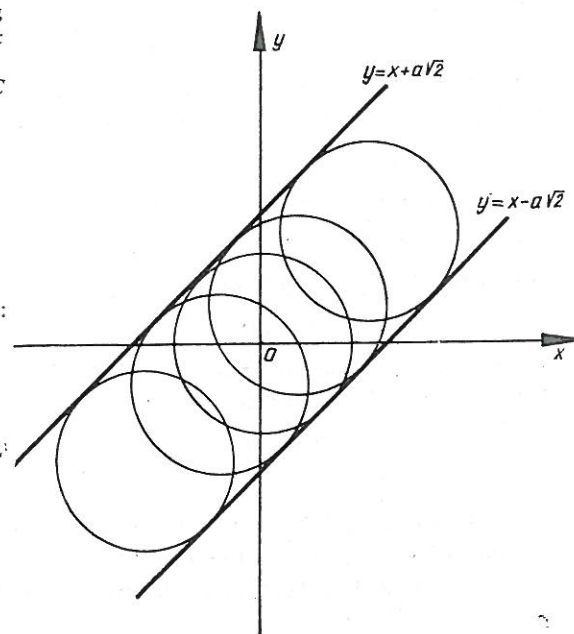
$$v_x = v_0 \cos \alpha,$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt.$$

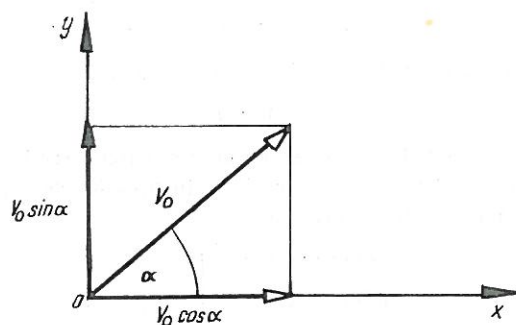
Az elmozdulás komponenseit a sebesség komponenseiből a t idő szerint a $[0; t]$ intervallumban való integrálással kapjuk.

$$x = v_0 \cos \alpha t,$$

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{g}{2} t^2.$$



10.51 ábra



10.52 ábra

A t időt kiküszöbölve:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

$$y = x \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Mivel $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$,

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2.$$

$$\tan \alpha = C \quad \text{jelöléssel:}$$

$$y = Cx - \frac{g}{2v_0^2} (1 + C^2) x^2,$$

$$F(x; y; C) = y - Cx + \frac{g}{2v_0^2} (1 + C^2) x^2 = 0.$$

Ez a pályagörbék seregének egyenlete. C szerint deriválva:

$$F'_C(x; y; C) = -x + \frac{gC}{v_0^2} x^2 = 0.$$

Ebből az egyenletből

$$C = \frac{v_0^2}{gx}.$$

C értékét $F(x; y; C) = 0$ -ba helyettesítve:

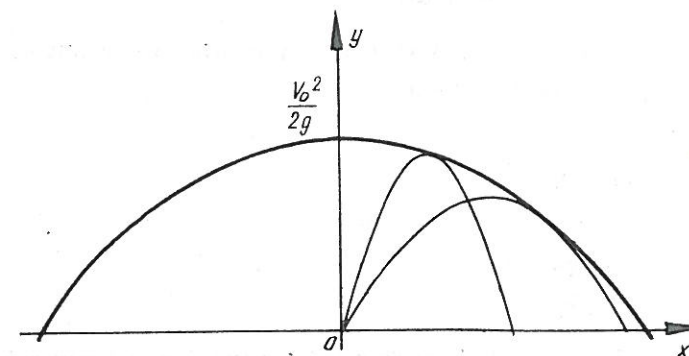
$$y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g}{2v_0^2} \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 x^2}\right) x^2.$$

$$y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Tehát a burkoló egyenlete:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

A burkoló szintén parabola (10.53 ábra). Neve veszélyességi parabola. A parabolán kívüli pontot a v_0 kezdősebességű lövedék — akármilyen szög alatt lövik is ki — nem tud elérni.



10.53 ábra

3. $y^2 = (x-a)^3$ (a a paraméter).

Az egyenlet az

$y = \sqrt{(x-a)^3}$ és $y = -\sqrt{(x-a)^3}$ függvényekkel megadott görbesereg egyenlete (10.54 ábra).

$$F(x; y; a) \equiv y^2 - (x-a)^3 = 0.$$

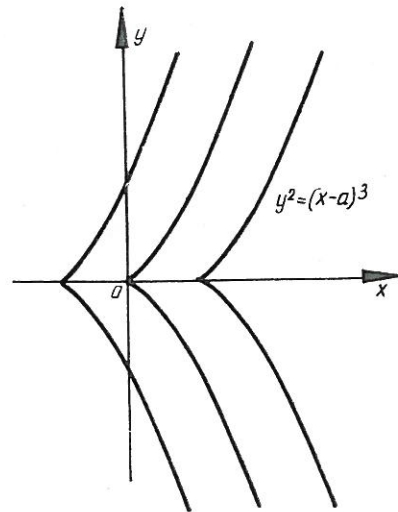
a szerint deriválva:

$$3(x-a)^2 = 0, \quad \text{azaz}$$

$$x = a.$$

Ezt a görbesereg egyenletébe helyettesítve:

$$y = 0.$$



10.54 ábra

A diszkrimináns görbe most a burkoló és a görbesereg szinguláris pontjainak (csúcspontjainak) mértani helye. A diszkrimináns görbe az x tengely.

4. $(y-b)^2 = x^3$ (b a paraméter).

A sereg görbéit az $y = \sqrt{x^3+b}$, $y = -\sqrt{x^3+b}$ függvények adják meg (10.55 ábra).

$$F(x; y; b) = (y-b)^2 - x^3 = 0.$$

b szerint deriválva:

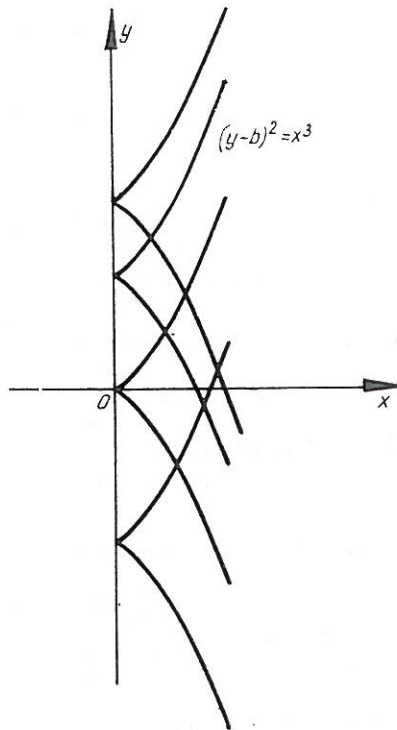
$$-(y-b) = 0.$$

$$y = b.$$

Ezt a görbesereg egyenletébe írva:

$$x = 0.$$

A diszkrimináns görbe az y tengely. Ez azonban csak a szinguláris pontok mértani helye, a görbeseregnek nincs burkolója.



10.55 ábra

10.5 TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

10.5.1 A kettős integrál

10.5.1.1 Síkbeli ponthalmazok területe

A továbbiakban téglalapon mindig olyan téglalapot értünk, amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel. Az $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ egyenlőtlenségekkel meghatározott D téglalap területén az oldalak szorzatát, azaz a

$$T = (b-a)(d-c) \quad \text{számot értjük.}$$

Általánosabb ponthalmazok területét téglalapok segítségével definiáljuk.

Legyen H korlátos halmaz a síkban. Fedjük le H -t véges sok téglalappal:

$$H \subset \bigcup_{i=1}^n D_i,$$

és tekintsük e téglalapok területösszegét. Jele:

$$\sum_{i=1}^n T(D_i).$$

Definíció. A H halmaz külső területén a halmazt befedő téglalaprendszerek területösszegének alsó határát értjük. Ezt $T_k(H)$ -val jelölve:

$$T_k(H) = \inf \sum_{i=1}^n T(D_i).$$

(olv.: infimum).

Megjegyzés. A következőkben használt halmazelméleti fogalmakat és jelöléseket az 5.1 fejezetben vezettük be.

Tekintsük most az olyan, páronként egymásba nem nyúló D_j téglalapokból álló rendszert, amelyek mindegyike H -ban van.

$$\bigcup_{j=1}^m D_j \subset H,$$

és tekintsük e téglalapok területösszegét:

$$\sum_{j=1}^m T(D_j).$$

Definíció. A H halmaz belső területén a halmazba beírható, páronként egymásba nem nyúló téglalapok területösszegének felső határát értjük. Jelöljük ezt $T_b(H)$ -val.

$$T_b(H) = \sup \sum_{j=1}^m T(D_j)$$

(olv.: supremum).

Az egyik felosztás szerint:

$$H = \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

a másik szerint

$$H = \bigcup_{k=1}^m B_k,$$

(A_i és B_k a két felosztás részhalmazai).

Legyen Q_i az A_i részhalmaz, R_k a B_k részhalmaz tetszőleges pontja. Képezzük a következő integrálközelítő összegeket!

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^m f(Q_i)T(A_i), \quad Q_i \in A_i;$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n f(R_k)T(B_k), \quad R_k \in B_k.$$

Megmutatjuk, hogy

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < 2\varepsilon \cdot T(H).$$

Tekintsük a két felosztás közös finomítását, azaz azt a felosztást, amelynek tagjai az összes

$$A_i \cap B_k \text{ alakú halmazok} \quad (1 \leq i \leq m; \quad 1 \leq k \leq n).$$

$$H = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{k=1}^n (A_i \cap B_k) \quad \text{és}$$

$$T(H) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n T(A_i \cap B_k).$$

Nyilván elegendő azokra a tagokra elvégezni az összegezést, amelyekre

$$A_i \cap B_k \neq \emptyset.$$

Szemeljük ki a nem üres $A_i \cap B_k$ halmaz egy tetszőleges P_{ik} pontját, és képezzük a következő integrálközelítő összeget:

$$\sigma = \sum_{A_i \cap B_k \neq \emptyset} f(P_{ik})T(A_i \cap B_k).$$

Mivel minden rögzített i mellett

$$T(A_i) = \sum_{k=1}^n T(A_i \cap B_k), \quad \text{ezért}$$

$$\begin{aligned} |\sigma - \sigma_1| &= \left| \sum_{A_i \cap B_k \neq \emptyset} f(P_{ik})T(A_i \cap B_k) - \sum_{i=1}^m f(Q_i)T(A_i) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^m \sum_{A_i \cap B_k \neq \emptyset} [f(P_{ik}) - f(Q_i)]T(A_i \cap B_k) \right| < \varepsilon \cdot T(H). \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$|\sigma - \sigma_2| < \varepsilon \cdot T(H).$$

A $|\sigma_1 - \sigma_2|$ értékre:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = |\sigma_1 - \sigma + \sigma - \sigma_2| \leq |\sigma - \sigma_1| + |\sigma - \sigma_2| = 2\varepsilon T(H).$$

Tehát

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < 2\varepsilon \cdot T(H),$$

amit igazolni akartunk.

Tekintsük ezek után H egy tetszőleges, minden határon túl finomodó felosztássorozatát. A Cauchy-féle konvergencia-kritérium (6.1.6 pont) és az imént bizonyítottak alapján a megfelelő integrálközelítő összegek sorozata konvergens. Könnyű belátni, hogy a határérték független a felosztássorozattól. Tehát bebizonyítottuk, hogy folytonos függvény a korlátos, zárt H halmazon integrálható.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

II. tétel. Ha $f(x; y)$ integrálható a H mérhető területű halmazon, és $H \subset D$, ahol D egy téglalap és $f(x; y) = 0$ a $D \setminus H$ halmazon, akkor $f(x; y)$ integrálható D -n is, és

$$\iint_H f(x; y) dx dy = \iint_D f(x; y) dx dy.$$

Az I. tétel és II. tétel következménye:

III. tétel. Ha $f(x; y)$ folytonos a zárt és mérhető területű H halmazon, amelyet a D téglalap tartalmaz, akkor az

$$F(x; y) = \begin{cases} f(x; y), & \text{ha } (x; y) \in H, \\ 0, & \text{ha } (x; y) \in D \setminus H \end{cases}$$

definícióval megadott függvény integrálható D -n, és

$$\iint_D F(x; y) dx dy = \iint_H f(x; y) dx dy.$$

10.5.1.4 A kettős integrál tulajdonságai

A kettős integrál definíciójából adódnak a következő tulajdonságok

Ha $f(x; y)$ és $g(x; y)$ integrálható H -n, és c tetszőleges konstans, akkor $cf(x; y)$; $f(x; y) + g(x; y)$ és $|f(x; y)|$ is integrálható H -n és

$$\begin{aligned} \iint_H cf(x; y) dT &= c \iint_H f(x; y) dT, \\ \iint_H [f(x; y) + g(x; y)] dT &= \iint_H f(x; y) dT + \iint_H g(x; y) dT, \\ \left| \iint_H f(x; y) dT \right| &\leq \iint_H |f(x; y)| dT. \end{aligned}$$

Ha $f(x; y)$ és $g(x; y)$ integrálhatók H -n, és

$$f(x; y) \leq g(x; y), \text{ akkor} \\ \iint_H f(x; y) dT \leq \iint_H g(x; y) dT.$$

Ha H_1 és H_2 mérhető területű halmazok, és $f(x; y)$ mindkét halmazon integrálható, akkor $H_1 \cup H_2$ -n is integrálható, és ha $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, akkor

$$\iint_{H_1 \cup H_2} f(x; y) dx dy = \iint_{H_1} f(x; y) dx dy + \iint_{H_2} f(x; y) dx dy.$$

10.5.1.5 A kettős integrál kiszámítása

a) A kettős integrál kiszámítása téglalap alakú halmazon

Legyen a D halmaz az

$$a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d$$

egyenlőtlenségekkel megadott téglalap.

I. tétel. Ha $f(x; y)$ a D téglalapon folytonos, akkor minden $c \leq y \leq d$ -ben rögzített y mellett $f(x; y)$ x függvényeként is folytonos. Ezért létezik a $\varphi(y) = \int_a^b f(x; y) dx$ függvény, amely $c \leq y \leq d$ -ben folytonos, és

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d \varphi(y) dy,$$

azaz

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x; y) dx \right] dy.$$

Bizonyítás. Osszuk fel az $[a; b]$ és $[c; d]$ intervallumot m , illetve n egyenlő részre az

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_m = b \quad \text{és} \\ c = y_0 < y_1 < \dots < y_k < \dots < y_n = d \quad \text{osztópontokkal.}$$

Az egyenlő részekre osztás miatt:

$$\frac{b-a}{m} = \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\frac{d-c}{n} = \Delta y_k = y_k - y_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ha $m \rightarrow \infty$ és $n \rightarrow \infty$, akkor minden határon túl finomodó felosztáshoz jutunk. Ezér

$$\iint_H f(x; y) dx dy = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i; y_k) \Delta x_i \Delta y_k.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor létezik olyan N , hogy bármely $m > N$, $n > N$ esetén

$$(1) \quad \left| \iint_D f(x; y) dx dy - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i; y_k) \Delta x_i \Delta y_k \right| < \varepsilon.$$

Legyen $n > N$ rögzített és $m \rightarrow \infty$. Ekkor az $[a; b]$ intervallum egy minden határon túl finomodó felosztáshoz jutunk, így

$$\sum_{i=1}^m f(x_i; y_k) \Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x; y_k) dx, \quad \text{azaz} \\ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i; y_k) \Delta x_i \Delta y_k \rightarrow \sum_{k=1}^n \left[\int_a^b f(x; y_k) dx \right] \Delta y_k.$$

Az (1) egyenlőtlenség alapján:

$$\left| \iint_D f(x; y) dx dy - \sum_{k=1}^n \varphi(y_k) \Delta y_k \right| \leq \varepsilon.$$

Ha most $n \rightarrow \infty$, akkor

$$\sum_{k=1}^n \varphi(y_k) \Delta y_k \rightarrow \int_c^d \varphi(y) dy.$$

Tehát

$$\left| \iint_D f(x; y) dx dy - \int_c^d \varphi(y) dy \right| \leq \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges kis pozitív szám:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d \varphi(y) dy, \quad \text{azaz}$$

$$(2) \quad \iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x; y) dx \right] dy.$$

x és y szerepének felcserélésével az I. tétel így alakul.

Ha $f(x; y)$ a D téglalapon folytonos, akkor minden $a \leq x \leq b$ -ben rögzített x mellett $f(x; y)$ y függvényeként is folytonos, ezért létezik a $g(x) = \int_c^d f(x; y) dy$ függvény, amely $a \leq x \leq b$ -ben folytonos, és

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b g(x) dx, \quad \text{azaz}$$

$$(3) \quad \iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x; y) dy \right] dx.$$

A kettős integrál tehát kétszeres integrálással számítható ki.

A kétszeres integrálokat rövidebben zárójelek nélkül is felírhatjuk.

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x; y) dx \right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x; y) dx dy = \\ = \int_c^d dy \int_a^b f(x; y) dx,$$

és

$$\begin{aligned} \iint_D f(x; y) dx dy &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x; y) dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x; y) dy dx = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d f(x; y) dy. \end{aligned}$$

Tételeink következménye, hogy téglalap alakú halmazokon a kétszeres integrálás sorrendje felcserélhető:

$$(4) \quad \int_a^b \int_c^d f(x; y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x; y) dx dy.$$

Az I. tétel gondolatmenetéhez hasonlóan látható be a következő tétel.

II. tétel. Ha $f(x; y)$ az $a \leq x \leq b$ és $c \leq y \leq d$ egyenlőtlenségekkel adott D téglalapon integrálható, és minden $c \leq y \leq d$ -ben rögzített y mellett $f(x; y)$ x függvényeként integrálható $[a; b]$ -ben, azaz létezik a $\varphi(y) = \int_a^b f(x; y) dx$ függvény, akkor $\varphi(y)$ integrálható $[c; d]$ -ben, és

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x; y) dx dy.$$

Hasonlóan, ha $f(x; y)$ az $a \leq x \leq b$ és $c \leq y \leq d$ egyenlőtlenségekkel adott téglalapon integrálható, és minden $[a; b]$ -ben rögzített x mellett $f(x; y)$ y függvényeként integrálható $[c; d]$ -ben, azaz létezik a $g(x) = \int_c^d f(x; y) dy$ függvény, akkor ez integrálható $[a; b]$ -ben, és

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x; y) dy dx.$$

III. Tétel. Ha $f(x)$ integrálható az $a \leq x \leq b$, és $g(y)$ integrálható a $c \leq y \leq d$ intervallumban, akkor

$F(x; y) = f(x) \cdot g(y)$ integrálható az $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ téglalapon, és

$$(5) \quad \iint_D F(x; y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy.$$

A kettős integrál létezése könnyen igazolható, az (5) egyenlőség pedig a II. tétel közvetlen következménye.

b) A kettős integrál kiszámítása általánosabb halmazokon

Definíció. Ha $g_1(x)$ és $g_2(x)$ az $a \leq x \leq b$ intervallumban folytonos függvények, és ott $g_1(x) \leq g_2(x)$, akkor az

$$\left. \begin{aligned} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{aligned} \right\}$$

egyenlőtlenségekkel megadott pontok halmazát az x tengelyre nézve normáltartománynak nevezzük.

Ha $\varphi_1(y)$ és $\varphi_2(y)$ a $c \leq y \leq d$ intervallumban folytonos függvények, és ott $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$, akkor a

$$\left. \begin{aligned} c \leq y \leq d \\ \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y) \end{aligned} \right\}$$

egyenlőtlenségekkel megadott pontok halmazát az y tengelyre nézve normáltartománynak nevezzük.

Gyakori eset, hogy egy H halmaz mindkét tengelyre nézve normáltartomány (pl. téglalap, kör).

Könnyen igazolható, hogy a normáltartományok mérhető területűek.

I. Tétel. Legyen H az x tengelyre nézve normáltartomány.

$$H: \left\{ \begin{aligned} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x). \end{aligned} \right.$$

Legyen $z = f(x; y)$ folytonos a H halmazon. Ekkor

$$\iint_H f(x; y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x; y) dy \right] dx.$$

Bizonyítás. A fenti egyenlet jobb oldalán a belső integrál létezik, mert az integrandusz folytonos, és könnyen belátható, hogy a belső integrál x függvényeként maga is folytonos. Legyen D egy H -t körülvevő téglalap, például

$$D: \left\{ \begin{aligned} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d, \end{aligned} \right.$$

ahol $c \leq \min g_1(x)$ és $d \geq \max g_2(x)$ (10.57 ábra).

Legyen

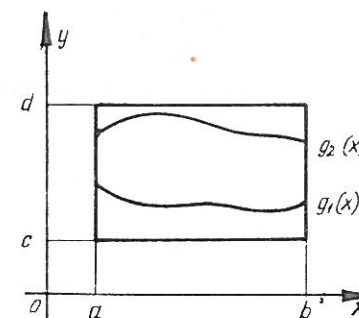
$$F(x; y) = \begin{cases} f(x; y), & \text{ha } (x; y) \in H, \\ 0, & \text{ha } (x; y) \in D \setminus H. \end{cases}$$

A III. egzisztenciátétel alapján $F(x; y)$ integrálható D -ben. $F(x; y)$ minden rögzített x mellett integrálható y függvényeként a $c \leq y \leq d$ szakaszon, mert itt legfeljebb két szakadási helye lehet, $g_1(x)$ és $g_2(x)$, és

$$\int_c^d F(x; y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x; y) dy.$$

Ebből az a) pont II. tétele és a II. egzisztenciátétel alapján:

$$\begin{aligned} \iint_H f(x; y) dx dy &= \iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b \int_c^d F(x; y) dy dx = \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x; y) dy dx. \end{aligned}$$



10.57 ábra

Tehát a H tartományon a kettős integrál kétszeres integrálással számítható ki:

$$\iint_H f(x; y) dx dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x; y) dy dx.$$

Ezt gyakran így is jelöljük:

$$\iint_H f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x; y) dy.$$

Hasonlóan igazolható a tétel következő alakja.

II. Tétel. Ha H az y tengelyre nézve normáltartomány:

$$H: \begin{cases} c \leq y \leq d, \\ \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), \end{cases}$$

és $f(x; y)$ folytonos H -n, akkor

$$\iint_H f(x; y) dx dy = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x; y) dx dy.$$

Ezt így is jelöljük:

$$\iint_H f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x; y) dx.$$

c) A kettős integrál geometriai értelmezése

Legyen adva az $(x; y)$ síkon egy D téglalap

$$D: \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d, \end{cases}$$

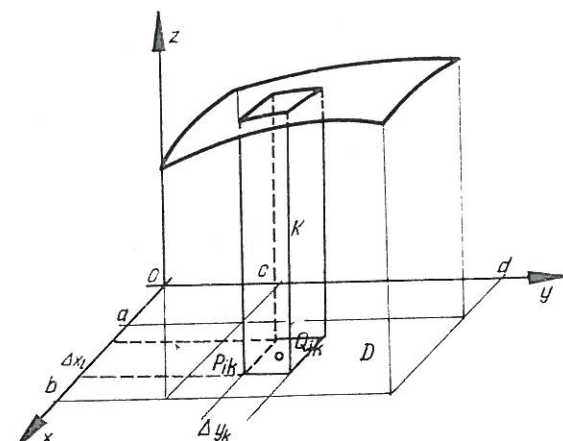
és legyen értelmezve a D téglalapon a $z = f(x; y)$ folytonos és pozitív függvény.

Tekintsük a

$$\begin{aligned} z &= 0, \quad z = f(x; y), \\ x &= a, \quad x = b, \\ y &= c, \quad y = d \end{aligned}$$

felületekkel határolt térrészt, K -t.

Osszuk fel a D téglalapot az oldalak felosztásából származó D_{ik} téglalapokra. Legyen P_{ik} és Q_{ik} a D_{ik} téglalap azon pontja, amelyben $f(x; y)$ a legkisebb, illetve legnagyobb értéket veszi fel D_{ik} -n (D_{ik} a Δx_i , Δy_k oldalú téglalap) (10.58 ábra).



10.58 ábra

Képezzük a

$$\sum_{i,k} f(P_{ik})T(D_{ik}) \quad \text{és} \quad \sum_{i,k} f(Q_{ik})T(D_{ik})$$

integrálközelítő összegeket.

K tartalmazza a D_{ik} alapú és $f(P_{ik})$ magasságú hasábkok mindegyikét, és minden pontja benne van a D_{ik} alapú és $f(Q_{ik})$ magasságú hasábkok valamelyikében. Ezért K térfogata a két felírt integrálközelítő összeg közé esik.

Ha a felosztás minden határon túl finomul, mindkét közelítő összeg a

$$\iint_D f(x; y) dx dy \quad \text{integrálhoz tart, ezért a } K \text{ térrész } V \text{ térfogata.}$$

$$V = \iint_D f(x; y) dx dy.$$

Hasonló gondolatmenettel látható be a következő.

Ha a sík korlátos, zárt és mérhető területű H halmazán adva van a folytonos és pozitív $z = f(x; y)$ függvény, akkor a H fölötti és a $z = f(x; y)$ egyenletű felület alatti térrész térfogata:

$$V = \iint_H f(x; y) dx dy.$$

Példák

1. Állapítsuk meg a $z = f(x; y)$ függvény integrálási tartományának határait, és rajzoljuk fel a tartományt, ha azt az $y = +\sqrt{2-x}$ és $y = 1 - \frac{1}{2}x$ görbék határolják.

Az $y = \sqrt{2-x}$ parabola és az $y = 1 - \frac{1}{2}x$ egyenes metszéspontja az egyenletrendszer megoldása.

$$+\sqrt{2-x} = 1 - \frac{1}{2}x$$

$$2-x = 1-x + \frac{x^2}{4}$$

$$\frac{x^2}{4} = 1, \quad x = \pm 2.$$

Az $y = \sqrt{2-x}$ -ből, ha $x = 2$, $y = 0$,
ha $x = -2$, $y = 2$.

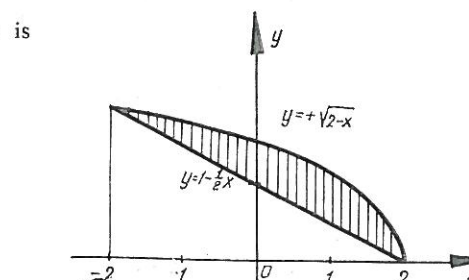
Ezek az értékek az $y = 1 - \frac{1}{2}x$ egyenletet is kielégítik.

Az integrálási tartomány:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x + 1 &\leq y \leq +\sqrt{2-x} \\ -2 &\leq x \leq 2 \end{aligned} \quad (10.59 \text{ ábra}).$$

Az integrál:

$$\int_{-2}^{+2} dx \int_{1-\frac{1}{2}x}^{+\sqrt{2-x}} f(x; y) dy.$$



10.59 ábra

Az integrálási sorrendet felcserélve:

$$y = 1 - \frac{1}{2}x \text{ -ből } x = 2 - 2y,$$

$$y = \sqrt{2-x} \text{ -ből } x = 2 - y^2.$$

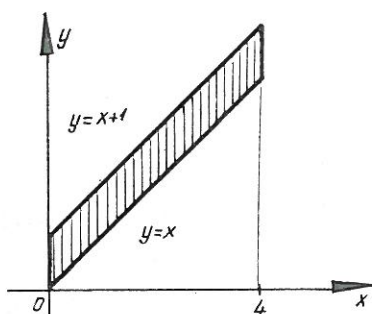
Az integrál

$$\int_0^2 dy \int_{2-2y}^{2-y^2} f(x; y) dx.$$

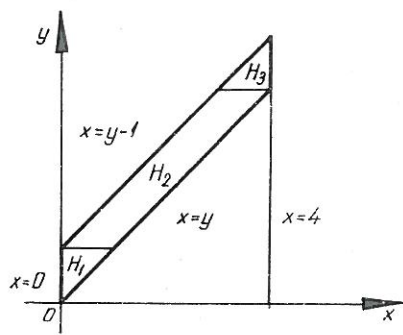
2. Határozzuk meg $z = f(x; y)$ függvény integráljában az integrálási határokat, ha a H tartományt az

$$y = x, \quad y = x+1, \quad x = 0, \quad x = 4$$

egyenesek által határolt paralelogramma alkotja (10.60 ábra)!



10.60 ábra



10.61 ábra

Ha y szerint integrálunk először, az integrálás egy lépésben elvégezhető.

$$x \leq y \leq x+1$$

$$0 \leq x \leq 4$$

$$\iint_H f(x; y) dx dy = \int_0^4 dx \int_x^{x+1} f(x; y) dy.$$

Ha viszont x szerint integrálunk először, az integrálás csak három lépésben végezhető el, a H_1 , H_2 , H_3 tartományokban vett integrálok összegeként (10.61 ábra).

$$\iint_H f(x; y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x; y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^y f(x; y) dx + \int_2^4 dy \int_{y-1}^4 f(x; y) dx.$$

3. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét az

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x; y) dy + \int_1^3 dx \int_{-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}^{\frac{x}{2}+\frac{3}{2}} f(x; y) dy$$

integrálban!

A feladat kitűzése szerint először y , azután x szerint integrálunk. Az integrálási tartomány két részre oszlik. Az elsőben

$$0 \leq y \leq x^2$$

$$0 \leq x \leq 1$$

A másodikban

$$0 \leq y \leq -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

$$1 \leq x \leq 3.$$

Az $y = x^2$ és $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ görbék a $P(1; 1)$ pontban metszik egymást.

A görbéket ábrázolva a 10.62 ábrából látható, hogy ha először y szerint integrálunk, az integrálás csak két részletben végezhető el.

Ha viszont x szerint integrálunk, az integrálás egy lépésben is elvégezhető:

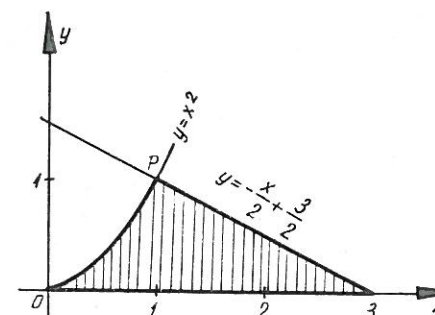
$$y = x^2 \text{ -ből } x = \sqrt{y},$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \text{ -ből } x = -2y + 3.$$

Az integrálási tartomány:

$$+\sqrt{y} \leq x \leq -2y + 3$$

$$0 \leq y \leq 1.$$



10.62 ábra

gy az integrálás sorrendjét felcserélve, az integrál így alakul:

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{-2y+3} f(x; y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{-2y+3} f(x; y) dx = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{-2y+3} f(x; y) dx.$$

4. Számítsuk ki a $z = x^2 + y$ függvény kettős integrálját

a) a $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ téglalapon,

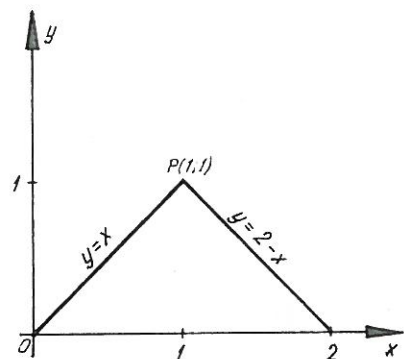
b) az $y = 0$, $y = x$, $y = 2 - x$ egyenletű egyenesekkel határolt háromszögön!

$$\begin{aligned} a) \quad \iint_D (x^2 + y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^2 (x^2 + y) dy dx = \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx = \int_0^1 (2x^2 + 2) dx = \left[\frac{2x^3}{3} + 2x \right]_0^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Ha az integrálást fordított sorrendben végezzük:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y) dx dy &= \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y) dx dy = \\ &= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + xy \right]_0^1 dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + y \right) dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

b) Az integrálási tartományt a 10.63 ábra mutatja. Ha először y szerint integrálunk, az integrálást csak két lépésben végezhetjük el. Az $y = x$ és $y = 2 - x$ egyenesek metszéspontja a $P(1; 1)$ pont.



10.63 ábra

Az integrálási tartományok

a $0 \leq y \leq x; \quad 0 \leq x \leq 1$ és a
 $0 \leq y \leq 2-x; \quad 1 \leq x \leq 2$ háromszögek.

$$\begin{aligned} \iint_H (x^2 + y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^x (x^2 + y) \, dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} (x^2 + y) \, dy \, dx = \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_0^x dx + \int_1^2 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_1^2 \left[2x^2 - x^3 + \frac{(2-x)^2}{2} \right] dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(2-x)^3}{6} \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ha viszont x szerint integrálunk először, az integrálás egy lépésben elvégezhető. Az integrálási tartomány:

$y \leq x \leq 2-y$
 $0 \leq y \leq 1.$

$$\begin{aligned} \iint_H (x^2 + y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_y^{2-y} (x^2 + y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy \right]_y^{2-y} dy = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{(2-y)^3}{3} + 2y - y^2 - \frac{y^3}{3} - y^2 \right] dy = \\ &= \left[-\frac{(2-y)^4}{12} + y^2 - \frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{12} \right]_0^1 = \\ &= -\frac{1}{12} + 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{12} + \frac{4}{3} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

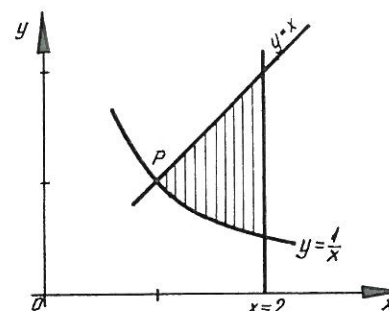
Látjuk, hogy az a) és b) esetekben az integrálási sorrend felcserélésével ugyanazt az eredményt kaptuk.

5. Számítsuk ki a következő kettős integrált:

$$\iint_H \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy, \quad \text{ahol a } H \text{ tartományt az } y = x, \quad y = \frac{1}{x}, \quad x = 2 \text{ görbék}$$

határolják.

Először rajzoljuk fel a tartományt. Az $y = x$ és $y = \frac{1}{x}$ görbék a $P(1; 1)$ pontban metszik egymást.



10.64 ábra

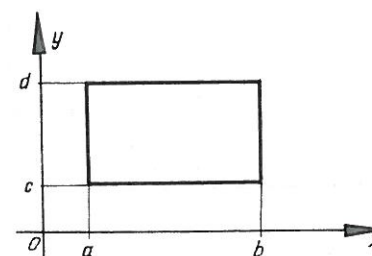
Látható, hogy célszerűbb először y , azután x szerint integrálni (10.64 ábra). Így az integrál

$$\begin{aligned} \iint_H \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy &= \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} \, dy \, dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^x dx = \\ &= \int_1^2 (-x + x^3) \, dx = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_1^2 = -2 + 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

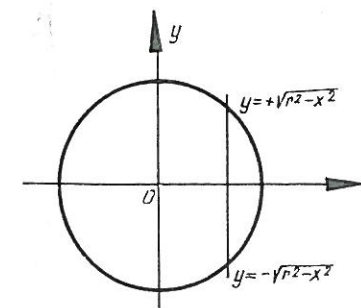
10.5.1.6 A kettős integrál változóinak transzformációja

Az előzőekben láthattuk, hogy a kettős integrál kiszámítása akkor a legegyszerűbb, ha a határok állandók (10.65 ábra).

$a \leq x \leq b,$
 $c \leq y \leq d.$



10.65 ábra



10.66 ábra

Ha az integrációs tartomány kör, az integrálási határok irracionális egyenletű görbék, pl. a 10.66 ábrán feltüntetett esetben:

$$-\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}, \\ -r \leq x \leq r.$$

Az integrálok kiszámítása sok esetben egyszerűbbé tehető új változók bevezetésével.

10.5.1.6.1 Polárkoordináták

A 7.4. fejezetben már megismertedtünk a polárkoordináták fogalmával. A P pontot az O pólustól való r távolság és a φ elhajlási szög jellemzi (10.67 ábra).

A P pont polárkoordinátái $P(r, \varphi)$.
Összefüggés a derékszögű és polárkoordináták között, ha a p polártengely az x tengellyel egybeesik (10.68 ábra):

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\},$$

illetve

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}.$$

I. Tétel. Legyen H a

$$H: \begin{cases} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ a \leq r \leq b \end{cases}$$

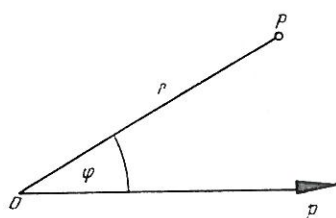
körgyűrűcikk (10.69/a ábra).

Tegyük fel, hogy $f(x; y)$ folytonos H -n.
Ekkor

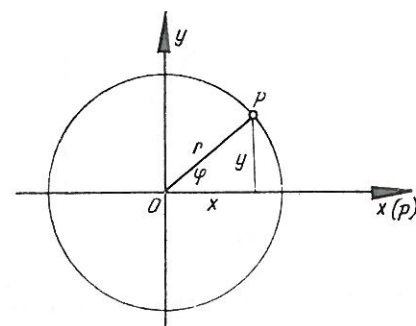
$$\iint_H f(x; y) dx dy = \\ = \iint_D f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

ahol D a

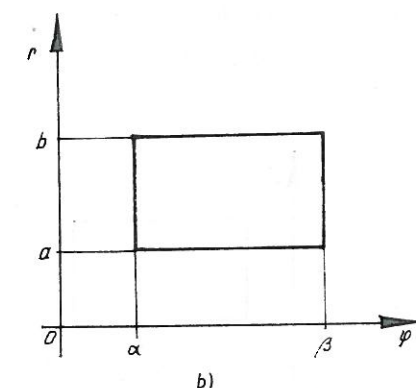
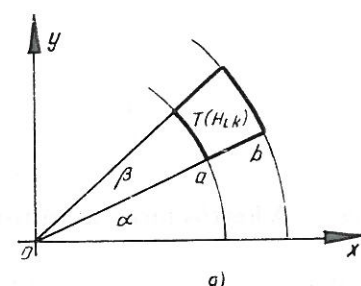
$$D: \begin{cases} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ a \leq r \leq b \end{cases} \text{ téglalap a } (\varphi; r) \text{ síkon (10.69/b ábra).}$$



10.67 ábra



10.68 ábra



10.69 ábra

Bizonyítás. Osszuk fel a H körgyűrűcikket a következő módon:

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_i < \dots < \varphi_m = \beta. \\ a = r_0 < r_1 < \dots < r_k < \dots < r_n = b.$$

A felosztás tagjai legyenek a H_{ik}

$$H_{ik}: \begin{cases} \varphi_{i-1} \leq \varphi \leq \varphi_i \\ r_{k-1} \leq r \leq r_k \end{cases}$$

körgyűrűcikk.

Legyen $\Delta \varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ és $\Delta r_k = r_k - r_{k-1}$.

Tekintsük a felosztáshoz tartozó

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_{ik}; y_{ik}) T(H_{ik})$$

közelítő összeget, ahol

$$x_{ik} = \frac{r_{k-1} + r_k}{2} \cdot \cos \varphi_i, \quad y_{ik} = \frac{r_{k-1} + r_k}{2} \sin \varphi_i.$$

A $T(H_{ik})$ terület (10.70 ábra):

$$T(H_{ik}) = \frac{1}{2} \Delta \varphi_i r_k^2 - \frac{1}{2} \Delta \varphi_i r_{k-1}^2 = \\ = \frac{1}{2} \Delta \varphi_i (r_{k-1} + r_k)(r_k - r_{k-1}) = \frac{r_{k-1} + r_k}{2} \Delta r_k \Delta \varphi_i.$$

Legyen $\varrho_k = \frac{r_{k-1} + r_k}{2}$.

Így a

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m f(\varrho_k \cos \varphi_i; \varrho_k \sin \varphi_i) \varrho_k \Delta r_k \Delta \varphi_i$$

összeget kapjuk, amely nem más, mint az

$$f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) r$$

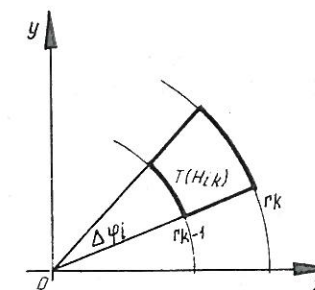
folytonos függvény integrálközelítő összege a D téglalapon a $(\varphi_{ik}; r_{ik}) = (\varphi_i; \varrho_k)$ pontok felvételével. Ezt az átalakítást minden határon túl finomodó felosztássorozatra elvégezve:

$$\iint_H f(x; y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

A kettős integrálok kiszámítására vonatkozó a) I. tétel alapján:

$$\iint_H f(x; y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

A helyettesítést tehát formálisan úgy végezzük el, hogy x és y helyébe $r \cos \varphi$ -t, illetve $r \sin \varphi$ -t, $dT = dx dy$ helyébe pedig $r dr d\varphi$ -t írunk.



10.70 ábra

II. Tétel. Legyen $r_1(\varphi)$ és $r_2(\varphi)$ az $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ intervallumban folytonos, és ott $r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$. Legyen H az $(x; y)$ síkon az a halmaz, amelynek pontjai polárkoordinátáikban kielégítik az

$$\alpha \leq \varphi \leq \beta$$

$$r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$$

egyenlőtlenségeket.

(Ez azt jelenti, hogy H polárkoordinátákban φ -re nézve normáltartomány.)

Tegyük fel, hogy $f(x; y)$ folytonos H -n. Ekkor:

$$\iint_H f(x; y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

A tétel bizonyítása az I. tétel bizonyításához hasonló.

Példa

Írjuk fel polárkoordinátákkal az

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x; y) dy dx \quad \text{integrált!}$$

Az integrációs határok:

$$0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$$

$$0 \leq x \leq 2.$$

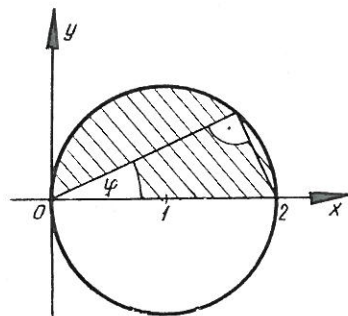
Mivel

$$y = \sqrt{2x-x^2}$$

$$y^2 = 2x - x^2, \quad \text{azaz} \quad x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

Teljes négyzetté kiegészítve:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$



10.71 ábra

Az integrálási tartomány tehát az $R = 1$ sugarú, $(1; 0)$ középpontú kör felső fele. A 10.71 ábrából leolvashatóan:

$$r = 2 \cos \varphi.$$

A felső félkörnél a tartomány:

$$0 \leq r \leq 2 \cos \varphi$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

következésképpen a kettős integrál így alakul:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x; y) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

10.5.1.6.2 Elliptikus koordináták

Tekintsük az

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \quad (a > 0, \quad b > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

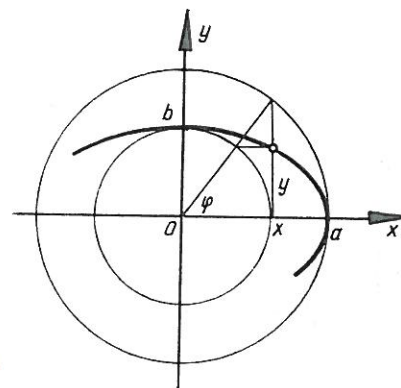
egyenletekkel adott E ellipszist (10.72 ábra).

Az $(x; y)$ sík $P(x; y)$ pontjának elliptikus koordinátái r és φ , ha azok kielégítik az E ellipszishez hasonló ellipszis

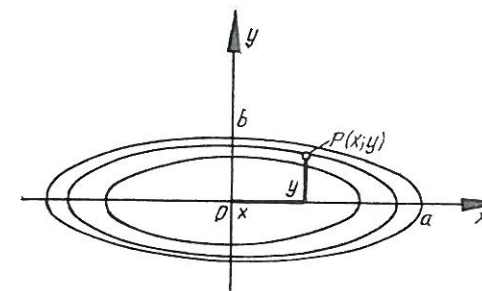
$$\begin{cases} x = ar \cos \varphi \\ y = br \sin \varphi \end{cases}$$

egyenletét (10.73 ábra).

A polárkoordináták esetéhez hasonlóan a $\varphi = \varphi_0$ -hoz tartozó pontok az origóból kiinduló



10.72 ábra



10.73 ábra

félegyenesen, az $r = r_0$ -hoz tartozó pontok az E ellipszishez hasonló

$$\begin{cases} x = ar_0 \cos \varphi \\ y = br_0 \sin \varphi \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

ellipszisen fekszenek.

A polártranszformációhoz hasonló módon bizonyítható.

Ha $f(x; y)$ folytonos az

$$\alpha \leq \varphi \leq \beta$$

$$r_1 \leq r \leq r_2$$

egyenlőtlenségekkel adott H halmazon, ahol φ és r az elliptikus koordinátákat jelentik, akkor

$$\iint_H f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1}^{r_2} f(ar \cos \varphi; br \sin \varphi) abr dr d\varphi.$$

Ha a tartomány az a és b féltengelyű ellipszis, az integrációs határok,

$$0 \leq r \leq 1; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Mivel φ nem az ellipszis, hanem az ar sugarú főkör pontjához vont sugár szöge, a képletet negyed, fél, egész ellipszis alakú tartománynál a legkényelmesebb használni.

10.5.2 A kettős integrál alkalmazása

10.5.2.1 Területszámítás

A kettős integrál definíciója szerint a mérhető területű H halmazon vett

$$\iint_H dx \, dy \quad \text{integrál}$$

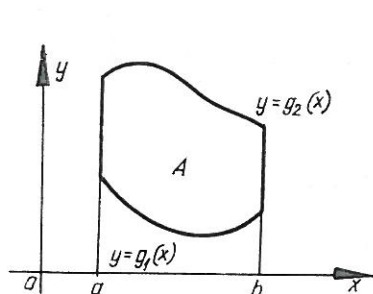
éppen a H halmaz területét adja meg. A területet A -val jelölve:

$$A = \iint_H dx \, dy.$$

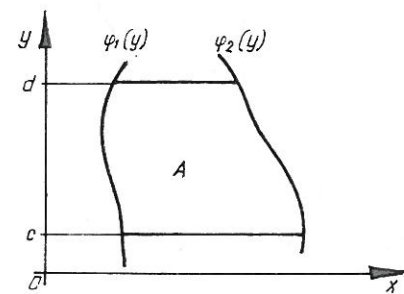
(A terület úgy is felfogható, mint a $z = f(x; y) = 1$ függvény kettős integrálja a H halmazon.)

Ha a halmazt az

$$y = g_1(x), \quad y = g_2(x), \quad x = a, \quad x = b$$



10.74 ábra



10.75 ábra

egyenletű görbék határolják, a terület (10.74 ábra):

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \, dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] \, dx.$$

Ha a halmazt az

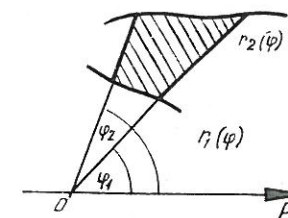
$$x = \varphi_1(y), \quad x = \varphi_2(y), \quad y = c, \quad y = d,$$

egyenletű görbék határolják, a terület (10.75 ábra):

$$A = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dx \, dy = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)] \, dy.$$

Ha a tartomány polárkoordinátákban adott:

$$\begin{aligned} A &= \iint_H r \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r \, dr \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)] \, d\varphi \quad (10.76 \text{ ábra}). \end{aligned}$$



10.76 ábra

Az eredmény nem más, mint a 8.3.2 pontban kapott szektorterület képletének alapján két fősugárral bezárt szektorterület különbsége.

Példák

1. Számítsuk ki az $y = \sqrt[3]{x}$ és $y = x^2$ egyenletű görbék közötti területrészt! A két görbe a $P_1(0; 0)$, $P_2(1; 1)$ pontokban metszi egymást (10.77 ábra).

$$\begin{aligned} A &= \iint_H dx \, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} dy \, dx = \int_0^1 [y]_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} dx = \\ &= \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^2) dx = \left[\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

2. Számítsuk ki az

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

egyenletű lemniszkáta és az

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

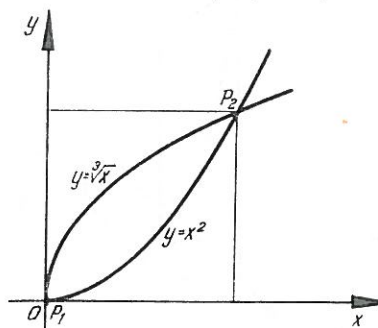
egyenletű kör közötti területet (10.78 ábra)!

A lemniszkáta polárkoordinátás egyenlete, mivel

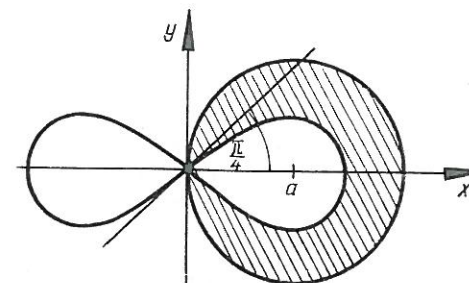
$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x^2 - y^2 = r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = r^2 \cos 2\varphi,$$

$$r^4 = 2a^2 r^2 \cos 2\varphi, \quad \text{azaz}$$

$$r = a \sqrt{2} \sqrt{\cos 2\varphi}.$$



10.77 ábra



10.78 ábra

Az $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ kör egyenlete polárkoordinátákkal:

$$r = 2a \cos \varphi.$$

A két területet külön számítjuk ki, mivel a φ polárszögek határai nem azonosak.
A kör területe:

$$A_1 = a^2 \pi.$$

A lemniszkáta területe:

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}} r dr = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \left[\sin 2\varphi \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2. \end{aligned}$$

A keresett terület:

$$A = A_1 - A_2 = a^2(\pi - 1).$$

10.5.2.2 Térfogatszámítás

A $z = f(x, y)$ felület alatti térfogat a H tartományban, ha ott $z > 0$:

$$V = \iint_H f(x, y) dT.$$

Példák

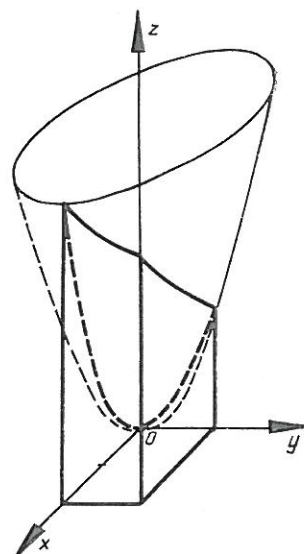
1. Határozzuk meg a $z = x^2 + 2y^2$ egyenletű elliptikus paraboloid alatti térrész térfogatát

a) a $0 \leq x \leq 2$

$$0 \leq y \leq 1 \quad \text{téglalap}$$

b) az $y = 0$, $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$ görbék által határolt terület felett (10.79 ábra)!

$$\begin{aligned} a) \quad V &= \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y^2) dy dx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{2y^3}{3} \right]_0^1 dx = \\ &= \int_0^2 \left(x^2 + \frac{2}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4. \end{aligned}$$



10.79 ábra

b) Az integrálási tartomány:

$$0 \leq y \leq x^2$$

$$0 \leq x \leq 1.$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + 2y^2) dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{2y^3}{3} \right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{2x^6}{3} \right) dx = \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^7}{21} \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{21} = \frac{31}{105}. \end{aligned}$$

2. Mekkora annak a térrésznek a térfogata, amely a $z = xy$ egyenletű nyeregfelület alatt és az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű körlap első negyede felett van.

Az integrálási tartomány:

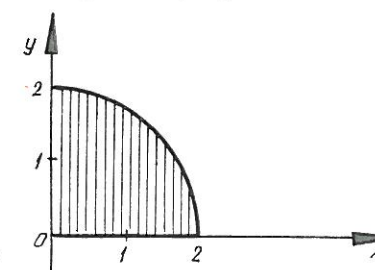
$$0 \leq r \leq 2$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (10.80 \text{ ábra}).$$

Polárkoordinátákkal:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad dT = r dr d\varphi.$$

Figyelem



10.80 ábra

$$\begin{aligned} V &= \iint_H xy dT = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 \cos \varphi \sin \varphi r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 \sin \varphi \cos \varphi dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^2 r^3 dr = \\ &= \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2. \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki az origó középpontú, R sugarú gömbből az $\frac{R}{2}$ sugarú, $(\frac{R}{2}; 0)$ ponton átmenő, függőleges tengelyű henger által kimetszett test (Viviani-féle test) térfogatát (10.81 ábra)!

A gömb egyenlete:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

A henger egyenlete

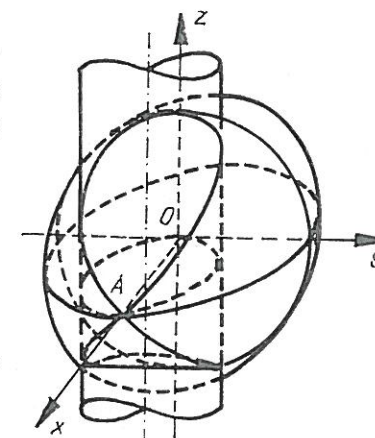
$$\left(x - \frac{R}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}.$$

A felső félgömbre szorítkozva, az integrálandó függvény:

$$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Az integrálási tartomány az

$$x^2 - Rx + y^2 = 0 \quad \text{egyenletű henger.}$$



10.81 ábra

Polárkoordinátákkal:

$$r = R \cos \varphi, \quad (10.82 \text{ ábra})$$

A szimmetria miatt elegendő a

$$0 \leq r \leq R \cos \varphi$$

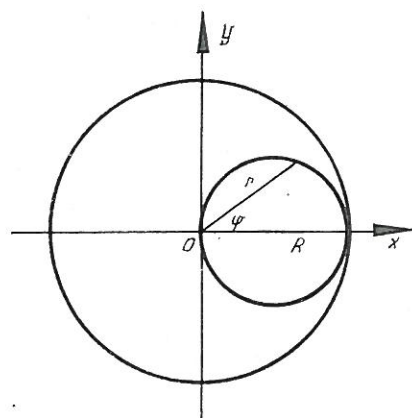
$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{integrálási tartományt}$$

venni.

Polárkoordinátákkal az integrálandó függvény:

$$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Így a Viviani-féle test térfogatának negyed-része:



10.82 ábra

$$\begin{aligned} \frac{V}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - r^2} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - r^2} (-2r) dr = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(\sqrt{R^2 - r^2})^3}{\frac{3}{2}} \right]_0^{R \cos \varphi} d\varphi = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \varphi})^3 - R^3] d\varphi = \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - (\sqrt{1 - \cos^2 \varphi})^3] d\varphi = \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi] d\varphi = \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi) d\varphi = \frac{R^3}{3} \left[\varphi + \cos \varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{R^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{R^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

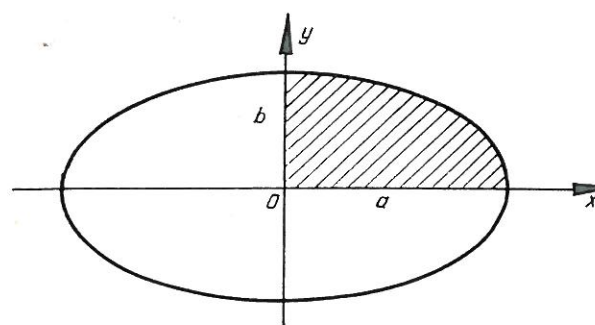
A Viviani-féle test térfogata:

$$V = \frac{4R^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

4. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ egyenletű ellipszoid térfogatát!

Az ellipszoid metszete a $z = 0$ síkkal az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{egyenletű ellipszis (10.83 ábra).}$$



10.83 ábra

A szimmetria miatt csak a nyolcad ellipszoid térfogatát számítjuk ki. Az adott egyenletből:

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Az ellipszoid $(x; y)$ sík feletti részén:

$$z = c \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}.$$

Mivel elliptikus koordinátáknál

$$x = ar \cos \varphi,$$

$$y = br \sin \varphi,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2, \quad \text{így}$$

$$z = c \sqrt{1 - r^2}.$$

Integrálási tartomány

$$\text{az} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ellipszis első negyede,}$$

$$\text{azaz} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \text{és} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Az integrál tehát így alakul:

$$\begin{aligned} \frac{V}{8} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 z dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 c \sqrt{1 - r^2} ab r dr d\varphi = abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr d\varphi = \\ &= abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr = abc \left[\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 -\frac{1}{2} (1 - r^2)^{\frac{1}{2}} (-2r) dr = \\ &= abc \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} \frac{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = abc \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{abc\pi}{6}. \end{aligned}$$

$$\frac{V}{8} = \frac{abc\pi}{6}.$$

Az ellipszoid térfogata:

$$V = 8 \frac{abc\pi}{6},$$

$$V = \frac{4\pi}{3} abc.$$

10.5.2.3 Felszínszámítás

Legyen $z = f(x; y)$ folytonos függvény a sík mérhető területű H halmazán értelmezve. Határozzuk meg a $z = f(x; y)$ egyenletű felület felszínét.

Tegyük fel, hogy $f(x; y)$ elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak. A felszínt a következőképpen definiáljuk.

Definíció. Tekintsük a H halmaznak egy tetszőleges felosztását.

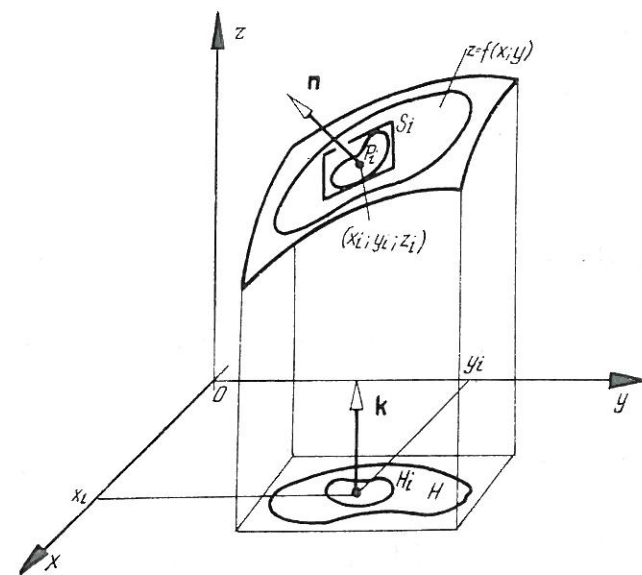
$$H = \bigcup_{i=1}^n H_i.$$

Szemeljünk ki a H_i halmaz egy tetszőleges $(x_i; y_i)$ pontját, és vegyük fel a $z = f(x; y)$ felület $(x_i; y_i; z_i)$ pontjában az érintősíkot (10.84 ábra).

Ennek az érintősíknak a H_i halmaz feletti részét jelöljük S_i -vel. A

$$\sum_{i=1}^n T(S_i)$$

összeget a felszín közelítő összegének tekintjük, és megmutatjuk, hogy a felosztás minden határon túl való finomításával ezek meghatározott határértékhez tartanak. Ezt a határértéket nevezzük a H halmaz feletti felület felszínének.



10.84 ábra

A $P_i(x_i; y_i; z_i)$ ponthoz tartozó érintősík egyenlete (10.2.5 pont):

$$z - z_i = f'_x(x_i; y_i)(x - x_i) + f'_y(x_i; y_i)(y - y_i).$$

Az érintősík normálvektora:

$$\mathbf{n} = [-f'_x(x_i; y_i); -f'_y(x_i; y_i); 1].$$

Az $(x; y)$ sík normálvektora:

$$\mathbf{n}_{(x; y)} = [0; 0; 1] = \mathbf{k}.$$

H_i az S_i merőleges vetülete. Ezért

$$T(H_i) = T(S_i) \cdot \cos \alpha,$$

ahol α az érintősík és az $(x; y)$ sík hajlásszöge, ami azonos a normálvektorok által bezárt szöggel.

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_i; y_i) + f'^2_y(x_i; y_i)}}.$$

Tehát

$$T(S_i) = \sqrt{1 + f'^2_x(x_i; y_i) + f'^2_y(x_i; y_i)} \cdot T(H_i).$$

Így

$$\sum_{i=1}^n T(S_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2_x(x_i; y_i) + f'^2_y(x_i; y_i)} \cdot T(H_i).$$

A jobb oldal nem más, mint a

$$\iint_H \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \, dx \, dy$$

kettős integrálnak az adott felosztáshoz tartozó egyik közelítő összege.

Feltételünk szerint az integrandusz folytonos, ezért a felosztás minden határon túl történő finomításával a közelítő összegek az integrál értékéhez tartanak. Létezik tehát a felület H -hoz tartozó F felszíne, és ez:

$$F = \iint_H \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \, dx \, dy.$$

Példák

1. Mekkora a $z = xy$ hiperbolikus paraboloidból az $x^2 + y^2 = 16$ henger által kimetszett rész felszíne?

$$F = \iint_H \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \, dx \, dy.$$

$$z = xy, \quad f'_x = y, \quad f'_y = x.$$

Az integrandusz:

$$\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Az integrációs tartomány az $x^2 + y^2 = 16$ egyenletű kör belseje.

Vezessük be a polárkoordinátákat:

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

$$\sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{1+r^2}.$$

A határok:

$$0 \leq r \leq 4$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Így a felszín:

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{1+r^2} r dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \sqrt{1+r^2} r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \frac{1}{2} (1+r^2)^{\frac{1}{2}} 2r dr =$$

$$= \left[\varphi \right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = 2\pi \left[\frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^4 = \frac{2\pi}{3} (17\sqrt{17} - 1) \approx 144,5.$$

2. Számítsuk ki az

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{egyenletű gömbből az}$$

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

ágyenletű henger által kivágott Viviani-féle levél felszínét. A számításhoz újra nézzük meg a 10.81 ebrát!

A felszín

$$F = \iint_B \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2} dx dy.$$

Az $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ függvényt impliciten deriválva:

$$f_x' = -\frac{F_x'}{F_z'} = -\frac{x}{z},$$

$$f_y' = -\frac{F_y'}{F_z'} = -\frac{y}{z}.$$

Az integrandusz így alakul:

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{R}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}.$$

Mivel $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ és $z = -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$, a $z > 0$

érték a felszín felét adja.

Az integrálási tartomány az

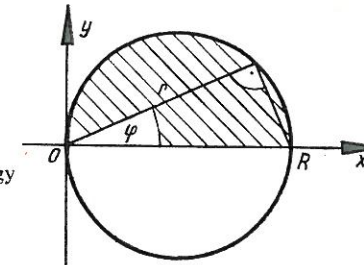
$$x^2 - Rx + y^2 = 0, \text{ azaz az}$$

$$r = R \cos \varphi \quad \text{által leírt kör belseje}$$

(10.85 ábra).

A szimmetria miatt elég a tartomány felső felét venni, így $z > 0$ értékkel a felszín negyedét kapjuk. Polárkoordinátákkal:

$$\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}; \quad dT = r dr d\varphi.$$



10.85 ábra

$$\frac{F}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^{R \cos \varphi} \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} (-2r) dr =$$

$$= -\frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{R \cos \varphi} d\varphi = -R \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{R^2-R^2 \cos^2 \varphi} - R) d\varphi =$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}) d\varphi = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \varphi) d\varphi =$$

$$= R^2 \left[\varphi + \cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

Az egész felszín:

$$F = 4R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 2R^2(\pi - 2).$$

10.5.2.4 A kettős integrál alkalmazása a mechanikában

10.5.2.4.1 Súlypontszámítás

Statikai nyomaték

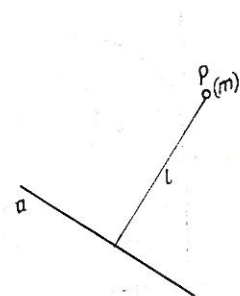
Definíció. Valamely m tömegű tömegpontnak egy síkra (tengelyre) vonatkozó statikai nyomatéka egyenlő a pont tömegének és a siktól (tengelytől) való távolságának szorzatával. Így a P pontban elhelyezett m tömegpontnak az a tengelyre vonatkozó statikai nyomatéka (ha P -nek a -tól való távolsága l):

$$M_a = ml \quad (10.86 \text{ ábra}).$$

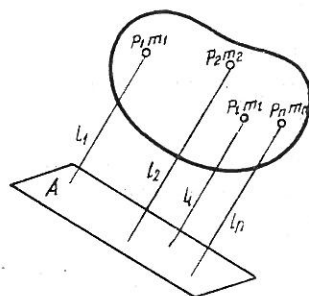
Ha egy pontrendszer $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontjában rendre az $m_1, m_2, \dots, m_n$ tömegek vannak elhelyezve, a pontrendszer statikai nyomatéka az A síkra (10.87 ábra):

$$M_A = \sum_{i=1}^n m_i l_i,$$

ahol m_i a P_i pontban levő tömeg, l_i a P_i pontnak az A siktól való előjeles távolsága.



10.86 ábra



10.87 ábra

Tehát a pontrendszer statikai nyomatékát megkapjuk, ha az egyes pontok tömegét szorozzuk a pontnak a síktól való előjeles távolságával, és a szorzatokat összeadjuk. Előjeles távolságon azt értjük, hogy a sík egyik oldalán levő pontok távolságát a síktól pozitív előjellel, a másik oldalon levő pontok távolságát a síktól negatív előjellel vesszük.

Súlypont

Definíció. Legyen a $P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$ pontban $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ tömeg elhelyezve. A pontrendszer súlypontja az a pont, amelyben a pontrendszer tömegét összpontosítva, bármely síkra vonatkozó statikai nyomatéka megegyezik a pontrendszer statikai nyomatékával.

Legyenek a P_i pont koordinátái $(x_i; y_i; z_i)$.

A súlypont koordinátái $(x_S; y_S; z_S)$.

Az egyes koordinátaskikokra vonatkozó statikai nyomatékok:

$$M_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i; \quad M_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i; \quad M_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i.$$

A pontrendszer tömege:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

A súlypont definíciója szerint:

$$x_S M = M_{yz}; \quad y_S M = M_{xz}; \quad z_S M = M_{xy}.$$

Így a súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad y_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad z_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Így megkaptuk a pontrendszer súlypontjának a fizikából ismert meghatározását.

Test súlypontja. Ha egy testet kicsiny részekre bontunk, és minden egyes részecske tömegét egy pontjában képzeljük egyesítve, akkor pontrendszert nyerünk, amelynek súlypontját már meg tudjuk határozni.

Ha a test homogén, azaz egyenlő térfogatú részeiben egyenlő tömegű anyag van, akkor bebizonyítható, hogy a felosztással kapott pontrendszer súlypontja egy meghatározott ponthoz konvergál, ha a felosztási részecskék átmérőjének sorozata nullához tart. E pontot nevezzük a test súlypontjának.

Legyen a test tömege M , a testnek a koordinátaskikokra vonatkozó statikai nyomatékai: $M_{yz}; M_{xz}; M_{xy}$.

A statikai nyomatékokat a közelítő pontrendszerek statikai nyomatékainak határértékeként számítjuk ki.

A súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{M_{yz}}{M}; \quad y_S = \frac{M_{xz}}{M}; \quad z_S = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Síkidom súlypontjának meghatározásakor a következőképpen járhatunk el.

A síkidomot részekre bontjuk, és az egyes részek tömegét egy-egy pontjukban egyesítjük. Az így nyert pontrendszer tömege egyenlő az idom tömegével. Ha a síkidomot az $(x; y)$ síkba helyezzük, a súlypont meghatározásához a közelítő pontrendszernek az y , illetve x tengelyekre vonatkozó statikai nyomatékainak határértékét kell meghatároznunk.

Ha M_y , illetve M_x az y és x tengelyekre vonatkozó statikai nyomaték, a súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{M_y}{M}; \quad y_S = \frac{M_x}{M}.$$

10.5.2.4.1.1 Lemez súlypontjának kiszámítása

Legyen adott valamely A területű egyenletes vastagságú, homogén lemez. Legyen a lemez területegységre jutó tömegmennyisége, területi sűrűsége, egységnyi. (A sűrűséget az egységsűrűség kedvéért egységnyinek vesszük; homogén sűrűségű lemez, illetve test súlypontja független a sűrűség nagyságától.)

Helyezzük el a lemezt az $(x; y)$ síkban. Az A területű lemez által befedett tartomány legyen H (10.88 ábra).

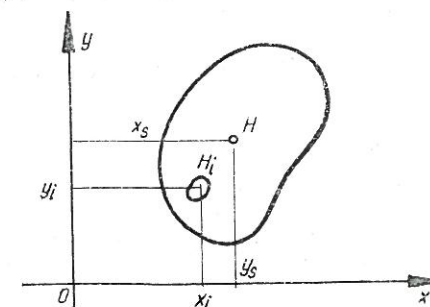
A súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{M_y}{M}; \quad y_S = \frac{M_x}{M}.$$

Mivel a területi sűrűség egységnyi, a lemez tömege:

$$M = A = \iint_H dx dy.$$

Osszuk fel a H halmazt H_i részhalmazra.



10.88 ábra

Legyen H_i statikai nyomatéka az x és y tengelyre:

$$M_{x(i)} \text{ és } M_{y(i)}.$$

Tömörítsük H_i tömegét az $(x_i; y_i)$ pontba (10.88 ábra).

$$M_{x(i)} \approx y_i T(H_i),$$

$$M_{y(i)} \approx x_i T(H_i).$$

Ilyen módon az M_x és M_y statikai nyomatékokra a következő közelítő összeget kapjuk:

$$M_y \approx \sum_{i=1}^n x_i T(H_i),$$

$$M_x \approx \sum_{i=1}^n y_i T(H_i).$$

Ha a felosztás minden határon túl finomul, akkor ezek a közelítő összegek a

$$\iint_H x \, dx \, dy, \quad \text{illetve} \quad \iint_H y \, dx \, dy$$

kettős integrálokhoz tartanak.

Így

$$M_y = \iint_H x \, dx \, dy.$$

$$M_x = \iint_H y \, dx \, dy.$$

A lemez súlypontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\iint_H x \, dx \, dy}{\iint_H dx \, dy}, \quad y_s = \frac{\iint_H y \, dx \, dy}{\iint_H dx \, dy}.$$

Polárkoordinátákat használva:

$$M = A = \iint_H r \, dr \, d\varphi,$$

$$M_y = \iint_H x \, dT = \iint_H r \cos \varphi r \, dr \, d\varphi = \iint_H r^2 \cos \varphi \, dr \, d\varphi,$$

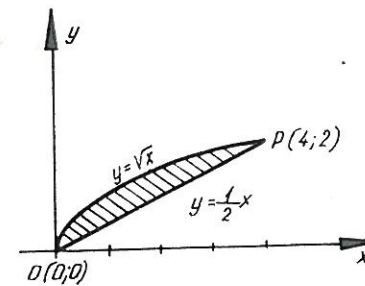
$$M_x = \iint_H y \, dT = \iint_H r \sin \varphi r \, dr \, d\varphi = \iint_H r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi.$$

Példák

1. Határozzuk meg az $y = \sqrt{x}$ és $y = \frac{1}{2}x$ görbék által határolt lemez súlypontját!

Az $y = \sqrt{x}$ és $y = \frac{1}{2}x$ görbék a $O(0; 0)$ és $P(4; 2)$ pontban metszik egymást (10.89 ábra).

$$x_s = \frac{M_y}{M}, \quad y_s = \frac{M_x}{M}.$$



10.89 ábra

$$M = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dy \, dx = \int_0^4 \left[y \right]_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x \right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4} \right]_0^4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}.$$

$$M_y = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} x \, dy \, dx = \int_0^4 \left[xy \right]_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^3}{6} \right]_0^4 = \frac{64}{5} - \frac{64}{6} = \frac{64}{30} = \frac{32}{15}.$$

$$x_s = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{32}{15}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{5}.$$

$$M_x = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} y \, dy \, dx = \int_0^4 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} \right]_0^4 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$y_s = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = 1.$$

Tehát a lemez súlypontjának koordinátái:

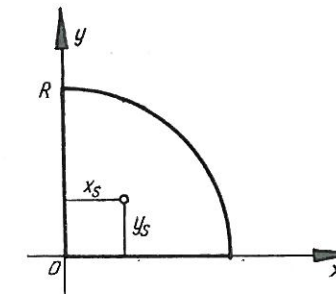
$$x_s = \frac{8}{5}, \quad y_s = 1.$$

2. Határozzuk meg az R sugarú körlap $x \geq 0, y \geq 0$ negyede súlypontjának koordinátáit (10.90 ábra)!

A szimmetria miatt $x_s = y_s$, elég a súlypont egyik koordinátáját meghatározni:

Ha a vastagság és sűrűség egységnyi, a negyedkör tömege

$$M = \frac{R^2\pi}{4}.$$



10.90 ábra

Az y tengelyre vonatkozó statikai nyomaték:

$$M_y = \int_H x \, dT.$$

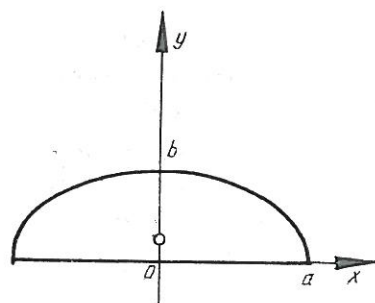
Polárkoordinátákat használva:

$$x = r \cos \varphi, \quad dT = r \, dr \, d\varphi, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$M_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos \varphi \, r \, dr \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^R r^2 \, dr =$$

$$= \left[\sin \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = 1 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{R^3}{3}.$$

$$x_s = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{R^2 \pi}{4}} = \frac{4R}{3\pi}.$$



10.91 ábra

A szimmetria miatt:

$$y_s = \frac{4R}{3\pi}.$$

3. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis felső fele súlypontjának koordinátáit (10.91 ábra).

A szimmetria miatt:

$$x_s = 0.$$

Csak a súlypont ordinátáját kell meghatároznunk. A tömeg az ellipszis területének a fele:

$$M = \frac{ab\pi}{2}.$$

$$y_s = \frac{M_y}{M}.$$

$$M_y = \int_H y \, dT.$$

Elliptikus koordinátákat használva:

$$y = br \sin \varphi,$$

$$dT = abr \, dr \, d\varphi.$$

$$0 \leq r \leq 1,$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi.$$

$$M_y = \int_0^{\pi} \int_0^1 br \sin \varphi \, abr \, dr \, d\varphi = ab^2 \int_0^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 r^2 \, dr =$$

$$= ab^2 \left[-\cos \varphi \right]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 = ab^2(1+1) \frac{1}{3} = \frac{2ab^2}{3}.$$

$$y_s = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{2ab^2}{3}}{\frac{ab\pi}{2}} = \frac{4b}{3\pi}.$$

Így a fél ellipszis súlypontjának koordinátái:

$$x_s = 0, \quad y_s = \frac{4b}{3\pi}.$$

*

A következőkben a súlypontszámítást kiegészítjük anyagi görbék és felületek súlypontja kiszámításával, bár ez nem tartozik a kettős integrál alkalmazásához.

10.5.2.4.1.2 Anyagi görbe súlypontja

Tegyük fel, hogy a görbe az $y = f(x)$ egyenlettel megadható, ahol $f(x)$ az $a \leq x \leq b$ in vallumban folytonosan differenciálható. Ekkor a görbe rektifikálható.

Legyen a görbe vonal egységnyi hosszúságú darabjának tömege (sűrűsége) egységnyi: ρ . Az anyagi görbe tömege, mivel $\rho = 1$, egyenlő a görbe vonal ívhosszúságával. Jelöljük most L -el:

$$M = s(a; b) = L.$$

Osszuk fel az AB görbe L hosszúságú szakaszát $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ részre (10.92 áb). Az i -edik szakasz hossza Δs_i .

Az anyagi görbe tömege, mivel $\rho = 1$:

$$M = \sum_{i=1}^n \Delta s_i, \quad \text{illetve} \quad M = \int_0^L ds.$$

A Δs_i szakasz statikai nyomatéka az y tengelyre

$$\Delta M_{y(i)}.$$

Legyenek a görbe pontjainak koordinátái az ívhossz függvényeként $x(s)$ és $y(s)$.

Képzeljük a Δs_i szakasz tömegét a görbedarab x_{i-1} , illetve x_i abszcisszájú pontjába törítve.

Nyilvánvaló, hogy

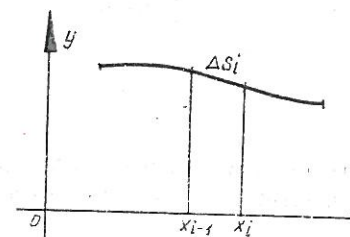
$$x_{i-1} \Delta s_i \leq \Delta M_{y(i)} \leq x_i \Delta s_i.$$

Ez minden i -re igaz. Összegezve:

$$\sum_{i=1}^n x_{i-1} \Delta s_i \leq \sum_{i=1}^n \Delta M_{y(i)} \leq \sum_{i=1}^n x_i \Delta s_i.$$

Az egyenlőtlenség bal és jobb oldalán a határozott integrál alsó és felső közelítő összege: Ha a felosztás minden határon túl finomul:

$$\lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_{i-1} \Delta s_i = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i \Delta s_i = \int_0^L x(s) \, ds.$$



10.92 ábra

Mivel a statikai nyomaték értelmezéséből következően egymásba nem nyúló idomok statikai nyomatéka összegeződik:

$$\sum_{i=1}^n \Delta M_{y(i)} = M_y,$$

így

$$M_y = \int_0^L x(s) ds.$$

Hasonló gondolatmenettel az x tengelyre vonatkozó statikai nyomaték:

$$M_x = \int_0^L y(s) ds.$$

Az anyagi görbe súlypontjának koordinátái:

$$x_S = \frac{\int_0^L x(s) ds}{\int_0^L ds},$$

$$y_S = \frac{\int_0^L y(s) ds}{\int_0^L ds}.$$

Mivel $x = x(s)$ monoton növekvő folytonos függvény, van inverz függvénye: $s = s(x)$. Alkalmazzuk az $s = s(x)$ helyettesítést a súlypontot megadó integrálban.

Így $y = y[s(x)] = y(x) = f(x)$.

Az ívhossz az $[a; x]$ intervallumban:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1+y'^2} dx.$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2},$$

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx.$$

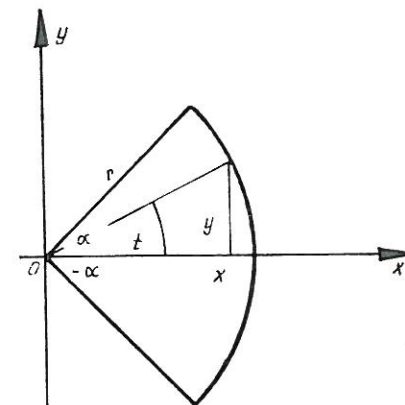
Ha $s = 0$, $x = a$; ha $s = L$, $x = b$.

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx.$$

A súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx},$$

$$y_S = \frac{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx}.$$



Példák

1. Körív súlypontja

A körívet úgy helyezzük el, hogy középpontja az origóba kerüljön, és szélső pontjai az x tengelyre szimmetrikusak legyenek (10.93 ábra).

Legyenek a szélső pontokhoz vezető sugarak és az x tengely szögei $-\alpha$ és $+\alpha$. A kör poláregyenlet-rendszere:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}.$$

A tömeg $M = r \cdot 2\alpha = 2r\alpha$.

$$M_y = \int_{-\alpha}^{+\alpha} x(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Mivel $\dot{x}(t) = -r \sin t$; $\dot{y}(t) = r \cos t$,

$$\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r.$$

$$M_y = \int_{-\alpha}^{+\alpha} r \cos t r dt = r^2 \left[\sin t \right]_{-\alpha}^{+\alpha} = 2r^2 \sin \alpha.$$

$$x_S = \frac{M_y}{M} = \frac{2r^2 \sin \alpha}{2r\alpha} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}.$$

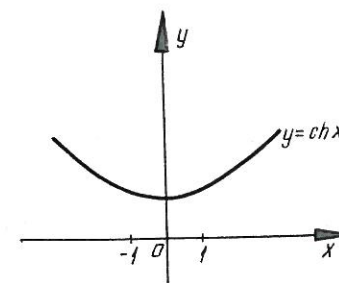
A szimmetrikus elhelyezés miatt

$$y_S = 0.$$

A félkör súlypontjának abszcisszája:

$$x_S = \frac{r \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} r = 0,6366 r.$$

2. Határozzuk meg az $y = \operatorname{ch} x$ egyenletű láncgörbe súlypontját a $-1 \leq x \leq 1$ intervallumban (10.94 ábra)!



10.94 ábra

A szimmetria miatt

$$x_s = 0.$$

$$y = \operatorname{ch} x, \quad y' = \operatorname{sh} x.$$

$$\frac{s}{2} = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^1 \operatorname{ch} x dx =$$

$$= \left[\operatorname{sh} x \right]_0^1 = \operatorname{sh} 1 = \frac{e - \frac{1}{e}}{2}.$$

$$M = 2s = e - \frac{1}{e} = 2,718 - 0,3679 = 2,3501.$$

$$M_x = \int_{-1}^1 y \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{-1}^1 \operatorname{ch}^2 x dx = 2 \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \left[\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + x \right]_0^1 = \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} 1 + 1 = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \cdot \frac{e + \frac{1}{e}}{2} + 1 =$$

$$= \frac{e^2 - \frac{1}{e^2}}{4} + 1 = \frac{4 + e^2 - \frac{1}{e^2}}{4} = 2,814.$$

$$y_s = \frac{M_x}{M} = \frac{2,814}{2,350} = 1,19.$$

10.5.2.4.1.3 Forgásfelület súlypontja

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban folytonosan differenciálható, és ott $y \geq 0$. Forgassuk meg az $y = f(x)$ egyenletű görbe $a \leq x \leq b$ intervallumban levő szakaszát az x tengely körül, és határozzuk meg a kapott forgásfelület súlypontját.

Tegyük fel, hogy a forgásfelület felületi sűrűsége állandó és egységnyi. A forgásfelület tömege:

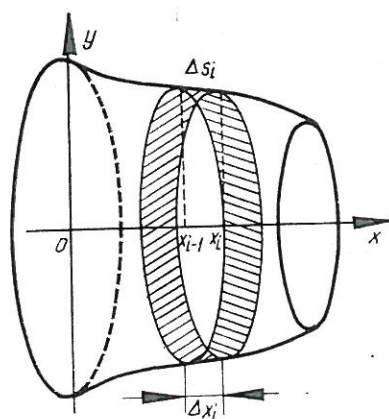
$$M = F = 2\pi \int_0^L y(s) ds,$$

ahol L a görbedarab ívhossza.

A szimmetria miatt

$$y_s = 0, \quad z_s = 0.$$

Az M_{yz} statikai nyomaték meghatározásához osszuk fel az $[a; b]$ intervallum $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ részekre osztásával az L görbedarabot $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_i, \dots, \Delta s_n$ részre (10.95 ábra). Legyen a Δs_i ívhosszú görbedarab forgásával nyert forgásfelület statikai nyomatéka $\Delta M_{yz(i)}$. Ha a Δx_i intervallumhoz tartozó forgásfelület tömegét az $x = x_{i-1}$,



10.95 ábra

illetve $x = x_i$ sugarú körök kerületén képzeljük tömörítve:

$$x_{i-1} \Delta F_i \leq \Delta M_{yz(i)} \leq x_i \Delta F_i,$$

ahol $x = x(s)$.

Ez minden i -re igaz. Összegezve:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n x_{i-1} \Delta F_i \leq \sum_{i=1}^n \Delta M_{yz(i)} \leq \sum_{i=1}^n x_i \Delta F_i.$$

Nézzük meg az (1) egyenlet jobb oldalán levő összegnek a

$$2\pi \int_0^L x(s)y(s) ds \quad \text{integráltól való eltérését.}$$

Mivel $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$,

$$\Delta F_i = 2\pi \int_{s_{i-1}}^{s_i} y(s) ds.$$

Így

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n x_i \Delta F_i - 2\pi \int_0^L x(s)y(s) ds \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n x_i 2\pi \int_{s_{i-1}}^{s_i} y(s) ds - 2\pi \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} x(s)y(s) ds \right| = \\ &= 2\pi \left| \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} [x_i - x(s)] y(s) ds \right| \leq 2\pi \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} |x_i - x(s)| y(s) ds. \end{aligned}$$

Minden előírt $\varepsilon > 0$ -hoz megválasztható a felosztás olyan finomra, hogy

$$|x_i - x(s)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad s_{i-1} < s < s_i.$$

Ebben az esetben az utolsó kifejezés így becsülhető:

$$2\pi \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} |x_i - x(s)| y(s) ds < \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^n 2\pi \int_{s_{i-1}}^{s_i} y(s) ds = \varepsilon \cdot F.$$

Ugyanez a becslés érvényes az (1) egyenlőtlenség bal oldalán álló összegre.

Ezért a középzárt összeg:

$$\sum_{i=1}^n \Delta M_{yz(i)}$$

tetszőlegesen keveset tér el a

$$2\pi \int_0^L x(s)y(s) ds$$

integráltól, ha a felosztás elég finom.

A statikai nyomaték:

$$M_{yz} = 2\pi \int_0^L x(s)y(s) ds.$$

Így

$$x_S = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{2\pi \int_0^L x(s)y(s) ds}{2\pi \int_0^L y(s) ds}.$$

Tehát a súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{\int_0^L x(s)y(s) ds}{\int_0^L y(s) ds}, \quad y_S = 0, \quad z_S = 0.$$

Derékszögű koordinátákkal:

$$x_S = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{2\pi \int_a^b xy \sqrt{1+y'^2} dx}{2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx}.$$

Tehát a súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{\int_a^b xy \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx}, \quad y_S = 0, \quad z_S = 0.$$

Ha a görbe paraméteres alakban adott, azaz

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\} \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$x_S = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt}{2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt}.$$

A súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt}{\int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt},$$

$$y_S = 0, \quad z_S = 0.$$

Példák

1. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 = r^2$ kör első negyedének x tengely körüli forgatásakor nyert félgömb-felület súlypontját (10.96 ábra)!

Ha $\varrho = 1$, akkor $M = 2r^2\pi$.

Paraméteres alakkal:

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$M_{yz} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt =$$

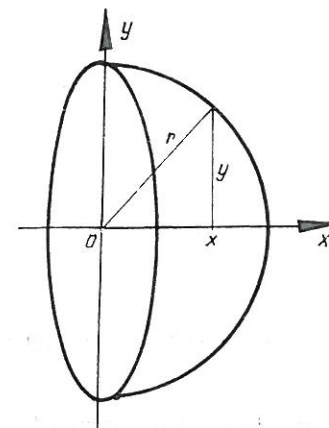
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos tr \sin tr dt = 2\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 2\pi r^3 \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^3.$$

$$x_S = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{r^3\pi}{2r^2\pi} = \frac{r}{2}.$$

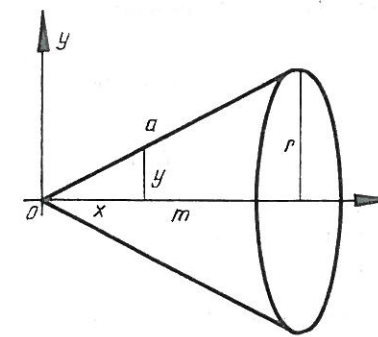
A súlypont koordinátái:

$$x_S = \frac{r}{2}, \quad y_S = 0, \quad z_S = 0.$$

2. Számítsuk ki az r sugarú, m magasságú körkúp palástjának súlypontját!



10.96 ábra



10.97 ábra

A kúppalást az $y = \frac{r}{m}x$ egyenletű egyenes $[0; m]$ szakaszának forgatásával jön létre (10.97 ábra).

Ha $\varrho = 1$, akkor $M = r\pi a$,

ahol $a = \sqrt{r^2 + m^2}$, a kúp alkotója.

$$M_{yz} = 2\pi \int_0^m xy \sqrt{1+y'^2} dx.$$

$$y = \frac{r}{m} x, \quad \dot{y} = \frac{r}{m}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{r^2}{m^2}} = \sqrt{\frac{m^2+r^2}{m^2}} = \frac{a}{m}.$$

$$M_{yz} = 2\pi \int_0^m x \frac{r}{m} x \frac{a}{m} dx = 2\pi \frac{ar}{m^2} \int_0^m x^2 dx =$$

$$= 2\pi \frac{ar}{m^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^m = 2\pi \frac{ar}{m^2} \frac{m^3}{3} = \frac{2\pi arm}{3}.$$

$$x_s = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\frac{2\pi arm}{3}}{ar\pi} = \frac{2}{3} m.$$

Tehát $x_s = \frac{2}{3} m, \quad y_s = 0, \quad z_s = 0.$

10.5.2.4.1.4 Guldin tételei

a) Az anyagi görbe súlypontjának y koordinátája:

$$y_s = \frac{\int_0^L y(s) ds}{\int_0^L ds}.$$

Mindkét oldalt 2π -vel szorozva:

$$2\pi y_s = \frac{2\pi \int_0^L y(s) ds}{\int_0^L ds}.$$

A bal oldal $2\pi y_s$ nem más, mint a súlypont által forgás közben leírt kör kerülete. Jelöljük ezt k -val.

A jobb oldal számlálója $2\pi \int_0^L y(s) ds$ a forgatás által keletkezett forgástest felszíne (8.3.5).

Jelöljük ezt F -fel. A jobb oldal nevezője a görbe ívhossza (8.3.3), jelöljük ezt L -lel.

Így

$$k = \frac{F}{L}, \quad \text{azaz}$$

$$F = kL.$$

Ez *Guldin első tétele*: forgástest felszíne egyenlő a forgatott görbeív hosszának és a súlypont által leírt kör területének szorzatával.

b) Az $(x; y)$ síkbeli A területű lemez súlypontjának ordinátája:

$$y_s = \frac{\iint_H y dx ds}{\iint_H dx ds}.$$

Legyen a H halmaz az

$$a \leq x \leq b$$

$$g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

normáltartomány, és $g_1(x) \geq 0$.

$$y_s = \frac{\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} y dy dx}{\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx}.$$

Innen

$$y_s = \frac{\int_a^b \left[\frac{y^2}{2} \right]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx}{\int_a^b \left[y \right]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx},$$

azaz

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [g_2^2(x) - g_1^2(x)] dx}{\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx}.$$

Mindkét oldalt 2π -vel szorozva:

$$2\pi y_s = \frac{\pi \int_a^b [g_2^2(x) - g_1^2(x)] dx}{\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx}.$$

A bal oldal $2\pi y_s$ a súlypont által leírt kör kerülete: k .

A jobb oldal számlálója az $y = g_2(x)$ és $y = g_1(x)$ egyenletű görbék forgatásával nyert forgástestek térfogatának különbsége az $a \leq x \leq b$ intervallumban. Jelöljük e forgástest térfogatát V -vel. A jobb oldal nevezője a lemez területe, jelöljük ezt A -val.

Így

$$k = \frac{V}{A}.$$

A forgástest térfogata:

$$V = kA.$$

Ez *Guldin második tétele*: a forgástest térfogata egyenlő a forgatott lemez területének és a súlypont által leírt kör területének szorzatával.

Példa

A tórusz felszíne és térfogata
Számítsuk ki az

$x^2 + (y-b)^2 = r^2$ kör forgatása által nyert gyűrűfelület (tórusz) felszínét és térfogatát (10.98 ábra)!

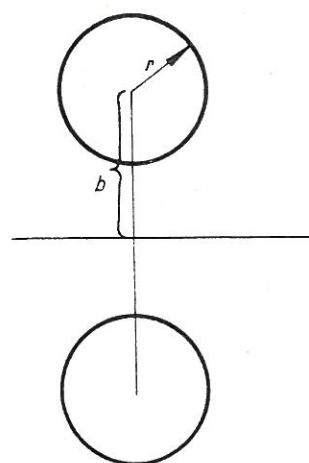
$$k = 2\pi b;$$

$$L = 2\pi r$$

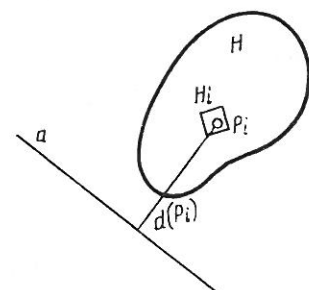
$$A = r^2\pi$$

$$F = kL = 2\pi b \cdot 2\pi r = 4\pi^2 rb$$

$$V = kA = 2\pi br^2\pi = 2\pi^2 br^2.$$



10.98 ábra



10.99 ábra

10.5.2.4.2 Síkidom másodrendű nyomatéka

Definíció. Legyen adott a sík mérhető területű H halmaza és valamely, a síkban fekvő a tengely (10.99 ábra).

Bontsuk fel a H -t mérhető területű H_i részekre, és szemeljünk ki mindegyik részhalmazon egy P_i pontot.

Jelöljük P_i távolságát az a tengelytől $d(P_i)$ -vel.

$$d(P_i) = d(x_i; y_i).$$

Képezzük a következő integrálközelítő összeget:

$$\sum_{i=1}^n d^2(x_i; y_i) T(H_i).$$

A jobb oldali összeg a $\iint_H d^2(x; y) dx dy$ kettős integrál közelítő összege.

Ha a felosztás minden határon túl finomodik, a közelítő összeg határértéke a kettős integrál. Ezt a határértéket a H síkidom a tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékának nevezzük, és I_a -val jelöljük.

Tehát

$$I_a = \iint_H d^2(x; y) dx dy.$$

A koordinátatengelyekre vonatkozó másodrendű nyomatékok (axiális nyomatékok):

$$I_x = \iint_H y^2 dx dy,$$

$$I_y = \iint_H x^2 dx dy \quad (10.100 \text{ ábra}).$$

A z tengelyre vagy az origóra vonatkozó, ún. poláris másodrendű nyomaték

$$I_0 = \iint_H (x^2 + y^2) dx dy.$$

Az egyenletekből nyilvánvaló, hogy

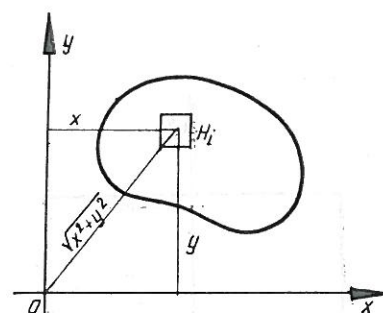
$$I_0 = I_x + I_y.$$

Steiner tétele

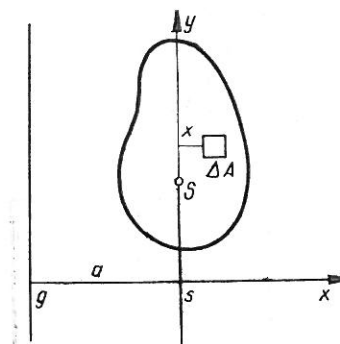
Tétel. Az A területű H síkidomnak valamely síkjában fekvő g tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatéka

$$I_g = I_s + a^2 A,$$

ahol I_s H -nak a súlypontján átmenő, g -vel párhuzamos s tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatéka, a a két tengely távolsága.



10.100 ábra



10.101 ábra

Bizonyítás. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy s egybeesik az y tengellyel (10.101 ábra).

Ekkor

$$I_s = \iint_H x^2 dx dy, \quad I_g = \iint_H (x+a)^2 dx dy.$$

$$I_g = \iint_H x^2 dx dy + 2a \iint_H x dx dy + a^2 \iint_H dx dy.$$

Az első integrál I_s , a második integrál nulla, mert nem más, mint a súlypontra vonatkozó statikai nyomaték, ez pedig zérus. A harmadik integrál a síkidom A területe.