

## 6 A HATÁRÉRTÉK

### 6.1 SZÁMSOROZATOK HATÁRÉRTÉKE

#### 6.1.1 A számsorozat

##### A számsorozat fogalma

**Definíció.** Az olyan hozzárendelés, amely minden természetes számhoz egy-egy számot rendel, számsorozatot határoz meg.

Számsorozatok például a következő sorozatok:

1.  $1; 2; 3; 4; 5; \dots$
2.  $1; 3; 5; 7; \dots$
3.  $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$
4.  $\frac{1}{1}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{9}; -\frac{1}{16}; \dots$
5.  $1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 2; \sqrt{5}; \dots$

A sorozatban szereplő egyes számok a sorozat tagjai vagy elemei.

A sorozatban szereplő  $\dots$  jel így olvasandó: „és így tovább”.

Egy végtelen számsorozatot akkor határoztunk meg, ha megadtuk azokat a képzési szabályokat, amelyek a sorozat bármelyik tagját meghatározzák. A sorozatot olyan függvénynek tekintjük, amelynek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza.

**A sorozat jelölése.** A sorozat tagjait indexszel ellátott azonos betűkkel jelöljük.

Sorozatot jelentenek például az

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots; \\ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots; \\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \end{aligned} \quad \text{jelölések.}$$

Hogy  $a_n$  egy számsorozat  $n$ -edik tagja, azt  $\{a_n\}$ -nel jelöljük. Az  $\{a_n\}$  kifejezésben az  $n$  index azt mutatja, hogy  $a_n$  a sorozat  $n$ -ik tagja.

Például: a  $2; 4; 6; 8; \dots$  számsorozatot így jelöljük:

$$a_n = 2n, \quad \text{ahol } n = 1, 2, 3, \dots$$

vagy röviden

$$\{a_n\} = 2n, \quad \text{vagy } \{2n\}.$$

**Számsorozat megadása.** a) A számsorozatot sokszor egyetlen formulával is jellemezhetjük. Így a fejezet elején megadott számsorozatok képlettel így írhatók le:

1.  $a_n = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
2.  $a_n = 2n-1, \quad n = 1; 2; 3; \dots$
3.  $a_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1; 2; 3; \dots$
4.  $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
5.  $a_n = \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Ugyanazt a számsorozatot különböző képletekkel is megadhatjuk. Például az

$$a_n = \frac{1}{2n-1}, \quad n = 1; 2; 3; \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{2k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

képletek ugyanazt az  $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \dots$  számsorozatot jelentik.

b) A számsorozatot megadhatjuk utasítással is. Például az

$$1; \frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{4}; 1; \frac{1}{6}; 1; -\frac{1}{8}; \dots$$

számsorozatot a következő utasítással adhatjuk meg: a páratlan indexű helyeken álló tagok mindegyike 1, a páros indexű helyeken a páros számok reciprokai állnak, méghozzá váltakozó előjellel.

c) A sorozat tagjait megadhatjuk *rekurzió*val. Megadjuk a sorozatnak első (vagy első néhány) tagját, és megadjuk egy eljárást, amely a már megadott tagok segítségével a következőt meghatározza.

##### Példák

1.  $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1.$

A sorozat tagjai:

$$4; 3; \frac{5}{2}; \frac{9}{4}; \dots$$

2. A sorozat első három tagja 1; 4; 7. Minden következő az előző két tag összege.

A sorozat:

$$1; 4; 7; 11; 18; 29; \dots$$

Képletben:  $a_1 = 1; a_2 = 4; a_3 = 7$  és  $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ , ha  $n > 3$ .

3. A számtani sorozat:

A sorozat első tagja  $a$ , minden többi tag az előzőből egy adott  $d$  szám hozzáadásával keletkezik:

$$a_1 = a; a_n = a_{n-1} + d, \quad (n \geq 2).$$

A sorozat:

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d; \dots$$

4. A mértani sorozat első tagja  $a$ , minden többi tag az előzőből egy adott  $q$  számmal való szorzással keletkezik:

$$a_1 = a; a_n = a_{n-1}q, \quad (n \geq 2).$$

A sorozat:

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$$

## 6.1.2 Monoton sorozatok

**Definíció.** A számsorozat *monoton nő*, ha bármelyik tagja nem kisebb az előzőnél:

$$a_{n+1} \geq a_n.$$

A számsorozat *monoton fogy*, ha bármelyik tagja nem nagyobb az előzőnél:

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

A számsorozat *szigorúan monoton növekvő*, ha minden tagja nagyobb az előzőnél:

$$a_{n+1} > a_n.$$

A számsorozat *szigorúan monoton fogyó*, ha minden tagja kisebb az előzőnél:

$$a_{n+1} < a_n.$$

### Példák

1.  $1; 4; 9; 16; \dots; n^2; \dots$

A számsorozat szigorúan monoton nő.

2.  $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \dots; \frac{n+1}{n}; \dots$

A számsorozat szigorúan monoton fogy.

3.  $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$

A számsorozat nem monoton.

## 6.1.3 Sorozatok korlátossága

**Definíció.** Egy számsorozat alulról korlátos, ha van olyan  $K_1$  szám, amelynél a számsorozat minden tagja nagyobb vagy egyenlő, azaz

$$K_1 \leq a_n, \quad \text{minden } n\text{-re.}$$

Egy számsorozat felülről korlátos, ha van olyan  $K_2$  szám, amelynél a számsorozat minden tagja kisebb vagy egyenlő, azaz

$$a_n \leq K_2.$$

Az olyan számsorozat, amely alulról és felülről is korlátos, *korlátos számsorozat*.

### Példák

1.  $\{a_n\} = 1; 3; 5; 7; \dots$

A számsorozat alulról korlátos.

2.  $a_n = \frac{n+1}{n}$ , azaz

$$\{a_n\} = 2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \dots; 1 + \frac{1}{n}; \dots$$

A sorozat alulról és felülről korlátos. A legnagyobb alsó, illetve legkisebb felső korlátok:

$$K_1 = 1, \quad K_2 = 2.$$



6.1 ábra

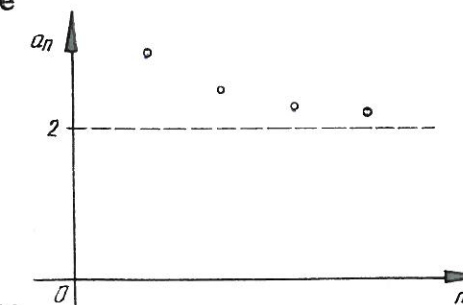
## 6.1.4 Sorozatok határértéke

Vizsgáljuk a következő sorozatot:

1.  $a_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$ .

A sorozat

$$3; \frac{5}{2}; \frac{7}{3}; \frac{9}{4}; \frac{11}{5}; \dots$$



6.2 ábra

A sorozat vizsgálatát megkönnyíti, ha néhány tagját ábrázoljuk. A sorozat tagjait vagy a számegyenesen ábrázoljuk, vagy mint olyan függvényt, amely csak a pozitív egész számokra van értelmezve (6.1 és 6.2 ábra).

Mivel

$$a_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n},$$

a sorozat tagjai  $n$  növekedésével csökkennek, egyre jobban megközelítik a 2 számot. Ez azt



unk bármilyen kis számot, és  $n$  elég nagy, a sorozat  $n$ -nél nagyobb  
 ímtól való eltérése abszolút értékben kisebb lesz, mint ez az előre  
 z előre megadott különbség  $\frac{1}{10^6}$ .

$$\left| 2 - \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10^6}$$

feltétel teljesül, ha  $n > 10^6$ .

Azt mondjuk, hogy az

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{2n+1}{n} \right\}$$

sorozat határértéke 2.

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2.$$

Olvasva: limesz  $\frac{2n+1}{n}$ , ha  $n$  tart a végtelenhez egyenlő 2. (Limes = határérték.)

**Definíció.** Az  $a_1, a_2, a_3, \dots; a_n; \dots$

számsorozat határértéke  $A$ , ha megadva bármilyen kis pozitív  $\varepsilon$  számot, ahhoz található olyan  $N$  szám úgy, hogy

$$|A - a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

Az  $n > N(\varepsilon)$  feltétel azt jelenti, hogy ha elég messze megyünk a sorozatban, azaz elhagyjuk az első  $N$  tagot, a sorozat minden tagja a határértéket  $\varepsilon$ -nál kisebb hibával közelíti meg. Hogy milyen sok tagot kell elhagyni, az  $\varepsilon$ -tól függ.  $N(\varepsilon)$   $N$ -nek, a „küszöbszám”-nak  $\varepsilon$ -tól való függését jelöli.

Más jelölésben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

azt jelenti, hogy bármely  $\varepsilon > 0$  esetén

$$|A - a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

A határérték utóbbi definíciója azt jelenti, hogy a sorozat tagjai véges számú kivétellel az  $A$  szám  $\varepsilon$  sugarú környezetébe, azaz az  $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$  intervallumba esnek (6.3 ábra). A véges határértékkel rendelkező sorozatot *konvergensnek* nevezzük.

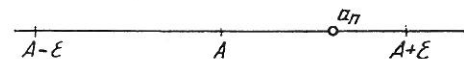
**Tétel.** Konvergens sorozatnak csak egy határértéke lehet.

**Bizonyítás.** A tétel bizonyítását *indirekt módszerrel* végezzük.

Tegyük fel, hogy az

$$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$$

konvergens sorozatnak két határértéke van:  $A_1$  és  $A_2$  ( $A_1 \neq A_2$ ).



6.3 ábra

A  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A_1$  határérték azt jelenti, hogy bármely kis  $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan  $N_1(\varepsilon)$ , hogy

$$|A_1 - a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_1 \quad (\text{ahol } N_1 = N_1(\varepsilon)).$$

Ez azt jelenti, hogy  $N_1$ -től kezdve a sorozat minden tagjára igaz:

$$A_1 - \varepsilon < a_n < A_1 + \varepsilon.$$

Hasonlóan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A_2$$

azt jelenti, hogy az  $\varepsilon > 0$  számot megadva található olyan  $N_2(\varepsilon)$ , hogy

$$|A_2 - a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_2 \quad (\text{ahol } N_2 = N_2(\varepsilon)),$$

vagyis

$$A_2 - \varepsilon < a_n < A_2 + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_2.$$

Válasszuk meg az  $\varepsilon > 0$  számot úgy, hogy

$$\varepsilon < \frac{A_2 - A_1}{2} \text{ legyen.}$$

$\varepsilon$ -t így választva biztosítjuk, hogy az  $(A_1 - \varepsilon; A_1 + \varepsilon)$  és az  $(A_2 - \varepsilon; A_2 + \varepsilon)$  intervallumoknak nincs közös pontjuk.

Legyen  $N$  az  $N_1$  és  $N_2$  számok közül a nagyobb. Ekkor a határérték definíciója szerint az  $N$  indextől kezdve a sorozat valamennyi tagja egyrészt az  $(A_1 - \varepsilon; A_1 + \varepsilon)$  intervallumban, másrészt az  $(A_2 - \varepsilon; A_2 + \varepsilon)$  intervallumban lenne. Minthogy az intervallumoknak nincs közös pontjuk, ez lehetetlen. Tehát konvergens sorozatnak csak egy határértéke lehet.

Például az

$$1; \frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{3}; 1; \frac{1}{4}; 1; -\frac{1}{5}; \dots$$

sorozatban a páratlan helyen álló tagok határértéke 1, a páros helyen állóké 0, a sorozatnak *nincs* határértéke.

## Példák

1. Nézzük újra az

$$a_n = 2 + \frac{1}{n} \text{ sorozatot!}$$

A határérték 2, mert megadva bármilyen kis  $\varepsilon > 0$  számot, ehhez mindig találunk olyan  $N = N(\varepsilon)$  küszöbszámot, hogy

$$|2 - a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N.$$

$$\left| 2 - \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \right| < \varepsilon, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ha

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Az  $N = N(\varepsilon)$  küszöbszám az  $\frac{1}{\varepsilon}$  után következő természetes szám.

$$2. \quad a_n = \frac{2n+1}{3n-2}.$$

A sorozat néhány tagja:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = \frac{5}{4}; \quad a_3 = \frac{7}{7} = 1, \quad a_4 = \frac{9}{10}.$$

Bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke  $\frac{2}{3}$ .

$$\left| \frac{2}{3} - a_n \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{2n+1}{3n-2} \right| = \left| \frac{6n-4-6n-3}{3(3n-2)} \right| = \left| \frac{-7}{9n-6} \right|.$$

$n$ -et úgy akarjuk meghatározni, hogy a határértéktől való eltérés abszolút értéke tetszőleges kis  $\varepsilon > 0$  számnál kisebb legyen:

$$\frac{7}{9n-6} < \varepsilon.$$

(A tört értéke pozitív, az abszolút érték jele elhagyható.)

Mivel

$$\frac{7}{9n-6} < \frac{7}{8n} \quad (\text{ha } n > 6),$$

elég  $n$ -et úgy meghatározni, hogy a

$$\frac{7}{8n} < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesüljön. Mindkét oldal pozitív, ezért

$$\frac{8n}{7} > \frac{1}{\varepsilon}, \\ n > \frac{7}{8\varepsilon}.$$

Tehát a küszöbindex,  $N(\varepsilon)$  a  $\frac{7}{8\varepsilon}$  után következő egész szám. Jól látható, hogy a küszöbindex,  $N(\varepsilon)$  hogyan függ a tetszőlegesen megadott pozitív  $\varepsilon$  számtól. Hasonlóan egyszerűen megtalálhatók a következő sorozatok határértékei:

$$3. \quad 1; 0,1; 0,01; \dots; 10^{-n}; \dots \\ a_n = 10^{-n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$4. \quad 1; \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{2}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \frac{1}{3}; \frac{1}{10}; \dots$$

A sorozatot úgy hoztuk létre, hogy az

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$$

sorozat minden harmadik tagját 3-mal megszoroztuk.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$5. \quad 7; 7; 7; \dots$$

A tagok egyenlők, a sorozat határértéke is 7.

$$6. \quad 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{4}{5}; \dots$$

Minden második tag az előző reciproka értéke.

Könnyen belátható, hogy a páratlan indexű tagok és a páros indexű tagok sorozatának határértéke egyaránt 1, a sorozat határértéke 1.

$$7. \quad a_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

A sorozat:

$$-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \dots$$

A sorozat *alternáló*, a tagok előjele változik. A sorozatnak mégis van határértéke, a tagok 0-tartanak.

$$|A - a_n| = \left| 0 - (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ha  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , azaz  $N(\varepsilon)$  az  $\frac{1}{\varepsilon}$  után következő természetes szám.

**Végtelen mint határérték.** Vegyük az  $a_n = n^2$  sorozatot!

A sorozat

$$1; 4; 9; \dots; n^2; \dots$$

E sorozat tagjai minden határon túl nőnek. Ez azt jelenti, hogy ha bármilyen nagy szám adunk meg, mindig találunk olyan küszöbindexet, amelytől kezdve a sorozat minden tagja nagyobb, mint ez a megadott szám.

Ha például megadjuk az  $M = 10^6$  számot, milyen  $n$ -re teljesül az

$$a_n > M \quad \text{feltétel?} \\ a_n = n^2 > 10^6.$$

Ez teljesül, ha  $n > 10^3$ .

**Definíció.** Az  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  sorozat határértéke plusz végtelen, jelben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

ha megadva bármilyen nagy  $M$  számot

$$a_n > M, \quad \text{ha } n > N(M).$$

**Definíció.** Az  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  sorozat határértéke mínusz végtelen, jelben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

ha megadva bármilyen nagy  $M$  pozitív számot

$$a_n < -M, \quad \text{ha } n > N(M).$$



## Példák

1.  $-1; -3; -5; \dots; -(2n-1); \dots,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

2.  $a_n = (-1)^{n+1} n^2.$

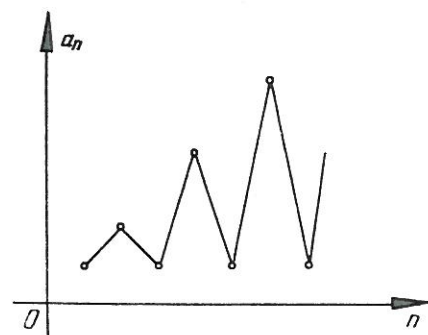
A sorozat

$$1; -4; 9; -16; \dots$$

A sorozatnak nincs határértéke.

3.  $1; 2; 1; 4; 1; 6; 1; 8; \dots$

A páratlan helyeken álló számok értéke 1, a páros helyen a páros számok állnak (6.4. ábra). A sorozatnak nincs határértéke.



6.4 ábra

## Összefoglalva

1. Végtelen számsorozatnak lehet határértéke, és az lehet véges vagy végtelen.

2. Van olyan végtelen számsorozat, amelynek nincs határértéke.

*Az olyan sorozat, amelynek van véges határértéke, konvergens sorozat.*

*Az olyan sorozat, amelynek határértéke végtelen, vagy amelynek nincs határértéke, divergens sorozat.*

**Nullsorozatok.** Az  $a_1, a_2, \dots, a_n; \dots$  számsorozat **nullsorozat**, ha határértéke 0, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

A határérték definíciója szerint ez azt jelenti, hogy

$$|a_n - 0| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N \quad (\text{ahol } N = N(\varepsilon)).$$

A sorozat tehát nullsorozat, ha

$$|a_n| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon) \text{ esetén.}$$

## 6.1.5 Műveletek sorozatokkal

Legyen az

$a_1, a_2, a_3, \dots; a_n; \dots$  sorozat határértéke  $A$ , illetve

a  $b_1, b_2, b_3, \dots; b_n; \dots$  sorozat határértéke  $B$ , azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B,$$

és jelentsen  $C$  tetszőleges állandót.

Érvényesek a következő tételek:

I.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B.$

II.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot a_n) = C \cdot A.$

III.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B.$

IV.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B.$

V.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}, \quad \text{ha } B \neq 0.$

A tételek közül csak az I. és IV. tételt igazoljuk.

**Tétel.** Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

**Bizonyítás.** A feltétel szerint

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } n > N_1(\varepsilon),$$

$$|B - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } n > N_2(\varepsilon).$$

Az összeg abszolút értékére vonatkozó egyenlőtlenség értelmében:

$$|(A+B) - (a_n + b_n)| \leq |A - a_n| + |B - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N$$

[ahol  $N$  az  $N_1(\varepsilon)$  és  $N_2(\varepsilon)$  küszöbszámok közül a nagyobb].

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

**Tétel.**

Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ ,

akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B.$

**Bizonyítás.** E tétel bizonyításához előbb megmutatjuk, hogy *bármely konvergens sorozat korlátos.*

Legyen az  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  sorozat konvergens és határértéke  $A$ . A konvergencia definíciója szerint ez azt jelenti, hogy bármely kis  $\varepsilon$  pozitív számhoz található olyan  $N(\varepsilon)$  küszöbindex, hogy

$$|A - a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

Az  $\varepsilon = 1$  választással tehát bizonyos  $N$  indextől kezdve

$$|A - a_n| < 1.$$

Az  $|A - a_1|, |A - a_2|, \dots, |A - a_N|$  számok közül legyen a legnagyobb  $G$ .

$$\text{Így} \quad |A - a_n| \leq G < G + 1, \quad \text{ha } n = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{és} \quad |A - a_n| < 1 < G + 1, \quad \text{ha } n > N.$$

Tehát minden  $|A - a_n|$ -re igaz:

$$|A - a_n| < G + 1.$$

$$\text{Legyen} \quad K = |A| + G + 1.$$

$$\text{Mivel} \quad |A - a_n| = |a_n - A| \leq |a_n| + |A|,$$

$$\text{így} \quad |a_n| < |A| + G + 1 = K,$$

azaz  $|a_n| < K$ ; a sorozat korlátos.

Térjünk vissza a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

határérték igazolásához!

Bebizonyítottuk, hogy a konvergens sorozat korlátos, ezért van olyan  $K$ , hogy  $|b_n| < K$ .

Írjuk fel az  $|AB - a_n \cdot b_n|$  értéket átalakított formában:

$$\begin{aligned} |AB - a_n \cdot b_n| &= |AB - b_n A + b_n A - a_n \cdot b_n| \leq \\ &\leq |AB - b_n A| + |b_n A - a_n b_n| = \\ &= |A| |B - b_n| + |b_n| |A - a_n|. \end{aligned}$$

Az  $\{a_n\}$  és  $\{b_n\}$  sorozatok konvergenciája miatt:

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \text{ha } n > N',$$

$$|B - b_n| < \frac{\varepsilon}{2|A|}, \quad \text{ha } n > N''.$$

Legyen  $N$  az  $N'$  és  $N''$  küszöbszámok közül a nagyobbik.

$$|AB - a_n b_n| \leq |A| \frac{\varepsilon}{2|A|} + K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon, \quad \text{ha } n > N.$$

$$\text{Tehát} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = AB.$$

Az összegre és a szorzatra vonatkozó I., illetve IV. tétel véges számú összeadandóra, illetve tényezőre is érvényes.

Ebből kifolyólag,

$$\text{VI.} \quad \text{ha} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A,$$

$$\text{akkor} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^m = A^m.$$

VII. Ha az  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  és  $\{c_n\}$  sorozatokról tudjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A,$$

$$\text{és} \quad a_n < c_n < b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\text{akkor} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A.$$

A tétel érvényessége a határérték fogalmából adódik.

**Végtelenbe divergáló sorozatokra vonatkozó tételek.** Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételeket:

$$\text{a) Ha} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A,$$

$$\text{akkor} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } A > 0, \\ -\infty, & \text{ha } A < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

$$\text{b) Ha} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty,$$

$$\text{akkor} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty.$$

$$\text{c) Ha} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty,$$

$$\text{akkor} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = +\infty,$$

$$\text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty.$$



d) Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ,  $b_n > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),

akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } A > 0 \\ -\infty, & \text{ha } A < 0. \end{cases}$

e) Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ ,

akkor a határérték-tételek alapján e határértékek ismeretében

az  $\{a_n - b_n\}$ , illetve  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$

sorozatok határértékéről nem tudunk semmit sem mondani. Lehet, hogy a sorozatoknak van határértékük, lehet, hogy nincs.

f) Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ,

akkor az  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  sorozat határértékéről a határérték-tételek alapján semmit sem tudunk megállapítani.

#### Példák

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{5n^2 - 4}$

A számlálóból és nevezőből kiemeljük  $n$  legmagasabb hatványát, majd egyszerűsítünk.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{5n^2 - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right)}{n^2 \left(5 - \frac{4}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{5 - \frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

(mivel  $\frac{3}{n}$ ,  $\frac{5}{n^2}$  és  $\frac{4}{n^2}$  nullsorozatok).

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n}{-2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 - \frac{3}{n^2}\right)}{n \left(-2 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)}{\left(-2 + \frac{1}{n}\right)} = -\infty$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt{n})$

A különbség mindkét tagja  $+\infty$ -hez tart.  
A kifejezést átalakítjuk:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+a} - \sqrt{n})(\sqrt{n+a} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+a-n}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n}} = 0. \end{aligned}$$

2020.05.15. 16.05.2020

## 6.1.6 Konvergenciakritériumok

Sorozatok határértékeire érvényesek a következő konvergenciakritériumok (tételek):

I. *Monoton korlátos sorozat konvergens.*

Felülről korlátos valós számhalmaznak van egy és csakis egy legkisebb felső korlátja (más-  
képpen pontos felső korlátja vagy felső határa) (lásd a 5.1-ben).

Legyen a monoton növekvő sorozat legkisebb felső korlátja  $L$ . Legyen továbbá  $\varepsilon$  tetszőleges pozitív szám.

Mivel  $L$  legkisebb felső korlát,  $L - \varepsilon$  már nem az, tehát a sorozatnak van olyan tagja, amely  $L - \varepsilon$ -nél nagyobb. Legyen ez a tag  $a_N$ .

$$L - \varepsilon < a_N.$$

A sorozat monoton nő, ezért

$$L - \varepsilon < a_n, \quad \text{ha } n > N.$$

Mivel  $L$  felső korlát

$$a_n \leq L, \quad \text{azaz } a_n < L + \varepsilon.$$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon,$$

$$\text{azaz } |L - a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N,$$

tehát a sorozatnak van határértéke, és ez a határérték az  $L$  szám.

II. *A Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel*

**Tétel.** Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

**Bizonyítás.** Először megmutatjuk, hogy minden számsorozatnak van monoton részsorozata.

Nevezzük a sorozat  $a_n$  tagját csúcsnak, ha  $m \geq n$  esetén  $a_n \geq a_m$ .

Két esetet különböztetünk meg:

1. A sorozatban végtelen sok csúc van. Ekkor a csúcsok sorozata monoton fogyó részsorozat.

2. A sorozatban csak véges sok csúc van. Ekkor van olyan  $N$  index, hogy  $n > N$  esetén  $a_n$  nem csúc.

Legyen  $n_1 = N + 1$ .

Mivel  $a_{n_1}$  nem csúc, van olyan  $n_2 > n_1$  index, hogy

$$a_{n_1} < a_{n_2}.$$

Mivel  $n_2 > N$ ,  $a_{n_2}$  sem csúc, van olyan  $n_3$  index, hogy

$$a_{n_2} < a_{n_3} < \dots$$



Teljes indukcióval kiválasztható egy

$$a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \dots < a_{n_k} < \dots$$

monoton növekvő részsorozat.

Ha az eredeti sorozat korlátos, akkor természetesen a kiválasztott monoton részsorozat is korlátos, ez azonban az I. tétel értelmében konvergens.

### III. A Cauchy-féle konvergenciakritérium (CAUCHY francia matematikus, 1789–1857.)

**Tétel.** Az  $\{a_n\}$  sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden  $\varepsilon > 0$  számhoz található olyan  $N(\varepsilon)$  küszöbindex, hogy

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) \quad \text{és} \quad m > N(\varepsilon).$$

**Bizonyítás.** A tételnek először azt a részét bizonyítjuk, hogy a konvergens sorozat eleget tesz az előbb említett követelménynek.

Konvergens sorozat esetén bármelyik kis  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  számhoz található olyan  $N = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  küszöb, hogy

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } n > N.$$

Ugyanígy:

$$|A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } m > N(\varepsilon).$$

Így

$$|a_n - a_m| = |(A - a_m) - (A - a_n)| \leq |A - a_m| + |A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Most bebizonyítjuk, hogy ha minden  $\varepsilon$ -hoz található olyan  $N(\varepsilon)$  küszöbindex, hogy  $n > N(\varepsilon)$ ,  $m > N(\varepsilon)$  esetén

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

akkor a sorozat konvergens.

A bizonyítás első lépéseként megmutatjuk, hogy egy ilyen tulajdonságú sorozat korlátos. Tekintsük az  $\varepsilon = 1$ -hez tartozó  $N(1)$  küszöbindexet, és legyen  $n_0 = N(1) + 1$ .

Ekkor  $n \geq n_0$  esetén

$$|a_n - a_{n_0}| < 1.$$

Vagyis a sorozat  $n_0$ -nál nagyobb indexű tagjai az  $a_{n_0}$  körüli egységnyi sugárral rajzolt intervallumba esnek. Ezért a sorozatnak az  $n_0$ -nál nagyobb indexű tagjai korlátos sorozatot alkotnak. Ezt véges sok taggal, azaz az  $a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$  tagokkal kiegészítve nyilvánvalóan újra korlátos sorozatot kapunk.

Ha azonban az  $\{a_n\}$  sorozat korlátos, akkor a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint kiválasztható belőle egy

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$$

konvergens részsorozat. Legyen ennek határértéke  $A$ .

Bebizonyítjuk, hogy az eredeti sorozat is  $A$ -hoz tart.

Legyen  $\varepsilon > 0$  tetszőleges pozitív szám;  $\frac{\varepsilon}{2}$ -hez választhatjuk az  $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  küszöbindexet úgy, hogy

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha már } n > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{és} \quad m > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Az  $a_{n_k}$  részsorozat konvergenciája miatt  $\frac{\varepsilon}{2}$ -hez található olyan  $M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  küszöb, hogy

$$n_k < M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{esetén}$$

$$|A - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen  $n_0$  az  $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  és  $M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  küszöbök közül a nagyobb, és  $n > n_0$ .

Válasszunk a részsorozatban szereplő  $n_k$  indexek közül olyant, amelyre  $n_k > n_0$  teljesül! Ekkor

$$|A - a_n| = |A - a_{n_k} + a_{n_k} - a_n| \leq |A - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Az így kiválasztott  $n_0$  tehát megfelel mint  $\varepsilon$ -hez tartozó küszöbindex.

### IV. tétel.

Monoton növekvő, nem korlátos sorozat határértéke  $+\infty$ . Monoton fogyó, nem korlátos sorozat határértéke  $-\infty$ . A tétel bizonyítása egyszerű, nem térünk ki rá.

### Példák

$$1. \quad a_1 = 6, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{3} + 2 \quad (n > 1.)$$

A sorozat néhány tagja

$$6; 4; \frac{10}{3}; \frac{28}{9}; \dots$$

A sorozat tagjai fogynak (teljes indukcióval könnyen igazolható), azonkívül pozitívak, tehát átlulról



korlátosak; a sorozatnak van határértéke. Jelöljük ezt  $a$ -val.

$$\begin{array}{ccc} a_n = \frac{a_{n-1}}{3} + 2 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & & \frac{a}{3} \\ a = \frac{a}{3} + 2, & \text{innen} & a = 3. \end{array}$$

2.  $a_n = q^n$ .

Ha  $q > 1$ , azaz  $q = 1+h$  ( $h$  pozitív szám).

$$q^n = (1+h)^n.$$

A Bernoulli-egyenlőtlenség értelmében (lásd 1.4, 4. példát)

$$q^n = (1+h)^n > 1+nh \rightarrow +\infty.$$

$$q^n \rightarrow +\infty.$$

Ha  $q = 1$ , a sorozat minden tagja 1, a határérték 1.

Ha  $0 < q < 1$ ,

$$q = \frac{1}{1+h} \quad \text{alakban írható.}$$

$$q^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh} \rightarrow 0.$$

Ha  $-1 < q < 0$ ,

$$|q|^n \rightarrow 0, \quad q^n \rightarrow 0 \quad (\text{változó előjellel}).$$

Ha  $q = -1$ , a sorozat  $-1; 1; -1; 1; \dots$

A tagok előjele váltakozik, a sorozat divergens.

Ha  $q < -1$ ,

$$|a_n| \rightarrow +\infty, \quad \text{a sorozat divergens.}$$

Tehát az

$$a_n = q^n \quad \text{sorozat akkor és}$$

csak akkor konvergens, ha  $-1 < q \leq 1$ .

Ha  $q = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$

Ha  $|q| < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

### 3. A végtelen mértani sor

**Definíció.** Legyen  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  egy adott számsorozat. Az  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  alakzatot *végtelen sornak* nevezzük.

Végtelen sok szám összegét az összeadás definíciója alapján nem lehet meghatározni. Ilyen összeget a határérték fogalmával lehet értelmezni.

Képezzük a részletösszegek sorozatát:

$$\begin{array}{l} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ \vdots \end{array}$$

**Definíció.** A végtelen sor összege a részletösszegek sorozatának határértéke, ha ez a határérték létezik és véges szám.

Tehát, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

akkor a végtelen sor összege  $S$ .

Végtelen sor összegéről tehát csak akkor beszélhetünk, ha a részletösszegek sorozata konvergens. Ekkor a végtelen sort is konvergensnek mondjuk. Ha a részletösszegek sorozata divergens, a végtelen sort is divergensnek mondjuk.

A végtelen sorok részletes tárgyalására a 9. fejezetben térünk rá.

Most csak egy speciális példát vizsgálunk, a végtelen mértani sort.

Tudjuk, hogy a végtelen mértani sorozat:

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$$

A végtelen mértani sor tehát

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

A részletösszegek:

$$\begin{array}{l} S_1 = a \\ S_2 = a + aq \\ \vdots \\ S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} \\ \vdots \end{array}$$

Tegyük fel, hogy  $q \neq 1$ .

A mértani sorozat első  $n$  tagjának összegképlete:

$$S_n = a \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ez így is írható:

$$S_n = \frac{a}{1-q} - q^n \frac{a}{1-q}.$$

A végtelen mértani sor összege:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{1-q} - q^n \frac{a}{1-q} \right).$$

Ha  $|q| < 1$ ,  $q^n \rightarrow 0$ , a sor konvergens, azaz a végtelen mértani sor összege:

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Ha  $|q| > 1$ ,  $|q|^n \rightarrow +\infty$ , a sor divergens.

Ha  $q = 1$ ,  $S_n = a + a + \dots + a + \dots$

$$a > 0 \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty, a < 0 \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty.$$

Az  $a + a + a + \dots + a + \dots$  sor divergens ( $a \neq 0$ ).

Ha  $q = -1$ , a sor

$$a - a + a - a + \dots \quad (a \neq 0).$$

A részletösszegek vagy  $a$ , vagy 0 értékűek, a sor divergens. Tehát a végtelen mértani sor csak akkor konvergens, ha  $|q| < 1$ , és ekkor a sor összege:

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Nézzük például a  $0,4\bar{7}$  végtelen szakaszos tizedestörtet!

$$0,4\bar{7} = 0,4747 \dots = \frac{47}{10^2} + \frac{47}{10^4} + \dots$$

A szám végtelen mértani sor összege.

$$a = \frac{47}{100}, \quad q = \frac{1}{100},$$

$$S = \frac{\frac{47}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{47}{99}.$$

(Ellenőrzésképpen oldjuk meg a példát az 1.1 fejezetben adott módszerrel.)

$$4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \text{ tetszőleges valós szám.}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

$\frac{x^n}{n!}$  kifejezésünkben  $x$  akármilyen számot jelenthet. Legyen  $x = 2$ . Vizsgáljuk

$$a_n = \frac{2^n}{n!}.$$

$$a_1 = 2,$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2!} = 2,$$

$$a_3 = \frac{2^3}{3!} = \frac{8}{6} = 1 \frac{1}{3},$$

$$a_4 = \frac{2^4}{4!} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3},$$

$$a_5 = \frac{2^5}{5!} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}.$$

Mivel

$$a_n = \frac{2^n}{n!},$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2}{n+1},$$

$$a_{n+1} < a_n, \quad \text{mert } \frac{2}{n+1} < 1, \quad \text{ha } n > 1.$$

Tehát a sorozat monoton fogyó. A sorozat alulról korlátos, mert tagjai pozitívak. Ezért a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$$

határérték létezik és véges.

Legyen  $x = 10$ .

$$a_n = \frac{10^n}{n!}$$

$$a_1 = 10$$

$$a_2 = \frac{10^2}{2!} = 50$$

$$a_3 = \frac{10^3}{3!} = \frac{1000}{6} = 166 \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{10^4}{4!} = \frac{10000}{24} = 416 \frac{2}{3}.$$

A sorozat nő egészen a tizedik tagig, azután csökken, mert innen a megelőző törtet rendre a  $\frac{10}{11}; \frac{10}{12}; \frac{10}{13}; \frac{10}{14}; \dots < 1$  értékekkel szorozzuk.

A sorozat a tizedik tagtól kezdve csökken, alulról korlátos, mert tagjai pozitívak; ennek a sorozatnak is van véges határértéke.

Most bebizonyítjuk, hogy az  $a_n = \frac{x^n}{n!}$  sorozat tagjainak abszolút értéke bizonyos  $n$  értékeken túl csökken, azaz  $n!$  rohamosabban nő, mint akármilyen szám abszolút értékének  $n$ -edik hatványa.

$$a_n = \frac{x^n}{n!}.$$

$$a_1 = \frac{x}{1},$$

$$a_2 = \frac{x^2}{2!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2},$$

$$a_3 = \frac{x^3}{3!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3},$$

$$a_m = \frac{x^m}{m!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \dots \cdot \frac{x}{m},$$

$$a_{m+1} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \dots \cdot \frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m+1}.$$



Legyen  $m$  olyan nagy, hogy  $m+1 > |x|$ , akkor

$$\frac{|x|}{m+1} = q < 1, \quad \text{tehát} \quad |a_{m+1}| < |a_m|.$$

Még inkább igaz, hogy az  $\frac{|x|}{m+2}, \frac{|x|}{m+3}$  és így tovább törték értékei  $q$ -nál kisebb számok. Mivel az  $a_n$  sorozat tagjait az  $m$ -edik tag után úgy kapjuk az előzőkből, hogy azokat abszolút értékben  $q$ -nál kisebb számmal szorozzuk, ezért

$$|a_{m+p}| < |a_m|; \quad q^p \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad p \rightarrow \infty.$$

Ezért

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0.$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

### 6.1.7 Az „e” szám

A következőkben meghatározzuk a matematikai analízis egy igen fontos sorozatának, az

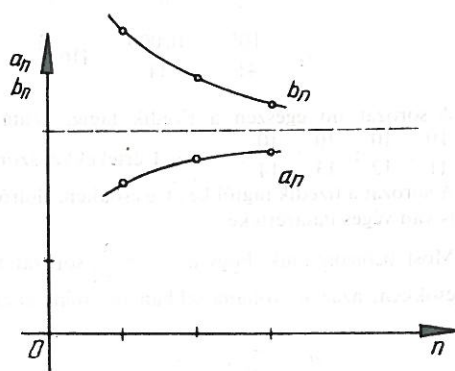
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozatnak határértékét.

Vizsgáljuk a következő két sorozatot

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$



6.5 ábra

A  $\{b_n\}$  sorozat minden tagját úgy kapjuk az  $\{a_n\}$  sorozat megfelelő tagjából, hogy azt az  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  tényezővel szorozzuk. Mivel  $1 + \frac{1}{n} > 1$ ,  $b_n$  minden tagja nagyobb, mint  $a_n$  megfelelő tagja.

A két sorozat néhány tagja:

$$a_1 = (1+1)^1 = 2 \quad a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 \quad a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,37$$

$$b_1 = (1+1)^2 = 4 \quad b_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = 3,375 \quad b_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^4 = 3,16$$

(6.5 ábra).

Bebizonyítjuk, hogy  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  monoton növekvő,  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  monoton fogyó sorozat.

a) Igazoljuk, hogy az

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{sorozat monoton nő.}$$

Nézzük az

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \quad \text{kifejezést!}$$

Ha  $n < 1$ , akkor  $\left(-\frac{1}{n^2}\right) > -1$ , alkalmazhatjuk a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget (lásd 6.1.4-et).

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n^2} n, \quad \text{azaz}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n},$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n > \frac{n-1}{n}.$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \frac{n-1}{n}.$$

Rendezve:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n}$$

vagy

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}.$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Vagyis

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

$$a_n > a_{n-1}.$$

Tehát

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{monoton növekvő.}$$

b) Bebizonyítjuk, hogy  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  monoton csökkenő.

Nézzük az  $\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n$  kifejezést!

Ha  $n \geq 2$ ,  $\frac{1}{n^2-1} > 0$ , alkalmazhatjuk a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget.

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1}.$$

Még inkább igaz, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}; \quad \text{azaz} \quad \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}.$$

Mindkét oldalt közös nevezőre hozva:

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n}.$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{n+1}{n}.$$

Rendezve:

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

A bal oldalt átalakítva:

$$\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

Vagyis

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

$$b_{n-1} > b_n.$$

Tehát  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  monoton fogyó sorozat.

Tehát az  $\{a_n\}$  sorozat monoton nő, a  $\{b_n\}$  sorozat monoton fogy.

A sorozatok korlátosak is.

Az  $a_n$  sorozat felülről korlátos, mert

$$a_n < b_n < b_1 = 4,$$

a  $\{b_n\}$  sorozat alulról korlátos, mert

$$b_n > a_n > a_1 = 2.$$

Ezért a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

határértékek léteznek és végesek.

c) Végül kimutatjuk, hogy a két határérték közös.

Képezzük a következő különbséget:  $(b_n - a_n)$ .

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n}. \end{aligned}$$

A határérték-tételek alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n} = 0.$$

Ugyancsak a határérték-tételek értelmében, mivel az  $\{a_n\}$  és a  $\{b_n\}$  sorozatok határértéke létezik és véges:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n).$$

Ez utóbbi határérték, mint láttuk, nulla.

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

A közös határértéket  $e$ -vel jelöljük.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

$e$  irracionális szám. Néhány tizedes pontosságig:

$$e = 2,71828 \dots$$

Az  $e$  szimbólum EULER (1707 – 1783) nevéhez fűződik. (Leonhard Euler svájci matematikus, egy ideig a pétervári akadémia tanára. A matematika majdnem minden területén kimagasló eredményeket ért el.)



## 6.2 FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

a) Függvények határértéke az  $x = x_0$  helyen.

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény határértéke az  $x = x_0$  helyen  $A$ ; jelben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$$

ha megadva bármilyen kis pozitív  $\varepsilon$  számot, találunk olyan  $\delta$ -t, hogy

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{esetén} \\ |f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{ahol } \delta = \delta(\varepsilon).$$

Vagyis az  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  intervallum minden pontjában — kivéve  $x_0$ -ban — fennáll, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

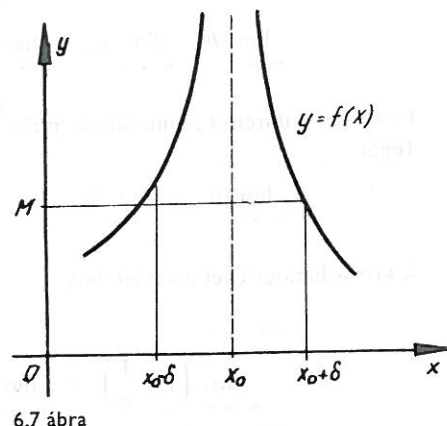
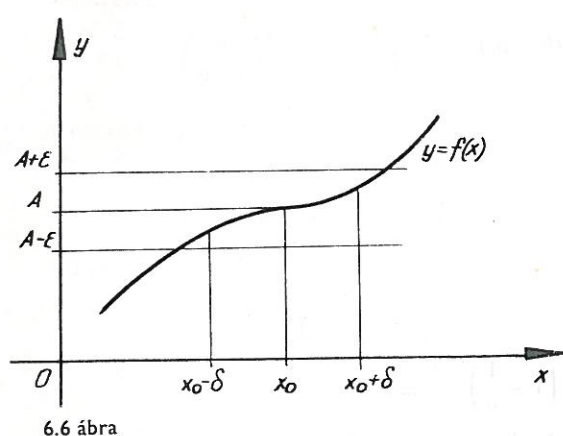
Az  $x = x_0$  pontot azért zárjuk ki, hogy a határérték definíciója érvényes legyen akkor is, ha a függvény az  $x = x_0$  helyen nincs értelmezve.

Geometriailag a határérték azt jelenti, hogy az  $x_0$  szám környezetében a függvényértékek az

$$y = A - \varepsilon \quad \text{és} \quad y = A + \varepsilon$$

egyenesek által határolt sávba esnek (6.6 ábra).

$\delta$  értéke, azaz az  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  intervallum  $\varepsilon$ -tól függ.



Azt, hogy az  $f(x)$  függvénynek az  $x_0$  helyen  $A$  a határértéke, gyakran így jelöljük:

$$f(x) \rightarrow A, \quad \text{ha} \quad x \rightarrow x_0.$$

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény határértéke az  $x = x_0$  helyen  $+\infty$ , azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty,$$

ha megadva bármilyen nagy  $M$  számot, van olyan  $\delta > 0$ , hogy

$$f(x) > M, \quad \text{ha} \quad 0 < |x - x_0| < \delta, \quad \text{ahol } \delta = \delta(M) \quad (6.7 \text{ ábra}).$$

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény határértéke az  $x = x_0$  helyen  $-\infty$ , azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty,$$

ha megadva bármilyen nagy  $M$  számot, van olyan  $\delta > 0$ , hogy

$$f(x) < -M, \quad \text{ha} \quad 0 < |x - x_0| < \delta, \quad \text{ahol } \delta = \delta(M).$$

**Tétel.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , akkor és csak akkor, ha bármely  $x_n$  ( $x_n \neq x_0$ ) pontsorozat esetén:

$$f(x_n) \rightarrow A.$$

A bizonyítás a határérték definíciója alapján könnyen elvégezhető.

b) Függvény határértéke a végtelenben.

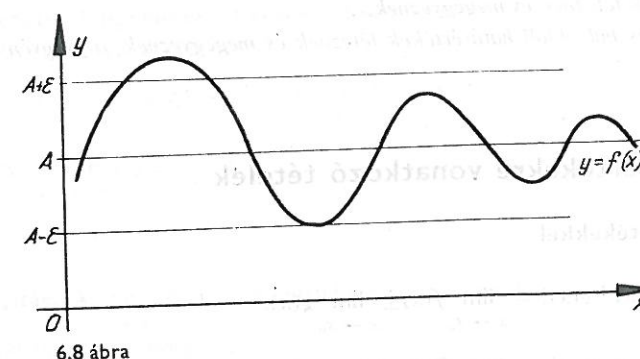
**Definíció.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ,

ha megadva  $\varepsilon$  tetszés szerinti kis pozitív számot van olyan  $N$ , hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad x > N, \quad \text{ahol } N = N(\varepsilon).$$

Ez azt jelenti, hogy ha elég messze megyünk az  $x$  tengelyen, azaz, ha  $x > N$ , a függvényértékek az

$$y = A - \varepsilon \quad \text{és} \quad y = A + \varepsilon \quad \text{sávba esnek (6.8 ábra).}$$



$N$  értéke  $\varepsilon$ -tól függ:  $N = N(\varepsilon)$ .

**Definíció.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,

ha megadva bármilyen nagy pozitív  $M$  számot

$$f(x) > M, \quad \text{ha} \quad x > N, \quad \text{ahol } N = N(M).$$

**Definíció.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,

ha megadva bármilyen nagy pozitív  $M$  számot

$$f(x) < -M, \quad \text{ha} \quad x > N, \quad \text{ahol } N = N(M).$$

c) Bal és jobb oldali határértékek. A függvény  $x = x_0$  helyen való határértékének definíciójánál nem különböztettük meg, hogy  $x$  az  $x_0$  helyet jobbról vagy balról közelíti-e meg, azaz az  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  intervallumban  $x = x_0$  tetszőlegesen helyezkedett el.

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény bal oldali határértéke az  $x = x_0$  helyen  $A$ , ha minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $\delta(\varepsilon) > 0$ , hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon).$$

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A.$$

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvénynek jobb oldali határértéke az  $x = x_0$  helyen  $B$ , ha minden  $\varepsilon > 0$  számhoz létezik  $\delta(\varepsilon) > 0$ , úgy, hogy

$$|f(x) - B| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon).$$

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = B.$$

A definíciókból következik:

**Tétel.** Ha az  $y = f(x)$  függvénynek az  $x = x_0$  helyen van határértéke, akkor ott a jobb és bal oldali határértékek léteznek és megegyeznek.

Fordítva: ha a jobb és bal oldali határértékek léteznek és megegyeznek, a függvénynek van határértéke.

## 6.2.1 Határértékekre vonatkozó tételek

### Műveletek határértékekkel

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \text{ha} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

(Feltéve, hogy a jobb oldalon szereplő határértékek léteznek.)

$$\text{Ha} \quad f(x) \rightarrow +\infty, \quad \text{akkor} \quad \frac{1}{f(x)} \rightarrow 0.$$

$$\text{Ha} \quad f(x) \rightarrow -\infty, \quad \text{akkor} \quad \frac{1}{f(x)} \rightarrow 0.$$

$$\text{Ha} \quad f(x) \rightarrow +0, \quad \text{akkor} \quad \frac{1}{f(x)} \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Ha} \quad f(x) \rightarrow -0, \quad \text{akkor} \quad \frac{1}{f(x)} \rightarrow -\infty.$$

$$\text{Ha} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty, \quad \text{akkor}$$

$$\text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határértéket csupán az alkatelemek limeszéből nem tudjuk meghatározni.

Szimbolikusan jelölve a „ $\infty - \infty$ ” és a „ $\frac{\infty}{\infty}$ ” kifejezések határozatlan alakok.

$$\text{Ha} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

ugyancsak határozatlan alak a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  kifejezés.  $\left(\frac{0}{0}\right)$ -nak nincs értelme.)

Hasonló tételek érvényesek az  $x \rightarrow +\infty$  vagy  $x \rightarrow -\infty$  feltételekre is.

**Közvetett függvények határértéke.** Legyen  $y = f(u)$  és  $u = g(x)$ , és képezzük az  $y = f[g(x)]$  közvetett függvényt.

$$\text{Tétel. Ha} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0 \quad \text{és} \quad x \neq x_0\text{-ra} \quad g(x) \neq u_0,$$

$$\text{továbbá} \quad \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A,$$

$$\text{akkor} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A.$$

**Bizonyítás.** A  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$  feltétel azt jelenti, hogy tetszés szerinti  $\varepsilon > 0$  számhoz található olyan  $\delta_1 > 0$ , hogy

$$|A - f(u)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 < |u - u_0| < \delta_1.$$

A  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$  feltétel azt jelenti, hogy a megadott  $\delta_1 > 0$  számhoz található olyan  $\delta_2 > 0$  szám, hogy

$$|u_0 - g(x)| < \delta_1, \quad \text{ha} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2.$$

Tehát

$$|A - f[g(x)]| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2.$$



A tételből közvetlenül adódik.

$$\text{Ha } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$$

$$\text{akkor } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = A^n \text{ (ahol } n \text{ pozitív egész szám).}$$

## 6.2.2 Példák függvények határértékére

### I. Racionális egészfüggvények határértéke a végtelenben

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 2),$$

$$\text{ha } x \rightarrow +\infty, \quad x^2 \rightarrow +\infty \quad \text{és} \quad 5x \rightarrow +\infty.$$

Hogy meghatározhatjuk a két függvény különbségének határértékét, az  $(x^2 - 5x + 2)$  kifejezést átalakítjuk.

$x^2$ -et kiemelve:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = +\infty.$$

$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$

Hasonlóan:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left( 1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = +\infty.$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + 6x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( 2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = +\infty.$$

$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$

Hasonlóan, ha  $x \rightarrow -\infty$ , a függvény határértéke:  $-\infty$ .

### II. Racionális törtfüggvények határértéke a végtelenben

A számlálóból és nevezőből kiemeljük  $x$  legmagasabb hatványát, majd egyszerűsítünk, és ezután számítjuk ki a határértéket. (A határértékeket  $x \rightarrow +\infty$  és  $x \rightarrow -\infty$  esetekre vizsgáljuk  $x \rightarrow \pm\infty$  jelöléssel.)

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{-4x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left( 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left( -4 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{-4 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}} = -\frac{3}{4}.$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+3}{x^2-6x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left( 2 + \frac{3}{x} \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{6}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{x \left( 1 - \frac{6}{x} \right)} = 0.$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 7}{2x^3 + 6x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 \left( 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^4} \right)}{x^3 \left( 2 + \frac{6}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left( 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^4} \right)}{2 + \frac{6}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \pm\infty.$$

### III. Racionális törtfüggvények határértéke, ha a számláló és nevező határértéke 0

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{2x^2 - 8}.$$

A számlálót és nevezőt szorzattá alakítjuk, majd egyszerűsítünk.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{2x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-6)}{2(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-6}{2(x+2)} = -\frac{1}{2}.$$

$(x-2)$ -vel egyszerűsíthetünk, mert az  $x = 2$  hely környezetében  $(x-2) \neq 0$ .

### IV. Irracionális függvények határértéke

Bebizonyítjuk a következő határérték létezését:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} \text{ (ahol } n \text{ pozitív egész és } x \geq 0, x_0 \geq 0).$$

**Bizonyítás.** Irjuk az  $(\sqrt[n]{x_0} - \sqrt[n]{x})$  különbséget a következő alakban:

$$(\sqrt[n]{x_0} - \sqrt[n]{x}) = \frac{x_0 - x}{(\sqrt[n]{x_0})^{n-1} + (\sqrt[n]{x_0})^{n-2} \cdot \sqrt[n]{x} + \dots + (\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

A határérték bizonyításához a különbség abszolút értékét kell megbecsülni.

$$|\sqrt[n]{x_0} - \sqrt[n]{x}| = \frac{|x - x_0|}{(\sqrt[n]{x_0})^{n-1} + (\sqrt[n]{x_0})^{n-2} \cdot \sqrt[n]{x} + \dots + (\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

Ha a nevezőből pozitív tagokat elhagyunk, a tört értéke nő, így

$$|\sqrt[n]{x_0} - \sqrt[n]{x}| < \frac{|x - x_0|}{(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}}.$$

Megadva egy tetszés szerinti  $\varepsilon > 0$  kis számot, válasszuk hozzá a  $\delta(\varepsilon)$ -t úgy, hogy

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon (\sqrt[n]{x_0})^{n-1} \text{ legyen.}$$

Ha  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ ,

$$\text{akkor } \left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0} \right| < \frac{|x - x_0|}{(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}} < \frac{\delta(\varepsilon)}{(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}} = \frac{\varepsilon (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}}{(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}} = \varepsilon.$$

$$\text{Tehát } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}.$$

**Megjegyzés.**  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}$  megválasztásánál ügyelnünk kell arra, hogy az  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  intervallum ne tartalmazza a nullát.

A közvetett függvény határértékére vonatkozó tétel alapján, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$$

akkor  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^r = A^r$ , ahol  $r$  bármilyen racionális szám.

#### Példák

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ezért, ha  $x$ -hez képest elég kicsi, akkor

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \approx \frac{1}{2},$$

$$\text{azaz } \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x.$$

$$\text{Például } \sqrt{1,04} = \sqrt{1+0,04} \approx 1,02.$$

$$\text{Hasonlóan: } \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x.$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}.$$

A számláló és nevező határértéke 0.

A törtet bővítjük a nevezőben szereplő két tag összegével, majd egyszerűsítünk:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)(\sqrt{x+1}+2) = 24. \end{aligned}$$

### 6.2.3 A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ és $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ határértékek

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

A tört határértékét geometriai úton számítjuk ki.

Rajzoljuk fel az egységsugarú körben az  $x$  szöget,  $\sin x$ -et és  $\operatorname{tg} x$ -et. ( $x$ -et ívmértékben adjuk meg.) (6.9 ábra.)

$$\overline{PQ} = \sin x,$$

$$\overline{RA} = \operatorname{tg} x,$$

$$\widehat{PA} = x \quad (PA \text{ ív} = x).$$

A kapott háromszögek és a körcikk területét összehasonlítva:

$$OAP \triangle < OAP \triangle < OAR \triangle.$$

Az egyenlőtlenség a területek kétszeresére is igaz.

$$2OAP \triangle < 2OAP \triangle < 2OAR \triangle.$$

Az  $OAP \triangle$  kétszeres területe = alap · magasság =  $1 \cdot \sin x = \sin x$ . Az  $OAP$  körcikk kétszeres területe, ha  $x$  ívmértékben van adva:  $1 \cdot x = x$ ; (sugár · ív).

Az  $OAR \triangle$  kétszeres területe = alap · magasság =  $1 \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$ .

Tehát a következő egyenlőtlenséget kaptuk:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

(Ez az egyenlőtlenség csak  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  esetén igaz,  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  esetén az egyenlőtlenség értelme megváltozik.)

Egyenlőtlenségünkben írjunk  $\operatorname{tg} x$  helyébe  $\frac{\sin x}{\cos x}$ -et:

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

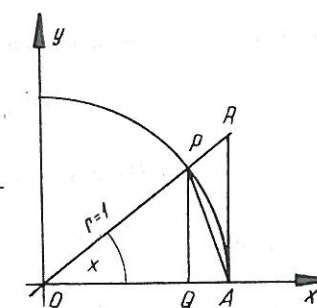
Vegyük az egyenlőtlenség oldalai helyett azok reciprok értékét. Az egyenlőtlenség értelme megváltozik:

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Szorozzuk az egyenlőtlenséget végig  $\sin x$ -szel:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Vizsgáljuk az egyenlőtlenséget abban az esetben, ha  $x \rightarrow 0$ !



6.9 ábra



Megmutatjuk, hogy

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0,$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

a) Mivel az első negyedben minden  $x$ -re igaz, hogy

$$0 < \sin x < x \quad (x \neq 0),$$

ha  $x \rightarrow 0$ ,  $\sin x \rightarrow 0$ .

b) Mivel az ismert goniometria összefüggés alapján

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0, \text{ azaz } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Visszatérve az  $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$  egyenlőtlenségre,  $\frac{\sin x}{x}$  két olyan mennyiség közé esik

(ha  $x \rightarrow 0$ ), amelyek mindegyike  $\rightarrow 1$ . Így  $\frac{\sin x}{x}$  határértéke is 1.

Tehát

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

A határértéket abban az esetben vizsgáltuk, ha  $x$  pozitív számokon át tart a nullához.

Mivel  $y = \frac{\sin x}{x}$  páros függvény,

$$\text{azaz } \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x},$$

ezért, ha  $x$  negatív számokon át tart a nullához, a függvény határértéke szintén 1. Tehát

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

A következő példákat lényegében a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  összefüggésre vezetjük vissza:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 0, \text{ mert } \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1, \sin x \rightarrow 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = ?$$

Ha kifejezésünk  $\frac{\sin 2x}{2x}$  volna, ennek határértéke  $x \rightarrow 0$  (tehát  $2x \rightarrow 0$ ) esetben 1 volna. Alakítsuk át a  $\frac{\sin 2x}{x}$ -et ennek értelmében:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2x}{2x} = 2.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Mivel  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

$$II. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x.$$

Vizsgáljuk a határértéket, ha  $x$  valós számokon keresztül tart a plusz végtelenhez. Szorozzuk  $x$ -et két szomszédos egész szám közé!

$$n \leq x \leq n+1,$$

ha  $x \rightarrow +\infty$ ,  $n \rightarrow +\infty$  és  $n+1 \rightarrow +\infty$ .

Könnyen belátható a következő egyenlőtlenség:

$$\left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^n \leq \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \leq \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}.$$

Átalakítva:

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \right) &\leq \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \leq \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right). \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ e \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad e \quad \quad \quad 1 \end{aligned}$$

Így, ha  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$e \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq e.$$

Tehát

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

A  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  határérték segítségével oldhatók meg a következő feladatok:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$

Alkalmazzuk az  $x = \frac{1}{t}$  helyettesítést.

Ha  $x \rightarrow +0$ , akkor  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Tehát  $\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

Alkalmazzuk az  $x = -(z+1)$  helyettesítést.

Ha  $x \rightarrow -\infty$ ,  $z \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{z+1}\right)^{-(z+1)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z+1-1}{z+1}\right)^{-(z+1)} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^{-(z+1)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{z+1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1} = \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \left(1 + \frac{1}{z}\right) = e. \end{aligned}$$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x.$

$x = -u$  helyettesítéssel a 2. példára vezetjük vissza a feladatot.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{-u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u} = \frac{1}{e}.$$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x}\right]^{\frac{5}{4}} = e^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{e^5}.$

(Ugyanis, ha  $x \rightarrow +\infty$ ,  $4x \rightarrow +\infty$ .)

5. 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x}{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2}{\left[\left(1 - \frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3} = \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5. \end{aligned}$$

#### 6. A szerves növekedés törvénye

A kamatoskamatt-számítás összefüggései szerint:

1 Ft  $p\%$  melletti megnövekedett értéke 1 év alatt:

$$1 + \frac{p}{100},$$

$m$  év alatt:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^m.$$

$t$  tőke megnövekedett értéke 1, illetve  $m$  év alatt:

$$T_1 = t \left(1 + \frac{p}{100}\right), \quad T_m = t \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m.$$

Ha évenként kétszer tőkésítenek,  $m$  év alatt

$$T = t \left(1 + \frac{p}{2 \cdot 100}\right)^{2 \cdot m}.$$

Ha évenként  $n$ -szer tőkésítenek

$$T = t \left(1 + \frac{p}{n \cdot 100}\right)^{n \cdot m}.$$

Legyen a tőkésítés „folytonos”.

Vezessük be a  $\frac{p}{n \cdot 100} = \frac{1}{x}$  jelölést, azaz  $n = x \frac{p}{100}$ .

$$T = t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \frac{p}{100} \cdot m} = t \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{p}{100} \cdot m}.$$



Ha  $n \rightarrow \infty$ , úgy tekinthető, hogy a tőkésítés folytonos. Mivel ha  $n \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,

$$T = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^{\frac{p}{100} \cdot m} = te^{\frac{p \cdot m}{100}}.$$

Legyen  $a$  a kezdeti állomány,  $A$  a megnövekedett, jelölje  $t$  az időt és használjuk a  $\frac{p}{100} = \alpha$  jelölést.

$$A = ae^{\alpha t}.$$

Ez a szerves növekedés tétele.

Így számítják ki pl. egy erdő állományának, egy város lakosságának a növekedését stb. Hasonló törvény érvényes az állandó csökkenésre. Ilyen egy test lehűlése (Newton-féle lehűlési törvény), egy kondenzátorkisülésnél a töltéscsökkenés vagy a radioaktív bomlás törvénye.

A csökkenés esetén  $\alpha$  negatív.

Radioaktív bomlásnál az  $\alpha = -\lambda$  jelölést szokták használni. A radioaktív bomlás:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

( $N_0$  a  $t = 0$ ,  $N$  a  $t$  időpontban szét nem esett atomok száma,  $\lambda$  a bomlási állandó.)

A radioaktív bomlásra jellemző a felezési idő, az atomok száma felére csökken.

A 226 atomsúlyú rádiumizotópnál

$$\lambda = 4,28 \cdot 10^{-4}.$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \text{ -ből}$$

$$\lambda T = \ln 2. \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda} = 1620 \text{ év.}$$

### 6.3 FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény az  $x = x_0$  helyen folytonos, ha a függvény az  $x_0$  helyen és környezetében értelmezve van, és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Azaz az  $y = f(x)$  függvény az  $x_0$  helyen folytonos, ha létezik jobb és bal oldali határértéke, és azok megegyeznek az  $x_0$  helyen vett helyettesítési értékkel.

(A függvény határértékéhez adott pontban nem szükséges, hogy a pontban a függvény értelmezve legyen, a folytonossághoz azonban igen.)

Tehát az  $y = f(x)$  függvény az  $x_0$  helyen akkor és csak akkor folytonos, ha minden  $\varepsilon > 0$  számhoz van olyan  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , hogy

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{esetén}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény az  $x_0$  helyen jobbról folytonos, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Az  $y = f(x)$  függvény az  $x_0$  helyen balról folytonos, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Jelöljük  $x$  változását  $\Delta x$ -szel,  $y$  változását  $\Delta y$ -nal.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Az  $y = f(x)$  függvény az  $x$  helyen folytonos, ha minden  $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $\delta > 0$ , hogy

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |\Delta x| < \delta.$$

A folytonosság a függvénynek egy pontban való tulajdonsága.

#### Intervallumban való folytonosság

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény valamely  $[a; b]$  intervallumban folytonos, ha az intervallum minden pontjában folytonos.

(Az  $a$  helyen csak jobb oldali, a  $b$  helyen csak bal oldali folytonosságot kívánunk meg.)

#### Egyenletes folytonosság

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény valamely  $[a; b]$  intervallumban egyenletesen folytonos, ha minden  $\varepsilon > 0$  számhoz van olyan  $\delta > 0$  szám, hogy az intervallum bármely két pontjára,  $x_1$  és  $x_2$ -re igaz, hogy  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ , ha  $|x_1 - x_2| < \delta$ .

**Műveletek folytonos függvényekkel.** A folytonosság definíciójából és a határérték-tételekből levezethetők a következő tételek:

Ha két függvény folytonos egy pontban, akkor összegük, különbségük és szorzatuk is folytonos az adott pontban.

Ha két függvény folytonos egy pontban, hányadosuk is folytonos abban a pontban, ha a nevezőben szereplő függvény a kérdéses pontban nullától különböző.

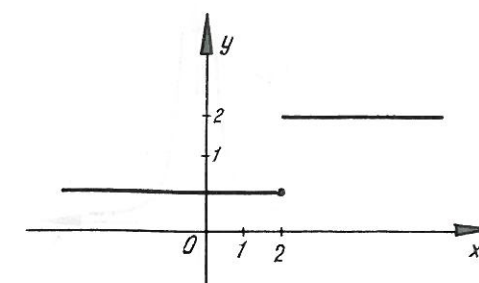
**Szakadáspont.** Az a pont, ahol a függvény nem folytonos, a függvény *szakadási pontja*.

#### Példák

1. Az  $y = f(x)$  függvény legyen a következő

$$\begin{aligned} y &= 1 & -\infty < x \leq 2 \\ y &= 3 & x > 2 \end{aligned}$$

(6.10 ábra).



6.10 ábra

A függvénynek az  $x = 2$  helyen szakadása van.

Ha egy függvénynek egy pontban van jobb és bal oldali határértéke, de azok különbözőek, a függvénynek az adott pontban *ugrása* van.

$$2. \quad y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

A függvény határértéke az  $x = 1$  helyen 2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

A függvény nem folytonos, mert az  $x = 1$  helyen nincs helyettesítési értéke. Ha egy függvényt így értelmezünk:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad \text{ha } x \neq 1, \quad \text{és}$$

$$y = 2, \quad \text{ha } x = 1, \quad \text{a függvény folytonos.}$$

Az  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  függvénynek az  $x = 1$  helyen megszüntethető szakadása van.

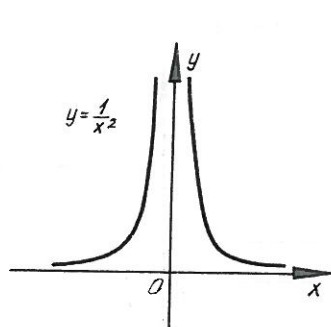
Az 1. példában szereplő függvénynek nem adhatunk meg az  $x = 2$  pontban olyan függvényértéket, hogy a szakadást megszüntethessük.

A függvény határértéke a szakadási pontban lehet végtelen.

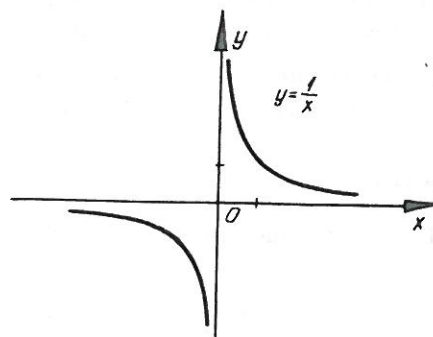
$$3. \quad y = \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad (6.11 \text{ ábra}).$$

$$4. \quad y = \frac{1}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty \quad (6.12 \text{ ábra}).$$



6.11 ábra



6.12 ábra

### 6.3.1 Zárt intervallumban folytonos függvények tulajdonságai

Zárt intervallumban folytonos függvényekre érvényesek a következő tételek.

1. Zárt intervallumban folytonos függvény egyenletesen folytonos.

**Bizonyítás.** A bizonyítást indirekt módszerrel végezzük.

Tegyük fel, hogy az  $[a; b]$ -ben folytonos  $f(x)$  függvény  $[a; b]$ -ben nem egyenletesen folytonos. Ekkor van olyan  $\varepsilon > 0$  szám, amelyhez tetszőleges  $\delta > 0$  mellett található olyan  $[a; b]$ -ben levő  $c$  és  $d$  hely, hogy

$$|c - d| < \delta \quad \text{és}$$

$$|f(c) - f(d)| \geq \varepsilon.$$

Válasszunk ilyen  $c; d$  helyeket, a  $\delta = \frac{1}{n}$  értékeknek megfelelően ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Az  $\frac{1}{n}$ -hez tartozó helyeket jelölje  $c_n$  és  $d_n$ . Így

$$|c_1 - d_1| < \frac{1}{1} \quad \text{és} \quad |f(c_1) - f(d_1)| \geq \varepsilon,$$

$$|c_2 - d_2| < \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad |f(c_2) - f(d_2)| \geq \varepsilon,$$

$$|c_n - d_n| < \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad |f(c_n) - f(d_n)| \geq \varepsilon.$$

A  $c_n$  sorozat korlátos, mert benne van az  $[a; b]$  intervallumban, így van konvergens  $c_{n_k}$  részsorozata:  $c_{n_k} \rightarrow c$ .

Mivel  $|c_{n_k} - d_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ , ezért

$$d_{n_k} \rightarrow c.$$

A  $c$  hely az  $[a; b]$ -be tartozik, és így ott a függvény folytonos. Ekkor azonban

$$f(c_{n_k}) \rightarrow f(c)$$

$$\text{és} \quad f(d_{n_k}) \rightarrow f(c).$$

$$\text{Vagyis} \quad |f(c_{n_k}) - f(d_{n_k})| \rightarrow 0,$$

ellentétben azzal, hogy

$$|f(c_{n_k}) - f(d_{n_k})| \geq \varepsilon \quad \text{minden } k\text{-ra.}$$

Tehát zárt intervallumban folytonos függvény egyenletesen folytonos.



Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételeket

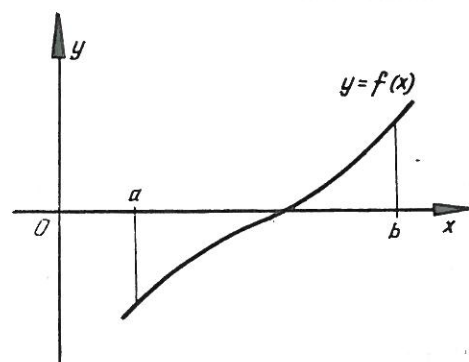
**II. Zárt intervallumban folytonos függvény,** amely az intervallum végpontjaiban különböző előjelű értékeket vesz fel, az intervallum belsejében legalább egyszer a 0 értéket is felveszi (6.13 ábra).

Ha  $a < b$  és  $\operatorname{sg} f(a) \neq \operatorname{sg} f(b)$ ,

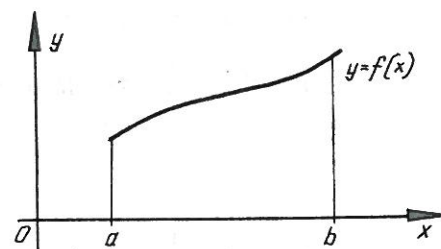
akkor  $f(\xi) = 0$ ,

ahol  $a < \xi < b$ .

**III. Zárt intervallumban folytonos függvény** legalább egyszer felvesz minden olyan értéket, amely az intervallum végén felvett két függvényérték közé esik (6.14 ábra).

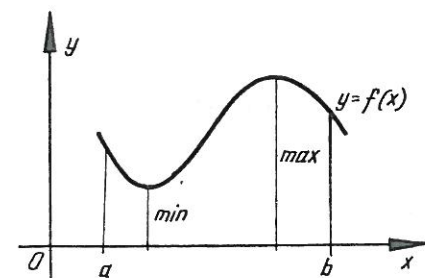


6.13 ábra

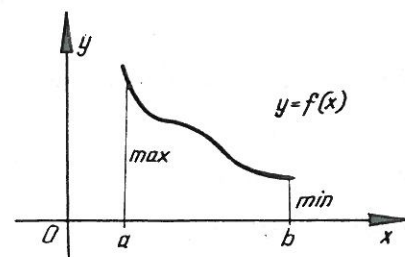


6.14 ábra

**IV. Weierstrass tétele.** Zárt intervallumban folytonos függvény az intervallumban felveszi maximumát és minimumát. (A maximum- és minimumhely eshet az intervallum belsejébe vagy végére. Lásd a 6.15 és 6.16 ábrát.)



6.15 ábra



6.16 ábra

### 6.3.2 Néhány függvény folytonosságának vizsgálata

$$1. \quad y = x. \\ \Delta y = \Delta x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Az  $y = x$  függvény mindenütt folytonos.

$$2. \quad y = c. \\ \Delta y = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0, \quad y = c \quad \text{mindenütt folytonos.}$$

$$3. \quad y = x^2 \quad \text{és} \quad y = x^3.$$

A függvények  $y = x \cdot x$ , illetve  $y = x \cdot x \cdot x$  alakúak; a folytonos  $y = x$  függvények szorzatából keletkeznek, a függvények folytonosak.

Általában az

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

racionális egészfüggvény mindenütt folytonos, mert az  $y = x$  és  $y = \text{konst}$  függvényekből szorzás, illetve összeadás által keletkezik.

$$4. \quad y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}.$$

A racionális törtfüggvény mindenütt folytonos, kivéve a nevező zérushelyeit.

**5. Szigorúan monoton függvény inverzének folytonossága**

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt. Szigorúan monoton folytonos függvény inverze is monoton és folytonos. (A tétel a 6.17 ábrából szemléletesen belátható.)

**6. Összetett függvény folytonossága**

**Tétel.** Ha az  $y = f(u)$  és  $u = g(x)$  függvényekből képezzük az

$$y = f[g(x)] \quad \text{függvényt,}$$

ahol  $u = u(x)$  folytonos az  $x = x_0$  helyen, és  $y = f(u)$  folytonos az  $u = u_0 = g(x_0)$  helyen, akkor

$$y = f[g(x)] \quad \text{folytonos az} \quad x = x_0 \quad \text{helyen.}$$

Tehát folytonos függvényekből összetett függvény folytonos.

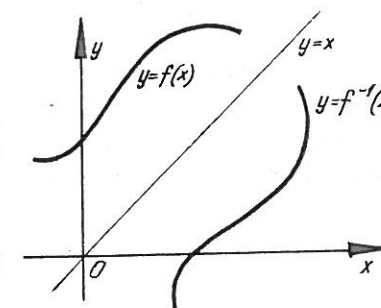
A tétel bizonyítása az összetett függvény határérték-tételéből adódik.

**7. Hatványfüggvény folytonossága**

$$y = x^n \quad (n \text{ egész}) \quad \text{folytonos.}$$

$$y = \frac{1}{x^n} \quad \text{folytonos, ha } x \neq 0.$$

$$y = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{folytonos, mert } y = x^n \text{ inverze.}$$



6.17 ábra

**Megjegyzés.** Az  $y = \sqrt[n]{x}$  függvény folytonosságát már megmutattuk, amikor bebizonyítottuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}.$$

Legyen  $\frac{p}{q}$  racionális szám.

$y = x^{\frac{p}{q}}$  folytonos, mert az  $y = u^p$  és  $u = x^{\frac{1}{q}}$  folytonos függvények összetétele.  
 $y = x^\alpha$  ( $\alpha$  irracionális) függvény folytonosságára később térünk rá.

### 8. Trigonometrikus függvények folytonossága

$$y = \sin x.$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

Mivel

$$\left| \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \leq 1,$$

és

$$\left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| < \left| \frac{\Delta x}{2} \right| \quad \text{miatt} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Az  $y = \sin x$  függvény folytonos.

Hasonlóképpen bizonyítható, hogy az  $y = \cos x$  folytonos.

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

A függvénynek szakadása van a  $\cos x = 0$ , azaz az  $x = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$  helyeken ( $k = 0; 1; 2; \dots$ ), a többi helyeken folytonos.

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

A függvénynek szakadása van a  $\sin x = 0$ , azaz az  $x = \pm k\pi$  helyeken ( $k = 0; 1; 2; \dots$ ), a többi helyeken folytonos.

### 9. Az exponenciális függvény folytonossága

$y = a^x$  függvény folytonosságát vizsgáljuk. Az exponenciális függvény folytonosságához bebizonyítjuk, hogy

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^{\Delta x} = 1.$$

Vizsgáljuk a következő sorozatot:

$$a_n = \sqrt[n]{a}.$$

A sorozat

$$a; a^{\frac{1}{2}}; a^{\frac{1}{3}}; \dots; a^{\frac{1}{n}}; \dots$$

Legyen  $a > 1$ ,

és legyen  $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$ .

$$a = (1 + x_n)^n.$$

A Bernoulli-féle egyenlőtlenség alapján:

$$a = (1 + x_n)^n > 1 + nx_n,$$

innen

$$x_n < \frac{a-1}{n}.$$

Ha  $n \rightarrow \infty$ ,  $x_n \rightarrow 0$ .

Így  $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Ha  $0 < a < 1$ ,

$$a = \frac{1}{b} \quad \text{helyettesítéssel} \quad (b > 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = 1.$$

Most nézzük  $a^{\Delta x}$ -et!

Ha  $\Delta x \rightarrow 0$  és  $\Delta x > 0$ , akkor  $\frac{1}{n+1}$  és  $\frac{1}{n}$  közé szorítható.

$$\frac{1}{n+1} \leq \Delta x \leq \frac{1}{n}. \quad \text{Mivel az exponenciális függvény monoton:}$$

$$a^{\frac{1}{n+1}} \leq a^{\Delta x} \leq a^{\frac{1}{n}}.$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad \qquad 1$$

Tehát  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^{\Delta x} = 1$ .

Major János



Végül nézzük az exponenciális függvény folytonosságát:

$$y = a^x,$$

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x(a^{\Delta x} - 1) = 0.$$

Tehát az exponenciális függvény,  $y = a^x$  folytonos függvény.

#### 10. A logaritmusfüggvény folytonossága

Az  $y = \log_a x$  függvény a szigorúan monoton folytonos  $y = a^x$  exponenciális függvény inverze, tehát a logaritmusfüggvény is monoton és folytonos (6.18 ábra).

#### 11. $y = x^a$ ( $a$ tetszőleges valós szám).

Az általános hatványfüggvény folytonosságát a következőképpen láthatjuk be.

A logaritmus definíciója szerint:

$$x = a^{\log_a x}.$$

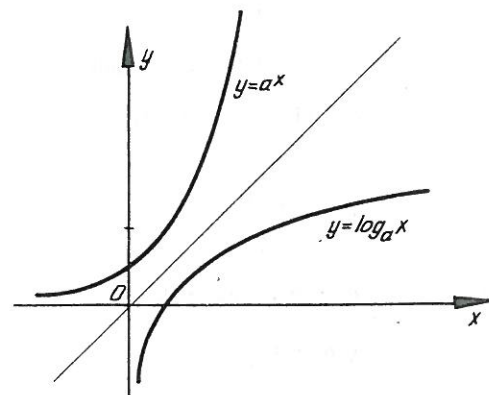
Így  $y = x^a = a^{a \log_a x}.$

A függvény összetett, a következő folytonos függvényekből:

$$y = a^u \quad \text{és} \quad u = a \log_a x.$$

Tehát

$$y = x^a \text{ folytonos.}$$



6.18 ábra

#### Példák

1.  $y = [x]$  (olvasva:  $y =$  egész rész  $x$ ).

A függvény definíciója a következő.

Ha  $x = 0, \pm n$  ( $x$  egész szám),  $y = x$ .

Ha  $x \neq n$  egész szám, akkor  $y$  az  $x$  előtti egész szám.

Például  $[-3, 2] = -4$   $[2, 9] = 2$   
 $[3] = 3$   $[3, 1] = 3.$

$y = [x]$  grafikonja tehát az  $x$  tengellyel párhuzamos egységnyi hosszúságú szakaszokból áll (6.19 ábra).

Az  $y = [x]$  függvénynek az  $x = \dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots$  helyeken szakadása van.

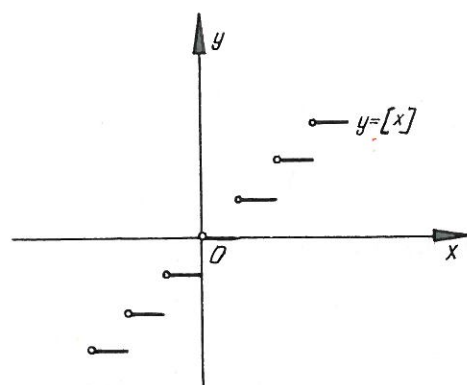
2.  $y = \{x\} = x - [x]$

(olvasva:  $y =$  törtész  $x = x$  mínusz egész rész  $x$ ).

A függvény definíciója:

$$f(x) = x, \quad \text{ha} \quad 0 \leq x < 1$$

$$f(x+k) = f(x), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$



6.19 ábra

A függvény pl. az  $x = 1$  pontban nem folytonos, helyettesítési értéke 0, jobb oldali határértéke 0, bal oldali határértéke 1.

Hasonlóképpen szakadása van a függvénynek az  $x = \pm k$  pontokban.

A függvény grafikonja párhuzamos egyenes szakaszokból áll (6.20 ábra).

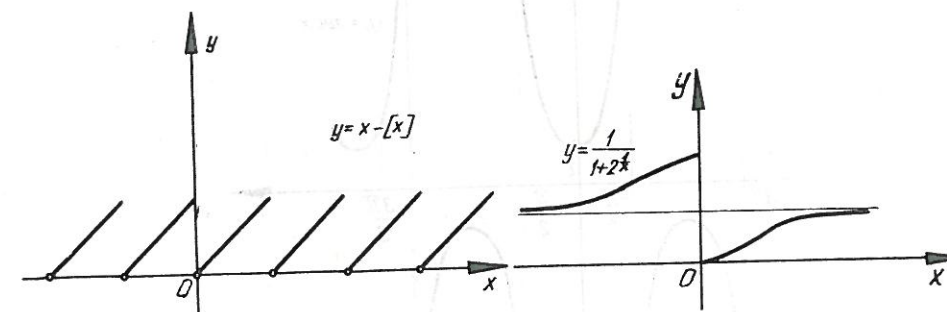
3.  $y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$

A függvénynek az  $x = 0$  pontban szakadása van.

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

(Ha ui.  $x \rightarrow +0$ ,  $2^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$ ,  
 ha  $x \rightarrow -0$ ,  $2^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$ )

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}.$$



6.20 ábra

6.21 ábra

Az  $y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$  függvény képét láthatjuk a 6.21. ábrán.

4.  $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$

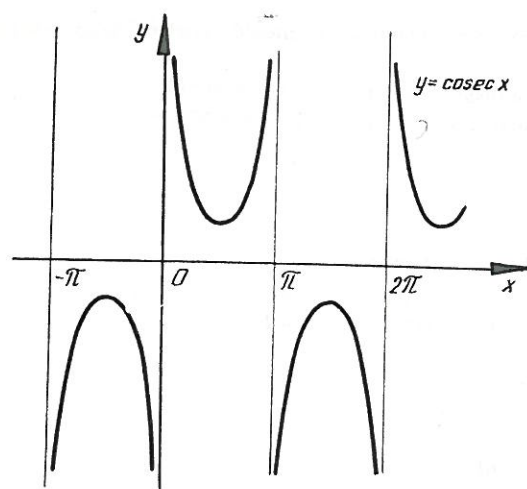
A függvény páratlan.

Szakadása van, ha  $\sin x = 0$ , azaz a  $k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2; \dots$ ) helyeken. Mivel  $u = \sin x$   $2\pi$  szerint periodikus, elegendő a függvényt az  $0 \leq x \leq 2\pi$  szakaszban nézni. Ha  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y = 1$ , ha

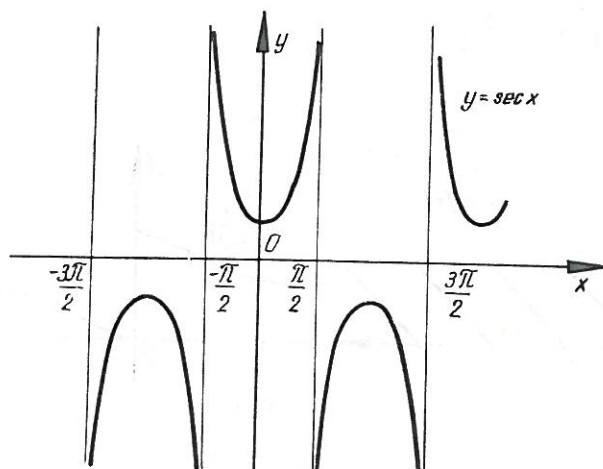
$$x = \frac{3\pi}{2}, \quad y = -1.$$

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow +0 & y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow \pi-0 & y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow \pi+0 & y \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 2\pi-0 & y \rightarrow -\infty \end{array}$$

Az  $y = \operatorname{cosec} x$  függvény képe: a 6.22 ábra.



6.22 ábra



6.23 ábra

Hasonlóan vizsgálható az

$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$  függvény, amely a 6.23 ábrán szemléltethető.

5.  $y = \sin \frac{1}{x}$ .

A függvény páratlan. Az  $x = 0$  helyen nincs értelmezve. Elég a függvényt pozitív  $x$ -ekre vizsgálni.

Ha  $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , azaz  $x = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ ,  $\sin \frac{1}{x} = 1$ .

Ha  $\frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ , azaz  $x = \frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}$ ,  $\sin \frac{1}{x} = -1$ .

Ha  $\frac{1}{x} = k\pi$ , azaz  $x = \frac{1}{k\pi}$ ,  $\sin \frac{1}{x} = 0$

(ahol  $k = 1, 2, \dots$ ).

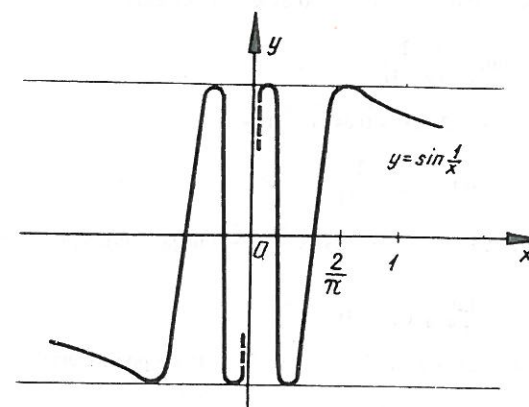
Ebből látható, hogyha  $x \rightarrow 0$ , a függvény egyre gyorsabban ingadozik az 1 és a  $-1$  értékek között, és az  $x = 0$  közvetlen környezetében végtelen sok ilyen oszcilláció van.

$y = \sin \frac{1}{x}$ -nek az  $x = 0$  helyen nincs határértéke, a függvény nem folytonos (6.24 ábra).

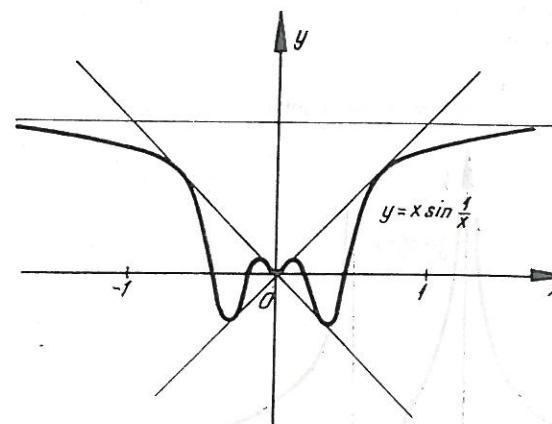
6.  $y = x \sin \frac{1}{x}$ .

Ha  $x \rightarrow 0$ , a függvény szintén végtelen sokszor oszcillál, azonban az  $x$  tényező, ha  $x \rightarrow 0$ , az oszcillációt 0 magasságokhoz csökkenti

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \text{mivel } x \rightarrow 0 \text{ és } \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1.$$



6.24 ábra



6.25 ábra

A függvény az  $x = 0$  helyen folytonos, páros (6.25 ábra).

7.  $y = \frac{x-2}{x^3-3x^2}$ .

Vázoljuk a függvényt a végtelenben és a szakadási helyeken vizsgált tulajdonságai alapján!



A függvény zérushelye az  $x = 2$  pont.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^3-3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(1-\frac{2}{x})}{x^3(1-\frac{3}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{x^2(1-\frac{3}{x^2})} = 0.$$

A függvénynek szakadása van ott, ahol a nevező nulla.

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 &= 0, \\ x^2(x-3) &= 0. \end{aligned}$$

Szakadás van az  $x = 0$  és  $x = 3$  helyeken. Ezeken a helyeken a függvény nincs értelmezve. Nézzük meg, van-e a függvénynek határértéke az  $x = 0$  és  $x = 3$  helyeken.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^3-3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2(x-3)} = +\infty.$$

(Ugyanis, ha  $x \rightarrow 0$ , akkor  $(x-2) \rightarrow -2$ ,  $x^2 \rightarrow 0$  és  $(x-3) \rightarrow -3$ .)

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x-2}{x^3-3x^2} = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x-2}{x^2(x-3)} = -\infty.$$

(Ugyanis, ha  $x \rightarrow 3-0$ , akkor  $(x-2) \rightarrow 1$ ,  $x^2 \rightarrow 9$  és  $(x-3) \rightarrow 0$  negatív értékeken keresztül.)

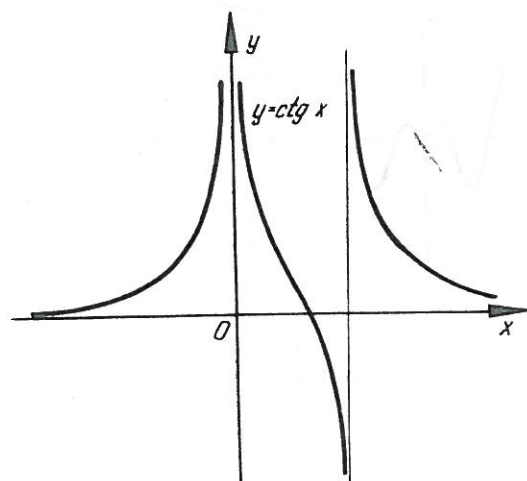
$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x-2}{x^3-3x^2} = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x-2}{x^2(x-3)} = +\infty.$$

(Ugyanis, ha  $x \rightarrow 3+0$ , akkor  $(x-2) \rightarrow 1$ ,  $x^2 \rightarrow 9$  és  $(x-3) \rightarrow 0$ , de pozitív értékeken keresztül.)  
Így

$$\begin{aligned} \text{ha } x \rightarrow 0 \text{ balról, } & y \rightarrow +\infty; \\ \text{ha } x \rightarrow 0 \text{ jobbról, } & y \rightarrow +\infty; \\ \text{ha } x \rightarrow 3 \text{ balról, } & y \rightarrow -\infty; \\ \text{ha } x \rightarrow 3 \text{ jobbról, } & y \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

A függvény vázlatos képe a 6.26 ábra.

A görbének az  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$  egyenesek aszimptótái.



6.26 ábra

A további példák határértékek kiszámítására vonatkoznak:

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsin} x}{x}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{Arcsin} x = 0$  (a függvény folytonossága miatt).

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Keressük a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsin} x}{x}$  határértéket.

A számláló és nevező határértéke nulla.

Használjuk a következő helyettesítést:

$$x = \sin t, \quad \text{akkor} \quad t = \operatorname{Arcsin} x,$$

$$\text{ha} \quad x \rightarrow 0, \quad t = \operatorname{Arcsin} x \rightarrow 0.$$

$$\text{Tehát} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsin} x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

Hasonlóan oldjuk meg a következő feladatot:

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctg} x}{x}.$$

$$\text{Legyen} \quad x = \operatorname{tg} t, \quad t = \operatorname{arctg} x.$$

A  $t = \operatorname{Arctg} x$  folytonossága miatt,

$$\text{ha} \quad x \rightarrow 0, \quad t = \operatorname{Arctg} x \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctg} x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} t}{t}} = 1.$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsin} 3x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

A számlálóban bővítsünk  $3x$ -szel, a nevezőben  $\frac{x}{2}$ -vel.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsin} 3x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{Arcsin} 3x}{3x} \cdot 3x}{\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{Arcsin} 3x}{3x} \cdot 3}{\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot \frac{1}{2}} = 6. \end{aligned}$$

## 7. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

### 7.1 A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALAPFOGALMAI

#### 7.1.1 A differenciálhányados fogalma

A differenciál- és integrálszámítást egymástól függetlenül és egyidőben NEWTON és LEIBNIZ fedezte fel. [Isaac Newton (1642–1724) angol matematikus, fizikus és csillagász, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) német matematikus, fizikus, filozófus.]

##### Bevezetés

Legyen a 7.1 ábrán ábrázolt  $s = s(t)$  függvény valamely egyenes vonalú mozgás út–idő diagramja.

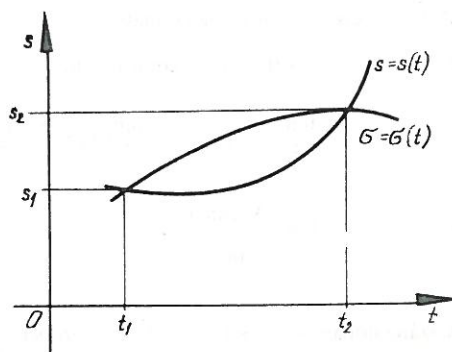
A mozgás átlagsebessége a

$$t_1 \leq t \leq t_2 \text{ időszakban:}$$

$$v_{\text{átl}} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Az  $s_2 - s_1 = \Delta s$ ;  $t_2 - t_1 = \Delta t$  jelöléssel,

$$v_{\text{átl}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$



7.1 ábra

Ugyanezt az átlagsebességet kapjuk a  $t_1 \leq t \leq t_2$  időtartamban a 7.1 ábrán látható másik  $\sigma = \sigma(t)$  egyenes vonalú mozgásra. Az  $s = s(t)$  egyenletű mozgás sebességének értékét a  $t_1$  pontban, a pillanatnyi sebességet a

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ határérték adja meg.}$$

Az  $s = s(t)$  egyenletű mozgás pillanatnyi sebessége a  $t_1$  pontban:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}.$$

**A differenciálhányados fogalma.** Vizsgáljuk az  $y = f(x)$  függvény változását (7.2 ábra)! A függvény változása:

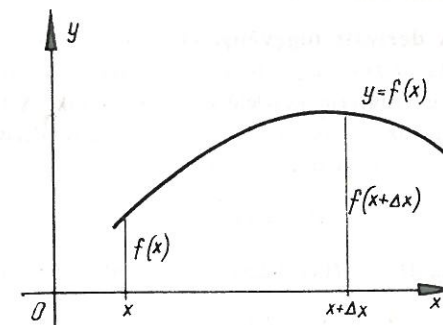
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

a független változó változása:  $\Delta x$ .

Képezzük a következő hányadost:  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Ezt a hányadost *differenciálhányadosnak* vagy *különbségi hányadosnak* nevezik.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



7.2 ábra

A differenciálhányados a függvénynövekményének és a független változó növekményének hányadosa.

A differenciálhányados megadja a függvény „átlagos változási sebességét” a  $\Delta x$  intervallumban.

Képezzük a következő határértéket:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ha ez a határérték létezik és véges, akkor a függvény az  $x$  helyen differenciálható. Ez a véges határérték a függvény *differenciálhányadosa* vagy *deriváltja* az  $x$  pontban.

Jele  $y'$  (olv.:  $y$  vessző), vagy  $f'(x)$  (olv.:  $f$  vessző  $x$ ), vagy  $\frac{dy}{dx}$  (olv.:  $dé y$  per  $dé x$ ), vagy

$\frac{d}{dx} y$ , vagy  $\frac{d}{dx} f(x)$ , továbbá  $\frac{df(x)}{dx}$ , vagy  $\dot{y}(x)$ , vagy  $\dot{y}$ .

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

**Megjegyzés.** A  $\frac{dy}{dx}$  szimbólum nem törtet jelent, hanem törtnek a határértékét, tehát a *differenciálhányados a differenciálhányados határértéke*.

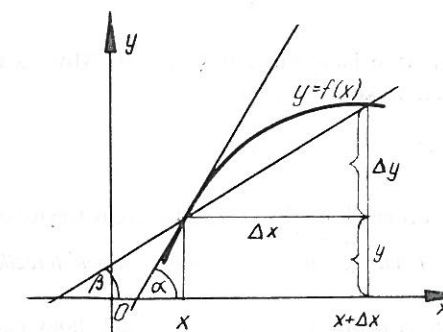
**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény differenciálhányadosa az  $x$  pontban

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

**A differenciálhányados és differenciálhányados geometriai jelentése.** Legyen a 7.3 ábrán látható görbe az  $y = f(x)$  függvény képe.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta.$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$



7.3 ábra



A differenciahányados a szelő iránytangense, a differenciálhányados az  $x$  pontban húzott érintő iránytangense.

**A derivált függvény.** Definiáltuk az  $y = f(x)$  függvény deriváltját egy adott  $x$  pontban. Ha az  $f(x)$  függvény több pontban is deriválható, akkor a deriváltak értékeit egy újabb függvény értékészletének tekinthetjük. A függvény értelmezési tartománya azon pontok halmaza, ahol az  $y = f(x)$  függvény deriválható. Ez a függvény a derivált függvény. A derivált függvény jelölése:

$$y' = f'(x).$$

Ha az  $y = f(x)$  függvénynek adott  $x_0$  pontban képezzük a deriváltját, azt így jelöljük:

$$y'_0 = f'(x_0).$$

**Bal és jobb oldali differenciálhányados.** A derivált képzésénél eddig nem különböztettük meg, hogy  $x$  jobbról vagy balról tart-e a 0-hoz.

**Definíció.**  $y = f(x)$  bal oldali differenciálhányadosa az  $x$  helyen:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

$y = f(x)$  jobb oldali differenciálhányadosa az  $x$  helyen:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

**I. Tétel.** Az  $y = f(x)$  függvény akkor és csak akkor differenciálható egy pontban, ha ott a bal és jobb oldali derivált létezik, véges és megegyezik.

**II. Tétel.** Ha az  $y = f(x)$  függvény egy adott  $x$  pontban differenciálható, akkor ott a függvény folytonos is.

**Bizonyítás.** A differenciálhatóság azt jelenti, hogy a differenciahányadosnak van véges határértéke:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ létezik.}$$

A nevező határértéke 0, ( $\Delta x \rightarrow 0$ ). Mivel a tört határértéke létezik, kell hogy a számláló határértéke is 0 legyen.

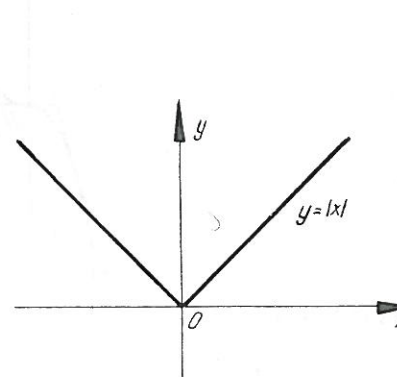
$$\text{Azaz } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Ha pedig  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ , a függvény folytonos.

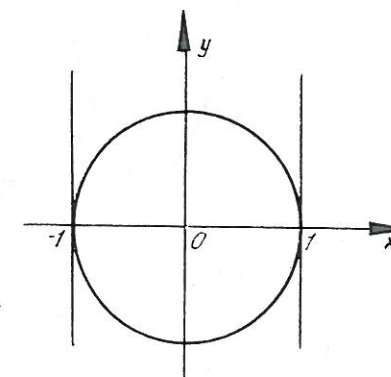
Ha tehát egy helyen egy függvénynek létezik véges differenciálhányadosa, ott a függvény folytonos.

A tétel nem fordítható meg. Abból, hogy egy függvény adott helyen folytonos, még nem következik, hogy ott differenciálható.

A függvény nem differenciálható ott, ahol töréspontja van. Például az  $y = |x|$  függvény nem differenciálható az  $x = 0$  helyen. A 7.4 ábra szemléletesen mutat rá, hogy a 0 helyen a bal oldali derivált:  $-1$ , a jobb oldali:  $+1$ . A függvénynek az  $x = 0$  hely töréspontja.



7.4 ábra



7.5 ábra

Nem differenciálható egy függvény ott, ahol a differenciahányados határértéke végtelen, vagyis az érintő párhuzamos az  $y$  tengellyel. Például az  $x^2 + y^2 = 1$  egyenletű egységsugarú körhöz az  $x = -1$  és  $x = 1$  abszcisszájú pontokban húzott érintők párhuzamosak az  $y$  tengellyel (7.5 ábra). Ezeken a helyeken a függvény nem differenciálható.

## 7.1.2 Példák függvények deriváltjainak kiszámítására

1.  $y = x^2$ .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

( $\Delta x \neq 0$ , ezért lehet vele egyszerűsíteni.)

Az  $y = x^2$  függvény derivált függvénye tehát:  $y' = 2x$ .

Ha  $x > 0$ ,  $y' > 0$ ,

ha  $x = 0$ ,  $y' = 0$ ,

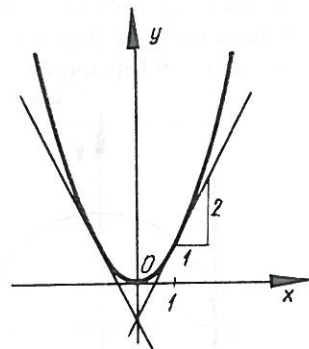
ha  $x < 0$ ,  $y' < 0$  (7.6 ábra).

Az érintő iránytangense pl. az  $x = 1$  pontban:  $y'_1 = 2$ .

2.  $y = x^3$ .

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \\ &= 3x^2 + 3x \Delta x + (\Delta x)^2 \quad (\Delta x \neq 0). \end{aligned}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x \Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2.$$



7.6 ábra

$y'$  az  $x = 0$  pontban 0, a többi pontban pozitív (7.7 ábra).

3.  $y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{\frac{x - (x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)x \Delta x} = -\frac{1}{(x+\Delta x)x} \quad (\Delta x \neq 0).$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{(x+\Delta x)x} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

Sem a függvény, sem a derivált nincs értelmezve az  $x = 0$  pontban.

4.  $y = \sqrt{x}.$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

A függvény értelmezve van az  $x = 0$  helyen, de deriváltja nincs ezen a helyen.

### 7.1.3 Differenciálási szabályok

#### I. Konstans differenciálhányadosa

$$y = c.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

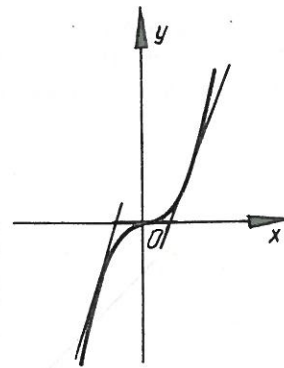
$$f(x) = c; \quad f(x+\Delta x) = c.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

$$\boxed{y = c}$$

$$\boxed{y' = 0}$$

konstans differenciálhányadosa 0.



7.7 ábra

A tétel geometriai tartalma nyilvánvaló. Az  $y = c$  függvény az  $x$  tengellyel párhuzamos egyenes, érintőjének iránytangense mindenütt nulla (7.8 ábra).

#### II. Konstanssal szorzott függvény differenciálhányadosa

$$y = af(x),$$

ahol  $a = \text{konst}$  és  $f(x)$  differenciálható.

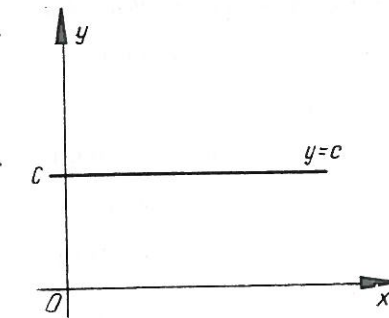
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{af(x+\Delta x) - af(x)}{\Delta x}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = af'(x).$$

$$\boxed{y = af(x)}$$

$$\boxed{y' = af'(x)}$$



7.8 ábra

Konstanssal szorzott függvény differenciálhányadosa egyenlő a konstans szorozva a függvény differenciálhányadosával.

#### III. Függvények összegének differenciálhányadosa

a) Legyen  $y = f_1(x) + f_2(x),$

ahol  $f_1(x)$  és  $f_2(x)$  differenciálhatók az  $x$  helyen.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[f_1(x+\Delta x) + f_2(x+\Delta x)] - [f_1(x) + f_2(x)]}{\Delta x}.$$

Másképpen rendezve:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x}.$$

A differenciálhányados pedig:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} \right].$$

Összeg határértéke egyenlő a határértékek összegével, ezért

$$y' = f_1'(x) + f_2'(x).$$

$$\boxed{y = f_1(x) + f_2(x)}$$

$$\boxed{y' = f_1'(x) + f_2'(x)}$$



Összeg differenciálhányadosa egyenlő a differenciálhányadosok összegével.

A szabály több tagú összegre is érvényes. Az igazolás teljes indukcióval végezhető el.

b) Különbség differenciálhányadosa

$$y = f_1(x) - f_2(x).$$

Másképpen:

$$y = f_1(x) + (-1)f_2(x).$$

Az előző két tétel értelmében:

$$y' = f_1'(x) + (-1)f_2'(x).$$

$$\begin{aligned} y &= f_1(x) - f_2(x) \\ y' &= f_1'(x) - f_2'(x) \end{aligned}$$

#### IV. Szorzat differenciálhányadosa

Legyen a differenciálendő függvény két függvény szorzata

$$y = u(x) \cdot v(x),$$

ahol  $u(x)$  és  $v(x)$  differenciálhatók az  $x$  helyen.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}.$$

Vonjunk le a számlálóból  $u(x) \cdot v(x+\Delta x)$ -et, és ugyanezt adjuk hozzá:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}.$$

Rendezve:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x) + u(x) \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Az egyes határértékek:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x).$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x+\Delta x) = v(x)$ , mivel  $v(x)$  deriválható, tehát folytonos.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x).$$

Ebben a határátmenetben  $u(x)$  állandó.

Így 
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'(x) v(x) + u(x) v'(x).$$

A szorzatot röviden  $u \cdot v$ -vel jelölve:

$$\begin{aligned} y &= u \cdot v \\ y' &= u'v + uv' \end{aligned}$$

Szorzat differenciálhányadosa egyenlő az első tényező differenciálhányadosa szorozva a második tényezővel, plusz az első tényező szorozva a második tényező differenciálhányadosával.

$$y = f_1(x) \cdot f_2(x) \quad \text{jelöléssel,}$$

$$y' = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x).$$

Legyen a függvény három tényező szorzata.

$$y = u \cdot v \cdot w.$$

$$y = (uv) \cdot w.$$

$$y' = (uv)' \cdot w + uv \cdot w'.$$

$$y' = (u'v + uv')w + uvw'.$$

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

A megfelelő szabály  $n$  tényezőre teljes indukcióval igazolható.

#### V. Függvények hányadosának deriváltja

Legyen  $y = \frac{u(x)}{v(x)}$  és  $u(x)$  és  $v(x)$  deriválhatók az  $x$  helyen.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}}{\Delta x}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v(x+\Delta x)v(x)} \cdot \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

A második tényező számlálójából levonva és hozzáadva  $u(x)v(x)$ -et:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v(x+\Delta x)v(x)} \cdot \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{v(x+\Delta x)v(x)} \cdot \left[ \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x) - u(x) \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right].$$

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 $y'$   $\frac{1}{v^2(x)}$   $u'(x)$   $v(x)$   $u(x)$   $v'(x)$

$$y' = \frac{1}{v^2(x)} [u'(x)v(x) - u(x)v'(x)].$$

A differenciálendő függvényt  $\frac{u}{v}$ -vel jelölve:

$$y = \frac{u}{v}$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Tört differenciálhányadosa egyenlő a számláló differenciálhányadosa szorozva a nevezővel, mínusz a nevező differenciálhányadosa szorozva a számlálóval, és ez a különbség osztva a nevező négyzetével.

VI. Egész kitevőjű hatványfüggvény differenciálhányadosa

a)  $y = x.$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

b)  $y = x^2.$

Szorozatként deriváljuk:

$$y = x \cdot x.$$

$$y' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

c)  $y = x^3.$

$$y = x \cdot x \cdot x.$$

$$y' = 1 \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot 1 = 3x^2.$$

**Tétel.** Legyen  $n$  egész szám.

Ha  $y = x^n,$

akkor  $y' = nx^{n-1}.$

**Bizonyítás.** Legyen  $n$  pozitív szám.

A bizonyítás teljes indukcióval történik. A tétel  $n = 2$ -re igaz. Tegyük fel, hogy igaz  $n$ -re, azaz,

ha  $y = x^n,$  akkor  $y' = nx^{n-1}.$

Legyen  $y = x^{n+1}.$

Ez a függvény így írható:

$$y = x^n \cdot x.$$

Szorozatként deriválva:

$$y' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n.$$

$$y = x^n$$

$$y' = nx^{n-1}$$

Legyen  $n = 0.$

Az előző szabály formális alkalmazása:  $y = x^0, \quad y' = 0 \cdot x^{-1} = 0.$

A tétel érvényes, mert  $y = x^0 = 1,$  és így  $y' = 0.$

Legyen a kitevő negatív egész szám.

$$y = x^{-n} \quad (n \text{ pozitív egész szám, } -n \text{ negatív egész szám és } x \neq 0).$$

$$y = \frac{1}{x^n}$$

Alkalmazva a tört differenciálási szabályát:

$$y' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}},$$

$$y' = -nx^{-n-1}.$$

Tehát, ha  $n$  egész szám:  $(x^n)' = nx^{n-1}.$

Az egész kitevőjű hatványfüggvény differenciálhányadosa tehát egyenlő a hatványkitevő szorozva az alap eggyel alacsonyabb kitevőjű hatványával.

Alkalmazzuk az eddigi szabályokat néhány példában:

1.  $y = ax^2 + bx + c$

$$y' = 2ax + b.$$

2.  $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$

$$y' = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1.$$

Polinom deriváltja eggyel alacsonyabb fokszámú polinom.

3.  $y = \frac{1}{x}.$

$$y = x^{-1}, \quad y' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

4.  $y = \frac{3x^2 - 1}{4x^3 - 5x + 2}.$

$$y' = \frac{6x(4x^3 - 5x + 2) - (3x^2 - 1)(12x^2 - 5)}{(4x^3 - 5x + 2)^2}.$$

**Magasabb rendű deriváltak.** Legyen az  $y = f(x)$  függvény differenciálható az  $x$  hely környezetében.

Keressük a következő határértéket:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Majon Zsuzs



Ha ez a határérték létezik és véges, azaz  $f'(x)$  függvény differenciálható az  $x$  helyen, akkor ez a határérték az  $y = f(x)$  függvény második deriváltja az  $x$  helyen.

Jele:  $y'' = f''(x)$ .

Geometriai jelentése az  $y' = f'(x)$  függvény érintőjének iránytangense az  $x$  pontban.

Hasonlóan képezhető a harmadik derivált, jele  $f'''(x)$ . Az eredeti függvényt  $n$ -szer differenciálva kapjuk az  $n$ -edik differenciálhányadost.

Jele:  $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ .

A magasabb rendű deriváltakat így is jelölik:

$$y'' = \frac{d^2x}{dx^2} \quad (\text{olv.: dé kettő } x \text{ per dé } x^2),$$

$$y^{(n)} = \frac{d^nx}{dx^n} \quad (\text{olv.: dé } n \text{ } x \text{ per dé } x \text{ az } n\text{-ediken}).$$

#### Példák

$$\begin{aligned} 1. \quad y &= ax^3 + bx^2 + cx + d. \\ y' &= 3ax^2 + 2bx + c. \\ y'' &= 6ax + 2b. \\ y''' &= 6a. \\ y^{(4)} &= 0. \end{aligned}$$

Az összes többi differenciálhányados 0.

$$\begin{aligned} 2. \quad y &= \frac{1}{x} \\ y' &= -\frac{1}{x^2}, \quad y'' = \frac{2}{x^3}, \quad y''' = -\frac{6}{x^4}, \quad \text{és így tovább.} \end{aligned}$$

A második differenciálhányadosnak fontos fizikai jelentése van.

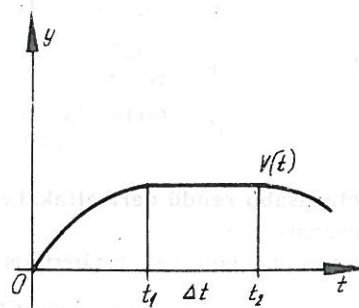
Egy mozgás út—idő függvénye legyen

$$s = s(t).$$

A sebesség, mint az idő függvénye:

$$v = v(t) = s'(t).$$

$v = v(t)$ -t ábrázolva a sebesség—idődiagramot kapjuk. Legyen ilyen összefüggés a 7.9 ábra diagramja. Az ábrából leolvasható:  $t_1$ -ig a sebesség nő, a mozgás gyorsuló,  $t_1$ -től  $t_2$ -ig a sebesség állandó, a mozgás egyenletes,  $t_2$  után a sebesség csökken, a mozgás lassuló.



7.9 ábra

A sebességnek  $\Delta t$ -re eső változása az átlagos gyorsulás:

$$a_{\text{átl}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

A pillanatnyi gyorsulás:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t).$$

A gyorsulás a sebességnek első, az útnak második deriváltja az idő szerint.

#### VII. Összetett függvény differenciálhányadosa

Legyen az  $y = F(x)$  függvény összetett függvény, azaz

$$y = F(x) = f[g(x)].$$

Másképpen  $y = f(u)$  és  $u = g(x)$ .

Legyen az  $u = g(x)$  differenciálható az  $x$  helyen, és  $y = f(u)$  differenciálható az  $u = g(x)$  helyen.

Meg akarjuk határozni

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{deriváltat.}$$

A differenciálhányados a differenciahányados limesze, ha  $\Delta x \rightarrow 0$ . A  $\frac{dy}{dx}$  szimbólum, a  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  azonban hányados, és ezért érvényesek rá a törtek számolási szabályai (pl. bővítés, törtek szorzása stb.).

Tegyük fel, hogy  $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \neq 0$ , az  $x$  hely környezetében.

Így

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Szabad-e felírni a  $\Delta x \rightarrow 0$  feltétel mellett a  $\Delta u \rightarrow 0$  feltételt? Szabad, mert  $u = g(x)$  folytonos függvény az  $x$  helyen, tehát  $\Delta x \rightarrow 0$ -val egyidejűleg:  $\Delta u \rightarrow 0$  is igaz.

Továbbá: szorzat limesze egyenlő a limeszek szorzatával.

Ezért

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Tehát

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

(Ahol  $\frac{du}{dx}$  az  $u = g(x)$  függvény deriváltja az  $x$  helyen, és  $\frac{dy}{du}$  az  $y = f(u)$  függvény deriváltja az  $u = g(x)$  helyen.)

(A képlet levezetésénél feltettük, hogy  $\Delta u \neq 0$ . Ha  $\Delta x$  olyan, hogy  $\Delta u = 0$ , akkor egyúttal  $\Delta y = 0$ . Tehát minden  $\Delta x$ -re vagy  $\Delta y = 0$ , vagy érvényes a fenti átalakítás. Ha  $\Delta u = 0$  tetszőleges kicsiny  $\Delta x$  esetén is előfordulhat, akkor  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = 0$ . Így adódik, hogy ekkor  $\frac{dy}{dx} = 0$ .)

A kapott összefüggést láncszabálynak nevezzük.

Más jelöléssel

$$\begin{aligned} y &= f[g(x)] \\ y' &= f'[g(x)] \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Összetett függvény differenciálhányadosa egyenlő a külső függvény differenciálhányadosa szorozva a belső függvény differenciálhányadosával.

A szabály többszörösen összetett függvényekre hasonlóan bizonyítható.

Ha

$$y = f(u); \quad u = g(t); \quad t = h(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

#### Példák

$$\begin{aligned} 1. \quad y &= (x^4 - 3x^2 + 5)^{17}. \\ y' &= 17(x^4 - 3x^2 + 5)^{16} \cdot (4x^3 - 6x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad y &= \frac{4}{(x^2 - 6x)^3}. \\ y' &= -\frac{12}{(x^2 - 6x)^4} (2x - 6). \end{aligned}$$

#### VIII. Inverz függvény differenciálhányadosa

Legyen  $y = f(x)$  szigorúan monoton és folytonos függvény. Ekkor létezik inverz függvénye, és az is folytonos függvény. Jelöljük az inverz függvényt

$$x = \varphi(y)\text{-nal!}$$

Kérdés: ha ismerjük egy függvény differenciálhányadosát az  $x$  helyen, mi az inverz függvény differenciálhányadosa az  $x$ -nek megfelelő  $y$  helyen?

A differenciálhányadosokra igaz:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

A határértékre áttérve:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

(A függvények folytonossága miatt ugyanis, ha  $\Delta x \rightarrow 0$ , egyúttal  $\Delta y \rightarrow 0$ .)

Nyilvánvaló, hogy az  $\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$  törtnek csak akkor van véges határértéke  $\Delta x \rightarrow 0$  esetén, ha

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \neq 0$ . Így az inverz függvény deriváltja nem létezik olyan  $y$  helyen, ahol az  $y$ -nak megfelelő  $x$  helyen az eredeti függvény  $y = f(x)$  deriváltja zérus.

Ha  $\frac{dy}{dx} \neq 0$ , akkor

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \\ \varphi'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

Inverz függvény differenciálhányadosa egyenlő az eredeti függvény differenciálhányadosának reciprok értékével, az  $y$ -nak megfelelő  $x$  helyen.

A szabályt néha így alkalmazzuk:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

#### IX. Implicit függvény deriválása

Határozzuk meg az  $F(x, y) = 0$  implicit alakban adott függvény  $y' = f'(x)$  deriváltját!

A deriválást konkrét példán mutatjuk meg.

Határozzuk meg az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  egyenletű ellipszis  $(x_0, y_0)$  pontjában az érintő iránytangensét!

Differenciáljuk az egyenlet mindkét oldalát  $x$  szerint.

$$(x^2)' = 2x$$

$$(y^2)' = 2y y'.$$

(A függvény összetett,  $y$ -nak a belső függvénynek  $x$  szerinti deriváltja  $y'$ .)

Így

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$



Az egyenletből:

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Az  $(x_0, y_0)$  pontban

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}.$$

X. A logaritmusfüggvény differenciálhányadosa

$$y = \log_a x.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}.$$

A logaritmus azonosságai alapján:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_a \left( \frac{x + \Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} \right].$$

A közvetett függvény határérték-tétele alapján:

$$y' = \log_a \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} \right].$$

A 6.2.3 II-ben vizsgált határértékek szerint:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}.$$

$$y' = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Térjünk át az utolsó egyenletben az  $a$  alapú logaritmusról  $e$  alapúra!

$$a^{\log_a e} = e.$$

Vegyük mindkét oldal  $e$  alapú logaritmusát!

$$\log_a e \log_e a = 1.$$

Innen

$$\log_a e = \frac{1}{\log_e a}.$$

Az  $e$  alapú logaritmust *természetes logaritmusnak* (*logarithmus naturalisnak*) nevezik. Így jelöljük:

$$\log_e a = \ln a.$$

Ezzel a jelöléssel, ha

$$y = \log_a x,$$

$$y' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Az  $e$  alapú logaritmus bevezetésével valamennyi logaritmusfüggvény deriváltja kifejezhető hasonló alakban, az alap természetes logaritmusának segítségével. Ez indokolja, hogy a matematikában és a természettudományokban az  $e$  számot használjuk a logaritmus alapjául. A természetes és tízes alapú logaritmusok a következőképpen függnek össze:

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \ln x \cdot M$$

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} = \frac{\lg x}{M},$$

$$\text{ahol } M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,43429,$$

$$\frac{1}{M} \approx 2,32585.$$

Az  $M$  szám a természetes logaritmusról a tízes alapú logaritmusra való áttérés *modulusa*.

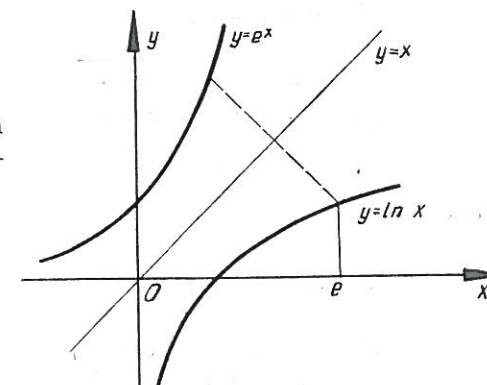
Az  $y = e^x$  függvény inverze:

$$x = \log_e y, \quad \text{azaz}$$

$$x = \ln y.$$

A változók felcserélésével:

$$y = \ln x.$$



7.10 ábra

Ábrázoljuk az  $y = e^x$  függvényt és inverzét, az  $y = \ln x$  függvényt (7.10 ábra)! Határozzuk meg az  $y = \ln x$  függvény differenciálhányadosát!

$$y = \ln x, \quad y' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}.$$

|                                            |                                   |
|--------------------------------------------|-----------------------------------|
| $y = \log_a x$<br>$y' = \frac{1}{x \ln a}$ | $y = \ln x$<br>$y' = \frac{1}{x}$ |
|--------------------------------------------|-----------------------------------|

### XI. Az exponenciális függvény differenciálhányadosa

$$y = a^x.$$

A függvény inverz függvénye:  $x = \log_a y$ .

Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

$$x = \log_a y, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y \ln a}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a.$$

Mivel  $y = a^x$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a.$$

Speciálisan az  $y = e^x$  függvény deriváltja:

$$y' = e^x \ln e = e^x.$$

|                  |            |
|------------------|------------|
| $y = a^x$        | $y = e^x$  |
| $y' = a^x \ln a$ | $y' = e^x$ |

#### Példák

1.  $y = \log_2 \left( x^3 - \frac{1}{x^2} \right).$

$$y' = \frac{1}{\left( x^3 - \frac{1}{x^2} \right) \ln 2} \left( 3x^2 + \frac{2}{x^3} \right).$$

2.  $y = e^{-x} \quad y' = e^{-x}(-1) = -e^{-x}.$

3.  $y = \ln x^2.$

$$y' = \frac{1}{x^2} 2x = 2 \frac{1}{x}.$$

A függvényt a logaritmus azonosságával átalakítva és azután deriválva ugyanezt az eredményt kapjuk.

$$y = \ln x^2 = 2 \ln x, \quad y' = 2 \frac{1}{x}.$$

Nem szabad azonban elfelejteni, hogy míg  $y = 2 \ln x$  értelmezési tartománya  $x > 0$ , addig  $y = \ln x^2$  értelmezési tartománya az  $x = 0$  hely kivételével az egész számegyenes.

### XII. Általános hatványfüggvény differenciálási szabálya

Megmutatjuk, hogy a hatványfüggvény egész kitevőkre felállított differenciálási szabálya tetszőleges valós kitevőre is érvényes.

$$y = x^\alpha \quad (\alpha \text{ valós szám, } x > 0).$$

A logaritmus definíciója szerint:

$$x = e^{\ln x}.$$

$$y = (x^\alpha) = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

$y$ -t közvetett függvényként deriválva:

$$y' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Tehát, ha  $x > 0$ ,  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$

|                            |
|----------------------------|
| $y = x^\alpha$             |
| $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ |

Hatvány deriváltja egyenlő: hatványkitevő szorozva az alap eggyel alacsonyabb hatványával.

#### Példák

1.  $y = \sqrt{x}, \quad y = x^{\frac{1}{2}}, \quad y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

2.  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y = x^{-\frac{1}{2}}, \quad y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$

3.  $y = 2^{\sqrt{x-x^2}}, \quad y' = 2^{\sqrt{x-x^2}} \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} (1-2x).$

4.  $y = x^{\sqrt{3}}, \quad y' = \sqrt{3} \cdot x^{\sqrt{3}-1}.$

### XIII. Trigonometrikus függvények differenciálása

1.  $y = \sin x.$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Az addíciós tételt alkalmazva:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}.$$



Átrendezve:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

Mivel az ismert határértékek (6.2.3 I.) szerint:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \sin x \\ y' = \cos x \end{array}}$$

2.  $y = \cos x.$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \cos x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} - \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right].$$

$$y' = -\sin x.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \cos x \\ y' = -\sin x \end{array}}$$

3.  $y = \operatorname{tg} x.$

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Mint törtet deriváljuk:

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(Mivel  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .)

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{tg} x \\ y' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array}}$$

4.  $y = \operatorname{ctg} x.$

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$y' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{ctg} x \\ y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \end{array}}$$

#### XIV. Ciklometrikus függvények differenciálhányadosai

1.  $y = \arcsin x \quad (-1 \leq x \leq 1).$

Inverze:  $x = \sin y.$

Mint inverz függvényt deriváljuk:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}.$$

Mivel  $\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm \sqrt{1 - x^2},$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - x^2}}.$$

Vizsgáljuk a négyzetgyök előjelét. Ha  $y = \operatorname{Arcsin} x$ , azaz a főértéket tekintjük, akkor

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Az intervallum belsejében  $\cos y > 0$ , ezért a gyököt pozitív előjellel vesszük. Az intervallum végpontjában  $\cos y = 0$ , ott az inverz függvény deriváltja nem létezik.

$$\text{Az } y = \arcsin x = \begin{cases} \operatorname{Arcsin} x + 2k\pi & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ -\operatorname{Arcsin} x + 2k\pi & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

definíció alapján az egyes periódusoknak megfelelően a derivált pozitív, illetve negatív.

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{Arcsin} x \\ y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ y' = \frac{1}{+\sqrt{1 - x^2}} \end{array}}$$

**Megjegyzés.** Az  $y = \arcsin x$  függvény az  $x = -1$  és  $x = 1$  helyeken nem deriválható, mert a nekik megfelelő  $y$  értékek:  $-\frac{\pi}{2}$  és  $+\frac{\pi}{2}$ . Ezeken a helyeken az eredeti függvény deriváltja:  $\cos y = 0$ .

2.  $y = \arccos x.$

Inverze:  $x = \cos y.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\pm \sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\pm \sqrt{1-x^2}}.$$

Ha  $y = \operatorname{Arccos} x$ , akkor  $0 \leq y \leq \pi$ .

Az intervallum belsejében az eredeti függvény deriváltja,  $\sin y$ , mindenütt pozitív, a derivált negatív előjelű lesz. Az intervallum végpontjaiban  $\sin y = 0$ , ott az inverz függvény deriváltja nem létezik.

Az  $y = \arccos x = \begin{cases} \operatorname{Arccos} x + 2k\pi & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ -\operatorname{Arccos} x + 2k\pi & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$

definíció alapján az egyes periódusoknak megfelelően a derivált negatív, illetve pozitív.

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{Arccos} x \\ y' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \arccos x \\ y' &= \frac{-1}{\pm \sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

3.  $y = \operatorname{Arctg} x.$

Inverze:  $x = \operatorname{tg} y.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

A  $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$  azonosságot  $\cos^2 y$ -nal osztva:

$$\operatorname{tg}^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Így  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{Arctg} x \\ y' &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Mivel

$$y = \operatorname{arctg} x = \operatorname{Arctg} x + k\pi,$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

4.  $y = \operatorname{Arcctg} x.$

Inverze:  $x = \operatorname{tg} y.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin^2 y} = -\frac{1}{\sin^2 y}.$$

A  $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$  azonosságot  $\sin^2 y$ -nal osztva:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 y = \frac{1}{\sin^2 y}.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{Arcctg} x \\ y' &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Mivel

$$y = \operatorname{arcctg} x = \operatorname{Arcctg} x + k\pi,$$

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

#### Példák

1.  $y = \sin(\sin x) \quad y' = [\cos(\sin x)] \cos x.$

2.  $y = e^{\operatorname{tg}^2 x} \quad y' = e^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = e^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$

3.  $y = \operatorname{Arctg} e^{-x^2} + \operatorname{Arcsin} \frac{1}{x}.$

$$y' = \frac{e^{-x^2}(-2x)}{1-(e^{-x^2})^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y' = \frac{e^{-x^2}(-2x)}{1+e^{-2x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}.$$

4. Harmonikus rezgő mozgást végez a körön egyenletesen mozgó pontnak a kör síkjában fekvő bármely egyenesre való vetülete.

$$y = r \sin \alpha.$$



Az egyenletben:  $\alpha = \omega t + \varphi$  a forgásszög,  $y$  a kitérés,  $t$  az idő,  $\omega$  a szögsebesség (állandó),  $\varphi$  a kezdőfázis (7.11 ábra).

$$y = r \sin(\omega t + \varphi).$$

$$v = \frac{dy}{dt} = r\omega (\cos \omega t + \varphi).$$

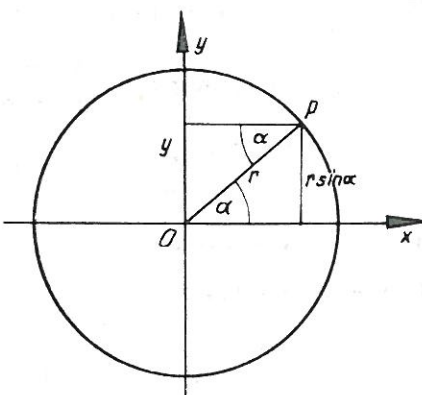
$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -r\omega^2 (\sin \omega t + \varphi),$$

$$a = -\omega^2 y.$$

A rezgő mozgás gyorsulása a kitéréssel arányos és azzal ellentétes előjelű.

Fordítva is érvényes. Ha a gyorsulás a kitéréssel arányos és azzal ellentétes, a mozgás harmonikus rezgő mozgás, amelyet egy

$$y = a \sin(bt + c) \quad \text{egyenlet ír le.}$$



7.11 ábra

Ez utóbbit majd a differenciálegyenletekkel kapcsolatban fogjuk bizonyítani.

XV. Az  $y = [f(x)]^{g(x)}$  alakú függvények differenciálása

A módszert konkrét példán mutatjuk meg:

$$y = x^x.$$

$$x = e^{\ln x}, \quad y = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}.$$

$$y = x^x = e^{x \ln x}.$$

Mint közvetett függvényt deriváljuk:

$$y' = e^{x \ln x} \left( 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1).$$

A deriválást más módszerrel is elvégezhetjük:

$$y = x^x.$$

Vegyük mindkét oldal természetes logaritmusát:

$$\ln y = x \ln x.$$

Mindkét oldalt deriválva:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

$$y' = y (\ln x + 1).$$

$$y' = x^x (\ln x + 1).$$

Ezt az eljárást logaritmikus differenciálásnak nevezzük. Hasonló módon ezzel a két módszerrel deriválhatjuk általában az

$$y = [f(x)]^{g(x)} \quad \text{alakú függvényeket is.}$$

### 7.1.3.1 Hiperbolikus függvények

A hiperbolikus függvények definíciója a következő:

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{olv.: szinusz hiperbolikus } x).$$

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{olv.: koszinusz hiperbolikus } x).$$

$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{olv.: tangens hiperbolikus } x).$$

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{olv.: kotangens hiperbolikus } x).$$

$$1. \quad y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

A függvény görbét megkapjuk, ha az  $y = e^x$  és  $y = -e^{-x}$  görbék ordinátáit egymásból kivonjuk, és a különbség felét vesszük (7.12 ábra).

A függvény mindenütt értelmezve van. A függvény páratlan:

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{sh}(+x).$$

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$\text{Ha } x \rightarrow +\infty, \quad y = \operatorname{sh} x \rightarrow +\infty,$$

$$\text{ha } x \rightarrow -\infty, \quad y = \operatorname{sh} x \rightarrow -\infty,$$

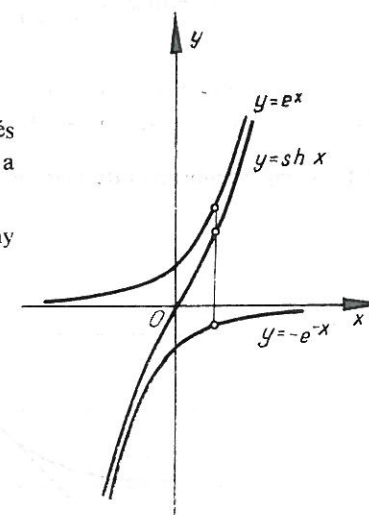
$$\text{ha } x = 0, \quad y = \operatorname{sh} x = 0.$$

$$2. \quad y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

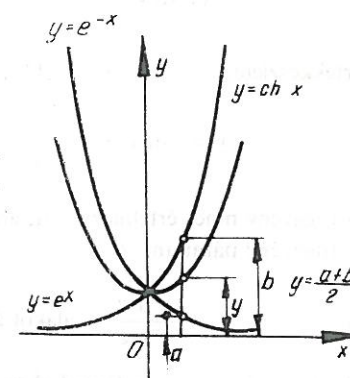
A görbét megkapjuk, ha az  $y = e^x$  és  $y = e^{-x}$  függvényértékeket minden egyes  $x$  pontnál összeadjuk, és a kapott ordinátaérték felét vesszük (7.13 ábra).

$$\text{Az } y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{páros függvény:}$$

$$y(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = y(+x).$$



7.12 ábra



7.13 ábra

Ha  $x = 0$ ,  $y = 1$ . Ha  $x \rightarrow \pm \infty$ ,  $y \rightarrow +\infty$ .

$$3. \quad y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$y(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -y(x),$$

a függvény páratlan.

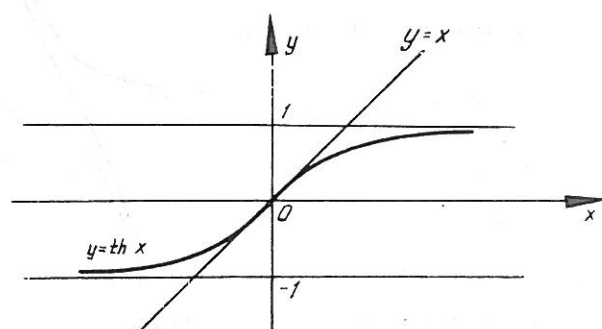
$$y(0) = 0.$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \quad \text{Bővítsük a törtet } e^x\text{-szel!}$$

$$y = \operatorname{th} x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ha } x &\rightarrow +\infty, & y &\rightarrow 1, \\ \text{ha } x &\rightarrow -\infty, & y &\rightarrow -1. \end{aligned}$$

A függvény értelmezési tartománya:  $-\infty < x < +\infty$ ,



7.14 ábra

értékkészlete:  $-1 < y < 1$  (7.14 ábra).

$$4. \quad y = \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

A függvény nincs értelmezve ott, ahol a nevező zérus, tehát az  $x = 0$  helyen.

A függvény páratlan.

$$\text{Az } y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ alakot átalakítva } y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Ha  $x \rightarrow +0$ ,  $y \rightarrow +\infty$  (mivel  $e^x > 1$ , ha  $x > 0$ ).

A függvény páratlan, ezért ha  $x \rightarrow -0$ ,  $y \rightarrow -\infty$ .

A függvény így is írható:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + \frac{1}{e^{2x}}}{1 - \frac{1}{e^{2x}}}.$$

Ha  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y \rightarrow +1$ ; ha  $x \rightarrow -\infty$ ,  $y \rightarrow -1$ .

Tehát  $y = \operatorname{cth} x$  függvény értelmezési tartománya:  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ,

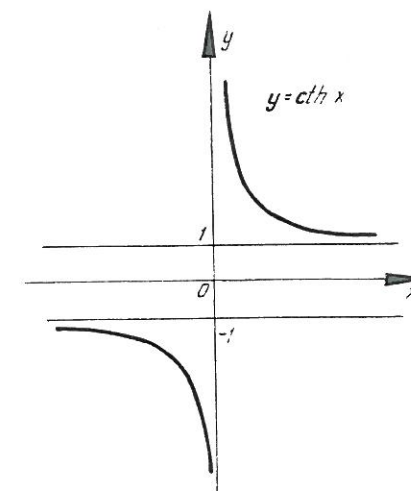
értékkészlete:  $-\infty < y < -1 \cup 1 < y < +\infty$  (7.15 ábra).

Összefüggések a hiperbolikus függvények között

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \\ &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1. \end{aligned}$$

Tehát

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.}$$



Ez az összefüggés nagyon fontos. Ebből:

7.15 ábra

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}.$$

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}, \quad \text{ha } x \geq 0,$$

$$\operatorname{sh} x = -\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}, \quad \text{ha } x < 0.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \\ &= 2 \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch} 2x. \end{aligned}$$

Tehát:

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x}$$

Majör János



Az előbbi összefüggések emlékeztetnek a

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

és  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$  összefüggésekre.

Hiperbolikus függvények deriváltjai:

$$1. \quad (\operatorname{sh} x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

$$\begin{array}{l} y = \operatorname{sh} x \\ y' = \operatorname{ch} x \end{array}$$

$$2. \quad (\operatorname{ch} x)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

$$\begin{array}{l} y = \operatorname{ch} x \\ y' = \operatorname{sh} x \end{array}$$

$$3. \quad (\operatorname{th} x)' = \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \cdot \operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)' \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\begin{array}{l} y = \operatorname{th} x \\ y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \end{array}$$

$$4. \quad (\operatorname{cth} x)' = \left( \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{\operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch} x)' - (\operatorname{sh} x)' \cdot \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$\begin{array}{l} y = \operatorname{cth} x \\ y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \end{array}$$

Látjuk, hogy a differenciálási szabályok emlékeztetnek a trigonometrikus függvények differenciálási szabályaira.

A hiperbolikus függvények és a hiperbola kapcsolata könnyen kimutatható.

Vegyük az  $x = \operatorname{ch} t$

$y = \operatorname{sh} t$  függvényeket!

Most  $x$ -et és  $y$ -t mint ugyanazon  $t$  változó függvényét tekintjük. (A  $t$  közös változó, paraméter.)

Számítsuk ki az  $x^2 - y^2$  függvényértéket!

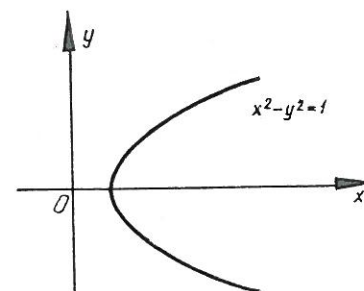
$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1,$$

azaz  $x^2 - y^2 = 1$ ,

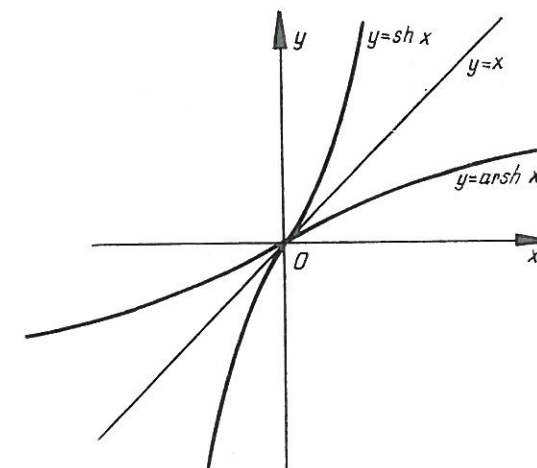
ez pedig a hiperbola egyenlete (7.16 ábra).

Ha  $t$  0-tól  $\infty$ -ig nő,  $\operatorname{ch} t$  1-től  $\infty$ -ig,  $\operatorname{sh} t$  pedig 0-tól  $\infty$ -ig nő, így az  $(x; y)$  pont a hiperbola jobb oldali ágának felső felét írja le.

Hasonlóan látható, hogy ha  $t$  0-tól  $-\infty$ -ig csökken, akkor az  $(x; y)$  futópont a jobb oldali ág alsó felét futja be.



7.16 ábra



7.17 ábra

### 7.1.3.2 Az area függvények

A hiperbolikus függvények inverzeit *area függvényeknek* nevezzük.

1. Az  $y = \operatorname{sh} x$  függvény inverzét  $y = \operatorname{arsh} x$ -szel jelöljük (ejtsd: area szinusz hiperbolikus). Ezzel a jellel fejezhetjük ki tehát explicit alakban az  $y = \operatorname{sh} x$ -ből  $x$ -nek  $y$ -tól való függését.  $y = \operatorname{sh} x$ ,  $x = \operatorname{arsh} y$ . A változók szerepét felcserélve:

$$y = \operatorname{arsh} x.$$

Az  $y = \operatorname{arsh} x$  függvény görbéje az  $y = \operatorname{sh} x$  függvény görbéjének tükörképe az  $y = x$  egyenesre (7.17 ábra).

Az  $y = \operatorname{arsh} x$  függvény differenciálását az inverz függvény differenciálási szabálya szerint végezzük.

Képezzük a függvény deriváltját:

$$y = \operatorname{arsh} x.$$

$$x = \operatorname{sh} y.$$

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{ch} y.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

(A gyök előjele csak pozitív lehet, mivel  $\operatorname{ch} y > 0$ .)

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arsh} x \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

2.  $y = \operatorname{arch} x$  (ejtsd: area koszinusz hiperbolikus  $x$ ).

Az  $y = \operatorname{ch} x$  függvény nem monoton. A  $[-\infty; 0]$  és  $[0; +\infty]$  intervallumokba eső szakaszai monotonok.

Az  $y = \operatorname{ch} x$  függvény  $x \geq 0$  szakasza monoton növekvő és folytonos, van inverz függvénye. Ezt így jelöljük:  $y = \operatorname{arch} x$ .

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{ch} x \\ x &= \operatorname{arch} x \quad (y \geq 1). \end{aligned}$$

A változók szerepét felcserélve

$$y = \operatorname{arch} x.$$

A függvény görbét megkapjuk, ha az  $y = \operatorname{ch} x$  görbéjének  $x \geq 0$  szakaszát tükrözzük az  $y = x$  egyenesre (7.18 ábra).

Mivel  $y = \operatorname{ch} x \geq 1$ ,

$y = \operatorname{arch} x$  csak  $x \geq 1$ -re van értelmezve.

Képezzük  $y = \operatorname{arch} x$  differenciálhányadosát!

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch} y, \\ \frac{dx}{dy} &= \operatorname{sh} y, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (\text{ha } x > 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arch} x \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

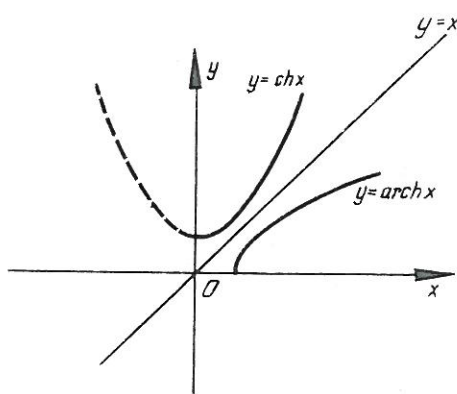
A gyök értéke csak pozitív lehet, mert ha  $y > 0$ , akkor  $\operatorname{sh} y > 0$ .

3.  $y = \operatorname{arth} x$ .

A függvény az  $y = \operatorname{th} x$  inverze.

$y = \operatorname{th} x$ -ből  $x$ -et kifejezve így jelöljük:

$$x = \operatorname{arth} y.$$



7.18 ábra

A változók szerepét felcserélve:

$y = \operatorname{arth} x$  (ejtsd: area tangens hiperbolikus  $x$ ).

A függvény képét megkapjuk, ha az  $y = \operatorname{th} x$  görbét tükrözzük az  $y = x$  tengelyre (7.19 ábra).

Mivel

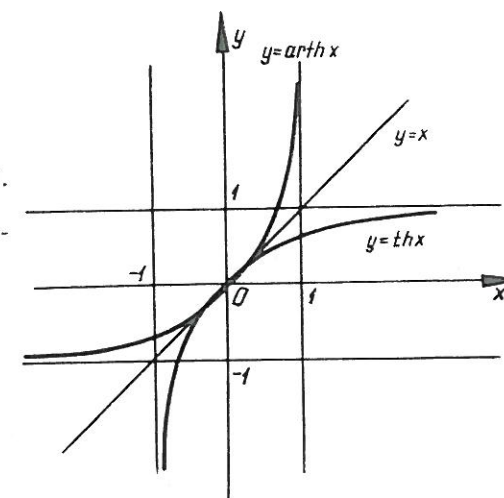
$$-1 < \operatorname{th} x < 1,$$

az  $y = \operatorname{arth} x$  értelmezési tartománya

$$-1 < x < 1, \text{ azaz } |x| < 1.$$

Határozzuk meg az  $y = \operatorname{arth} x$  differenciálhányadosát!

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{th} y, \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}} = \operatorname{ch}^2 y. \end{aligned}$$



7.19 ábra

Mivel  $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$ -ből  $\operatorname{ch}^2 y$ -nal osztva

$$1 - \operatorname{th}^2 y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} \text{ -t kapjuk, ezért}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arth} x \\ y' &= \frac{1}{1 - x^2} \end{aligned}$$

4.  $y = \operatorname{arch} x$ .

A függvény  $y = \operatorname{cth} x$  inverze (7.20 ábra).

$y = \operatorname{cth} x$ -ből  $x$ -et kifejezve:

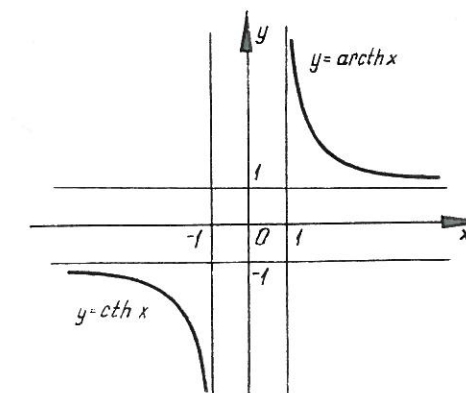
$$x = \operatorname{arch} y.$$

A változók szerepét felcserélve:

$y = \operatorname{arch} x$  (ejtsd: area kotangens hiperbolikus  $x$ ).

Mivel  $y = \operatorname{cth} x$  értékkészlete:  $|y| > 1$ ,

$y = \operatorname{arch} x$  értelmezési tartománya:  $|x| > 1$ .



7.20 ábra



Határozzuk meg a függvény deriváltját:

$$y = \operatorname{arcth} x.$$

$$x = \operatorname{cth} y.$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y}.$$

Mivel  $\operatorname{sh}^2 y - \operatorname{ch}^2 y = -1$ -ből  $\operatorname{sh}^2 y$ -nal való osztással

$$1 - \operatorname{cth}^2 y = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} \text{-t kapjuk, ezért}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{1 - \operatorname{cth}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}, \quad \text{ha } |x| > 1.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{artch} x \\ y' = \frac{1}{1-x^2} \end{array}}$$

### Az area függvények logaritmikus alakja

1.  $y = \operatorname{arsh} x,$

Inverze:  $x = \operatorname{sh} y,$  azaz  $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$

Fejezzük ki ebből az egyenletből  $y$ -t!

$$2x = e^y - e^{-y}.$$

$$2xe^y = e^{2y} - 1.$$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Mivel  $e^y$  minden  $y$ -ra pozitív, és  $|x| < \sqrt{1+x^2}$ , a gyök előjele csak pozitív lehet. Ezért:

$$e^y = x + \sqrt{1+x^2},$$

innen  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$

Tehát

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Határozzuk meg a differenciálhányadost ebből az alakból!

$$y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2.  $y = \operatorname{arch} x.$  A függvény értelmezési tartománya  $x \geq 1.$

$$x = \operatorname{ch} y.$$

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$2x = e^y + e^{-y}$$

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Innen:

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}), \quad \text{ha } x \geq 1.$$

$|x| > \sqrt{x^2 - 1}$ , ezért  $e^y$ -ra a gyököket pozitív és negatív előjellel nézve is pozitív értéket kapunk.

Az  $e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$  egyenletből

$$y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}).$$

Az  $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}),$  az  $y = \operatorname{ch} x \quad -\infty < x < 0,$

az  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$  az  $y = \operatorname{ch} x \quad 0 \leq x < +\infty$

szakaszának inverze. Mivel az  $y = \operatorname{arch} x$ -et mint az  $y = \operatorname{ch} x \quad 0 \leq x < +\infty$ -re eső szakaszának inverzét definiáltuk:

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Deriválva:

$$y' = \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - 1})} \cdot \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1).$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & y = \operatorname{arth} x, \\
& x = \operatorname{th} y, \\
& x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}, \\
& x e^y + x e^{-y} = e^y - e^{-y} \\
& x e^{2y} + x = e^{2y} - 1 \\
& 1 + x = e^{2y}(1 - x) \\
& e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \\
& 2y = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \\
& y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \quad \text{ha } |x| < 1.
\end{aligned}$$

Így

$$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \quad \text{ha } |x| < 1.$$

E kifejezés így is írható:

$$y = \operatorname{arth} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

Deriválva az

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \quad \text{függvényt:} \\
y' &= \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} \\
y' &= \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan kaphatjuk, hogy

$$y = \operatorname{arch} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad \text{ha } |x| > 1.$$

**Példák**

$$\begin{aligned}
1. \quad & y = \sqrt{\operatorname{sh} 3x}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sh} 3x}} \cdot \operatorname{ch} 3x \cdot 3 = \frac{3}{2} \frac{\operatorname{ch} 3x}{\sqrt{\operatorname{sh} 3x}} \\
2. \quad & y = \operatorname{arch} \frac{x}{2}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \\
3. \quad & y = \operatorname{arth} \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

**7.1.3.3 A differenciálási szabályok összefoglalása**

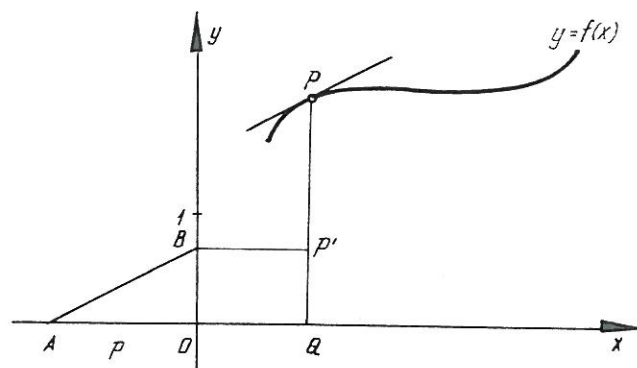
|                                                                 |                                                                 |                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $y' = 0$                                                        | $y = a^x$<br>$y' = a^x \cdot \ln a$                             | $y = \operatorname{Arcctg} x$<br>$y' = -\frac{1}{1+x^2}$              |
| $y = c \cdot f(x)$<br>$y' = c \cdot f'(x)$                      | $y = e^x$<br>$y' = e^x$                                         | $y = \operatorname{sh} x$<br>$y' = \operatorname{ch} x$               |
| $y = f(x) \pm g(x)$<br>$y' = f'(x) \pm g'(x)$                   | $y = \sin x$<br>$y' = \cos x$                                   | $y = \operatorname{ch} x$<br>$y' = \operatorname{sh} x$               |
| $y = u \cdot v$<br>$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$               | $y = \cos x$<br>$y' = -\sin x$                                  | $y = \operatorname{th} x$<br>$y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$   |
| $y = \frac{u}{v}$<br>$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ | $y = \operatorname{tg} x$<br>$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$          | $y = \operatorname{cth} x$<br>$y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ |
| $y = f[g(x)]$<br>$y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$                    | $y = \operatorname{ctg} x$<br>$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$        | $y = \operatorname{arsh} x$<br>$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$          |
| $y = x^\alpha$<br>$y' = \alpha x^{\alpha-1}$                    | $y = \operatorname{Arcsin} x$<br>$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  | $y = \operatorname{arch} x$<br>$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$          |
| $y = \log_a x$<br>$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$                | $y = \operatorname{Arccos} x$<br>$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $y = \operatorname{arth} x$<br>$y' = \frac{1}{1-x^2}$                 |
| $y = \ln x$<br>$y' = \frac{1}{x}$                               | $y = \operatorname{Arctg} x$<br>$y' = \frac{1}{1+x^2}$          | $y = \operatorname{arch} x$<br>$y' = \frac{1}{1-x^2}$                 |



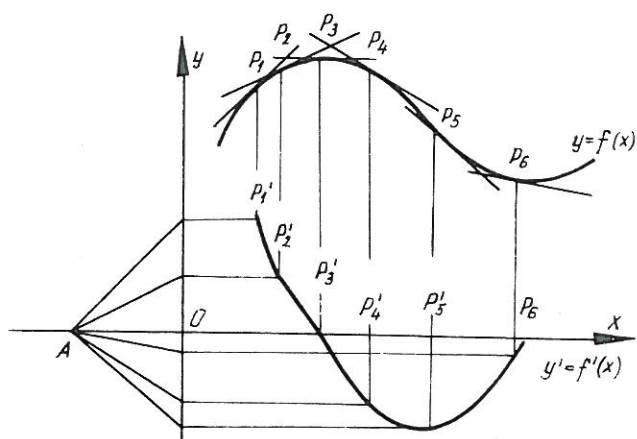
### 7.1.4 Grafikus differenciálás

Legyen adott az  $y = f(x)$  függvény a 7.21 ábrán levő grafikonnal. Határozzuk meg a differenciáhányadost a  $P$  pontban!

A  $Q$  helyhez tartozó  $P$  pontban meghúzzuk a görbe érintőjét, szemlélet alapján.



7.21 ábra



7.22 ábra

Jelöljük az  $x$  tengely  $(-1)$  pontját  $A$ -val. A grafikus differenciálás pólusa  $A$ , az  $AO$  irányított szakasz hossza a pólustávolság:  $|AO| = p = 1$ .

Húzzunk a pólusból az érintővel párhuzamost az  $y$  tengelyig,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BO}{|AO|}, \quad \operatorname{tg} \alpha = y', \quad \overline{AO} = 1.$$

Így  $y' = BO$

Húzzunk  $B$ -ből az  $x$  tengellyel párhuzamost!  $P'Q$  az  $x$  tengely  $Q$  helyén a derivált értéke. Ha ezt az eljárást a görbe több pontjában elvégezzük, és a derivált megfelelő értékeit folytonos vonallal kötjük össze, a derivált függvény közelítő képét kapjuk (7.22 ábra). Az eljárást grafikus differenciálásnak nevezzük.

### 7.1.5 A differenciál

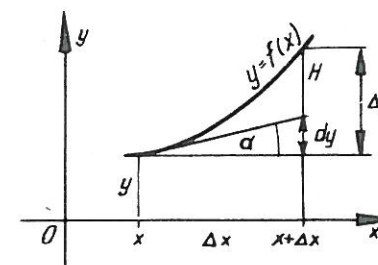
A matematikai analízisben és fizikai, illetve műszaki alkalmazásaiban alapvető fontosságú fogalom a függvény differenciálja.

Legyen az  $y = f(x)$  függvény az  $x$  hely környezetében differenciálható. Vizsgáljuk a  $\Delta x$  szakaszon a függvény és az  $x$  helyhez tartozó érintő ordinátáinak változását.

Jelöljük a függvény változását  $\Delta y$ -nal, az érintőét  $dy$ -nal. A 7.23 ábrából leolvasható:

$$dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x.$$

$$\begin{aligned} \text{Mivel} \quad \operatorname{tg} \alpha &= f'(x), \\ dy &= f'(x) \Delta x. \end{aligned}$$



A  $dy = f'(x) \Delta x$  értéket az  $f(x)$  függvény differenciáljának nevezzük.

Mikor helyettesíthető kicsiny  $\Delta x$  esetén a függvénynövekmény a differenciállal?

A függvénynövekmény:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad \text{A 7.23. ábra szerint:}$$

$$\Delta y = dy + H.$$

$dy$ , a differenciál, a főrész;  $H$  az ún. hiba.

$$\Delta y \approx dy \quad \text{akkor,}$$

ha  $H$  még  $\Delta x$ -hez képest is elhanyagolhatóan kicsi, azaz

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{H}{\Delta x} = 0.$$

Az  $f(x) = x$  függvény esetén  $f'(x) = 1$ , a függvény differenciálja:

$$dx = 1 \cdot \Delta x.$$

Így  $\Delta x$ -et  $dx$ -szel is jelölhetjük.

$$dy = f'(x) dx,$$

ahol  $dy$  a függvény,  $dx$  a független változó differenciálja.

$$\Delta y \approx dy$$

közelítő egyenlőséggel:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x.$$

A függvénynövekményt egyenes növekményével helyettesítettük, azaz lineárisan közelítettünk.

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény az  $x_0$  helyen lineárisan approximálható, ha a függvény-növekmény:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

alakban írható, ahol  $A$   $\Delta x$ -től független állandó, és  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ha  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**I. tétel.** Ha az  $f(x)$  függvény az  $x_0$  helyen deriválható, akkor ott lineárisan approximálható.

**Bizonyítás.** A derivált definíciója szerint

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Ez így is írható:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

ahol  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ha  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Megjegyzés.**  $\varepsilon$  ebben az esetben negatív is lehet. Az utolsó egyenletből:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon,$$

ahol  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ha  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Innen:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x.$$

$f'(x_0) = A$  jelöléssel:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x.$$

Érvényes a tétel megfordítása.

**II. tétel.** Ha az  $x_0$  pontban valamely  $y = f(x)$  függvény lineárisan approximálható, akkor ott deriválható.

**Bizonyítás.** A lineáris approximáció definíciója értelmében

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

és  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ha  $\Delta x \rightarrow 0$ .

$\Delta x$ -szel osztva:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \varepsilon.$$

A határértékre térve, ha  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , így

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy kis  $\Delta x$  változások esetén ott, ahol a függvény deriválható, a függvény-növekmény közelítőleg helyettesíthető a differenciállal.

A  $dy = f'(x) dx$  differenciálalakból

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

A derivált (differenciálhányados) felfogható mint a differenciálok hányadosa.

## 7.1.6 A differenciálszámítás középértéktételei

### 1. A Rolle-féle tétel

**Tétel.** Legyen az  $y = f(x)$  függvény az  $[a; b]$  intervallumban folytonos és  $(a; b)$ -ben differenciálható. Ha a függvény az intervallum végpontjaiban nulla, akkor a függvény belsejében van legalább egy olyan pont, ahol a differenciálhányados nulla.

Tehát, ha  $f(a) = 0$  és  $f(b) = 0$ , akkor van olyan  $a < \xi < b$  (7.24 ábra), hogy

$$f'(\xi) = 0.$$

**Bizonyítás.** A zárt intervallumban folytonos függvényekre vonatkozó Weierstrass-tétel értelmében az adott  $f(x)$ -nek az intervallumban van maximuma és minimuma.

Ha mind a maximum, mind a minimum az intervallum két végpontjában van, a függvény azonosan zérus, a tétel evidens. Ha a maximum és minimum közül legalább az egyik az intervallum belsejében valamely  $x = x_0$  helyen van, ott a derivált zérus. Ezt így láthatjuk be.

Az  $x_0$  pont belső pont, ezért van olyan  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  környezete, amely  $[a; b]$  belsejében van.

Ha az  $x_0$  helyen maximum van, akkor az  $(x_0; x_0 + \delta)$  intervallumban  $f(x) < f(x_0)$ .

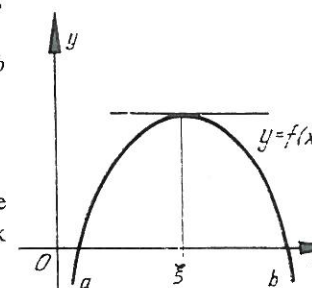
Ugyanúgy az  $(x_0 - \delta; x_0)$  intervallumban  $f(x) < f(x_0)$ .

Vegyük az  $x_0$  helyen a függvény differenciálhányadosát:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

A maximum miatt:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0.$$



7.24 ábra



Ha  $\Delta x > 0$ , akkor

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0. \text{ Határértéke:}$$

$$(1) \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Hasonlóan, ha  $\Delta x < 0$ , mivel a maximum miatt

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0. \text{ Határértéke:}$$

$$(2) \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Az (1) és (2) összefüggések egyszerre csak akkor állhatnak fenn, ha

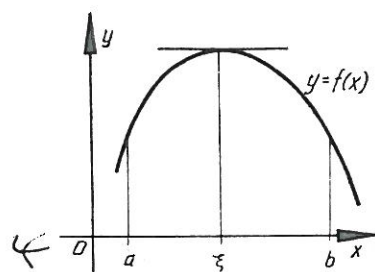
$$f'(x_0) = 0.$$

Hasonlóképpen látható be, hogy ha a függvénynek az intervallum belsejében levő  $x_0$  helyen minimuma van, ott a derivált zérus.

Tehát, ha  $f(a) = f(b) = 0$ , akkor  $f'(\xi) = 0$ , ahol  $a < \xi < b$ .

Geometriailag: az érintő legalább egy helyen vízszintes.

**A Rolle-tétel általánosítása.** Legyen az  $y = f(x)$  az  $[a; b]$ -ben folytonos és  $(a; b)$ -ben differenciálható. Ha  $f(a) = f(b)$ , akkor van legalább egy olyan  $\xi$  hely, hogy  $f'(\xi) = 0$ , ahol  $a < \xi < b$  (7.25 ábra). A tétel az előzőből a koordináta-rendszer eltolásával könnyen belátható.



7.25 ábra

## II. A Lagrange-féle középértéktétel

**Tétel.** Legyen  $y = f(x)$   $[a; b]$ -ben folytonos és  $(a; b)$ -ben differenciálható.

Az intervallum belsejében van legalább egy pont, ahol az érintő párhuzamos a húrral (7.26 és 7.27 ábra).

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{ahol} \quad a < \xi < b.$$

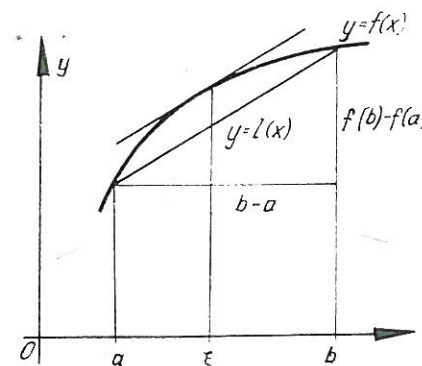
**Bizonyítás.** Legyen a görbe egyenlete  $y = f(x)$ , a végpontokat összekötő szelő  $y = l(x)$ . Képezzük a következő függvényt:

$$F(x) = f(x) - l(x).$$

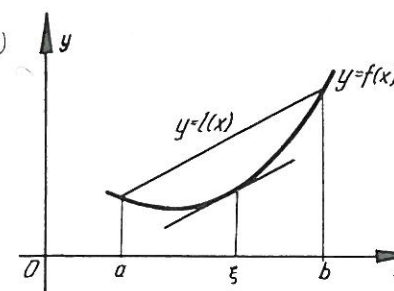
A végpontokban  $f(a) = l(a)$  és  $f(b) = l(b)$ .

Így az  $y = F(x)$  függvény az  $a$  és  $b$  pontokban zérus.

$$F(a) = F(b) = 0.$$



7.26 ábra



7.27 ábra

$F(x)$ -re érvényes a Rolle-tétel:

$$F'(\xi) = 0.$$

$$F'(x) = f'(x) - l'(x).$$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - l'(\xi) = 0.$$

Innen  $f'(\xi) = l'(\xi)$ .

A szelő iránytangense mindenütt állandó

$$l'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Így  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , ahol  $a < \xi < b$ .

Ezzel a Lagrange-féle középértéktételt bebizonyítottuk. [LAGRANGE (1736 – 1813) francia matematikus.]

Az intervallum végpontjait  $x_1$  és  $x_2$ -vel jelölve:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \text{ahol} \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Írjuk fel a tételt az  $[x; x+h]$  intervallumra:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\xi),$$

ahol  $\xi$   $x$  és  $x+h$  között fekszik.

Ezt így jelöljük:  $\xi = x + \vartheta h$ ,

ahol  $0 < \vartheta < 1$ .

Az egyenlet így írható:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x + \vartheta h), \quad \text{ahol} \quad 0 < \vartheta < 1.$$

**Példa**

Az  $y = ax^2 + bx + c$  parabola  $x_1 < x < x_2$  intervallumában hol párhuzamos az érintő a húrral (7.28 ábra)?

$$\begin{aligned} y_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 - y_1 &= a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

A húr iránytangense:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) + b.$$

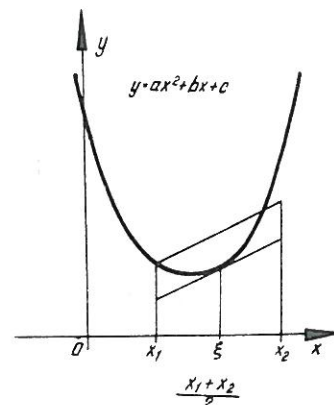
Az érintő iránytangense:

$$y' = 2ax + b.$$

Az  $x = \xi$  helyen az érintő párhuzamos a húrral:

$$2a\xi + b = a(x_2 + x_1) + b, \quad \text{innen}$$

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$



7.28 ábra

Az intervallum középpontjában a húr párhuzamos az érintővel.

**III. A Cauchy-féle középértéktétel**

**Tétel.** Ha  $y = f(x)$  és  $y = g(x)$  az  $[x_1; x_2]$  intervallumban folytonos  $(x_1; x_2)$ -ben differenciálható függvények, és  $g'(x)$  az intervallum belsejében sehol sem nulla, akkor

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{ahol } x_1 < \xi < x_2.$$

**Bizonyítás.** A  $g'(x) \neq 0$  feltételből következik, hogy  $g(x_2) - g(x_1) \neq 0$ . Ellenkező esetben ugyanis a Rolle-tételből az következne, hogy az  $(x_1; x_2)$  intervallum valamely pontjában a derivált zérus volna.

Írjuk fel a következő függvényt:

$$(1) \quad F(x) = f(x) + Cg(x),$$

ahol  $C$  konstans.

Határozzuk meg  $C$  értékét úgy, hogy

$$F(x_1) = F(x_2), \quad \text{legyen:}$$

$$f(x_1) + Cg(x_1) = f(x_2) + Cg(x_2).$$

Az egyenletből:

$$C = -\frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)}.$$

$C$  értékét (1)-be helyettesítve:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} g(x).$$

Mivel  $F(x_1) = F(x_2)$ , érvényes rá a Rolle-tétel általánosított alakja

$$F'(\xi) = 0, \quad \text{ahol } x_1 < \xi < x_2.$$

$F(x)$ -et deriválva:

$$(2) \quad F'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} \cdot g'(x).$$

Az  $x = \xi$  helyen  $F'(\xi) = 0$ .

Tehát (2)-ből

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{ahol } g'(\xi) \neq 0, \quad \text{és } x_1 < \xi < x_2.$$

**7.2 A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA****7.2.1 Síkgörbék érintője és normálisa**

Az  $y = f(x)$  függvény görbéjének érintője az  $x = x_0$  helyen az

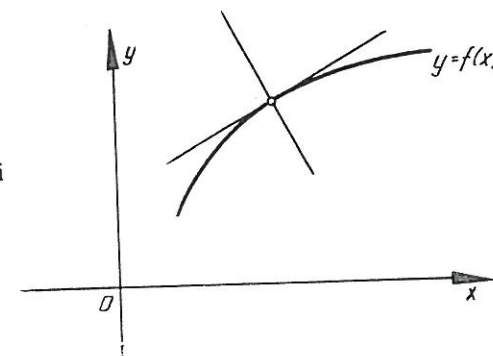
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

egyenes.

A görbe normálisa merőleges az érintési pontban az érintőre (7.29 ábra).

A normális egyenlete:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0.$$



7.29 ábra

Vezessük be a következő elnevezéseket és jelöléseket (7.30 ábra):

$$PA = t = \text{tangens,}$$

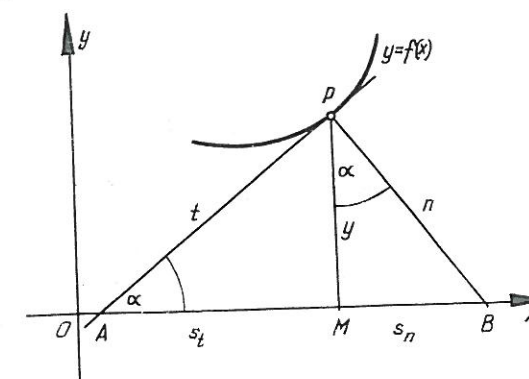
$$PB = n = \text{normális,}$$

$$AM = s_t = \text{szubtangens,}$$

$$BM = s_n = \text{szubnormális.}$$

$$y = f(x); \quad \operatorname{tg} \alpha = y' =$$

$$= f'(x).$$



7.30 ábra



Az ábrából látható:

$$t = \frac{y}{\sin \alpha} = y \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y}{y'} \sqrt{1+y'^2},$$

$$n = \frac{y}{\cos \alpha} = y \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = y \sqrt{1+y'^2}.$$

$$s_t = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y}{y'}.$$

$$s_n = y \cdot \operatorname{tg} \alpha = y \cdot y'.$$

**Két görbe metszési szöge.** Ha két görbe metszi egymást, metszési szögükön a közös pontban húzott érintők szögét értjük (7.31 ábra).

Ha a két görbe  $y = f(x)$  és  $y = g(x)$ ,

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}.$$

#### Példák

1. Írjuk fel az  $y = \cos \frac{1}{2} x$  görbe érintőjét és normálisát az  $x = \frac{\pi}{3}$  pontban!

$$x_0 = \frac{\pi}{3}; \quad y_0 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$y' = -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} x; \quad y'_0 = -\frac{1}{4}.$$

Az érintő egyenlete:

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{4} \left( x - \frac{\pi}{3} \right); \quad y = -\frac{1}{4} x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}.$$

A normális egyenlete:

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \left( x - \frac{\pi}{3} \right); \quad y = 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4\pi}{3}.$$

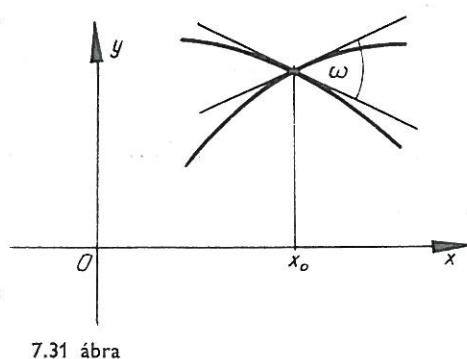
2. A kör érintőjének egyenlete. Ha a középpont az origó, a kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

deriválva  $2x + 2yy' = 0$ .

$$y' = -\frac{x}{y},$$

$$y'_0 = -\frac{x_0}{y_0}.$$



7.31 ábra

Az  $(x_0; y_0)$  pontban az érintő egyenlete:

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0} (x - x_0) \quad (7.32 \text{ ábra}).$$

Innen  $yy_0 - y_0^2 = -xx_0 + x_0^2$

$$xx_0 + yy_0 = x_0^2 + y_0^2.$$

Tehát:  $xx_0 + yy_0 = r^2$ .

Ha a középpont  $(\alpha; \beta)$  és a sugár  $r$ :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

$$2(x - \alpha) + 2(y - \beta)y' = 0.$$

Az érintő iránytangense:

$$y' = -\frac{x - \alpha}{y - \beta}.$$

Az  $(x_0; y_0)$  pontban

$$y'_0 = -\frac{x_0 - \alpha}{y_0 - \beta}.$$

Az érintő egyenlete:

$$y - y_0 = -\frac{x_0 - \alpha}{y_0 - \beta} (x - x_0) \quad (7.33 \text{ ábra}).$$

3. Mekkora az  $y = \operatorname{Arctg} x$  görbe  $x = 1$  pontjához tartozó szubtangens és szubnormális (7.34 ábra)?

$$x_0 = 1. \quad y_0 = \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}; \quad y'_0 = \frac{1}{2}.$$

$$s_t = \frac{y_0}{y'_0} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$s_n = y_0 \cdot y'_0 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

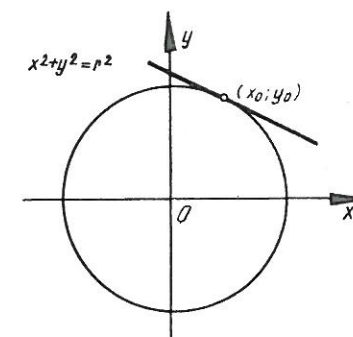
4. A parabola érintőinek tulajdonságaiból levonható következtetések

Az  $y = ax^2$  parabola érintője az  $x = x_0$  pontban, mivel  $y'_0 = 2ax_0$  és  $y_0 = ax_0^2$ :

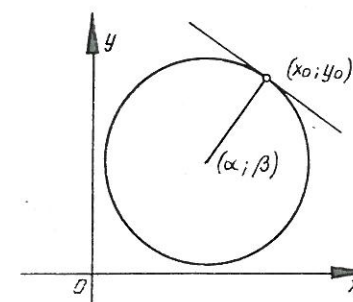
$$y - ax_0^2 = 2ax_0(x - x_0).$$

$$y = 2ax_0x - ax_0^2.$$

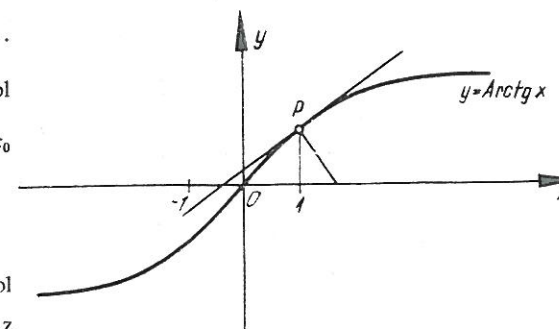
Az érintő az  $x$  tengelyt ott metszi, ahol  $y = 0$ , azaz az  $x = \frac{x_0}{2}$  pontban. Az érintő az  $x$  tengelyt az érintési pont absz-



7.32 ábra



7.33 ábra



7.34 ábra

cisszájának felénél metszi. Ezért az érintőt úgy szerkesztjük meg, hogy a  $OQ$  szakasz felezőpontját  $P$ -vel összekötjük, vagy a  $PQ$  szakaszt felmérjük a  $-y$  tengelyre, és  $PP'$ -t meghúzzuk (7.35 ábra).

Emeljünk az érintőre az  $E\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$  pontban merőlegest. Egyenlete

$$y - 0 = -\frac{1}{2ax_0} \left(x - \frac{x_0}{2}\right).$$

Ez az egyenes az  $y$  tengelyt ott metszi, ahol  $x = 0$ .

$$y = \frac{1}{4a}.$$

Mivel az  $y = ax^2$  parabolánál  $a = \frac{1}{2p}$ ,

$$y = \frac{p}{2}.$$

7.35 ábra

Tehát az  $F$  pont független a  $P$  pont helyétől:  $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ . Végül húzzunk a  $P$  pontból egy függőlegest.

$$\begin{array}{l} \delta = \gamma \quad (PFE\Delta \cong P'FE\Delta) \\ \gamma' = \gamma \quad (\text{egyállású szögek}) \\ \text{Így} \quad \gamma' = \delta. \end{array}$$

Ebből következik, hogy pót szögük

$$\alpha = \beta.$$

Ez az egyenlőség a fényvisszaverődés törvénye. A tulajdonság nem változik, ha a parabolát tengelye körül elforgatjuk. Eszerint a forgási paraboloid alakú fémtükörben a tengelyekkel párhuzamos sugarak a fókuszban találkoznak.

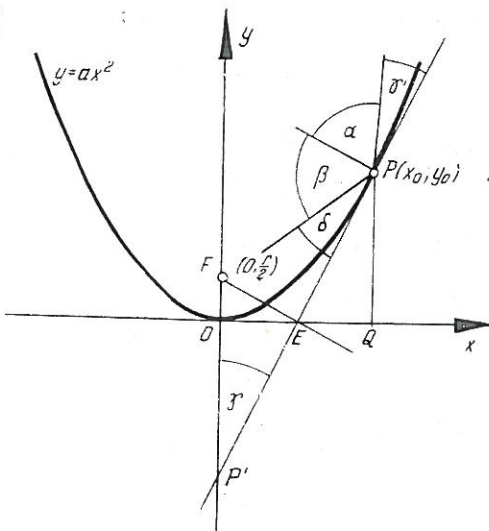
## 7.2.2 Polinomok Taylor-formulája

1. Állapítsuk meg az

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$n$ -ed fokú racionális egészfüggvény együtthatóit, az  $x = 0$  helyen vett függvényérték és a deriváltak segítségével!

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n, \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}, \\ f''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \dots + n(n-1)x^{n-2}, \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot a_n. \end{aligned}$$



Az  $x = 0$  helyen:

$$f(0) = a_0; f'(0) = a_1; f''(0) = 2a_2; f'''(0) = 3!a_3; \dots; f^{(n)}(0) = n!a_n.$$

Az együtthatók:

$$a_0 = f(0); a_1 = \frac{f'(0)}{1!}; a_2 = \frac{f''(0)}{2!}; a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}; \dots; a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

A polinom így írható:  $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ .

2. Állapítsuk meg az

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n$$

$(x-a)$  hatványai szerint rendezett  $n$ -ed fokú racionális egészfüggvény együtthatóit az  $x = a$  helyen vett függvényérték és a deriváltak segítségével!

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n, \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + na_n(x-a)^{n-1}, \\ f''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-a) + \dots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2a_n. \end{aligned}$$

Az  $x = a$  helyen:

$$f(a) = a_0; f'(a) = a_1; f''(a) = 2a_2; f'''(a) = 3!a_3; \dots; f^{(n)}(a) = n!a_n.$$

Az együtthatók:

$$a_0 = f(a); a_1 = \frac{f'(a)}{1!}; a_2 = \frac{f''(a)}{2!}; a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}; \dots; a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

A polinom:  $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ .

Fordítva: ha adottak a polinom 0 vagy  $a$  helyen vett deriváltjai, felírhatjuk az  $x$  vagy  $(x-a)$  hatványai szerint rendezett polinomot.

A polinomoknak azt az alakját, amelyben az együtthatókat az  $a$  helyen (speciális esetben a 0 helyen) vett deriváltak segítségével írjuk fel, a polinomok *Taylor-formulájának* nevezzük.

## 7.2.3 A függvény menetének vizsgálata

### 7.2.3.1 Függvények helyi (lokális) növekedése, fogyása

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény az  $x = x_1$  helyen lokálisan nő, ha az  $x_1$  helynek van olyan  $\delta$  sugarú környezete ( $\delta > 0$ ), hogy

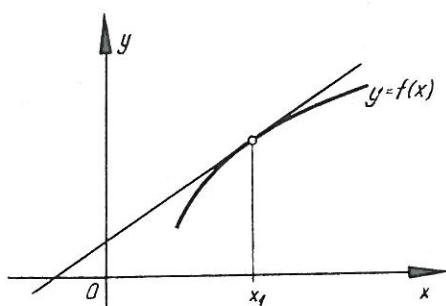
$$\begin{array}{ll} f(x) < f(x_1), & \text{ha } x_1 - \delta < x < x_1 \\ \text{és} & \\ f(x) > f(x_1), & \text{ha } x_1 < x < x_1 + \delta. \end{array}$$



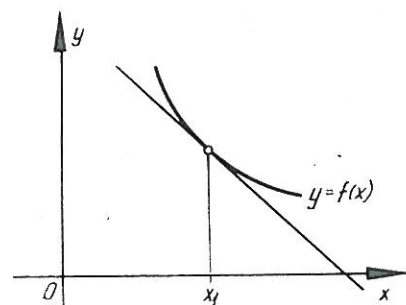
Az  $y = f(x)$  függvény az  $x = x_2$  helyen lokálisan fog, ha az  $x_2$  helynek van olyan  $\delta$  sugarú környezete, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x_1), & \text{ha } x_1 - \delta < x < x_1 \\ \text{és} \quad f(x) &< f(x_1), & \text{ha } x_1 < x < x_1 + \delta. \end{aligned}$$

**Tétel.** Ha az  $y = f(x)$  függvény első deriváltja az  $x_1$  helyen pozitív, a függvény az  $x_1$  helyen lokálisan nő. Ha az  $y = f(x)$  függvény első deriváltja az  $x_1$  helyen negatív, az  $x_1$  helyen a függvény lokálisan fog (7.36 és 7.37 ábra).



7.36 ábra



7.37 ábra

**Bizonyítás.** Legyen  $y = f(x)$  differenciálható, és legyen az  $x_1$  helyen  $f'(x_1) > 0$ ,

$$\text{azaz} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$$

A határérték pozitív voltából következik, hogy kis  $\Delta x$  esetén a tört is pozitív,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$$

Ha  $\Delta x < 0$ , akkor  $\Delta y < 0$ ,

ha  $\Delta x > 0$ , akkor  $\Delta y > 0$ ,

azaz az  $x = x_1$  helyen a függvény nő.

Legyen  $f'(x_1) < 0$ ,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0.$$

Kis  $\Delta x$  esetén:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0.$$

Ha  $\Delta x < 0$ , akkor  $\Delta y > 0$ ,

ha  $\Delta x > 0$ , akkor  $\Delta y < 0$ ,

azaz az  $x = x_1$  helyen a függvény fog.

### Példák

- $y = x^3 - x^2 - 2x$  az  $x = 1$  helyen.  
 $y' = 3x^2 - 2x - 2$   $y'(1) = -1$ , a függvény az  $x = 1$  helyen fog.
- $y = \sin x$  az  $x = \frac{2\pi}{3}$  helyen.  
 $y' = \cos x$ ,  $y'_{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}$ , a függvény az  $x = \frac{2\pi}{3}$  helyen fog.

### A monoton növekedés tétele

**Tétel.** Ha az  $y = f(x)$  függvény az  $[a; b]$  zárt intervallumban differenciálható, és a derivált az intervallum belsejében mindenütt pozitív, akkor a függvény az intervallumban szigorúan monoton nő.

Ha az  $y = f(x)$  függvény az  $[a; b]$  zárt intervallumban differenciálható, és a derivált az intervallum belsejében mindenütt negatív, akkor a függvény az intervallumban szigorúan monoton fog.

**Bizonyítás.** Legyen  $f'(x) > 0$   $a < x < b$ -ben.

A Lagrange-féle középértéktétel szerint, ha  $a < x_1 < x_2 < b$ , akkor  $x_1$  és  $x_2$  között van olyan  $\xi$  hely, hogy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

A feltétel miatt  $f'(\xi) > 0$  és  $x_2 > x_1$ , ezért

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Tehát a függvény szigorúan monoton nő.

Hasonlóan látható be, ha  $f'(x) < 0$  az  $a < x < b$  intervallumban, akkor a függvény szigorúan monoton fog.

**Megjegyzés.** A tétel nem fordítható meg, mert például az  $f(x) = x^3$  függvény a  $[-1; 1]$  intervallumban szigorúan monoton nő, az  $x = 0$  helyen  $f'(0) = 0$ , a derivált nem pozitív.

**Tétel.** Ha az  $y = f(x)$  függvény az  $[a; b]$ -ben differenciálható és  $f'(x) \equiv 0$ , akkor a függvény az intervallumban monoton nő.

Ha az  $y = f(x)$  függvény az  $[a; b]$ -ben differenciálható és  $f'(x) \equiv 0$ , akkor a függvény az intervallumban monoton fog.

A bizonyítás az előző tétel bizonyításával analóg módon történhet. Ez a tétel azonban már megfordítható.

### Példák

- $y = a^x$ .  
 $y' = a^x \ln a$ .  
 $a^x > 0$ . Ha  $a > 1$ ,  $\ln a > 0$ ,  $y' > 0$ .  
 Ha  $0 < a < 1$ ,  $\ln a < 0$ ,  $y' < 0$ .

Az exponenciális függvény  $a > 1$  esetén szigorúan monoton nő,  $0 < a < 1$  esetén szigorúan monoton fogy (7.38 ábra).

$$2. \quad y = \log_a x.$$

$$y' = \frac{1}{x \ln a}.$$

A logaritmusfüggvény csak pozitív  $x$  értékekre van értelmezve.

$$\text{Ha } a > 1, \quad \ln a > 0, \quad y' > 0.$$

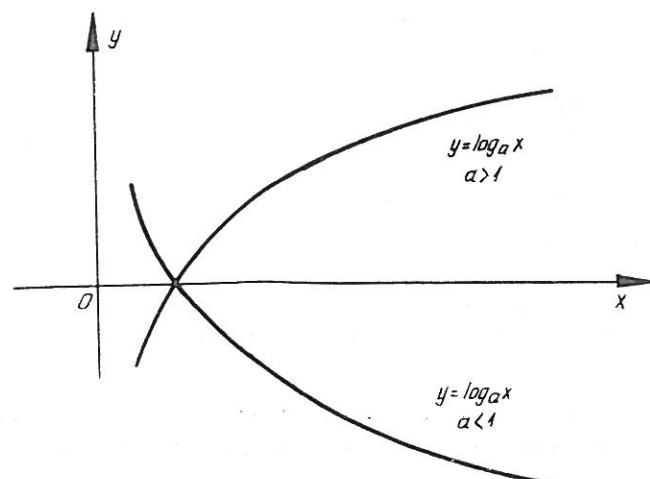
$$\text{Ha } 0 < a < 1, \quad \ln a < 0, \quad y' < 0.$$

A logaritmusfüggvény, ha  $a > 1$ , szigorúan monoton nő, ha  $0 < a < 1$ , szigorúan monoton fogy (7.39 ábra).

$$3. \quad y = \operatorname{sh} x.$$

$$y' = \operatorname{ch} x.$$

Mivel  $\operatorname{ch} x \geq 1$ , az  $y = \operatorname{sh} x$  függvény az egész értelmezési tartományban nő (lásd a 7.12 ábrát).



7.39 ábra

$$4. \quad y = \operatorname{ch} x.$$

$$y' = \operatorname{sh} x.$$

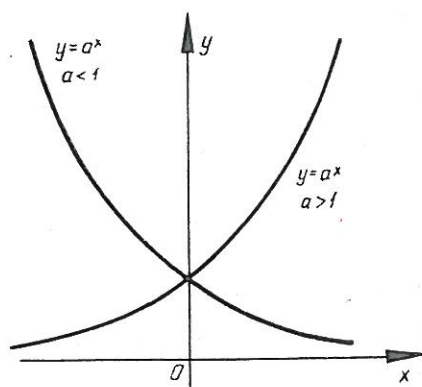
Az  $y = \operatorname{sh} x$  függvény a definíció szerint:

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$\text{Ha } 0 < x < +\infty, \quad \operatorname{sh} x > 0,$$

$$\text{ha } -\infty < x < 0, \quad \operatorname{sh} x < 0.$$

Ezért az  $y = \operatorname{ch} x$  függvény  $-\infty < x < 0$ -ban monoton fogy,  $0 < x < +\infty$ -ban monoton nő (lásd a 7.13 ábrát).



7.38 ábra

### 7.2.3.2 Függvények helyi (lokális) szélsőértéke

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvénynek az  $x = x_1$  helyen lokális maximuma van, ha az  $x$  helynek van olyan  $\delta$  sugarú környezete, hogy

$$f(x) < f(x_1), \quad \text{ha } x_1 - \delta < x < x_1$$

$$\text{és } f(x) < f(x_1), \quad \text{ha } x_1 < x < x_1 + \delta.$$

Az  $y = f(x)$  függvénynek az  $x = x_2$  helyen lokális minimuma van, ha az  $x_2$  helynek van olyan  $\delta$  sugarú környezete, hogy

$$f(x) > f(x_2), \quad \text{ha } x_2 - \delta < x < x_2$$

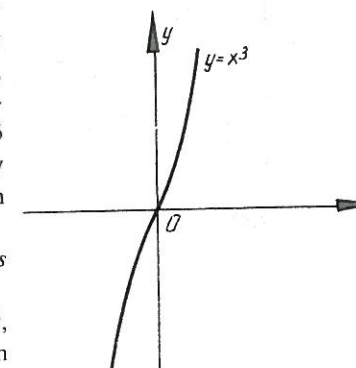
$$\text{és } f(x) > f(x_2), \quad \text{ha } x_2 < x < x_2 + \delta.$$

A helyi maximumot és minimumot szokás közös néven *helyi szélsőérték*nek nevezni.

Legyen az  $y = f(x)$  függvény a lokális szélsőérték-helyen és környezetében differenciálható. Ha egy függvénynek egy adott helyen lokális szélsőértéke, maximuma vagy minimuma van, ott az első derivált nulla, az érintő vízszintes. Ha ugyanis az első derivált pozitív volna, az adott helyen a függvény nőne, ha negatív volna, a függvény fogyna, tehát nem lehetne szélsőértéke.

Az első derivált eltűnése a szélsőérték *szükséges feltétele*. Ez a feltétel azonban nem elégséges.

Például az  $y = x^3$  függvény első deriváltja  $y' = 3x^2$ , az  $x = 0$  helyen zérus, a függvénynek azonban nincs szélsőértéke, mert a függvény a 0 hely előtt és után is nő (7.40 ábra).



7.40 ábra

Következtessünk a függvény menetére az első deriváltból azokon a helyeken, ahol az nulla.

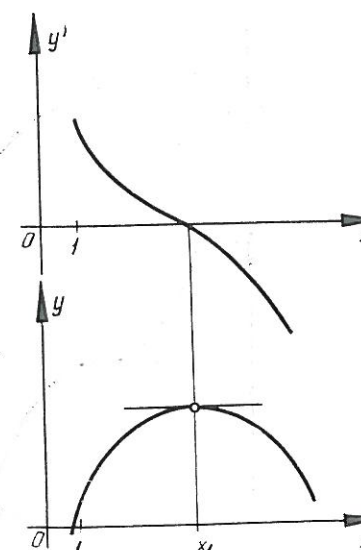
Az  $y' = f'(x)$  és  $y = f(x)$  függvényeket egymás alá rajzoljuk úgy, hogy a koordináta-rendszerek  $x = 0$  és  $x = 1$  pontjai egymás alá kerüljenek.

1. Az  $x = x_1$  helyen  $f'(x) = 0$ , és pozitívból negatívba megy át. Ez azt jelenti, hogy a függvény érintője az  $x_0$  helyen vízszintes,  $x_0$  előtt a függvény nő,  $x_0$  után fogy, a függvénynek az  $x = x_1$  helyen maximuma van (7.41 ábra).

2. Az  $x = x_2$  helyen  $f'(x) = 0$ , és negatívból pozitívba megy át.

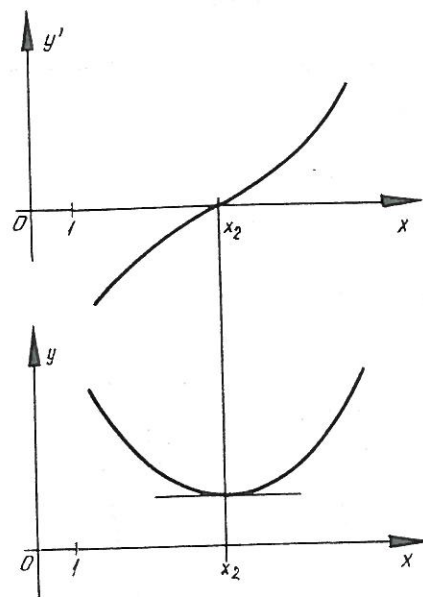
Az  $x = x_2$  helyen a görbe érintője vízszintes, előtte a függvény fogy, utána a függvény nő. Az  $x = x_2$  helyen a függvénynek minimuma van (7.42 ábra).

3. Az  $x = x_3$  helyen  $f'(x) = 0$ , előtte és utána pozitív. Az érintő az  $x = x_3$  helyen vízszintes,

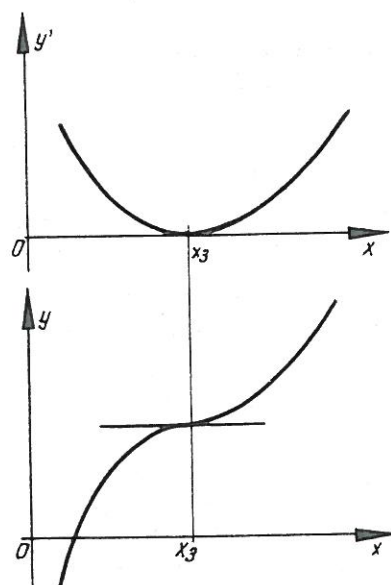


7.41 ábra

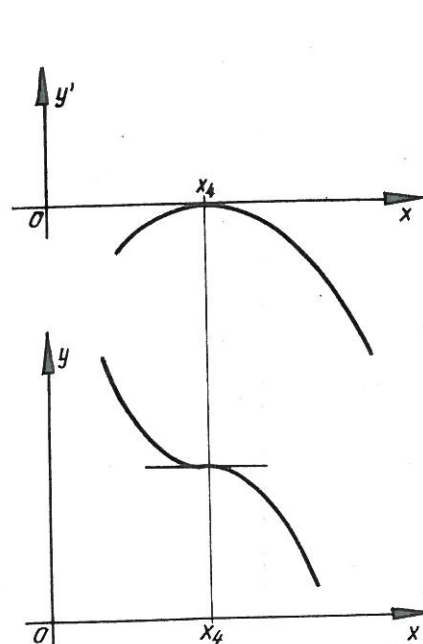




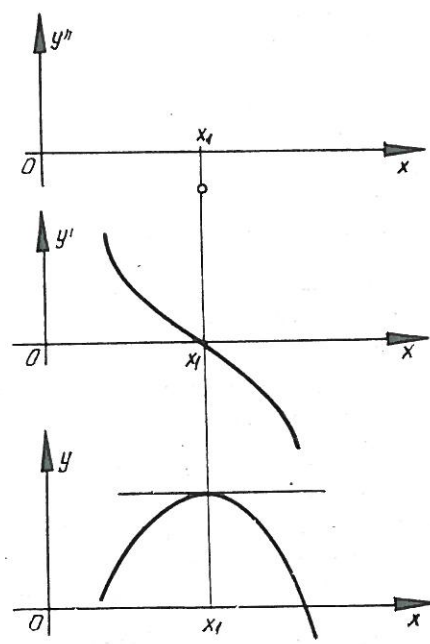
7.42 ábra



7.43 ábra



7.44 ábra



7.45 ábra

de a függvény az összes többi helyen nő, a függvénynek nincs szélsőértéke (7.43 ábra).

4. Hasonlóan nincs szélsőértéke a függvénynek, ha a derivált az  $x = x_1$  helyen nulla, előtte és utána negatív (7.44 ábra).

Tehát bebizonyítottuk a következő tételt.

**Tétel.** Egy pontban a függvény szélsőértékének *elégseges feltétele*, hogy ott az első differenciálhányados zérus legyen, és előjelet váltson.

*Ha az első derivált egy pontban nulla, és pozitívból negatívba megy át, a függvénynek maximuma van, ha az első derivált egy pontban nulla, és negatívból megy át pozitívba, a függvénynek minimuma van.*

### Függvények szélsőérték-helyének meghatározása az első és második derivált segítségével

1. Legyen az  $y = f(x)$  függvény az  $x_1$  hely környezetében differenciálható, és  $x_1$ -ben kétszer differenciálható.

Legyen  $f'(x_1) = 0$  és  $f''(x_1) < 0$ .

Mivel az  $x = x_1$  helyen  $f''(x_1) < 0$ ,  $y' = f'(x)$  az  $x = x_1$  helyen lokálisan fogyó. Mivel  $f'(x_1) = 0$ , az első derivált az  $x_1$  helyen zérus, és pozitívból megy át negatívba, a függvénynek az  $x_1$  helyen maximuma van (7.45 ábra).

2. Legyen  $y = f(x)$  az  $x_2$  hely környezetében differenciálható, és  $x_2$ -ben kétszer differenciálható.

Legyen  $f'(x_2) = 0$  és  $f''(x_2) > 0$ .

Az  $x = x_2$  helyen  $f''(x) > 0$  és  $f'(x) = 0$ . Ez azt jelenti, hogy az  $x_2$  helyen  $y' = f'(x)$  nulla, és lokálisan növekvő. Ezért  $y' = f'(x)$  az  $x = x_2$  helyen zérus, és negatívból megy át pozitívba. Következésképpen  $y = f(x)$ -nek az  $x = x_2$  helyen minimuma van (7.46 ábra).

Érvényes tehát a következő tétel.

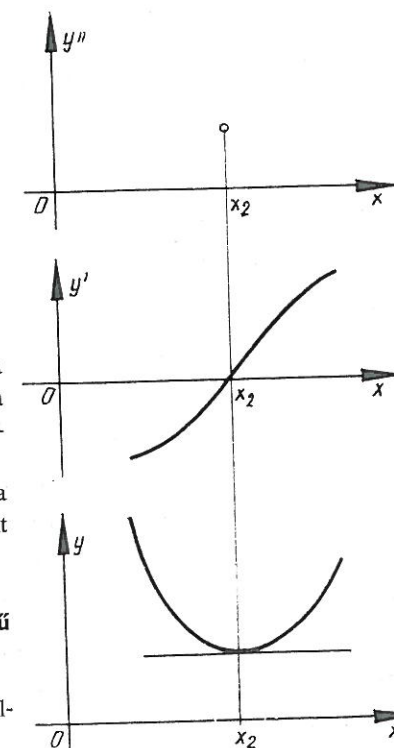
Ha egy függvénynek egy pontban az első deriváltja nulla és a második negatív, a függvénynek maximuma van, ha az első derivált nulla és a második derivált pozitív, a függvénynek minimuma van.

Ha azon a helyen, ahol az első derivált nulla, a második is nulla, a szélsőértékre az első derivált előjelváltozásából következtethetünk.

### Szélsőérték meghatározása a magasabb rendű deriváltak segítségével

Az első derivált előjelváltozását sokszor hosszadalmas vizsgálni.

Az előzőekhez hasonló következtetéssel bizonyítani lehet a következő tételt.



7.46 ábra

**Tétel.** Ha az  $y = f(x)$  függvény az  $a$  hely környezetében legalább  $n$ -szer deriválható és

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0, \quad \dots, \quad f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{és} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

akkor, ha az első el nem tűnő derivált páros rendű, a függvénynek helyi szélsőértéke van, ha páratlan rendű, a függvénynek nincs szélsőértéke.

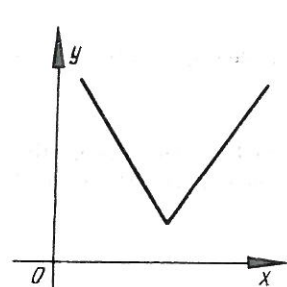
Ha  $n$  páros és  $f^{(n)}(a) < 0$ , helyi maximuma van,

ha  $n$  páros és  $f^{(n)}(a) > 0$ , helyi minimuma van.

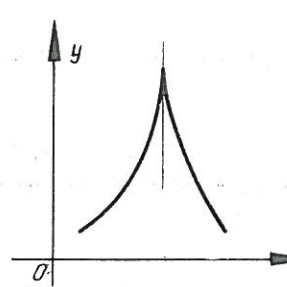
Megjegyezzük a következőket.

A szélsőérték lehet helyi, de vonatkozhat az egész értelmezési tartományra is.

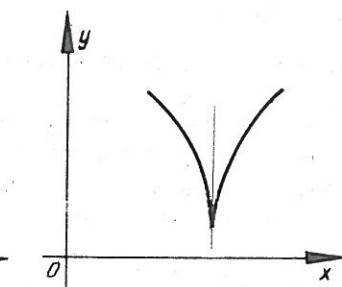
Függvénynek lehet szélsőértéke ott is, ahol nem differenciálható. Ilyenek a 7.47, 48, 49. ábrákon levő függvények.



7.47 ábra



7.48 ábra



7.49 ábra

### Példák

1. Határozzuk meg az

$$y = x^4 - 2x^2 + 2$$

függvény szélsőértékeit:

$$y' = 4x^3 - 4x, \quad y' = 0, \quad \text{ha} \quad 4x^3 - 4x = 0, \\ 4x(x^2 - 1) = 0, \quad \text{ha} \quad x = -1; 0; 1.$$

$$y'' = 12x^2 - 4.$$

$$y''_{(-1)} = 8 > 0 \quad (\text{minimum van}),$$

$$y''_{(0)} = -4 < 0 \quad (\text{maximum van}),$$

$$y''_{(1)} = 8 > 0 \quad (\text{minimum van}).$$

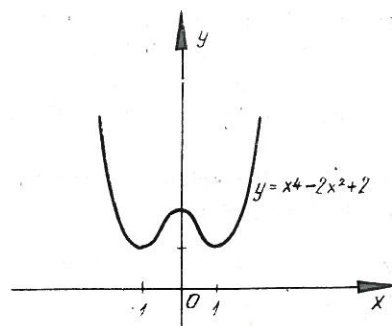
A megfelelő függvényértékek:

$$y_{(-1)} = 1, \quad y_{(0)} = 2, \quad y_{(1)} = 1.$$

Ha  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $y \rightarrow +\infty$ .

A függvény vázlatos képe: 7.50 ábra.

2. Egy háromszög keresztmetszetű gerenda teherbíró képessége az alappal egyenesen, a magassággal négyzete-



7.50 ábra

en arányos. Hogyan méretezzük a henger alakú gömbfából kivágott derékszögű háromszög keresztmetszetű gerendát, hogy maximális teherbírási legyen (7.51 ábra)?

$$y = c \cdot x \cdot m^2, \\ m^2 = d^2 - x^2 \\ y = cx(d^2 - x^2) \\ y' = cd^2 - 3cx^2.$$

Szélsőérték ott lehet, ahol  $y' = 0$ .

$$cd^2 = 3cx^2.$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} d.$$

$$y'' = -6cx < 0.$$

$$m^2 = d^2 - x^2 = \frac{2d^2}{3}.$$

$$m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} d.$$

3. Vizsgáljuk az

$y = 2e^{-t} \sin t$  alakú függvény szélsőértékeit. (A csillapított rezgő mozgás egyenlete.)

$$y' = 2(-e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t)$$

$$y' = 2e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

$$y' = 0, \quad \text{ha} \quad \sin t = \cos t, \quad \text{azaz} \quad t = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$y'' = 2[-e^{-t}(\cos t - \sin t) + e^{-t}(-\sin t - \cos t)]$$

$$y'' = -4e^{-t} \cos t.$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) < 0 \quad (\text{maximum}).$$

$$y''\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) > 0 \quad (\text{minimum}).$$

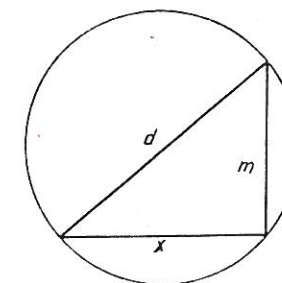
$$y_1 = y_t = 2e^{-t} \sin t$$

$$y_2 = y_{(t+\pi)} = 2e^{-(t+\pi)} \sin(t+\pi) = -2e^{-t-\pi} \sin t.$$

$$\frac{y_2}{y_1} = -\frac{1}{e^\pi}$$

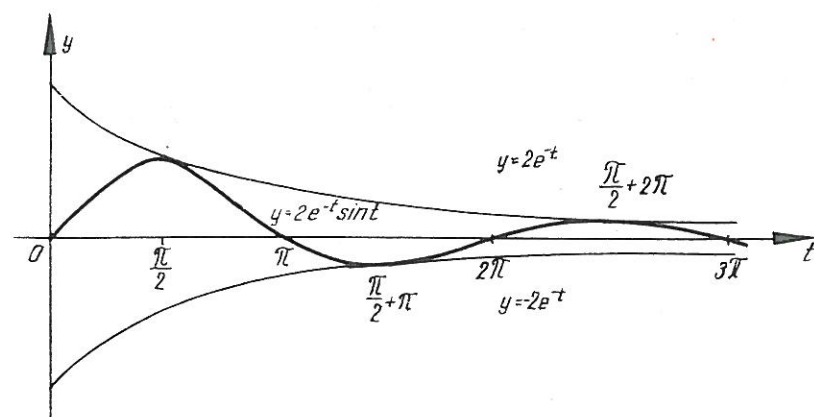
A  $t+k\pi$  helyekhez, így a szélsőérték-helyekhez tartozó ordináták mértani sorozatot alkotnak. A görbét az  $y = 2e^{-t}$  és  $y = -2e^{-t}$  görbék burkolják. Az  $y = e^{-t}$  és  $y = -e^{-t}$  görbék az  $y = e^{-t} \sin t$  görbét a  $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$  pontokban érintik.

Az  $y = e^{-t} \sin t$  függvény az  $x$  tengelyt az  $x = k\pi$  pontokban metszi (7.52 ábra).



7.51 ábra





7.52 ábra

4. Határozzuk meg milyen úton jut a fénysugár egyik közegből a másikba. Válassza el a két közeg egy sík.

A fény terjedési sebessége legyen az első közegben  $c_1$ , a másodikban  $c_2$ . A fény az első közeg  $A$  pontjából a másik közeg  $B$  pontjába jut.

A keresett út két egyenes vonalú útszakaszból,  $AC$ -ből és  $CB$ -ből áll, amelyek a  $C$  pontban a síkra emelt beesési merőlegessel egy síkban fekszenek (7.53 ábra).

A feladat megoldása fontos fizikai tételből, a Fermat-féle elvből adódik: a fénysugár útja az a vonal, amely mentén a fény legrövidebb idő alatt jut  $A$ -ból  $B$ -be.

Az  $a, b, d$  távolságok adottak.

Legyen  $A_1C = x$ , ekkor  $CB_1 = d - x$ .

A fény útja a két közegben:

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$BC = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}.$$

Az idő, mialatt a fény  $A$ -ból  $B$ -be jut:

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}. \quad 7.53 \text{ ábra}$$

Keressük a  $t = t(x)$  függvény minimumát a  $-\infty < x < +\infty$  intervallumban.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2} \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 < 0, \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_d > 0.$$

A derivált folytonos, tehát az intervallum belsejében valahol nulla.

A második derivált:

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - x^2(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}}{a^2 + x^2} - \frac{1}{c_2} \cdot \frac{-[b^2 + (d-x)^2]^{\frac{1}{2}} + (d-x)[b^2 + (d-x)^2]^{-\frac{1}{2}}}{b^2 + (d-x)^2}.$$

A törtet egyszerűbb alakra hozva:

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{c_1} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{c_2} \frac{b^2}{[b^2 + (d-x)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Mivel  $(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$  és  $[b^2 + (d-x)^2]^{\frac{1}{2}}$  távolságot jelentenek, pozitívak.

Így  $\frac{d^2t}{dx^2}$  mindenütt pozitív, az első derivált szigorúan monoton nő, tehát csak egy zérushelye lehet.

Ezen a helyen van az időfüggvény minimuma.

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \text{ha}$$

$$\frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{c_2} \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

Azaz

$$\frac{1}{c_1} \frac{A_1C}{AC} = \frac{1}{c_2} \frac{B_1C}{BC}.$$

$$\frac{1}{c_1} \sin \alpha = \frac{1}{c_2} \sin \beta,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

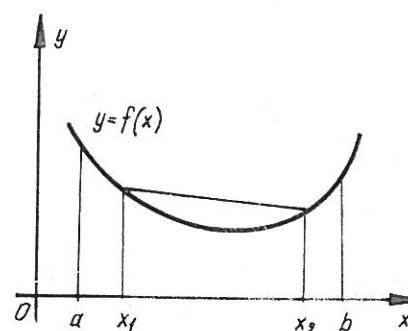
Tehát a fénysugár úgy törik meg, hogy a beesési és törési szögek szinuszáinak hányadosa a megfelelő fénysebességek hányadosával egyenlő. Ez a fénytörés ismert törvénye.

### 7.2.3.3 Görbék konvex és konkáv szakaszai. Inflexiós pont

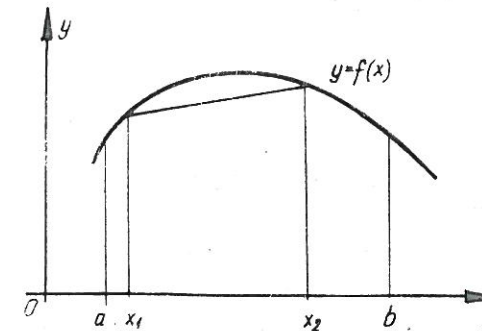
**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvényt ábrázoló görbe az  $(a; b)$  intervallumban *alulról konvex*, ha a bármely két  $x_1$  és  $x_2$  abszcisszájú görbepontot ( $a < x_1 < x_2 < b$ ) összekötő húr ordinátái az  $(x_1; x_2)$  intervallumban nem kisebbek, mint a görbe megfelelő ordinátái.

Az  $y = f(x)$  függvényt ábrázoló görbe az  $(a; b)$  intervallumban *alulról konkáv*, ha a bármely két  $x_1$  és  $x_2$  abszcisszájú görbepontot ( $a < x_1 < x_2 < b$ ) összekötő húr ordinátái az  $(x_1; x_2)$  intervallumban nem nagyobbak a görbe megfelelő ordinátáinál.

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvényt ábrázoló görbe az  $(a; b)$  intervallumban *alulról szigorúan konvex*, ha bármely két  $x_1$  és  $x_2$  abszcisszájú görbepontot ( $a < x_1 < x_2 < b$ ) összekötő húr ordinátái nagyobbak, mint a görbe megfelelő ordinátái (7.54 ábra). (A görbe a húr alatt halad.)



7.54 ábra



7.55 ábra

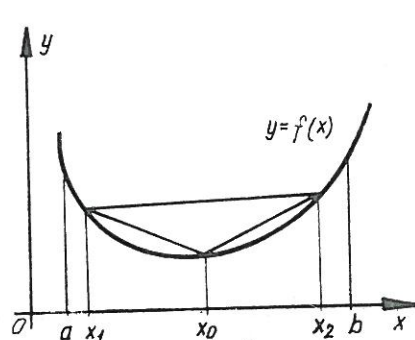
Az  $y = f(x)$  függvényt ábrázoló görbe az  $(a; b)$  intervallumban alulról szigorúan konkáv, ha bármely két  $x_1$  és  $x_2$  abszcisszájú görbepontot  $(a < x_1 < x_2 < b)$  összekötő húr ordinátái kisebbek, mint a görbe megfelelő ordinátái (7.55 ábra). (A görbe a húr felett halad.)

A definícióból következik:

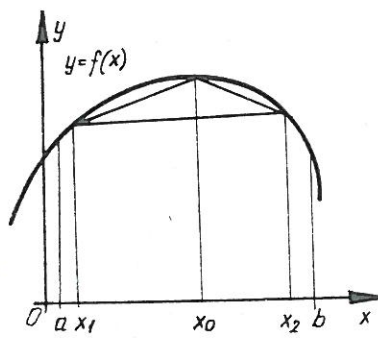
Az  $f(x)$  függvény görbéje  $(a; b)$ -ban akkor és csak akkor alulról konvex, ha

$$a < x_1 < x_0 < x_2 < b \quad \text{esetén}$$

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad (7.56 \text{ ábra}).$$



7.56 ábra



7.57 ábra

Az  $f(x)$  függvény görbéje  $(a; b)$ -ban akkor és csak akkor alulról konkáv, ha

$$a < x_1 < x_0 < x_2 < b \quad \text{esetén}$$

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad (7.57 \text{ ábra}).$$

Szigorúan konvex, illetve konkáv görbék esetén az egyenlőségek nem állhatnak fenn.

**Tétel.** Ha az  $y = f(x)$  függvény  $(a; b)$ -ban differenciálható, és a függvény görbéje alulról szigorúan konvex, akkor a görbe minden pontja — az érintési pont kivételével — az intervallum bármely pontjában húzott érintő felett van.

**Bizonyítás.** Vizsgáljuk a görbe érintőjét az  $(a; b)$  belsejében fekvő tetszőleges  $x_0$  pontban (7.58 ábra).

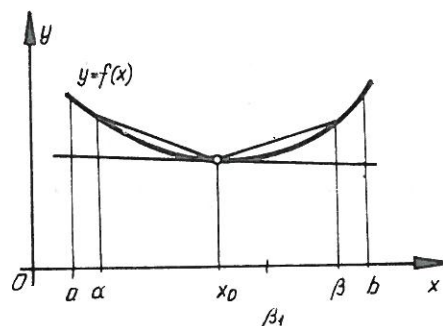
Legyen

$$a < x_0 < x < \beta_1 < \beta < b.$$

A görbe alulról szigorúan konvex.

Ezért

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f(\beta_1) - f(x_0)}{\beta_1 - x_0} < \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0}.$$



7.58 ábra

Így

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f(\beta_1) - f(x_0)}{\beta_1 - x_0} < \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0},$$

azaz

$$f'(x_0) < \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a  $\beta$  abszcisszájú pont az érintő felett van. Ugyanígy mutatható ki, ha

$$a < x_0, \quad \text{akkor}$$

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} < f'(x_0).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az  $a$  abszcisszájú pont az érintő felett van (7.58 ábra). A tétel megfordítható.

**Tétel.** Ha az  $y = f(x)$  függvény az  $(a; b)$  intervallumban differenciálható, és az intervallumban a görbe minden pontja — az érintési pont kivételével — az érintő felett van, akkor a görbe alulról szigorúan konvex.

**Bizonyítás.** Legyen  $x_0$  az  $(a; b)$  tetszőleges pontja, és

$$a < x_1 < x_0 < x_2 < b.$$

A feltétel szerint az  $x_1$  és  $x_2$  abszcisszájú pontok az  $x_0$ -beli érintő felett vannak (7.59 ábra).

Ezért

$$f'(x_0) < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad \text{és}$$

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} < f'(x_0).$$

A két egyenlőtlenségből következik, hogy

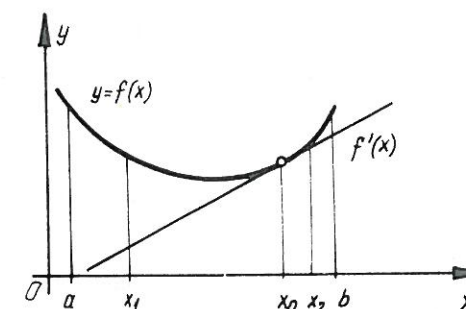
$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

tehát a görbe alulról szigorúan konvex.

Az előző két tétel igazolásával analóg módon bizonyítható a következő két tétel.

**Tétel.** Ha az  $y = f(x)$  függvény  $(a; b)$ -ban differenciálható, és a függvény görbéje alulról szigorúan konkáv, akkor a görbe olyan, hogy minden pontja — az érintési pont kivételével — az intervallum bármely pontjában húzott érintő alatt van.

A tétel megfordítható.



7.59 ábra



**Tétel.** Ha az  $y = f(x)$  függvény az  $(a; b)$  intervallumban differenciálható, és az intervallumban a görbe minden pontja — az érintési pont kivételével — az érintő alatt van, akkor a görbe alulról szigorúan konkáv.

**Tétel.** Ha az  $(a; b)$  intervallumban az  $y = f(x)$  függvény második deriváltja pozitív, akkor a függvény görbéje az  $(a; b)$  intervallumban alulról szigorúan konvex.

**Bizonyítás.** A feltétel értelmében

$$a < x < b \text{-ben} \quad f''(x) > 0.$$

A monoton növekedés tétele szerint (7.2.3.1), ekkor  $(a; b)$ -ban az  $f'(x)$  szigorúan monoton nő.

Legyen  $a < x_1 < x < x_2 < b$ .

A Lagrange-féle középértéktétel szerint (7.1.6 II.) van olyan  $\xi$  hely, hogy

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(\xi), \quad \text{ahol} \quad x_1 < \xi < x,$$

és van olyan  $\eta$  hely, hogy

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\eta), \quad \text{ahol} \quad x < \eta < x_2.$$

Az  $y' = f'(x)$  függvény szigorúan monoton nő és  $\xi < \eta$ , ezért

$$f'(\xi) < f'(\eta).$$

$$\text{Így} \quad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Ebből pedig következik, hogy  $(a; b)$ -ban a görbe alulról szigorúan konvex.

**Tétel.** Ha az  $(a; b)$  intervallumban az  $y = f(x)$  függvény második deriváltja negatív, akkor a függvény görbéje az  $(a; b)$  intervallumban alulról szigorúan konkáv.

A tétel bizonyítása az előző tétel bizonyításával analóg módon történhet.

Hasonlóan bizonyítható, hogy ha az  $(a; b)$  intervallumban  $f''(x) \geq 0$ , az intervallumban a függvény görbéje alulról konvex; ha az  $(a; b)$  intervallumban  $f''(x) \leq 0$ , az intervallumban a görbe alulról konkáv.

**Inflexiós pont. Definíció.** Inflexiós pont az a pont, amelyben a görbe konvexből konkávba vagy konkávból konvexbe megy át.  
Az inflexiós pont definíciójából következik, hogy az inflexiós pontban az érintő átmetszi a görbét.

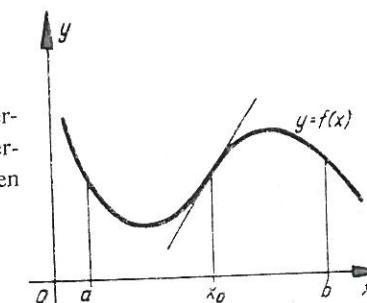
**Tétel.** Legyen az  $y = f(x)$  függvény az  $(a; b)$  intervallumban kétszer deriválható. Legyen  $a < x_0 < b$ . Ha a második derivált az  $x_0$  helyen nulla és előjelet vált, akkor a görbének az  $x_0$  abszcisszájú pontban inflexiós pontja van.

**Bizonyítás.** Legyen az  $(a; b)$  intervallumban az  $y = f(x)$  függvény második deriváltja:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= 0 \quad \text{és} \\ f''(x) &> 0, \quad \text{ha} \quad a < x < x_0, \\ f''(x) &< 0, \quad \text{ha} \quad x_0 < x < b. \end{aligned}$$

A feltételből következik, hogy a görbe az  $(a; x_0)$  intervallumban alulról szigorúan konvex, az  $(x_0; b)$  intervallumban alulról szigorúan konkáv, tehát az  $x_0$  helyen inflexiós pont van (7.60 ábra).

$$\begin{aligned} \text{Ha} \quad f''(x_0) &= 0 \quad \text{és} \\ f''(x) &< 0, \quad \text{ha} \quad a < x < x_0, \\ f''(x) &> 0, \quad \text{ha} \quad x_0 < x < b, \end{aligned}$$



7.60 ábra

akkor a görbe  $(a; x_0)$ -ban szigorúan konkáv,  $(x_0; b)$ -ban szigorúan konvex, az  $x_0$  helyen inflexiós pont van (7.61 ábra).

#### Példák

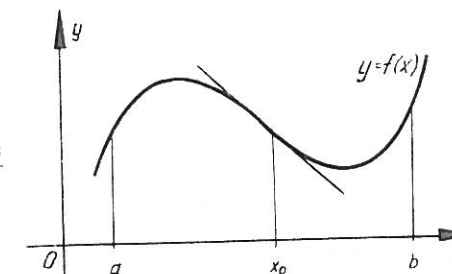
1.  $y = \operatorname{tg} x$ .

Vizsgáljuk a függvény alakját a  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  intervallumban!

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$$

$$y'' = 0, \quad \text{ha} \quad \sin x = 0, \quad \text{azaz} \quad x = 0.$$



7.61 ábra

Nézzük a második derivált előjelét a megfelelő szakaszokban, és következtessünk a görbe alakjára!

| $x$   | $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ | $0$   | $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ |
|-------|----------------------------------|-------|---------------------------------|
| $y''$ | -                                | 0     | +                               |
| $y$   | konkáv                           | infl. | konvex                          |

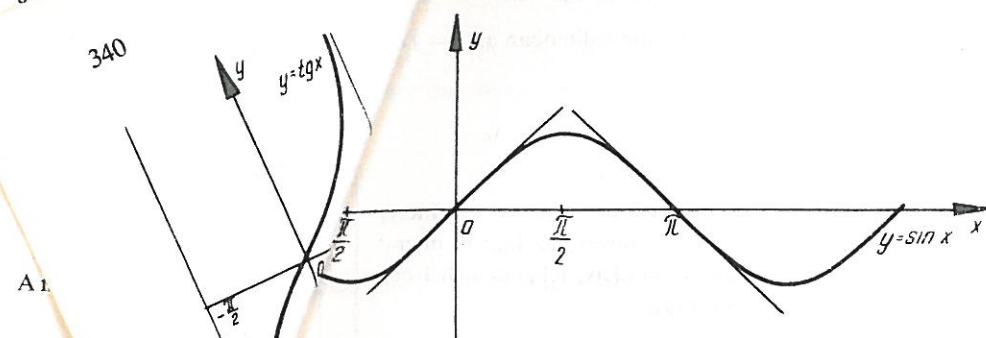
A görbe vázlata: 7.62 ábra.

2.

$$y = \sin x.$$

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x.$$

**Tétel.** Ha az  
vallumh  
al



A 1.

Legye

A Lagrar

lyen

7.63 ábra

Ha  $-\pi < x < 2\pi$  intervallumot.

Ha  $x = 0, \pm\pi, 2\pi$ .

|     |             |       |            |       |               |
|-----|-------------|-------|------------|-------|---------------|
|     | $(-\pi; 0)$ | 0     | $(0; \pi)$ | $\pi$ | $(\pi; 2\pi)$ |
|     | +           | 0     | -          | 0     | +             |
| $y$ | konvex      | infl. | konkáv     | infl. | konvex        |

$$y'(0) = 1, \quad y'(\pi) = -1.$$

A görbe vázlata: 7.63 ábra.

3.  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 5.$   
 $y' = x^2 - 2x - 3, \quad y' = 0, \quad \text{ha } x = -1 \text{ és } x = 3$   
 $y'' = 2x - 2$   
 $y''_{(-1)} = -4 < 0 \quad (\text{maximum}),$   
 $y''_{(3)} = 4 > 0 \quad (\text{minimum}).$   
 $y'' = 0, \quad \text{ha } x = 1$

A második derivált előjelváltozásai:

|       |                |       |                |
|-------|----------------|-------|----------------|
| $x$   | $(-\infty; 1)$ | 1     | $(1; +\infty)$ |
| $y''$ | -              | 0     | +              |
| $y$   | konkáv         | infl. | konvex         |

$$y'(1) = -4$$

A görbe néhány pontja:

|     |                |                |    |
|-----|----------------|----------------|----|
| $x$ | -1             | 1              | 3  |
| $y$ | $6\frac{2}{3}$ | $1\frac{1}{3}$ | -4 |

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 5.$$

Ha  $x \rightarrow \pm\infty, \quad y \rightarrow \pm\infty.$

A görbe vázlata: 7.64 ábra.

4.  $y = a^x,$   
 $y' = a^x \ln a,$   
 $y'' = a^x (\ln a)^2.$

Mivel  $a^x$  mindig pozitív, az exponenciális függvény mindenütt konvex (lásd 7.38 ábrát).

5.  $y = \log_a x.$

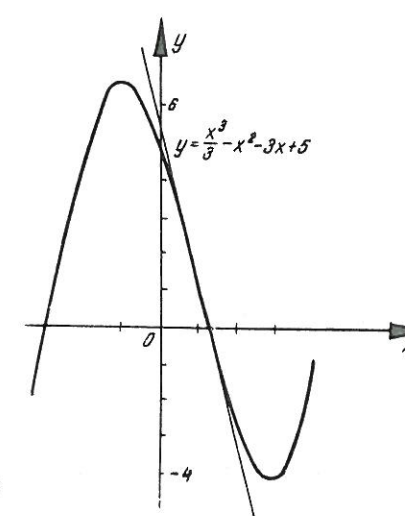
$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$y'' = \frac{1}{x^2 \ln a}$$

Ha  $a > 1, \quad y'' < 0;$

ha  $a < 1; \quad y'' > 0.$

Az  $y = \log_a x$  függvény görbéje, ha  $a > 1$  konkáv, ha  $0 < a < 1$  konvex (lásd 7.39 ábrát).



7.64 ábra

### 7.2.3.4 A függvényvizsgálat általános menete

A függvények menetét a következő lépésekben vizsgáljuk.

- Meghatározzuk a függvény értelmezési tartományát; viselkedését a végtelenben és a szakadási helyeken; zérushelyeit, páros, illetve páratlan voltát, periodicitását.
- Meghatározzuk a függvény monotonitási szakaszait (hol nő, hol fogy a függvény), szélső értékeit.
- Meghatározzuk a függvény konvex és konkáv szakaszait, inflexiós pontjait.
- A megállapított tulajdonságok alapján néhány pont segítségével vázoljuk a görbét.

#### Példák

1. Vizsgáljuk az

$$y = e^{-x^2}, \quad \text{ún. Gauss-féle függvényt.}$$

a) A függvény mindenütt értelmezve van.



Értelmezési tartománya:  $-\infty < x < +\infty$ .

Értékkészlete:  $0 < y \leq 1$ .

A függvény sehol sem zérus.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

A függvény páros:

$$y(-x) = e^{-x^2} \quad y(+x) = e^{-x^2}.$$

b)

$$y = e^{-x^2}.$$

$$y' = -2xe^{-x^2}.$$

$$y' = 0, \quad \text{ha } x = 0.$$

$$y'' = -2e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2}(-2x),$$

$$y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$$

Ha  $x = 0$ ,  $y'' = -2x < 0$ .

Az  $x = 0$  helyen maximum van.

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad \text{Ha } x < 0, \quad y' > 0, \quad \text{a függvény nő.}$$

$$\text{Ha } x > 0, \quad y' < 0, \quad \text{a függvény fogy.}$$

c)  $y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$

A második derivált  $y'' = 0$ , ha  $4x^2 - 2 = 0$ .

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A görbének az  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  és  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  helyeken lehet inflexiós pontja.

Nézzük a második derivált előjelét!

Ha  $x^2 > \frac{1}{2}$ ;  $y'' > 0$ ; ha  $x^2 < \frac{1}{2}$ ,  $y'' < 0$ .

| $x$   | $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ |
|-------|---------------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------|
| $y''$ | +                                           | 0                     | -                                                      | 0                    | +                                          |
| $y$   | konvex                                      | infl.                 | konkáv                                                 | infl.                | konvex                                     |

d) A függvény ábrázolása.

Ha  $x = 0$ ,  $y = 1$ ;

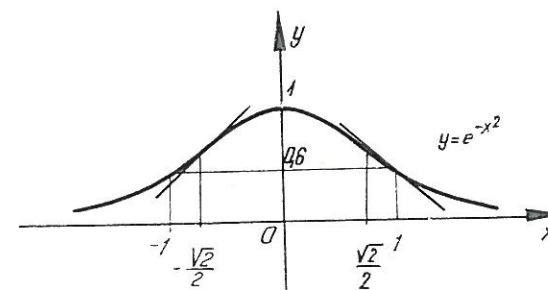
ha  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $y = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6$ ;

ha  $x = \pm 1$ ,  $y = \frac{1}{e} \approx 0,37$ .

A görbe vázlata: 7.65 ábra.

2. Vizsgáljuk a következő függvényt:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$



7.65 ábra

a) A függvény az  $x = -1$  és  $x = 1$  helyeken nincs értelmezve. A függvény páratlan:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x^2}} = \pm\infty.$$

$$y = \frac{x^3}{(x+1)(x-1)}$$

$$x \rightarrow -1 \quad \text{balról}, \quad y \rightarrow -\infty,$$

$$x \rightarrow -1 \quad \text{jobbról}, \quad y \rightarrow +\infty,$$

$$x \rightarrow 1 \quad \text{balról}, \quad y \rightarrow -\infty,$$

$$x \rightarrow 1 \quad \text{jobbról}, \quad y \rightarrow +\infty.$$

b) A függvény monotonitási szakaszai, szélsőértékei.

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

A deriváláshoz alakítsuk át a függvényt.

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - x + x}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1},$$

$$y = x + \frac{x}{x^2 - 1}.$$

$$y' = 1 + \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = 1 - \frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

$$y' = 0, \quad \text{ha } (x^2 - 1)^2 = 1 + x^2,$$

azaz

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 1 + x^2$$

$$x^2(x^2 - 3) = 0.$$

$$y' = 0, \quad \text{ha } x = -\sqrt{3}, \quad 0, \quad +\sqrt{3}.$$

Nézzük az első derivált előjelét!

Az  $x$  tengelyt bontjuk intervallumokra a szakadási helyekkel és az első derivált zérushelyeivel.

$$y' = 1 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}.$$

| $x$  | $(-\infty; -\sqrt{3})$ | $-\sqrt{3}$ | $(-\sqrt{3}; -1)$ | $(-1; 0)$ | $0$  | $(0; 1)$ | $(1; \sqrt{3})$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3}; +\infty)$ |
|------|------------------------|-------------|-------------------|-----------|------|----------|-----------------|------------|-----------------------|
| $y'$ | +                      | 0           | -                 | -         | 0    | -        | -               | 0          | +                     |
| $y$  | nő                     | max.        | fogy              | fogy      | fogy | fogy     | fogy            | min        | nő                    |

c) A görbe alakja:

$$y'' = \frac{-2x(x^2-1)^2 + (1+x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}.$$

$$y'' = 2x \frac{1-x^2+2+2x^2}{(x^2-1)^3}.$$

$$y'' = 2x \frac{x^2+3}{(x^2-1)^3}.$$

$$y'' = 0, \text{ ha } x = 0.$$

$$y''(-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} \frac{6}{8} < 0 \quad (\text{maximum van}),$$

$$y''(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \frac{6}{8} > 0 \quad (\text{minimum van}).$$

A második derivált előjelváltozásai:

| $x$   | $(-\infty; -1)$ | $(-1; 0)$ | $0$   | $(0; 1)$ | $(1; +\infty)$ |
|-------|-----------------|-----------|-------|----------|----------------|
| $y''$ | -               | +         | 0     | -        | +              |
| $y$   | konkáv          | konvex    | infl. | konkáv   | konvex         |

$y'_{(0)} = 0$ . Az inflexió pontban az érintő vízszintes.

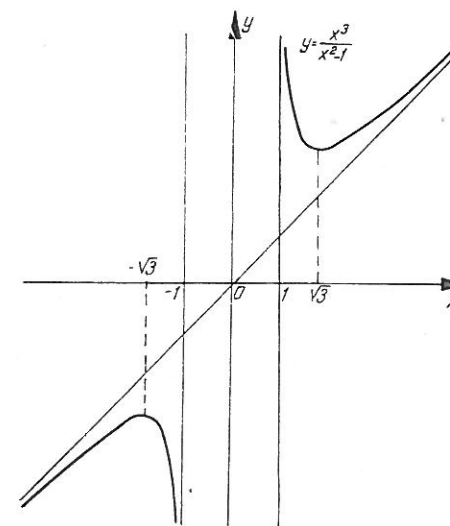
$$d) \quad y_{(-\sqrt{3})} = -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx -2,6;$$

$$y_{(+\sqrt{3})} \approx +2,6;$$

$$y_{(0)} = 0.$$

$$y = \frac{x}{x^2-1} + x.$$

Ha  $x \rightarrow +\infty$ , a görbe pontjai az  $y = x$  egyenes megfelelő pontjaihoz közelednek. A görbe vázlata: 7.66 ábra.



7.66 ábra

## 7.2.4 Egyenletek közelítő megoldása

### 1. Egyenletek közelítő megoldása húrmódszerrel („regula falsi”)

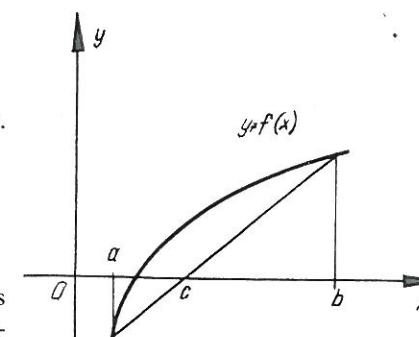
Keressük az  $f(x) = 0$  egyenlet megoldását, azaz az  $y = f(x)$  függvény zérushelyét. Ha  $f(a)$  és  $f(b)$  különböző előjelűek, a gyök értékének közelítőleg azt a  $c$  helyet vesszük, ahol a húr az  $x$  tengelyt metszi. A húr egyenlete:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \quad (7.67 \text{ ábra}).$$

Ha  $y = 0$ , a zérushely:

$$x = c = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a).$$

Az eljárás megismételhető ha a második húrt  $c$  és azon végpont között húzzuk meg, ahol a függvény előjele  $f(c)$  előjelétől különböző s.i.t.



7.67 ábra

### 2. Newton módszere (érintőmódszer)

A húr módszerénél gyorsabb és jobb megközelítést ad az érintőmódszer.

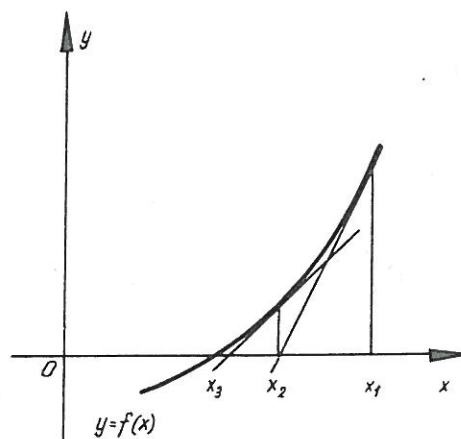


Húzzunk  $f(x)$  olyan  $x_1$  pontjában érintőt, ahol  $f(x_1)$  és  $f''(x)$  előjele megegyezik (7.68 ábra). Az érintőnek az  $x$  tengellyel való  $x_2$  metszéspontja:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Az eljárást az  $x_2$  helyen húzott érintővel megismételjük, és így tovább. Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

**Tétel.** Ha az  $f(x) = 0$  egyenletnek  $\xi$  gyöke és a  $\xi$  és  $x_1$  közötti szakaszon  $f''(x) \neq 0$ ,  $f'(x) \neq 0$  és  $f(x_1)$ , illetve  $f''(x)$  megegyező előjelűek, az érintőmódszerrel kapott  $x_1, x_2, x_3, \dots$  sorozat  $\xi$ -hez tart.



7.68 ábra

### 3. Az iteráció vagy sorozatos közelítés

**Tétel.** Írjuk az egyenletet  $x = g(x)$  alakba! Ha  $x_1$  az egyenlet gyökének egy közelítő értéke, a következő közelítő értékek:

$$x_2 = g(x_1), \\ x_3 = g(x_2) \quad \text{és így tovább.}$$

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

**Tétel.** Ha az  $x = g(x)$  egyenletnek  $\xi$  gyöke, és a  $[\xi - \delta; \xi + \delta]$  intervallumban  $|g'(\xi)| \leq q < 1$ , és

$$\xi - \delta \leq x_1 \leq \xi + \delta,$$

akkor az így kapott  $x_1, x_2, x_3, \dots$  sorozat  $\xi$ -hez tart. A lépésenkénti megközelítésnek ezt a módszerét *iterációnak* nevezik.

#### Példák

1. Keressük Newton érintőmódszerével az  $x^3 + 2x^2 - x - 0,5 = 0$  egyenlet egyik gyökét. Az  $y = x^3 + 2x^2 - x - 0,5$  függvény az  $x_1 = 1$  helyen  $y_1 = 1,5$ .

$$y' = 3x^2 + 4x - 1, \quad y'_1 = 6, \\ y'' = 6x + 4, \quad y''_1 = 10 > 0. \\ x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{1,5}{6} = 0,75.$$

Logarléccel számolva:

$$y_{(x_2)} = y_2 = 0,75^3 + 2 \cdot 0,75^2 - 0,75 - 0,5 = 0,297, \\ y'_{(x_2)} = 3 \cdot 0,75^2 + 4 \cdot 0,75 - 1 = 3,69, \\ x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,75 - \frac{0,297}{3,688} = 0,75 - 0,008 = 0,670.$$

### 2. Oldjuk meg iterációs módszerrel

$$\text{az } x = \frac{1}{3} \cos x \quad \text{egyenletet!}$$

$$g(x) = \frac{1}{3} \cos x.$$

$$g'(x) = -\frac{1}{3} \sin x.$$

$$|g'(x)| = \left| -\frac{1}{3} \sin x \right| \leq \frac{1}{3}.$$

Tehát  $x_1$  akárhol választható, az iteráció konvergens. Legyen  $x_1 = 0$ . A számításokat függvénytáblázat segítségével végezve, és táblázatba foglalva:

| $x_n$ | $(x_n)^\circ$ | $\cos x$ | $\frac{1}{3} \cos x$ |
|-------|---------------|----------|----------------------|
| 0     | 0             | 1        | 0,333                |
| 0,333 | 19° 7'        | 0,9448   | 0,315                |
| 0,315 | 18° 3'        | 0,9506   | 0,317                |
| 0,317 | 18° 10'       | 0,9502   | 0,317                |

$$x = 0,317$$

Ha az egyenlet  $\xi$  gyökének közelében  $|g'(\xi)| > 1$ , az  $y = g(x)$  függvény inverzét,  $y = \varphi(x)$ -et előállítva, az  $x = \varphi(y)$  egyenletet oldjuk meg. (Ekkor  $|\varphi'(x)| < 1$ .) A kapott  $\xi$  érték az eredeti egyenletnek is gyöke.

### 7.2.5 Síkgörbék aszimptótája

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  és  $y = g(x)$  függvények aszimptotikusan érintkeznek, ha

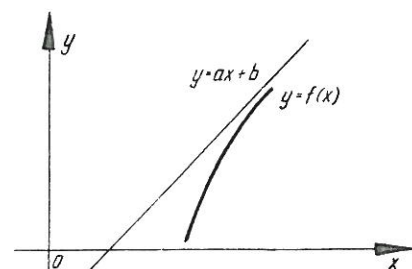
$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

A definíció az  $x \rightarrow +\infty$  és  $x \rightarrow -\infty$  határértékekre egyaránt vonatkozhat.

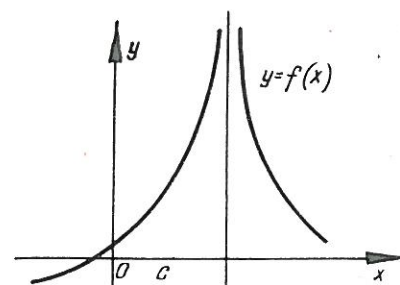
Az aszimptóta

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény görbéjének aszimptótája az  $y = ax + b$  egyenes (7.69 ábra), ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$



7.69 ábra



7.70 ábra

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény görbájének aszimptótája az  $x = c$  egyenes (7.70 ábra), ha

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \pm \infty \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = \pm \infty.$$

Az első definícióból következik, hogy ha  $y = ax + b$ , az  $y = f(x)$  függvény görbájének aszimptótája, akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Mivel  $x \rightarrow \infty$ , a határérték csak akkor lehet nulla, ha a második tényező tart a nullához,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right] = 0,$$

mivel

$$\frac{b}{x} \rightarrow 0,$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Helyettesítsük be az  $a$ -ra kapott értéket

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax].$$

A definíció egyaránt érvényes  $x \rightarrow +\infty$  és  $x \rightarrow -\infty$  esetekre.

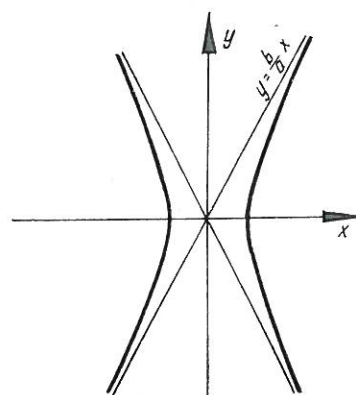
#### Példák

1. Írjuk fel az

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{azaz}$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{és} \quad y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

hiperbola aszimptótáit (7.71 ábra)!



7.71 ábra

Az aszimptótát a hiperbola jobb oldali ágának ( $x \geq a$ ) felső felére határozzuk meg ( $y > 0$ ).

$$\text{Így} \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (x \geq a).$$

Az aszimptótát  $y = mx + \beta$  alakban keressük:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} \frac{x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{b}{a}. \\ \beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} \frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{a} \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0. \end{aligned}$$

Mivel  $\beta = 0$ , az aszimptóta:  $y = \frac{b}{a} x$ .

A szimmetria miatt a hiperbola másik aszimptótája:  $y = -\frac{b}{a} x$ .

2. Írjuk fel az

$$y = \frac{x^2}{1+x} \quad \text{függvény görbájének aszimptótáit!}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{1+x} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{1+x} = -1.$$

Az aszimptóta egyenlete:

$$y = x - 1.$$

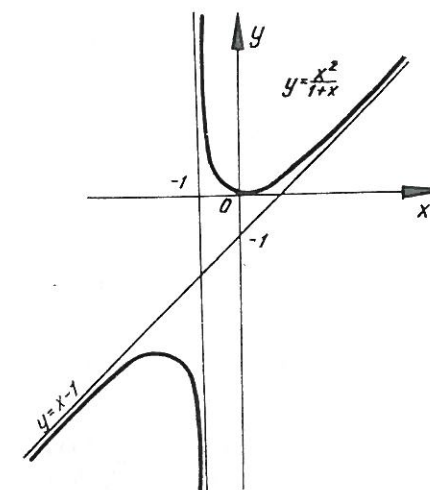
A függvény másik aszimptótája az  $y = \frac{x^2}{1+x}$  alakból az  $x = -1$  egyenes (7.72 ábra).

Az aszimptótákat ebben az esetben könnyebben is megkaphatjuk.

$$y = \frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2 - 1 + 1}{1+x},$$

$$\text{azaz} \quad y = x - 1 + \frac{1}{1+x}.$$

Ha  $|x| \rightarrow +\infty$ , akkor  $\frac{1}{1+x} \rightarrow 0$ . Így az



7.72 ábra



$y = x - 1 + \frac{1}{1+x}$  függvény értéke elég nagy  $|x|$ -re tetszés szerinti kis értékkel különbözik az  $y = x - 1$  függvény megfelelő értékétől.

A görbe aszimptótái tehát az  $y = x - 1$  és  $x = -1$  egyenesek.

3. Ezzel a módszerrel meghatározhatók a 7.2.3.4-2. példában vizsgált

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad \text{görbe aszimptótái:}$$

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - x + x}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Mivel  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$ , az előző példa meggondolásához hasonlóan megállapítható, hogy a függvény egyik aszimptótája az  $y = x$  egyenes.

A másik két aszimptóta az  $x = -1$  és az  $x = 1$  egyenes (lásd a 7.66. ábrát).

## 7.2.6 A l'Hospital-szabály

A határérték kiszámítása a matematikai vizsgálatok igen fontos problémája.

Az erre szolgáló szabályok a l'Hospital-szabályok.

(A tétel a svájci Johannes BERNOULLITÓL származik. Ő közölte a francia l'HOSPITAL-lal, aki közzétette.)

I.  $\frac{0}{0}$  "határozatlan alak" kiszámítása

Legyen  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0$  és  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 0$ .

Tegyük fel, hogy  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  létezik.

Alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \\ &= \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a < \xi < x). \end{aligned}$$

Ha  $x \rightarrow a$ , akkor  $\xi \rightarrow a$  és  $\xi \rightarrow x$ .

A határérték így írható:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A l'Hospital-szabály tehát így szól:

Ha  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  és  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  és  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  létezik, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ha  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ , újra alkalmazzuk a szabályt.  
(Feltéve, hogy  $f(x)$  és  $g(x)$  kétszer differenciálható.)

A l'Hospital-szabály általánosítása:

Ha  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow a} f^{(n-1)}(x) = 0$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow a} g^{(n-1)}(x) = 0$  és  
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$  létezik, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

Legyen  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  és  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ .

A példát  $x = \frac{1}{z}$  helyettesítéssel visszavezetjük a véges helyen való határértékre.

Ha  $x \rightarrow \infty$ ;  $z \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right) \left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

II.  $\frac{\infty}{\infty}$  "határozatlan alak" kiszámítása

Ha  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$  és  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$ , akkor a

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  határérték meghatározásához a következőképpen jutunk el. Tegyük fel, hogy

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  létezik. Legyen  $\alpha$  olyan hely  $a$  közelében, hogy  $a$  és  $\alpha$  között  $f$ , illetve  $g$  differenciálható,  $g' \neq 0$ , és legyen  $x$  olyan közel  $a$ -hoz, hogy

$$\begin{aligned} f(x) - f(\alpha) &\neq 0, & g(x) - g(\alpha) &\neq 0, \\ f(x) &\neq 0, & g(x) &\neq 0. \end{aligned}$$

A Cauchy-középértéktétel szerint:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Így

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Az egyenletet rendezve:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{g(x)-g(\alpha)}{g(x)} \cdot f'(\xi)}{\frac{f(x)-f(\alpha)}{f(x)} \cdot g'(\xi)},$$

azaz

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Ha  $\alpha$  rögzített,  $x \rightarrow a$  esetén  $\frac{g(\alpha)}{g(x)} \rightarrow 0$  és  $\frac{f(\alpha)}{f(x)} \rightarrow 0$ .

Így

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A l'Hospital-szabály:

Ha  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$

és  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  létezik, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A szabály általánosítása:

Ha  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow a} f^{(n-1)}(x) = \pm \infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow a} g^{(n-1)}(x) = \pm \infty$  és

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$  létezik, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Ha  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  és  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ ,

az előzőek felhasználásával igazolható:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Feltéve, hogy az utolsó határérték létezik.)

A l'Hospital-szabályt tehát a

$\frac{0}{0}$  és  $\frac{\infty}{\infty}$  határozatlan alakok meghatározására használjuk.

Példák

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{2}{3\sqrt[6]{a}}.$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{Arctg} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}.$$

(Itt a l'Hospital-szabályt kétszer alkalmaztuk, majd egyszerűsítettünk.)

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \ln a}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x (\ln a)^2}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x (\ln a)^3}{6} = +\infty \quad (\text{ha } a > 1).$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} = \dots = \frac{a^x (\ln a)^n}{n!} = \infty \quad (\text{ha } a > 1).$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az exponenciális függvény  $a > 1$  esetén gyorsabban nő, mint bármilyen hatványfüggvény.

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x) \frac{\sin x}{x} = 0.$$

A l'Hospital-szabályt csak egyszer alkalmaztuk, azután algebrai átalakítással az ismert határértéket használtuk fel.



Megjegyezzük a következőket:

A l'Hospital-szabály alkalmazása nem mindig vezet célhoz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{0}{0} \text{ típus, alkalmazva a l'Hospital-szabályt:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Ez a határérték nem létezik. Az eredeti határérték viszont igen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{x}{\sin x} \cdot \sin \frac{1}{x} = 0.$$

III.  $A(\infty - \infty)$ ;  $(0 \cdot \infty)$ ;  $\infty^0$ ;  $1^\infty$ ;  $0^0$  típusú határértékek

E határértékek kiszámításánál a határértéket a  $\frac{0}{0}$  vagy  $\frac{\infty}{\infty}$  alakra vezetjük vissza, és ezekre alkalmazzuk a l'Hospital-szabályt. Az eseteket példákon keresztül vizsgáljuk.

a)  $(\infty - \infty)$  típus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

Közös nevezőre hozva a helyettesítési érték  $\frac{0}{0}$  lesz, alkalmazható a l'Hospital-szabály:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \frac{0}{0}.$$

A l'Hospital-szabályt újra alkalmazva:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \cdot \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Tehát  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0.$

b)  $0 \cdot \infty$  típus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right).$$

A kifejezést törtté alakítjuk:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Arctg} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}, \text{ alkalmazható a l'Hospital-szabály:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Arctg} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left( -\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

c)  $1^\infty$  típus

$$I. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}.$$

A függvényt exponenciális függvényként írjuk fel.

$$\left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} = e^{x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}.$$

Állapítsuk meg a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$  határértéket!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^2}}.$$

A számláló és nevező határértéke 0, alkalmazható a l'Hospital-szabály.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left( -\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{2}{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = +\infty. \end{aligned}$$

Tehát  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$ , és ezért

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} = e^{x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = +\infty.$$

Ugyanígy:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}.$$

A kitevő határértéke:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left( -\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2 \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = -\infty. \end{aligned}$$

Ezért  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 0.$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x.$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}.$$

A kitevő határértéke:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0.$$

Így  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 1.$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$

Mivel  $x^{\frac{1}{1-x}} = (e^{\ln x})^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{\ln x}{1-x}},$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}}.$$

Nézzük a kitevő határértékét:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

Ezért  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

A példát más átalakítással is megoldhatjuk.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Jelöljük a határértéket  $L$ -lel, és írjuk fel természetes logaritmusát:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$\ln L = \ln \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Mivel az exponenciális függvény folytonos, a határérték logaritmus helyett a logaritmus határértékét vesszük:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(x^{\frac{1}{1-x}}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{0}{0}.$$

Alkalmazhatjuk a l'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

$$\ln L = -1.$$

$$L = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

d)  $\infty^0$  típus

$$\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{2 \ln x}}.$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{2 \ln x}} = \infty^0.$$

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{2 \ln x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Alkalmazható a l'Hospital-szabály:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{2 \frac{1}{x}}.$$

Átalakítva:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$L = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$



e)  $0^0$  típus

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +0} x^x.$$

$$\ln L = \ln \lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} \ln x^x = \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0.$$

$$\ln L = 0, \quad L = e^0 = 1.$$

Határozzuk meg ezt a határértéket más átalakítás segítségével is:

$$x^x = e^{x \ln x}, \quad \text{így}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x}.$$

A kitevő határértéke:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = 1.$$

**Példák**1. Ábrázoljuk az  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  függvényt!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (\text{lásd 6.2.3 II-t}).$$

A függvény értelmezve van, ha

$$1 + \frac{1}{x} > 0, \quad \frac{x+1}{x} > 0,$$

azaz, ha  $x > 0$ , és  $x < -1$ .

Állapítsuk meg a határértéket, ha

 $x \rightarrow 0$  jobbról és  $x \rightarrow -1$  balról.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \infty^0 \text{ típus.}$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

A kitevő határértéke:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = 0. \end{aligned}$$

Ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1.$$

Válasszuk  $z$ -t úgy, hogy ha  $x \rightarrow -1-0$ , akkor  $z \rightarrow 1+0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-z} = \lim_{z \rightarrow 1} e^{-z \ln \left(1 - \frac{1}{z}\right)}.$$

Mivel  $\lim_{z \rightarrow 1} \left[-z \ln \left(1 - \frac{1}{z}\right)\right] = +\infty$ , ezért

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z \rightarrow 1} e^{-z \ln \left(1 - \frac{1}{z}\right)} = +\infty.$$

A függvény képét a 7.73 ábra mutatja.

2. Határozzuk meg az

 $y = x \operatorname{Arctg} x$  függvény görbéjének aszimptótáit!Ha  $x = 0, \quad y = 0.$ 

$$y(-x) = -x \operatorname{Arctg}(-x) = x \operatorname{Arctg} x,$$

a függvény páros.

Ezért elegendő az aszimptótát az  $x \rightarrow +\infty$  esetben keresni.

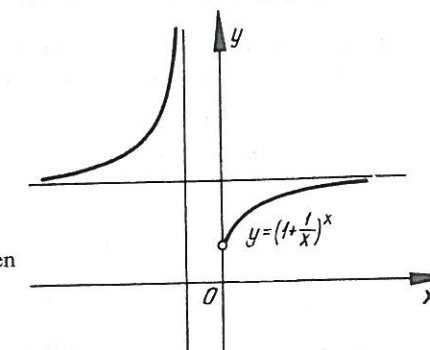
$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \operatorname{Arctg} x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

7.73 ábra

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{Arctg} x - \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}.$$

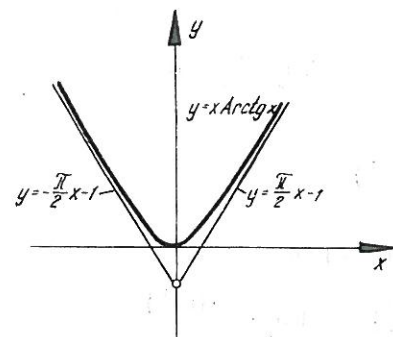
A l'Hospital-szabállyal:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{2x} = -1. \end{aligned}$$

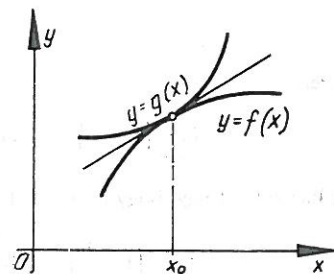
Az aszimptóta:  $y = \frac{\pi}{2} x - 1.$ 

A függvény páros volta miatt, ha  $x \rightarrow -\infty$ , az aszimptóta az  $y = \frac{\pi}{2}x - 1$  egyenesnek az  $y$  tengelyre való tükörképe, az  $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$  egyenes.

A görbe vázlata az aszimptóták segítségével megrajzolható, lásd a 7.74 ábrát.



7.74 ábra



7.75 ábra

## 7.2.7 A simuló kör

### Görbék magasabb rendű érintkezése

**Definíció.** Legyen két függvény,  $y = f(x)$  és  $y = g(x)$ , az  $x = x_0$  helyen  $(n+1)$ -szer differenciálható. A két görbe az  $x_0$  helyen  $n$ -ed rendben érintkezik, ha

$$f(x_0) = g(x_0)$$

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

$$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$$

és

$$f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0).$$

Az  $y = f(x)$  és  $y = g(x)$  függvény görbéje az  $x_0$  helyen első rendben érintkezik, ha

$$f(x_0) = g(x_0)$$

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

$$f''(x_0) \neq g''(x_0) \quad (7.75 \text{ ábra}).$$

Az  $y = f(x)$  és  $y = g(x)$  függvény görbéje az  $x_0$  helyen másodrendben érintkezik, ha

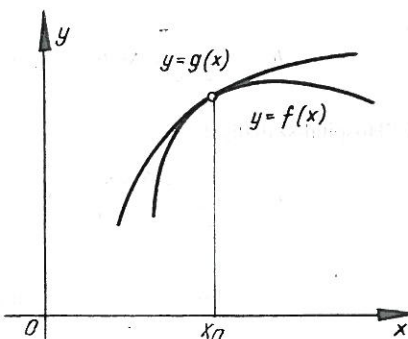
$$f(x_0) = g(x_0)$$

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

$$f''(x_0) = g''(x_0)$$

$$f'''(x_0) \neq g'''(x_0) \quad (7.76 \text{ ábra}).$$

Látjuk, hogy másodrendű érintkezésnél a görbék az  $x_0$  pontban már „hasznalóbbak”, mint elsőrendű érintkezésnél.



7.76 ábra

## A simuló kör fogalma

**Definíció.** Az  $y = f(x)$  függvény görbéjének simuló köre az  $x_0$  pontban az a kör, amellyel a görbe legalább másodrendben érintkezik.

Legyen az  $y = f(x)$  függvény az  $x_0$  helyen legalább kétszer differenciálható, és legyen

$$y_0 = f(x_0), \quad y'_0 = f'(x_0), \quad y''_0 = f''(x_0) \quad \text{és} \quad f''(x_0) \neq 0.$$

Írjuk a keresett kör egyenletét

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = r^2 \quad \text{alakban.}$$

( $\xi$  és  $\eta$  a kör futópontjának koordinátái.)

Kétszer deriválva:

$$\xi - \alpha + (\eta - \beta) \eta' = 0,$$

$$1 + \eta'^2 + (\eta - \beta) \eta'' = 0.$$

A definíció értelmében az  $x = x_0$  helyen a függvényérték és az első két derivált egyenlő. Tehát írhatjuk:

$$(1) \quad (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = r^2$$

$$(2) \quad (x_0 - \alpha) + (y_0 - \beta) y'_0 = 0$$

$$(3) \quad 1 + y_0'^2 + (y_0 - \beta) y_0'' = 0.$$

A (3) egyenletből:

$$y_0 - \beta = -\frac{1 + y_0'^2}{y_0''}.$$

Ezt behelyettesítve a (2) egyenletbe:

$$x_0 - \alpha = \frac{1 + y_0'^2}{y_0''} y_0'.$$

( $y_0 - \beta$ ) és ( $x_0 - \alpha$ ) értékét a (1) egyenletbe helyettesítve:

$$r^2 = \frac{(1 + y_0'^2)^2}{y_0''^2} y_0'^2 + \frac{(1 + y_0')^2}{y_0''^2} = \frac{(1 + y_0'^2)^2}{y_0''^2} (1 + y_0'^2).$$

$$r^2 = \frac{(1 + y_0'^2)^3}{y_0''^2}.$$

$$\text{Innen:} \quad r = \frac{(1 + y_0'^2)^{3/2}}{y_0''}.$$

$r$  a simuló kör előjeles sugara. A  $\frac{3}{2}$  kitevővel azt jelezük, hogy a gyököt pozitív előjellel vesszük. Az utolsó képlet tehát a simuló kör előjeles sugarát adja meg, vagyis a sugarat, vagy annak  $(-1)$ -szeresét, aszerint, hogy a kérdéses pontban mi a második derivált előjele.



Tehát a simuló kör középpontjának koordinátái és előjeles sugara az  $x_0$  helyen:

$$\alpha = x_0 - \frac{1+y_0'^2}{y_0''} \cdot y_0',$$

$$\beta = y_0 + \frac{1+y_0'^2}{y_0''},$$

$$r = \frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}.$$

A simuló kört *görbületi kör*nek is nevezik.

Valamely  $G$  görbe simuló körei középpontjainak, az ún. *görbületi középpontoknak*,  $G'$  mértani helye a  $G$  görbe *evolútája*.

#### Példák

1. Határozzuk meg az  $y = \sin 2x$  függvény simuló körét az  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  helyen: 7.77 ábra.

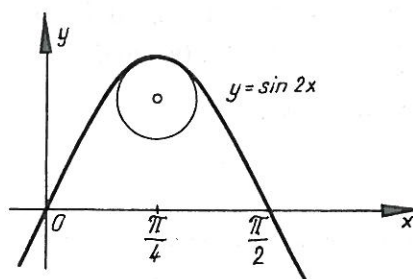
$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y'_0 &= 2 \cos 2x, & y'_0 &= 0, \\ y''_0 &= -4 \sin 2x, & y''_0 &= -4. \end{aligned}$$

$$r = \frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''} = -\frac{1}{4}.$$

A negatív jel a görbe konkáv voltából következik.

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$



7.77 ábra

2. Határozzuk meg az  $y = x^2$  parabola simuló körének sugarát az  $x = 0$  és  $x = \frac{1}{2}$  pontban!

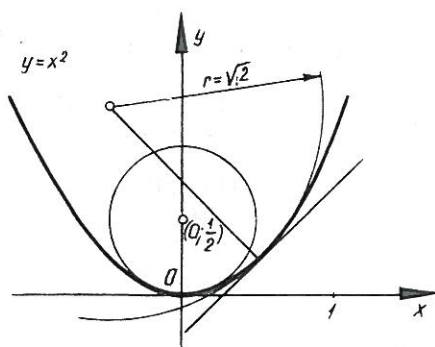
$$y' = 2x; \quad y'' = 2.$$

Ha  $x = 0$ ,  $y' = 0$ ,  $y'' = 2$ ,

$$r = \frac{(1+0)^{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ha  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y' = 1$ ,  $y'' = 2$ ,

$$r = \frac{(1+1)^{\frac{3}{2}}}{2} = \sqrt{2}.$$



7.78 ábra

A kört a középpont kiszámítása nélkül is felrajzolhatjuk, ha a sugarat a normálisra, megfelelő irányban felmérjük (7.78 ábra).

### 7.3 SÍKGÖRBÉK PARAMÉTERES EGYENLET-RENDSZERE

A görbe paraméteres megadási módja, hogy a görbe pontjainak  $x$  és  $y$  koordinátáit egy közös változó, a paraméter függvényeként adjuk meg.

Ezt a következő módon jelöljük:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{ahol } t \text{ a paraméter.}$$

$t$  megadásával az  $x$  és  $y$  értékeket kiszámítva ábrázolhatjuk a görbét. Ha a  $t$  paraméter a  $t_1 \leq t \leq t_2$  értékeket veszi fel, a  $P(t)$  pont a görbét befutja a paraméteres egyenletrendszer-től függő irányban.

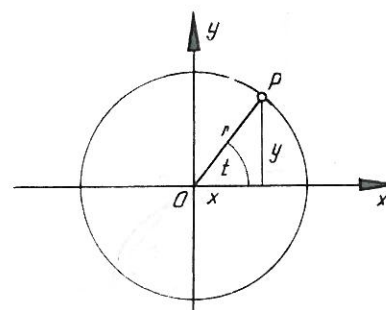
A paraméteres egyenletrendszerben  $x$  és  $y$  egyenlő szerepet töltenek be.

Az  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  paraméteres egyenletrendszerből megkapható a függvények explicit vagy implicit alakja, a  $t$  paraméter kiküszöbölésével.

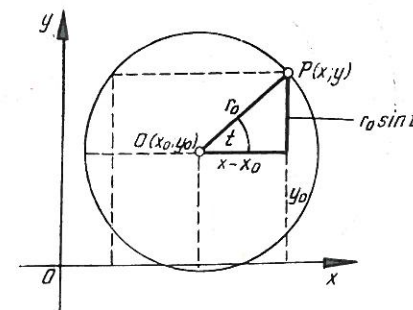
#### 7.3.1 Paraméteres egyenletekkel megadott görbék

1. **A kör paraméteres egyenletrendszere.** Legyen az origó középpontú,  $r$  sugarú körben a  $t$  forgásszög a paraméter (pozitív forgási irányban, radiánban mérve). A paraméteres egyenletrendszer:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (7.79 \text{ ábra}).$$



7.79 ábra



7.80 ábra

Ha  $t$  0-tól  $2\pi$ -ig változik, a  $P$  pont leírja a teljes kört. A két egyenletből:

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t),$$

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Megkaptuk a kör implicit egyenletét.

Ha a kör középpontja az  $(x_0; y_0)$  pont, a paraméteres egyenletrendszer (7.80 ábra):

$$\begin{cases} x - x_0 = r \cos t \\ y - y_0 = r \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Illetve:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

**2. Az ellipszis paraméteres egyenletrendszere.** Az ellipszis paraméteres egyenletrendszere a főkörös szerkesztés (lásd 3.2.3.4 pontot) segítségével kapjuk meg.

Legyen a paraméter a főkör  $P'$  pontjához tartozó  $t$  forgásszög. (Pozitív forgási irányban, radiánban mérve.)

Az ellipszis  $P$  pontjának koordinátái, amint az a 7.81 ábráról leolvasható:

$$x = a \cos t \quad \text{és} \quad y = b \sin t.$$

Ha  $0 \leq t \leq 2\pi$  a  $P$  pont leírja az ellipszist.

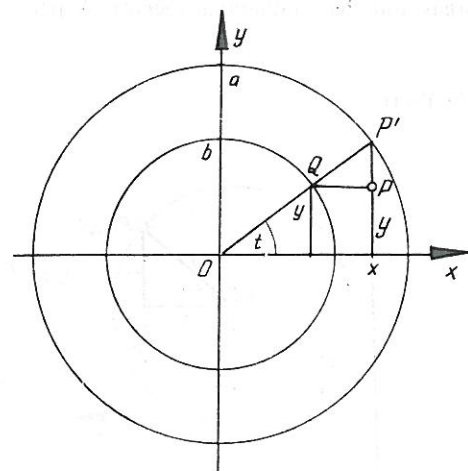
Tehát az ellipszis paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

A  $t$  paramétert kiküszöbölve:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



7.81 ábra

#### Példa

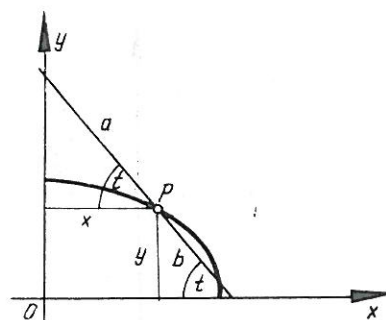
Milyen pályát ír le a fal mentén lecsúszó gerenda egy pontja?

Az adott pont ossza fel az  $l$  hosszúságú gerendát  $a$  és  $b$  részekre (7.82 ábra).

Válasszuk paraméternek a  $t$  szöget. A  $P$  pont koordinátái:

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t. \end{aligned} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{a } P \text{ pont ellipszist ír le.}$$

Ha  $a = b$ , a pálya kör.



7.82 ábra

**3. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere.** Az

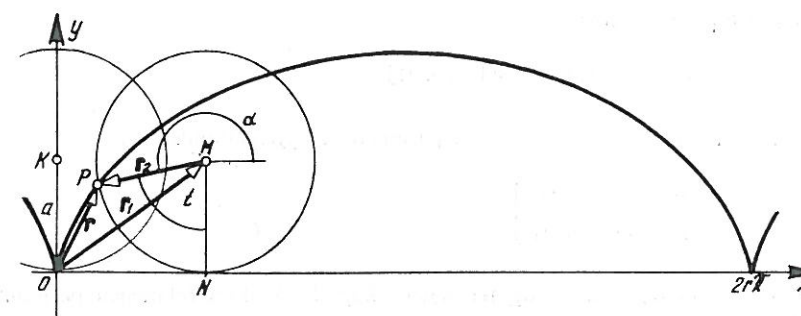
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer az egyenes egyenletrendszere ( $x_0; y_0; a; b$  állandók).

**4. A ciklois.** Cikloist ír le egy egyenesen csúszás nélkül gördülő kör lap valamely rögzített pontja.

Legyen a rögzített pont az  $a$  sugarú kör kerületén.

Legyen a mozgás kezdetekor a kör középpontja a  $K(0; a)$  pontban. Jusson el az origóban levő pont csúszás nélküli gördüléssel a  $P$  pontba, a kör középpontja az  $M$  pontba (7.83 ábra).



7.83 ábra

Válasszuk paraméternek a  $PMN$  szöget,  $t$ -t. A csúszás nélküli gördülés feltétele:

$$ON = at.$$

Legyen a  $P$  pont helyvektora  $\mathbf{r}$ , az  $M$  középpont helyvektora  $\mathbf{r}_1$  és legyen  $\vec{MP} = \mathbf{r}_2$ ,

$$|\mathbf{r}_2| = a.$$

A  $P$  pont helyvektora:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2.$$

Fejezzük ki a vektorokat koordinátákkal:

$$\mathbf{r}_1 = at\mathbf{i} + a\mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}_2 = a \cos \alpha \mathbf{i} + a \sin \alpha \mathbf{j}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az első körforgásnál:

$$t + \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$



A továbbiakban:

$$t + \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k = 1, 2, \dots),$$

azaz  $\alpha = \frac{3\pi}{2} - t$ , illetve  $\alpha = \left(\frac{3\pi}{2} - t\right) + 2k\pi$ .

Ezért

$$\cos \alpha = -\sin t \quad \text{és} \quad \sin \alpha = -\cos t.$$

Így  $\mathbf{r}_2 = -a \sin t \mathbf{i} - a \cos t \mathbf{j}$ .

Tehát a  $P$  pont helyvektora:

$$\mathbf{r} = a(t - \sin t) \mathbf{i} + a(1 - \cos t) \mathbf{j}.$$

A  $P$  pont koordinátái, azaz a ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}.$$

$0 \leq t \leq 2\pi$  esetén a ciklois egy fél menetét kapjuk. A ciklois fél menete periodikusan ismétlődik.

Ha a  $P$  pont nincs a kör kerületén,  $r \neq a$ , a ciklois egyenletrendszere;

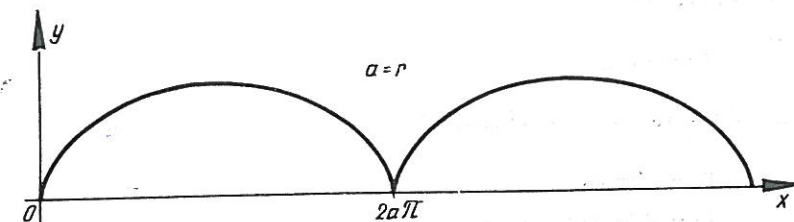
$$\begin{cases} x = rt - a \sin t \\ y = r - a \cos t \end{cases}.$$

$a$  értékétől függően háromféle cikloist különböztetünk meg:

$a = r$  csúcsos ciklois, a pont a kör kerületén van,

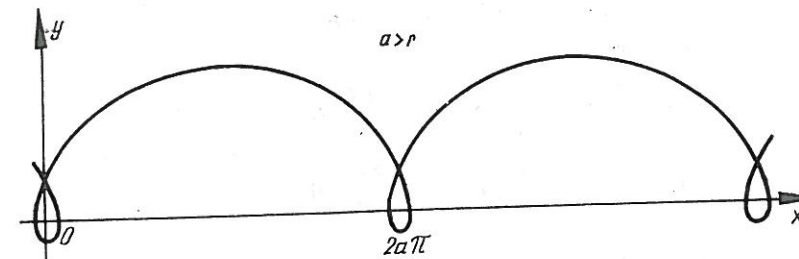
$a > r$  hurkolt ciklois,

$a < r$  nyújtott ciklois (7.84, 85, 86 ábra).

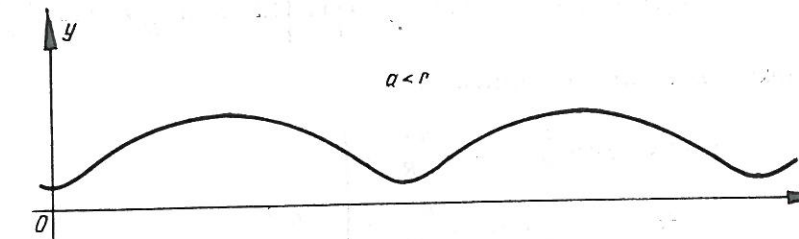


7.84 ábra

**5. Az epiciklois és hipociklois.** Adott  $R$  sugarú körön gördüljön csúszás nélkül egy  $r$  sugarú kör. Ha a gördülő kör az  $R$  sugarú kört kívülről érinti, egy adott pontja epicikloist, ha belülről érinti, egy adott pontja hipocikloist ír le.



7.85 ábra



7.86 ábra

Az epiciklois egyenletrendszere. Válasszuk paraméternek a  $P$  ponthoz tartozó  $PO'O$  szöget,  $t$ -t (7.87 ábra).

$$PO'O \angle = t.$$

Legyen az  $O'$  pont forgásszöge  $\omega$  ( $O'O A \angle = \omega$ ).

A csúszás nélküli gördülés feltétele:

$$R\omega = rt.$$

Legyen a  $P$  pont helyvektora  $\mathbf{r}$ , az  $O'$  ponté  $\mathbf{r}_1$  és legyen  $\overrightarrow{O'P} = \mathbf{r}_2$ .

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2,$$

ahol  $|\mathbf{r}_1| = R + r$ ;  $|\mathbf{r}_2| = r$ .

Koordinátákkal:

$$\mathbf{r}_1 = (R + r) \cos \omega \mathbf{i} + (R + r) \sin \omega \mathbf{j} \quad \text{és}$$

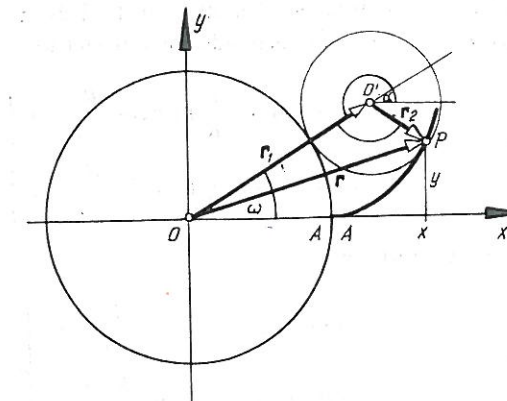
$$\mathbf{r}_2 = r \cos \alpha \mathbf{i} + r \sin \alpha \mathbf{j}.$$

A  $P$  pont helyzetétől függően:

$$\alpha = (\omega + t) \pm \pi, \quad \text{ezért}$$

$$\cos \alpha = -\cos(\omega + t),$$

$$\sin \alpha = -\sin(\omega + t).$$



7.87 ábra

Így:  $\mathbf{r}_2 = -r \cos(\omega + t) \mathbf{i} - r \sin(\omega + t) \mathbf{j}$ .  
 Mivel  $R\omega = rt$ ,  
 $\omega = \frac{r}{R}t$  és  $(\omega + t) = \frac{r+R}{R}t$ ,  
 $\mathbf{r}_2 = -r \cos \frac{R+r}{R}t \mathbf{i} - r \sin \frac{R+r}{R}t \mathbf{j}$ .

A  $P$  pont helyvektora:

$$\mathbf{r} = \left[ (R+r) \cos \frac{r}{R}t - r \cos \frac{R+r}{R}t \right] \mathbf{i} + \left[ (R+r) \sin \frac{r}{R}t - r \sin \frac{R+r}{R}t \right] \mathbf{j}.$$

Az epiciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$(a) \quad \begin{cases} x = (R+r) \cos \frac{r}{R}t - r \cos \frac{R+r}{R}t \\ y = (R+r) \sin \frac{r}{R}t - r \sin \frac{R+r}{R}t \end{cases}$$

Válasszuk paraméternek az  $\omega$  szöveget:

$$t = \frac{R\omega}{r} \quad t + \omega = \frac{R+r}{r}\omega.$$

Az epiciklois egyenletrendszere:

$$(b) \quad \begin{cases} x = (R+r) \cos \omega - r \cos \frac{R+r}{r}\omega \\ y = (R+r) \sin \omega - r \sin \frac{R+r}{r}\omega \end{cases}$$

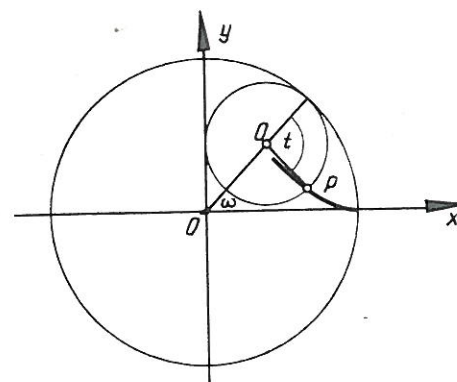
A hipociklois egyenletrendszere. A hipociklois egyenletrendszerét megkapjuk, ha az epiciklois egyenletében  $r$  helyett  $(-r)$ -et,  $t$  helyett  $(-t)$ -t írunk.

Így a hipociklois egyenletrendszere a megfelelő előjeleket tekintetbe véve (7.88 ábra):

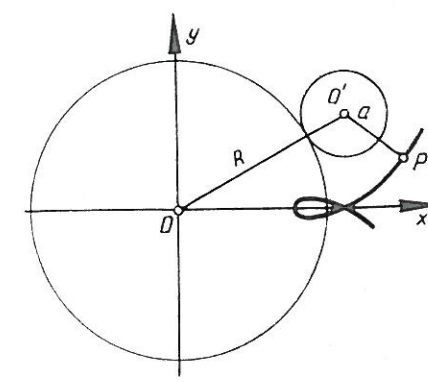
$$(a) \quad \begin{cases} x = (R-r) \cos \frac{r}{R}t + r \cos \frac{R-r}{R}t \\ y = (R-r) \sin \frac{r}{R}t + r \sin \frac{R-r}{R}t \end{cases}$$

Az  $\omega$  paraméterrel

$$(b) \quad \begin{cases} x = (R-r) \cos \omega + r \cos \frac{R-r}{r}\omega \\ y = (R-r) \sin \omega + r \sin \frac{R-r}{r}\omega \end{cases}$$



7.88 ábra



7.89 ábra

**Megjegyzés.** A hipociklois egyenletrendszerét közvetlenül is megkaphatjuk definíciója alapján, a megfelelő vektorok segítségével.  
 Legyen a  $P$  pont a gördülő kör  $O'$  középpontjához rögzítve és attól  $a$  távolságra.

$$O'P = a$$

Az epiciklois egyenletrendszere (7.89 ábra):

$$\begin{cases} x = (R+r) \cos \frac{r}{R}t - a \cos \frac{R+r}{R}t \\ y = (R+r) \sin \frac{r}{R}t - a \sin \frac{R+r}{R}t \end{cases}$$

A hipociklois egyenletrendszere:

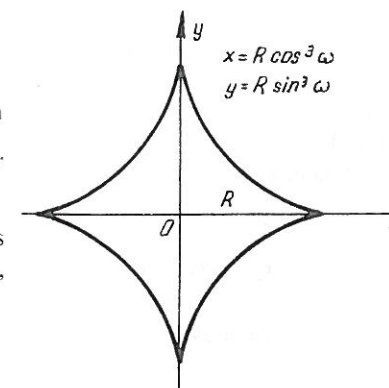
$$\begin{cases} x = (R-r) \cos \frac{r}{R}t + a \cos \frac{R-r}{R}t \\ y = (R-r) \sin \frac{r}{R}t + a \sin \frac{R-r}{R}t \end{cases}$$

**6. Az asztroid.** Az asztroid (csillaggörbe) olyan hipociklois, amelyben  $r = \frac{R}{4}$ , azaz  $R = 4r$  (7.90 ábra).

Az asztroid egyenletrendszere a hipociklois egyenletrendszerének (b) szerinti alakjából,

mivel  $R-r = 3r$  és  $\frac{R-r}{r} = 3$ :

$$\begin{cases} x = 3r \cos \omega + r \cos 3\omega \\ y = 3r \sin \omega - r \sin 3\omega \end{cases}$$



7.90 ábra



Mivel:

$$\cos 3\omega = 4 \cos^3 \omega - 3 \cos \omega,$$

$$\sin 3\omega = 3 \sin \omega - 4 \sin^3 \omega,$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 4r \cos^3 \omega \\ y &= 4r \sin^3 \omega \end{aligned} \right\}$$

$$4r = R.$$

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos^3 \omega \\ y &= R \sin^3 \omega \end{aligned} \right\} \text{ az asztroid egyenletrendszere.}$$

A paramétert kiküszöbölve:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

**7. A körevolvens. Definíció.** Ha egy  $r$  sugarú körrel lefejtünk egy rácsavart, egyik pontjában rögzített fonalt úgy, hogy az állandóan kifeszül, azaz az érintő irányában van, a fonal egy adott pontja a körevolvens írája le.

Helyezzük el a kört úgy, hogy középpontja az origóban legyen. Vizsgáljuk annak a pontnak mozgását, amely a  $P$  pontból indul ki (7.91 ábra).

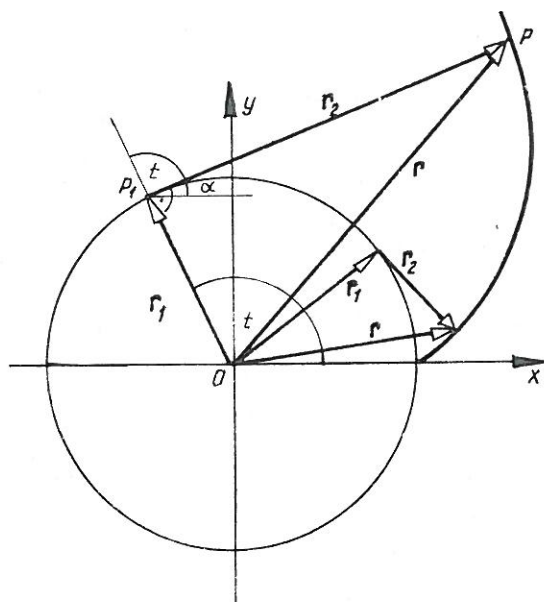
Legyen a  $P$  pont mindenkor helyvektora  $\mathbf{r}$ , az érintési ponté  $\mathbf{r}_1$ . Válasszuk paraméternek az  $\mathbf{r}_1$  vektor forgásszögét,  $t$ -t.

A  $P$  pont helyvektora:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2, \\ |\mathbf{r}_1| &= r, \end{aligned}$$

és a definíció értelmében  $|\mathbf{r}_2| = rt$ . Írjuk fel az  $\mathbf{r}_1$  és  $\mathbf{r}_2$  vektorokat koordinátákkal.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= r \cos t \mathbf{i} + r \sin t \mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_2 &= rt \cos \alpha \mathbf{i} + rt \sin \alpha \mathbf{j}. \end{aligned}$$



7.91 ábra

A  $t$  szög körforgásakor:

$$\alpha = t - \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Ezért  $\cos \alpha = \sin t,$

$$\sin \alpha = -\cos t,$$

és így  $r_2 = rt \sin t \mathbf{i} - rt \cos t \mathbf{j}.$

Tehát a  $P$  pont helyvektora:

$$\mathbf{r} = r(\cos t + t \sin t) \mathbf{i} + r(\sin t - t \cos t) \mathbf{j}.$$

A körevolvens paraméteres egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos t + t \sin t) \\ y &= r(\sin t - t \cos t) \end{aligned} \right\}$$

A fogaskerek fogprofilját körevolvens alakúra marják.

### 7.3.2 A paraméteres alakban adott görbék érintőjének meghatározása

A paraméteres alakban adott görbék egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\} \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Az érintő iránytangense:  $\tan \alpha = y'.$

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

A koordináták  $t$  szerinti deriváltját (a paraméter szerinti deriváltat) jelöljük  $\dot{x}(t)$ , illetve  $\dot{y}(t)$ -vel, röviden  $\dot{x}$  és  $\dot{y}$ -tal (olv:  $x$  pont,  $y$  pont).

A láncszabály alkalmazásával:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Hasonlóan kapható láncszabállyal a második derivált.

$$y'' = \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

Az  $y'$  és  $y''$  deriváltaknak csak akkor van értelmük, ha  $\dot{x} \neq 0$ .

**Megjegyzés.** Paraméteresen adott görbék érintőinek meghatározásához a vektoranalízisben visszatérünk. Most csak speciális példákat nézünk.

## Példa

A ciklois érintője

A ciklois egyenletrendszere:

$$\begin{cases} y = a(1 - \cos t) \\ x = a(t - \sin t) \end{cases}$$

A deriváltak

$$\begin{aligned} \dot{y} &= a \sin t \\ \dot{x} &= a(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Az érintő iránytangense

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

$$\text{Tehát } \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$$

$$\text{azaz } \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}.$$

Így a ciklois érintőjét PC meghúzásával könnyen megszerkeszthetjük (7.92 ábra).

## 7.3.3 Paraméteresen adott görbék simuló köre

Az  $y = f(x)$  egyenletű görbe simuló körének előjeles sugara és középpontjának koordinátái az  $x_0$  pontban:

$$r = \frac{(1 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}; \quad \alpha = x_0 - \frac{1 + y_0'^2}{y_0''} y_0'; \quad \beta = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \quad \text{ahol } y_0'' \neq 0.$$

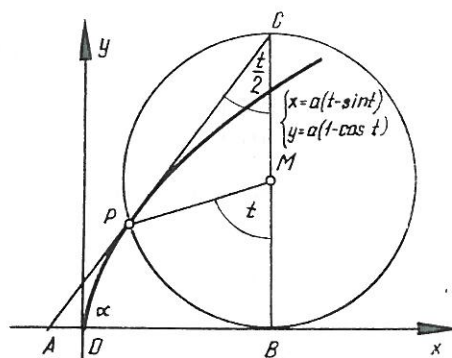
Legyen a görbe az

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adva.

Tegyük fel, hogy léteznek az  $\ddot{x}$  és  $\ddot{y}$  deriváltak.A  $t = t_0$  paraméterű pontban:

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad y_0' = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}, \quad y_0'' = \frac{\ddot{x}_0 \ddot{y}_0 - \dot{x}_0 \ddot{x}_0}{\dot{x}_0^3}.$$



7.92 ábra

Helyettesítsük ezeket az értékeket a simuló kör képleteibe.

$$\begin{aligned} r &= \frac{\left(1 + \frac{\dot{y}_0^2}{\dot{x}_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\ddot{x}_0 \ddot{y}_0 - \dot{x}_0 \ddot{x}_0}{\dot{x}_0^3}} = \frac{(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)^{\frac{3}{2}}}{\ddot{x}_0 \ddot{y}_0 - \dot{x}_0 \ddot{x}_0} \\ \alpha &= x_0 - \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} \frac{1 + \frac{\dot{y}_0^2}{\dot{x}_0^2}}{\frac{\ddot{x}_0 \ddot{y}_0 - \dot{x}_0 \ddot{x}_0}{\dot{x}_0^3}} = x_0 - \dot{y}_0 \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}{\ddot{x}_0 \ddot{y}_0 - \dot{x}_0 \ddot{x}_0} \\ \beta &= y_0 + \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} \frac{1 + \frac{\dot{y}_0^2}{\dot{x}_0^2}}{\frac{\ddot{x}_0 \ddot{y}_0 - \dot{x}_0 \ddot{x}_0}{\dot{x}_0^3}} = y_0 + \dot{x}_0 \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}{\ddot{x}_0 \ddot{y}_0 - \dot{x}_0 \ddot{x}_0} \end{aligned}$$

A simuló kör létezésének feltétele egy pontban az  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  deriváltak létezésén kívül, hogy ott  $\ddot{x}\ddot{y} - \dot{x}\ddot{x} \neq 0$ .Egy görbe görbületi középpontjainak mértani helye a görbe evolútája. Jelöljük a görbe  $P[x(t); y(t)]$  pontjaihoz tartozó görbületi középpontokat  $P'[\xi(t); \eta(t)]$ -vel.Az  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  egyenletrendszerű görbe evolútáját a

$$\begin{cases} \xi = x - y \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \\ \eta = y + x \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \end{cases}$$

egyenletrendszer adja meg (7.93 ábra).

## Példa

Írjuk fel az

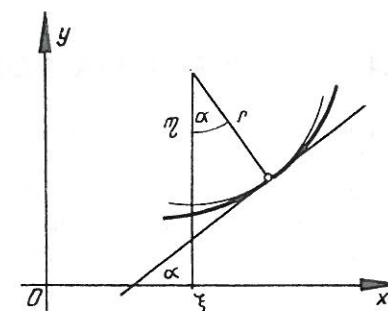
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

egyenletrendszerű ciklois evolútáját.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(1 - \cos t) \\ \dot{y} = a \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = a \sin t \\ \ddot{y} = a \cos t \end{cases} \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(2 - 2 \cos t).$$

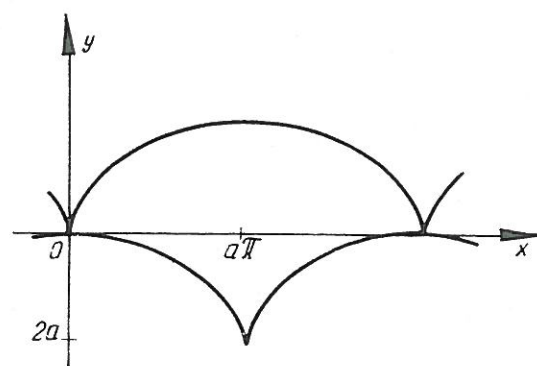
Az evolúta  $t$  paraméterű pontjának koordinátái:

$$\begin{aligned} \xi &= a(t - \sin t) - a \sin t \frac{a^2(2 - 2 \cos t)}{a^2(\cos t - \cos^2 t) - a^2 \sin^2 t}, \\ \eta &= a(1 - \cos t) + a(1 - \cos t) \frac{a^2(2 - 2 \cos t)}{a^2(\cos t - \cos^2 t) - a^2 \sin^2 t}, \\ \xi &= a(t - \sin t) - a \sin t \frac{2(1 - \cos t)}{(\cos t - 1)}, \\ \eta &= a(1 - \cos t) + a(1 - \cos t) \frac{2(1 - \cos t)}{(\cos t - 1)}, \\ \xi &= a(t + \sin t) \\ \eta &= a(-1 + \cos t) \end{aligned}$$



7.93 ábra





7.94 ábra

Vezessük be  $t$  helyett a  $\tau + \pi$  paramétert!

$$\begin{cases} \xi = a[\tau + \pi + \sin(\tau + \pi)] \\ \eta = a[-1 + \cos(\tau + \pi)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = a(\tau - \sin \tau) + a\pi \\ \eta = a(1 - \cos \tau) - 2a \end{cases}$$

Az evolúta is ciklois. A z eredeti cikloisból jobbra  $a\pi$ , lefelé  $2a$  egység eltolással nyerhető (7.94 ábra).

## 7.4 SÍKGÖRBÉK POLÁRKOORDINÁTÁS EGYENLETE

A polárkoordináta-rendszert egy adott  $O$  pont (pólus) és a belőle kiinduló  $p$  félegyenes (polártengely) alkotja.

Egy  $P$  pont koordinátáit az  $r = OP$  szakasz (sugár = rádiuszvektor) és  $r$ -nek  $p$ -vel bezárt  $\varphi$  szöge (polárszög) alkotják. Tehát a  $P$  pont koordinátái  $r$  és  $\varphi$ , így jelöljük:  $P = P(r; \varphi)$ . Független változónak a  $\varphi$  szöget választjuk, tehát egy görbe polárkoordinátás egyenlete

$$r = r(\varphi),$$

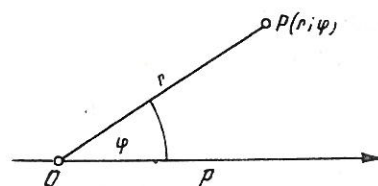
ahol  $r$  értéke csak pozitív szám lehet (7.95 ábra).

Összefüggés a derékszögű és polárkoordináták között.

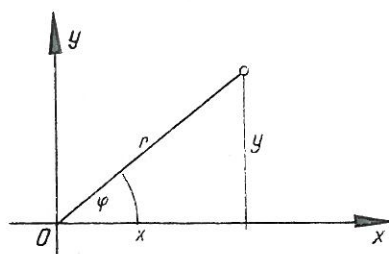
Helyezzük úgy el a polárkoordináta-rendszert, hogy pólusa a derékszögű koordináta-rendszer origójába, polártengelye az  $x$  tengely pozitív irányába kerüljön (7.96 ábra).

Az összefüggések könnyen leolvashatók:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$



7.95 ábra



7.96 ábra

### 7.4.1

## Polárkoordinátás egyenletekkel megadott görbék

### 1. A spirálisok egyenlete

a) Az árkhimédészi spirális. Az  $r = a\varphi$  ( $a > 0$  állandó) egyenlet az ún. arkhimédészi spirális egyenlete (7.97 ábra).

b) A logaritmikus spirális. Az  $r = e^{a\varphi}$  ( $a = \text{állandó}$ ) a logaritmikus spirális egyenlete (7.98 ábra).

c) A hiperbolikus spirális. Az  $r = \frac{b}{\varphi}$  egyenlet a hiperbolikus spirális egyenlete. Ha  $\varphi \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 0$ . Ha  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$  (7.99 ábra).

Mivel  $y = r \sin \varphi$

$$y = b \frac{\sin \varphi}{\varphi},$$

ha  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $|y - b| \rightarrow 0$ .

A görbének az  $y = b$  egyenes aszimptótája.

2. A kör egyenlete. a) Írjuk fel az  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  kör polárkoordinátás egyenletét!

Teljes négyzetté való kiegészítéssel az egyenlet:

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

A kör középpontja  $M(a; 0)$ , sugara  $a$ .

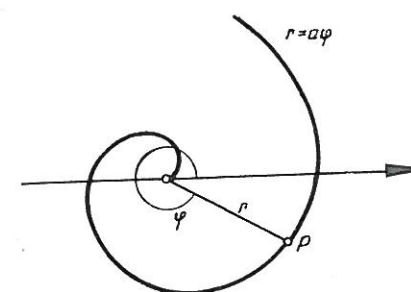
Helyezzük a polárkoordináta-rendszer pólusát az origóba, tengelyét az  $x$  tengely pozitív irányába.

Az 7.100 ábrából leolvasható a kör polárkoordinátás egyenlete:

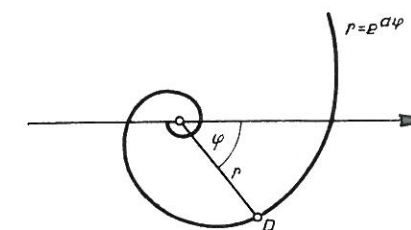
$$r = 2a \cos \varphi.$$

$r$  csak pozitív lehet, ezért az értelmezési tartomány:

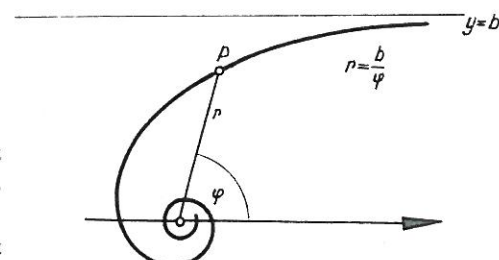
$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$



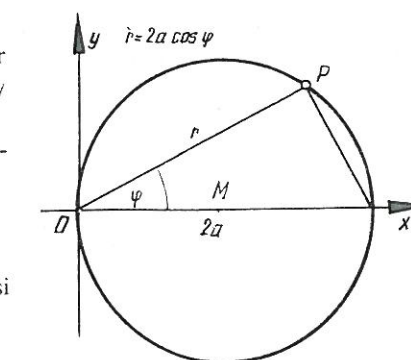
7.97 ábra



7.98 ábra



7.99 ábra



7.100 ábra

b) Az  $x^2 + y^2 - 2ay = 0$  kör polárkoordinátás egyenlete az előzőekhez hasonlóan (7.101 ábra).

$$r = 2a \sin \varphi.$$

Az értelmezési tartomány:

$$0 \leq \varphi \leq \pi.$$

c) Legyen az  $R$  sugarú kör középpontja az origótól  $a$  távolságra. A koszinusztétel szerint:

$$R^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \alpha),$$

ahol  $\varphi$  a  $P$  futópont,  $\alpha$  az  $M$  középpont polárszöge (7.102 ábra).

Ha a kör átmegy a póluson

$$R = a;$$

$$a^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi - \alpha).$$

A polárkoordinátás egyenlet:

$$r = 2a \cos(\varphi - \alpha) \quad (7.103 \text{ ábra}).$$

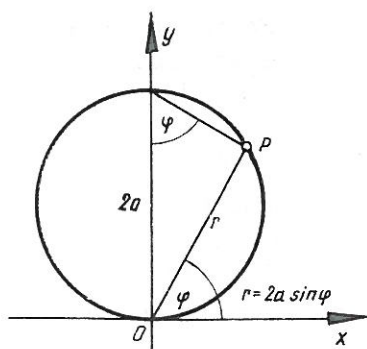
Speciális esetei:

$$\alpha = 0, \quad r = 2a \cos \varphi,$$

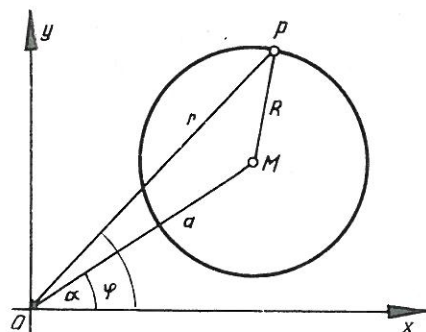
$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad r = 2a \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

azaz

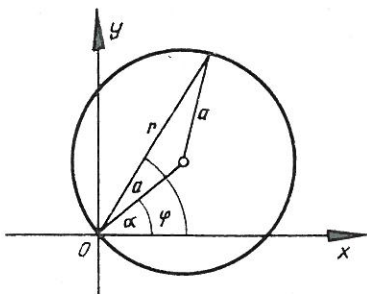
$$r = 2a \sin \varphi.$$



7.101 ábra



7.102 ábra



7.103 ábra

### 3. A lemniszkáta

#### a) A Bernoulli-féle lemniszkáta

**Definíció.** A görbe bármely pontjának két adott fókuszától való távolságának szorzata egyenlő a fókuszok féltávolságának négyzetével.

$$\text{Ha } F_1 F_2 = 2m,$$

$$PF_1 \cdot PF_2 = m^2 \quad (7.104 \text{ ábra}).$$

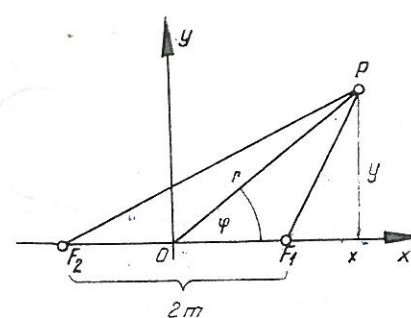
Azaz

$$\sqrt{(x+m)^2 + y^2} \sqrt{(x-m)^2 + y^2} = m^2.$$

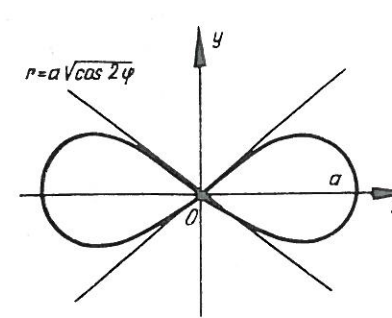
Négyzetre emelve:

$$[(x+m)^2 + y^2][(x-m)^2 + y^2] = m^4.$$

$$(x^2 + y^2 + m^2 + 2mx)(x^2 + y^2 + m^2 - 2mx) = m^4.$$



7.104 ábra



7.105 ábra

Egyszerűbb alakban írva:

$$(x^2 + y^2 + m^2)^2 - 4m^2 x^2 = m^4.$$

A négyzetre emelést elvégezve:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2m^2 x^2 + 2m^2 y^2 + m^4 - 4m^2 x^2 = m^4.$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2m^2(x^2 - y^2).$$

$$2m^2 = a^2 \quad \text{jelöléssel,} \quad \left(m = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right):$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Mivel  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , ezért

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{és} \quad x^2 - y^2 = r^2 \cos 2\varphi.$$

Így

$$r^4 = a^2 r^2 \cos 2\varphi.$$

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi,$$

$$r = a \sqrt{\cos 2\varphi} \quad (7.105 \text{ ábra}).$$

A függvény értelmezve van, ha

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{és} \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}.$$

Ha  $\varphi = 0, \pi$ ,  $r = a$ ,

ha  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $r = 0$ .

b) Mi a polárkoordinátás alakja az

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy \quad \text{egyenletű görbének?}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ 2xy = r^2 \sin 2\varphi, \end{cases} \quad \text{ezért}$$

$$r^4 = r^2 a^2 \sin 2\varphi,$$

$$r = a \sqrt{\sin 2\varphi}.$$