

A görbe szintén lemniszkáta (7.106 ábra).

Az $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ görbéből az $r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$ görbe

45°-os $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ -es elforgatással keletkezik.

4. A Descartes-féle levél. Az $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ egyenlettel megadott görbe az ún. Descartes-féle levél. Az egyenletből látszik, hogy x és y szerepe szimmetrikus, a görbe az $y=x$ egyenesre tükrözhető.

Hogy a függvény paraméteres alakját megkapjuk, vezessük be a $t = \frac{y}{x}$ paramétert.

Ekkor $y = tx$.

Az egyenletbe helyettesítve:

$$x^3 + t^3 x^3 = 3atx^2,$$

$$x^3(1+t^3) = 3atx^2.$$

Ha $x \neq 0$,

$$x = \frac{3at}{1+t^3}$$

és $y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$

Ha $x = 0, y = 0.$

A görbe polárkoordinátás egyenletét megkapjuk, ha az $x^3 + y^3 = 3axy$ alakba behelyettesítjük az $x = r \cos \varphi$ és $y = r \sin \varphi$ értékeket:

$$r^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) = 3ar^2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

azaz

$$r = \frac{\frac{3}{2} a \sin 2\varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}.$$

Ha $\varphi = 0, r = 0.$

Ha $\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi = 0$, azaz $\varphi = \frac{3\pi}{4},$

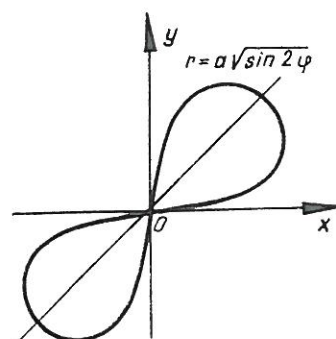
akkor r -nek nincs értelme, ebben az irányban a görbének nincs pontja.

Ha a görbének olyan aszimptótáját keressük, amely nem párhuzamos az y tengellyel, a következőképpen járhatunk el:

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Helyettesítsük az egyenletbe az $y = mx$ értékét, és keressük a határértéket, ha $x \rightarrow \infty$.

$$x^3 + m^3 x^3 = 3amx^2.$$



7.106 ábra

x^3 -nal osztva:

$$1 + m^3 = \frac{3am}{x}.$$

Ha $x \rightarrow \infty, \frac{3am}{x} \rightarrow 0.$

Ez csak úgy lehet, ha $1 + m^3 = 0$, azaz

$$m = -1.$$

Most helyettesítsük az egyenletbe

$$y = mx + b \text{ értékét.}$$

Mivel

$$m = -1, y = -x + b.$$

$$x^3 + (-x + b)^3 = 3ax(-x + b).$$

A műveleteket elvégezve:

$$3x^2b - 3xb^2 + b^3 = -3ax^2 + 3axb.$$

Rendezve: $3x^2(a+b) = 3bx(a+b) - b^3.$

$3x^2$ -tel osztva:

$$a+b = \frac{3b(a+b)}{x} - \frac{b^3}{3x^2}.$$

Ha $x \rightarrow \infty$, a jobb oldal határértéke nulla. Ez csak úgy lehet,

ha $b = -a.$

Tehát az aszimptóta egyenlete:

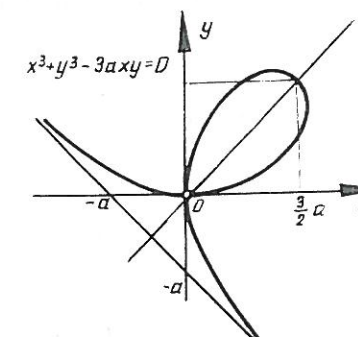
$$y = -x - a, \text{ azaz } x + y + a = 0.$$

(Ezt az eljárást alkalmazhatjuk akkor, ha implicit alakban megadott algebrai egészfüggvény görbéjének aszimptótáit keressük.)

Ha $\varphi = \frac{\pi}{4},$

$$r = \frac{\frac{3}{2} a}{2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} a.$$

$$x = y = r \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} a.$$



A Descartes-féle levél vázlatát lásd a 7.107 ábrán.

7.107 ábra

5. A kardioid. Ha egy kör érintőire a kör kerületének egy fix pontjából merőlegeseket bocsátunk, a merőlegesek talppontjainak mértani helye kardioid (szívgörbe).

Legyen az R sugarú kör fix pontja a 7.108 ábra szerinti elhelyezésnek megfelelően a pólusban. Az A pontban húzott érintőre bocsátott merőleges B talppontjának radiusvektora, amint az ábrából látható:

$$r = R + R \cos \varphi.$$

Tehát a kardioid polárkoordinátás egyenlete:

$$r = R(1 + \cos \varphi).$$

Ha $\varphi = 0$, $r = 2R$,

ha $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, $r = R$,

ha $\varphi = \pi$, $r = 0$.

Ha a kört a 7.109 ábra szerint helyezzük el, a kardioid egyenlete

$$r = R(1 - \cos \varphi).$$

6. A kúpszeletek egyenletének polárkoordinátás alakja. A kúpszeletek tárgyalásánál (3.2.6) bebizonyítottuk, hogy a kúpszeletek közös fokális egyenlete (a fókusz az origóban van):

$$x^2 + y^2 = (ex + p),$$

ahol $e = \frac{c}{a}$ a numerikus excentricitás, p a paraméter, a fókuszhoz tartozó ordináta.

(A parabolánál $e = 1$, az ellipsziséknél és a hiperbolánál $p = \frac{b^2}{a}$.)

Helyezzük a polárkoordináta-rendszer pólusát a fókuszba, tengelyét az x tengelyre!

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r \cos \varphi.$$

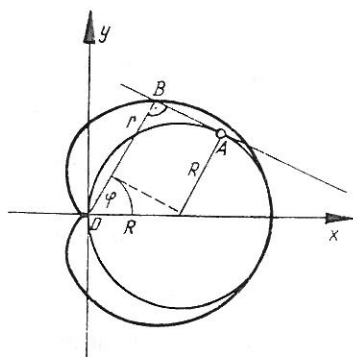
A polárkoordinátás egyenlet:

$$r^2 = (er \cos \varphi + p)^2,$$

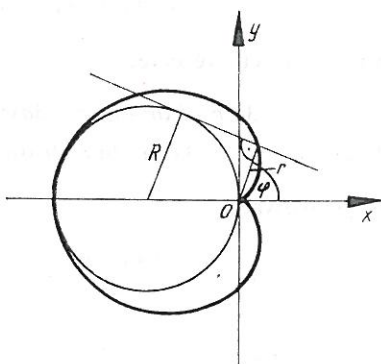
innen

$$\pm r = er \cos \varphi + p.$$

$$r = \frac{p}{\pm 1 - e \cos \varphi}.$$



7.108 ábra



7.109 ábra

p és r csak pozitív lehet. A kúpszeletek csak akkor elégítik ki az egyenletet, ha a nevező pozitív.

$$\pm 1 - e \cos \varphi > 0.$$

A parabolánál $e = 1$, az ellipsziséknél $e = \frac{c}{a} < 1$, ezért a parabolánál és az ellipsziséknél a nevező csak $(1 - e \cos \varphi)$ lehet.

A hiperbolánál $e = \frac{c}{a} > 1$, a nevező $+1 - e \cos \varphi$ és $-1 - e \cos \varphi$ is lehet. A két eset a hiperbola két ágát jelenti.

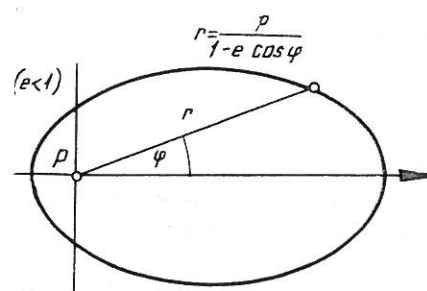
Tehát,

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi} \quad \text{parabola egyenlete,}$$

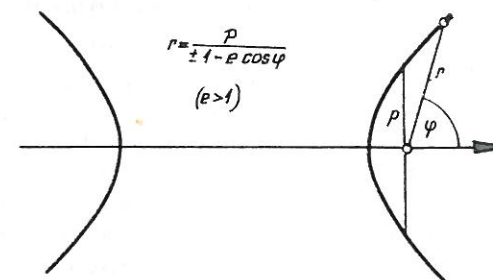
$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \quad \left(e = \frac{c}{a} < 1\right) \quad \text{ellipszis egyenlete,}$$

$$r = \frac{p}{\pm 1 - e \cos \varphi} \quad \left(e = \frac{c}{a} > 1\right) \quad \text{hiperbola egyenlete}$$

(7.110, 7.111, és 7.112 ábrák).



7.111 ábra

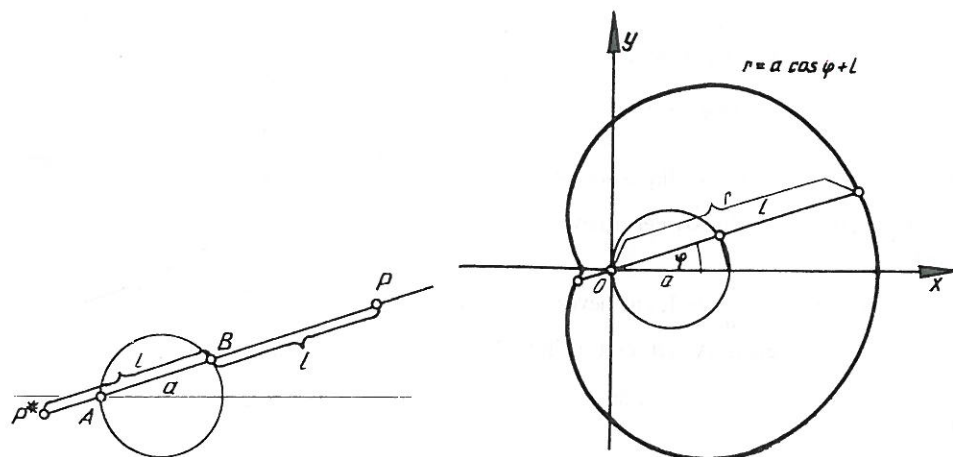


7.112 ábra

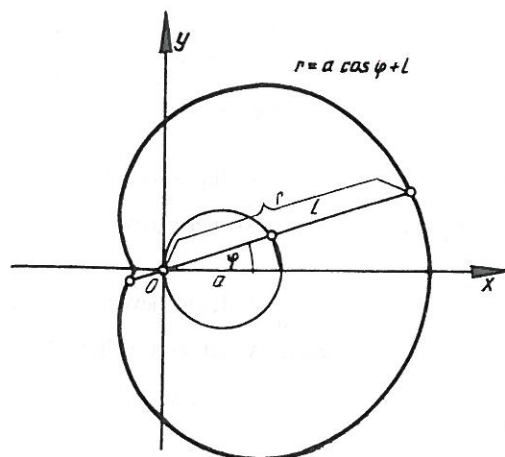
A paraméter jelentése.

Ha $\varphi = \frac{\pi}{2}$, akkor $r = p$.

7. A konchois. a) A kör konchoisa. A kör konchoisa azon pontok mértani helye, amelyeket megkapunk, ha egy adott kör kerületének egy pontjából kiinduló egyenesekre a kör kerületével való B metszésponttól az adott l távolságot rámérjük. Így a körpályán mozgó B pont mozgása az egyenesen fekvő P és P^* pont mozgásába vihető át (7.113 ábra).



7.113 ábra



7.114 ábra

Helyezzük a pólust A -ba, legyen a a kör átmérője.

$$r = a \cos \varphi + l \quad (7.114 \text{ ábra}).$$

$$\begin{cases} x = (a \cos \varphi + l) \cos \varphi \\ y = (a \cos \varphi + l) \sin \varphi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = (a \cos \varphi + l)^2.$$

$$ax = (a \cos \varphi + l) a \cos \varphi.$$

$$x^2 + y^2 - ax = (a \cos \varphi + l)(a \cos \varphi + l - a \cos \varphi).$$

$$x^2 + y^2 - ax = (a \cos \varphi + l) \cdot l.$$

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = (x^2 + y^2) l^2.$$

b) Az egyenes konchoisa. Legyen adott az e egyenes és a rajta kívül fekvő A pont. Induljon ki az A pontból egy egyenessereg. Az e egyenes konchoisa mindazon pontok mértani helye, amelyeket megkapunk, ha az e egyenes és az A pontból kiinduló egyenesek metszéspontjaiból egy adott l távolságot felmérünk.

Legyen az A pont az origóban és az e egyenes legyen párhuzamos az y tengellyel (7.115 ábra).

Ha az A pontnak az e egyenestől való távolsága a , akkor

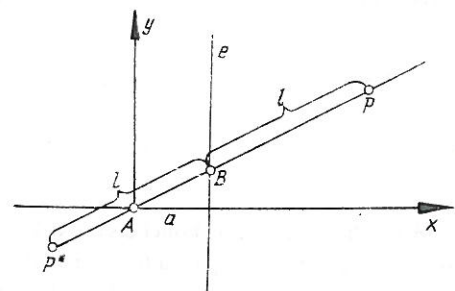
$$\text{a } P \text{ pontra: } \frac{x-a}{l} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\text{a } P^* \text{ pontra: } \frac{a-x}{l} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

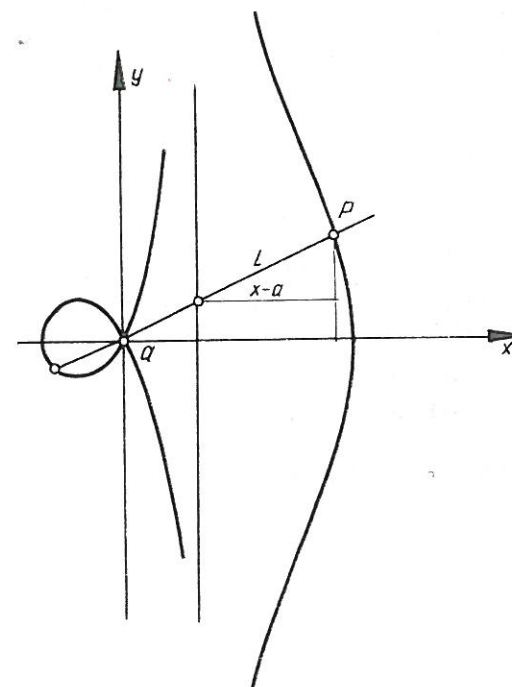
Mindkettőre:

$$(x^2+y^2) \cdot (a-x)^2 = x^2 l^2$$

(lásd 7.116 ábra).



7.115 ábra



7.116 ábra

7.4.2

Polárkoordinátákban megadott görbék érintőjének meghatározása

Határozzuk meg a polárkoordinátákban megadott görbénél a rádiuszvektor és az érintő által bezárt szög tangensét!

A szöget ϑ -val jelölve

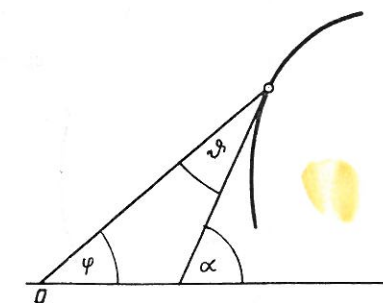
$\operatorname{tg} \vartheta$ értékét akarjuk meghatározni.

A 7.117 ábráról leolvasható

$$\vartheta = \alpha - \varphi.$$

(φ a polárszög, α az érintő irányyszöge.)

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$



7.117 ábra

Jelölje most $\dot{x}$ és $\dot{y}$ a φ paraméter szerinti deriváltakat

$$x = r \cos \varphi \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi$$

$$y = r \sin \varphi \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi, \quad \text{ahol } \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}.$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi} = \frac{\dot{r} \operatorname{tg} \varphi + r}{\dot{r} - r \operatorname{tg} \varphi}.$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi}.$$

Mivel $\operatorname{tg} \alpha = y'$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\frac{\dot{r} \operatorname{tg} \varphi + r}{\dot{r} - r \operatorname{tg} \varphi} - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \frac{\dot{r} \operatorname{tg} \varphi + r}{\dot{r} - r \operatorname{tg} \varphi} \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\dot{r} \operatorname{tg} \varphi + r - \dot{r} \operatorname{tg} \varphi + r \operatorname{tg}^2 \varphi}{\dot{r} - r \operatorname{tg} \varphi + \dot{r} \operatorname{tg}^2 \varphi + r \operatorname{tg} \varphi}.$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{r + r \operatorname{tg}^2 \varphi}{\dot{r} + \dot{r} \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{r(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}{\dot{r}(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} = \frac{r}{\dot{r}}.$$

Tehát az érintő és a rádiuszvektor szögének tangense:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{r}{\dot{r}}.$$

Mivel $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{r d\varphi}{dr}.$

Példák

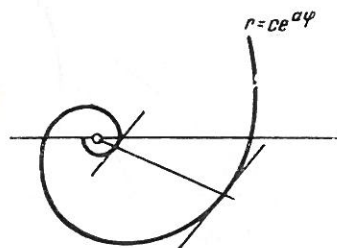
1. Határozzuk meg a logaritmikus spirális

$$r = ce^{a\varphi}$$

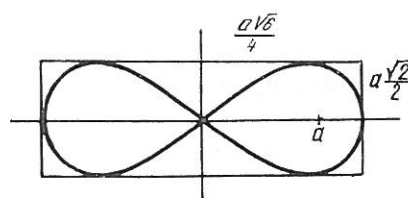
rádiuszvektora és érintője szögének tangensét (7.118. ábra).

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{r}{\dot{r}} = \frac{ce^{a\varphi}}{ace^{a\varphi}} = \frac{1}{a}.$$

A görbét a póluson áthaladó bármely egyenes állandó szög alatt metszi.



7.118. ábra



7.119. ábra

2. Határozzuk meg az $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkáta szélső pontjait (7.119. ábra).

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi.$$

A lemniszkáta koordinátái:

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi,$$

$$y = a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi.$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{-a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sin \varphi + a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi}{\frac{-a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cos \varphi - a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi},$$

azaz

$$y' = -\frac{\cos 2\varphi \cos \varphi - \sin 2\varphi \sin \varphi}{\sin 2\varphi \cos \varphi + \cos 2\varphi \sin \varphi} = -\frac{\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi}.$$

Szélső pont ott van, ahol az érintő vízszintes vagy függőleges.

Az érintő vízszintes,

ha $y' = 0$, ha $\cos 3\varphi = 0$; ha $\varphi = 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$.

Az érintő függőleges,

ha $\sin 3\varphi = 0$; $\varphi = 0^\circ, 180^\circ$.

Ha $\varphi = 0$, akkor $r = a$, $x = a$, $y = 0$.

Ha $\varphi = 30^\circ$, akkor $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, $y = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

8. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

8.1 HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.1.1 A görbe alatti terület

I. Legyen adott az $y = f(x)$ monoton folytonos függvény. Legyen az $a \leq x \leq b$ intervallumban $f(x) > 0$. Határozzuk meg az $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ egyenletű görbék által határolt területet, az ún. görbe alatti területet.

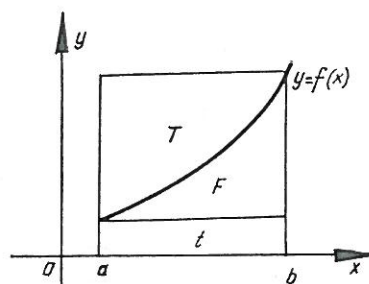
Legyen $f(x)$ monoton növekvő folytonos függvény.

Jelöljük a görbe alatti területet F -fel. Közelítsük meg a területet a beírt, illetve körülírt téglalap területével (8.1 ábra).

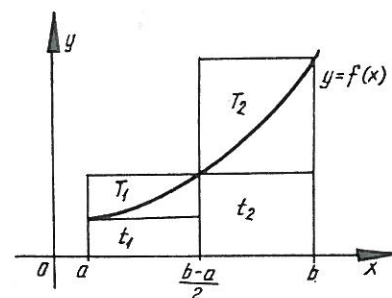
$$t < F < T.$$

Ha az F területet t -vel vagy T -vel helyettesítjük, a hiba, H kisebb, mint a két téglalap területe közötti eltérés.

$$H < (T - t).$$



8.1 ábra



8.2 ábra

Jobb közelítést kapunk, ha az $a \leq x \leq b$ intervallumot két egyenlő részre osztjuk (8.2 ábra).

$$(t_1 + t_2) < F < (T_1 + T_2).$$

A két téglalapösszeg közötti eltérés:

$$(T_1 + T_2) - (t_1 + t_2).$$

Még jobb közelítést kapunk, ha az $[a, b]$ intervallumot 4, 8, 16 egyenlő részre osztva képezzük a beírható és körülírható téglalapok összegét.

II. Legyen $y = f(x)$ $[a; b]$ -ben monoton és folytonos. Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot n egyenlő részre.

Egy részintervallum hossza:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Az egyes osztópontok: $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$.

A megfelelő ordináták: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1}), f(x_n)$.

a) $y = f(x)$ monoton nő.

A beírható téglalapok területének összege (alsó téglalapösszeg):

$$t_n = \Delta x [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] \quad (8.3 \text{ ábra}).$$

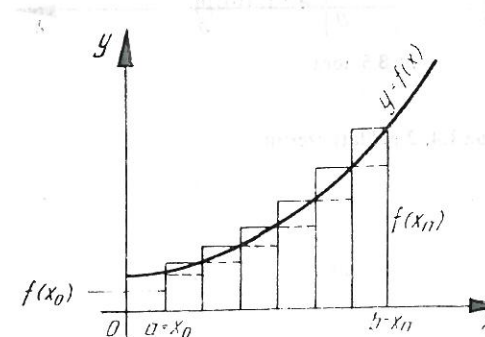
A körülírható téglalapok területének összege (felső téglalapösszeg):

$$T_n = \Delta x [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

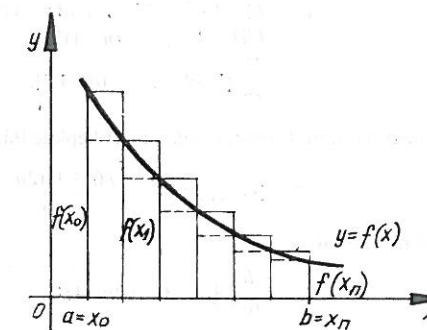
b) $y = f(x)$ monoton fogy.

Az alsó téglalapösszeg:

$$t_n = \Delta x [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$



8.3 ábra



8.4 ábra

A felső téglalapösszeg:

$$T_n = \Delta x [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] \quad (8.4 \text{ ábra}).$$

Mindkét esetben a két téglalapösszeg különbsége:

$$T_n - t_n = \Delta x |f(x_n) - f(x_0)|.$$

Ez pedig nem más, mint a legnagyobb körülírható és a legkisebb beírható téglalapok területének különbsége.

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $\Delta x = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$.

$|f(x_n) - f(x_0)|$ rögzített véges érték, ezért:

$$T_n - t_n \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Mivel $t_n < F < T_n$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n - t_n) = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = F.$$

Példák

1. Határozzuk meg az $y = x^2$ egyenletű görbe alatti területet a $[0; b]$ intervallumban (8.5. ábra)!
Osszuk fel az intervallumot n részre. Legyen egy részintervallum hossza:

$$\Delta x = h = \frac{b}{n}.$$

Az egyes osztópontok:

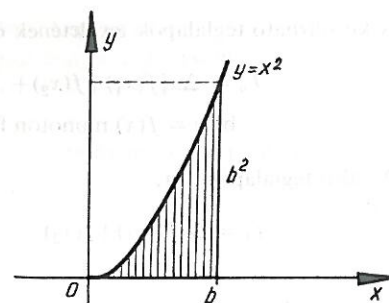
$$0; h; 2h; 3h; \dots; (n-1)h; nh = b.$$

A megfelelő ordináták:

$$0; h^2; 4h^2; \dots; (n-1)^2 h^2; n^2 h^2 = b^2.$$

A beíráható téglalapok területének összege:

$$\begin{aligned} t_n &= h[0^2 + h^2 + 4h^2 + \dots + (n-1)^2 h^2] = \\ &= h^3[1 + 4 + \dots + (n-1)^2] = \\ &= \frac{b^3}{n^3} [1 + 4 + \dots + (n-1)^2]. \end{aligned}$$



8.5. ábra

A négyzetszámok összegének ismert képlete (lásd az 1.4, 2. példát) szerint:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ezt felhasználva:

$$t_n = \frac{b^3}{6n^3} [(n-1) \cdot n(2n-1)].$$

n^3 -al egyszerűsítve:

$$t_n = \frac{b^3}{6} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right].$$

A körülírható téglalapok területének összege:

$$\begin{aligned} T_n &= h[h^2 + 4h^2 + \dots + (n-1)^2 h^2 + n^2 h^2] = h^3(1 + 4 + \dots + n^2) = \\ &= \frac{b^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2). \end{aligned}$$

A négyzetszámok összegének képletével:

$$T_n = \frac{b^3}{6n^3} [n(n+1)(2n+1)] = \frac{b^3}{6} \left[1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right].$$

A két téglalapösszeg különbsége:

$$T_n - t_n = \frac{b^3}{6} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right].$$

$$T_n - t_n = \frac{b^3}{6} \left[\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right] = \frac{b^3}{n}.$$

Ha $n \rightarrow \infty$, $T_n - t_n \rightarrow 0$.

Ha n nő, a t_n sorozat monoton nő és korlátos, a T_n sorozat monoton fogy és korlátos, van határértékük.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}.$$

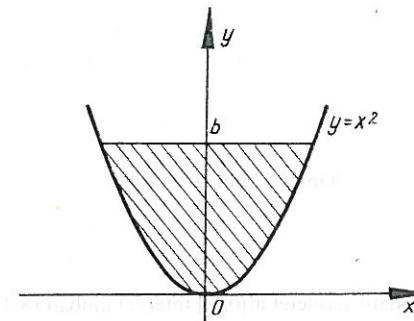
$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}.$$

Mivel $t_n < F < T_n$,

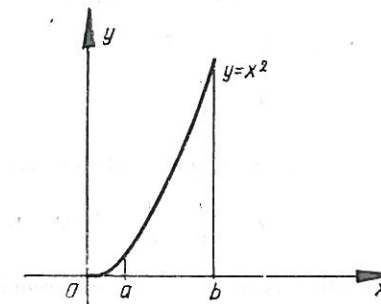
$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{b^3}{3}.$$

Az $y = x^2$ parabola alatti terület ($0 \leq x \leq b$)

$$F = \frac{b^3}{3} = \frac{b \cdot b^2}{3}.$$



8.6. ábra



8.7. ábra

Ez nem más, mint a b alapú és b^2 magasságú téglalap területének harmadrésze (8.5. ábra).

Ezért az $y = x^2$ és $y = b$ egyenletű görbék által határolt parabolaszektor területe a téglalap területének $\frac{2}{3}$ része (8.6. ábra).

Az $y = x^2$ egyenletű parabola $[a; b]$ intervallumában a görbe alatti terület:

$$F = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \quad (8.7. \text{ ábra}).$$

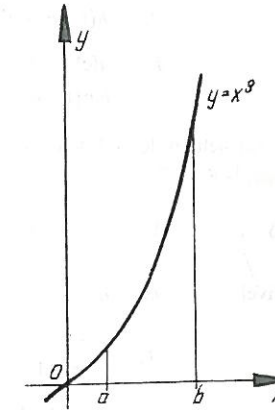
2. Határozzuk meg az $y = x^3$ egyenletű görbe alatti területet a $[0; b]$ intervallumban (8.8. ábra)!

Osszuk az intervallumot n egyenlő részre. Legyen egy részintervallum hossza:

$$h = \frac{b}{n}.$$

A beíráható téglalapok területének összege:

$$\begin{aligned} t_n &= h[0^3 + h^3 + (2h)^3 + \dots + (n-1)^3 h^3] = \\ &= h^4[0^3 + 1^3 + \dots + (n-1)^3] = \frac{b^4}{n^4} [1^3 + \dots + (n-1)^3]. \end{aligned}$$



8.8. ábra

Mivel az első n szám köbének összege (lásd az 1.4, 3. példát):

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2,$$

$$t_n = \frac{b^4}{n^4} \left[\frac{(n-1)n}{2} \right]^2 = \frac{b^4}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2.$$

A körülírtó téglalapok területének összege:

$$T_n = h[h^3 + (2h)^3 + \dots + (nh)^3] = h^4[1^3 + 2^3 + \dots + n^3] = \frac{b^4}{n^4} [1^3 + 2^3 + \dots + n^3].$$

A köbszámok összegének képletével:

$$T_n = \frac{b^4}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{b^4}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2.$$

Ha $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{b^4}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{b^4}{4}.$$

Mivel $t_n < F < T_n$

$$F = \frac{b^4}{4}.$$

Az $y = x^3$ egyenletű görbe alatti terület az $a \leq x \leq b$ intervallumban:

$$F = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4} = \frac{1}{4} (b^4 - a^4).$$

3. Határozzuk meg az $y = e^x$ egyenletű görbe alatti területet a $[0, a]$ intervallumban (8.9 ábra)! A függvény folytonos és monoton nő.

Legyen $h = \frac{a}{n}$.

$$t_n = h[1 + e^h + e^{2h} + \dots + e^{(n-1)h}].$$

$$T_n = h[e^h + e^{2h} + \dots + e^{(n-1)h} + e^{nh}] = he^h[1 + e^h + \dots + e^{(n-1)h}].$$

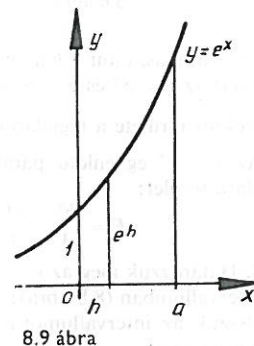
A zárójelben levő kifejezések egy mértani sor összegét adják, ahol $a_1 = 1$, $q = e^h$.

$$\text{Így } 1 + e^h + \dots + e^{(n-1)h} = \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1}.$$

Mivel $nh = a$.

$$t_n = h \frac{e^a - 1}{e^h - 1} = (e^a - 1) \frac{h}{e^h - 1},$$

$$T_n = he^h \frac{e^a - 1}{e^h - 1} = (e^a - 1) e^h \frac{h}{e^h - 1}.$$



8.9 ábra

Ha $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^h = 1.$$

A l'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{e^h - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{e^h} = 1.$$

$$\text{Így } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = e^a - 1.$$

III. Határozzuk meg most olyan függvény görbéje alatti területet, amely nem monoton. Kössük ki továbbra is, hogy az $y = f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban folytonos és nem negatív.

a) A terület meghatározásához osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n részre. A részintervallumok lehetnek különbözőek.

Legyenek a részintervallumok:

$$[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{i-1}; x_i], \dots, [x_{n-1}; x_n], \text{ és}$$

legyen a részintervallumok hossza:

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}).$$

Minden egyes részintervallumban válasszuk ki a legkisebb, illetve legnagyobb ordinátát (8.10 ábra)!

A legkisebb ordináták sorozata: $m_1, m_2, \dots, m_n$,

a legnagyobbaké: $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$.

Képezzük a következő két összeget:

$$s_n = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n \quad (\text{alsó téglalapösszeg}),$$

$$S_n = M_1 x_1 + M_2 x_2 + \dots + M_n x_n \quad (\text{felső téglalapösszeg}).$$

A két téglalapösszeg jelölésére a következő szimbólumot használjuk:

$$s_n = m_1 x_1 + \dots + m_n x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

és

$$S_n = M_1 x_1 + \dots + M_n x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

A definícióból adódik:

$$s_n \leq F \leq S_n.$$

(Ha $f(x) = \text{konst}$, az egyenlőség áll fenn.)

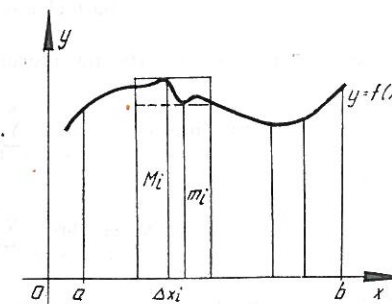
A két téglalapösszeg különbsége:

$$S_n - s_n = \Delta x_1 (M_1 - m_1) + \Delta x_2 (M_2 - m_2) + \dots + \Delta x_n (M_n - m_n),$$

azaz

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \quad (\text{ahol } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}).$$

Vezessük még be a következő fogalmakat!



8.10 ábra

Definíció. Egy intervallum felosztása δ -nál finomabb, ha a leghosszabb részintervallum hossza is kisebb, mint δ .

Jele: $\max \Delta x_i < \delta$.

Definíció. A felosztás minden határon túl finomul, ha a leghosszabb részintervallum hossza is nullához tart.

Jele: $\max \Delta x_i \rightarrow 0$.

Az $[a; b]$ intervallum felosztásánál vegyünk egy minden határon túl finomuló felosztássorozatot. Az n -edik felosztásnak megfelelő alsó téglalapösszeg s_n , felső téglalapösszeg S_n .

Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (S_n - s_n) = 0.$$

Legyen ε tetszés szerinti kis pozitív szám.

$f(x)$ a feltevés szerint folytonos, tehát egyenletesen folytonos. Ezért $\eta > 0$ tetszés szerinti számhoz található olyan $\delta(\eta) > 0$, hogy

$$|M_i - m_i| < \eta, \quad \text{ha} \quad |x_i - x_{i-1}| < \delta.$$

A $\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}| < \delta$ egyenlőtlenség elég finom felosztás esetén teljesül. Ez pedig fennáll, mert feltettük, hogy $\max \Delta x_i \rightarrow 0$.

Legyen $\eta = \frac{\varepsilon}{b-a}$, ahol ε a fentiekben megadott kis pozitív szám.

Ekkor

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

A felső és alsó téglalapösszeg különbsége tehát:

$$S_n - s_n < \varepsilon, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy.}$$

Mivel $s_n < F < S_n$, a görbe alatti terület:

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

vagy

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

b) Osszuk fel most az $a \leq x \leq b$ intervallumot az

$$[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{i-1}; x_i], \dots, [x_{n-1}; x_n]$$

részintervallumokra, amelyek hossza

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}).$$

Az egyes részintervallumokban most ne a legkisebb és legnagyobb ordinátákat vegyük,

hanem a tetszés szerinti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ pontokhoz tartozó $f(\xi_1); f(\xi_2); \dots; f(\xi_n)$ ordinátákat, ahol $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ (8.11 ábra).

Képezzük a következő téglalapösszeget:

$$T_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Mivel $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$,

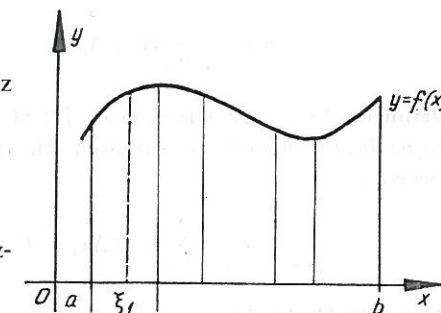
$$s_n < T_n < S_n.$$

Ha a felosztás minden határon túl finomul, azaz $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, a görbe alatti terület:

$$F = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Ennek jelölésére a következő szimbólumot használjuk:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$



8.11 ábra

(olv.: integrál a -tól b -ig $f(x)$ $d\mathbf{x}$).

A **határérték** az $f(x)$ függvény **határozott integrálja** az $a \leq x \leq b$ intervallumban. Az $\int$ jel (nyújtott S betű) a szumma (összeg) határértékének szimbóluma; a az integrálás alsó, b az integrálás felső határa, $f(x)$ az integrálandó függvény vagy integrandusz.

Tehát, ha az $[a; b]$ intervallumban $f(x)$ nem negatív és folytonos, a görbe alatti terület:

$$F = \int_a^b f(x) dx$$

8.1.2 A határozott integrál fogalma

A határozott integrál fogalmát a területszámítással kapcsolatban vezettük be. Olyan görbe alatti területet határoztunk meg, amelynél a függvény az adott intervallumban pozitív és folytonos volt.

A határozott integrál fogalmát a területszámítástól elvonatkoztatva is definiáljuk.

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban értelmezve.

Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot az

$$a = x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n = b \quad \text{osztópontokkal}$$

$$[x_0; x_1], \dots, [x_{i-1}; x_i], \dots, [x_{n-1}; x_n] \quad \text{részintervallumokra.}$$

A részintervallumok hossza legyen:

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}).$$

Minden egyes részintervallumon jelöljünk ki egy tetszőleges $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n$ pontot!

Képezzük a következő szorzatösszeget:

$$f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Képezzük a szorzatösszeg határértékét, ha a felosztás minden határon túl finomul, azaz a legnagyobb részintervallum hossza is a nullához tart ($\max \Delta x_i \rightarrow 0$).

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Definíció. Az $y = f(x)$ függvény a $[a; b]$ intervallumban RIEMANN szerint integrálható, ha az $[a; b]$ intervallum bármilyen felosztása és a ξ_i helyek tetszőleges megválasztása mellett a

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I$$

határérték létezik, azaz

$$\left| I - \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \max \Delta x_i < \delta,$$

ahol $\delta = \delta(\varepsilon)$.

A határérték az $y = f(x)$ függvény határozott integrálja az $[a; b]$ intervallumban, jele:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

[Bernhard Riemann (1826–1866) német matematikus.]

Tétel. Zárt intervallumban folytonos függvény integrálható.

Bizonyítás. Legyen $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumban folytonos függvény. Képezzük az $[a; b]$ intervallum egy tetszés szerinti felosztását, és képezzük az

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad \text{és} \quad S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

alsó és felső összegeket.

(Az $[a; b]$ intervallumot Δx_i hosszúságú $[x_{i-1}; x_i]$ intervallumokra osztottuk ($i = 1, 2, \dots, n$)).

(m_i és M_i az $[x_{i-1}; x_i]$ -ban felvett legkisebb, illetve legnagyobb függvényérték.)

Legyen ξ_i az $[x_{i-1}; x_i]$ intervallum tetszés szerinti pontja.

$$s \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq S.$$

Ez az egyenlőtlenség minden felosztásra igaz.

Az egyenletes folytonosság tételéből következően:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (S - s) = 0.$$

Ezért a

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

határérték létezik, vagyis a zárt intervallumban folytonos függvény integrálható. Tehát, ha $y = f(x)$ az $[a; b]$ -ban folytonos, az

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{integrál létezik.}$$

Tétel. Ha $y = f(x)$ az $[a; b]$ intervallumban folytonos, és az a hely környezetében korlátos, akkor az

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{integrál létezik.}$$

Ha $y = f(x)$ az $[a; b]$ intervallumban folytonos, és a b hely környezetében korlátos, akkor az

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{integrál létezik.}$$

Tétel. Ha $y = f(x)$ az $[a; b]$ -ban mindenütt értelmezve van, és véges számú szakadási helytől eltekintve mindenütt folytonos, akkor az

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{integrál létezik.}$$

E két utóbbi tétel bizonyítását nem közöljük.

A határozott integrál határérték, azaz számérték. Ezért jelölése az x integrációs változón kívül más változókkal is történhet:

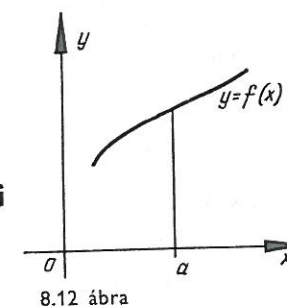
$$\int_a^b f(x) dx; \quad \int_a^b f(t) dt; \quad \int_a^b f(u) du \quad \text{stb.}$$

8.1.3

A határozott integrál tulajdonságai

$$1. \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

A tétel helyessége a határozott integrál definíciójából adódik. (Szemléletesen: a terület nulla: 8.12 ábra.)



8.12 ábra

2. Az integrálási határok felcserélése

Az $\int_a^b f(x) dx$ integrál definíciójánál feltettük, hogy $a < b$.

Nézzük az

$$\int_b^a f(x) dx \quad \text{határozott integrált, ha } b > a.$$

Az intervallum felosztásánál most jobbról balra haladunk.

Ha az $[a; b]$ intervallumot a balról jobbra való haladásnál $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) részintervallumokra osztottuk, amelyek hossza $\Delta x_1, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n$ ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$), akkor jelöljük a jobbról balra való haladásnál a részintervallumokat:

$$\Delta^* x_1, \Delta^* x_2, \dots, \Delta^* x_i, \dots, \Delta^* x_n \text{-nel.}$$

Az összefüggés a kétféle felosztás között:

$$\begin{array}{ll} \Delta^* x_1 = -\Delta x_n & \xi_1^* = \xi_n \\ \Delta^* x_2 = -\Delta x_{n-1} & \xi_2^* = \xi_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ \Delta^* x_i = -\Delta x_{n-i+1} & \xi_i^* = \xi_{n-i+1} \\ \vdots & \vdots \\ \Delta^* x_n = -\Delta x_1 & \xi_n^* = \xi_1. \end{array}$$

Balról az i -edik szorzat:

$$f(\xi_i^*) \Delta^* x_i = -f(\xi_{n-i+1}) \Delta x_{n-i+1}.$$

A szorzatösszegek közötti összefüggés:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i^*) \Delta^* x_i = \sum_{i=1}^n -f(\xi_{n-i+1}) \Delta x_{n-i+1}.$$

Ha $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, a határértékek:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Tehát, ha az integrálás határait felcseréljük, az integrál értéke (-1) -szeresre változik. (A következtetés akkor is érvényes, ha $a > b$.)

3. Határozott integrálok összegezési tétele

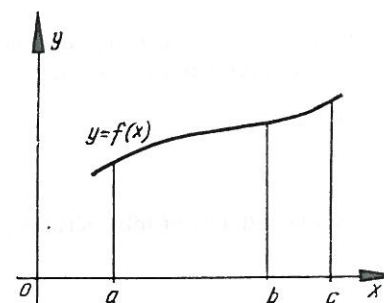
Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban folytonos és

$$a < b < c,$$

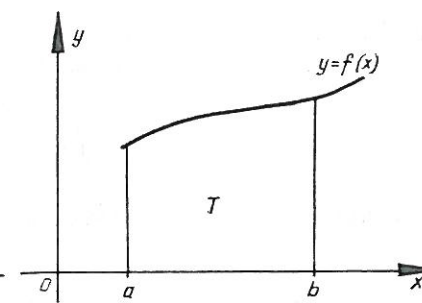
$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad (8.13 \text{ ábra}).$$

A tétel a határozott integrál definíciójából (szorzatösszegek határértéke) és a határértékek összegére vonatkozó tételből közvetlenül belátható.

A tétel akkor is érvényes, ha a b pont az $[a; c]$ intervallumon kívül esik.



8.13 ábra



8.14 ábra

4. A határozott integrál geometriai jelentése

Ha az $[a; b]$ intervallumban

$$f(x) \geq 0,$$

$\int_a^b f(x) dx > 0$, az integrál megadja a görbe alatti területet.

$$T = \int_a^b f(x) dx \quad (8.14 \text{ ábra}).$$

Ha az $[a; b]$ intervallumban,

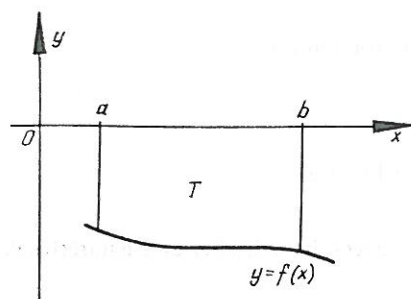
$$f(x) \leq 0,$$

a határozott integrál definíciójából következően

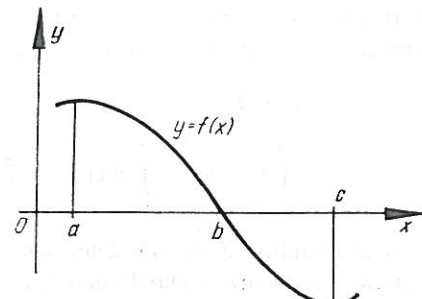
$$\int_a^b f(x) dx \leq 0.$$

Ezért a görbe és az x tengely közti terület:

$$T = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad (8.15 \text{ ábra}).$$



8.15 ábra



8.16 ábra

Ha az $y = f(x)$ függvénynek az $x = b$ zérushelye, akkor az $y = f(x)$ függvény görbéje és az $y = 0$, $x = a$, $x = c$ egyenesek által határolt síkidom területe (8.16 ábra):

$$T = \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_b^c f(x) dx \right|.$$

Hasonlóan határozható meg a görbe és az x tengely közötti terület több zérushely esetén is.

8.1.4 Az integrálszámítás középértéktétele

Tétel. Ha az $y = f(x)$ függvény folytonos az $[a; b]$ intervallumban, az intervallum belsejében van legalább egy olyan ξ hely, amelyre

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Bizonyítás. Legyen az $[a; b]$ intervallumban az $y = f(x)$ folytonos függvény legkisebb értéke m , legnagyobb értéke M . Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot $\Delta x_1; \Delta x_2; \dots; \Delta x_n$ hosszúságú részekre ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$).

Ha az i -edik részintervallumban a legkisebb érték m_i és a legnagyobb M_i ,

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i,$$

azaz

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Mivel m és M a legkisebb és legnagyobb érték $[a; b]$ -ben,

$$m \leq m_i, \quad M_i \leq M.$$

Ezért

$$m \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^n \Delta x_i.$$

Mivel

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a,$$

és

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx,$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

azaz

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $[a; b]$ -ban $f(x) = \text{konst.}$

Az $[a; b]$ intervallumban az $y = f(x)$ függvény legkisebb, illetve legnagyobb értéke m , illetve M . Tudjuk, hogy a folytonos függvények zárt intervallumban felveszik a minimum és maximum közé eső összes értéket (lásd 6.3.1 pontot).

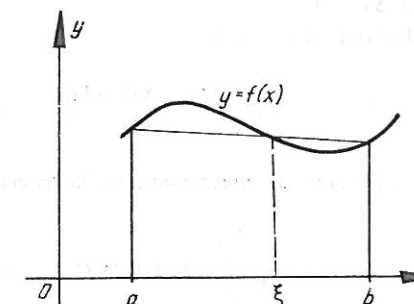
Van tehát legalább egy olyan ξ hely ($a < \xi < b$), ahol

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Ezzel bebizonyítottuk az integrálszámítás középértéktételét. Az $y = f(\xi)$ érték a függvény integrál középértéke $[a; b]$ -ban.

Más formában:

$$(b-a)f(\xi) = \int_a^b f(x) dx \quad (8.17 \text{ ábra}).$$



8.17 ábra

8.1.5 Az integrálszámítás alaptétele

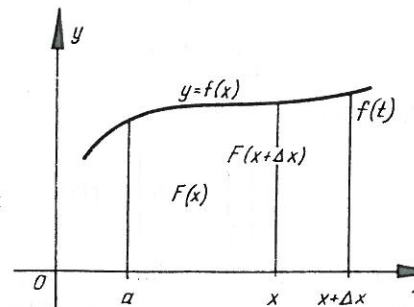
a) A határozott integrál mint a felső határ függvénye. Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban folytonos.

Vegyük a függvény határozott integrálját a rögzített alsó határtól, a -tól, a változó felső határig, x -ig ($a \leq x \leq b$).

A határozott integrál a felső határ függvénye, jelöljük $F(x)$ -szel.

Jelöljük az integrálási változót t -vel, mert most x a változó felső határt jelöli.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (8.18 \text{ ábra}).$$



8.18 ábra

Az $x + \Delta x$ felső határig az integrál

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt.$$

A két határozott integrál különbsége:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt,$$

azaz

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt.$$

Δx -szel osztva:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt.$$

Ha $\Delta x \rightarrow 0$,

a bal oldal határértéke:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

A jobb oldal az integrálszámítás középértéktétele szerint:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt = f(\xi), \quad \text{ahol } x < \xi < x + \Delta x.$$

Ha $\Delta x \rightarrow 0$, $f(\xi) \rightarrow f(x)$.

Tehát, ha

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(t) dt, \\ F'(x) &= f(x). \end{aligned}}$$

Másképpen

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x).$$

Tehát bebizonyítottuk a *tételt*.

Tétel. A határozott integrálnak a felső határ szerinti deriváltja egyenlő az integrálandó függvénynek a felső határnál felvett értékével, ha az integrálandó függvény az x helyen folytonos.

b) A primitív függvény fogalma. Ha $F'(x) = f(x) = 2x$, tudjuk, hogy $F(x) = x^2$, mert $(x^2)' = 2x$.

Az egyenlőséget azonban minden $F(x) = x^2 + C$ alakú függvény is kielégíti, mert $(x^2 + C)' = 2x$.

Hasonlóan, ha $F'(x) = f(x)$,

$$[F(x) + C]' = f(x).$$

Az a kérdés, hogy az olyan függvények, amelyeknek deriváltja megegyezik, csak konstansban különböznek-e egymástól? A választ két tételben adjuk meg.

I. tétel. Ha egy függvény deriváltja mindenütt zérus, a függvény konstans.

Bizonyítás. Legyen x_1 és x_2 az $[a; b]$ intervallum két tetszős szerinti pontja. A Lagrange-féle középértéktétel szerint (7.1.6) az $(x_1; x_2)$ intervallumban van legalább egy olyan ξ hely, amelyre

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

A feltétel szerint $f'(\xi) = 0$, így mivel $x_2 - x_1 \neq 0$,

$$f(x_2) - f(x_1) = 0.$$

Ezért

$$f(x_2) = f(x_1).$$

Ez azt jelenti, hogy a függvény értéke az intervallumban állandó:

$$f(x) = C.$$

Ez geometriailag azt jelenti, hogy a függvény párhuzamos az x tengellyel (8.19 ábra).

II. tétel. Ha két függvény differenciálhányadosa mindenütt egyenlő, a két függvény csak konstansban különbözik.

Legyen ugyanis a két függvény $F(x)$ és $G(x)$. Legyen differenciálhányadosuk egyenlő:

$$F'(x) = G'(x),$$

azaz $F'(x) - G'(x) = 0$.

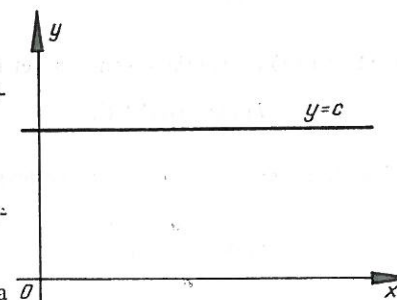
Felhasználva azt a szabályt, hogy összeget tagonként differenciálunk:

$$[F(x) - G(x)]' = 0.$$

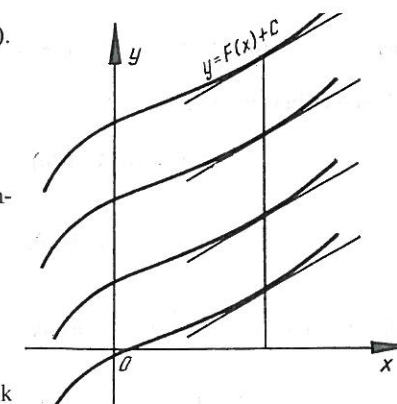
Így az I. tétel értelmében

$$F(x) - G(x) = C.$$

A két függvény tehát csak konstansban különbözik egymástól.



8.19 ábra



8.20 ábra

Geometriailag ez azt jelenti, hogy az $y = F(x) + C$ függvények érintői adott pontban párhuzamosak, a görbesereg az y tengely irányában való párhuzamos eltolással keletkezik (8.20 ábra).

Azok az $F(x)$ függvények, amelyek az

$F'(x) = f(x)$ egyenlőséget kielégítik, az $f(x)$ függvény primitív függvényei.

Így az $f(x) = 2x$ függvény primitív függvényei $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 + 5$, $F(x) = x^2 + C$ stb.

c) A határozott integrál kiszámítása primitív függvény segítségével. Legyen

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

A határozott integrál felső határ szerinti deriváltja egyenlő az integrálandó függvénynek a felső határ helyén felvett értékével:

$$F'(x) = f(x).$$

Legyen másrészt $G(x)$ az $f(x)$ függvény egy primitív függvénye, azaz

$$G'(x) = f(x).$$

$F(x)$ és $G(x)$ deriváltja egyenlő, a két függvény csak konstansban különbözhet egymástól.

$$F(x) = G(x) + C.$$

Nézzük az egyenlőséget az $x = a$ értéknél

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0.$$

Mivel $F(a) = G(a) + C$,

így $G(a) + C = 0$, $C = -G(a)$.

C értékét behelyettesítve:

$$F(x) = G(x) - G(a), \quad \text{azaz}$$

$$\int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a).$$

Ha az x felső határ helyébe b -t írunk:

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

Mivel a felső határban már nem szerepel x , az integrálási változót x -szel jelölhetjük:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Ez a *Newton–Leibniz-formula az integrálszámítás alaptétele*. A tétel kapcsolatot létesít a differenciál- és integrálszámítás között.

A *Newton–Leibniz-tétel* kimondja: a határozott integrált megkapjuk, ha az integrálandó függvény primitív függvényének felső és alsó határon vett helyettesítési értékeit egymásból kivonjuk.

A képletet így is jelölük:

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

Alkalmazásként nézzünk meg a határozott integrál bevezetésénél megoldott területszámítási feladatokat:

Példák

1. $\int_a^b x^2 dx.$

Az $f(x) = x^2$ függvény egyik primitív függvénye:

$$G(x) = \frac{x^3}{3}, \quad \text{mivel} \quad \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Így $\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$

2. $\int_a^b x^3 dx.$

A primitív függvény $\frac{x^4}{4}$, mivel $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

Így $\int_a^b x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_a^b = \frac{1}{4}(b^4 - a^4).$

3. $\int_1^a e^x dx.$

A primitív függvény e^x , mert $(e^x)' = e^x$.

$$\int_1^a e^x dx = [e^x]_1^a = e^a - e^1 = e^a - e.$$

8.2 HATÁROZATLAN INTEGRÁL

8.2.1 A határozatlan integrál fogalma

A differenciálás fordított műveletét határozatlan integrálásnak nevezzük.

Mindazokat az $F(x)+C$ primitív függvényeket, amelyeknek deriváltja $f(x)$, így jelöljük:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

(A 8.1.5 b pontban bebizonyítottuk, hogy azok a kifejezések, amelyeknek deriváltja egyenlő, csak konstansban különböznek.)

Az $\int f(x) dx$ kifejezés az $f(x)$ függvény határozatlan integrálja. (Olv.: integrál $f(x)$ dé x .) $f(x)$ az integrandusz, dx nem szorzót jelent, hanem azt jelenti, hogy x szerint integrálunk. $F(x)$ az $f(x)$ -nek valamelyik primitív függvénye, C tetszőleges állandó.

A határozatlan integrál jelölése a határozott integrál jelölésének analógiájára történik. A határozatlan integrál elnevezés a C konstans tetszőleges, azaz határozatlan voltából ered.

A következőkben először megadjuk a differenciálási szabályok megfordítását, az ún. alapintegrálokat, majd ismertetjük a legfontosabb integrálási eljárásokat.

Nézzük például a hatvány integrálását:

$$\alpha \neq -1$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \text{mert} \quad \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha.$$

$$\alpha = -1$$

Ha $x > 0$:

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad \text{mert} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \text{ha} \quad x > 0.$$

Ha $x < 0$:

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C, \quad \text{mert}$$

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, \quad \text{ha} \quad x < 0.$$

A két esetet összefoglalva így jelöljük:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

(A logaritmusfüggvény csak pozitív x -re van értelmezve.)

Foglaljuk táblázatba az alapintegrálokat, a deriválási szabályok megfordítását.

(Megjegyezzük, hogy az egyszerűség kedvéért a továbbiakban az arcsin x , arccos x , arctg x függvényeken a ciklometrikus függvények főértékét értjük.)

8.2.2 Alapintegrálok

Alapintegrálok	Próba
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x)' = e^x$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$(-\cos x)' = \sin x$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$(\sin x)' = \cos x$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$(-\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arctg} x + C \end{cases}$	$(\operatorname{arctg} x)' = (-\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \operatorname{arcsin} x + C \\ -\operatorname{arccos} x + C \end{cases}$ (ha $ x < 1$)	$(\operatorname{arcsin} x)' = (-\operatorname{arccos} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$	$(-\operatorname{cth} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsh} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$	$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

a táblázat folytatódik

a táblázat folytatása

Alapintegrálok	Próba
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arch} x + C =$ $= \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad \text{ha } x > 1$	$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arth} x =$ $= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C, \quad \text{ha } x < 1$	$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$
$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arcth} x =$ $= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + C, \quad \text{ha } x > 1$	$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Megjegyzés. Az utolsó két szabályt így foglalhatjuk össze:

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, \quad \text{ha } |x| \neq 1.$$

8.2.3 Általános integrálási szabályok

I.
$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

azaz összeget tagonként integrálunk. Ez a szabály közvetlenül adódik az összeg differenciálási szabályának megfordításából. A szabály tetszőlegesen sok, de véges számú tag esetén is igaz.

II.
$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad (\text{ahol } a \text{ tetszőleges konstans}),$$

azaz a konstans faktort kivihetjük az integráljel elé. Ez a szabály is közvetlenül adódik a konstanssal szorzott függvény differenciálási szabályának megfordításából.

Az alapintegrálok és az I., II. szabály segítségével könnyen megoldhatunk néhány feladatot.

Példák

1.
$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C.$$

2.
$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C.$$

3.
$$\int dx = \int 1 dx = x + C \quad (\text{mert } (x)' = 1).$$

4.
$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + C.$$

5.
$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x} + C.$$

6. Általában polinom integrálja:

$$\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) dx =$$

$$= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C.$$

Az összeget tagonként integráltuk. Összeg integráljánál a C konstans csak egyszer írjuk le, mert a részintegráloknál szereplő konstansok összege is konstans. Látjuk, hogy polinom integrálja az eredeténél egy fokkal magasabb fokszámú polinom.

7.
$$\int \frac{2x^2 - 5x + 3}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

Osszuk el a számlálót tagonként a nevezővel: $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ -nal:

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 3}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(2x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{-\frac{1}{3}} \right) dx =$$

$$= 2 \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - 5 \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 3 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^8} - 3 \sqrt[3]{x^5} + \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2} + C.$$

8.
$$\int \left(2e^x - 2^x + \frac{5}{x} \right) dx = 2e^x - \frac{2^x}{\ln 2} + 5 \ln |x| + C.$$

9.
$$\int \left(\frac{\sin x}{3} + \frac{1}{4+4x^2} \right) dx = \frac{-\cos x}{3} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C.$$

8.2.4 Integrálás helyettesítéssel

Az integrálásnak ezt a módszerét legkönnyebben konkrét példákon érthetjük meg.

1.
$$\int \cos \frac{1}{2} x dx.$$

Vezessük be az $u = \frac{1}{2} x$ helyettesítést, így u függvénye x -nek.

A differenciálról tanultak értelmében, ha y függvénye x -nek, dy a következőképpen fejezhető ki dx segítségével:

$$dy = f'(x) dx, \quad \text{vagy, mivel } f'(x) = y', \quad dy = y' dx.$$

Hasonlóképpen, ha u függvénye x -nek, $u = g(x)$

$$du = u' dx,$$

ahol $u' = \frac{du}{dx}$.

Térjünk vissza példánkhoz:

$$\int \cos \frac{1}{2} x \, dx. \quad u = \frac{1}{2} x, \quad u' = \frac{1}{2},$$

$$du = u' \, dx,$$

$$du = \frac{1}{2} \, dx.$$

Példánkban az $\frac{1}{2} x$ helyett bevezetjük az u változót. A dx helyett nem írhatunk $\frac{1}{2} dx$ -et, mert a példában az $\frac{1}{2}$ (a belső függvény differenciálhányadosa) nem szerepel. Az $\frac{1}{2}$ tényezőt azonban könnyen behozhatjuk, ha az integranduszt $2 \cdot \frac{1}{2}$ -del szorozzuk.

$$\int \cos \frac{1}{2} x \, dx = \int \cos \frac{1}{2} x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \, dx = 2 \int \cos \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{2} \, dx = 2 \int \cos u \, du =$$

$$= 2 \sin u + C = 2 \sin \frac{1}{2} x + C.$$

A példát a következőképpen is megoldhatjuk:

$$\int \cos \frac{1}{2} x \, dx. \quad u = \frac{1}{2} x, \quad x = 2u, \quad \frac{dx}{du} = 2, \quad dx = 2 \, du.$$

$$\text{Így} \quad \int \cos \frac{1}{2} x \, dx = \int \cos u \cdot 2 \, du = 2 \int \cos u \, du = 2 \sin u + C = 2 \sin \frac{1}{2} x + C.$$

A feladatot helyettesítés nélkül is elvégezhetjük, ha behozzuk az $u = \frac{1}{2} x$ -nek, a belső függvénynek differenciálhányadosát az integrandusba, és felismerjük, hogy közvetett függvény differenciálhányadosa szerepel.

$$\int \cos \frac{1}{2} x \, dx = 2 \int \left(\cos \frac{1}{2} x \right) \left(\frac{1}{2} \right) dx = 2 \sin \frac{1}{2} x + C.$$

A következő példákban is azt az utat követjük, hogy behozzuk az integrandusba u' -t, a belső függvény differenciálhányadosát.

$$2. \quad \int (3x+1)^4 \, dx. \quad \text{Legyen most} \quad u = 3x+1,$$

$$\text{akkor} \quad u' = 3,$$

$$du = u' \, dx,$$

$$du = 3 \, dx.$$

Hogy példánkban 3 dx szerepeljen, szorozni és osztani kell 3-mal.

$$\int (3x+1)^4 \, dx = \frac{1}{3} \int (3x+1)^4 \cdot 3 \, dx = \frac{1}{3} \int u^4 \, du = \frac{1}{3} \frac{u^5}{5} + C =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(3x+1)^5}{5} + C = \frac{(3x+1)^5}{15} + C.$$

$$3. \quad \int (ax+b)^z \, dx. \quad u = ax+b,$$

$$\frac{du}{dx} = a, \quad du = a \, dx.$$

$$\int (ax+b)^z = \frac{1}{a} \int (ax+b)^z a \, dx = \frac{1}{a} \int u^z \, du = \frac{1}{a} \frac{u^{z+1}}{z+1} + C =$$

$$= \frac{1}{a} \frac{1}{z+1} (ax+b)^{z+1} + C.$$

$$4. \quad \int x \sqrt{x^2-5} \, dx. \quad \text{Legyen most} \quad u = x^2-5,$$

$$\text{akkor} \quad u' = 2x,$$

$$du = 2x \, dx.$$

$$\int x \sqrt{x^2-5} \, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2-5} \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \, du =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{u^3} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2-5)^3} + C.$$

*

Általában az $\int f[g(x)] \cdot g'(x) \, dx$ alakú integrálok meghatározása, ha

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C,$$

$$\text{akkor} \quad \int f[g(x)] \cdot g'(x) \, dx = F[g(x)] + C.$$

*

További példák:

$$5. \quad \int e^{-x} \, dx = - \int e^{-x} (-1) \, dx = -e^{-x} + C.$$

$$6. \quad \int \frac{1}{\cos^2 5x} \, dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\cos^2 5x} 5 \, dx = \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + C.$$

A következő integrálokat az $\int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + C$ alapintegrálra vezetjük vissza.

$$7. \quad \int \frac{1}{7x-4} \, dx. \quad \text{Legyen} \quad u = 7x-4.$$

$$\text{Ekkor} \quad u' = 7$$

$$\text{és} \quad du = 7 \, dx.$$

$$\int \frac{1}{7x-4} \, dx = \frac{1}{7} \int \frac{1}{7x-4} 7 \, dx = \frac{1}{7} \int \frac{1}{u} \, du = \frac{1}{7} \ln |u| + C =$$

$$= \frac{1}{7} \ln |7x-4| + C.$$

8. $\int \operatorname{tg} x \, dx.$

Előbb alakítsuk át az integranduszt:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx. \quad \text{Legyen} \quad u = \cos x.$$

$$u' = -\sin x,$$

$$du = -\sin x \, dx.$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{1}{\cos x} (-\sin x) \, dx =$$

$$= - \int \frac{1}{u} \, du = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C.$$

9. $\int \frac{3x-9}{x^2-6x+4} \, dx = 3 \int \frac{x-3}{x^2-6x+4} \, dx =$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x-6}{x^2-6x+4} \, dx = \frac{3}{2} \ln |x^2-6x+4| + C.$$

Általában $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$, mert $[\ln |f(x)|]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$

A következő példákat az

$$\int \frac{1}{1+u^2} \, du = \operatorname{arctg} u + C, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \, du = \operatorname{arcsin} u + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \, du = \operatorname{arsh} u + C, \quad \int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \, du = \operatorname{arch} u + C,$$

$$\int \frac{1}{1-u^2} \, du = \operatorname{arth} u + C.$$

alapintegrálokra vezetjük vissza.

10. $\int \frac{1}{a^2+b^2x^2} \, dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}x\right)^2} \, dx =$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a}{b} \int \frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}x\right)^2} \cdot \frac{b}{a} \, dx = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} x + C.$$

Így $\int \frac{3}{1+4x^2} \, dx = 3 \int \frac{1}{1+(2x)^2} \, dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 \, dx = \frac{3}{2} \operatorname{arctg} 2x + C.$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} \, dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}x\right)^2}} \, dx =$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}x\right)^2}} \cdot \frac{b}{a} \, dx = \frac{1}{b} \operatorname{arcsin} \frac{b}{a} x + C.$$

Így $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x^2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x\right)^2}} \, dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} x + C.$$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} \, dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}x\right)^2}} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b} \int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}x\right)^2}} \cdot \frac{b}{a} \, dx =$

$$= \frac{1}{b} \operatorname{arsh} \frac{b}{a} x + C = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{b}{a} x + \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}x^2} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{b} \ln \left(\frac{b}{a} x + \frac{1}{a} \sqrt{a^2+b^2x^2} \right) + C.$$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-1}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-1}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-1}} \sqrt{3} \, dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arch} \sqrt{3} x + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln (\sqrt{3} x + \sqrt{3x^2-1}) + C.$$

14. $\int \frac{1}{2-5x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x\right)^2} \, dx =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} x + C = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{1+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x}{1-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x} \right| + C =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{20} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}x}{\sqrt{2}-\sqrt{5}x} \right| + C.$$

15. $\int \sin x \cos x \, dx,$ Legyen $u = \sin x.$
Ekkor $u' = \cos x,$
 $du = \cos x \, dx.$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Írjuk most az integrálban szereplő tényezőket fordított sorrendben:

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int \cos x \sin x \, dx. \quad \begin{array}{ll} \text{Legyen} & u = \cos x, \\ \text{Ekkor} & u' = -\sin x, \\ & du = -\sin x \, dx. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x \, dx &= \int \cos x \sin x \, dx = -\int \cos x (-\sin x) \, dx = -\int u \, du = \\ &= -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C. \end{aligned}$$

Mivel a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságból

$$\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos^2 x}{2},$$

nyilvánvaló, hogy a két eredmény csak konstansban különbözik.

$$\begin{aligned} 16. \quad \int \frac{\sqrt{\lg x}}{\cos^2 x} \, dx. \quad & \text{Legyen} \quad u = \lg x. \\ & \text{Ekkor} \quad u' = \frac{1}{\cos^2 x}, \\ & du = \frac{1}{\cos^2 x} \, dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\lg x}}{\cos^2 x} \, dx &= \int \sqrt{\lg x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int \sqrt{u} \, du = \int u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{u^3} + C = \frac{2}{3} \sqrt{\lg^3 x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17. \quad \int \frac{\ln x}{x} \, dx. \quad & \text{Ha} \quad u = \ln x, \\ & \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad du = \frac{1}{x} \, dx. \end{aligned}$$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

$$\begin{aligned} 18. \quad \int \frac{1}{x \ln x} \, dx. \quad & \text{Ha} \quad u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} \, dx, \\ \int \frac{1}{x \ln x} \, dx &= \int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + C = \ln |\ln x| + C. \end{aligned}$$

$$19. \quad \int \sin^2 x \, dx \quad \text{és} \quad \int \cos^2 x \, dx.$$

Felhasználjuk az ismert goniometria azonososságokat:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Így} \quad \int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \cos 2x \cdot 2 \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C = \\ &= \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \cos 2x \cdot 2 \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C = \\ &= \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20. \quad \int \sin^2 3x \, dx. \quad & \text{Ha} \quad u = 3x, \\ & \frac{du}{dx} = 3, \\ & du = 3 \, dx, \end{aligned}$$

$$\int \sin^2 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \sin^2 u \, du = \frac{1}{3} \int \sin^2 u \, du.$$

Felhasználva a 19. feladat eredményét:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 3x \, dx &= \frac{1}{3} \int \sin^2 u \, du = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (u - \sin u \cos u + C_1) \right] = \\ &= \frac{1}{6} (3x - \sin 3x \cos 3x) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21. \quad \int \operatorname{sh}^2 x \, dx. \\ \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Így} \quad \int \operatorname{sh}^2 x \, dx &= \int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (e^{2x} + e^{-2x} - 2) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} - 2x \right) + C = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} - x \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} - x \right) + C = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - x) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \quad \int \operatorname{ch}^2 x \, dx. \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Így} \quad \int \operatorname{ch}^2 x \, dx &= \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (e^{2x} + e^{-2x} + 2) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} + 2x \right) + C = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + x \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} + x \right) + C = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + x) + C. \end{aligned}$$

8.2.5 Parciális integrálás

A szorzat differenciálási szabálya szerint:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx.$$

A határozatlan integrál definíciója szerint azonban:

$$\begin{aligned} \int (uv)' dx &= uv, & \text{tehát} \\ uv &= \int u'v dx + \int uv' dx, & \text{ahonnan} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int u'v dx = uv - \int uv' dx}$$

Az $\int u'v dx$ integrált visszavezettük az $\int uv' dx$ integrálra. Ez az eljárás csak akkor célszerű, ha az $\int uv' dx$ integrál egyszerűbb vagy azonos típusú, mint az $\int u'v dx$ integrál. Tehát az $\int u'v dx$ integrált csak akkor érdemes átalakítani, ha u' -t integrálva (így kapunk belőle u -t) és v -t differenciálva (így kapunk belőle v' -t) egyszerűbben integrálható vagy azonos típusú függvényt kapunk. Nem mindegy tehát, hogy melyik tényezőt tekintjük u' -nek és melyiket v -nek.

A parciális integrálás módszerét eszerint *szorzatok integrálására* használjuk.

Példák

1. $\int xe^x dx.$

Ha x -et tekintjük u' -nek, integrálva $\frac{x^2}{2}$ -t, tehát bonyolultabb függvényt kapunk. $v = e^x$ differenciálhányadosa továbbra is $v' = e^x$. Ha viszont e^x -et tekintjük u' -nek, akkor $u = e^x$ lesz, és ha $v = x$, akkor $v' = 1$. Így $u \cdot v'$ egyszerűbb függvény, mint $u'v$.

Tehát
$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= \int \underset{u}{\overset{u'}{e^x}} \underset{v'}{x} dx & \begin{aligned} u' &= e^x & v &= x \\ u &= e^x & v' &= 1 \end{aligned} \end{aligned}$$

Így
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

2.
$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx + C_1$$

$$\begin{aligned} u' &= \sin x & v &= x^2 \\ u &= -\cos x & v' &= 2x \end{aligned}$$

Újra parciálisan integrálva:

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx = \\ &= x \sin x + \cos x + C_1. \end{aligned} \quad \begin{aligned} u' &= \cos x & v &= x \\ u &= \sin x & v' &= 1 \end{aligned}$$

Az eredményt az eredeti integrálba visszahelyettesítve ($2C_1 = C$):

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

3.
$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \underset{u'}{\sin x} \underset{v}{\sin x} dx = \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = & \begin{aligned} u' &= \sin x & v &= \sin x \\ u &= -\cos x & v' &= \cos x \end{aligned} \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= -\sin x \cos x + x + C_1 - \int \sin^2 x dx. \end{aligned}$$

Így
$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x + C_1 - \int \sin^2 x dx.$$

Rendezve:
$$2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + C_1.$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} (-\sin x \cos x + x) + C.$$

Teljesen hasonló módon oldjuk meg a következő feladatot:

4.
$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \underset{u'}{\cos x} \underset{v}{\cos x} dx = \\ &= \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx = & \begin{aligned} u' &= \cos x & v &= \cos x \\ u &= \sin x & v' &= -\sin x \end{aligned} \\ &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \\ &= \sin x \cos x + x + C_1 - \int \cos^2 x dx. \end{aligned}$$

Rendezve:
$$2 \int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + x + C_1, \quad \text{ahonnan}$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x) + C.$$

Hasonlítsuk össze eredményeinket az előző, 8.2.4 pontban megoldott 19. példa eredményével! Oldjuk meg parciális integrálással a helyettesítéssel megoldott $\int \text{sh}^2 x dx$ és $\int \text{ch}^2 x dx$ integrálokat.

5.
$$\begin{aligned} \int \text{sh}^2 x dx &= \int \underset{u'}{\text{sh} x} \underset{v}{\text{sh} x} dx = \\ &= \text{sh} x \text{ch} x - \int \text{ch}^2 x dx = & \begin{aligned} u' &= \text{sh} x & v &= \text{sh} x \\ u &= \text{ch} x & v' &= \text{ch} x \end{aligned} \\ &= \text{sh} x \text{ch} x - \int (1 + \text{sh}^2 x) dx = \\ &= \text{sh} x \text{ch} x - x + C_1 - \int \text{sh}^2 x dx. \end{aligned}$$

Rendezve és egyszerűsítve:

$$\int \text{sh}^2 x dx = \frac{1}{2} (\text{sh} x \text{ch} x - x) + C.$$

6.
$$\begin{aligned} \int \text{ch}^2 x dx &= \int \underset{u'}{\text{ch} x} \underset{v}{\text{ch} x} dx = \\ &= \text{sh} x \text{ch} x - \int \text{sh}^2 x dx = & \begin{aligned} u' &= \text{ch} x & v &= \text{ch} x \\ u &= \text{sh} x & v' &= \text{sh} x \end{aligned} \\ &= \text{sh} x \text{ch} x - \int (\text{ch}^2 x - 1) dx = \\ &= \text{sh} x \text{ch} x + x + C_1 - \int \text{ch}^2 x dx. \end{aligned}$$

Rendezve és egyszerűsítve:

$$\int \text{ch}^2 x dx = \frac{1}{2} (\text{sh} x \text{ch} x + x) + C.$$

7.
$$\int \sin^2 3x dx.$$

Oldjuk meg a feladatot parciális integrálással, és hasonlítsuk össze az eredményt a helyettesítéssel megoldott integrálok 20. példájának eredményével.

$$\begin{aligned}
 8. \quad \int x^\alpha \ln x \, dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow \\
 &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha \, dx = \quad u' = x^\alpha \quad v = \ln x \\
 &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C = \quad u = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad v' = \frac{1}{x} \\
 &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1} \right) + C.
 \end{aligned}$$

$$9. \quad \int \ln x \, dx.$$

Az egyik tényezőnek 1-et tekintjük.

$$\begin{aligned}
 \int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx = \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow \\
 &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \quad u' = 1 \quad v = \ln x \\
 &= x \ln x - \int dx = \quad u = x \quad v' = \frac{1}{x} \\
 &= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad \int \operatorname{arctg} x \, dx &= \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow \\
 &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \quad u' = 1 \quad v = \operatorname{arctg} x \\
 &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \quad u = x \quad v' = \frac{1}{1+x^2} \\
 &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.
 \end{aligned}$$

Az utolsó integrált mint közvetett függvény deriváltját integráltuk.

$$\begin{aligned}
 11. \quad \int \arcsin \frac{x}{2} \, dx &= \int 1 \cdot \arcsin \frac{x}{2} \, dx = \quad u' = 1 \quad v = \arcsin \frac{x}{2} \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow \\
 &= x \arcsin \frac{x}{2} - \int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \, dx = \quad u = x \quad v' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \\
 &= x \arcsin \frac{x}{2} - \int \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \, dx.
 \end{aligned}$$

Számítsuk ki külön az utolsó integrált:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \, dx \quad t = 1 - \frac{x^2}{4} \quad \text{helyettesítéssel:} \\
 \frac{dt}{dx} = -\frac{x}{2}, \quad dt = -\frac{x}{2} \, dx. \\
 \int \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \, dx = \int -t^{-\frac{1}{2}} \, dt = \frac{-t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\text{Így} \quad \int \arcsin \frac{x}{2} \, dx = x \arcsin \frac{x}{2} + 2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C.$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad \int e^{-2x} \sin 3x \, dx &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x + \frac{3}{2} \int e^{-2x} \cos 3x \, dx. \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 u' &= e^{-2x} \quad v = \sin 3x \quad u' = e^{-2x} \quad v = \cos 3x \\
 u &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \quad v' = 3 \cos 3x \quad u = -\frac{1}{2} e^{-2x} \quad v' = -3 \sin 3x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Így} \quad \int e^{-2x} \sin 3x \, dx &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x + \frac{3}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \cos 3x - \frac{3}{2} \int e^{-2x} \sin 3x \, dx \right]. \\
 \int e^{-2x} \sin 3x \, dx &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin 3x - \frac{3}{4} e^{-2x} \cos 3x - \frac{9}{4} \int e^{-2x} \sin 3x \, dx.
 \end{aligned}$$

Rendezve:

$$\begin{aligned}
 \frac{13}{4} \int e^{-2x} \sin 3x \, dx &= -\frac{1}{4} e^{-2x} (2 \sin 3x + 3 \cos 3x), \\
 \int e^{-2x} \sin 3x \, dx &= -\frac{1}{13} e^{-2x} (2 \sin 3x + 3 \cos 3x) + C.
 \end{aligned}$$

8.2.6 Racionális törtfüggvények integrálása

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} \, dx.$$

A számláló és nevező racionális egészfüggvény. Az integranduszt — ha a számláló fokszáma nem alacsonyabb, mint a nevezőé — osztással racionális egészfüggvény és valódi törtfüggvény összegévé alakítjuk.

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} \, dx = \int \left[R_1(x) + \frac{P(x)}{Q(x)} \right] \, dx,$$

ahol $P(x)$ fokszáma alacsonyabb, mint $Q(x)$ fokszáma.

A valódi törtfüggvény integrálásához felhasználjuk az algebra alaptételét. Az algebra alaptétele szerint minden

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

racionális egészfüggvény a tényezők sorrendjétől eltekintve, egyértelműen állítható elő

$$(x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \dots \cdot (x - z_n)$$

gyöktényezős alakban.

A $z_1, z_2, \dots, z_n$ gyökök általában komplex számok, közöttük egyenlők is előfordulhatnak (többszörös gyökök).

Ha a racionális egészfüggvény együtthatói valós számok, akkor a komplex gyökök konjugáltjai is gyökök, mégpedig, ha egy komplex gyök k -szor fordul elő, akkor a konjugáltja is pontosan k -szor fordul elő a gyöktényezős felbontásban.

Ebből következik, hogy minden valós együtthatós polinom, a tényezők sorrendjétől eltekintve, egyértelműen felírható $(x - x_i)$ valós gyöktényezők és $(x^2 + a_jx + b_j)$ alakú, ún. másodfokú gyöktényezők szorzataként, ahol ezek a másodfokú gyöktényezők valós együtthatójúak, és valós gyökük nincs, vagyis tovább már nem bonthatók valós gyöktényezőkre. Térjünk rá a racionális törtfüggvények integrálására!

a) A nevező elsőfokú függvény

$$\int \frac{2x^2 - x - 14}{2x + 5} dx.$$

A számláló magasabb fokszámú, mint a nevező, osztással egészfüggvény és valódi törtfüggvény összegévé alakítjuk:

$$\begin{array}{r} (2x^2 - x - 14) : (2x + 5) = x - 3 \\ \underline{+ 2x^2 + 5x} \\ -6x - 14 \\ \underline{+ 6x + 15} \\ 1 \end{array}$$

$$\frac{2x^2 - x - 14}{2x + 5} = x - 3 + \frac{1}{2x + 5}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x - 14}{2x + 5} dx &= \int \left(x - 3 + \frac{1}{2x + 5} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{1}{2x + 5} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x + 5} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{1}{2} \ln |2x + 5| + C. \end{aligned}$$

b) A racionális törtfüggvény nevezője másodfokú egészfüggvény

I. A másodfokú nevezőnek két, különböző valós gyöke van

$$\begin{aligned} I. \quad \int \frac{1}{x^2 - 1} dx &= - \int \frac{1}{1 - x^2} dx = - \operatorname{arth} x = - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C. \end{aligned}$$

Az integrált más módon is meghatározhatjuk:

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{(x+1)(x-1)} dx.$$

Bontsuk a törtet két olyan tört összegére, amelynek nevezői a másodfokú nevező gyöktényezői.

Az eljárást résztörtekre bontásnak nevezzük.

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}, \text{ ahol } A \text{ és } B \text{ egyelőre ismeretlen konstansok.}$$

Közös nevezőre hozva:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)},$$

azaz

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x + B - A}{(x+1)(x-1)}.$$

Az egyenlőség csak úgy lehet igaz, ha az egyenlet két oldalán, a számlálókban x együtthatója és a konstans egyenlők

$$\left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{array} \right\} \text{ azaz } A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

A -t és B -t a *határozatlan együtthatók módszerével* határoztuk meg.

Így

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \int \frac{1}{(x+1)(x-1)} dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \ln |x+1| + \frac{1}{2} \ln |x-1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Mivel $|x-1| = |1-x|$, az eredmény azonos az előző módszerrel kapott eredménnyel.

$$2. \quad \int \frac{2x+5}{x^2-3x-4} dx.$$

A számláló alacsonyabb fokszámú, mint a nevező.
Az $x^2-3x-4=0$ egyenlet gyökei $x_1=-1$, $x_2=4$.
Így a nevezőt szorzattá alakítva:

$$\int \frac{2x+5}{x^2-3x-4} dx = \int \frac{2x+5}{(x+1)(x-4)} dx.$$

Írjuk fel az integranduszt két olyan tört összegeként, amelynek nevezői első fokúak, mégpedig a másodfokú nevező gyöktényezői.

$$\frac{2x+5}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4},$$

ahol A és B egyelőre ismeretlen konstansok. Közös nevezőre hozva:

$$\frac{2x+5}{(x+1)(x-4)} = \frac{(A+B)x+B-4A}{(x+1)(x-4)}.$$

Az egyenlőség akkor állhat fenn, ha a számlálókban az együtthatók egyenlők, azaz

$$\left. \begin{array}{l} A+B=2 \\ -4A+B=5 \end{array} \right\}.$$

A két egyenletet kivonva: $5A=-3$, $A=-\frac{3}{5}$.

Ezt az első egyenletbe helyettesítve: $B=2+\frac{3}{5}$, $B=\frac{13}{5}$.

A -t és B -t most is a határozatlan együtthatók módszerével határoztuk meg.
 A és B értékeit más úton is meghatározhatjuk.

$$\frac{2x+5}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4}.$$

Végigszorozva a nevezők legkisebb közös többszörösével:

$$2x+5 = A(x-4) + B(x+1).$$

Az egyenlőség x minden értékénél fennáll. Adjunk x -nek olyan értékeket, hogy A vagy B együtthatója 0 legyen.

$$\text{Ha } x=-1, \quad 3=-5A, \quad A=-\frac{3}{5}.$$

$$\text{Ha } x=4, \quad 13=5B, \quad B=\frac{13}{5}.$$

Tehát

$$\frac{2x+5}{(x+1)(x-4)} = \frac{-\frac{3}{5}}{x+1} + \frac{\frac{13}{5}}{x-4}.$$

Így

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{(x+1)(x-4)} dx &= \int \left(\frac{-\frac{3}{5}}{x+1} + \frac{\frac{13}{5}}{x-4} \right) dx = \\ &= -\frac{3}{5} \ln|x+1| + \frac{13}{5} \ln|x-4| + C_1. \end{aligned}$$

Írjuk a konstanst így: $C_1 = \ln|C|$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{(x+1)(x-4)} dx &= -\frac{3}{5} \ln|x+1| + \frac{13}{5} \ln|x-4| + \ln|C| = \\ &= \ln \left| C \sqrt[5]{\frac{(x-4)^{13}}{(x+1)^3}} \right|. \end{aligned}$$

$$3. \quad \int \frac{3x+1}{2x^2+5x-3} dx.$$

A $2x^2+5x-3=0$ egyenlet gyökei $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$.

A nevező gyöktényezős alakja:

$$2x^2+5x-3 = 2(x+3) \left(x - \frac{1}{2} \right).$$

Az integrál:

$$\int \frac{3x+1}{2x^2+5x-3} dx = \int \frac{3x+1}{2(x+3) \left(x - \frac{1}{2} \right)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{3x+1}{(x+3) \left(x - \frac{1}{2} \right)} dx.$$

Bontsuk a $\frac{3x+1}{(x+3) \left(x - \frac{1}{2} \right)}$ törtet rész törtékre összegére.

$$\frac{3x+1}{(x+3) \left(x - \frac{1}{2} \right)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x - \frac{1}{2}}.$$

Végigszorozva a nevezők legkisebb közös többszörösével,

$$(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)\text{-del:}$$

$$3x+1 = A\left(x-\frac{1}{2}\right) + B(x+3).$$

Ha $x = -3$, $-8 = A\left(-\frac{7}{2}\right)$, $A = \frac{16}{7}$.

Ha $x = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{2} = B \cdot \frac{7}{2}$, $B = \frac{5}{7}$.

$$\frac{3x+1}{(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{16}{7}}{x+3} + \frac{\frac{5}{7}}{x-\frac{1}{2}}.$$

Az integrál:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{2x^2+5x-3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{3x+1}{(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{\frac{16}{7}}{x+3} + \frac{\frac{5}{7}}{x-\frac{1}{2}} \right) dx = \\ &= \frac{16}{14} \int \frac{1}{x+3} dx + \frac{5}{14} \int \frac{1}{x-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{16}{14} \ln|x+3| + \frac{5}{14} \ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + \ln|C| = \\ &= \ln\left| C \sqrt[14]{(x+3)^{16}\left(x-\frac{1}{2}\right)^5} \right|. \end{aligned}$$

II. A másodfokú nevezőnek két egyenlő valós gyöke (egy kétszeres gyöke) van

1. $\int \frac{1}{x^2-4x+4} dx.$
 $x^2-4x+4 = (x-2)^2.$

Az $x^2-4x+4 = 0$ egyenletnek két egyenlő gyöke van: $x_1 = x_2 = 2$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-4x+4} dx &= \int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \int (x-2)^{-2} dx = \\ &= \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-2} + C. \end{aligned}$$

2. $\int \frac{5x+7}{x^2+6x+9} dx.$

A számláló első fokú, a nevezőnek két egyenlő valós gyöke van.

$$x^2+6x+9 = (x+3)^2.$$

$$\int \frac{5x+7}{x^2+6x+9} dx = \int \frac{5x+7}{(x+3)^2} dx.$$

A példát két módon is megoldjuk.

Első módszer: a törtet rész törtre bontjuk:

$$\frac{5x+7}{(x+3)^2} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{x+3}.$$

A számlálók egyelőre ismeretlen konstansok, az egyik nevező $(x+3)$ négyzete, a másik $(x+3)$ első hatványa. Közös nevezőre hozva:

$$\frac{5x+7}{(x+3)^2} = \frac{A+B(x+3)}{(x+3)^2}.$$

Azaz

$$\frac{5x+7}{(x+3)^2} = \frac{Bx+A+3B}{(x+3)^2}.$$

A határozatlan együtthatók módszerével ez akkor igaz, ha

$$\left. \begin{aligned} B &= 5 \\ A+3B &= 7 \end{aligned} \right\}, \text{ azaz } B = 5 \text{ és } A = -8.$$

Így

$$\int \frac{5x+7}{(x+3)^2} dx = \int \left[\frac{-8}{(x+3)^2} + \frac{5}{x+3} \right] dx = \frac{8}{x+3} + 5 \ln|x+3| + C.$$

Második módszerként a példát helyettesítéssel oldjuk meg:

$$\int \frac{5x+7}{(x+3)^2} dx.$$

Legyen $u = x+3$.

Ekkor $x = u-3$,

$dx = du$.

$$\int \frac{5x+7}{(x+3)^2} dx = \int \frac{5u-15+7}{u^2} du = \int \frac{5u-8}{u^2} du = \int \left(\frac{5}{u} - \frac{8}{u^2} \right) du =$$

$$= 5 \ln |u| + \frac{8}{u} + C = 5 \ln |x+3| + \frac{8}{x+3} + C.$$

III. A másodfokú nevezőnek nincs valós gyöke

Az integrált az

$$\int \frac{1}{1+u^2} du = \operatorname{arctg} u + C \quad \text{és}$$

$$\int \frac{f'(u)}{f(u)} du = \ln |f(u)| + C \quad \text{alapintegrálokra vezetjük vissza.}$$

1. $\int \frac{1}{x^2+2x+7} dx.$

$x^2+2x+7=0$, a diszkrimináns $D = \sqrt{4-28} < 0$, a nevezőnek nincs valós gyöke.

Az integranduszt átalakítjuk:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+7} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+6} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} dx = \frac{\sqrt{6}}{6} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{6}} + C.$$

2. $\int \frac{x+3}{x^2-4x+7} dx.$

A nevezőnek nincs valós gyöke.

A számlálót két részre bontjuk úgy, hogy az egyik a nevező deriváltja legyen:

$$\int \frac{x+3}{x^2-4x+7} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2-4x+7} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-4+10}{x^2-4x+7} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+7} dx + 5 \int \frac{1}{x^2-4x+7} dx.$$

Az első integrál:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+7} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2-4x+7| + C_1.$$

A második integrált úgy oldjuk meg, mint az 1. példát:

$$5 \int \frac{1}{x^2-4x+7} dx = 5 \int \frac{1}{(x-2)^2+3} dx = \frac{5}{3} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C_2.$$

Így

$$\int \frac{x+3}{x^2-4x+7} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2-4x+7| + \frac{5\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

Megjegyzés. Ha a racionális törtfüggvény nevezője másodfokú, és a számláló első fokúnál magasabb, az integranduszt osztással egészfüggvény és valódi törtfüggvény összegévé alakítjuk.

c) A nevező harmadfokú egészfüggvény

Mivel másodfokú vagy másodfokúra visszavezethető egyenletnél magasabb fokszámú egyenlet megoldásával nem foglalkoztunk, csak olyan példákat oldunk meg, amelyekben a nevező gyöktényezős alakját ismerjük.

1. A nevező három első fokú tényező szorzata:

$$\int \frac{2x^2+1}{x^3-3x^2+2x} dx = \int \frac{2x^2+1}{x(x^2-3x+2)} dx = \int \frac{2x^2+1}{x(x-1)(x-2)} dx.$$

Bontsuk a törtet rész törtékre összegére:

$$\frac{2x^2+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}.$$

Végigszorozva a nevezők legkisebb közös többszörösével:

$$2x^2+1 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1).$$

Ha $x=0$, $1 = 2A$, $A = \frac{1}{2}$.

Ha $x=1$, $3 = -B$, $B = -3$.

Ha $x=2$, $9 = 2C$, $C = \frac{9}{2}$.

$$\int \frac{2x^2+1}{x^3-3x^2+2x} dx = \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{-3}{x-1} + \frac{9}{x-2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x| - 3 \ln |x-1| + \frac{9}{2} \ln |x-2| + \ln |C_1| =$$

$$= \ln \left| C_1 \frac{\sqrt{x} \sqrt{(x-2)^9}}{(x-1)^3} \right|.$$

2. A nevező egy első és egy tovább nem bontható másodfokú tényező szorzata.

$$\int \frac{2x^2+1}{x^3+3x} dx = \int \frac{2x^2+1}{x(x^2+3)} dx.$$

A törtet így bontjuk rész törtre:

$$\frac{2x^2+1}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}.$$

Az első rész tört nevezője első fokú, számlálója konstans, a második rész tört nevezője másodfokú, számlálója első fokú kifejezés.

$$\frac{2x^2+1}{x(x^2+3)} = \frac{Ax^2+3A+Bx+C}{x(x^2+3)}.$$

Az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha

$$\left. \begin{aligned} A+B &= 2 \\ C &= 0 \\ 3A &= 1 \end{aligned} \right\}, \text{ azaz } A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{5}{3}, \quad C = 0.$$

Így

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+1}{x^3+3x} dx &= \int \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3} \frac{x}{x^2+3} \right) dx = \frac{1}{3} \ln |x| + \frac{5}{3} \int \frac{x}{x^2+3} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln |x| + \frac{5}{6} \int \frac{2x}{x^2+3} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln |x| + \frac{5}{6} \ln |x^2+3| + \ln |C_1| = \ln |C_1 \sqrt[6]{x^2(x^2+3)^5}|. \end{aligned}$$

d) A nevező harmadfokúnál magasabb fokú

Csak speciális esetekben vizsgáljuk az integrálokat.

1. Ha a nevező $(x-a)^n$ alakú, az $x-a = u$ helyettesítést alkalmazzuk.

$$\int \frac{2x-1}{(x+3)^5} dx.$$

Legyen $x+3 = u$.

Ekkor $x = u-3$

és $2x-1 = 2(u-3)-1 = 2u-7$.

Az $x = u-3$ egyenletből:

$$dx = du.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{(x+3)^5} dx &= \int \frac{2u-7}{u^5} du = \int \left(\frac{2}{u^4} - \frac{7}{u^5} \right) du = 2 \frac{u^{-3}}{-3} - 7 \frac{u^{-4}}{-4} + C = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{7}{4} \frac{1}{(x+3)^4} + C. \end{aligned}$$

$$2. \quad \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx.$$

A számlálót átalakítva:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \arctg x - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx. \end{aligned}$$

Az utóbbi integrált parciális integrálással oldjuk meg:

$$\begin{aligned} \int x \frac{x}{(x^2+1)^2} dx &= \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ v & u' \end{matrix} & \quad u' = \frac{x}{(x^2+1)^2} \quad v = x \\ &= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \quad u = -\frac{1}{2(x^2+1)} \quad v' = 1 \\ &= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctg x + C. \end{aligned}$$

Így

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + C.$$

$$3. \quad \int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \int \frac{1}{[(x+1)^2+2]^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right]^2} dx.$$

$$\text{Legyen } \frac{x+1}{\sqrt{2}} = t, \quad x+1 = \sqrt{2}t, \quad dx = \sqrt{2} dt.$$

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt.$$

A példát a helyettesítéssel az előző esetre vezettük vissza.

4. Hasonlóan járunk el az

$$\frac{1}{(x^2+1)^k} dx \quad \text{alakú integráloknál } (k \text{ egész szám}).$$

Az integrált

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^k} dx = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^k} dx \quad \text{átalakítással,}$$

majd parciális integrálással eggyel alacsonyabb fokszámú integrálra vezetjük vissza. (Rekurziós eljárás.)

5. Végül megemlítjük, ha az integrál

$$\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)^k(ax^2+bx+c)^l} dx \quad \text{alakú,}$$

ahol ax^2+bx+c tovább már nem bontható, $P(x)$ alacsonyabb fokszámú, mint a nevező, és k és l egész számok.

Az integranduszt

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k(ax^2+bx+c)^l} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} +$$

$$+ \frac{B_1x+c_1}{ax^2+bx+c} + \dots + \frac{B_lx+c_l}{(ax^2+bx+c)^l}$$

egyenlettel bontjuk rész törtre.

6. Hasonlóan oldhatók meg a

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{integrálok, ha}$$

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x-\alpha_n)^{k_n}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{l_1} \dots (a_mx^2+b_mx+c_m)^{l_m}.$$

8.2.7 Irracionális függvények integrálása

a. x -ből és $\sqrt[k]{ax+b}$, illetve x -ből és $\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ alakú kifejezésből racionális műveletekkel létrehozható függvények integrálása

$$\int R(x, \sqrt[k]{ax+b}) dx \quad \text{és} \quad \int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

A gyök alatt x -nek lineáris egész, illetve törtkifejezése áll.

Az R függvénykapcsolat a racionális műveleteket jelzi. A megoldáshoz a

$$\sqrt[k]{ax+b} = t, \quad \text{illetve} \quad \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

helyettesítést alkalmazzuk.

A megoldást konkrét példákön mutatjuk be:

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{x+5}} dx.$

A helyettesítés:

$$t = \sqrt{x+5}, \quad \text{így}$$

$$t^2 = x+5,$$

$$x = t^2-5,$$

$$dx = 2t dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x+5}} dx &= \int \frac{2t}{(t^2-5)t} dt = 2 \int \frac{1}{t^2-5} dt = \\ &= -\frac{2}{5} \int \frac{1}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2} dt = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \operatorname{arth} \frac{t}{\sqrt{5}} + C = \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{5} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{x+5}{5}} + C = \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{5} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{\frac{x+5}{5}}}{1-\sqrt{\frac{x+5}{5}}} \right| + C = \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+\sqrt{x+5}}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}} \right| + C = \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \ln \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{x+5})^2}{|x|} + C. \end{aligned}$$

2. $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx.$

Legyen $\sqrt{\frac{x}{2-x}} = t.$

Ekkor $\frac{x}{2-x} = t^2,$

$$x = 2t^2 - xt^2,$$

$$x(1+t^2) = 2t^2,$$

$$x = \frac{2t^2}{1+t^2}.$$

Innen

$$dx = \frac{4t + 4t^3 - 4t^3}{(1+t^2)^2} dt,$$

$$dx = \frac{4t}{(1+t^2)^2} dt.$$

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx = \int \frac{1+t^2}{2t^2} \cdot t \cdot \frac{4t}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{2-x}} + C.$$

$$3. \quad \int \frac{1}{x(4-\sqrt[3]{x})} dx.$$

$$t = \sqrt[3]{x} \text{ helyettesítéssel: } x = t^3, dx = 3t^2 dt.$$

$$\int \frac{1}{x(4-\sqrt[3]{x})} dx = \int \frac{1}{t^3(4-t)} 3t^2 dt = \int \frac{3}{t(4-t)} dt.$$

Résztortekre bontással:

$$\frac{3}{t(4-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{4-t} \cdot t(4-t)$$

$$3 = A(4-t) + Bt.$$

$$t = 0, \quad A = \frac{3}{4};$$

$$t = 4, \quad B = \frac{3}{4}.$$

$$\int \frac{3}{t(4-t)} dt = \int \left(\frac{\frac{3}{4}}{t} + \frac{\frac{3}{4}}{4-t} \right) dt = \frac{3}{4} \ln |t| - \frac{3}{4} \ln |4-t| + C =$$

$$= \frac{3}{4} \ln \left| \frac{t}{4-t} \right| + C.$$

Így

$$\int \frac{1}{x(4-\sqrt[3]{x})} dx = \frac{3}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[3]{x}}{4-\sqrt[3]{x}} \right| + C.$$

b. x -ből és egy $\sqrt{ax^2+bx+c}$ alakú kifejezésből racionálisan előállítható függvények integrálása

$$\int R(x; \sqrt{ax^2+bx+c}) dx.$$

Először oldjuk meg a következő három integrált:

$$1. \int \sqrt{1-x^2} dx; \quad 2. \int \sqrt{1+x^2} dx; \quad 3. \int \sqrt{x^2-1} dx.$$

$$1. \quad \int \sqrt{1-x^2} dx.$$

Vezessük be az $x = \sin t$ helyettesítést.

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad dx = \cos t dt; \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$$

$$\text{és } t = \arcsin x.$$

Így

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos t \cos t dt = \int \cos^2 t dt.$$

Mivel

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} (\sin t \cos t + t) + C,$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} (\sin t \cos t + t) + C =$$

$$= \frac{1}{2} (x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C.$$

$$2. \quad \int \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$\text{Legyen } x = \operatorname{sh} t.$$

$$\text{Mivel } \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1, \quad \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t, \quad dx = \operatorname{ch} t dt \quad \text{és}$$

$$t = \operatorname{arsh} x.$$

Behelyettesítve:

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \int \operatorname{ch}^2 t dt.$$

$$\int \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + t) + C.$$

Így

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \int \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + t) = \frac{1}{2} (x \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsh} x) + C =$$

$$= \frac{1}{2} [x \sqrt{1+x^2} + \ln |x + \sqrt{1+x^2}|] + C.$$

3. $\int \sqrt{x^2-1} dx.$

Legyen $x = \operatorname{ch} t, \quad \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1} = \operatorname{sh} t, \quad dx = \operatorname{sh} t dt$ és
 $x = \operatorname{arch} t.$

$$\int \sqrt{x^2-1} dx = \int \operatorname{sh}^2 t dt.$$

$$\int \operatorname{sh}^2 t dt = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t) + C.$$

Így

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-1} dx &= \int \operatorname{sh}^2 t dt = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t) + C = \\ &= \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2-1} - \ln |x + \sqrt{x^2-1}|) + C. \end{aligned}$$

Hasonlóan oldjuk meg az

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx \quad \text{integrálokat.}$$

4. $\int \sqrt{2-4x-x^2} dx.$

Az integranduszt átalakítva:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2-4x-x^2} dx &= \int \sqrt{2-(x^2+4x)} dx = \int \sqrt{6-(x^2+4x+4)} dx = \\ &= \int \sqrt{6-(x+2)^2} dx = \sqrt{6} \int \sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2} dx. \end{aligned}$$

Legyen

$$\frac{x+2}{\sqrt{6}} = \sin t, \quad \sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t.$$

$$x = \sqrt{6} \sin t - 2; \quad dx = \sqrt{6} \cos t dt \quad \text{és} \quad t = \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{6}}.$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2-4x-x^2} dx &= \sqrt{6} \int \sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2} dx = 6 \int \cos^2 t dt = \\ &= 3(\sin t \cos t + t) + C = \\ &= 3 \left(\frac{x+2}{\sqrt{6}} \sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2} + \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{6}} \right) + C = \\ &= 3 \left(\frac{x+2}{6} \sqrt{2-4x-x^2} + \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{6}} \right) + C. \end{aligned}$$

5. $\int \sqrt{x^2+6x+7} dx = \int \sqrt{(x+3)^2-2} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2-1} dx.$

Legyen $\frac{x+3}{\sqrt{2}} = \operatorname{ch} t, \quad \sqrt{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1} = \operatorname{sh} t.$

$$x = \sqrt{2} \operatorname{ch} t - 3; \quad dx = \sqrt{2} \operatorname{sh} t dt \quad \text{és} \quad t = \operatorname{arch} \frac{x+3}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+6x+7} dx &= \sqrt{2} \int \sqrt{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2-1} dx = 2 \int \operatorname{sh}^2 t dt = \\ &= \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t + C = \\ &= \frac{x+3}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2-1} - \operatorname{arch} \frac{x+3}{\sqrt{2}} + C = \\ &= \frac{x+3}{2} \sqrt{x^2+6x+7} - \ln \left| x + \sqrt{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2-1} \right| + C = \\ &= \frac{x+3}{2} \sqrt{x^2+6x+7} - \ln \left| x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2+6x+7} \right| + C. \end{aligned}$$

6. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}} dx.$

$$x = \operatorname{sh} t, \quad \sqrt{x^2+1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1} = \operatorname{ch} t, \quad dx = \operatorname{ch} t dt \quad \text{és} \quad t = \operatorname{arsh} x.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{2 \operatorname{sh} t + 3}{\operatorname{ch} t} \operatorname{ch} t dt = \int (2 \operatorname{sh} t + 3) dt = \\ &= 2 \operatorname{ch} t + 3t + C = 2 \sqrt{x^2+1} + 3 \operatorname{arsh} x + C = \\ &= 2 \sqrt{x^2+1} + 3 \ln |x + \sqrt{x^2+1}| + C. \end{aligned}$$

8.2.8 Exponenciális függvényből racionálisan felépülő függvények integrálása

Az e^x -ből és konstansból racionális műveletekkel (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) nyert függvényeket

$R(e^x)$ -szel jelöljük.

Az integrálokat

$$\int R(e^x) dx \text{-szel jelöljük,}$$

és $e^x = t$ helyettesítéssel oldjuk meg.

Hasonlóan az

$\int R(a^x) dx$ integrálokat $a^x = t$ helyettesítéssel oldjuk meg.

Példák

1. $\int \frac{5e^x}{3-2e^{2x}} dx.$
 $e^x = t; \quad e^{2x} = t^2; \quad x = \ln t; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}; \quad dx = \frac{1}{t} dt.$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \int \frac{5e^x}{3-2e^{2x}} dx &= \int \frac{5t}{3-2t^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{5}{3} \int \frac{1}{1-\frac{2t^2}{3}} dt = \frac{5}{3} \int \frac{1}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t\right)^2} dt = \\ &= \frac{5}{3} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} t + C = \frac{5}{3} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e^x + C = \\ &= \frac{5}{3} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^x}{1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e^x} \right| + C = \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{12} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}e^x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}e^x} \right| + C. \end{aligned}$$

2. $\int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx.$

Tudjuk, hogy $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$

így $\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$

Legyen $e^x = t,$ így $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{t}.$

Ekkor $x = \ln t,$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t},$$

$$dx = \frac{1}{t} dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx &= \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{2}{e^x + \frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{2}{t + \frac{1}{t}} \frac{1}{t} dt = \\ &= \int \frac{2t}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{t} dt = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} e^x + C. \end{aligned}$$

3. $\int \frac{3^x - 1}{3^x + 2} dt.$

Legyen $3^x = t,$ innen $x = \log_3 t.$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t \ln 3}; \quad dx = \frac{1}{\ln 3} \frac{1}{t} dt.$$

$$\int \frac{3^x - 1}{3^x + 2} dx = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{t-1}{(t+2)t} dt.$$

Rész törtre bontással:

$$\frac{t-1}{(t+2)t} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t}. \quad \text{Szorozzuk az egyenletet } t(t+2)\text{-vel.}$$

$$t-1 = At+B(t+2).$$

$$t = -2, \quad -3 = -2A, \quad A = \frac{3}{2}.$$

$$t = 0, \quad -1 = 2B, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

$$\frac{t-1}{(t+2)t} = \frac{\frac{3}{2}}{t+2} - \frac{1}{2t}.$$

Így
$$\begin{aligned} \int \frac{3^x - 1}{3^x + 2} dx &= \frac{1}{\ln 3} \int \frac{t-1}{(t+2)t} dt = \frac{1}{\ln 3} \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{t+2} - \frac{1}{2t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{\ln 3} \left[\frac{3}{2} \ln |t+2| - \frac{1}{2} \ln |t| \right] + C = \\ &= \frac{1}{\ln 3} \ln \sqrt{\left| \frac{(t+2)^3}{t} \right|} + C = \frac{1}{\ln 3} \ln \sqrt{\frac{(3^x+2)^3}{3^x}} + C. \end{aligned}$$

8.2.9 Trigonometrikus függvények integrálása

$\sin x$ -ből, $\cos x$ -ből és konstansból racionális műveletekkel létrehozható függvények integrálása.

A függvényeket $R(\sin x, \cos x)$ -szel jelölve, az integrál

$$\int R(\sin x, \cos x) dx.$$

Az integrálokat

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \text{helyettesítéssel oldjuk meg.}$$

Fejezzük ki $\sin x$, $\cos x$ és dx értékeket $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ segítségével!

Az átalakításoknál felhasználjuk a

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$1 = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \quad \text{összefüggéseket.}$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Hasonlóan

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Mivel $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$,

$$x = 2 \operatorname{arctg} t.$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Tehát a $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ helyettesítéssel:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Példák

1. $\int \frac{1}{\sin x} dx.$

Felhasználva $\sin x$ és dx -re az összefüggéseket:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \frac{1}{\sin x} = \frac{1+t^2}{2t}; \quad dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot 2 \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |t| + \ln |C| = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \ln |C| = \ln \left| C \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|. \end{aligned}$$

2. $\int \frac{1}{\cos x} dx.$

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1}{1-t^2} dt = 2 \operatorname{arth} t + C = \\ &= 2 \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \ln \left| \frac{1+\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + \ln |C| = \ln \left| C \frac{1+\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right|. \end{aligned}$$

3. $\int \frac{1}{\sin x - \cos x - 1} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =$

$$= \int \frac{2 dt}{2t - (1-t^2) - (1+t^2)} = \int \frac{2 dt}{2t-2} = \int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= \ln |t-1| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + C.$$

4. $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x - \sin x} dx.$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2};$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{tg} x - \sin x} dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1-t^2} - \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int \frac{1}{\frac{2t+2t^3-2t+2t^3}{(1-t^2)(1+t^2)}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1-t^2}{2t^3} dt = \\ &= \int \left(\frac{1}{2} t^{-3} - \frac{1}{2} \frac{1}{t} \right) dt = -\frac{1}{4t^2} - \frac{1}{2} \ln |t| + C = \\ &= -\frac{1}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

*

A trigonometrikus függvények integrálásakor a $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ új integrációs változó bevezetése mindig célhoz vezet, de néha nagyon hosszadalmas. Ezért speciális esetekben más módszereket alkalmazunk.

a) Ha az $\int R(\sin x, \cos x) dx$ integrálban $\sin x$ és $\cos x$ páros hatványon szerepel, a $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítést alkalmazzuk.

A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságból:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Így, ha $t = \operatorname{tg} x$: $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$; $x = \operatorname{arctg} t$;

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}; \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt \quad \text{és} \quad t = \operatorname{arctg} x.$$

Példa

$$\int \frac{1}{2+3\cos^2 x} dx.$$

Az új változót behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2+3\cos^2 x} dx &= \int \frac{1}{2+\frac{3}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{2+2t^2+3} dt = \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}t\right)^2} dt = \frac{1}{5} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} t + C = \\ &= \frac{1}{5} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \operatorname{tg} x \right) + C. \end{aligned}$$

b) $\int \sin^n x \cos^m x dx$ alakú integrálok (n és m egész szám).

Ha n és m közül az egyik páratlan, $\sin x = t$ vagy $\cos x = t$ helyettesítést alkalmazunk, mégpedig, ha n páros: $\sin x = t$; ha m páros: $\cos x = t$ helyettesítést.

Ha n és m páratlan, akkor akár a $\sin x = t$, akár a $\cos x = t$ helyettesítés alkalmazható.

Ha n és m páros, akkor a $\operatorname{tg} x = t$ helyettesítést alkalmazzuk.

Példák

1. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx.$

Legyen $\cos x = t.$

Ekkor $dt = -\sin x dx.$

$$\begin{aligned} \text{Így} \quad \int \sin^3 x \cos^4 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx = - \int \sin^2 x \cos^4 x (-\sin x) dx = \\ &= - \int (1-t^2)t^4 dt = - \int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \\ &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

2. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos x} dx.$

Az integranduszt átalakítva:

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^5 x \cos x}{\cos^2 x} dx.$$

Legyen $\sin x = t.$ $\frac{dt}{dx} = \cos x,$ $dt = \cos x dx.$

$$\begin{aligned} \text{Így} \quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos x} dx &= \int \frac{\sin^5 x \cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^5 x}{1-\sin^2 x} \cos x dx = \\ &= \int \frac{t^5}{1-t^2} dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{t^5}{1-t^2} &= (-t^2+1) = -t^3-t \\ \frac{\pm t^5 \mp t^3}{\pm t^3 \mp t} &= \frac{t^3}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin^5 x}{\cos x} dx &= \int \frac{t^5}{1-t^2} dt = \int \left(-t^3 - t + \frac{t}{1-t^2} \right) dt = \\ &= -\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |1-t^2| + C = \\ &= -\frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln |1-\sin^2 x| + C = \\ &= -\frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

c) Az $\int \sin^m x dx$, $\int \cos^m x dx$ alakú integrálok ($m > 0$ egész szám).

Az integrálás mindig megoldható parciális integrálással.

$$\int \sin^m x dx = \int \underbrace{\sin^{m-1} x}_v \underbrace{\sin x dx}_{u'}.$$

$$u' = \sin x \quad v = \sin^{m-1} x$$

$$u = -\cos x \quad v' = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x.$$

Így

$$\begin{aligned} \int \sin^m x dx &= -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \cos^2 x dx = \\ &= -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) \int \sin^{m-2} x (1-\sin^2 x) dx = \\ &= -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) \int \sin^{m-2} x dx - (m-1) \int \sin^m x dx. \end{aligned}$$

Rendezve:

$$m \int \sin^m x \, dx = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \, dx.$$

Innen

$$\int \sin^m x \, dx = -\frac{1}{m} \cos x \sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \, dx.$$

Tehát két fokkal alacsonyabb integrált kaptunk. Az eljárást ismételve, páratlan m esetén $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$, páros m esetén $\int 1 \, dx = x + C$ integrálhoz jutunk.

Az eljárást *rekurziós módszernek* nevezik. Teljesen hasonló úton

$$\int \cos^m x \, dx = \frac{1}{m} \sin x \cos^{m-1} x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x \, dx.$$

Ha m páratlan szám, azaz $m = 2n+1$, a rekurziós módszer helyett célszerűbb a helyettesítés.

$$\begin{aligned} \int \sin^{2n+1} x \, dx &= \int \sin^{2n} x \sin x \, dx = \int (\sin^2 x)^n \sin x \, dx = \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^n \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Legyen $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx$.

Így $\int \sin^{2n+1} x \, dx = -\int (1-t^2)^n \, dt$.

A Newton-féle binomiális tételt alkalmazva:

$$\int \sin^{2n+1} x \, dx = -\int \left[1 - \binom{n}{1} t^2 + \binom{n}{2} t^4 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} t^{2n} \right] dt.$$

A számolás a hatványok integrálásával könnyen megoldható.

Ha m kis szám, az általános módszer helyett trigonometrikus átalakításokat is használhatunk.

Példák

$$\begin{aligned} 1. \quad \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \\ &= \int (\sin x - \cos^2 x \sin x) \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \int \sin^4 x \, dx &= \int \sin^2 x (1 - \cos^2 x) \, dx = \int \sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \\ &= \int \left(\sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^2 2x \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} (-\sin x \cos x + x) - \frac{1}{16} (-\sin 2x \cos 2x + 2x) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad &\int \sin mx \cos nx \, dx, \\ &\int \sin mx \sin nx \, dx, \\ &\int \cos mx \cos nx \, dx \end{aligned}$$

alakú integrálok (m és n tetszős szerinti valós számok).

Az integrálás megoldható parciális integrálással. Egyszerűbb azonban trigonometriai átalakításokat alkalmazni.

A szögfüggvényösszegek szorzattá alakításának képletei (2.2.3):

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha + \beta}{2} &= mx \\ \frac{\alpha - \beta}{2} &= nx \end{aligned} \right\} \text{ jelöléssel: } \left. \begin{aligned} \alpha &= (m+n)x \\ \beta &= (m-n)x \end{aligned} \right\}.$$

Így

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x].$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x].$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x].$$

Ha $m \neq n$ és $m \neq -n$:

$$\begin{aligned} \int \sin mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x] \, dx = \\ &= -\frac{1}{2(m+n)} \cos (m+n)x - \frac{1}{2(m-n)} \cos (m-n)x + C. \end{aligned}$$

Ha $m = n$,

$$\int \sin mx \cos nx \, dx = \int \sin mx \cos mx \, dx = \frac{1}{2m} \sin^2 mx + C.$$

Ha $m = -n$,

$$\begin{aligned} \int \sin mx \cos nx \, dx &= \int \sin mx \cos (-mx) \, dx = \int \sin mx \cos mx \, dx = \\ &= \frac{1}{2m} \sin^2 mx + C. \end{aligned}$$

Hasonlóképpen írható fel a többi megfelelő típusú integrál is.

Példa

$$\begin{aligned}\int \sin 5x \cos \frac{1}{2} x dx &= \frac{1}{2} \int \left(\sin \frac{11}{2} x + \sin \frac{9}{2} x \right) dx = \\ &= -\frac{1}{11} \cos \frac{11}{2} x - \frac{1}{9} \cos \frac{9}{2} x + C.\end{aligned}$$

8.3 A HATÁROZOTT INTEGRÁL ALKALMAZÁSAI

8.3.1 Határozott integrálok kiszámítása határozatlan integrálok segítségével

A Newton—Leibniz-formula szerint (8.1.5):

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a),$$

ahol $G(x)$ primitív függvénye vagy határozatlan integrálja $f(x)$ -nek.

a) A primitív függvények, alapintegrálok

$$I. \quad \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2.$$

$$\int_{-\pi}^0 \sin x dx = [-\cos x]_{-\pi}^0 = -1 - 1 = -2.$$

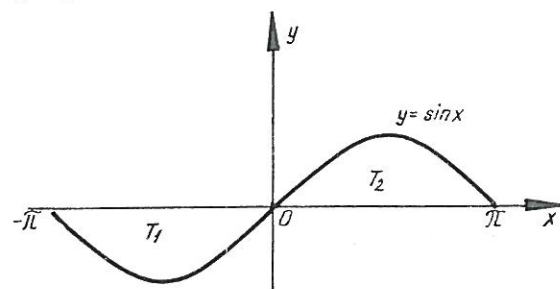
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0.$$

A határozott integrál és a görbe alatti terület összefüggése alapján

$$T_1 = \left| \int_{-\pi}^0 \sin x dx \right| = 2, \quad T_2 = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2.$$

$$T_1 + T_2 = 4.$$

(8.21 ábra).

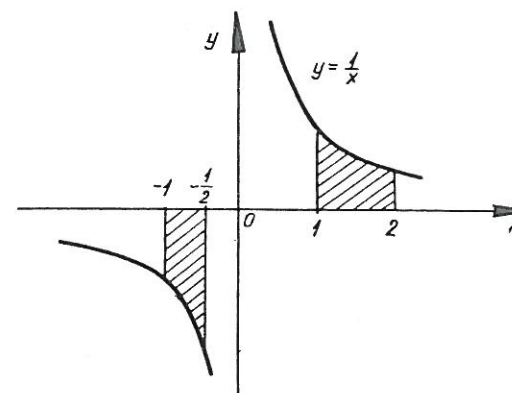


8.21 ábra

$$2. \quad \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0,6931.$$

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \ln \frac{1}{2} - \ln 1 = -\ln 2.$$

(8.22 ábra).



8.22 ábra

A megfelelő területek:

$$T_1 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 = 0,6931,$$

$$T_2 = \left| \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx \right| = \ln 2 = 0,6931.$$

$$T_1 = T_2$$

$$3. \quad \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 = 2,7182 - 1 = 1,7182.$$

b) Határozott integrál kiszámítása, ha az integrálást parciális integrálással végezzük el

$$\int_a^b u'v dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv' dx$$

Példák

$$1. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \begin{matrix} u' = \sin x & v = x \\ u = -\cos x & v' = 1 \end{matrix}$$

$$= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1.$$

$$2. \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot \arcsin x \, dx = [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

$$= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} + [\sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{1}{2}} = \begin{matrix} u' = 1 & v = \arcsin x \\ u = x & v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \approx 0,13.$$

c) Határozott integrál kiszámítása, ha az integrálást helyettesítéssel oldjuk meg
A helyettesítéskor az integrál alsó és felső határát az új változók segítségével is meg kell határozni.

Példák

$$1. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx. \quad \text{Legyen} \quad u = 2x,$$

$$x = \frac{1}{2}u,$$

$$dx = \frac{1}{2}du.$$

$$\text{Ha} \quad x = 0, \quad u = 0,$$

$$\text{ha} \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad u = \pi.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin u \, du = \frac{1}{2} [-\cos u]_0^{\pi} = \frac{1}{2} (1+1) = 1.$$

$$2. \quad \int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} \, dx. \quad \text{Legyen} \quad u = \arctg x.$$

$$\text{Ekkor} \quad du = \frac{1}{1+x^2} \, dx.$$

$$\text{Ha} \quad x = 0, \quad u = 0,$$

$$\text{ha} \quad x = 1, \quad u = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u \, du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}.$$

$$3. \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx.$$

$$\text{Legyen} \quad u = 1 + \sqrt{x}, \quad \text{ekkor} \quad \sqrt{x} = u-1, \quad x = (u-1)^2, \quad dx = 2(u-1) \, du.$$

$$\text{Ha} \quad x = 0, \quad u = 1,$$

$$\text{ha} \quad x = 1, \quad u = 2.$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx = 2 \int_1^2 \frac{(u-1)^2}{u} \, du = 2 \int_1^2 \left(u - 2 + \frac{1}{u} \right) \, du =$$

$$= [u^2 - 4u + 2 \ln |u|]_1^2 = 4 - 8 + 2 \ln 2 - 1 + 4 - 0 = 2 \ln 2 - 1 \approx 0,3862.$$

d) Páros és páratlan függvények határozott integrálja a $[-a; a]$ intervallumban

Állítás. Ha $y = f(x)$ páros függvény, azaz

$$f(-x) = f(x), \quad \text{akkor}$$

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$$

(8.23 ábra).

Bizonyítás. Alkalmazzuk az $x = -t$ helyettesítést.

$$f(x) = f(-t) = f(t),$$

mert a függvény páros.

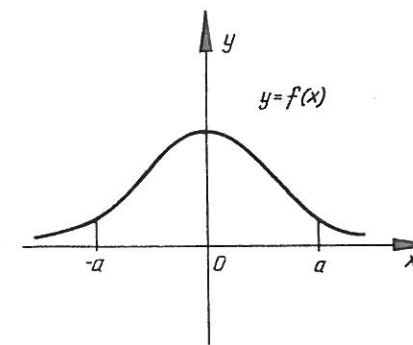
$$dx = -dt.$$

$$\text{Ha} \quad x = -a, \quad t = a; \quad \text{ha} \quad x = 0, \quad t = 0.$$

$$\int_{-a}^0 f(x) \, dx = \int_a^0 f(-t) (-dt) = - \int_a^0 f(t) \, dt = \int_0^a f(t) \, dt.$$

Ezért, ha $f(x)$ páros függvény:

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_{-a}^0 f(x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$



8.23 ábra

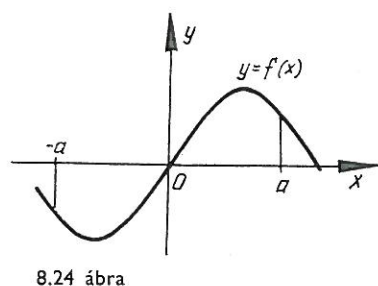
Tehát páros függvény esetén

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Állítás. Ha $y = f(x)$ páratlan függvény, azaz

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{akkor}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx \quad (8.24 \text{ ábra}).$$



8.24 ábra

Bizonyítás. Alkalmazzuk az $x = -t$ helyettesítést.

$$f(x) = f(-t) = -f(t), \quad \text{mert a függvény páratlan.}$$

$$dx = -dt.$$

Ha $x = -a, \quad t = a; \quad \text{ha } x = 0, \quad t = 0.$

Így

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = - \int_0^a -f(t)(-dt) = - \int_0^a f(t) dt.$$

Ezért, ha $f(x)$ páratlan függvény:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

Tehát páratlan függvény esetén

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Példa

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x dx = 0 \quad (\text{mert az integrandusz páratlan függvény}).$$

e) Fontos határozott integrálok (m és n egész számok)

1. $\int_0^{\pi} \sin mx dx.$

Ha $m = 0,$

$$\int_0^{\pi} \sin mx dx = 0.$$

Ha $m \neq 0,$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin mx dx &= \left[-\frac{\cos mx}{m} \right]_0^{\pi} = \left[\frac{\cos mx}{m} \right]_{\pi}^0 = \frac{1 - (-1)^m}{m} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } m \text{ páros} \\ \frac{2}{m}, & \text{ha } m \text{ páratlan.} \end{cases} \end{aligned}$$

2. $\int_0^{\pi} \cos mx dx.$

Ha $m = 0,$

$$\int_0^{\pi} \cos mx dx = \int_0^{\pi} dx = \pi.$$

Ha $m \neq 0,$

$$\int_0^{\pi} \cos mx dx = \left[\frac{\sin mx}{m} \right]_0^{\pi} = 0.$$

3. $\int_0^{2\pi} \sin mx dx.$

Ha $m = 0,$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx dx = 0.$$

Ha $m \neq 0,$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx dx = \left[-\frac{\cos mx}{m} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

4. $\int_0^{2\pi} \cos mx dx.$

Ha $m = 0,$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

Ha $m \neq 0,$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx dx = \left[\frac{\sin mx}{m} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

$$5 \quad \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx.$$

Ha $m = n \neq 0$,

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_0^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \frac{1}{2m} \left[-\sin mx \cos mx + mx \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Ha $m = 0$ és $n \neq 0$, vagy $m \neq 0$ és $n = 0$, vagy $m = n = 0$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_0^{\pi} 0 \, dx = 0.$$

Ha $m \neq n$ és $m \neq 0$, $n \neq 0$ (feltehetjük, hogy m és n pozitív),

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \int_0^{\pi} \left[-\frac{1}{2} \cos(m+n)x + \frac{1}{2} \cos(m-n)x \right] dx = \\ &= \left[-\frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x + \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x \right]_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Tehát

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq n, \\ 0, & \text{ha } m = 0, \text{ vagy } n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } m = n \neq 0. \end{cases}$$

Ugyanígy kimutatható

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq n, \\ 0, & \text{ha } m = 0, \text{ vagy } n = 0, \\ \pi, & \text{ha } m = n \neq 0. \end{cases}$$

Hasonlóan vizsgálhatók az

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx; \quad \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx; \\ \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx \text{ integrálok.} \end{aligned}$$

Ezek az integrálok nagy szerepet játszanak a Fourier-soroknál (9.3).

$$f) I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx \quad (m \text{ pozitív egész szám})$$

Parciális integrálással:

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{m-1} x \, dx = \begin{matrix} u' = \sin x & v = \sin^{m-1} x \\ u = -\cos x & v' = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x \end{matrix}$$

$$= \left[-\cos x \sin^{m-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx =$$

$$= 0 + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx =$$

$$= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \, dx - (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx.$$

$$\text{Rendezve: } I_m = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \, dx.$$

Ez a rekurziós formula láthatóan jóval egyszerűbb, mint az $\int \sin^m x \, dx$ határozatlan integrálnál nyert rekurziós formula (8.2.9. c).

Ha m páros, $m = 2n$,

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ha m páratlan, $m = 2n+1$.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$$\text{Így} \quad I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n(2n-2)\dots 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 5\cdot 3\cdot 1}.$$

Az $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \, dx$ integrál ugyanezeket az eredményeket adja.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx.$$

Ugyanis $x = \frac{\pi}{2} - u$ helyettesítéssel:

$$dx = -du. \quad \text{Ha } x = 0, \quad u = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{ha } x = \frac{\pi}{2}, \quad u = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \, dx &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \right]^m du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \right]^m du = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u \, du. \end{aligned}$$

A Wallis-formula

Az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx$ -re

kapott értékek lehetővé teszik π előállítását, az ún. Wallis-formulát. (WALLIS angol matematikus 1616–1703.)

A kapott eredményekből

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right]^2 (2n+1) \frac{\pi}{2}.$$

Innen

$$\pi = \frac{2}{2n+1} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \right]^2 \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}.$$

Nézzük $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ határértékét, ha $n \rightarrow \infty$!

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (1 - \sin x) \, dx > 0,$$

mert ez integrandusz $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ -ben pozitív.

Így

$$I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}.$$

Ezért igaz a következő egyenlőtlenség is:

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} > \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} > 1.$$

Az I_n integrál parciális integrálásakor kapott rekurziós formula alapján

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}.$$

Ebből

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}.$$

Tehát $\frac{2n+1}{2n} > \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} > 1$.

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

Így

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \dots \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}, \quad \text{vagy}$$

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \dots \right).$$

Ez a Wallis-féle formula.

8.3.2 Területszámítás

A határozott integrál geometriai értelmezése szerint az $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ és $x = b$ görbe, illetve egyenesek által határolt terület, ha $f(x) \geq 0$,

$$A = \int_a^b f(x) dx,$$

ahol a területet A -val jelöljük (8.25 ábra). (A az area = terület szó rövidítése.)

Az $y = f(x)$ és $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ által bezárt terület, ha $f(x) > g(x) > 0$ (8.26 ábra):

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx,$$

azaz

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

A formula akkor is érvényes, ha $a \leq x \leq b$ -ben $y = g(x) < 0$ (8.27 ábra).

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad A_2 = -\int_a^b g(x) dx.$$

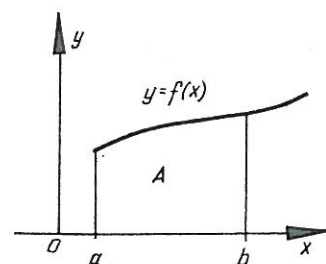
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Az előző két eset kombinációjaként — az integrációs intervallum részekre bontásával — igazolható, hogy a 8.28 ábra szerinti görbék közötti területnél is

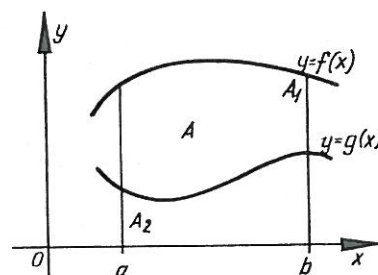
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Példák

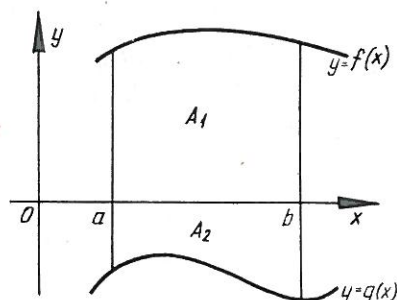
1. Határozzuk meg az $y^2 = 2px$ egyenletű parabola és az $x = a$ egyenletű egyenes által bezárt területet (8.29 ábra)!



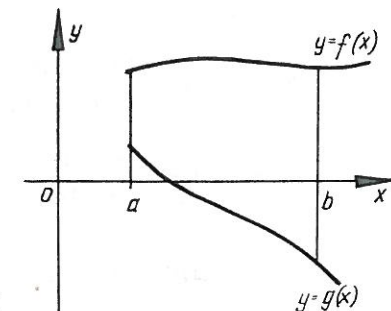
8.25 ábra



8.26 ábra



8.27 ábra



8.28 ábra

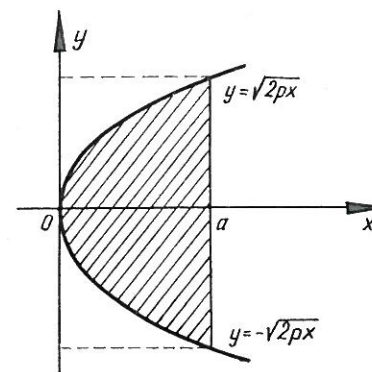
A szimmetria miatt elég a felső félterületet számítani.

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \int_0^a \sqrt{2px} dx = \sqrt{2p} \int_0^a \sqrt{x} dx = \sqrt{2p} \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^a = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot a^{3/2} = \frac{2}{3} \cdot a\sqrt{2pa}. \end{aligned}$$

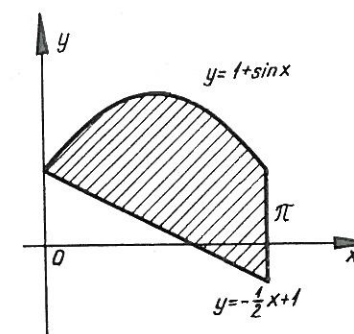
A parabolaszélet területe:

$$A = \frac{4}{3} \cdot a\sqrt{2pa}.$$

A határoló téglalap területe $A_T = a \cdot 2\sqrt{2pa}$, tehát a parabolaszélet által bezárt terület a téglalap területének $\frac{2}{3}$ része (8.29 ábra).



8.29 ábra



8.30 ábra

2. Határozzuk meg az

$$y = 1 + \sin x, \quad y = -\frac{1}{2}x + 1 \quad \text{és} \quad x = \pi$$

egyenletű görbék által bezárt terület nagyságát (8.30 ábra)!

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \left[(1 + \sin x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right) \right] dx = \int_0^\pi \left(\sin x + \frac{x}{2} \right) dx = \\ &= \left[-\cos x + \frac{x^2}{4} \right]_0^\pi = 2 + \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Területszámítás, ha a görbe paraméteres alakban adott. Legyen a görbe paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Mivel $\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$, $dx = \dot{x}(t) dt$.

A $t_1 \leq t \leq t_2$ intervallumban az $A = \int_a^b y \, dx$ képletbe helyettesítve a görbe alatti terület:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \dot{x}(t) \, dt \quad (8.31 \text{ ábra}).$$

(Feltételezve, hogy az $\dot{x}(t)$ derivált az intervallumban folytonos és pozitív.)

A képlet az $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ egyenletekkel megadott

zárt görbe által meghatározott terület kiszámítására is alkalmas.

Bizonyítás nélkül közöljük: ha a t paraméter forgáshöge és körüljárási iránya negatív (az óramutató járásával megegyező), A -ra pozitív értéket kapunk, ha a t paraméter körüljárási iránya pozitív (az óramutató járásával ellenkező), A -ra negatív értéket kapunk (8.32 és 8.33 ábra).

Példák

1. Az ellipszis területe

Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis egyenletének paraméteres alakja (lásd a 7.3.1 pontot):

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases},$$

ahol t a főkör P' pontjához húzott radiusvektor szöge. Ez a szög az ellipszis csúcspontjainál egybeesik az ellipszis pontjaihoz húzott radiusvektorok szögeivel (8.34 ábra).

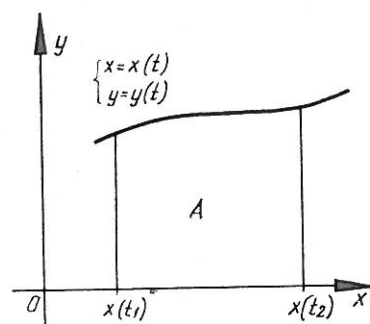
Pozitív körforgásnál

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

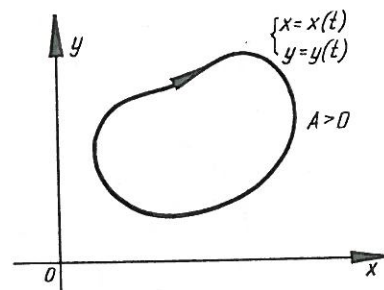
Mivel $\dot{x}(t) = -a \sin t$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} y(t) \dot{x}(t) \, dt &= \int_0^{2\pi} b \sin t (-a \sin t) \, dt = -ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \\ &= -ab \left[\frac{-\sin t \cos t + t}{2} \right]_0^{2\pi} = -ab\pi. \end{aligned}$$

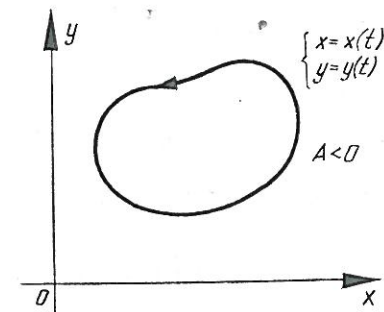
Az ellipszis területe: $A = ab\pi$.



8.31 ábra



8.32 ábra



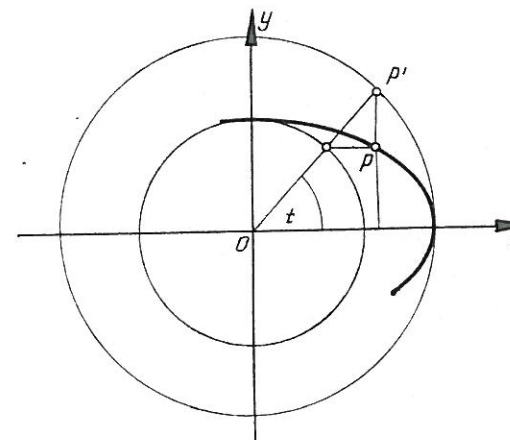
8.33 ábra

2. A ciklois egy menete alatti terület

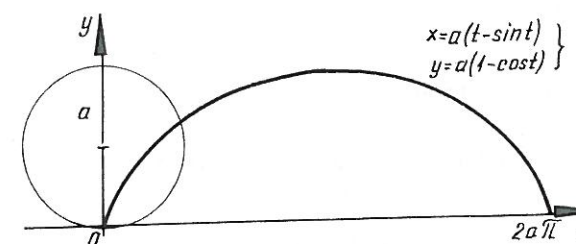
Az a sugarú kör gördülésekor a kör kerületén levő pont által leírt ciklois egyenlete (lásd a 7.3.1 pontot):

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (8.35 \text{ ábra}).$$

$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t).$$



8.34 ábra



8.35 ábra

Egy menet leírásakor $0 \leq t \leq 2\pi$.

Az egy menet alatti terület:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) \, dt = \\ &= a^2 \left[t - 2\sin t + \frac{\sin t \cos t + t}{2} \right]_0^{2\pi} = 3a^2\pi. \\ A &= 3a^2\pi. \end{aligned}$$

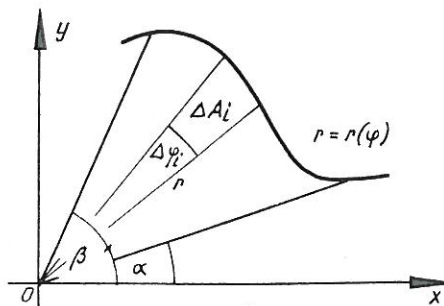
Szektorterület kiszámítása. Tekintsük az $r = r(\varphi)$ polárkoordinátákkal megadott görbét. Legyen r a φ változó folytonos függvénye. Határozzuk meg azt a területet, amelyet a $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$ egyenletű félegyenese és az $r = r(\varphi)$ görbe határolnak, az ún. szektorterületet (8.36 ábra)!

Osszuk fel a $(\beta - \alpha)$ szöget n tetszés szerinti részre. Vizsgáljuk az $r = r(\varphi)$ görbe és a $\varphi = \varphi_{i-1}$ és $\varphi = \varphi_i$ félegyenesek által határolt területet, ΔA_i -t (8.36. ábra).

Legyen a $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ intervallumban az $r = r(\varphi)$ legkisebb értéke m_i , legnagyobb értéke M_i .

Felhasználva, hogy a ρ sugarú, ω középponti szögű körcikk területe $\frac{1}{2} \rho^2 \omega$:

$$\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i \leq \Delta A_i \leq \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$



8.36 ábra

Az egyenlőtlenség az $i = 1, 2, \dots, n$ értékekre igaz.

Összegezve:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i \leq \sum_{i=1}^n \Delta A_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Az egyenlőtlenség jobb és bal oldalán az

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [r(\varphi)]^2 d\varphi$$

integrál alsó és felső közelítő összege áll.

Ha a felosztás minden határon túl finomul,

$$\begin{aligned} \lim_{\max \Delta\varphi_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i &= \lim_{\max \Delta\varphi_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [r(\varphi)]^2 d\varphi. \end{aligned}$$

Mivel

$$\sum_{i=1}^n \Delta A_i = A,$$

a szektorterület:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r(\varphi)]^2 d\varphi.$$

Ezt így is írjuk:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Röviden:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$

Legyen a görbe

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{paraméteres alakban adott.}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y(t)}{x(t)} \quad (8.37 \text{ ábra}).$$

Mindkét oldalt t szerint deriválva

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

Mivel $x = r \cos \varphi$, $x^2 = r^2 \cos^2 \varphi$,

$$\text{így} \quad \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2 \cos^2 \varphi}.$$

Ebből az egyenletből:

$$r^2 d\varphi = (x\dot{y} - \dot{x}y) dt.$$

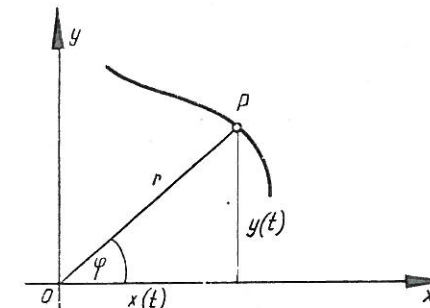
A szektorterület pedig:

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y) dt.$$

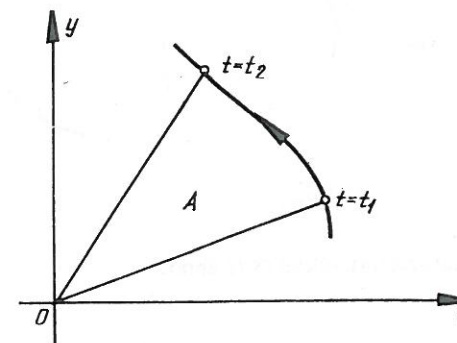
Ez a Leibniz-féle szektorformula.

Ha $t_1 \leq t \leq t_2$ irányban haladva a szektorterület a görbétől balra esik, A -ra pozitív értéket kapunk, ha jobbra esik, negatívot (8.38 ábra).

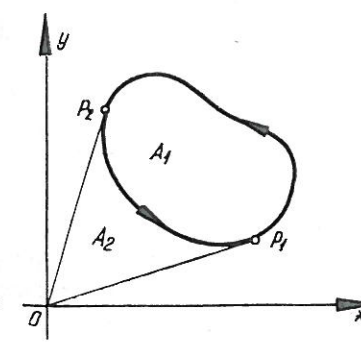
Így a 8.39 ábrán P_1 -től P_2 -ig haladva az integrál pozitív, P_2 -től P_1 -ig haladva pedig negatív. A zárt görbe által bezárt terület a két integrál összege.



8.37 ábra



8.38 ábra



8.39 ábra

Példák

1. Határozzuk meg az

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

egyenletű lemniskáta (7.4.1) által bezárt területet (8.40 ábra).

A függvény $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ és $\frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}$ ben van értelmezve.
A szimmetria miatt

$$\frac{A}{4} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} [\sin 2\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

A zárt görbe által körülzárt idom területe

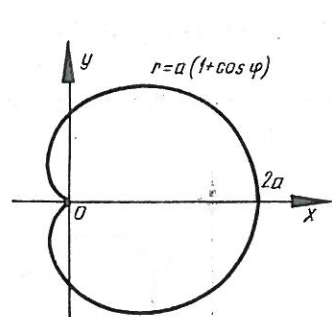
$$A = a^2.$$

2. Határozzuk meg az

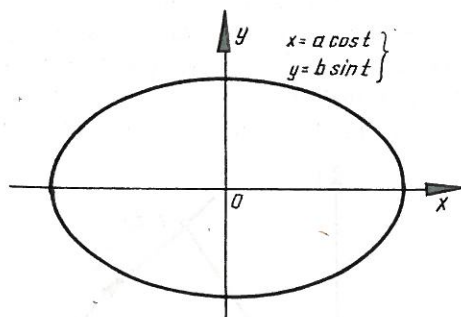
$$r = a(1 + \cos \varphi) \text{ egyenletű kardioid (7.4.1 pont)}$$

által bezárt területet (8.41 ábra)!

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\varphi + 2\sin \varphi + \frac{\sin \varphi \cos \varphi + \varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2} a^2 \pi. \end{aligned}$$



8.41 ábra

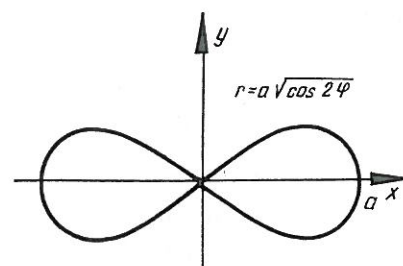


8.42 ábra

3. Határozzuk meg az ellipszis területét mint szektorterületet (8.42 ábra)!

Az ellipszis paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$



8.40 ábra

Innen

$$\begin{cases} \dot{x} = -a \sin t \\ \dot{y} = b \cos t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x\dot{y} - \dot{x}y) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2} ab [t]_0^{2\pi} = ab\pi. \end{aligned}$$

4. Határozzuk meg az

$x^2 - y^2 = 1$ egyenlő szárú hiperbola jobb oldali ága és a $-\varphi$ és $+\varphi$ szögű rádiuszvektorok által bezárt szektorterületet (8.43 ábra)!

A hiperbola paraméteres alakja (7.1.3.1 pont):

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases}$$

Innen

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh} t \\ \dot{y} = \operatorname{ch} t \end{cases}$$

Ha a φ szöghöz tartozó paraméter t , a szimmetria miatt elég a féltérületet számítani:

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^t (x\dot{y} - \dot{x}y) dt = \frac{1}{2} \int_0^t (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^t dt = \frac{1}{2} t.$$

A terület $A = t$.

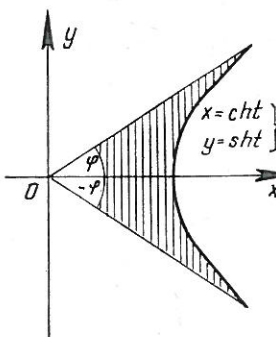
Mivel az egyenletből

$$t = \operatorname{arch} x, \quad \text{illetve} \quad t = \operatorname{arsh} y,$$

a szektorterület:

$$A = \operatorname{arch} x = \operatorname{arsh} y.$$

Innen ered a hiperbolikus függvények inverzeinek, az areafüggvényeknek elnevezése (areafüggvények = területmérő függvények).



8.43 ábra

8.3.3 Síkgörbék ívhossza

Légyen adott az $y = f(x)$ egyenletű síkgörbének az $[a; b]$ intervallumhoz tartozó szakasza. Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot az $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n = b$ pontokkal n tetszőleges részre.

Légyenek a görbe megfelelő pontjai $A = P_0, P_1, \dots, P_i, \dots, P_n = B$ pontok.

Tehát $P_i = (x_i; y_i)$.

Kössük össze az egymás után következő pontokat húrokkal (8.44 ábra)! Így a görbébe írható húrpoligont kapunk, amelynek hossza:

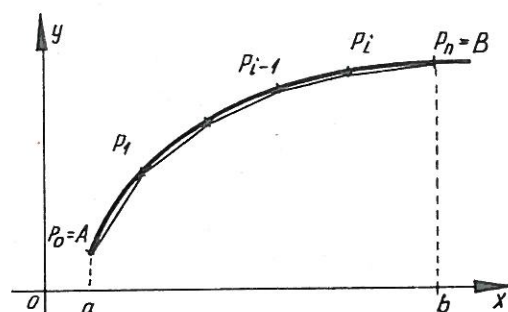
$$\sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i}.$$

Definíció. Az $y = f(x)$ egyenletű görbe a $[a; b]$ intervallumban *rektifikálható*, ha a beírható húrpoligonok halmaza felülről korlátos.

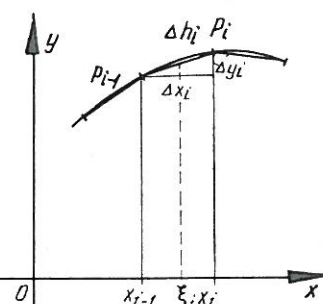
Definíció. Rektifikálható görbedarab ívhossza a beírható húrpoligonok halmazának felső határa.

Megjegyzés. Nem minden folytonos függvénnyel megadható görbedarab rektifikálható.

Tétel. Ha az $y = f(x)$ függvény $[a; b]$ intervallumban differenciálható, és $f'(x)$ folytonos az $[a; b]$ intervallumban, akkor az adott szakaszban a függvény görbéje rektifikálható.



8.44 ábra



8.45 ábra

Bizonyítás. Jelöljük a $\overline{P_{i-1}P_i}$ húr hosszát Δh_i -vel!

$$\Delta h_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \quad (8.45 \text{ ábra}).$$

Innen

$$\Delta h_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i.$$

A beírt húrpoligon hossza:

$$\sum_{i=1}^n \Delta h_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

A Lagrange-féle középértéktétel szerint (7.1.6. II. pont): van olyan $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ érték, amelyre

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i).$$

Így
$$\sum_{i=1}^n \Delta h_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x_i.$$

A feltétel szerint $f'(x)$ folytonos, tehát korlátos. Ezért van olyan K szám, amelyre

$$|f'(x)| \leq K \quad (a \leq x \leq b).$$

Így

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta h_i &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + K^2} \Delta x_i = \\ &= \sqrt{1 + K^2} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \sqrt{1 + K^2} (b - a). \end{aligned}$$

Tehát, ha $f'(x)$ az $[a; b]$ intervallumban folytonos, a beírható húrpoligonok halmaza felülről korlátos, a görbe ívszakasza rektifikálható.

Az ívhossz meghatározása

Legyen a görbe paraméteres egyenletrendszere adott

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

Tegyük fel, hogy az $x(t)$ és $y(t)$ függvények a $\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumban folytonosak, differenciálhatók és, hogy $\dot{x}(t)$ és $\dot{y}(t)$ is folytonosak az intervallumban.

Osszuk fel az $\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumot a $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ osztópontokkal n részre.

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = \beta.$$

A görbe P_i pontja:

$$P_i[x(t_i); y(t_i)].$$

A beírható húrpoligon:

$$\sum_{i=1}^n \Delta h_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}.$$

A Lagrange-féle középértéktétel értelmében:

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = \dot{x}(\tau_i) \Delta t_i \quad (\text{ahol } t_{i-1} < \tau_i < t_i)$$

$$\text{és} \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = \dot{y}(\tau_i^*) \Delta t_i \quad (\text{ahol } t_{i-1} < \tau_i^* < t_i)$$

$$(\Delta t_i = t_i - t_{i-1}; \quad \tau_i \text{ és } \tau_i^* \text{ nem szükségszerűen azonos}).$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta h_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i^*)} \Delta t_i.$$

A határozott integrál definíciója értelmében:

$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i^*)} \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i^*)} \Delta t_i = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i)} \Delta t_i.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. A feltevés szerint $\dot{x}(t)$ és $\dot{y}(t)$ az $\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumban folytonos, tehát egyenletesen folytonos.

Ezért $\frac{\varepsilon}{b-a}$ -hoz található olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$|\dot{x}(t_i) - \dot{x}(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

és

$$|\dot{y}(t_i) - \dot{y}(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

ha $(t_i - t_{i-1}) < \delta$

Ha a felosztás δ -nál finomabb, a $(t_i - t_{i-1}) < \delta$ feltétel teljesül. Az abszolút értékre vonatkozó egyenlőtlenség alapján:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i^*)} \Delta t_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i)} \Delta t_i \right| &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i^*)} - \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i)} \right| \cdot \Delta t_i. \end{aligned}$$

A 8.46 ábrából leolvasható:

$$\left| \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i^*)} - \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i)} \right| \leq |\dot{y}(\tau_i^*) - \dot{y}(\tau_i)|.$$

δ -t úgy választjuk meg, hogy

$$|\tau_i - \tau_i^*| < \delta \quad \text{esetén}$$

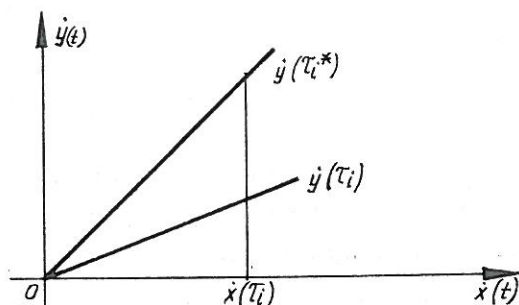
$$|\dot{y}(\tau_i^*) - \dot{y}(\tau_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Így

$$\left| \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i^*)} \Delta t_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i)} \Delta t_i \right| < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta t_i = \varepsilon.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i^*)} \Delta t_i &= \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i)} \Delta t_i = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt. \end{aligned}$$



8.46 ábra

A felosztás finomításával a beírt húrpolygon hossza nő, és felső határa megegyezik az előbbi határértékkel.

Így a görbe vonal ívhossza az $\alpha \leq t \leq \beta$ intervallumban

$$s(\alpha; \beta) = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta h_i = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Tehát $s(\alpha; \beta) = s$ jelöléssel az ívhossz:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

Ezt röviden így is jelöljük:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Legyen a görbe egyenlete $y = f(x)$ alakban adott. Paraméternek x -et választva, a görbe paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}.$$

Ekkor $\dot{x} = 1$ és $\dot{y} = y' = f'(x)$.

Az ívhossz az $a \leq x \leq b$ intervallumban:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

vagy

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Sikgörbe ívhossza, ha a görbe polárkoordinátákkal adott
Adjuk meg a függvényt

$r = r(\varphi)$ polárkoordinátás alakban.

Ekkor $\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases}.$

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\varphi} = \dot{r}(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi,$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{d\varphi} = \dot{r}(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi.$$

Röviden

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi.$$

Az egyenletből könnyen adódik

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2, \text{ az ívhosszképletbe helyettesítve}$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi$$

Példák

1. Számítsuk ki az $y = x^{\frac{3}{2}}$ egyenletű görbe $[0; 4]$ intervallumhoz tartozó ívének hosszát!

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}, \quad y'^2 = \frac{9}{4} x.$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^4 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x} \frac{9}{4} dx = \\ &= \frac{4}{9} \left[\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \\ &= \frac{8}{27} (10\sqrt{10}-1) \approx \frac{8}{27} (31,6-1) \approx 9,1. \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg az $y = \operatorname{ch} x$ egyenletű láncgörbe $0 \leq x \leq a$ intervallumhoz tartozó ívének hosszát (7.13 ábra):

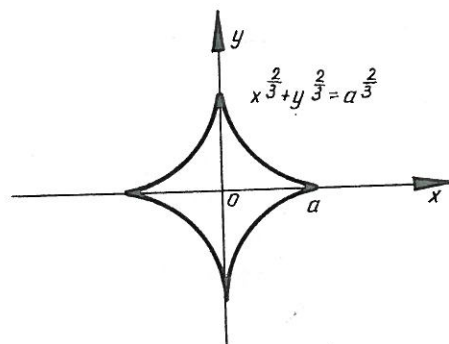
$$\begin{aligned} s &= \int_0^a \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^a \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^a \operatorname{ch} x dx = [\operatorname{sh} x]_0^a = \\ &= \operatorname{sh} a - \operatorname{sh} 0 = \operatorname{sh} a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}. \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki az

 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ egyenletű asztroid ív-hosszát (8.47 ábra)!

Az ívhossz negyedrésze:

$$\frac{s}{4} = \int_0^a \sqrt{1+y'^2} dx.$$



8.47 ábra

Az implicit függvényt deriválva:

$$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} y' = 0, \quad \text{innen}$$

$$y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

$$1+y'^2 = 1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}},$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

$$\frac{s}{4} = \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} \left[x^{\frac{2}{3}} \right]_0^a = \frac{3}{2} a.$$

Az egész ívhossz

$$s = 6a.$$

Végezzük el a számítást, ha az asztroid egyenlete az

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

paraméteres alakban adott!

$$\dot{x} = -3a \cos^2 t \sin t,$$

$$\dot{y} = 3a \sin^2 t \cos t.$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 9a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t.$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 3a \sin t \cos t.$$

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 3a \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} a.$$

Az asztroid kerülete

$$s = 6a.$$

4. Határozzuk meg az

$$\begin{cases} x = a(1 - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

ciklois egy menetének ívhosszát (lásd a 8.35. ábrát a 455. oldalon)!

$$\dot{x} = a(1 - \cos t),$$

$$\dot{y} = a \sin t.$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = a^2 2(1 - \cos t).$$

Az ismert goniometria összefüggés szerint:

$$\sin \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}, \quad \text{azaz} \quad 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Így $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \cdot 4 \sin^2 \frac{t}{2}.$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} dt =$$

$$= 4a \left[-\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 4a(1+1) = 8a.$$

5. Határozzuk meg az

$$r = r_0 e^{a\varphi}.$$

egyenletű logaritmus spirális ívhosszát a $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ intervallumban (8.48 ábra)!

$$\dot{r} = r_0 a e^{a\varphi}.$$

$$r^2 + \dot{r}^2 = r_0^2 e^{2a\varphi} + r_0^2 a^2 e^{2a\varphi} = r_0^2 (1 + a^2) e^{2a\varphi}.$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi = r_0 \sqrt{1 + a^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{a\varphi} d\varphi = \frac{r_0 \sqrt{1 + a^2}}{a} \left[e^{a\varphi} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} (r_0 e^{a\varphi_2} - r_0 e^{a\varphi_1}) = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} (r_2 - r_1).$$

A logaritmus spirális ívhossza tehát arányos a határoló rádiuszvektorok hosszának különbségével.

6. Határozzuk meg az

$$r = a(1 + \cos \varphi)$$

egyenletű kardioid kerületét (8.41 ábra)!

Az egyenletből

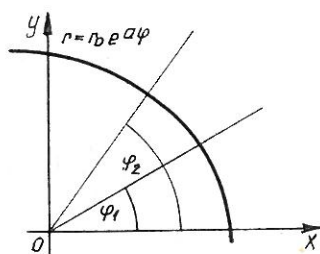
$$\dot{r} = -a \sin \varphi.$$

$$r^2 + \dot{r}^2 = a^2 (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a^2 \cdot 2(1 + \cos \varphi).$$

Mivel $\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}; \quad 1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$

$$r^2 + \dot{r}^2 = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi.$$



8.48 ábra

Mivel $\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \text{ha} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad \text{és}$

$$\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = -\cos \frac{\varphi}{2}, \quad \text{ha} \quad \pi \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$s = 2a \left[\int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} (-\cos \frac{\varphi}{2}) d\varphi \right] = 2a \left\{ \left[2 \sin \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\pi} - \left[2 \sin \frac{\varphi}{2} \right]_{\pi}^{2\pi} \right\} =$$

$$= 2a(2+2) = 8a.$$

A feladat a szimmetria miatt így is megoldható:

$$\frac{s}{2} = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \left[\sin \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\pi} = 4a.$$

$$s = 8a.$$

8.3.3.1 A görbület

Legyen az $y = f(x)$ egyenletű G görbe egy adott $[a; b]$ intervallumban rektifikálható. Legyen az $[x; x + \Delta x]$ intervallumhoz tartozó ívdarab ívhossza Δs . Jelöljük az x és az $x + \Delta x$ pontokhoz tartozó érintők irányszögét α_1 és α_2 -vel. Jelöljük a Δx szakaszhoz tartozó irányszögváltozást $\Delta \alpha$ -val.

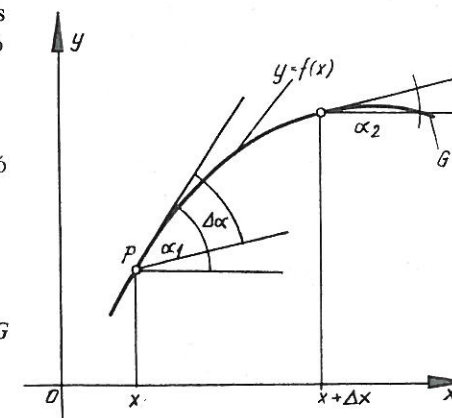
$$\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (8.49 \text{ ábra}).$$

Definíció. A Δs ívhosszú szakaszhoz tartozó átlagos görbület

$$g_{\text{átl}} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}.$$

Definíció. Az x abszcisszájú P pontban a G görbe görbülete:

$$g = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}.$$



8.49 ábra

Határozzuk meg a $\frac{d\alpha}{ds}$ deriváltat láncszabállyal:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}.$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{ds}{dx}}.$$

Mivel $y' = \operatorname{tg} \alpha$ $\left(\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\alpha = \operatorname{Arctg} y'.$$

Így: $\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{1}{1+y'^2} y''$.

Legyen a görbe AP szakaszának ívhossza

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1+y'^2} dx.$$

A felső határ szerinti derivált (8.1.5. a pont):

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}.$$

Tehát

$$g = \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{y''}{1+y'^2}}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$g = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

A görbület a $P_0(x_0; y_0)$ pontban:

$$g = \frac{y_0''}{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

A simuló kör előjeles sugara, azaz a görbületi sugár (7.2.7 pont):

$$r = \frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}.$$

Látjuk, hogy a görbület egyenlő a simuló kör előjeles sugarának reciprok értékével.

$$g = \frac{1}{r}.$$

Ez az összefüggés indokolja, hogy a simuló kört *görbületi körnek* is nevezik.

8.3.4 Térfogatszámítás

Vizsgáljunk egy olyan testet, amelyet két párhuzamos síklap határol. Helyezzük el a testet a koordináta-rendszerben úgy, hogy a párhuzamos lapok az x tengelyre merőlegesek legyenek. Legyen a határoló síklapok egyenlete $x = a$ és $x = b$.

Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) részintervallumokra. Ezek hossza $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n$ legyen (8.50 ábra).

Legyen ΔV_i az $x = x_{i-1}$ és $x = x_i$ síkok által kimetszett réteg térfogata.

Megjegyezzük, hogy ebben a fejezetben csak olyan speciális testek térfogatának meghatározására szorítkozunk, amelyeknél a testnek az $x = x_{i-1}$ és $x = x_i$ síkok közötti rétege két henger közé szorítható, és a testből az x tengelyre merőleges sík által kimetszett idom területe csak az x változótól függ. Jelöljük ezt a területet $T(x)$ -szel.

Ha a Δx_i intervallumban a keresztmetszetek közül a legkisebb t_i , a legnagyobb T_i , akkor

$$t_i \Delta x_i \leq \Delta V_i \leq T_i \Delta x_i.$$

Jelölje $T(\xi_i)$ a Δx_i intervallum tetszőleges pontjában a keresztmetszetet.

$$t_i \Delta x_i \leq T(\xi_i) \Delta x_i \leq T_i \Delta x_i.$$

Az $[a; b]$ intervallumban a megfelelő térfogatösszegek

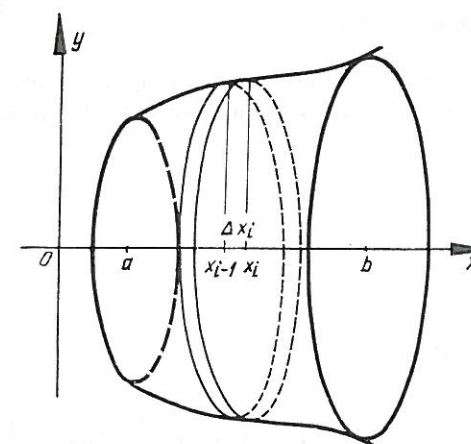
$$\sum_{i=1}^n t_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n T(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n T_i \Delta x_i.$$

Az egyenlőtlenség bal oldala az integrál alsó, jobb oldala az integrál felső közelítő összege.

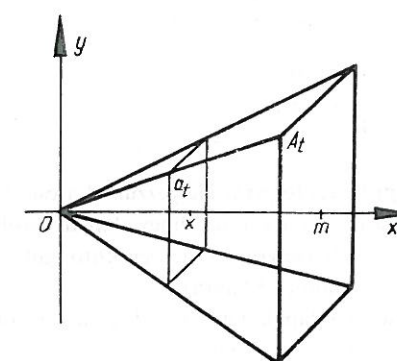
Így
$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n T(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b T(x) dx.$$

A test térfogata:
$$V = \int_a^b T(x) dx.$$

A gúla térfogata. Helyezzük el a gúlát a koordináta-rendszerben úgy, hogy csúcsa az origóba, magassága az x tengelyre kerüljön (8.51 ábra).



8.50 ábra



8.51 ábra

Legyen $T(x) = a_t$.

Ha a gúla alapterülete A_t , magassága m , a gúla alappal párhuzamos síkmetszeteinek területei úgy aránylanak, mint a csúcstól való távolságok négyzetei:

$$\frac{a_t}{A_t} = \frac{x^2}{m^2},$$

innen $a_t = \frac{A_t}{m^2} x^2$.

A térfogat:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^m a_t dx = \int_0^m \frac{A_t}{m^2} x^2 dx = \frac{A_t}{m^2} \int_0^m x^2 dx = \frac{A_t}{m^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^m = \\ &= \frac{A_t}{m^2} \frac{m^3}{3} = \frac{A_t m}{3}. \end{aligned}$$

Tehát a gúla térfogata

$$V = \frac{A_t \cdot m}{3}.$$

A csomakagúla térfogata. Helyezzük el a csomakagúlát a koordináta-rendszerben úgy, hogy alapjai merőlegesek legyenek az x tengelyre, és a kiegészítő gúla csúcsa az origóba kerüljön (8.52 ábra).

Legyenek az alaplapok területei A_t és a_t , az origótól való távolságuk m_2 , illetve m_1 .

$$V = \int_{m_1}^{m_2} T(x) dx.$$

8.52 ábra

Mivel a $T(x)$ területű lap párhuzamos az alappal:

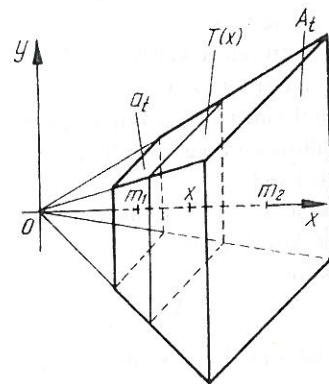
$$T(x) = \frac{A_t}{m_2^2} x^2,$$

$$V = \int_{m_1}^{m_2} \frac{A_t}{m_2^2} x^2 dx = \frac{A_t}{m_2^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{m_1}^{m_2} = \frac{A_t}{m_2^2} (m_2^3 - m_1^3).$$

Mivel $m_2^3 - m_1^3 = (m_2 - m_1)(m_2^2 + m_1 m_2 + m_1^2),$

ezért $V = \frac{A_t}{3m_2^2} (m_2 - m_1)(m_2^2 + m_1 m_2 + m_1^2).$

Mivel $\frac{A_t}{a_t} = \frac{m_2^2}{m_1^2}$ és $m_2 - m_1 = m,$



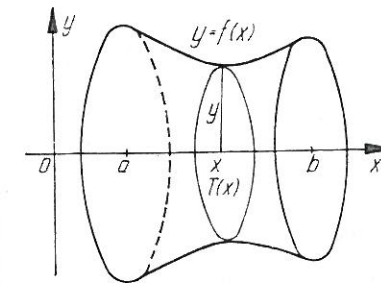
$$\begin{aligned} V &= \frac{m}{3} \left(A_t + A_t \frac{m_1}{m_2} + A_t \frac{m_1^2}{m_2^2} \right) = \frac{m}{3} \left(A_t + A_t \frac{\sqrt{a_t}}{\sqrt{A_t}} + A_t \frac{a_t}{A_t} \right) = \\ &= \frac{m}{3} (A_t + \sqrt{A_t a_t} + a_t). \end{aligned}$$

A csomakagúla térfogata tehát:

$$V = \frac{m}{3} (A_t + \sqrt{A_t a_t} + a_t).$$

8.3.4.1 Forgástestek térfogata

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban folytonos, és ott $f(x) \geq 0$. Forgassuk meg a függvényt ábrázoló görbe $[a; b]$ intervallumhoz tartozó szakaszát az x tengely körül (8.53 ábra)! Az x ponthoz tartozó $T(x)$ keresztmetszet kör, így $T(x) = y^2 \pi$.



8.53 ábra

A forgástest térfogata

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 dx.$$

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Legyen a függvény az $x = \varphi(y)$ egyenlettel adott, továbbá a $c \leq y \leq d$ intervallumban folytonos, és ott $x \geq 0$ (8.54 ábra). A függvényt ábrázoló görbe megfelelő szakaszát az y tengely körül forgatva, a forgástest térfogata:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

Ha a függvény paraméteres alakban adott,

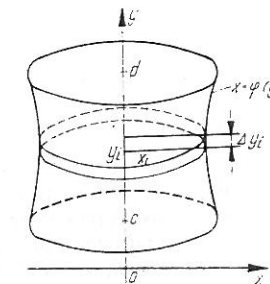
$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

illetve $dx = \dot{x} dt, \quad dy = \dot{y} dt.$

A forgástest térfogata:

$$V_x = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \dot{x}(t) dt.$$

$$V_y = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \dot{y}(t) dt.$$



8.54 ábra

Ha a függvény az

$r = r(\varphi)$ polárkoordinátás alakban adott:

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\varphi) \cos \varphi \\ y &= r(\varphi) \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

$$dx = (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi,$$

$$dy = (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi) d\varphi.$$

$$V_x = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin^2 \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi.$$

$$V_y = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cos^2 \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi) d\varphi.$$

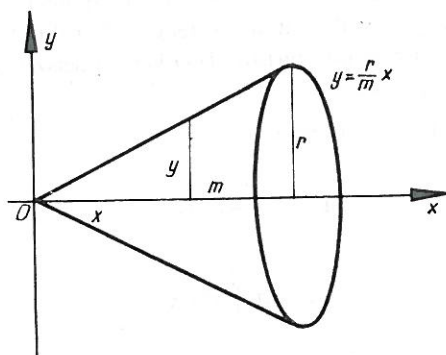
Példák

1. A kúp és a csonkakúp térfogata

a) A kúp térfogata

Számítsuk ki az r sugarú, m magasságú kúp térfogatát! A kúpot az $y = \frac{r}{m}x$ egyenes forgatásával nyerjük (8.55 ábra)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^m y^2 dx = \pi \int_0^m \frac{r^2}{m^2} x^2 dx = \\ &= \pi \frac{r^2}{m^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^m = \pi \frac{r^2}{m^2} \cdot \frac{m^3}{3} = \frac{r^2 \pi \cdot m}{3}. \end{aligned}$$



8.55 ábra

b) A csonkakúp térfogata

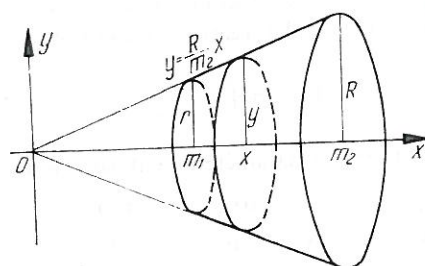
Forgassuk meg az $y = \frac{R}{m_2}x$ egyenletű egyenest az x tengely körül, és határozzuk meg az $x = m_1$ és $x = m_2$ síkok közötti rész térfogatát. Az így kapott test csonkakúp (8.56 ábra). Az $x = m_1$ -hez tartozó ordináta r , az $x = m_2$ -hez tartozó ordináta R , a csonkakúp alapkörének sugarai.

A csonkakúp magassága:

$$m = m_2 - m_1.$$

Mivel $y = \frac{R}{m_2}x$, a csonkakúp térfogata:

$$V = \pi \int_{m_1}^{m_2} y^2 dx = \pi \frac{R^2}{m_2^2} \int_{m_1}^{m_2} x^2 dx = \pi \frac{R^2}{m_2^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{m_1}^{m_2} = \pi \frac{R^2}{3m_2^2} (m_2^3 - m_1^3).$$



8.56 ábra

Ez tovább így alakítható:

$$\begin{aligned} V &= \pi \frac{R^2}{3m_2^2} (m_2 - m_1)(m_2^2 + m_1m_2 + m_1^2) = \\ &= \frac{\pi m}{3} \left(R^2 + \frac{m_1}{m_2} R^2 + \frac{m_1^2}{m_2^2} R^2 \right). \end{aligned}$$

Mivel $\frac{m_1}{m_2} = \frac{r}{R},$

A csonkakúp térfogata:

$$V = \frac{\pi m}{3} (R^2 + rR + r^2).$$

2. A gömb és részeinek térfogata

a) A gömb térfogata

Forgassuk meg az $x^2 + y^2 = r^2$ kör $y \geq 0$ felét az x tengely körül!

Először a félgömb köbtartalmát számítjuk ki (8.57 ábra).

8.57 ábra

Mivel a forgástest köbtartalma

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx, \quad \text{és a gömbnél} \quad y^2 = r^2 - x^2,$$

$$\frac{V}{2} = \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{2r^3\pi}{3}.$$

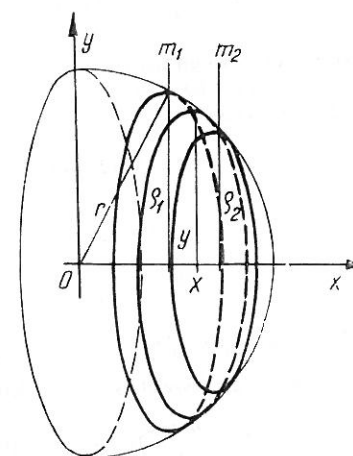
Így az egész gömb köbtartalma:

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

b) A gömbreteg térfogata

Ha egy gömböt elmetsszünk egy síkkal, az a gömböt két gömbszeletre bontja. Ha a gömböt két párhuzamos síkkal metsszük, a síkok a gömböt két gömbszeletre és egy gömbretegre bontják.

Forgassuk meg az $x^2 + y^2 = r^2$ kör $y \geq 0$ felét az x tengely körül, és határozzuk meg az $x = m_1$ és $x = m_2$ síkok közötti gömbreteg térfogatát (8.58 ábra)!



8.58 ábra

$$V = \pi \int_{m_1}^{m_2} y^2 dx.$$

$$y^2 = r^2 - x^2, \quad \text{ezért}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{m_1}^{m_2} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{m_1}^{m_2} = \pi \left[r^2(m_2 - m_1) - \frac{1}{3} (m_2^3 - m_1^3) \right] = \\ &= \frac{\pi}{3} [3r^2(m_2 - m_1) - (m_2^3 - m_1^3)]. \end{aligned}$$

$$m_2 - m_1 = m \quad \text{a gömbreteg magassága.}$$

Így

$$V = \frac{\pi}{3} m(3r^2 - m_2^2 - m_1 m_2 - m_1^2).$$

További átalakítással:

$$V = \frac{\pi m}{6} (6r^2 - 2m_2^2 - 2m_1^2 - 2m_1 m_2) = \frac{\pi m}{6} (3r^2 - 3m_1^2 + 3r^2 - 3m_2^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 + m_1^2).$$

Innen:

$$V = \frac{\pi m}{6} [3(r^2 - m_1^2) + 3(r^2 - m_2^2) + (m_2 - m_1)^2].$$

Mivel a 8.58. ábrából leolvashatóan

$$r^2 - m_1^2 = \varrho_1^2,$$

$$r^2 - m_2^2 = \varrho_2^2,$$

ahol ϱ_1 és ϱ_2 a gömbréteget határoló körök sugarai, a gömbréteg térfogata:

$$V = \frac{\pi m}{6} (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + m^2).$$

c) A gömbszelet térfogata

A gömbszelet olyan gömbréteg, amelyben $\varrho_1 = \varrho$ és $\varrho_2 = 0$ (8.59 ábra).

Így térfogata:

$$V = \frac{\pi m}{6} (3\varrho^2 + m^2).$$

Mivel a derékszögű háromszög „magasságtétele” szerint $\varrho^2 = m(2r - m)$ (8.60 ábra),

a képlet így alakítható:

$$V = \frac{\pi m}{6} [3m(2r - m) + m^2].$$

$$V = \frac{\pi m}{6} (6mr - 2m^2).$$

$$V = \frac{\pi m^2}{3} (3r - m).$$

d) A gömbcikk térfogata

A térfogat egy gömbszelet és egy kúp térfogatának összege.

$$V = \frac{m^2 \pi}{3} (3r - m) + \frac{\varrho^2 \pi}{3} (r - m) \quad (8.61 \text{ ábra}).$$

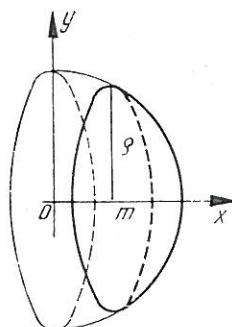
Mivel

$$\varrho^2 = m(2r - m),$$

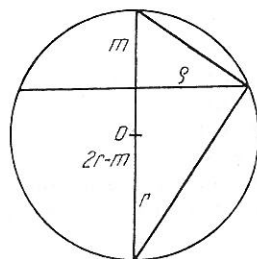
$$V = \frac{\pi}{3} [m^2(3r - m) + (2rm - m^2)(r - m)].$$

$$V = \frac{\pi}{3} (3rm^2 - m^3 + 2r^2m - rm^2 - 2rm^2 + m^3).$$

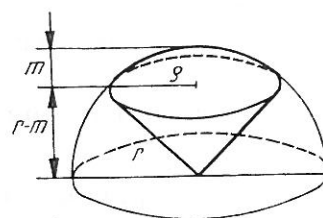
$$V = \frac{2r^2 \pi m}{3}.$$



8.59 ábra



8.60 ábra



8.61 ábra

3. Forgassuk az $x^2 - y^2 = 1$ egyenlő szárú hiperbola $x > 0$ ágát az y tengely körül, és számítsuk ki az $y = -2$ és $y = 2$ magasságban az y tengelyre merőlegesen állított síkok és a forgási hiperboloid határolta térrész térfogatát (8.62 ábra)!

A térfogat fele:

$$\frac{V}{2} = \pi \int_0^2 x^2 dy,$$

Mivel $x^2 = 1 + y^2$,

$$\frac{V}{2} = \pi \int_0^2 (1 + y^2) dy = \pi \left[y + \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \pi \frac{14}{3}.$$

Az egész térfogat

$$V_v = \pi \frac{28}{3}.$$

4. Forgási ellipszoid térfogata

Forgassuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ellipszis } y \geq 0 \text{ felét az } x \text{ tengely körül (8.63 ábra)}$$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

A forgástest felének térfogata:

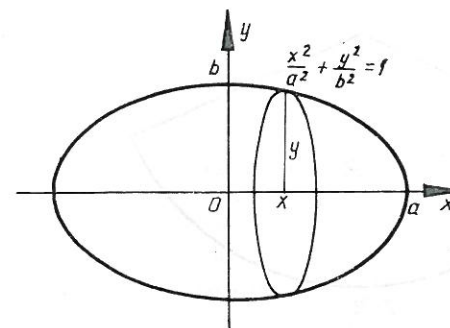
$$\frac{V_x}{2} = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right) dx = \pi \left[b^2 x - \frac{b^2}{a^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{2\pi}{3} b^2 a.$$

A teljes térfogat

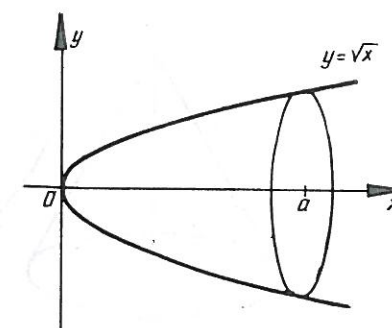
$$V_x = \frac{4\pi}{3} b^2 a.$$

Hasonlóan nyerjük, hogy az ellipszisnek az y tengely körül való forgatásakor nyert test térfogata:

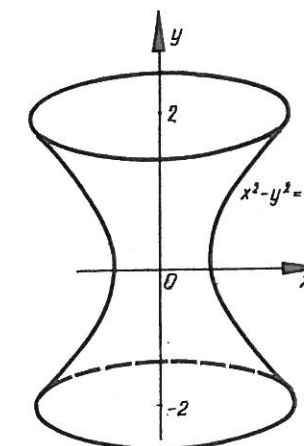
$$V_y = \frac{4\pi}{3} a^2 b.$$



8.63 ábra



8.64 ábra



8.62 ábra

5. Határozzuk meg az $y = \sqrt{x}$ egyenletű parabola $[0; a]$ szakaszának forgatásával nyert forgási paraboloid térfogatát (8.64 ábra)!

$$V_r = \pi \int_0^a |\sqrt{x}|^2 dx = \pi \int_0^a x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \pi \frac{a^2}{2}.$$

A körülírt henger térfogata:

$$V_h = (\sqrt{a})^2 \pi a = a^2 \pi.$$

A forgási paraboloid térfogata a henger térfogatának felével egyenlő.

6. Határozzuk meg a ciklois egy menetének forgatása által nyert test térfogatát!

$$\left. \begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned} \right\}, \quad \dot{x} = a(1 - \cos t).$$

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 \dot{x} dt = \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\ &= \pi a^3 \left[t - 3 \sin t + \frac{3}{2} (\sin t \cos t + t) - \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = \pi a^3 \cdot 5\pi = 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\text{Mivel: } \int \cos^3 t dt &= \int \cos^2 t \cos t dt = \int (1 - \sin^2 t) \cos t dt = \right. \\ &= \left. \int (\cos t - \sin^2 t \cos t) dt = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + C. \right) \end{aligned}$$

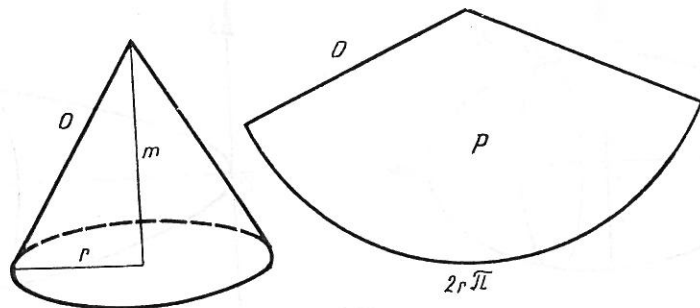
8.3.5 Forgástestek felszíne

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban folytonos, és legyen az intervallumban $y \geq 0$. Tegyük fel, hogy a görbe az intervallumban rektifikálható.

Forgassuk meg a görbét az x tengely körül, és határozzuk meg az $a \leq x \leq b$ intervallumban a keletkezett forgásfelület felszínét.

A felszín meghatározásához szükségünk van a kúp, illetőleg a csonkakúp palástja felszínének ismeretére.

A kúp palástja. Ha az R sugarú, m magasságú, o oldalélű egyenes kőrkúp palástját kiterítjük, körcikket kapunk (8.65 ábra).



8.65 ábra

Ha a palást felszínét P -vel jelöljük:

$$\frac{P}{o^2 \pi} = \frac{2r\pi}{2o\pi}.$$

Innen a kúp palástjának felszíne:

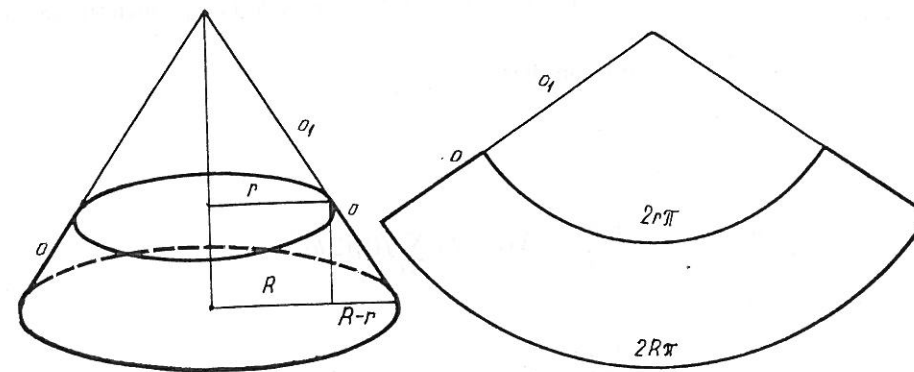
$$P = r\pi o.$$

A csonkakúp palástja. Az egyenes csonkakúp palástját kiterítve, felszíne két körívk közötti területnek különbségével egyenlő. Ha a csonkakúp alapkörének sugara R , illetve r , alkotója o , a kiegészítő kúp alkotója o_1 , akkor a palást felszíne:

$$P = R\pi(o + o_1) - r\pi o_1.$$

Innen

$$P = R\pi o + \pi o_1(R - r).$$



8.66 ábra

Mivel a háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{R-r}{r} = \frac{o}{o_1} \quad (8.66 \text{ ábra}),$$

$$(R-r)o_1 = or.$$

$$P = R\pi o + r\pi o.$$

A palást felszíne:

$$P = (R+r)\pi o.$$

Térjünk vissza a forgásfelület felszínének meghatározásához. Az $y = f(x)$ függvény ($y \geq 0$) görbét forgattuk az x tengely körül. Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumokra, amelyek hossza:

$$\Delta x_1; \Delta x_2; \dots; \Delta x_i; \dots; \Delta x_n \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}).$$

Vegyük a Δx_i intervallumhoz tartozó forgásfelületbe írható csónakúppalástot. Ennek felszíne:

$$\Delta P_i = \pi(y_{i-1} + y_i) \Delta h_i \quad (8.67 \text{ ábra}),$$

(Δh_i az x_{i-1} és x_i abszcisszájú pontokat összekötő húr hossza.)

A felszín így is írható

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta h_i.$$

Az összefüggés minden i -re igaz.

Összegezve

$$\sum_{i=1}^n \Delta P_i = \sum_{i=1}^n 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta h_i.$$

Az $y = f(x)$ függvény folytonos az $[x_{i-1}; x_i]$ -ben. A Lagrange-féle középtértéktétel szerint van olyan

$x_{i-1} < \xi < x_i$ hely, amelyre

$$f(\xi_i) = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}.$$

Így

$$\sum_{i=1}^n \Delta P_i = \sum_{i=1}^n 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta x_i = 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta h_i.$$

Az utolsó összeg így írható:

$$2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta h_i = 2\pi \left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta s_i - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\Delta s_i - \Delta h_i) \right],$$

ahol Δs_i a Δx_i intervallumhoz tartozó ívhossz.

Vizsgáljuk a $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\Delta s_i - \Delta h_i)$ összeget.

Legyen az $y = f(x)$ függvény maximuma az $[a; b]$ intervallumban M .

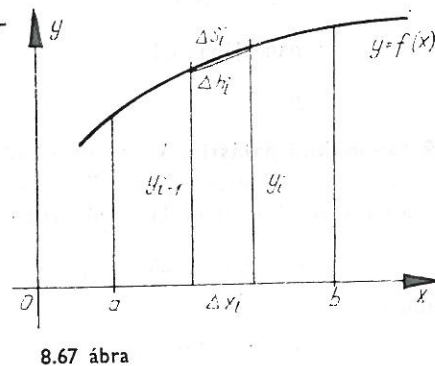
$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\Delta s_i - \Delta h_i) \leq M \left(\sum_{i=1}^n \Delta s_i - \sum_{i=1}^n \Delta h_i \right) = M \left(S - \sum_{i=1}^n \Delta h_i \right)$$

(ahol $\sum_{i=1}^n \Delta s_i = S$, a görbének az $[a; b]$ intervallumhoz tartozó ívhossza).

Mivel feltettük, hogy az $a \leq x \leq b$ intervallumban az $y = f(x)$ függvény görbéje rektifikálható:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta h_i = S,$$

ezért

$$\lim_{\max \Delta x_{i-1} \rightarrow 0} M \left(S - \sum_{i=1}^n \Delta h_i \right) = 0.$$


A rektifikálhatóság miatt, ha $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, akkor $\max \Delta s_i \rightarrow 0$.

$$\text{Így} \quad \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta s_i = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta s_i = \int_0^S y(s) ds.$$

Kézenfekvő ezt a határértéket a forgástest felszínének tekinteni.

A forgástest felszíne:

$$\begin{aligned} F &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta P_i = 2\pi \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta s_i - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\Delta s_i - \Delta h_i) \right] = \\ &= 2\pi \int_0^S y(s) ds. \end{aligned}$$

Tehát az $a \leq x \leq b$ intervallumban a forgástest felszíne:

$$F = 2\pi \int_0^S y(s) ds$$

(ahol S a görbedarab ívhossza az $[a; b]$ szakaszban).

Jelöljük az $y = f(x)$ görbének ívhosszát az $[a; x]$ intervallumban $s = s(x)$ -szel.

Az ívhossz x -nek nyilvánvalóan monoton növekvő, folytonos függvénye.

Van inverz függvénye: $x = x(s)$.

Alkalmazzuk az $s = s(x)$ helyettesítést:

$$y(s) = y[s(x)] = y(x) = f(x).$$

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1+y'^2} dx.$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}.$$

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Ha $s = 0$, akkor $x = a$, ha $s = S$, akkor $x = b$. Ezért a felszín az x változó segítségével:

$$F = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx$$

Legyen a görbe az $x = \varphi(y)$ egyenlettel adott. Legyen a φ folytonos, ha $c \leq y \leq d$, az $x \geq 0$, és a megfelelő görbeszakasz rektifikálható.

A görbét az y tengely körül forgatva az előzőekhez analóg módon nyerhető, hogy a forgástest felszíne:

$$F_y = 2\pi \int_0^S x(s) ds.$$

Illetve:

$$F_y = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

Paraméteres alakban adott függvényeknél

$$F_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt,$$

$$F_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Polárkoordinátás alakban adott függvényeknél, ha $r = r(\varphi)$,

$$F_x = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)} d\varphi.$$

Röviden:

$$F_x = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin \varphi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi.$$

$$F_y = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \cos \varphi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi.$$

Példák

1. Gömbön felszíne

Legyen a gömb sugara r . A gömb az

$$x^2 + y^2 = r^2$$

egyenletű kör $y \geq 0$ felének forgatásával keletkezik. Számítsuk ki a gömbön felszínét, ha magassága: m .

$$(m = m_2 - m_1) \quad (8.68 \text{ ábra}).$$

$$F = 2\pi \int_{m_1}^{m_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

A kör egyenletéből

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

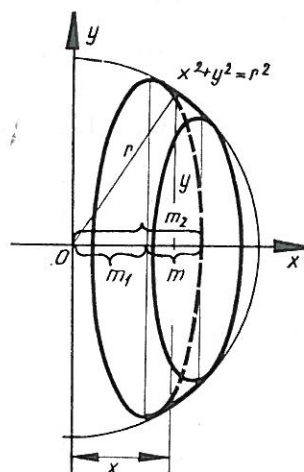
Mindkét oldalt x szerint differenciálva:

$$2yy' = -2x,$$

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

y' értékét a felszín integrálképletébe helyettesítve:

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_{m_1}^{m_2} y \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx = 2\pi \int_{m_1}^{m_2} \sqrt{y^2 + x^2} dx = 2\pi \int_{m_1}^{m_2} r dx = \\ &= 2\pi r \int_{m_1}^{m_2} dx = 2\pi r [x]_{m_1}^{m_2} = 2\pi r (m_2 - m_1) = 2\pi r m. \end{aligned}$$



8.68 ábra

Tehát a gömbön felszíne:

$$F = 2\pi r m.$$

Mivel az egész gömb magassága $2r$, a gömb felszíne:

$$F = 2\pi r \cdot 2r.$$

$$F = 4\pi r^2.$$

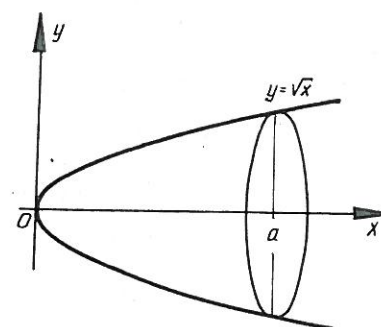
2. A forgáspárolloid felszíne

Számítsuk ki az $y = \sqrt{x}$ egyenletű parabolaív $[0; a]$ szakaszának forgatása által nyert felület felszínét (8.69 ábra)!

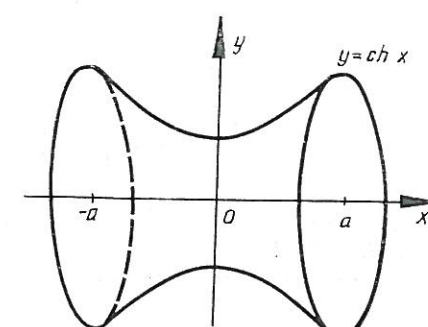
$$F_x = 2\pi \int_0^a y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

$$y = \sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y'^2 = \frac{1}{4x}.$$

$$\begin{aligned} F_x &= 2\pi \int_0^a \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = 2\pi \int_0^a \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \left[\frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(\sqrt{\left(a + \frac{1}{4}\right)^3} - \frac{1}{8} \right). \end{aligned}$$



8.69 ábra



8.70 ábra

3. Számítsuk ki az $y = \text{ch } x$ egyenletű lánccörbe $[-a; a]$ szakaszának forgatása által nyert test felszínét (8.70 ábra)!

A szimmetria miatt a fél felszínét számítjuk:

$$\frac{F}{2} = 2\pi \int_0^a y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

$$y = \text{ch } x; \quad y' = \text{sh } x; \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \text{sh}^2 x} = \text{ch } x.$$

$$\frac{F}{2} = 2\pi \int_0^a \text{ch } x \cdot \text{ch } x dx = 2\pi \int_0^a \text{ch}^2 x dx.$$

Mivel $\int \operatorname{ch}^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + x) + C$,

$$\frac{F}{2} = \pi \left[\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + x \right]_0^a = \pi (\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a + a).$$

$$F = \pi (\operatorname{sh} 2a + 2a) = \pi \left(\frac{e^{2a} - e^{-2a}}{2} + 2a \right).$$

4. Határozzuk meg a ciklois forgatásával kapott felület nagyságát, ha $0 \leq t \leq 2\pi$!

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), & \dot{x} &= a(1 - \cos t), \\ y &= a(1 - \cos t), & \dot{y} &= a \sin t. \end{aligned}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(2 - 2 \cos t) = 2a^2(1 - \cos t).$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a \sqrt{2(1 - \cos t)}.$$

$$y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{2} a^2 (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}.$$

Mivel $\sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2} \sin \frac{t}{2},$

$$y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 4a^2 \sin^3 \frac{t}{2}.$$

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^{2\pi} 4a^2 \sin^3 \frac{t}{2} \, dt = 8a^2 \pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} \, dt = \\ &= 16a^2 \pi \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} \, dt = \\ &= 16a^2 \pi \left[-\cos \frac{t}{2} + \frac{\cos^3 \frac{t}{2}}{3} \right]_0^{2\pi} \\ &= 16a^2 \pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{64\pi}{3} a^2. \end{aligned}$$

5. Határozzuk meg az

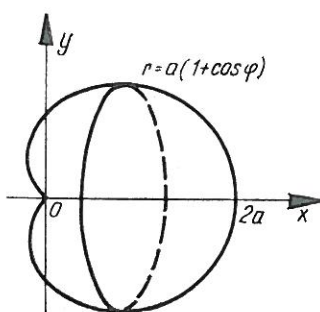
$r = a(1 + \cos \varphi)$ egyenletű kardioid forgatása által nyert test felületét (8.71 ábra)!

Forgatáskor a fél ívet forgatjuk, az intervallum $0 \leq \varphi \leq \pi$.

$$\dot{r} = -a \sin \varphi.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} &= a \sqrt{1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \\ &= a \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^\pi r \sin \varphi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \, d\varphi = 2\pi \int_0^\pi a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \cdot a \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} \, d\varphi = \\ &= 2\pi a^2 \sqrt{2} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^{\frac{3}{2}} \sin \varphi \, d\varphi = -2\pi a^2 \sqrt{2} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^{\frac{3}{2}} (-\sin \varphi) \, d\varphi = \\ &= 2\pi a^2 \sqrt{2} \int_\pi^0 (1 + \cos \varphi)^{\frac{3}{2}} (-\sin \varphi) \, d\varphi = 2\pi a^2 \sqrt{2} \cdot \frac{2}{5} \left[(1 + \cos \varphi)^{\frac{5}{2}} \right]_\pi^0 = \\ &= 2\pi a^2 \sqrt{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 4 \sqrt{2} = \frac{32}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$



8.71 ábra

8.3.6 Gyakorlati feladatok térfogat- és felszínszámításra

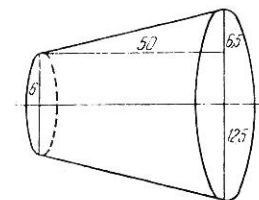
1. Egy pneumatikus gabonaszállító egyenes csanakúp alakú diffúzorjának (táguló csőreszének) méretei: $d = 12$ cm, $D = 25$ cm, $m = 50$ cm. Hány dm^3 lemez kell az elkészítéséhez (8.72 ábra)?

$$O = \sqrt{2500 + 42,25} = \sqrt{2542,25} \approx 50,4.$$

$$P = (R + r) \pi O.$$

$$P = 18,5 \cdot 50,4 \pi.$$

$$F \approx 29,3 \, \text{dm}^2.$$



8.72 ábra

2. A cséplőgép egyenes csanakúp alakú toklászójának méretei: $D = 30$ cm, $d = 18$ cm, $h = 40$ cm. A térfogat negyedéig tölthető meg. Mennyi a benne levő gabona súlya, ha a hektolitersúly 76 kp? (A toklászó forgó mozgással távolítja el a szemet burkoló toklászt.) (8.73 ábra.)

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$

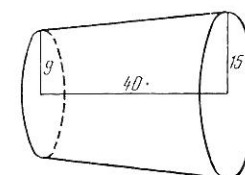
$$V = \frac{\pi 40}{3} (15^2 + 9^2 + 15 \cdot 9),$$

$$V = \frac{\pi 40}{3} \cdot 441 = \pi \cdot 40 \cdot 147,$$

$$V = 18,47 \, \text{dm}^3.$$

$$\frac{1}{4} V = 4,62 \, \text{dm}^3 = 0,0462 \, \text{hl}.$$

$$G = 0,0462 \cdot 76 = 3,51 \, \text{kp}.$$



8.73 ábra

3. Egy permetezőgép fekvő henger alakú tartályának átmérője: $D = 50$ cm, térfogata: $V = 300$ liter. Hány liter víz van benne 20 cm-es vízszintállásnál (8.74 ábra)?

$$V = 300 \, \text{dm}^3, \quad r = 2,5 \, \text{dm},$$

$$h = \frac{300}{2,5^2 \pi}, \quad h = 15,3 \, \text{dm}.$$

A vízzel megtöltött rész keresztmetszete körszelet (8.75 ábra).

$$\cos \alpha = \frac{0,5}{2,5} = 0,2000.$$

$$\alpha = 78^\circ 28',$$

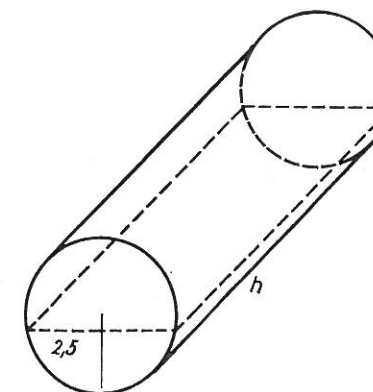
$$2\alpha = 156^\circ 56' \approx 157^\circ.$$

A körszelet területe:

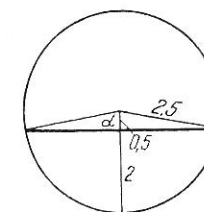
$$T = 2,5^2 \pi \frac{157^\circ}{360^\circ} - \frac{2,5^2}{2} \sin 157^\circ.$$

$$T = 8,56 - 1,22 = 7,34 \, \text{dm}^2.$$

$$V = 7,34 \cdot 15,3 = 112,3 \, \text{dm}^3 = 112,3 \, \text{liter}.$$



8.74 ábra



8.75 ábra

4. A kombinált kukorica-vetőgép műtrágyatartályának alakját a 8.76. ábra mutatja.

Mennyi a tartály felszíne?

Mennyi a térfogata H magasságig töltve?

Milyen h értéknél lesz a térfogat negyedrésnyi? (Ekkor kell a tartályt újratölteni.)

A testet egy trapéz alapú egyenes hasáb és egy hengrszelet alkotja (8.76 ábra).

$$a = \sqrt{5^2 + 1,5^2} = \sqrt{25 + 2,25} = \sqrt{27,25} \approx 5,22.$$

A trapézt kiegészítve (8.77 ábra):

$$\frac{b}{a} = \frac{0,5}{1,5}, \quad b = \frac{1}{3}a, \quad b = 1,74 \text{ dm.}$$

$$\frac{m}{5} = \frac{0,5}{1,5}, \quad m = \frac{5}{3}, \quad m = 1,66 \text{ dm.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,5}{5} = 0,3000.$$

$$\alpha = 16^\circ 42',$$

$$2\alpha = 33^\circ 24'.$$

A hengrszelet palástja:

$$P = 2\pi(a+b) \frac{33,4^\circ}{360^\circ} \cdot 3 = 2\pi \cdot 6,96 \cdot 0,093 \cdot 3 = 12,23 \text{ dm}^2.$$

A trapézból és körszeletből álló terület:

$$t_1 = (a+b)^2 \pi \frac{33,4^\circ}{360^\circ} - \frac{1 \cdot m}{2} =$$

$$= 6,96^2 \cdot \pi \cdot 0,093 - 0,83.$$

$$t_1 = 14,15 - 0,83 = 13,32 \text{ dm}^2$$

A téglalap területe:

$$t_2 = 3 \cdot a = 3 \cdot 5,22 = 15,66 \text{ dm}^2$$

A felszín:

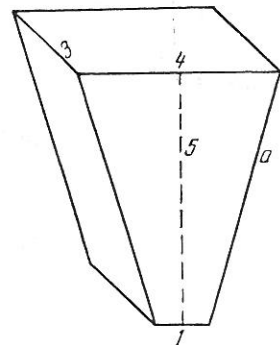
$$F = 12,23 + 2 \cdot 13,32 + 2 \cdot 15,66 = 70,19 \text{ dm}^2.$$

A megtöltött rész térfogata (8.78 ábra);

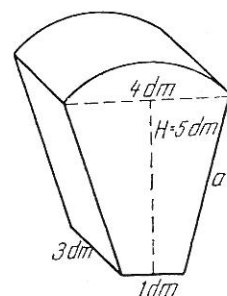
$$V = \frac{1+4}{2} \cdot 5 \cdot 3 = \frac{75}{2}.$$

$$V = 37,5 \text{ dm}^3.$$

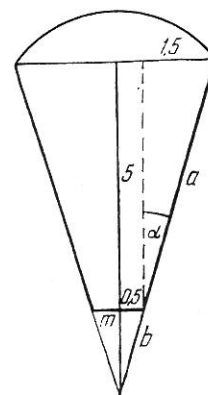
Ha a hasáb a térfogat negyedrésséig van töltve, alaplapjának, a trapéznak a területe is negyednyi lesz.



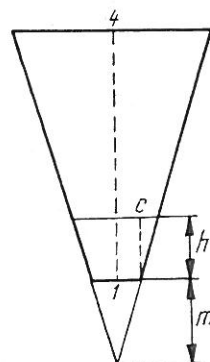
8.78 ábra



8.76 ábra



8.77 ábra



8.79 ábra

A trapéz területe:

$$T = \frac{1+4}{2} \cdot 5 = \frac{25}{2}.$$

A kis trapéz területe (8.79 ábra):

$$t = \frac{1+c}{2} \cdot h.$$

Mivel

$$t = \frac{T}{4},$$

$$(1+c)h = \frac{25}{4}.$$

A kiegészítő háromszög magasságát már kiszámítottuk:

$$m = 1,66.$$

A háromszögek hasonlósága miatt:

$$\frac{c}{1} = \frac{h+m}{m}.$$

$$c = \frac{h+1,66}{1,66}.$$

$$\text{Így} \quad \left(1 + \frac{h+1,66}{1,66}\right)h = \frac{25}{4}.$$

$$\text{Innen} \quad h^2 + 3,32h - \frac{25}{4} \cdot 1,66 = 0.$$

A másodfokú egyenletet megoldva:

$$h = 1,97 \text{ dm.}$$

5. Egy bója öntöttvasból készült, belül üres gömb. Vízbe merülve 15 cm magasságú rész áll ki belőle. Mennyi a falvastagsága, ha külső átmérője 40 cm és fajsúlya 7,4 kp/dm³.

Arkhimédész tétele értelmében a kiszorított víz súlya egyenlő a test súlyával.

A test térfogata két gömb térfogatának különbsége. A be-merülő rész gömbsüveg (8.80 ábra).

$$\text{A test súlya} \quad \frac{4\pi}{3} (20^3 - r^3) \cdot 7,4,$$

ahol a belső átmérő $2r$.

A gömbsüveg térfogata:

$$V = \frac{\pi m^2}{3} (3R - m).$$

$$V = \frac{\pi \cdot 25^2}{3} (60 - 25).$$

$$\text{Így} \quad \frac{4\pi}{3} (20^3 - r^3) \cdot 7,4 = \frac{\pi \cdot 25^2}{3} \cdot 35.$$

$$20^3 - r^3 = \frac{25^2 \cdot 35}{4 \cdot 7,4}.$$

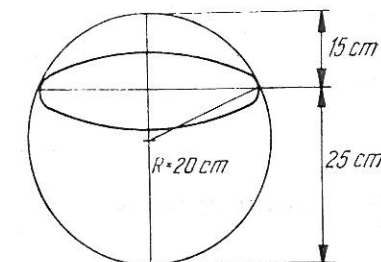
$$20^3 - r^3 = 739.$$

$$r^3 = 7261.$$

$$r = 19,36.$$

$$d = R - r = 20 - 19,36.$$

$$d = 0,64 \text{ dm.}$$



8.80 ábra

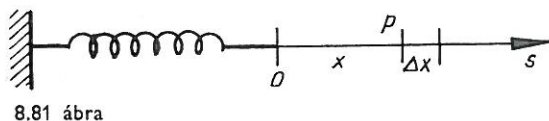
8.3.7 Fizikai alkalmazások

1. A rugalmas erő ellenében végzett munka

Ha egy rugót megfeszítünk, az erő, Hooke törvénye értelmében, a megnyúlással arányos. Ha a rugót kihúzzuk, a munka változó nagyságú, de az elmozdulás irányába mutató változatlan irányú erővel történik.

A P pontban az erő a kitéréssel arányos:

$$F = Dx \quad (8.81 \text{ ábra}).$$



8.81 ábra

Ha feltesszük, hogy a Δx szakaszon az erő állandó, és egyenlő a P ponthoz tartozó erővel, akkor a Δx szakaszon végzett munka:

$$\Delta W = F \Delta x = Dx \Delta x.$$

Összegezéssel és határértékre való áttéréssel:

a $[0; s]$ távolságon végzett munka

$$W = \int_0^s Dx \, dx = D \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^s = D \frac{s^2}{2}.$$

2. Az elektromos áram munkája

Az egyenáram munkája

Ha egy áramkörben I erősségű és U feszültségű egyenáram t ideig kering, akkor az áram által végzett munka:

$$W = I \cdot U t.$$

A váltakozó áram munkája

Határozzuk meg a munkát, ha az áram erőssége és feszültsége a $\alpha \leq t \leq \beta$ időtartamban változik. Osszuk az $[\alpha; \beta]$ időtartamot az $\alpha = t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_n = \beta$ időpillanatokkal részintervallumokra. Vegyük a $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ időtartamban a feszültséget és az intenzitást állandónak, akkorának, mint a τ_i pillanatban ($t_{i-1} < \tau_i < t_i$).

A végzett munka Δt_i idő alatt:

$$\Delta W_i \approx I(\tau_i) U(\tau_i) \Delta t_i.$$

Az egész munka:

$$W \approx \sum_{i=1}^n I(\tau_i) U(\tau_i) \Delta t_i.$$

Ha $I(t)$ és $U(t)$ véges számú kivétellel folytonos függvények, a felosztást minden határon túl finomítva:

$$W = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n I(\tau_i) U(\tau_i) \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} I(t) U(t) \, dt.$$

a) A váltakozó áram munkája tiszta ohmikus ellenállás esetén

Ha egy áramkörben

$$U = U_0 \sin \omega t = U_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$$

váltakozó áram kering, tiszta ohmikus ellenállás esetén az áramerősség:

$$I = I_0 \sin \omega t = I_0 \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

(T = egy periódus, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a körfrekvencia, I_0 a maximális áramerősség, U_0 a maximális feszültség.)

A váltakozó áram munkája egy periódus alatt:

$$W = \int_0^T I_0 U_0 \sin^2 \omega t \, dt = \frac{I_0 U_0}{2} \left[-\sin \omega t \cos \omega t + \omega t \right]_0^T.$$

$$W = \frac{I_0 U_0}{2} T.$$

A teljesítmény:

$$P = \frac{W}{T} = \frac{I_0 U_0}{2}.$$

Tiszta ohmikus ellenállást tartalmazó áramkörben, ha R az ellenállás, Ohm törvénye értelmében

$$U = IR.$$

Az áram munkája a $[0; T]$ időszakban:

$$W = \int_0^T RI^2 \, dt.$$

Jelentse $\bar{I}$ azon egyenáram intenzitását, amely a kérdéses áramkörben ugyanannyi idő alatt ugyanannyi munkát végez, mint a váltakozó áram.

Az egyenáram munkája T idő alatt:

$$W = \bar{I}^2 R \cdot T.$$

Így

$$\bar{I}^2 RT = R \int_0^T I^2 \, dt.$$

Innen

$$\bar{I} = \frac{\int_0^T I^2(t) \, dt}{T}$$

$$\bar{I} = \sqrt{\frac{\int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t \, dt}{T}}.$$

$$\bar{I}^2 = \frac{\int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t \, dt}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t \, dt =$$

$$= \frac{I_0^2}{2T} \left[-\sin \omega t \cos \omega t + \omega t \right]_0^T = \frac{I_0^2}{2}.$$

Tehát

$$\bar{I}^2 = \frac{I_0^2}{2}.$$

$$\bar{I} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Ezt az értéket a váltakozó áram effektív áramerősségének nevezzük. Tehát a váltakozó áram effektív áramerőssége:

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Ha azon egyenáram feszültségét, amely ugyanannyi idő alatt ugyanannyi munkát végez, mint a váltakozó áram, $\bar{U}$ -val jelöljük, hasonló módon nyerhetjük a

$$W = \frac{\bar{U}^2}{R} T \quad \text{és} \quad W = \frac{1}{R} \int_0^T U^2(t) \, dt = \frac{1}{R} \int_0^T U_0^2 \sin^2 \omega t \, dt$$

egyenletből, hogy

$$\bar{U} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Ezt az értéket a váltakozó áram effektív feszültségének nevezzük.

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

A váltakozó áram teljesítménye:

$$P = I_{\text{eff}} \cdot U_{\text{eff}} = \frac{I_0 U_0}{2}.$$

b) A váltakozó áram munkája, ha az áramkörben önindukció van

Ha a váltakozó áramú áramkörben önindukció van, a feszültség és intenzitás már nincsenek egy fázisban, közöttük φ fáziskülönbség van.

$$U = U_0 \sin \omega t, \quad I = I_0 \sin (\omega t + \varphi), \quad \text{ahol} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

$$W = \int_0^T I_0 U_0 \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) dt.$$

$$A \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{összefüggésből:}$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2} (\cos \beta - \cos \alpha).$$

$$\omega t + \varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \omega t = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{jelöléssel:}$$

$$\beta = \varphi, \quad \alpha = 2\omega t + \varphi.$$

Ezért:

$$\sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)].$$

$$\begin{aligned} \text{Így} \quad W &= I_0 U_0 \frac{1}{2} \int_0^T [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)] dt = I_0 U_0 \left[\frac{T}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \int_0^T \cos \left(\frac{4\pi}{T} t + \varphi \right) dt \right] = \\ &= \frac{I_0 U_0 T}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \frac{T}{4\pi} \left[\sin \left(\frac{4\pi}{T} t + \varphi \right) \right]_0^T = \frac{I_0 U_0 T}{2} \cos \varphi. \end{aligned}$$

$$W = \frac{I_0 U_0}{2} \cos \varphi \cdot T.$$

$$W = I_{\text{eff}} \cdot U_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi \cdot T.$$

A teljesítmény:

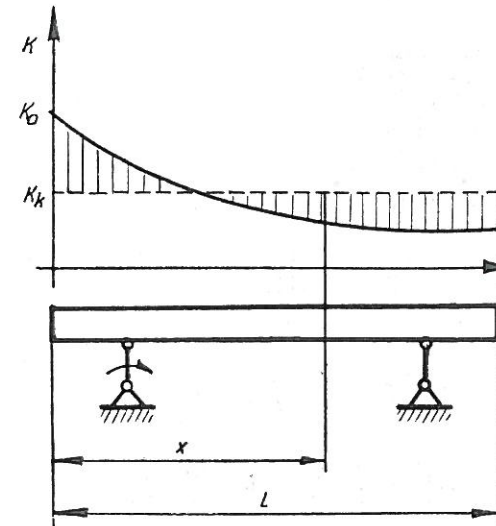
$$P = I_{\text{eff}} \cdot U_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi.$$

8.3.8 Néhány mezőgazdasági gépészeti feladat

1. A cséplőgép szalmarázóján a szalma között maradó szemmenység a ládahossz függvényében:

$$K = K_0 e^{-\mu x}$$

függvény szerint változik, ahol K_0 a szalma szemtartalma a beömlési helyen, K a szalma szemtartalma a beömléstől x távolságban és μ a kiostálódás foka (8.82 ábra).

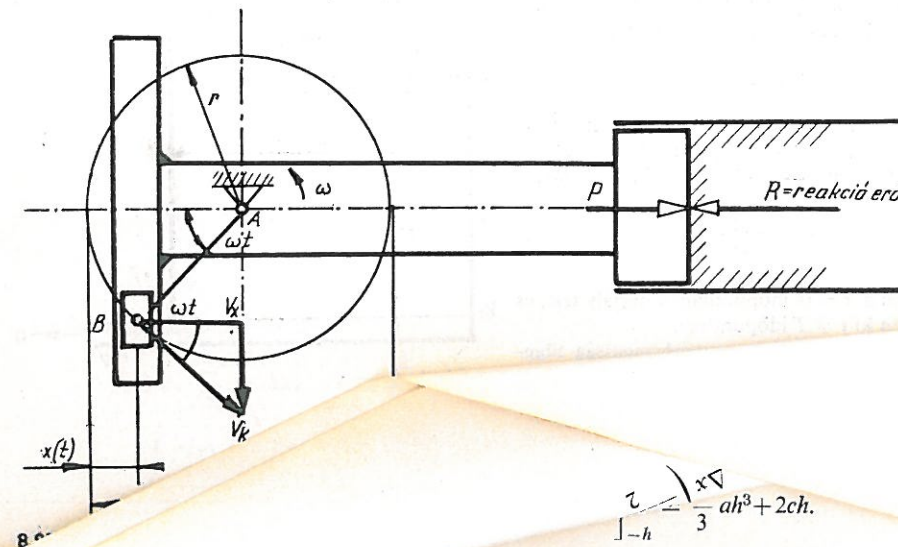


8.82 ábra

Az összefüggés ismeretében meghatározható egy L hosszúságú szalmarázó láda fölötti szalmaréteg átlagos szemtartalma, K_k .

$$K_k = \frac{K_0}{L} \int_0^L e^{-\mu x} dx = \frac{K_0}{\mu L} (1 - e^{-\mu L}).$$

2. Határozzuk meg a 8.83 ábrán látható présdugattyú átlagos teljesítményigényét, ha az AB forgattyúkar ω szögsebességgel forog!



$$\int_{-h}^h \frac{x^2}{3} ah^3 + 2ch.$$

A jelölések:

P	hasznos dugattyúerő [kp],
$v_k = r\omega$	kerületi sebesség [m/s],
L	lökethossz [m],
r	forgattyúsugár [m],
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	egy körfordulás ideje,
$N_{köz}$	átlagteljesítmény [LE].

A teljesítmény meghatározásakor abból indulunk ki, hogy a dugattyú csak egy fél körfordulás alatt végez munkát, az átlagteljesítményt pedig a teljes körfordulás alatt végzett munka és a T idő hányadosa adja:

$$N_{köz} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{75} \int_0^L P_x dx = \frac{P_{max}}{75T} \int_0^L \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) dx =$$

$$= \frac{P_{max}}{75} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot \left[x - \frac{x^3}{3L^2}\right]_0^L = \frac{\omega \cdot P_{max}}{2\pi \cdot 75} \cdot \frac{2}{3} L = \frac{\omega L P_{max}}{75 \cdot 3\pi}.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy

$$L = 2r\omega = 2v_k,$$

akkor az átlagos teljesítményre

$$N_{köz} = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{P_{max} v_k}{75} = \frac{2}{3\pi} N_{max}$$

adódik.

3. Mennyi idő alatt ürül ki a folyadék a permetezőgép nyomólégüstjéből, ha az ábrán feltüntetett viszonyok uralkodnak a kiindulási állapotban? Legyen a kifolyónyílás keresztmetszete a , a tartálykeresztmetszet A (8.84 ábra).

$$A \gg a.$$

A folyadék felett V_i térfogatú és p nyomású légpárna helyezkedik el, melynek térfogata és nyomása Boyle—Mariotte törvénye szerint:

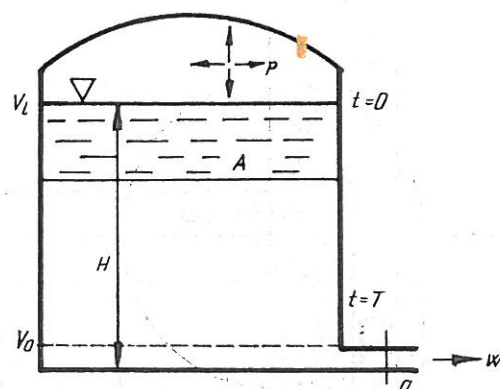
$$p = \frac{p_0 V_0}{V}.$$

Legyen a $t = 0$ időpontban a tartály tele, és ürüljön ki $t = T$ időpontban.

A kifolyás sebessége a nyomómagasság függvénye

$$w = \sqrt{2g \left(H + \frac{p}{\gamma}\right)} = \left[2g \left(H + \frac{p}{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A p nyomású levegőt $\frac{p}{\gamma}$ magasságú folyadékoszloppal helyettesítjük, ahol γ a folyadék fajsúlya.



8.84 ábra

A Δt idő alatt kifolyó folyadéktérfogat:

$$\Delta V = a \cdot w \cdot \Delta t = a \left[2g \left(H + \frac{p}{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \Delta t.$$

$$p = \frac{p_0 V_0}{V} \quad \text{helyettesítéssel, és az egyenletet rendezve:}$$

$$\frac{V}{\sqrt{2gH + \frac{p_0 V_0}{V} \cdot \frac{2g}{\gamma}}} = a \cdot \Delta t.$$

A gyökjel alatti összegben: $2gH \ll \frac{p_0 V_0 2g}{\gamma} \cdot \frac{1}{V}$, ezért $2gH$ elhanyagolható.

Ezek alapján a T kifolyási idő:

$$T(p_0, V_0, V_i) = \int_0^T dt = \frac{1}{a} \int_{V_i}^{V_0} \frac{dV}{\sqrt{\frac{p_0 V_0 2g}{\gamma} \cdot \frac{1}{V}}} =$$

$$= \frac{1}{a \sqrt{\frac{p_0 V_0 2g}{\gamma}}} \left[\frac{2}{3} V^{\frac{3}{2}} \right]_{V_i}^{V_0} = \sqrt{\frac{2\gamma}{9a^2 p_0 V_0 g}} (V_0^{\frac{3}{2}} - V_i^{\frac{3}{2}}).$$

8.4 HATÁROZOTT INTEGRÁLOK KÖZELÍTŐ SZÁMÍTÁSA

Sokszor szükséges a határozott integrált megállapítani olyankor is, mikor a határozatlan integrált nem tudjuk analitikus formulában megadni. Ilyenkor a határozott integrált megközelítjük az integrálértékek közelítő számításával.

8.4.1 Numerikus integrálás

8.4.1.1 Téglalapszabály

Az $\int_a^b f(x) dx$ határozott integrált két téglalapösszeg segítségével közelítjük meg.

Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot n egyenlő részre. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Ha az osztópontok: $a = x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n = b$, és az osztópontokban felvett függvényértékek:

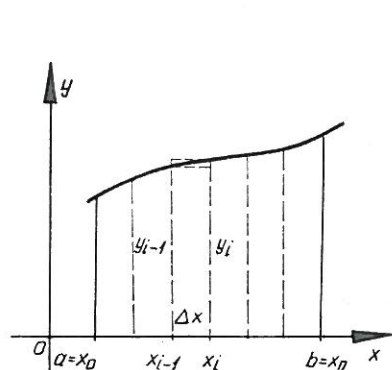
$$y_0, y_1, \dots, y_i, \dots, y_n,$$

a két közelítő téglalapösszeg:

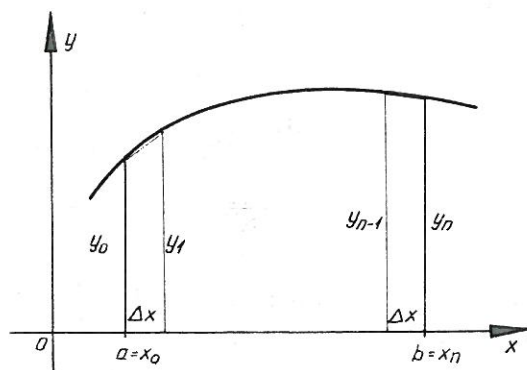
$$t = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x, \quad T = \sum_{i=1}^n y_i \Delta x \quad (8.85 \text{ ábra}).$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} y_i,$$

$$\text{vagy} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \sum_{i=1}^n y_i.$$



8.85 ábra



8.86 ábra

Példa

$$\int_0^1 x^2 dx. \quad \text{Legyen } n = 10, \quad \Delta x = 0,1.$$

$$t = 0,1(0^2 + 0,1^2 + \dots + 0,9^2) = 0,1 \cdot 2,85 = 0,285.$$

$$T = 0,1(0,1^2 + \dots + 0,9^2 + 1^2) = 0,1 \cdot 3,85 = 0,385.$$

A pontos érték:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

A téglalapszabály alkalmazásakor a hiba három tizedes pontosságnál:

$$H = 0,333 - 0,285 = 0,048,$$

$$\text{illetve } H = |0,333 - 0,385| = 0,052.$$

A százalékos hiba:

$$H\% = \frac{0,048}{0,333} \cdot 100 = 14,5\%.$$

8.4.1.2 A trapézsabály

A görbe vonalú kis trapézokat egyenes vonalú trapézokkal helyettesítjük. Egyenletes felosztásnál (8.86 ábra):

$$\begin{aligned} t_{\text{trap}} &= \Delta x \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) = \\ &= \Delta x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \end{aligned}$$

Példák:

1. Számítsuk ki az előző példában szereplő görbe vonalú trapéz területét trapézsabállyal!

$$t_{\text{trap}} = 0,1 \left(\frac{0+1^2}{2} + 0,1^2 + \dots + 0,9^2 \right) = 0,1(0,5 + 2,85) = 0,335.$$

A százalékos hiba:

$$\frac{0,335 - 0,333}{\frac{1}{3}} \cdot 100 = \frac{0,002}{\frac{1}{3}} \cdot 100 = 0,60\%.$$

Látható, hogy a trapézsabály pontosabb értéket ad, mint a téglalapszabály.

$$2. \quad \int_0^{\pi} \sin x \, dx. \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{\pi}{6}.$$

$$\begin{aligned} t_{\text{trap}} &= \frac{\pi}{6} \left(\frac{\sin 0 + \sin \pi}{2} + \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \dots + \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{\pi}{6} \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1,9541. \end{aligned}$$

A pontos érték

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$

$$\text{A \% -os hiba: } \frac{2 - 1,9541}{2} \cdot 100 = 2,3\%.$$

8.4.1.3 A Simpson-formula

A Simpson-formula még pontosabb értéket ad, mint a trapézsabály.

Az $[a; b]$ intervallumot páros számú egyenlő részre osztjuk.

A görbe alatti területet három, szomszédos pont által meghatározott parabolaív alatti területtel pótoljuk.

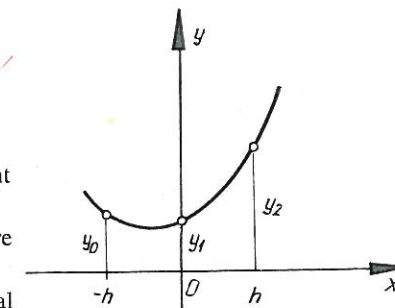
Legyen a három osztópont

$$x_0 = -h, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = h \quad (8.87 \text{ ábra}).$$

Határozzuk meg az $(x_0; y_0)$ $(x_1; y_1)$ $(x_2; y_2)$ pontok által meghatározott

$y = ax^2 + bx + c$ parabola alatti területet:

$$A_1 = \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) \, dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_{-h}^h = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch.$$



8.87 ábra

Ezt átalakítva:

$$A_1 = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3} (2ah^2 + bh - bh + 6c) =$$

$$= \frac{h}{3} (ah^2 - bh + c) + 4c + (ah^2 + bh + c).$$

Mivel $y_0 = y_{(-h)} = ah^2 - bh + c,$

$$y_1 = y_{(0)} = c,$$

$$y_2 = y_{(+h)} = ah^2 + bh + c,$$

$$h = \Delta x,$$

$$A_1 = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ugyanezt az eljárást az $[x_2; x_4]; [x_4; x_6] \dots [x_{2n-2}; x_{2n}]$ szakaszokra alkalmazva és összeadva:

$$A = \frac{\Delta x}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})].$$

$$I = A = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Az első és utolsó y együtthatója 1, a páros indexű y -ok együtthatója 2, a páratlan indexűeké 4.

Példa

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx. \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{\pi}{6}.$$

$$I \approx \frac{\pi}{18} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 9 \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \pi \right) =$$

$$= \frac{\pi}{18} (2 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + 2) = \frac{\pi}{9} (\sqrt{3} + 4) \approx 2,009.$$

A pontos értékkel

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2\text{-vel összehasonlítva}$$

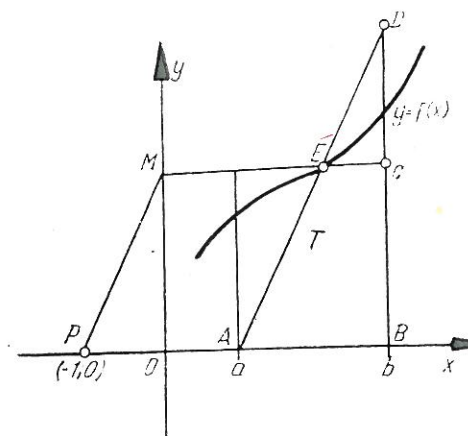
a százalékos hiba

$$\frac{0,009}{2} \cdot 100 = 0,45\%.$$

8.4.2 Grafikus integrálás

Az $[a; b]$ intervallumban az $y = f(x)$ görbe alatti területet következőképpen közelítjük meg. Megrajzoljuk azt az ordinátát, amellyel téglalapot szerkesztve ennek területe — a szemlélet szerint — a görbe alatti területtel egyenlő!

A görbe megfelelő pontjában, E -ben húzzunk párhuzamost az x tengellyel! Ez az egyenes messe az y tengelyt M pontban (8.88 ábra).



8.88 ábra

A görbe alatti terület:

$$T = (b-a) \cdot \overline{CB} = (b-a) \cdot \overline{MO}.$$

Kössük össze a $P(-1; 0)$ pontot M -mel.

Húzzunk A -ból MP -vel párhuzamost:

$$\frac{DB}{b-a} = \frac{MO}{1},$$

$$DB = (b-a) MO.$$

Tehát a D pont ordinátája mérőszámban megadja a görbe alatti területet, a határozott integrált.

Ezt az eljárást alkalmazzuk, ha az $[a; b]$ intervallumot n részre osztjuk (8.89 ábra). Az integrálfüggvényt ugyanolyan egységeket tartalmazó koordináta-rendszerben ábrázoljuk (alsó ábra). A PM_1 -gyel az x_0 pontból húzzunk párhuzamost. Ennek az $x = x_1$ -gyel való metszéspontjából, C_1' -ből PM_2 -vel, és így tovább.

A C_4B ordináta megadja a területek összegét, azaz közelítőleg az

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) \, dx \quad \text{határozott integrált.}$$

Ezt átalakítva:

$$A_1 = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3} (2ah^2 + bh - bh + 6c) = \\ = \frac{h}{3} (ah^2 - bh + c) + 4c + (ah^2 + bh + c).$$

Mivel $y_0 = y_{(-h)} = ah^2 - bh + c,$

$$y_1 = y_{(0)} = c,$$

$$y_2 = y_{(+h)} = ah^2 + bh + c,$$

$$h = \Delta x,$$

$$A_1 = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ugyanezt az eljárást az $[x_2; x_4]; [x_4; x_6] \dots [x_{2n-2}; x_{2n}]$ szakaszokra alkalmazva és összeadva:

$$A = \frac{\Delta x}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})].$$

$$I = A = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Az első és utolsó y együtthatója 1, a páros indexű y -ok együtthatója 2, a páratlan indexűeké 4.

Példa

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx. \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{\pi}{6}.$$

$$I \approx \frac{\pi}{18} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 9 \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \pi \right) = \\ = \frac{\pi}{18} (2 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + 2) = \frac{\pi}{9} (\sqrt{3} + 4) \approx 2,009.$$

A pontos értékkel

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \text{ -vel összehasonlítva}$$

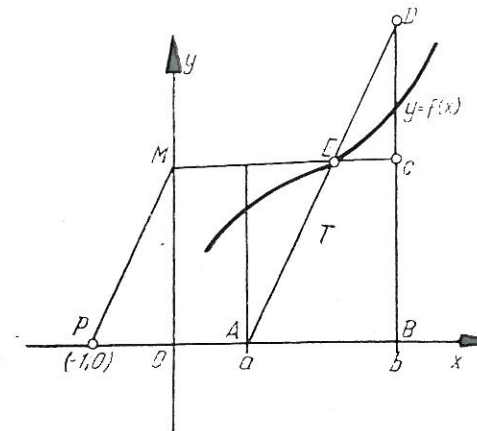
a százalékos hiba

$$\frac{0,009}{2} \cdot 100 = 0,45\%.$$

8.4.2 Grafikus integrálás

Az $[a; b]$ intervallumban az $y = f(x)$ görbe alatti területet következőképpen közelítjük meg. Megrajzoljuk azt az ordinátát, amellyel téglalapot szerkesztve ennek területe — a szemlélet szerint — a görbe alatti területtel egyenlő!

A görbe megfelelő pontjában, E -ben húzzunk párhuzamost az x tengellyel! Ez az egyenes messe az y tengelyt M pontban (8.88 ábra).



8.88 ábra

A görbe alatti terület:

$$T = (b-a) \cdot \overline{CB} = (b-a) \cdot \overline{MO}.$$

Kössük össze a $P(-1; 0)$ pontot M -mel.

Húzzunk A -ból MP -vel párhuzamost:

$$\frac{DB}{b-a} = \frac{MO}{1},$$

$$DB = (b-a) MO.$$

Tehát a D pont ordinátája mérőszámban megadja a görbe alatti területet, a határozott integrált.

Ezt az eljárást alkalmazzuk, ha az $[a; b]$ intervallumot n részre osztjuk (8.89 ábra). Az integrálfüggvényt ugyanolyan egységeket tartalmazó koordináta-rendszerben ábrázoljuk (alsó ábra). A PM_1 -gyel az x_0 pontból húzzunk párhuzamost. Ennek az $x = x_1$ -gyel való metszéspontjából, C'_1 -ből PM_2 -vel, és így tovább.

A C'_4B ordináta megadja a területek összegét, azaz közelítőleg az

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) \, dx \quad \text{határozott integrált.}$$

Ezt átalakítva:

$$A_1 = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}(2ah^2 + bh - bh + 6c) = \\ = \frac{h}{3}(ah^2 - bh + c) + 4c + (ah^2 + bh + c).$$

Mivel $y_0 = y_{(-h)} = ah^2 - bh + c,$

$$y_1 = y_{(0)} = c,$$

$$y_2 = y_{(+h)} = ah^2 + bh + c,$$

$$h = \Delta x,$$

$$A_1 = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ugyanezt az eljárást az $[x_2; x_4]; [x_4; x_6] \dots [x_{2n-2}; x_{2n}]$ szakaszokra alkalmazva és összeadva:

$$A = \frac{\Delta x}{3}[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})].$$

$$I = A = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Az első és utolsó y együtthatója 1, a páros indexű y -ok együtthatója 2, a páratlan indexűeké 4.

Példa

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx. \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{\pi}{6}.$$

$$I \approx \frac{\pi}{18} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 9 \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \pi \right) = \\ = \frac{\pi}{18} (2 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + 2) = \frac{\pi}{9} (\sqrt{3} + 4) \approx 2,009.$$

A pontos értékkel

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \text{ -vel összehasonlítva}$$

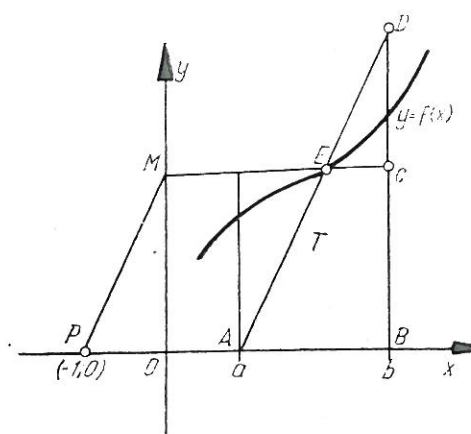
a százalékos hiba

$$\frac{0,009}{2} \cdot 100 = 0,45\%.$$

8.4.2 Grafikus integrálás

Az $[a; b]$ intervallumban az $y = f(x)$ görbe alatti területet következőképpen közelítjük meg. Megrajzoljuk azt az ordinátát, amellyel téglalapot szerkesztve ennek területe — a szemlélet szerint — a görbe alatti területtel egyenlő!

A görbe megfelelő pontjában, E -ben húzzunk párhuzamost az x tengellyel! Ez az egyenes messe az y tengelyt M pontban (8.88 ábra).



8.88 ábra

A görbe alatti terület:

$$T = (b-a) \cdot \overline{CB} = (b-a) \cdot \overline{MO}.$$

Kössük össze a $P(-1; 0)$ pontot M -mel.

Húzzunk A -ból MP -vel párhuzamost:

$$\frac{DB}{b-a} = \frac{MO}{1},$$

$$DB = (b-a) MO.$$

Tehát a D pont ordinátája mérőszámában megadja a görbe alatti területet, a határozott integrált.

Ezt az eljárást alkalmazzuk, ha az $[a; b]$ intervallumot n részre osztjuk (8.89 ábra). Az integrálfüggvényt ugyanolyan egységeket tartalmazó koordináta-rendszerben ábrázoljuk (alsó ábra). A PM_1 -gyel az x_0 pontból húzzunk párhuzamost. Ennek az $x = x_1$ -gyel való metszéspontjából, C'_1 -ből PM_2 -vel, és így tovább.

A C'_4B ordináta megadja a területek összegét, azaz közelítőleg az

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) \, dx \quad \text{határozott integrált.}$$

Ezt átalakítva:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{3} ah^3 + 2ch = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3} (2ah^2 + bh - bh + 6c) = \\ &= \frac{h}{3} (ah^2 - bh + c) + 4c + (ah^2 + bh + c). \end{aligned}$$

Mivel $y_0 = y_{(-h)} = ah^2 - bh + c,$

$$y_1 = y_{(0)} = c,$$

$$y_2 = y_{(+h)} = ah^2 + bh + c,$$

$$h = \Delta x,$$

$$A_1 = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ugyanezt az eljárást az $[x_2; x_4]; [x_4; x_6] \dots [x_{2n-2}; x_{2n}]$ szakaszokra alkalmazva és összeadva:

$$A = \frac{\Delta x}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})].$$

$$I = A = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Az első és utolsó y együtthatója 1, a páros indexű y -ok együtthatója 2, a páratlan indexűeké 4.

Példa

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx. \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{\pi}{6}.$$

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{\pi}{18} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 9 \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \pi \right) = \\ &= \frac{\pi}{18} (2 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + 2) = \frac{\pi}{9} (\sqrt{3} + 4) \approx 2,009. \end{aligned}$$

A pontos értékkel

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \text{ -vel összehasonlítva}$$

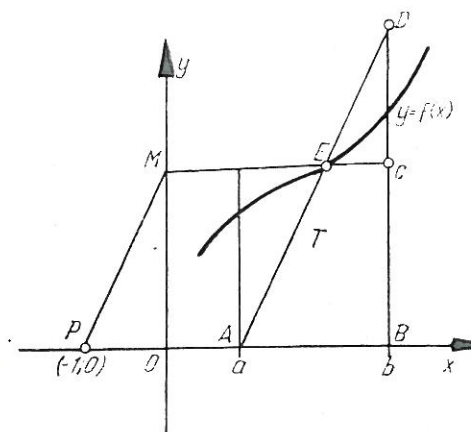
a százalékos hiba

$$\frac{0,009}{2} \cdot 100 = 0,45\%.$$

8.4.2 Grafikus integrálás

Az $[a; b]$ intervallumban az $y = f(x)$ görbe alatti területet következőképpen közelítjük meg. Megrajzoljuk azt az ordinátát, amellyel téglalapot szerkesztve ennek területe — a szemlélet szerint — a görbe alatti területtel egyenlő!

A görbe megfelelő pontjában, E -ben húzzunk párhuzamost az x tengellyel! Ez az egyenes messe az y tengelyt M pontban (8.88 ábra).



8.88 ábra

A görbe alatti terület:

$$T = (b-a) \cdot \overline{CB} = (b-a) \cdot \overline{MO}.$$

Kössük össze a $P(-1; 0)$ pontot M -mel.

Húzzunk A -ból MP -vel párhuzamost:

$$\frac{DB}{b-a} = \frac{MO}{1},$$

$$DB = (b-a) MO.$$

Tehát a D pont ordinátája mérőszámban megadja a görbe alatti területet, a határozott integrált.

Ezt az eljárást alkalmazzuk, ha az $[a; b]$ intervallumot n részre osztjuk (8.89 ábra). Az integrálfüggvényt ugyanolyan egységeket tartalmazó koordináta-rendszerben ábrázoljuk (alsó ábra). A PM_1 -gyel az x_0 pontból húzzunk párhuzamost. Ennek az $x = x_1$ -gyel való metszéspontjából, C'_1 -ből PM_2 -vel, és így tovább.

A C'_4B ordináta megadja a területek összegét, azaz közelítőleg az

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) \, dx \quad \text{határozott integrált.}$$

Ezt átalakítva:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{3} ah^3 + 2ch = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3} (2ah^2 + bh - bh + 6c) = \\ &= \frac{h}{3} (ah^2 - bh + c) + 4c + (ah^2 + bh + c). \end{aligned}$$

Mivel $y_0 = y_{(-h)} = ah^2 - bh + c,$

$$y_1 = y_{(0)} = c,$$

$$y_2 = y_{(+h)} = ah^2 + bh + c,$$

$$h = \Delta x,$$

$$A_1 = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ugyanezt az eljárást az $[x_2; x_4]; [x_4; x_6] \dots [x_{2n-2}; x_{2n}]$ szakaszokra alkalmazva és összeadva:

$$A = \frac{\Delta x}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})].$$

$$I = A = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Az első és utolsó y együtthatója 1, a páros indexű y -ok együtthatója 2, a páratlan indexűeké 4.

Példa

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx, \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{\pi}{6}.$$

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{\pi}{18} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 9 \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \pi \right) = \\ &= \frac{\pi}{18} (2 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + 2) = \frac{\pi}{9} (\sqrt{3} + 4) \approx 2,009. \end{aligned}$$

A pontos értékkel

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \text{ -vel összehasonlítva}$$

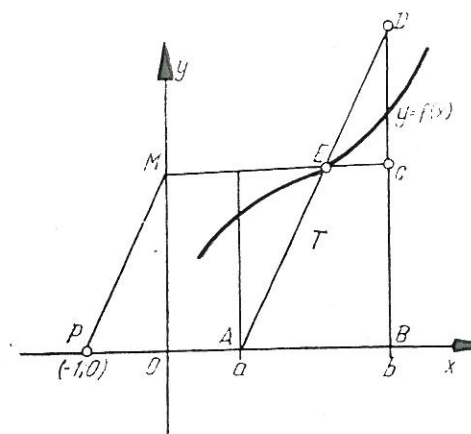
a százalékos hiba

$$\frac{0,009}{2} \cdot 100 = 0,45\%.$$

8.4.2 Grafikus integrálás

Az $[a; b]$ intervallumban az $y = f(x)$ görbe alatti területet következőképpen közelítjük meg. Megrajzoljuk azt az ordinátát, amellyel téglalapot szerkesztve ennek területe — a szemlélet szerint — a görbe alatti területtel egyenlő!

A görbe megfelelő pontjában, E -ben húzzunk párhuzamost az x tengellyel! Ez az egyenes messe az y tengelyt M pontban (8.88 ábra).



8.88 ábra

A görbe alatti terület:

$$T = (b-a) \cdot \overline{CB} = (b-a) \cdot \overline{MO}.$$

Kössük össze a $P(-1; 0)$ pontot M -mel.

Húzzunk A -ból MP -vel párhuzamost:

$$\frac{DB}{b-a} = \frac{MO}{1},$$

$$DB = (b-a) MO.$$

Tehát a D pont ordinátája mérőszámban megadja a görbe alatti területet, a határozott integrált.

Ezt az eljárást alkalmazzuk, ha az $[a; b]$ intervallumot n részre osztjuk (8.89 ábra). Az integrálfüggvényt ugyanolyan egységeket tartalmazó koordináta-rendszerben ábrázoljuk (alsó ábra). A PM_1 -gyel az x_0 pontból húzzunk párhuzamost. Ennek az $x = x_1$ -gyel való metszéspontjából, C'_1 -ből PM_2 -vel, és így tovább.

A C'_4B ordináta megadja a területek összegét, azaz közelítőleg az

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) \, dx \quad \text{határozott integrált.}$$

Ezt átalakítva:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{3} ah^3 + 2ch = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3} (2ah^2 + bh - bh + 6c) = \\ &= \frac{h}{3} (ah^2 - bh + c) + 4c + (ah^2 + bh + c). \end{aligned}$$

Mivel $y_0 = y_{(-h)} = ah^2 - bh + c,$

$$y_1 = y_{(0)} = c,$$

$$y_2 = y_{(+h)} = ah^2 + bh + c,$$

$$h = \Delta x,$$

$$A_1 = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ugyanezt az eljárást az $[x_2; x_4]; [x_4; x_6] \dots [x_{2n-2}; x_{2n}]$ szakaszokra alkalmazva és összeadva:

$$A = \frac{\Delta x}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})].$$

$$I = A = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Az első és utolsó y együtthatója 1, a páros indexű y -ok együtthatója 2, a páratlan indexűeké 4.

Példa

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx. \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{\pi}{6}.$$

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{\pi}{18} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 9 \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \pi \right) = \\ &= \frac{\pi}{18} (2 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + 2) = \frac{\pi}{9} (\sqrt{3} + 4) \approx 2,009. \end{aligned}$$

A pontos értékkel

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2\text{-vel összehasonlítva}$$

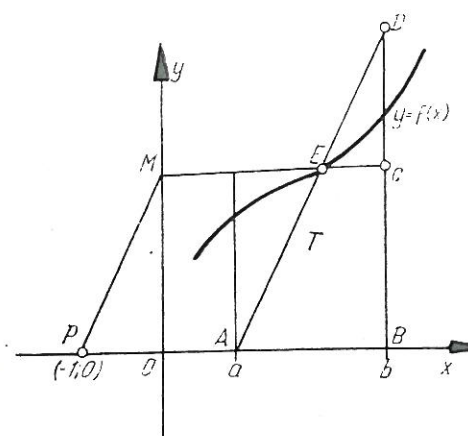
a százalékos hiba

$$\frac{0,009}{2} \cdot 100 = 0,45\%.$$

8.4.2 Grafikus integrálás

Az $[a; b]$ intervallumban az $y = f(x)$ görbe alatti területet következőképpen közelítjük meg. Megrajzoljuk azt az ordinátát, amellyel téglalapot szerkesztve ennek területe — a szemlélet szerint — a görbe alatti területtel egyenlő!

A görbe megfelelő pontjában, E -ben húzzunk párhuzamost az x tengellyel! Ez az egyenes messe az y tengelyt M pontban (8.88 ábra).



8.88 ábra

A görbe alatti terület:

$$T = (b-a) \cdot \overline{CB} = (b-a) \cdot \overline{MO}.$$

Kössük össze a $P(-1; 0)$ pontot M -mel.

Húzzunk A -ból MP -vel párhuzamost:

$$\frac{DB}{b-a} = \frac{MO}{1},$$

$$DB = (b-a) MO.$$

Tehát a D pont ordinátája mérőszámban megadja a görbe alatti területet, a határozott integrált.

Ezt az eljárást alkalmazzuk, ha az $[a; b]$ intervallumot n részre osztjuk (8.89 ábra). Az integrálfüggvényt ugyanolyan egységeket tartalmazó koordináta-rendszerben ábrázoljuk (alsó ábra). A PM_1 -gyel az x_0 pontból húzzunk párhuzamost. Ennek az $x = x_1$ -gyel való metszéspontjából, C'_1 -ből PM_2 -vel, és így tovább.

A C'_4B ordináta megadja a területek összegét, azaz közelítőleg az

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) \, dx \quad \text{határozott integrált.}$$

Ezt átalakítva:

$$A_1 = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3} (2ah^2 + bh - bh + 6c) = \\ = \frac{h}{3} (ah^2 - bh + c) + 4c + (ah^2 + bh + c).$$

Mivel $y_0 = y_{(-h)} = ah^2 - bh + c,$

$$y_1 = y_{(0)} = c,$$

$$y_2 = y_{(+h)} = ah^2 + bh + c,$$

$$h = \Delta x,$$

$$A_1 = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ugyanezt az eljárást az $[x_2; x_4]; [x_4; x_6] \dots [x_{2n-2}; x_{2n}]$ szakaszokra alkalmazva és összeadva:

$$A = \frac{\Delta x}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})].$$

$$I = A = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Az első és utolsó y együtthatója 1, a páros indexű y -ok együtthatója 2, a páratlan indexűeké 4.

Példa

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx. \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{\pi}{6}.$$

$$I \approx \frac{\pi}{18} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 9 \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \pi \right) = \\ = \frac{\pi}{18} (2 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + 2) = \frac{\pi}{9} (\sqrt{3} + 4) \approx 2,009.$$

A pontos értékkel

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \text{-vel összehasonlítva}$$

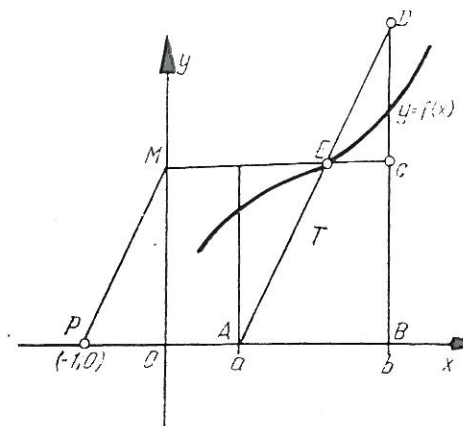
a százalékos hiba

$$\frac{0,009}{2} \cdot 100 = 0,45\%.$$

8.4.2 Grafikus integrálás

Az $[a; b]$ intervallumban az $y = f(x)$ görbe alatti területet következőképpen közelítjük meg. Megrajzoljuk azt az ordinátát, amellyel téglalapot szerkesztve ennek területe — a szemlélet szerint — a görbe alatti területtel egyenlő!

A görbe megfelelő pontjában, E -ben húzzunk párhuzamost az x tengellyel! Ez az egyenes messe az y tengelyt M pontban (8.88 ábra).



8.88 ábra

A görbe alatti terület:

$$T = (b-a) \cdot \overline{CB} = (b-a) \cdot \overline{MO}.$$

Kössük össze a $P(-1; 0)$ pontot M -mel.

Húzzunk A -ból MP -vel párhuzamost:

$$\frac{DB}{b-a} = \frac{MO}{1},$$

$$DB = (b-a) MO.$$

Tehát a D pont ordinátája mérőszámban megadja a görbe alatti területet, a határozott integrált.

Ezt az eljárást alkalmazzuk, ha az $[a; b]$ intervallumot n részre osztjuk (8.89 ábra). Az integrálfüggvényt ugyanolyan egységeket tartalmazó koordináta-rendszerben ábrázoljuk (alsó ábra). A PM_1 -gyel az x_0 pontból húzzunk párhuzamost. Ennek az $x = x_1$ -gyel való metszéspontjából, C'_1 -ből PM_2 -vel, és így tovább.

A C'_4B ordináta megadja a területek összegét, azaz közelítőleg az

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) \, dx \quad \text{határozott integrált.}$$

Ezt átalakítva:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{3} ah^3 + 2ch = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3} (2ah^2 + bh - bh + 6c) = \\ &= \frac{h}{3} (ah^2 - bh + c) + 4c + (ah^2 + bh + c). \end{aligned}$$

Mivel $y_0 = y_{(-h)} = ah^2 - bh + c,$

$$y_1 = y_{(0)} = c,$$

$$y_2 = y_{(+h)} = ah^2 + bh + c,$$

$$h = \Delta x,$$

$$A_1 = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ugyanezt az eljárást az $[x_2; x_4]; [x_4; x_6] \dots [x_{2n-2}; x_{2n}]$ szakaszokra alkalmazva és összeadva:

$$A = \frac{\Delta x}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})].$$

$$I = A = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Az első és utolsó y együtthatója 1, a páros indexű y -ok együtthatója 2, a páratlan indexűeké 4.

Példa

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx. \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{\pi}{6}.$$

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{\pi}{18} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 9 \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \pi \right) = \\ &= \frac{\pi}{18} (2 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + 2) = \frac{\pi}{9} (\sqrt{3} + 4) \approx 2,009. \end{aligned}$$

A pontos értékkel

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \text{-vel összehasonlítva}$$

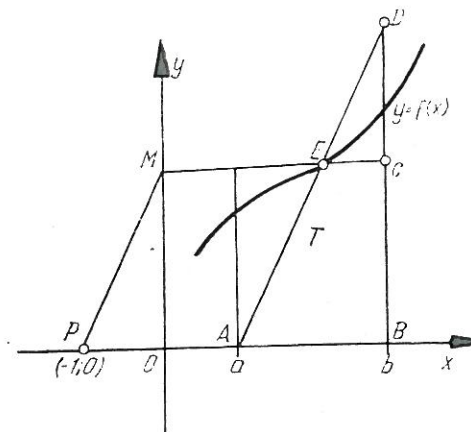
a százalékos hiba

$$\frac{0,009}{2} \cdot 100 = 0,45\%.$$

8.4.2 Grafikus integrálás

Az $[a; b]$ intervallumban az $y = f(x)$ görbe alatti területet következőképpen közelítjük meg. Megrajzoljuk azt az ordinátát, amellyel téglalapot szerkesztve ennek területe — a szemlélet szerint — a görbe alatti területtel egyenlő!

A görbe megfelelő pontjában, E -ben húzzunk párhuzamost az x tengellyel! Ez az egyenes messe az y tengelyt M pontban (8.88 ábra).



8.88 ábra

A görbe alatti terület:

$$T = (b-a) \cdot \overline{CB} = (b-a) \cdot \overline{MO}.$$

Kössük össze a $P(-1; 0)$ pontot M -mel.

Húzzunk A -ból MP -vel párhuzamost:

$$\frac{DB}{b-a} = \frac{MO}{1},$$

$$DB = (b-a) MO.$$

Tehát a D pont ordinátája mérőszámban megadja a görbe alatti területet, a határozott integrált.

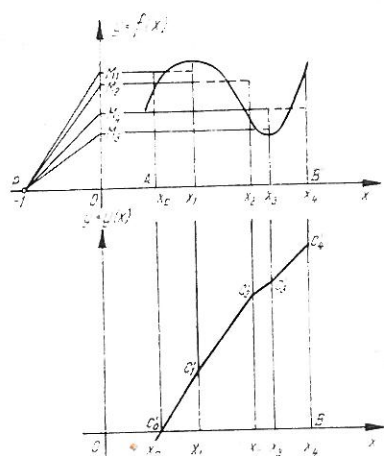
Ezt az eljárást alkalmazzuk, ha az $[a; b]$ intervallumot n részre osztjuk (8.89 ábra). Az integrálfüggvényt ugyanolyan egységeket tartalmazó koordináta-rendszerben ábrázoljuk (alsó ábra). A PM_1 -gyel az x_0 pontból húzzunk párhuzamost. Ennek az $x = x_1$ -gyel való metszéspontjából, C'_1 -ből PM_2 -vel, és így tovább.

A C'_4B ordináta megadja a területek összegét, azaz közelítőleg az

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) \, dx \quad \text{határozott integrált.}$$

Másképpen az $y(x)$ görbe grafikonja megadja az

$$y(x) = \int_a^x f(x) dx \quad \text{integrált.}$$



8.89 ábra

8.5 IMPROPRIUS INTEGRÁLOK

Az eddigi számítások során folytonos függvények határozott integrálját számítottuk ki véges intervallumokban.

Most kiterjesztjük a határozott integrál fogalmát végtelen intervallumokra, illetve nem korlátos függvények esetére.

A végtelen intervallumú vagy végtelen szakadású függvények integráljait improprius integráloknak nevezik.

8.5.1 Függvények integrálása végtelen intervallumban

Legyen $y = f(x)$ folytonos függvény.

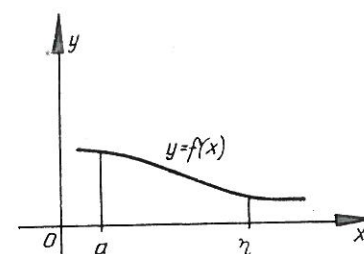
Mit jelent az $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integrál?

A határérték fogalma alapján az integrált így definiáljuk:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx,$$

ahol $\eta > a$ véges érték (8.90 ábra).

Ha a határérték létezik és véges szám, az improprius integrál konvergens, ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, az improprius integrál divergens.



8.90 ábra

Hasonlóan

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx,$$

ahol $\xi < a$ véges érték (8.91 ábra).

Értelmezzük a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{integrált!}$$

Legyen a tetszős szerinti hely ($-\infty < a < +\infty$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx$$

(8.92 ábra).

Könnyen belátható, hogy az integrál értéke a megválasztásától független.

Ha a határértékek léteznek és végesek, az improprius integrál konvergens.

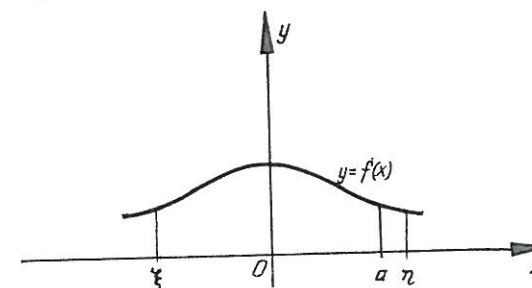
Ha $\int f(x) dx = F(x) + C$,

akkor az improprius integrál:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a).$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(a) - F(-\infty).$$

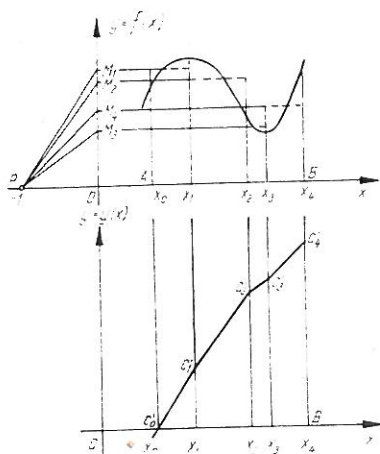
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$



8.92 ábra

Másképpen az $y(x)$ görbe grafikonja megadja az

$$y(x) = \int_a^x f(x) dx \quad \text{integrált.}$$



8.89 ábra

8.5 IMPROPRIUS INTEGRÁLOK

Az eddigi számítások során folytonos függvények határozott integrálját számítottuk ki véges intervallumokban.

Most kiterjesztjük a határozott integrál fogalmát végtelen intervallumokra, illetve nem korlátos függvények esetére.

A végtelen intervallumú vagy végtelen szakadású függvények integráljait improprius integráloknak nevezik.

8.5.1 Függvények integrálása végtelen intervallumban

Legyen $y = f(x)$ folytonos függvény.

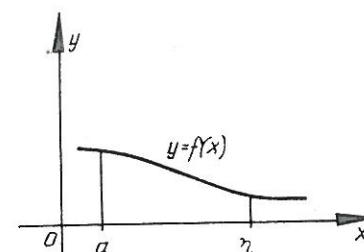
Mit jelent az $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integrál?

A határérték fogalma alapján az integrált így definiáljuk:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx,$$

ahol $\eta > a$ véges érték (8.90 ábra).

Ha a határérték létezik és véges szám, az improprius integrál konvergens, ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, az improprius integrál divergens.



8.90 ábra

Hasonlóan

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx,$$

ahol $\xi < a$ véges érték (8.91 ábra).

Értelmezzük a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{integrált!}$$

Legyen a tetszés szerinti hely ($-\infty < a < +\infty$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx$$

(8.92 ábra).

Könnyen belátható, hogy az integrál értéke a megválasztásától független.

Ha a határértékek léteznek és végesek, az improprius integrál konvergens.

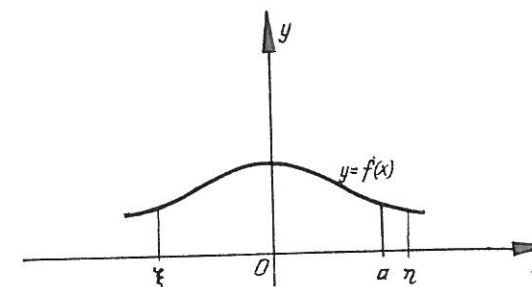
Ha $\int f(x) dx = F(x) + C$,

akkor az improprius integrál:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a).$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(a) - F(-\infty).$$

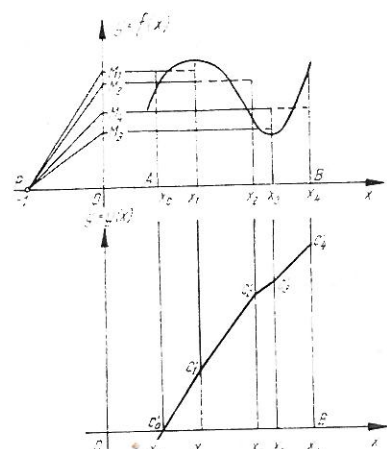
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$



8.92 ábra

Másképpen az $y(x)$ görbe grafikonja megadja az

$$y(x) = \int_a^x f(x) dx \quad \text{integrált.}$$



8.89 ábra

8.5 IMPROPRIUS INTEGRÁLOK

Az eddigi számítások során folytonos függvények határozott integrálját számítottuk ki véges intervallumokban.

Most kiterjesztjük a határozott integrál fogalmát végtelen intervallumokra, illetve nem korlátos függvények esetére.

A végtelen intervallumú vagy végtelen szakadású függvények integráljait improprius integráloknak nevezik.

8.5.1 Függvények integrálása végtelen intervallumban

Legyen $y = f(x)$ folytonos függvény.

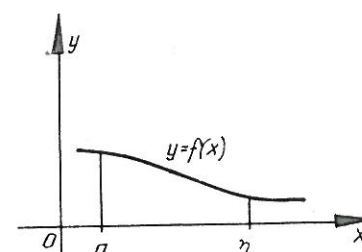
Mit jelent az $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integrál?

A határérték fogalma alapján az integrált így definiáljuk:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx,$$

ahol $\eta > a$ véges érték (8.90 ábra).

Ha a határérték létezik és véges szám, az improprius integrál konvergens, ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, az improprius integrál divergens.



8.90 ábra

Hasonlóan

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx,$$

ahol $\xi < a$ véges érték (8.91 ábra).

Értelmezzük a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{integrált!}$$

Legyen a tetszős szerinti hely ($-\infty < a < +\infty$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx$$

(8.92 ábra).

Könnyen belátható, hogy az integrál értéke a megválasztásától független.

Ha a határértékek léteznek és végesek, az improprius integrál konvergens.

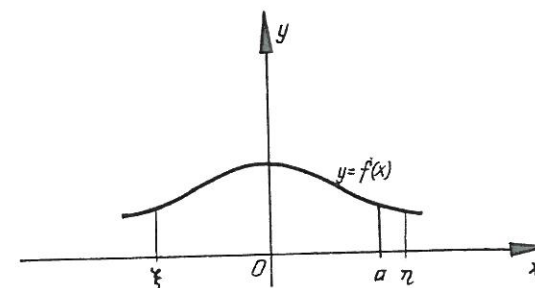
Ha $\int f(x) dx = F(x) + C$,

akkor az improprius integrál:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a).$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(a) - F(-\infty).$$

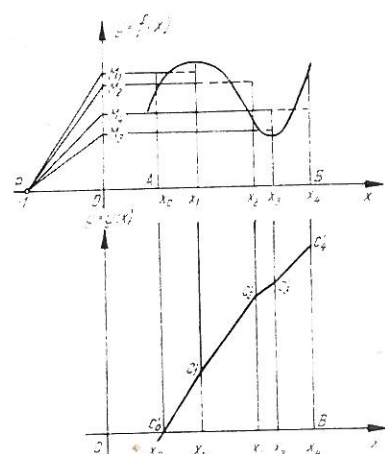
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$



8.92 ábra

Másképpen az $y(x)$ görbe grafikonja megadja az

$$y(x) = \int_a^x f(x) dx \quad \text{integrált.}$$



8.89 ábra

8.5 IMPROPRIUS INTEGRÁLOK

Az eddigi számítások során folytonos függvények határozott integrálját számítottuk ki véges intervallumokban.

Most kiterjesztjük a határozott integrál fogalmát végtelen intervallumokra, illetve nem korlátos függvények esetére.

A végtelen intervallumú vagy végtelen szakadású függvények integráljait improprius integráloknak nevezik.

8.5.1 Függvények integrálása végtelen intervallumban

Legyen $y = f(x)$ folytonos függvény.

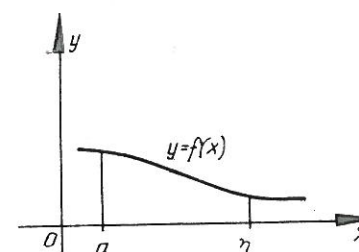
Mit jelent az $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integrál?

A határérték fogalma alapján az integrált így definiáljuk:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx,$$

ahol $\eta > a$ véges érték (8.90 ábra).

Ha a határérték létezik és véges szám, az improprius integrál konvergens, ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, az improprius integrál divergens.



8.90 ábra

Hasonlóan

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx,$$

ahol $\xi < a$ véges érték (8.91 ábra).

Értelmezzük a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{integrált!}$$

Legyen a tetszés szerinti hely ($-\infty < a < +\infty$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx$$

(8.92 ábra).

Könnyen belátható, hogy az integrál értéke a megválasztásától független.

Ha a határértékek léteznek és végesek, az improprius integrál konvergens.

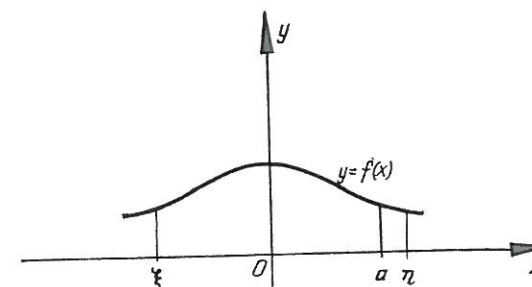
Ha $\int f(x) dx = F(x) + C$,

akkor az improprius integrál:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a).$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(a) - F(-\infty).$$

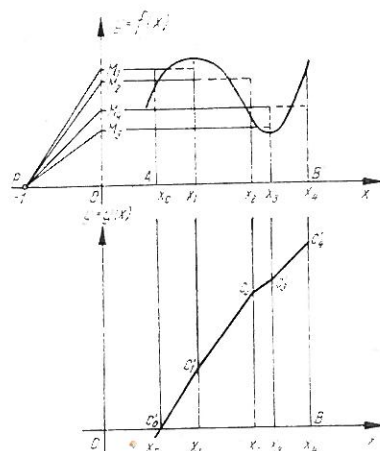
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$



8.92 ábra

Másképpen az $y(x)$ görbe grafikonja megadja az

$$y(x) = \int_a^x f(x) dx \quad \text{integrált.}$$



8.89 ábra

8.5 IMPROPRIUS INTEGRÁLOK

Az eddigi számítások során folytonos függvények határozott integrálját számítottuk ki véges intervallumokban.

Most kiterjesztjük a határozott integrál fogalmát végtelen intervallumokra, illetve nem korlátos függvények esetére.

A végtelen intervallumú vagy végtelen szakadású függvények integráljait improprius integráloknak nevezzük.

8.5.1 Függvények integrálása végtelen intervallumban

Legyen $y = f(x)$ folytonos függvény.

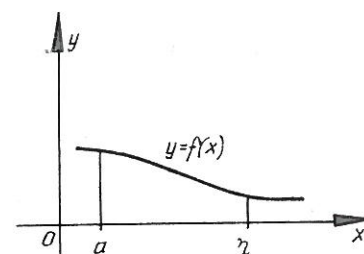
Mit jelent az $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integrál?

A határérték fogalma alapján az integrált így definiáljuk:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx,$$

ahol $\eta > a$ véges érték (8.90 ábra).

Ha a határérték létezik és véges szám, az improprius integrál konvergens, ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, az improprius integrál divergens.



8.90 ábra

Hasonlóan

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx,$$

ahol $\xi < a$ véges érték (8.91 ábra).

Értelmezzük a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{integrált!}$$

Legyen a tetszős szerinti hely ($-\infty < a < +\infty$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx$$

(8.92 ábra).

Könnyen belátható, hogy az integrál értéke a megválasztásától független. Ha a határértékek léteznek és végesek, az improprius integrál konvergens.

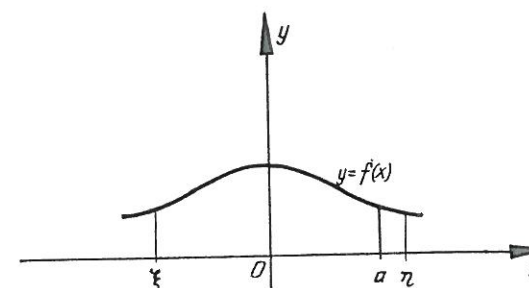
Ha $\int f(x) dx = F(x) + C$,

akkor az improprius integrál:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a).$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(a) - F(-\infty).$$

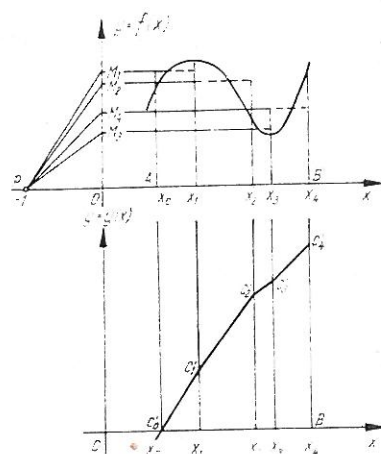
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$



8.92 ábra

Másképpen az $y(x)$ görbe grafikonja megadja az

$$y(x) = \int_a^x f(x) dx \quad \text{integrált.}$$



8.89 ábra

8.5 IMPROPRIUS INTEGRÁLOK

Az eddigi számítások során folytonos függvények határozott integrálját számítottuk ki véges intervallumokban.

Most kiterjesztjük a határozott integrál fogalmát végtelen intervallumokra, illetve nem korlátos függvények esetére.

A végtelen intervallumú vagy végtelen szakadású függvények integráljait improprius integráloknak nevezzük.

8.5.1 Függvények integrálása végtelen intervallumban

Legyen $y = f(x)$ folytonos függvény.

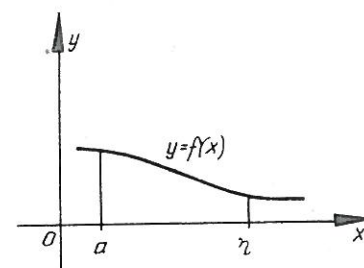
Mit jelent az $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integrál?

A határérték fogalma alapján az integrált így definiáljuk:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx,$$

ahol $\eta > a$ véges érték (8.90 ábra).

Ha a határérték létezik és véges szám, az improprius integrál konvergens, ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, az improprius integrál divergens.



8.90 ábra

Hasonlóan

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx,$$

ahol $\xi < a$ véges érték (8.91 ábra).

Értelmezzük a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{integrált!}$$

Legyen a tetszős szerinti hely ($-\infty < a < +\infty$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx$$

(8.92 ábra).

Könnyen belátható, hogy az integrál értéke a megválasztásától független.

Ha a határértékek léteznek és végesek, az improprius integrál konvergens.

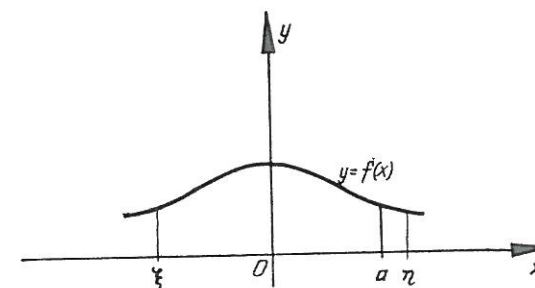
Ha $\int f(x) dx = F(x) + C$,

akkor az improprius integrál:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a).$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(a) - F(-\infty).$$

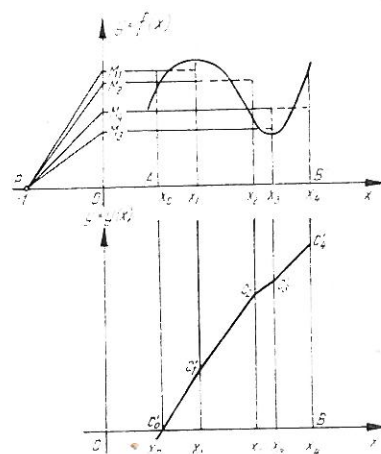
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$



8.92 ábra

Másképpen az $y(x)$ görbe grafikonja megadja az

$$y(x) = \int_a^x f(x) dx \quad \text{integrált.}$$



8.89 ábra

8.5 IMPROPRIUS INTEGRÁLOK

Az eddigi számítások során folytonos függvények határozott integrálját számítottuk ki véges intervallumokban.

Most kiterjesztjük a határozott integrál fogalmát végtelen intervallumokra, illetve nem korlátos függvények esetére.

A végtelen intervallumú vagy végtelen szakadású függvények integráljait improprius integráloknak nevezzük.

8.5.1 Függvények integrálása végtelen intervallumban

Legyen $y = f(x)$ folytonos függvény.

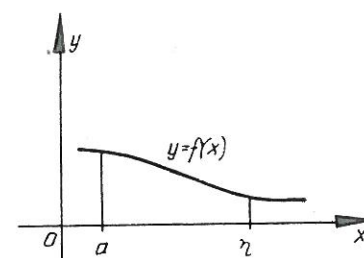
Mit jelent az $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integrál?

A határérték fogalma alapján az integrált így definiáljuk:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx,$$

ahol $\eta > a$ véges érték (8.90 ábra).

Ha a határérték létezik és véges szám, az improprius integrál konvergens, ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, az improprius integrál divergens.



8.90 ábra

Hasonlóan

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx,$$

ahol $\xi < a$ véges érték (8.91 ábra).

Értelmezzük a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{integrált!}$$

Legyen a tetszős szerinti hely ($-\infty < a < +\infty$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \int_{\xi}^a f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx$$

(8.92 ábra).

Könnyen belátható, hogy az integrál értéke a megválasztásától független.

Ha a határértékek léteznek és végesek, az improprius integrál konvergens.

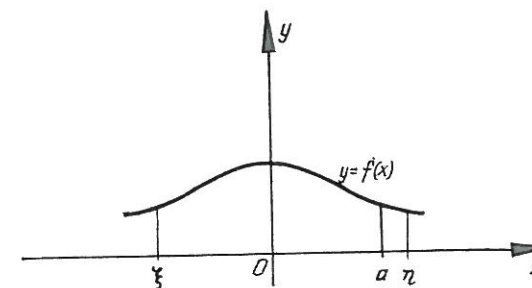
Ha $\int f(x) dx = F(x) + C$,

akkor az improprius integrál:

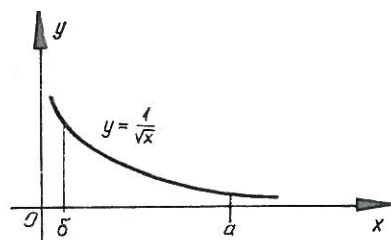
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a).$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = F(a) - F(-\infty).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$



8.92 ábra



8.93 ábra

Az $F(+\infty)$; $F(-\infty)$ jelek szimbólumok, a primitív függvény határértékét jelölik, ha $x \rightarrow +\infty$ és $x \rightarrow -\infty$.

Példák

1. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad a > 0. \quad (8.93 \text{ ábra}).$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^\eta = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\eta} \right) + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

2. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad (a > 0).$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_a^{+\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln |x| \right) - \ln a = +\infty.$$

3. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x}) - 2\sqrt{a} = +\infty.$

Az improprius integrálok a 2. és 3. példában divergensnek. Könnyen belátható, hogy az

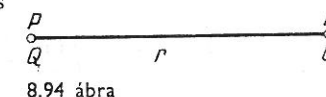
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{improprius integrál} \quad (a > 0)$$

$\alpha > 1$ esetén konvergens, $\alpha \leq 1$ esetén divergens.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\operatorname{Arctg} x \right]_{-\infty}^{+\infty} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctg} x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$

5. Nézzük az improprius integrál alkalmazását egy fizikai példán. Határozzuk meg valamely Q töltés által keltett elektromos tér potenciálját! Az egymástól r távolságban elhelyezett Q és Q_1 egynemű töltés között Coulomb törvénye szerint a taszító erő:

$$F = k \frac{QQ_1}{r^2} \quad (8.94 \text{ ábra}).$$



8.94 ábra

A munka, amelyet a Q töltés végez, ha a Q_1 töltést Δr -rel eltaszítja:

$$W = F\Delta r = k \frac{QQ_1}{r^2} \Delta r.$$

A munka, amelyet Q végez, ha Q_1 -et a végtelenbe taszítja:

$$W = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_r^R k \frac{QQ_1}{r^2} dr = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-k \frac{QQ_1}{r} \right]_r^R = k \frac{QQ_1}{r}.$$

Az elektromos tér potenciálja:

$$\varphi = \frac{W}{Q_1}.$$

$$\varphi = k \frac{Q}{r}.$$

8.5.2 Nem korlátos függvények integrálása

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum minden részintervallumában korlátos és integrálható, és legyen

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty,$$

azaz legyen a függvénynek az intervallum jobb oldali végpontjában végtelen szakadása (8.95 ábra).

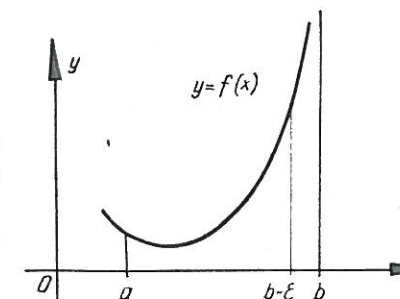
Az $\int_a^b f(x) dx$ improprius integrált a következőképpen értelmezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

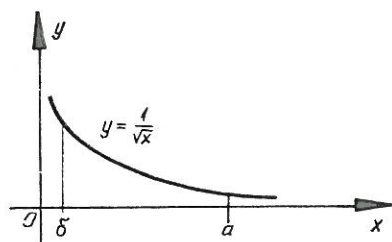
Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban korlátos és integrálható, és legyen:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty,$$



8.95 ábra



8.93 ábra

Az $F(+\infty)$; $F(-\infty)$ jelek szimbólumok, a primitív függvény határértékét jelölik, ha $x \rightarrow +\infty$ és $x \rightarrow -\infty$.

Példák

1. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad a > 0. \quad (8.93 \text{ ábra}).$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^\eta = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\eta} \right) + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

2. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad (a > 0).$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_a^{+\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln |x| \right) - \ln a = +\infty.$$

3. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x}) - 2\sqrt{a} = +\infty.$

Az improprius integrálok a 2. és 3. példában divergensek. Könnyen belátható, hogy az

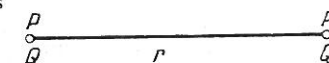
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{improprius integrál} \quad (a > 0)$$

$\alpha > 1$ esetén konvergens, $\alpha \leq 1$ esetén divergens.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\operatorname{Arctg} x \right]_{-\infty}^{+\infty} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctg} x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$

5. Nézzük az improprius integrál alkalmazását egy fizikai példán. Határozzuk meg valamely Q töltés által keltett elektromos tér potenciálját! Az egymástól r távolságban elhelyezett Q és Q_1 egynemű töltés között Coulomb törvénye szerint a taszító erő:

$$F = k \frac{QQ_1}{r^2} \quad (8.94 \text{ ábra}).$$



8.94 ábra

A munka, amelyet a Q töltés végez, ha a Q_1 töltést Δr -rel eltaszítja:

$$W = F\Delta r = k \frac{QQ_1}{r^2} \Delta r.$$

A munka, amelyet Q végez, ha Q_1 -et a végtelenbe taszítja:

$$W = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_r^R k \frac{QQ_1}{r^2} dr = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-k \frac{QQ_1}{r} \right]_r^R = k \frac{QQ_1}{r}.$$

Az elektromos tér potenciálja:

$$\varphi = \frac{W}{Q_1}.$$

$$\varphi = k \frac{Q}{r}.$$

8.5.2 Nem korlátos függvények integrálása

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum minden részintervallumában korlátos és integrálható, és legyen

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty,$$

azaz legyen a függvénynek az intervallum jobb oldali végpontjában végtelen szakadása (8.95 ábra).

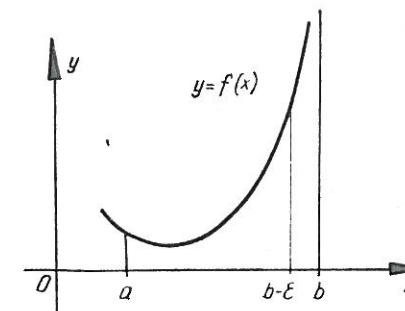
Az $\int_a^b f(x) dx$ improprius integrált a következőképpen értelmezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

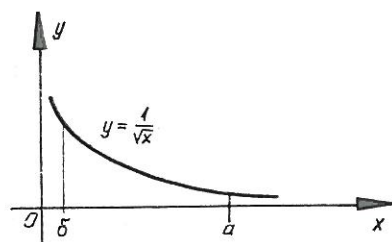
Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban korlátos és integrálható, és legyen:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty,$$



8.95 ábra



8.93 ábra

Az $F(+\infty)$; $F(-\infty)$ jelek szimbólumok, a primitív függvény határértékét jelölik, ha $x \rightarrow +\infty$ és $x \rightarrow -\infty$.

Példák

1. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad a > 0. \quad (8.93 \text{ ábra}).$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^\eta = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\eta} \right) + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

2. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad (a > 0).$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_a^{+\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln |x| \right) - \ln a = +\infty.$$

3. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x}) - 2\sqrt{a} = +\infty.$

Az improprius integrálok a 2. és 3. példában divergens.
Könnyen belátható, hogy az

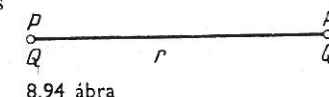
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{improprius integrál} \quad (a > 0)$$

$\alpha > 1$ esetén konvergens, $\alpha \leq 1$ esetén divergens.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\operatorname{Arctg} x \right]_{-\infty}^{+\infty} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctg} x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$

5. Nézzük az improprius integrál alkalmazását egy fizikai példán.
Határozzuk meg valamely Q töltés által keltett elektromos tér potenciálját!
Az egymástól r távolságban elhelyezett Q és Q_1 egynemű töltés között Coulomb törvénye szerint a taszító erő:

$$F = k \frac{QQ_1}{r^2} \quad (8.94 \text{ ábra}).$$



A munka, amelyet a Q töltés végez, ha a Q_1 töltést Δr -rel eltaszítja:

$$W = F\Delta r = k \frac{QQ_1}{r^2} \Delta r.$$

A munka, amelyet Q végez, ha Q_1 -et a végtelenbe taszítja:

$$W = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_r^R k \frac{QQ_1}{r^2} dr = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-k \frac{QQ_1}{r} \right]_r^R = k \frac{QQ_1}{r}.$$

Az elektromos tér potenciálja:

$$\varphi = \frac{W}{Q_1}.$$

$$\varphi = k \frac{Q}{r}.$$

8.5.2 Nem korlátos függvények integrálása

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum minden részintervallumában korlátos és integrálható, és legyen

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty,$$

azaz legyen a függvénynek az intervallum jobb oldali végpontjában végtelen szakadása (8.95 ábra).

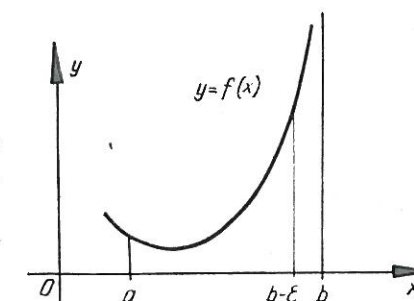
Az $\int_a^b f(x) dx$ improprius integrált a következőképpen értelmezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

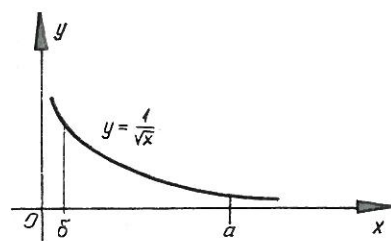
Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban korlátos és integrálható, és legyen:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty,$$



8.95 ábra



8.93 ábra

Az $F(+\infty)$; $F(-\infty)$ jelek szimbólumok, a primitív függvény határértékét jelölik, ha $x \rightarrow +\infty$ és $x \rightarrow -\infty$.

Példák

$$1. \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad a > 0. \quad (8.93 \text{ ábra}).$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^\eta = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\eta} \right) + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

$$2. \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad (a > 0).$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_a^{+\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln |x| \right) - \ln a = +\infty.$$

$$3. \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x}) - 2\sqrt{a} = +\infty.$$

Az improprius integrálok a 2. és 3. példában divergens. Könnyen belátható, hogy az

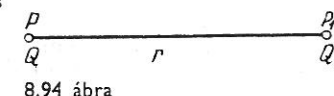
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{improprius integrál} \quad (a > 0)$$

$\alpha > 1$ esetén konvergens, $\alpha \leq 1$ esetén divergens.

$$4. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\operatorname{Arctg} x \right]_{-\infty}^{+\infty} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctg} x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$$

5. Nézzük az improprius integrál alkalmazását egy fizikai példán. Határozzuk meg valamely Q töltés által keltett elektromos tér potenciálját! Az egymástól r távolságban elhelyezett Q és Q_1 egynemű töltés között Coulomb törvénye szerint a taszító erő:

$$F = k \frac{QQ_1}{r^2} \quad (8.94 \text{ ábra}).$$



A munka, amelyet a Q töltés végez, ha a Q_1 töltést Δr -rel eltaszítja:

$$W = F\Delta r = k \frac{QQ_1}{r^2} \Delta r.$$

A munka, amelyet Q végez, ha Q_1 -et a végtelenbe taszítja:

$$W = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_r^R k \frac{QQ_1}{r^2} dr = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-k \frac{QQ_1}{r} \right]_r^R = k \frac{QQ_1}{r}.$$

Az elektromos tér potenciálja:

$$\varphi = \frac{W}{Q_1}.$$

$$\varphi = k \frac{Q}{r}.$$

8.5.2 Nem korlátos függvények integrálása

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum minden részintervallumában korlátos és integrálható, és legyen

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty,$$

azaz legyen a függvénynek az intervallum jobb oldali végpontjában végtelen szakadása (8.95 ábra).

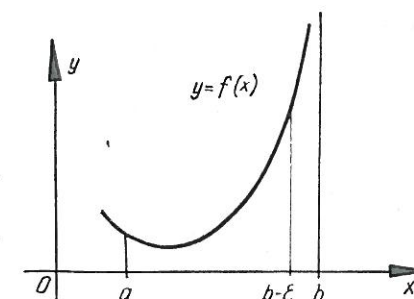
Az $\int_a^b f(x) dx$ improprius integrált a következőképpen értelmezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

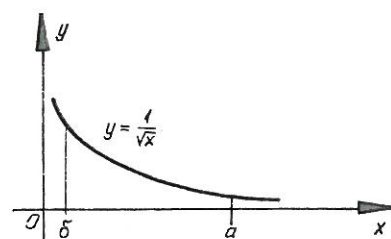
Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban korlátos és integrálható, és legyen:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty,$$



8.95 ábra



8.93 ábra

Az $F(+\infty)$; $F(-\infty)$ jelek szimbólumok, a primitív függvény határértékét jelölik, ha $x \rightarrow +\infty$ és $x \rightarrow -\infty$.

Példák

1. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad a > 0. \quad (8.93 \text{ ábra}).$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^\eta = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\eta} \right) + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

2. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad (a > 0).$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_a^{+\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln |x| \right) - \ln a = +\infty.$$

3. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x}) - 2\sqrt{a} = +\infty.$

Az improprius integrálok a 2. és 3. példában divergens.
Könnyen belátható, hogy az

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{improprius integrál} \quad (a > 0)$$

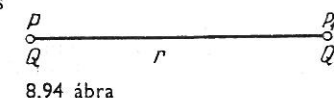
$\alpha > 1$ esetén konvergens, $\alpha \leq 1$ esetén divergens.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\operatorname{Arctg} x \right]_{-\infty}^{+\infty} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctg} x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$$

5. Nézzük az improprius integrál alkalmazását egy fizikai példán.
Határozzuk meg valamely Q töltés által keltett elektromos tér potenciálját!
Az egymástól r távolságban elhelyezett Q és Q_1 egyenmű töltés között Coulomb törvénye szerint a taszító erő:

$$F = k \frac{QQ_1}{r^2} \quad (8.94 \text{ ábra}).$$



A munka, amelyet a Q töltés végez, ha a Q_1 töltést Δr -rel eltaszítja:

$$W = F \Delta r = k \frac{QQ_1}{r^2} \Delta r.$$

A munka, amelyet Q végez, ha Q_1 -et a végtelenbe taszítja:

$$W = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_r^R k \frac{QQ_1}{r^2} dr = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-k \frac{QQ_1}{r} \right]_r^R = k \frac{QQ_1}{r}.$$

Az elektromos tér potenciálja:

$$\varphi = \frac{W}{Q_1}.$$

$$\varphi = k \frac{Q}{r}.$$

8.5.2 Nem korlátos függvények integrálása

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum minden részintervallumában korlátos és integrálható, és legyen

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty,$$

azaz legyen a függvénynek az intervallum jobb oldali végpontjában végtelen szakadása (8.95 ábra).

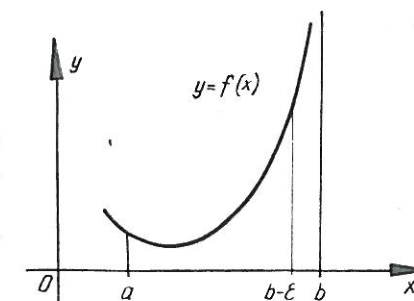
Az $\int_a^b f(x) dx$ improprius integrált a következőképpen értelmezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

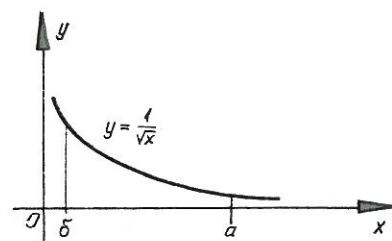
Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban korlátos és integrálható, és legyen:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty,$$



8.95 ábra



8.93 ábra

Az $F(+\infty)$; $F(-\infty)$ jelek szimbólumok, a primitív függvény határértékét jelölik, ha $x \rightarrow +\infty$ és $x \rightarrow -\infty$.

Példák

$$1. \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad a > 0. \quad (8.93 \text{ ábra}).$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^\eta = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\eta} \right) + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

$$2. \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad (a > 0).$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_a^{+\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln |x| \right) - \ln a = +\infty.$$

$$3. \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x}) - 2\sqrt{a} = +\infty.$$

Az improprius integrálok a 2. és 3. példában divergensek. Könnyen belátható, hogy az

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{improprius integrál} \quad (a > 0)$$

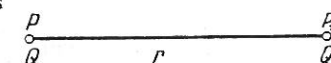
$\alpha > 1$ esetén konvergens, $\alpha \leq 1$ esetén divergens.

$$4. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\operatorname{Arctg} x \right]_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctg} x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$$

5. Nézzük az improprius integrál alkalmazását egy fizikai példán. Határozzuk meg valamely Q töltés által keltett elektromos tér potenciálját! Az egymástól r távolságban elhelyezett Q és Q_1 egynemű töltés között Coulomb törvénye szerint a taszító erő:

$$F = k \frac{QQ_1}{r^2} \quad (8.94 \text{ ábra}).$$



8.94 ábra

A munka, amelyet a Q töltés végez, ha a Q_1 töltést Δr -rel eltaszítja:

$$W = F\Delta r = k \frac{QQ_1}{r^2} \Delta r.$$

A munka, amelyet Q végez, ha Q_1 -et a végtelenbe taszítja:

$$W = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_r^R k \frac{QQ_1}{r^2} dr = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-k \frac{QQ_1}{r} \right]_r^R = k \frac{QQ_1}{r}.$$

Az elektromos tér potenciálja:

$$\varphi = \frac{W}{Q_1}.$$

$$\varphi = k \frac{Q}{r}.$$

8.5.2 Nem korlátos függvények integrálása

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum minden részintervallumában korlátos és integrálható, és legyen

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty,$$

azaz legyen a függvénynek az intervallum jobb oldali végpontjában végtelen szakadása (8.95 ábra).

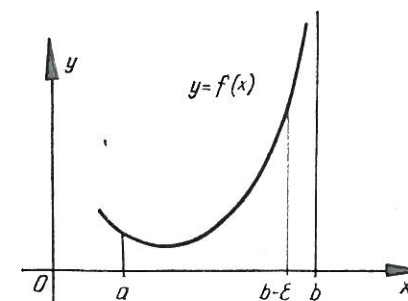
Az $\int_a^b f(x) dx$ improprius integrált a következőképpen értelmezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

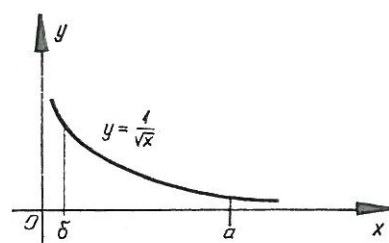
Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban korlátos és integrálható, és legyen:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty,$$



8.95 ábra



8.93 ábra

Az $F(+\infty)$; $F(-\infty)$ jelek szimbólumok, a primitív függvény határértékét jelölik, ha $x \rightarrow +\infty$ és $x \rightarrow -\infty$.

Példák

1. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad a > 0. \quad (8.93 \text{ ábra}).$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^\eta = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\eta} \right) + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

2. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad (a > 0).$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_a^{+\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln |x| \right) - \ln a = +\infty.$$

3. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x}) - 2\sqrt{a} = +\infty.$

Az improprius integrálok a 2. és 3. példában divergens. Könnyen belátható, hogy az

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{improprius integrál} \quad (a > 0)$$

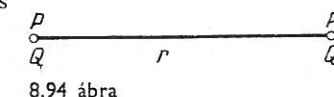
$\alpha > 1$ esetén konvergens, $\alpha \leq 1$ esetén divergens.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\operatorname{Arctg} x \right]_{-\infty}^{+\infty} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctg} x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$$

5. Nézzük az improprius integrál alkalmazását egy fizikai példán. Határozzuk meg valamely Q töltés által keltett elektromos tér potenciálját! Az egymástól r távolságban elhelyezett Q és Q_1 egynemű töltés között Coulomb törvénye szerint a taszító erő:

$$F = k \frac{QQ_1}{r^2} \quad (8.94 \text{ ábra}).$$



8.94 ábra

A munka, amelyet a Q töltés végez, ha a Q_1 töltést Δr -rel eltaszítja:

$$W = F \Delta r = k \frac{QQ_1}{r^2} \Delta r.$$

A munka, amelyet Q végez, ha Q_1 -et a végtelenbe taszítja:

$$W = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_r^R k \frac{QQ_1}{r^2} dr = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-k \frac{QQ_1}{r} \right]_r^R = k \frac{QQ_1}{r}.$$

Az elektromos tér potenciálja:

$$\varphi = \frac{W}{Q_1}.$$

$$\varphi = k \frac{Q}{r}.$$

8.5.2 Nem korlátos függvények integrálása

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum minden részintervallumában korlátos és integrálható, és legyen

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty,$$

azaz legyen a függvénynek az intervallum jobb oldali végpontjában végtelen szakadása (8.95 ábra).

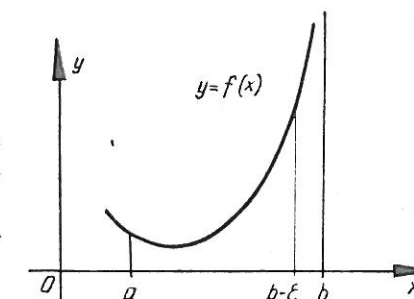
Az $\int_a^b f(x) dx$ improprius integrált a következőképpen értelmezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban korlátos és integrálható, és legyen:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty,$$

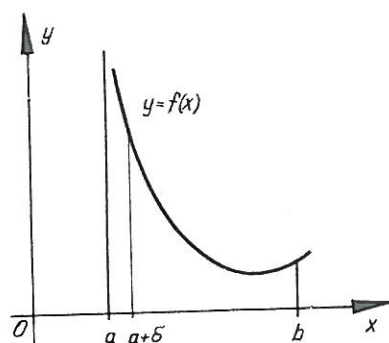


8.95 ábra

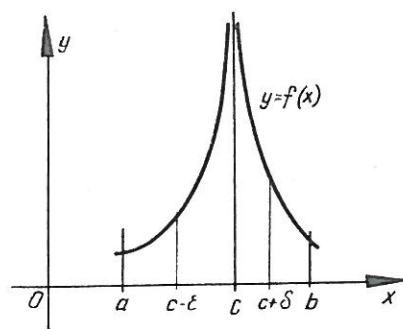
azaz legyen a függvénynek az intervallum bal oldali végpontjában végtelen szakadása (8.96 ábra).

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens.



8.96 ábra



8.97 ábra

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum c pontjában nem korlátos ($a < c < b$), az $[a; c)$ és $(c; b]$ intervallumok bármelyik részintervallumában pedig korlátos és integrálható.

Az $\int_a^b f(x) dx$ integrált a következőképpen értelmezzük (8.97 ábra):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

amikor ε és δ tetszőlegesen és egymástól függetlenül tartanak a zérushoz.

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

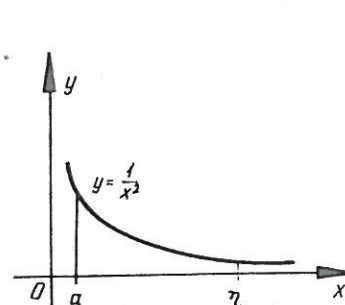
Példák

$$1. \quad \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (2\sqrt{a} - 2\sqrt{\delta}) = 2\sqrt{a}.$$

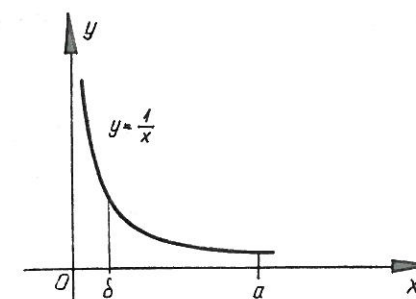
Az integrál konvergens (8.98 ábra).

$$2. \quad \int_0^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln|x|]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln|a| - \ln|\delta|) = +\infty$$

(8.99 ábra)



8.98 ábra



8.99 ábra

Az improprius integrál divergens.

$$3. \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad (8.100 \text{ ábra}).$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[3\sqrt[3]{x} \right]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[3\sqrt[3]{x} \right]_{\delta}^1 = 3 + 3 = 6.$$

Formálisan integrálva:

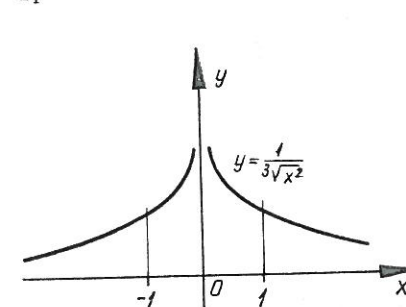
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \left[3\sqrt[3]{x} \right]_{-1}^1 = 3(1+1) = 6.$$

Az azonos eredmény azonban nem igazolja, hogy lehet a határérték vizsgálata nélkül is, formálisan eljárni. Ezt igazolja a következő példa:

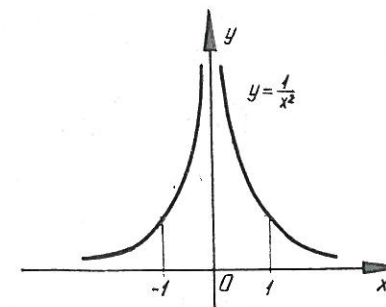
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (8.101 \text{ ábra}).$$

Formálisan eljárva:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$



8.100 ábra

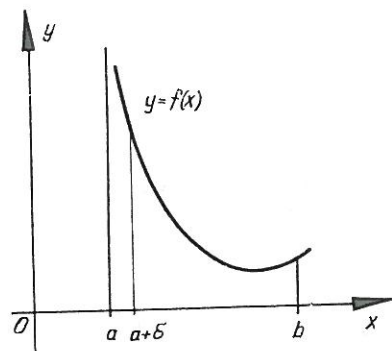


8.101 ábra

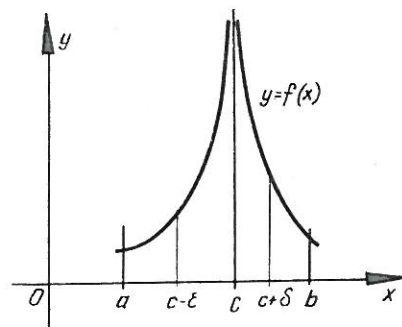
azaz legyen a függvénynek az intervallum bal oldali végpontjában végtelen szakadása (8.96 ábra).

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens.



8.96 ábra



8.97 ábra

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum c pontjában nem korlátos ($a < c < b$), az $[a; c]$ és $(c; b]$ intervallumok bármelyik részintervallumában pedig korlátos és integrálható.

Az $\int_a^b f(x) dx$ integrált a következőképpen értelmezzük (8.97 ábra):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

amikor ε és δ tetszőlegesen és egymástól függetlenül tartanak a zérushoz.

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

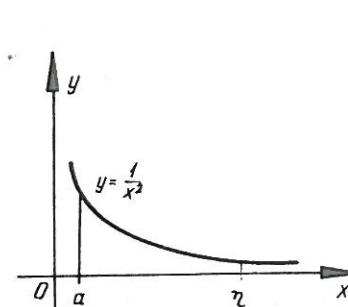
Példák

$$1. \quad \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (2\sqrt{a} - 2\sqrt{\delta}) = 2\sqrt{a}.$$

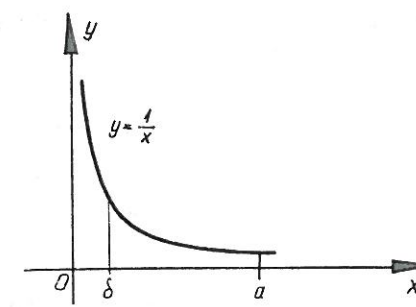
Az integrál konvergens (8.98 ábra).

$$2. \quad \int_0^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln|x|]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln|a| - \ln|\delta|) = +\infty$$

(8.99 ábra)



8.98 ábra



8.99 ábra

Az improprius integrál divergens.

$$3. \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad (8.100 \text{ ábra}).$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} [3\sqrt[3]{x}]_{\delta}^1 = 3 + 3 = 6.$$

Formálisan integrálva:

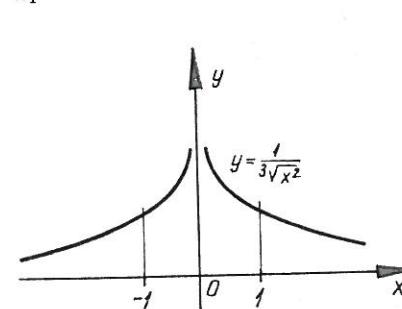
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^1 = 3(1+1) = 6.$$

Az azonos eredmény azonban nem igazolja, hogy lehet a határérték vizsgálata nélkül is, formálisan eljárni. Ezt igazolja a következő példa:

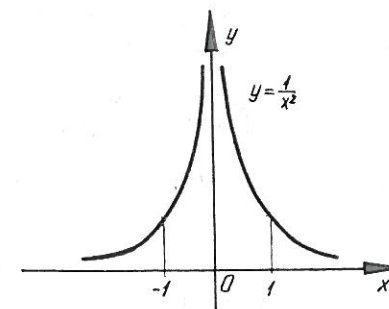
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (8.101 \text{ ábra}).$$

Formálisan eljárva:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$



8.100 ábra

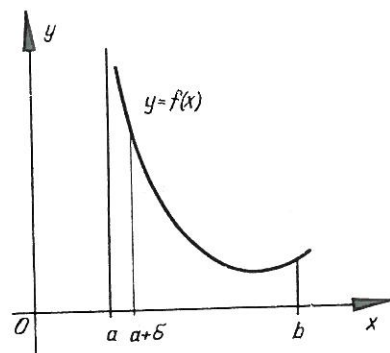


8.101 ábra

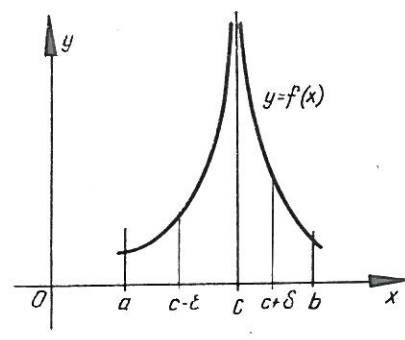
azaz legyen a függvénynek az intervallum bal oldali végpontjában végtelen szakadása (8.96 ábra).

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens.



8.96 ábra



8.97 ábra

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum c pontjában nem korlátos ($a < c < b$), az $[a; c]$ és $(c; b]$ intervallumok bármelyik részintervallumában pedig korlátos és integrálható.

Az $\int_a^b f(x) dx$ integrált a következőképpen értelmezzük (8.97 ábra):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

amikor ε és δ tetszőlegesen és egymástól függetlenül tartanak a zérushoz.

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

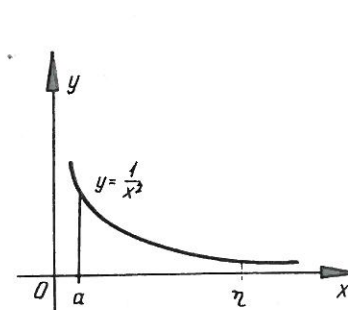
Példák

$$1. \quad \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (2\sqrt{a} - 2\sqrt{\delta}) = 2\sqrt{a}.$$

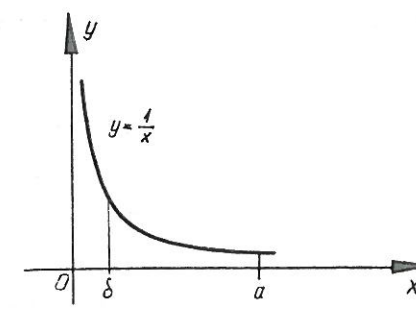
Az integrál konvergens (8.98 ábra).

$$2. \quad \int_0^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln|x|]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln|a| - \ln|\delta|) = +\infty$$

(8.99 ábra)



8.98 ábra



8.99 ábra

Az improprius integrál divergens.

$$3. \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad (8.100 \text{ ábra}).$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} [3\sqrt[3]{x}]_{\delta}^1 = 3 + 3 = 6.$$

Formálisan integrálva:

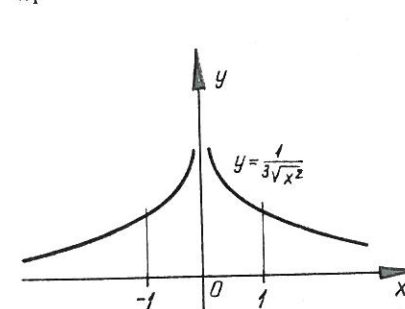
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^1 = 3(1+1) = 6.$$

Az azonos eredmény azonban nem igazolja, hogy lehet a határérték vizsgálata nélkül is, formálisan eljárni. Ezt igazolja a következő példa:

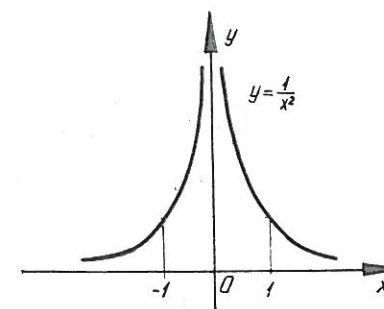
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (8.101 \text{ ábra}).$$

Formálisan eljárva:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$



8.100 ábra

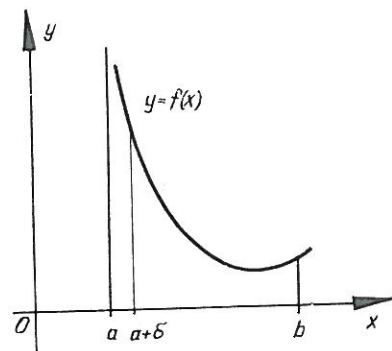


8.101 ábra

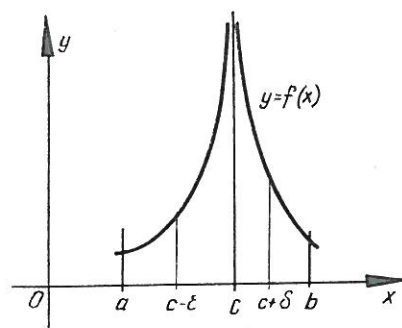
azaz legyen a függvénynek az intervallum bal oldali végpontjában végtelen szakadása (8.96 ábra).

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens.



8.96 ábra



8.97 ábra

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum c pontjában nem korlátos ($a < c < b$), az $[a; c)$ és $(c; b]$ intervallumok bármelyik részintervallumában pedig korlátos és integrálható.

Az $\int_a^b f(x) dx$ integrált a következőképpen értelmezzük (8.97 ábra):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

amikor ε és δ tetszőlegesen és egymástól függetlenül tartanak a zérushoz.

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

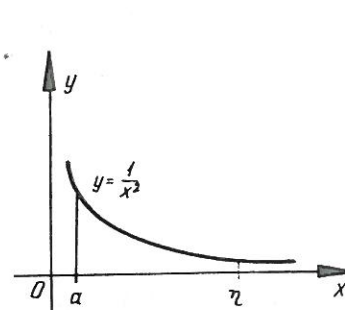
Példák

$$1. \quad \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (2\sqrt{a} - 2\sqrt{\delta}) = 2\sqrt{a}.$$

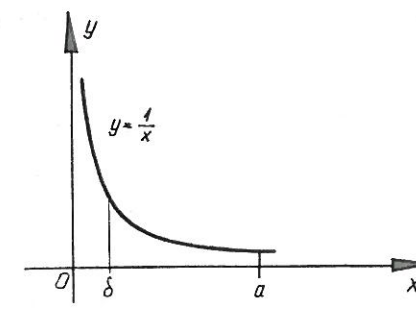
Az integrál konvergens (8.98 ábra).

$$2. \quad \int_0^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln|x|]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln|a| - \ln|\delta|) = +\infty$$

(8.99 ábra)



8.98 ábra



8.99 ábra

Az improprius integrál divergens.

$$3. \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad (8.100 \text{ ábra}).$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} [3\sqrt[3]{x}]_{\delta}^1 = 3 + 3 = 6.$$

Formálisan integrálva:

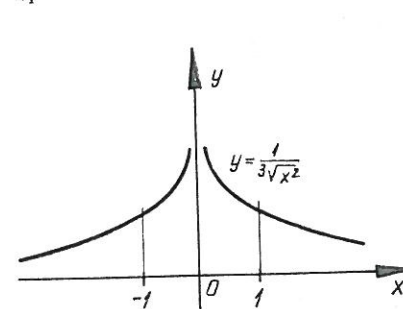
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^1 = 3(1+1) = 6.$$

Az azonos eredmény azonban nem igazolja, hogy lehet a határérték vizsgálata nélkül is, formálisan eljárni. Ezt igazolja a következő példa:

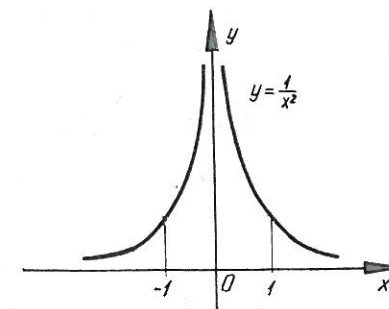
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (8.101 \text{ ábra}).$$

Formálisan eljárva:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$



8.100 ábra

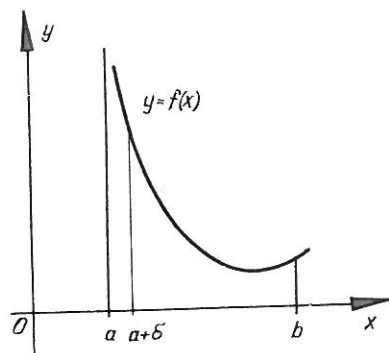


8.101 ábra

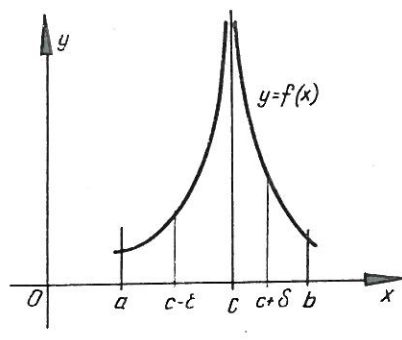
azaz legyen a függvénynek az intervallum bal oldali végpontjában végtelen szakadása (8.96 ábra).

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens.



8.96 ábra



8.97 ábra

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum c pontjában nem korlátos ($a < c < b$), az $[a; c]$ és $(c; b]$ intervallumok bármelyik részintervallumában pedig korlátos és integrálható.

Az $\int_a^b f(x) dx$ integrált a következőképpen értelmezzük (8.97 ábra):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

amikor ε és δ tetszőlegesen és egymástól függetlenül tartanak a zérushoz.

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

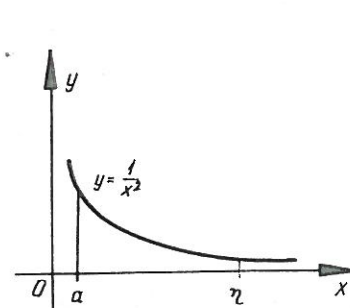
Példák

$$1. \quad \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (2\sqrt{a} - 2\sqrt{\delta}) = 2\sqrt{a}.$$

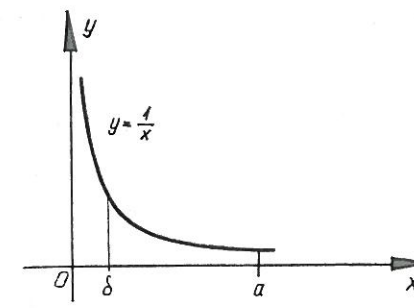
Az integrál konvergens (8.98 ábra).

$$2. \quad \int_0^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln|x|]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln|a| - \ln|\delta|) = +\infty$$

(8.99 ábra)



8.98 ábra



8.99 ábra

Az improprius integrál divergens.

$$3. \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad (8.100 \text{ ábra}).$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} [3\sqrt[3]{x}]_{\delta}^1 = 3 + 3 = 6.$$

Formálisan integrálva:

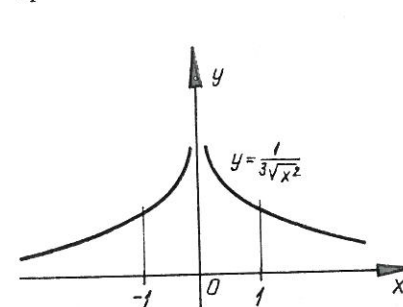
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^1 = 3(1+1) = 6.$$

Az azonos eredmény azonban nem igazolja, hogy lehet a határérték vizsgálata nélkül is, formálisan eljárni. Ezt igazolja a következő példa:

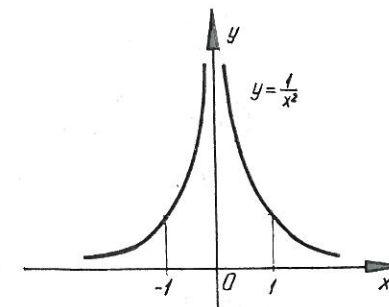
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (8.101 \text{ ábra}).$$

Formálisan eljárva:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$



8.100 ábra

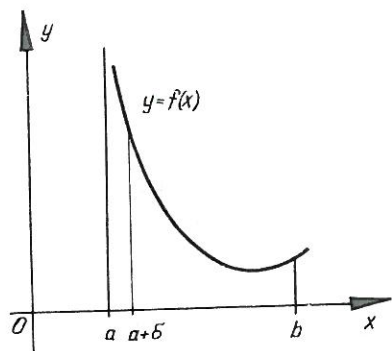


8.101 ábra

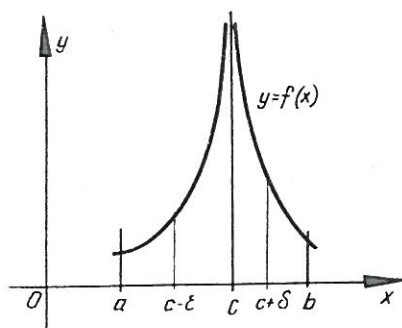
azaz legyen a függvénynek az intervallum bal oldali végpontjában végtelen szakadása (8.96 ábra).

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens.



8.96 ábra



8.97 ábra

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum c pontjában nem korlátos ($a < c < b$), az $[a; c)$ és $(c; b]$ intervallumok bármelyik részintervallumában pedig korlátos és integrálható.

Az $\int_a^b f(x) dx$ integrált a következőképpen értelmezzük (8.97 ábra):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

amikor ε és δ tetszőlegesen és egymástól függetlenül tartanak a zérushoz.

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

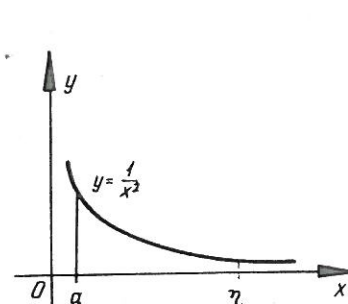
Példák

$$1. \quad \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (2\sqrt{a} - 2\sqrt{\delta}) = 2\sqrt{a}.$$

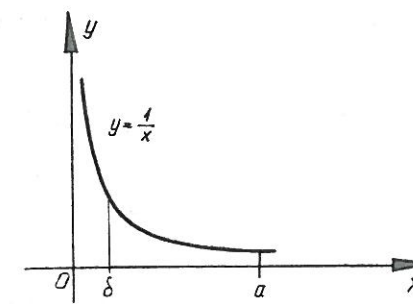
Az integrál konvergens (8.98 ábra).

$$2. \quad \int_0^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln|x|]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln|a| - \ln|\delta|) = +\infty$$

(8.99 ábra)



8.98 ábra



8.99 ábra

Az improprius integrál divergens.

$$3. \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad (8.100 \text{ ábra}).$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} [3\sqrt[3]{x}]_{\delta}^1 = 3 + 3 = 6.$$

Formálisan integrálva:

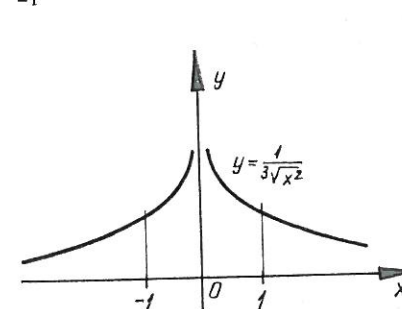
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^1 = 3(1+1) = 6.$$

Az azonos eredmény azonban nem igazolja, hogy lehet a határérték vizsgálata nélkül is, formálisan eljárni. Ezt igazolja a következő példa:

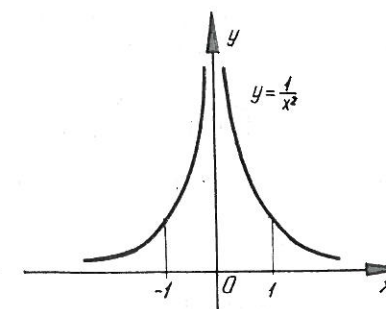
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (8.101 \text{ ábra}).$$

Formálisan eljárva:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$



8.100 ábra

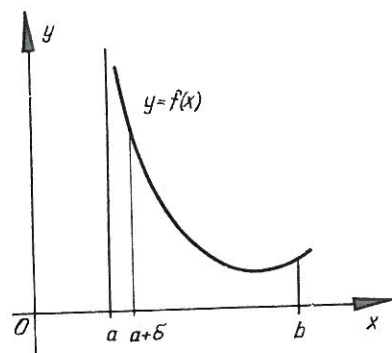


8.101 ábra

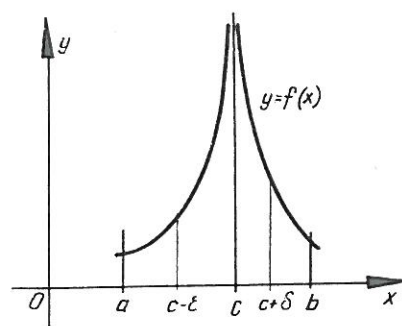
azaz legyen a függvénynek az intervallum bal oldali végpontjában végtelen szakadása (8.96 ábra).

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens.



8.96 ábra



8.97 ábra

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum c pontjában nem korlátos ($a < c < b$), az $[a; c)$ és $(c; b]$ intervallumok bármelyik részintervallumában pedig korlátos és integrálható.

Az $\int_a^b f(x) dx$ integrált a következőképpen értelmezzük (8.97 ábra):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

amikor ε és δ tetszőlegesen és egymástól függetlenül tartanak a zérushoz.

Ha a határérték létezik és véges, az improprius integrál konvergens, ha nem létezik vagy végtelen, az improprius integrál divergens.

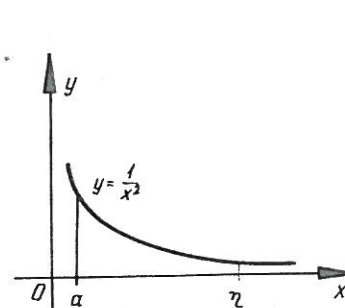
Példák

$$1. \quad \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (2\sqrt{a} - 2\sqrt{\delta}) = 2\sqrt{a}.$$

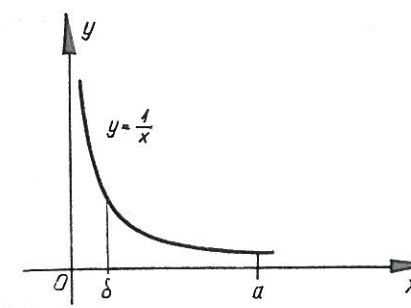
Az integrál konvergens (8.98 ábra).

$$2. \quad \int_0^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln|x|]_{\delta}^a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln|a| - \ln|\delta|) = +\infty$$

(8.99 ábra)



8.98 ábra



8.99 ábra

Az improprius integrál divergens.

$$3. \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad (8.100 \text{ ábra}).$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} [3\sqrt[3]{x}]_{\delta}^1 = 3 + 3 = 6.$$

Formálisan integrálva:

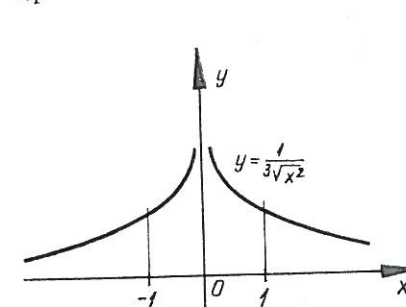
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^1 = 3(1+1) = 6.$$

Az azonos eredmény azonban nem igazolja, hogy lehet a határérték vizsgálata nélkül is, formálisan eljárni. Ezt igazolja a következő példa:

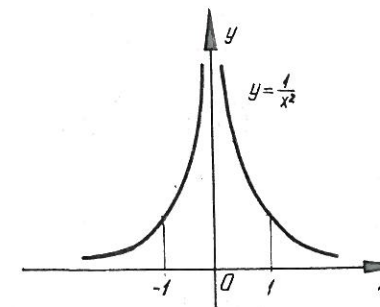
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (8.101 \text{ ábra}).$$

Formálisan eljárva:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$



8.100 ábra



8.101 ábra

A függvény mindenütt pozitív, az integrál negatív értéke nem lehet helyes. Az ok, hogy az improprius integrál divergens.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\delta}^1 = (+\infty - 1) + (-1 - \infty) = +\infty. \end{aligned}$$

8.5.3 Az improprius integrálok konvergenciakritériumai

a) Végtelen intervallumú integrálok konvergenciakritériuma

I. konvergenciakritérium

Tétel. Ha az $y = f(x)$ és $y = g(x)$ függvények a $[a; +\infty)$ intervallum bármely véges rész-intervallumában korlátosak és integrálhatók, és

$$|f(x)| \leq g(x),$$

továbbá az $\int_a^{+\infty} dx$ integrál konvergens,

akkor az

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{improprius integrál is konvergens.}$$

Bizonyítás. Vegyük fel az $a \leq x < +\infty$ intervallumban az $a = \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_i < \dots < \eta_n < \dots$ abszcissa sorozatot, ahol $\eta_n \rightarrow +\infty$.

A feltevés szerint:

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} g(x) dx \quad \text{határérték létezik.}$$

Ez azt jelenti, hogy az

$$\int_a^{\eta_1} g(x) dx; \dots; \int_a^{\eta_i} g(x) dx; \dots; \int_a^{\eta_n} g(x) dx; \dots$$

sorozat konvergens, tehát teljesíti a Cauchy-féle konvergenciakritériumot (lásd 6.1.6 pontot), azaz tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy

$$\left| \int_a^{\eta_m} g(x) dx - \int_a^{\eta_n} g(x) dx \right| = \left| \int_{\eta_n}^{\eta_m} g(x) dx \right| < \varepsilon,$$

ha $n > N(\varepsilon)$ és $m > N(\varepsilon)$ ($m > n$).

Képezzük az

$$\int_a^{\eta_1} f(x) dx; \dots; \int_a^{\eta_i} f(x) dx; \dots; \int_a^{\eta_n} f(x) dx; \dots \quad \text{sorozatot.}$$

Megmutatjuk, hogy az adott feltételek mellett a sorozat konvergens, mert teljesíti a Cauchy-féle konvergenciakritériumot.

A feltétel szerint ugyanis:

$$\left| \int_a^{\eta_m} f(x) dx - \int_a^{\eta_n} f(x) dx \right| = \left| \int_{\eta_n}^{\eta_m} f(x) dx \right| \leq \int_{\eta_n}^{\eta_m} |f(x)| dx \leq \int_{\eta_n}^{\eta_m} g(x) dx < \varepsilon,$$

ha $n > N(\varepsilon)$ és $m > N(\varepsilon)$.

A Cauchy-féle kritérium értelmében a sorozat konvergens, tehát

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_a^{\eta} f(x) dx \quad \text{létezik és véges,}$$

azaz az $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ improprius integrál konvergens.

II. konvergenciakritérium

Tétel. Ha az $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ integrál konvergens,

akkor az $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integrál is konvergens,

és az $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integrált abszolút konvergensnek mondjuk.

Bizonyítás. A tétel az I. tétel speciális esete $g(x) = |f(x)|$ választással.

III. konvergenciakritérium

Tétel. Az $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integrál konvergens, ha létezik olyan M állandó és $m > 1$,

hogy $|f(x)| < \frac{M}{x^m}$

az $a \leq x < +\infty$ intervallumban. (Feltesszük, hogy $a > 0$.)

Bizonyítás. Tekintsük a következő $I(\eta)$ függvényt:

$$\begin{aligned} I(\eta) &= \int_a^{\eta} \frac{M}{x^m} dx = M \left[\frac{x^{-m+1}}{-m+1} \right]_a^{\eta} = \frac{M}{m-1} \left(\frac{1}{a^{m-1}} - \frac{1}{\eta^{m-1}} \right) < \\ &< \frac{M}{(m-1) a^{m-1}}. \end{aligned}$$

Az $I(\eta)$ függvény monoton nő és korlátos, van véges határértéke, ha $\eta \rightarrow +\infty$.

Mivel a feltevés értelmében

$$|f(x)| < \frac{M}{x^m},$$

az I. konvergenciakritérium értelmében $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integrál konvergens.

Tétel. Az $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ improprius integrál divergens, ha létezik olyan M konstans és $m \leq 1$, hogy az $a \leq x < +\infty$ intervallumban

$$|f(x)| \geq \frac{M}{x^m}.$$

Bizonyítás. Ha $m = 1$,

$$I(\eta) = \int_a^\eta |f(x)| dx \geq \int_a^\eta \frac{M}{x} dx = M \left[\ln |x| \right]_a^\eta = M(\ln \eta - \ln a).$$

Ha $\eta \rightarrow +\infty$, $I(\eta) \rightarrow +\infty$.

Ha $m < 1$,

$$I(\eta) = \int_a^\eta f(x) dx = \int_a^\eta \frac{M}{x^m} dx = \frac{M}{1-m} (\eta^{1-m} - a^{1-m}) \rightarrow +\infty.$$

A végtelen intervallumú integrál így írható:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a).$$

Ezért ha a primitív függvényt meg tudjuk határozni, a konvergencia eldöntése

$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} F(\eta)$ határérték vizsgálatából áll.

Ha a primitív függvényt nem tudjuk meghatározni, vagy a meghatározás nehéz, alkalmazzuk a konvergenciakritériumokat.

Példák

1.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3} \sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{x^3} \sqrt{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{13}{6}}}.$$

$$\frac{13}{6} > 1 \quad \text{az integrál konvergens.}$$

2.
$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} > \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}}.$$

$$\frac{1}{6} < 1, \quad \text{az integrál divergens.}$$

3.
$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

konvergens, ha $a > 0$, mert $|\sin x| \leq 1$ és $\frac{3}{2} > 1$.

b) Nem korlátos függvények konvergenciakritériuma

IV. konvergenciakritérium

Tétel. Legyen $\lim_{x \rightarrow b+0} f(x) = +\infty$

Az $\int_a^b f(x) dx$ integrál konvergens, ha létezik olyan M állandó és $m < 1$ szám, hogy az $a \leq x < b$ intervallumban

$$f(x) \leq \frac{M}{(b-x)^m}.$$

Bizonyítás. Tekintsük a következő $I(\varepsilon)$ függvényt:

$$I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \leq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(b-x)^m} dx =$$

$$= \frac{M}{1-m} [(b-a)^{-m+1-\varepsilon^{-m+1}}] < \frac{M}{(1-m)(b-a)^{m-1}}.$$

$I(\varepsilon)$ felülről korlátos. $I(\varepsilon)$ monoton nő, ha $\varepsilon \rightarrow 0$, mert $\lim_{x \rightarrow b+0} f(x) = +\infty$ feltételből következik, hogy elég kicsiny ε esetén $f(x)$ feltétlenül pozitív. Így $I(\varepsilon)$ monoton nő és felülről korlátos, ezért

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon)$ létezik és véges, tehát az $\int_a^b f(x) dx$ improprius integrál konvergens.

Hasonlóan látható be, ha $m \geq 1$

és $f(x) \geq \frac{M}{(b-x)^m}$, az improprius integrál divergens.

Példa

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$f(x) = \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} = g(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

A $g(x) = \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1+x}}$ függvény folytonos a $[0; 1]$ intervallumban.

Van olyan M pozitív szám, hogy

$$g(x) < M, \quad \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$f(x) < \frac{M}{\sqrt{1-x}} = \frac{M}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Tehát az improprius integrál konvergens.

9. VÉGTELEN SOROK

9.1 NUMERIKUS SOROK

Definíció. Az $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n \dots$ végtelen sorozat tagjainak összegét, az $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ végtelen összeget végtelen sornak nevezzük. A végtelen sort így is jelölhetjük:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad \text{vagy}$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

A végtelen sor tagjai: $u_1; u_2; u_3; \dots$

Ha a végtelen sor tagjai számok, az $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ végtelen sor numerikus sor.

A végtelen sor összege. A végtelen sor részletösszegein a következő sorozatot értjük:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2 \\ &\vdots \\ s_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Definíció. A végtelen sor összege a részletösszegek sorozatának határértéke.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

9.1.1 A végtelen sor konvergenciája

Definíció. A végtelen sor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata konvergens. (Ez azt jelenti, hogy a részletösszegek sorozatának van véges határértéke.)

Ha a részletösszegek sorozata divergens (nincs határértéke vagy határértéke végtelen), a végtelen sor divergens.

Példák

1. Az

 $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ végtelen mértani sort a 6.1.6 pontban már vizsgáltuk.

A végtelen mértani sor konvergens, ha

$$|q| < 1, \text{ és összege } S = \frac{a}{1-q}.$$

2. Nézzük a következő végtelen sort

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k} + \dots$$

A sor az ún. *harmonikus sor*.

A sor tagjai csökkennek, a végtelen sor mégis divergens.

Írjuk fel a sort úgy, hogy tagjait csoportosítsuk:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^p+1} + \dots + \frac{1}{2^{p+1}}\right) + \dots$$

A zárójelekben levő csoportok:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \\ &\vdots \\ \left(\frac{1}{2^p+1} + \dots + \frac{1}{2^{p+1}}\right) &> \frac{2^p}{2^{p+1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A csoportokban levő összegek nagyobbak $\frac{1}{2}$ -nél. Így az n -edik részletösszeg, ha abban p csoport van:

$$s_n > \frac{3}{2} + p \cdot \frac{1}{2}.$$

Ha $n \rightarrow \infty$, a csoportok száma $p \rightarrow \infty$, így

$$s_n \rightarrow \infty, \text{ a harmonikus sor divergens.}$$

$$3. \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$$

A sor így írható:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \dots$$

A tagok így írhatók:

$$u_k = \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Az n -edik részletösszeg:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Összevonva:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

A sor tehát konvergens, összege 1.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \dots = 1.$$

A konvergencia szükséges feltétele**Tétel.** A végtelen sor konvergenciájának *szükséges feltétele*, hogy tagjai $n \rightarrow \infty$ esetén zérushoz tartanak.**Bizonyítás.** Az n -edik részletösszeg:

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n.$$

Az $(n-1)$ -edik:

$$s_{n-1} = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}.$$

$$u_n = s_n - s_{n-1}.$$

Ha a sor konvergens, a részletösszegek sorozatának van véges határértéke.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S, \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = S.$$

$$\text{Így } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0.$$

Például a végtelen mértani sor;

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots,$$

amint bizonyítottuk $|q| < 1$ esetén konvergens, ekkor $u_n \rightarrow 0$, $|q| \geq 1$ esetén divergens, ekkor pedig

$$|u_n| = |a| |q|^{n-1} \geq a,$$

tehát $|q| \geq 1$ esetén u_n nem tart nullához.A konvergenciának azonban az $u_n \rightarrow 0$ feltétel *nem* elégséges feltétele. Erre példa a harmonikus sor, ahol $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, és a harmonikus sor mégis divergens.**Sorok konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele és Cauchy tétele**Az $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha megadva az $\varepsilon > 0$ számot, található olyan $N = N(\varepsilon)$ szám, hogy

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

ha $n > N(\varepsilon)$, és p pozitív egész szám.