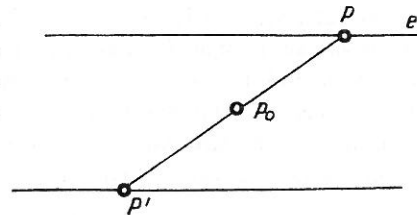


elég az egyenes egy pontját tükrözni. Legyen a P pont tükröképe P' . Felírjuk a P' -n átmenő és az e egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét, és megkapjuk az egyenes tükröképét (2.98 ábra).



2.98 ábra

Példa

Írjuk fel az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-2}$ egyenesnek a $P_0(3; -2; 1)$ pontra vonatkozó tükröképét!

Az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Egy pontja az egyenletéből leolvasható, a $P(1; -2; 4)$ pont.

Ennek tükröképe $P'(x'; y'; z')$.

$$x' = 2x_0 - x = 5, \quad y' = 2y_0 - y = -2, \quad z' = 2z_0 - z = -2.$$

Így az egyenes tükröképe az

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{-2} \text{ egyenes.}$$

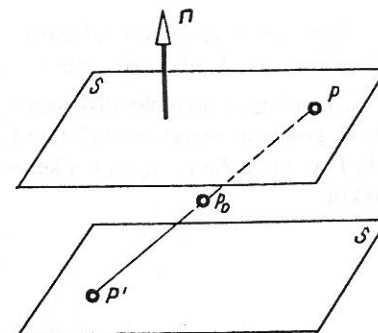
3. **Sík pontra vonatkozó tükröképe.** Az S síknak a P_0 pontra vonatkozó tükröképe párhuzamos az S síkkal (normálvektoruk megegyezik), és ugyanolyan távol van a P_0 ponttól, mint az S sík. Meghatározása céljából tükrözzük az S sík egy P pontját, és felírjuk a P' ponton átmenő és az S síkkal párhuzamos sík egyenletét (2.99 ábra).

4. **Pontnak egyenesre vonatkozó tükröképe.** A P pontnak az e egyenesre vonatkozó tükröképe a P pontból az egyenesre bocsátott merőlegesen van, a metszéspontnak, D -nek ellentétes oldalán és ugyanolyan távol D -től, mint a P pont.

Felvesszük az egyenesen a P_0 pontot. Meghatározzuk a $\overrightarrow{P_0D}$ vetületvektort, majd a $\overrightarrow{PD}$ vektort.

A P' pont helyvektora (2.100 ábra):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + 2\overrightarrow{PD}.$$



2.99 ábra

Példa

Határozzuk meg a $P(5; 2; 3)$ pontnak az

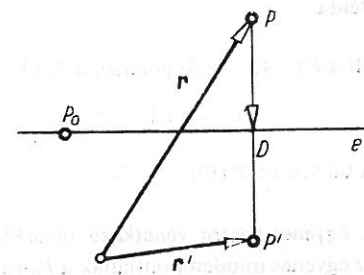
$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

egyenesre vonatkozó tükröképét!

Az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = [1; 2; -1]$.

Egy pontja a $P_0(3; -1; 2)$.

$$\overrightarrow{P_0P} = [2; 3; 1].$$



2.100 ábra

A merőleges vetület:

$$(\overrightarrow{P_0P})_v = \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2+6-1}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

A $\mathbf{v}$ vektor egységvektora: $\mathbf{v}^0 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}} \right]$.

A vetületvektor: $\overrightarrow{P_0D} = \frac{7}{\sqrt{6}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}} \right] = \left[\frac{7}{6}; \frac{7}{3}; \frac{-7}{6} \right]$,

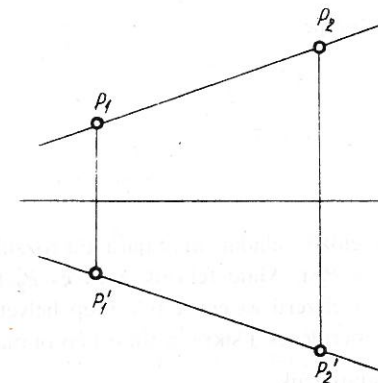
$$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{P_0D} - \overrightarrow{P_0P} = \left[-\frac{5}{6}; -\frac{2}{3}; -\frac{13}{6} \right].$$

A keresett helyvektor: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + 2\overrightarrow{PD}$.

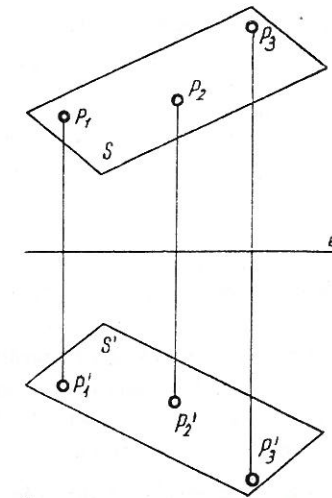
Mivel $\mathbf{r} = [5; 2; 3]$ és $\overrightarrow{PD} = \left[-\frac{5}{6}; -\frac{2}{3}; -\frac{13}{6} \right]$,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + 2\overrightarrow{PD} = \left[\frac{10}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{4}{3} \right].$$

A tükrökép: $P' \left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{4}{3} \right)$.



2.101 ábra

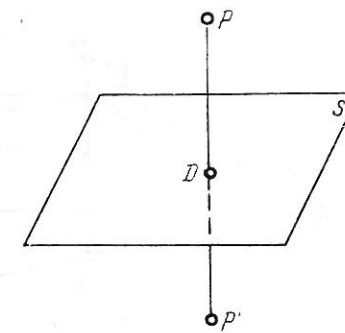


2.102 ábra

5. **Egyenesnek egyenesre vonatkozó tükröképe.** A tükrökép az egyenes két pontjának, P_1 -nek és P_2 -nek e -re vonatkozó tükröképeit, P'_1 -t és P'_2 -t összekötő egyenes (2.101 ábra).

6. **Síknak egyenesre vonatkozó tükröképe.** Az S síkot az e egyenesre úgy tükrözzük, hogy felvesszük a sík három, tetszős szerinti pontját, ezeket tükrözzük az e egyenesre, és felírjuk a P'_1, P'_2, P'_3 pontokon átmenő sík egyenletét (2.102 ábra).

7. **Pont síkra vonatkozó tükröképe.** A P pontnak az S síkra vonatkozó tükröképét megkapjuk, ha felírjuk a P ponton átmenő és a síkra merőleges egyenes egyenletét, majd meghatározzuk az egyenes és a sík D döféspontját. A keresett tükrökép a P pontnak a döféspontra vonatkozó tükröképe (2.103 ábra).



2.103 ábra

Példa

Határozzuk meg a $P(-1; 4; 3)$ pontnak a

$$3x - 5y + 2z = 21 \quad \text{síkra vonatkozó tükörképét!}$$

A ponton átmenő és a síkra merőleges egyenes egyenlete:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-3}{2}, \quad \text{illetve}$$

$$x = 3t - 1; \quad y = -5t + 4; \quad z = 2t + 3.$$

Ezeket az értékeket a sík egyenletébe helyettesítve

$$9t - 3 + 25t - 20 + 4t + 6 = 21,$$

$$38t = 38,$$

$$t = 1.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$x_0 = 2, \quad y_0 = -1, \quad z_0 = 5.$$

A dőféspont: $D(2; -1; 5)$.

A dőféspont a P pont és a tükörkép számtani közepe

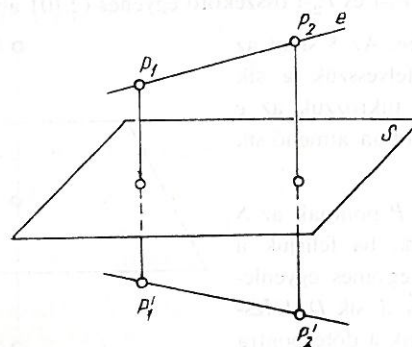
$$2 = \frac{-1+x'}{2}, \quad -1 = \frac{4+y'}{2}, \quad 5 = \frac{3+z'}{2}.$$

$$\text{Innen} \quad x' = 5 \quad y' = -6 \quad z' = 7.$$

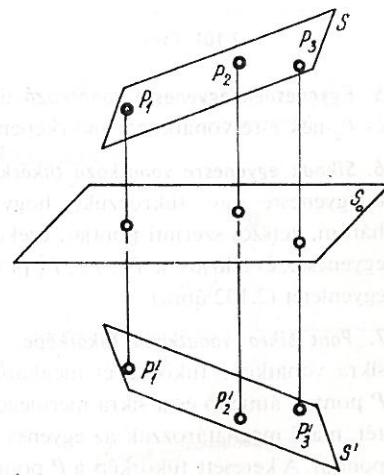
Tehát a tükörkép: $P'(5; -6; 7)$.

8. Egyenes síkra vonatkozó tükörképe. Az előző feladat mintájára tükrözzük a síkra az egyenes két tetszés szerinti pontját, P_1 -et és P_2 -t. Majd felírjuk a P_1' és P_2' tükörképeket összekötő egyenes egyenletét (2.104 ábra). Célszerű az egyik tükörkép helyett az egyenes és a sík dőféspontját venni. Ha az egyenes merőleges a síkra, a tükörkép önmaga.

9. Sík síkra vonatkozó tükörképe. Meghatározzuk az S sík három pontjának az S_0 síkra vonatkozó tükörképét. Ezután felírjuk a három tükörképponton átmenő sík egyenletét (2.105 ábra).



2.104 ábra



2.105 ábra

2.4.2 Néhány geometriai tétel bizonyítása vektorokkal

1. tétel. A háromszög magasságvonalai egy pontban, a magassági pontban metszik egymást.

Bizonyítás. Meghúzzuk az AC és BC oldalakhoz tartozó magasságvonalakat; metszéspontjuk legyen M (2.106 ábra). Az M pontot összekötjük a csúcsokkal, és bevezetjük a következő vektorokat

$$\vec{MA} = \mathbf{a} \quad \vec{MB} = \mathbf{b} \quad \text{és} \quad \vec{MC} = \mathbf{c}.$$

E vektorokkal kifejezzük a háromszög oldalait jelentő vektorokat, megfelelő irányítással:

$$\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \vec{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}, \quad \vec{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

A feltétel szerint $\mathbf{a} \perp \vec{BC}$ és $\mathbf{b} \perp \vec{CA}$, skaláris szorzatuk nulla.

$$\mathbf{a}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0,$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{a} - \mathbf{c}) = 0.$$

A beszorzást elvégezve

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{ac} - \mathbf{ab} &= 0 \\ \mathbf{ba} - \mathbf{bc} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \text{azaz} \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{ac} &= \mathbf{ab} \\ \mathbf{bc} &= \mathbf{ab} \end{aligned} \right\}.$$

Ebből a $\mathbf{bc} = \mathbf{ac}$ vagy $\mathbf{bc} - \mathbf{ac} = 0$ egyenlőség következik. $\mathbf{c}$ -t kiemelve

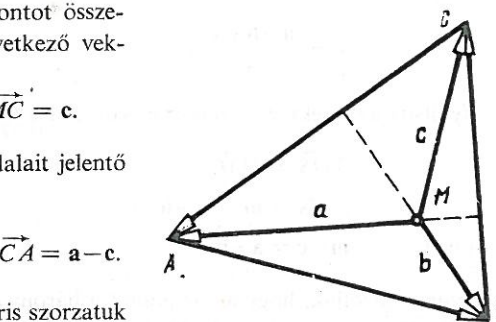
$$\mathbf{c}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0.$$

A $\mathbf{c}$ vektor merőleges a $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \vec{AB}$ vektorra. Ez pedig azt jelenti, hogy a $\mathbf{c}$ vektor az AB oldalhoz tartozó magasság iránya. Tehát a háromszög magasságvonalai egy ponton mennek keresztül.

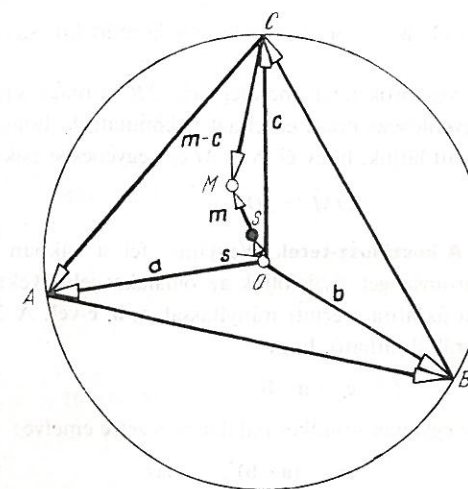
2. tétel. A háromszög magasságpontja, súlypontja és a körülírt kör középpontja egy egyenesen van. A súlypont a körülírt kör középpontjának és a magasságpontnak távolságát harmadolja, és a kör középpontjához van közelebb. A három nevezetes pontot összekötő egyenes az Euler-féle egyenes.

Bizonyítás. Helyezzük el a háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a körülírt kör középpontja az origóba kerüljön. Legyen $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$ és $\vec{OC} = \mathbf{c}$, akkor

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| \quad (2.107 \text{ ábra}).$$



2.106 ábra



2.107 ábra

Így a háromszög oldalait jelző vektorok

$$\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}; \quad \vec{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}; \quad \vec{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

Kössük össze O -t az S súlyponttal, $\vec{OS} = \mathbf{s}$. Minthogy O az origó, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a csúcsok helyvektorai, azért a súlypont helyvektora:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}.$$

Nyújtsuk az $\mathbf{s}$ -vektort háromszorosán, és jelöljük $\mathbf{m}$ -mel:

$$3\vec{OS} = \vec{OM},$$

$$3\mathbf{s} = \mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Innen $\mathbf{m} - \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Ezután igazoljuk, hogy az M pontot a háromszög csúcsaival összekötő vektorok a háromszög oldalaira merőlegesek. Minthogy a csúcsok szerepe azonos, elég ezt az

$$\vec{MC} = \mathbf{m} - \mathbf{c} \quad \text{vektorra bizonyítani.}$$

Tehát azt szeretnénk igazolni, hogy

$$\vec{MC} \perp \vec{AB},$$

$$\vec{MC} = \mathbf{m} - \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \text{és}$$

$$\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Képezzük az

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad \text{skaláris szorzatot:}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2 = 0,$$

mivel $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$ (a háromszög köré írt kör sugara).

A vektorok tehát merőlegesek, $\vec{MC}$ a magasságvonal irányába esik. A csúcsok szerepének egyenlősége miatt ezzel azt is kimutattuk, hogy M a magassági pont. Az $\mathbf{s}$ vektor nyújtása miatt látjuk, hogy O , S és M egy egyenesbe esik és

$$\vec{OM} = 3\vec{OS}.$$

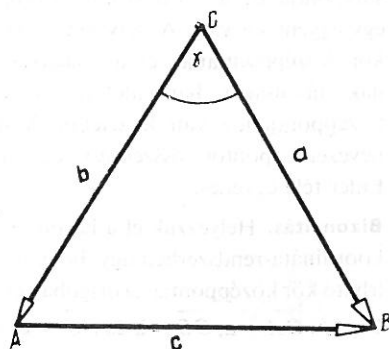
3. A koszinusz-tétel. Vegyünk fel a síkban egy háromszöget, és jelöljük az oldalakat jelző vektorokat az ábra szerinti irányítással, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ -vel. A 2.108 ábrából látható, hogy

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$\mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2, \quad \text{azaz}$$

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2.$$



2.108 ábra

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektor négyzete az abszolút érték négyzete, azaz a háromszög oldalainak négyzete. A skaláris szorzat pedig

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \gamma = a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

Így $\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{b} \cos \gamma$.

Megkaptuk az ismert koszinusz-tételt. A bizonyítás egyaránt érvényes, ha γ hegyes-, derék- vagy tompaszög.

2.4.3 Mechanikai alkalmazások

1. Erő felbontása. Három egyenlő hosszúságú, csuklósan rögzített rúd egy pontban találkozik. Legyen a három rögzítési pont az $(x; y)$ síkban az origó körüli egységsugarú körön az $A(1; 0; 0)$, $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ és $C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ pont. A találkozási pont legyen a z tengely $D(0; 0; 2\sqrt{3})$ pontja. A D pontban a z tengely pozitív irányában az F erő hat. Határozzuk meg a rúderőket.

Jelöljük a rudak irányába mutató vektorokat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ -vel (2.109 ábra).

$$\mathbf{a} = \vec{AD} = [-1; 0; 2\sqrt{3}],$$

$$\mathbf{b} = \vec{BD} = \left[\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\sqrt{3}\right],$$

$$\mathbf{c} = \vec{CD} = \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 2\sqrt{3}\right].$$

Az F erő irányítása miatt $\mathbf{F} = [0; 0; F]$.

Az F vektort a 2.1.7 pont szerint az $\mathbf{a}$; $\mathbf{b}$; $\mathbf{c}$ vektorok irányába mutató vektorokra bonthatjuk:

$$\mathbf{F} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}.$$

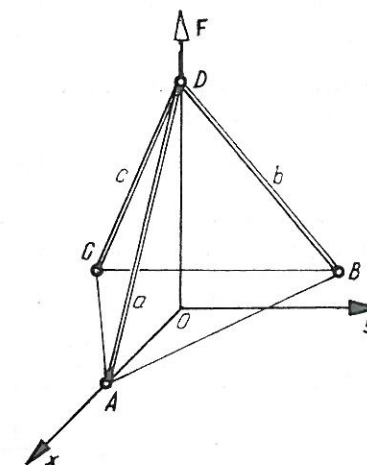
Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ vektori szorzattal:

$$\mathbf{F}\mathbf{bc} = \alpha\mathbf{abc} + \beta\mathbf{bbc} + \gamma\mathbf{cbc}.$$

A jobb oldalon a második és harmadik vegyes szorzat nulla, így

$$\alpha = \frac{\mathbf{Fbc}}{\mathbf{abc}}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{abc} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = -1(-3-3) + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \\ &= 6 + 3 = 9, \end{aligned}$$



2.109 ábra

$$\mathbf{Fbc} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & F \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = F \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{F\sqrt{3}}{2}.$$

$$\alpha = \frac{\mathbf{Fbc}}{\mathbf{abc}} = \frac{\frac{F\sqrt{3}}{2}}{9} = \frac{F\sqrt{3}}{18}.$$

Az $\mathbf{F} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ egyenletet a

$\mathbf{c} \times \mathbf{a}$, illetve $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektori szorzattal megszorozva:

$$\beta = \frac{F\sqrt{3}}{18} \quad \text{és} \quad \gamma = \frac{F\sqrt{3}}{18} \quad \text{értékeket kapnánk.}$$

Ez különben a szimmetrikus felépítésből is nyilvánvaló. Tehát a rudakra $\frac{F\sqrt{3}}{18}$ nagyságú erő hat.

2. **Forgatónyomaték.** a) Pontra vonatkozó forgatónyomaték. Az A pontban támadó $\mathbf{F}$ erőnek az O pontra vonatkozó forgatónyomatéka, nyomatékvektora:

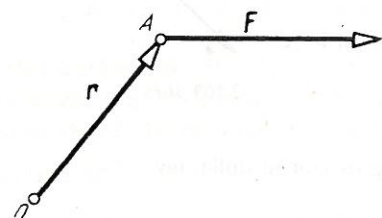
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2.110 \text{ ábra}), \quad \text{ahol } \mathbf{r} = \overrightarrow{OA},$$

$\mathbf{M}$ merőleges $\mathbf{r}$ és $\mathbf{F}$ síkjára, és jobbrendszeri alkotnak.

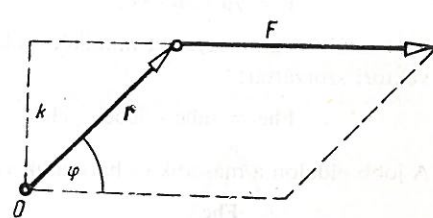
A forgatónyomaték abszolút értéke:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{F}| \sin \varphi = |\mathbf{r}| \sin \varphi |\mathbf{F}| = |\mathbf{F}| \cdot k,$$

ahol k az erő karja, az O pontból az erő irányára bocsátott merőleges hossza (2.111 ábra). A forgatási hatás nagyságát a nyomatékvektor abszolút értéke méri.



2.110 ábra



2.111 ábra

Egy O pontban rögzített merev test nyugalomban van, ha az O pontra vonatkozó nyomatékok vektori összege zérus.

b) **Tengelyre vonatkozó forgatónyomaték.** Az $\mathbf{F}$ erőnek egy t tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka a tengely egy tetszőleges pontjára (T) vonatkozó forgatónyomatéknak a tengely irányára való vetületvektora. A nyomatékvektor irányát úgy adjuk meg, hogy vele szembenézve a forgatóhatás az óramutató járásával ellentétes legyen.

A forgatóhatás nagyságát a nyomatékvektor abszolút értéke adja meg.

Jelölje a t tengely irányát a $\mathbf{v}$ vektor illetve a $\mathbf{v}^0$ egységvektor.

A T pontra vonatkozó forgatónyomaték (2.112 ábra):

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Az A és T pontok helyvektoraival:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad \text{és}$$

$$\mathbf{M}_T = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}.$$

$\mathbf{M}_T$ -nek a t tengelyre merőleges vetülete:

$$\mathbf{M}_t = [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}] \cdot \mathbf{v}^0.$$

A vetületvektor pedig

$$\mathbf{M}_t = \{[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}] \cdot \mathbf{v}^0\} \mathbf{v}^0,$$

vagy $\mathbf{M}_t = [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^0] \mathbf{v}^0.$

A $\mathbf{v}^0$ szorzójaként fellépő vegyes szorzat előjele a forgató hatásnak a tengely irányítására vonatkozó értelmét adja meg. Ha az előjel pozitív, a forgatás a tengely irányvektorával szembenézve az óramutató járásával ellentétes, ha az előjel negatív, a forgatóhatás az előbbinek ellentéte.

A nyomatékvektor abszolút értéke a vegyes szorzat abszolút értéke.

$$M_t = |\mathbf{M}_t| = |(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^0|.$$

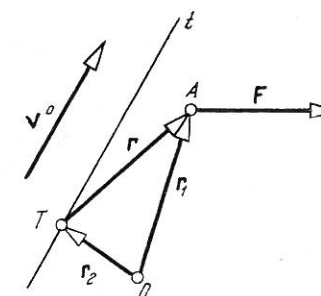
A definíciókból következik, hogy a T ponton áthaladó, $\mathbf{r}$ és $\mathbf{F}$ síkjára merőleges tengelyre vonatkozó forgatónyomaték megegyezik a T pontra vonatkozó forgatónyomatékkal (2.113 ábra).

Ha az $\overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{F}$ vektorok egy egyenesbe esnek, a forgatónyomaték nulla (2.114 ábra).

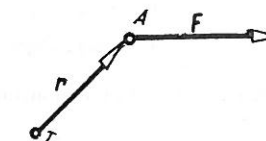
$$\mathbf{M}_0 = 0 \quad (\text{a vektori szorzat nulla}).$$

Ugyancsak zérus egy tengelyre vonatkozó forgatónyomaték, ha az erő hatásvonala metszi a tengelyt. Ekkor ugyanis nulla a metszéspontra vonatkozó nyomaték (2.115 ábra).

Ha az erő hatásvonala párhuzamos a tengellyel, a forgatónyomaték zérus. A T pontra vonatkozó nyomatékvektor merőleges a t tengelyre, tehát vetületvektora zérus (2.116 ábra).



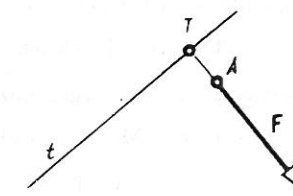
2.112 ábra



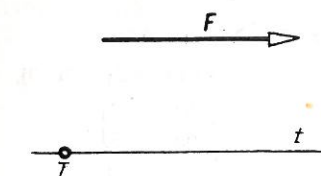
2.113 ábra



2.114 ábra

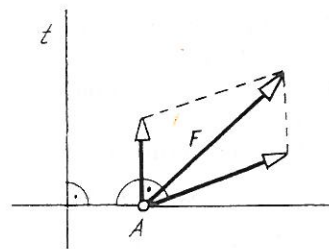


2.115 ábra



2.116 ábra

Az előzőek értelmében, ha egy F erőnek valamely t tengelyre való forgatónyomatékát számítjuk, felbonthatjuk az erőt a t tengellyel párhuzamos és rá merőleges komponensekre. A párhuzamos komponens forgató hatása zérus, csak a merőleges komponens forgatónyomatékát kell kiszámítani (2.117 ábra).



2.117 ábra

Példák

1. Egy, az origóban gömbcsuklósan mozgatható rúd a $+z$ tengely irányában áll. A rúdra a következő erők hatnak:

$$z_1 = 1 \text{ magasságban az } F_1 = 3i - j + 4k \text{ erő,}$$

$$\text{a } z_2 = 3 \text{ magasságban az } F_2 = -2i - 2j + 5k \text{ erő.}$$

Állapítsuk meg az eredő forgatónyomaték vektorát, majd a $z = 6$ magasságban egyensúlyozzuk ki a forgató erőt.

Az erők támadáspontjainak helyvektorai:

$$r_1 = k = [0; 0; 1], \quad r_2 = 3k = [0; 0; 3].$$

A forgatónyomatékok:

$$M_1 = r_1 \times F_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = i + 3j,$$

$$M_2 = r_2 \times F_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 6i - 6j.$$

Az eredő vektor: $M = M_1 + M_2 = 7i - 3j$.

A forgás síkjában a $z = 6$ pont benne van. Számítsuk ki azt az erőt, amely az $r = [0; 0; 6]$ helyvektorú pontban ugyanezt a forgató hatást adja!

Jelöljük ezt az ismeretlen erőt

$$F = Xi + Yj + Zk\text{-val.}$$

F komponenseit úgy kell meghatározni, hogy az

$$r \times F = M \text{ egyenlet kielégüljön.}$$

$$r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = -6Yi + 6Xj.$$

Az $r \times F = M$ feltételből:

$$-6Yi + 6Xj = 7i - 3j, \text{ amiből}$$

$$\begin{cases} -6Y = 7 \\ 6X = -3 \end{cases},$$

$$\text{azaz } X = -\frac{1}{2} \quad Y = -\frac{7}{6}.$$

Az eredő forgató erő vektora az $A(0; 0; 6)$ pontban:

$$F = -\frac{1}{2}i - \frac{7}{6}j.$$

Az ellensúlyozáshoz szükséges erő:

$$F_E = -F = \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{6}; 0 \right].$$

2. Helyezzünk el egy $R = 5$ egységnyi sugarú, $m = 20$ egységnyi magasságú hengert úgy, hogy súlypontja az origó, tengelye a z tengely legyen! Határozzuk meg az $F = [2; 1; -1]$ erő forgatónyomatékát a súlypontra és a szimmetriatengelyre vonatkoztatva, ha az erő a henger palástjának $A(4; 3; 2)$ pontjában hat (2.118 ábra). A súlypont az origó. Így $r = [4; 3; 2]$. A súlypontra vonatkozó forgatónyomaték:

$$M_0 = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5i + 8j - 2k. \quad 2.118 \text{ ábra}$$

A szimmetriatengely a z tengely, egységvektora $k = [0; 0; 1]$.

A szimmetriatengelyre vonatkozó forgatónyomaték:

$$M_z = [(r \times F) \cdot k] \cdot k = [rFk] \cdot k.$$

A vegyes szorzat:

$$rFk = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

A forgatóhatás negatív irányú.

A forgatónyomaték:

$$M_z = (rFk) \cdot k = -2k.$$

3. Határozzuk meg az ábrán feltüntetett, kanyarban haladó traktor lendkerekének a precessió következtében keltett nyomatékát (2.119 ábra)!

A traktor $v = 7,2$ km/h haladási sebességgel, $R = 10$ m sugarú körön halad, v a főtengely és a részelt lendítő tömeg tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = 1,5$ mkp/s², fordulatszáma: $n = 955$ /min.

A pörgettyúhatás nyomatékát az alábbi vektori szorzat adja:

$$|M_p| = |\pi \times \omega| = |\pi| \cdot |\omega| \cdot \sin \varphi_{(\pi, \omega)}.$$

Mivel $\sin \varphi_{(\pi, \omega)} = 1$,

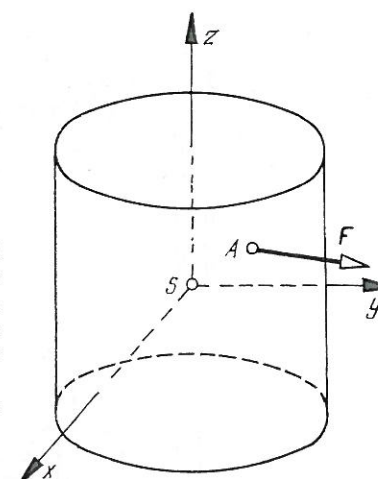
$$|M_p| = |\pi| \cdot |\omega|, \text{ ahol } |\omega| = \frac{955 \cdot 6,28}{60} = \frac{955}{60} = \frac{955}{6,28} \sim 100.$$

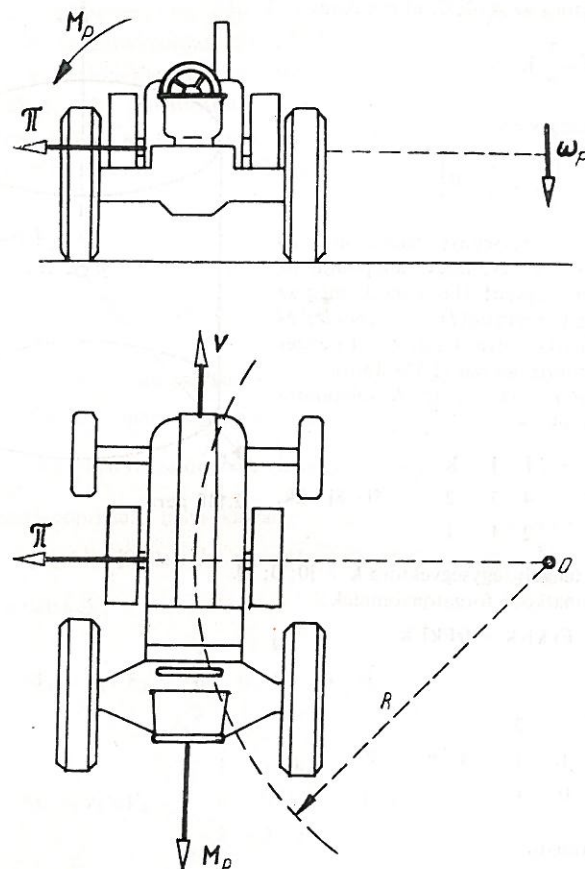
A perdület nagysága:

$$\pi = \Theta \cdot \omega = 1,5 \cdot 100 = 150 \text{ mkp/s.}$$

A precessió szögsebessége:

$$\omega_p = \frac{v}{R} = \frac{7,2}{3,6 \cdot 10} = 0,2/\text{s}.$$





2.119 ábra

Így a pörgettyűhatás nyomatéka:

$$M_p = \pi \cdot \omega_p = 150 \cdot 0,2 = 30 \text{ mkp.}$$

Ez a nyomaték a forgórész tengelyére merőleges és a haladási iránnyal párhuzamos tengely körül forgat; a külső járókerekekre eső terhelést növeli, a belső terhelését csökkenti.

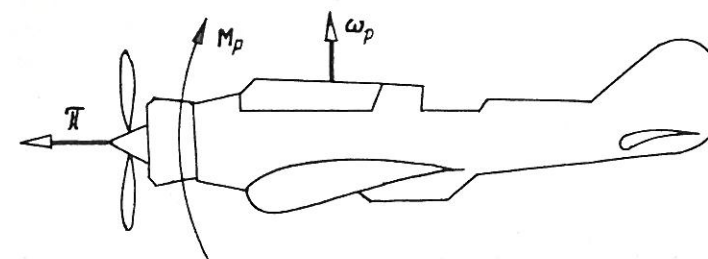
Ha a főtengety forgásirányát megváltoztatjuk, akkor a keletkező nyomaték iránya ellenkezőre változik, és a forgásközéppont felé igyekszik billenteni a traktort, tehát bizonyos mértékben stabilizálja a centrifugális erő billentőnyomatékát. Az ábrán vázolt traktortípusnál (Lanz—Bulldog) ezért is előnyös, hogy hátrafelé forog a lendítőkerék.

4. Fordulókban a légsaváros repülőgép forgó részeinek pörgettyűhatását a magassági kormány állításával ellensúlyozzák. Ez különösen fontos a munka közben egészen alacsonyan repülő növényvédelmi repülőgépeknél.

A pörgettyűhatás miatt előálló nyomaték irányát az

$$\mathbf{M}_p = \pi \times \omega_p \quad (2.120 \text{ ábra})$$

vektori szorzat adja.



2.120 ábra

A π a perdületvektor:

$$\pi = \Theta \cdot \omega.$$

Θ a test tehetetlenségi nyomatéka,

ω a forgástengely körüli forgás szögsebesség vektora,

ω_p a precesszió szögsebesség vektora.

A vázlat szerint a gép légsavarája előlről nézve jobbról balra forog, és a gép balra fordul. Ilyenkor a forgó részek precesszió-nyomatéka a gép orrát emeli. Ellenkező fordulóban veszélyesebb a helyzet, mert a gép orrnehézzé válik.

3. KÚPSZELETEK

3.1 KOORDINÁTA TRANSZFORMÁCIÓK

3.1.1 A koordináta-rendszer párhuzamos eltolása

Legyen adva a síkban az $(x; y)$ koordináta-rendszer. Toljuk el a koordinátatengelyeket önmagukkal párhuzamosan oly módon, hogy a kezdőpont egy adott O' pontba kerüljön (3.1 ábra).

Vegyük fel az így adódó $(x'; y')$ koordináta-rendszerben egy $\mathbf{v}' = [x'; y']$ helyvektorú P pontot. Határozzuk meg ennek koordinátáit az eredeti $(x; y)$ koordináta-rendszerben!

Legyen $\mathbf{r} = [\alpha; \beta]$ az O' pont helyvektora az eredeti $(x; y)$ koordináta-rendszerben.

Ekkor a P pont $\mathbf{v}$ helyvektora az $(x; y)$ koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} + \mathbf{v}'.$$

A P pont koordinátái:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + \alpha \\ y &= y' + \beta \end{aligned} \right\} \text{ I.}$$

x' -t és y' -t kifejezve az

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - \alpha \\ y' &= y - \beta \end{aligned} \right\} \text{ II.}$$

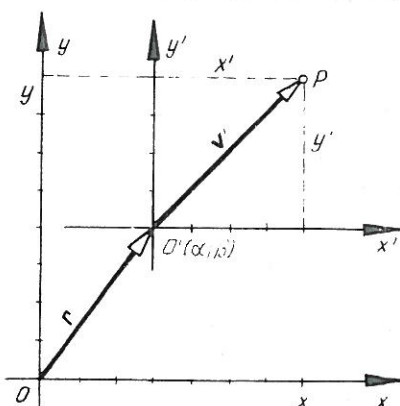
egyenletrendszer adódik.

Az I. és II. egyenletrendszerek a koordinátatengelyek párhuzamos eltolásának egyenletrendszerei.

3.1.2 A koordináta-rendszer elforgatása

Legyen adott a síkban az $(x; y)$ koordináta-rendszer.

Forgassuk el a koordinátatengelyeket pozitív forgásirányban ω szöggel. Így a $(\xi; \eta)$ koordináta-rendszerhez jutunk (3.2 ábra).



3.1 ábra

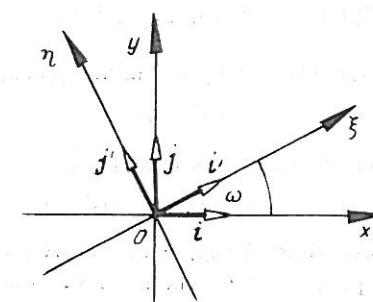
Vegyük fel ebben egy $\mathbf{w}$ helyvektorú P pontot! Határozzuk meg a P pont koordinátáit az eredeti $(x; y)$ koordináta-rendszerben! Ha az eredeti koordináta-rendszer

$$\mathbf{i} = [1; 0] \quad \text{és} \quad \mathbf{j} = [0; 1]$$

vektorait ω szöggel elforgatjuk, az

$$\mathbf{i}' = [\cos \omega; \sin \omega]$$

$$\text{és} \quad \mathbf{j}' = [-\sin \omega; \cos \omega]$$



3.2 ábra

vektorokhoz jutunk.

Ezek éppen a $(\xi; \eta)$ rendszert meghatározó egységvektorok. Ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \xi \mathbf{i}' + \eta \mathbf{j}' = \xi [\cos \omega; \sin \omega] + \eta [-\sin \omega; \cos \omega] = \\ &= [\xi \cos \omega - \eta \sin \omega; \xi \sin \omega + \eta \cos \omega]. \end{aligned}$$

Mivel

$$\mathbf{w} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos \omega - \eta \sin \omega \\ y &= \xi \sin \omega + \eta \cos \omega \end{aligned} \right\} \text{ I.}$$

Ha viszont az új ξ és η koordinátákat akarjuk kifejezni az eredeti x és y koordináták segítségével, akkor ismerve, hogy az $(x; y)$ koordináta-rendszer a $(\xi; \eta)$ koordináta-rendszerből $(-\omega)$ szöggel való elforgatással keletkezik, az I. egyenletrendszerben $(x; y)$ és $(\xi; \eta)$ szerepét felcseréljük, és ω helyére $(-\omega)$ -t írunk.

Így

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \cos \omega + y \sin \omega \\ \eta &= -x \sin \omega + y \cos \omega \end{aligned} \right\} \text{ II.}$$

Az így kapott I. és II. egyenletrendszerek a koordináta-rendszer elforgatásának egyenletrendszerei.

3.2 KÚPSZELETEK

A kör, a parabola, az ellipszis és a hiperbola geometriai alakzatokat kúpszeleteknek nevezik.

3.2.1 A kör

Definíció. A kör a sík mindazon pontjainak mértani helye, amelyek adott ponttól adott távolságra vannak.

Az adott pontot a kör középpontjának, az adott távolságot a kör sugarának nevezzük.

3.2.1.1 A kör egyenlete

Tétel. Ha az r sugarú kör középpontja az origó, akkor egyenlete

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ha az r sugarú kör középpontja az $O'(\alpha; \beta)$ pont, akkor egyenlete

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Bizonyítás. a) Legyen az r sugarú kör középpontja az origóban. Az $\mathbf{r} = [x; y]$ helyvektorú P pont akkor és csak akkor van a körön, ha

$$|\mathbf{r}| = r \quad (3.3 \text{ ábra}),$$

azaz

$$r^2 = r^2.$$

Koordinátákkal kifejezve:

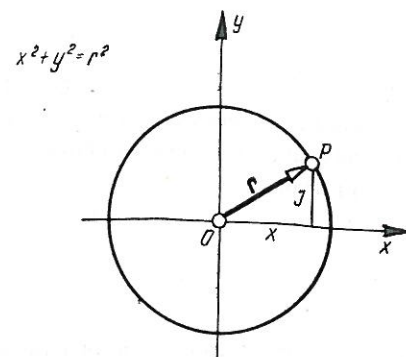
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Az egyenletből

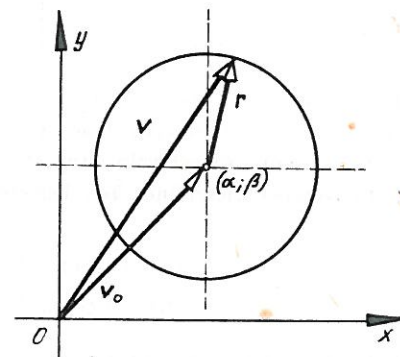
$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Bármely $|x| < r$ értékhez két y érték tartozik.

Ha $|x| = r$, $y = 0$; ha $|x| > r$, nem kapunk valós y értéket.



3.3 ábra



3.4 ábra

Hasonlóan $x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}$

A körben bármely $|y| < r$ értékhez két x érték tartozik. Ha $y = r$, $x = 0$, ha $|y| > r$, nem kapunk valós x értéket.

b) Legyen az r sugarú kör középpontja a $\mathbf{v}_0 = [\alpha; \beta]$ helyvektorú pont (3.4 ábra).

A $\mathbf{v} = [x; y]$ helyvektorú pont akkor és csak akkor van a körön, ha

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{r},$$

azaz

$$|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|^2 = r^2.$$

Koordinátákkal kifejezve:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

3.2.1.2 A kör érintője

a) Írjuk fel az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű kör $P_0(x_0; y_0)$ pontjában húzott érintő egyenletét!

A kör $P_0(x_0; y_0)$ pontjának érintője merőleges a sugárra (3.5 ábra), így az érintő normálvektora

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_0.$$

Ezért az érintő egyenlete

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{r}_0 = 0,$$

ahol $\mathbf{r}_0$ az érintési pont, $\mathbf{r}$ az érintő tetszős szerinti pontjának helyvektora.

Mivel $\mathbf{r}_0\mathbf{r}_0 = r^2$,

az érintő egyenlete:

$$\mathbf{r}\mathbf{r}_0 = r^2.$$

Koordinátákkal kifejezve

$$x x_0 + y y_0 = r^2.$$

b) Írjuk fel az

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

egyenletű kör $P_0(x_0; y_0)$ pontjában húzott érintő egyenletét (3.6 ábra)!

Az érintő merőleges a sugárra, ezért normálvektora:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0,$$

ahol $\mathbf{v}_0 = [\alpha; \beta]$.

Így az érintő egyenlete:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0,$$

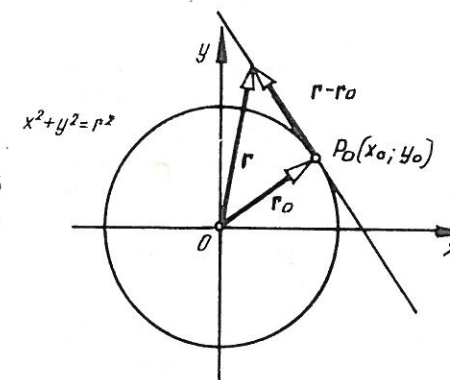
ahol $\mathbf{r}$ az érintő tetszős szerinti $P(x; y)$ pontjának helyvektora.

Mivel $\mathbf{n} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0$,

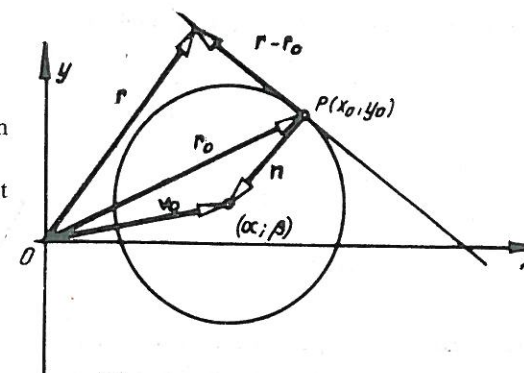
$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0) = 0.$$

Koordinátákkal kifejezve az érintő egyenlete:

$$(x - x_0)(\alpha - x_0) + (y - y_0)(\beta - y_0) = 0.$$



3.5 ábra

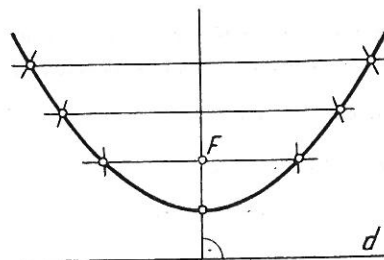


3.6 ábra

3.2.2 A parabola

Definíció. A parabola a sík mindazon pontjainak mértani helye, amelyek egy adott ponttól és egy adott egyenestől egyenlő távol vannak.
Az adott pont a gyújtópont vagy fókusz, az adott egyenes a vezérvonal vagy direktrix.

Szerkesztés. A fókuszról merőlegest húzunk a direktrixre. Az F pont és a dőléspont távolságának felezőpontja a parabola csúcsa. A többi pontot úgy szerkesztjük, hogy a d egyenessel párhuzamosan felvett egyeneseket a fókuszról, a párhuzamos egyeneseknek a direktrixtől való távolságával, egyenlő sugárral elmetsszük. A fókuszról a direktrixre húzott merőleges a parabola tengelye (3.7 ábra).



3.7 ábra

A parabola egyenlete. Helyezzük úgy el a parabolát, hogy csúcsa az origóban, tengelye az y tengelyen legyen! Legyen a fókuszhoz a direktrixtől való távolsága p (p a paraméter).

A fókusz koordinátái $F(0; \frac{p}{2})$, a direktrix egyenlete $y = -\frac{p}{2}$.

Tétel. A parabola egyenlete

$$y = \frac{1}{2p} x^2.$$

Bizonyítás. Ha a parabola tetszés szerinti pontja $P(x; y)$, a parabola definíciója értelmében

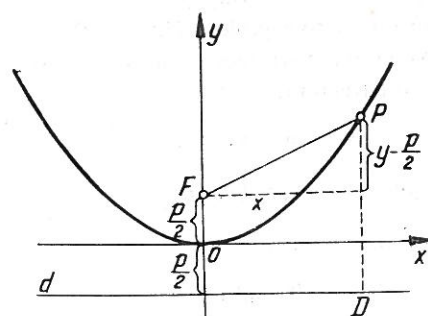
$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

($\overline{PF} = r =$ vezérsugár).

Mivel a 3.8 ábra szerint:

$$\overline{PD} = y + \frac{p}{2} \quad \text{és} \quad \overline{PF} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2},$$

$$y + \frac{p}{2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}.$$



3.8 ábra

Négyzetre emelve:

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4},$$

$$2py = x^2.$$

$$y = \frac{1}{2p} x^2.$$

A parabola minden pontja kielégíti az

$$y = \frac{1}{2p} x^2$$

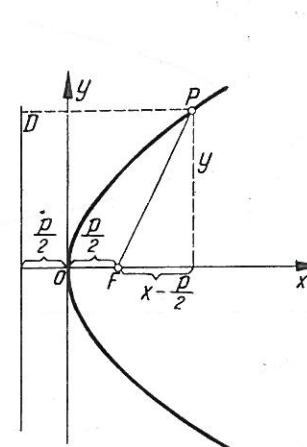
egyenletet.

A fenti gondolatmenet megfordításával belátható, hogy minden olyan pont, amelynek koordinátái kielégítik ezt az egyenletet, rajta van a parabolán.

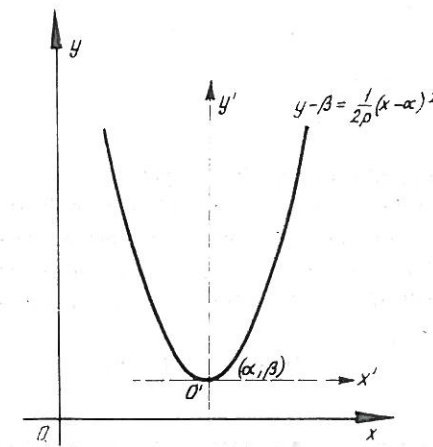
$$\frac{1}{2p} = a \quad \text{jelöléssel a parabola egyenlete:}$$

$$y = ax^2.$$

Így azt is bizonyítottuk, hogy $a \neq 0$ esetén az $y = ax^2$ másodfokú függvény képe parabola.



3.9 ábra



3.10 ábra

Helyezzük úgy el a parabolát, hogy csúcsa az origó és tengelye az x tengely pozitív irányába kerüljön (3.9 ábra).

x és y szerepét felcserélve, az előbb bevezetett egyenletből adódik, hogy ennek a parabolának az egyenlete

$$y^2 = 2px.$$

Legyen a parabola tengelye párhuzamos az y tengellyel és csúcsa a $O'(\alpha; \beta)$ pont (3.10 ábra). A parabola egyenlete az $O'(\alpha; \beta)$ kezdőpontú $(x'; y')$ koordináta-rendszerben

$$y' = \frac{1}{2p} x'^2.$$

Alkalmazva az

$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$$

koordinátatranszformációt, a parabola egyenlete az $(x; y)$ koordináta-rendszerben:

$$y - \beta = \frac{1}{2p} (x - \alpha)^2.$$

Az egyenletet rendezve:

$$y = \frac{1}{2p} x^2 - \frac{\alpha}{p} x + \frac{1}{2p} \alpha^2 + \beta.$$

Legyen

$$\frac{1}{2p} = a, \quad -\frac{\alpha}{p} = b, \quad \frac{1}{2p} \alpha^2 + \beta = c,$$

akkor

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Tehát az

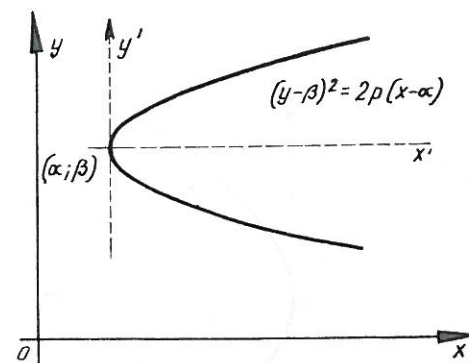
$$y = ax^2 + bx + c$$

egyenlet a parabola egyenlete.

A koordináták szerepének felcserélésével adódik, hogy ha a parabola tengelye párhuzamos az x tengellyel és csúcsa az $O'(\alpha; \beta)$ pont (3.11 ábra), a parabola egyenlete:

$$(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha).$$

3.11 ábra



3.2.3 Az ellipszis és a hiperbola

3.2.3.1 Az ellipszis

Definíció. Az ellipszis a sík mindazon pontjainak mértani helye, amelyek két adott ponttól való távolságának összege adott, a két pont távolságánál nagyobb távolság.

A két adott pont, F_1 és F_2 az ellipszis fókuszai. Az ellipszis pontjainak a fókuszoktól való távolságai (r_1 és r_2) a pont vezérsugarai, radiusvektorai.

Legyen az adott távolság $2a$ és a fókuszok távolsága: $F_1F_2 = 2c$.

A definíció értelmében

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$r_1 + r_2 > 2c, \text{ tehát}$$

$$a > c.$$

Szerkesztés. Felrajzoljuk az F_1 és F_2 pontokat, és felvesszük a $2a$ távolságot (3.12 ábra). Ha F_1 -ből $2a$ tetszős szerinti részével, z -vel, F_2 -ből $(2a - z)$ -vel köríveket rajzolunk, metszéspontjuk az ellipszis pontja.

Így az ellipszis tetszős szerinti sok pontját kaphatjuk meg.

Ha az F_1F_2 szakasz felezőpontjából, O -ból a fókuszokat összekötő egyenest a távolsággal metsszük, a kapott A_1 és A_2 pontok is pontjai az ellipszisnek. Ugyanis, például az A_2 pontra:

$$\begin{aligned} \overline{F_1A_2} + \overline{F_2A_2} &= \\ &= (c + a) + \\ &+ (a - c) = 2a. \end{aligned}$$

Jelöljük az F_1 -ből és F_2 -ből a sugárral rajzolt körívek metszéspontjait B_1 és B_2 -vel. A szerkesztés miatt

$$B_1B_2 \perp F_1F_2.$$

Legyen

$$\overline{B_1O} = \overline{B_2O} = b.$$

A Pitagorasz-tétel szerint:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (3.13 \text{ ábra}).$$

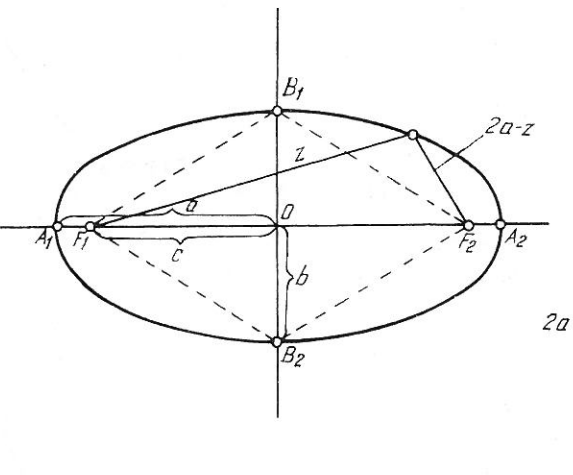
$2a$ az ellipszis nagytengelye,

$2b$ az ellipszis kistengelye,

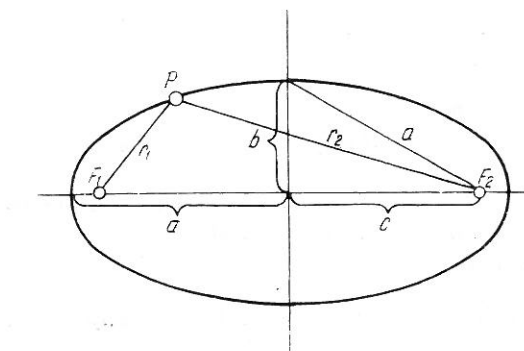
$2c$ a két fókusz távolsága

c a lineáris excentricitás,

O az ellipszis középpontja.



3.12 ábra



3.13 ábra

3.2.3.2 A hiperbola

Definíció. A hiperbola a sík mindazon pontjainak mértani helye, amelyeknek két adott ponttól való távolságának különbsége adott, a két pont távolságánál kisebb távolság.

Ha az adott távolság $2a$, és az adott két pont F_1 és F_2 (a hiperbola fókuszai), a definíció szerint $\overline{F_1F_2} > 2a$, azaz $\overline{F_1F_2} = 2c$ jelöléssel $c > a$.

Szerkesztés. Felvesszük az $\overline{F_1 F_2} = 2c$ távolságot (3.14 ábra). Az egyik fókuszról $(2a+x)$ -vel, a másiktól z -vel köríveket rajzolunk. Metszéspontjuk a definíció szerint a hiperbola pontja.

Ugyancsak a hiperbola pontjait kapjuk (A_1 -et és A_2 -t), ha az F_1, F_2 pontokat összekötő egyenest az $\overline{F_1 F_2}$ szakasz O középpontjából a sugárral elmetsszük.

Ugyanis pl.

$$\begin{aligned}\overline{F_1 A_2} - \overline{F_2 A_2} &= \\ &= (c+a) - (c-a) = 2a.\end{aligned}$$

Kössük össze az A_1 és A_2 pontokból c sugárral rajzolt körívek B_1 és B_2 metszéspontjait (3.15 ábra)

$$B_1 B_2 \perp A_1 A_2.$$

Legyen $\overline{B_1 O} = \overline{B_2 O} = b$.

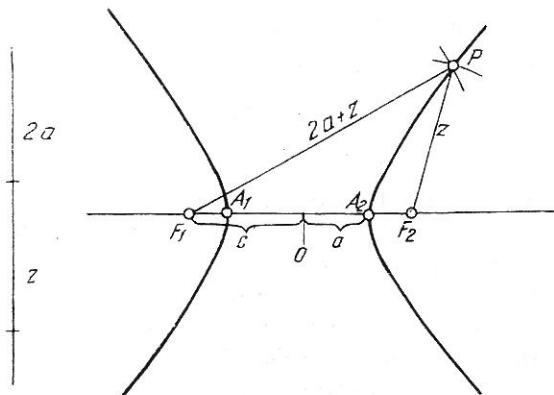
A hiperbolánál: $c^2 = a^2 + b^2$.

$2a$ a hiperbola valós tengelye,

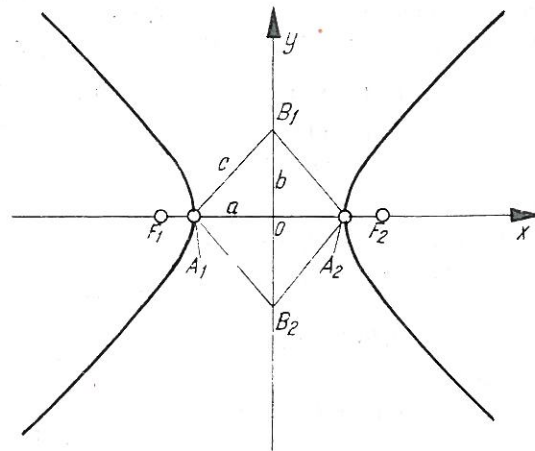
$2b$ a hiperbola képzetes tengelye,

$2c$ a két fókusz távolsága,

c a lineáris excentricitás.



3.14 ábra



3.15 ábra

3.2.3.3 Az ellipszis és a hiperbola egyenlete

Helyezzük el az ellipszist és hiperbolát úgy, hogy középpontjuk az origóba essék, és tengelyeik a koordinátatengelyekre essenek.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

Tétel. Ha a és b az ellipszis nagy és kis féltengelye, egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tétel. Ha a és b a hiperbola valós és képzetes féltengelye, egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A két tételt egyszerre bizonyítjuk.

Bizonyítás. Ha a fókuszok az $F_1(-c; 0)$ és $F_2(c; 0)$ pontok (3.16 ábra), a definíció értelmében az ellipszis egyenlete:

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

a hiperbola egyenlete:

$$|r_1 - r_2| = 2a,$$

($r_1 - r_2 = 2a$ a hiperbola egyik ágát, $r_2 - r_1 = 2a$ a hiperbola másik ágát jelenti.)

Írjuk fel a következő egyenlőséget:

$$(r_1 + r_2 + 2a)(r_1 + r_2 - 2a)(r_1 - r_2 + 2a)(-r_1 + r_2 + 2a) = 0.$$

Az első tényező nem lehet nulla: $r_1 + r_2 + 2a \neq 0$, mert mind a három tag nem negatív. A második tényező zérus volta, $r_1 + r_2 - 2a = 0$ az ellipszist jellemzi, a harmadik és negyedik tényező zérus volta pedig a hiperbola egy-egy ágát.

Az egyenlet tehát az ellipszis és hiperbola közös egyenlete.

Az egyenletet átalakítva:

$$[(r_1 + r_2) + 2a][(r_1 + r_2) - 2a][2a + (r_1 - r_2)][2a - (r_1 - r_2)] = 0.$$

Innen

$$[(r_1 + r_2)^2 - 4a^2][4a^2 - (r_1 - r_2)^2] = 0.$$

A négyzetreemelést elvégezve és rendezve:

$$[2r_1 r_2 + (r_1^2 + r_2^2 - 4a^2)][2r_1 r_2 - (r_1^2 + r_2^2 - 4a^2)] = 0.$$

Innen

$$4r_1^2 r_2^2 - (r_1^2 + r_2^2 - 4a^2)^2 = 0.$$

Újra négyzetreemelve és rendezve:

$$-r_1^4 + 2r_1^2 r_2^2 - r_2^4 + 8a^2 r_1^2 + 8a^2 r_2^2 - 16a^4 = 0.$$

Ez az egyenlet így is írható:

$$-(r_1^2 - r_2^2)^2 + 8a^2(r_1^2 + r_2^2) - 16a^4 = 0.$$

Fejezzük ki $r_1^2 + r_2^2$ és $r_1^2 - r_2^2$ értékeit a koordináták segítségével (3.16 ábra)!

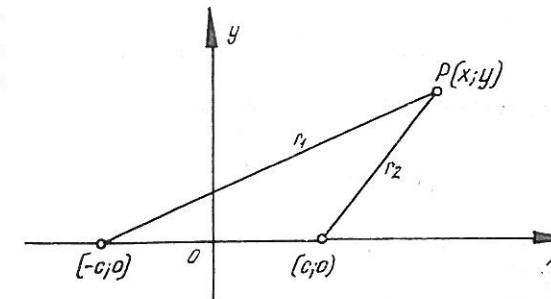
$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= (x+c)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x-c)^2 + y^2 \end{aligned} \right\}$$

Innen

$$\begin{aligned} r_1^2 - r_2^2 &= 4cx \\ r_1^2 + r_2^2 &= 2(x^2 + y^2 + c^2). \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve:

$$-16c^2 x^2 + 16a^2(x^2 + y^2 + c^2) - 16a^4 = 0.$$



3.16 ábra

Egyszerűsítve és rendezve:

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Az egyenleteket $a^2(a^2 - c^2)$ -tel elosztva:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Ez az ellipszis és hiperbola közös egyenlete.

Az ellipsziséknél (3.13 ábra)

$$a^2 - c^2 = b^2.$$

A hiperbolánál (3.15 ábra):

$$a^2 - c^2 = -b^2.$$

Így az ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A hiperbola egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Az ellipszis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenletét y -ra rendezve:

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

3.17/b ábra

Ha $|x| < a$, minden x értékhez két y érték tartozik, ha $|x| = a$, $y = 0$, ha $|x| > a$, y -ra nem kapunk valós értéket (3.17/a ábra).

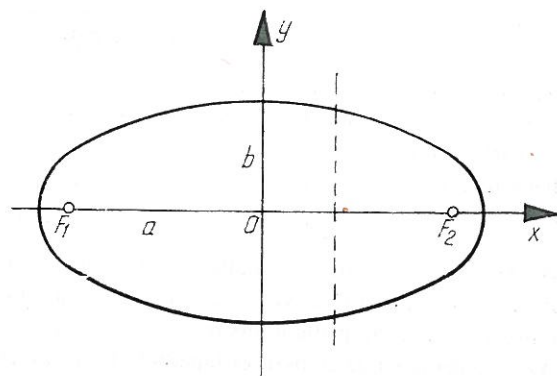
Hasonlóan okoskodhatunk, ha az ellipszis egyenletét

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

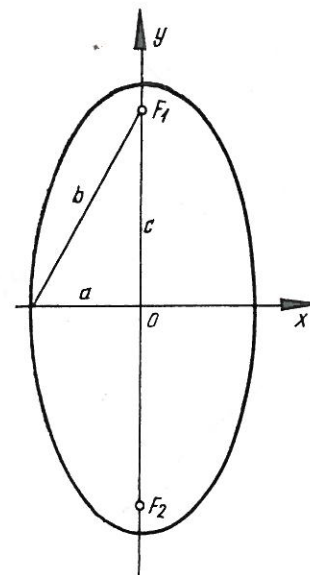
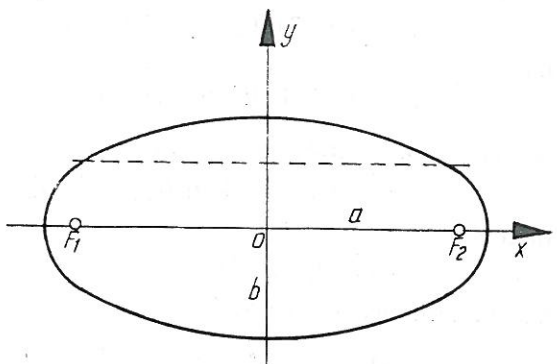
alakra hozzuk (3.17/b ábra).

Ha az ellipszis fókuszai az y tengelyen vannak, egyenlete

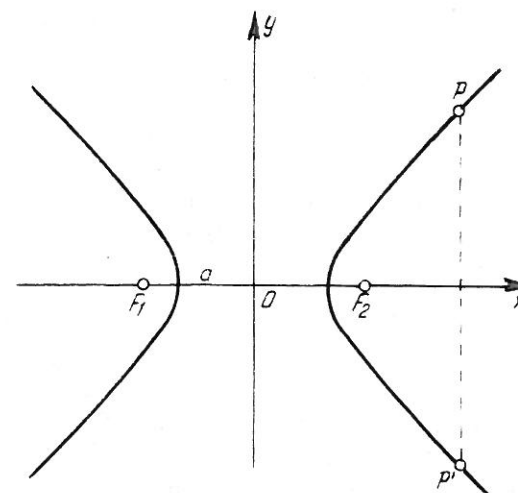
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



3.17/a ábra



3.18 ábra



3.19 ábra

$2b$ a nagytengely, $2a$ a kistengely és

$$b^2 = a^2 + c^2 \quad (3.18 \text{ ábra}).$$

A hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenletét rendezve (3.19 ábra):

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Valós y értéket csak akkor kapunk, ha $|x| \geq a$.
 x -re rendezve:

$$x = \pm a \sqrt{\frac{y^2}{b^2} + 1};$$

minden y értékhez két egyenlő abszolút értékű x érték tartozik.

Ha a hiperbolát úgy helyezzük el, hogy fókuszai az y tengelyre essenek, egyenlete:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

ahol

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad (3.20 \text{ ábra}).$$

Az

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenletű hiperbola egyenlőszárú hiperbola.

Ha az ellipszis tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel és középpontja az $O'(\alpha; \beta)$ pont (3.21 ábra), egyenlete az O' kezdőpontú $(x'; y')$ koordinátarendszerben

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Alkalmazva a koordinátarendszerek eltolásának (3.1.1. pont) II. egyenletét, az ellipszis egyenlete az $(x; y)$ koordinátarendszerben

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$

Ha a nagytengely az x tengellyel párhuzamos:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

ha az y tengellyel párhuzamos:

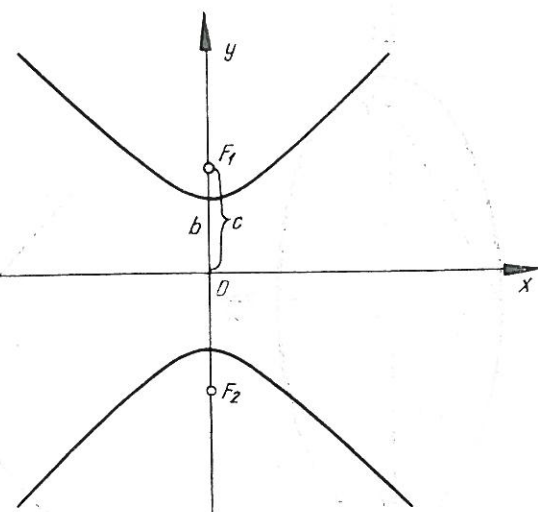
$$b^2 = a^2 + c^2.$$

Hasonló gondolatmenettel, ha a hiperbola középpontja az $O'(\alpha; \beta)$ pont és valós tengelye párhuzamos az x tengellyel (3.22 ábra), akkor egyenlete:

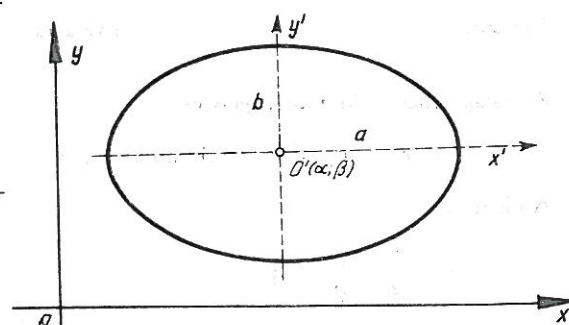
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1,$$

ha pedig valós tengelye párhuzamos az y tengellyel, akkor egyenlete:

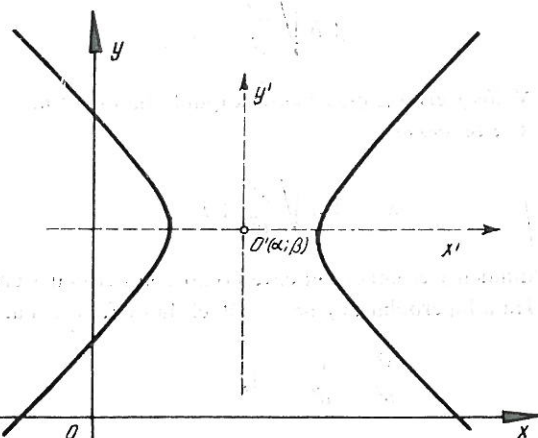
$$-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$



3.20 ábra



3.21 ábra



3.22 ábra

3.2.3.4 Az ellipszis főköré

Rajzoljunk az ellipszis középpontja köré a sugarú kört; ez az ellipszis főköré (3.23 ábra). Az ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

innen

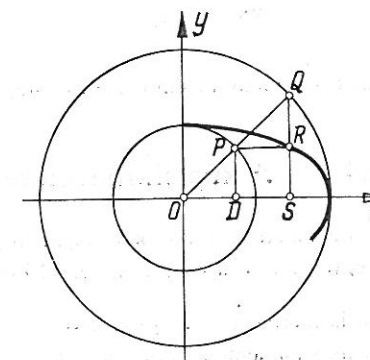
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

A főkör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

innen

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$



3.23 ábra

Két azonos x értékhez tartozó azonos előjelű ordináta viszonya

$$\begin{aligned} \frac{y_e}{y_k} &= \frac{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

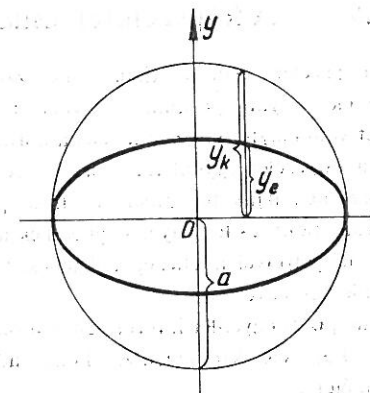
Innen

$$y_e = \frac{b}{a} y_k.$$

Tehát az ellipszis úgy is származtatható, hogy a főkör minden egyes ordinátáját $\frac{b}{a}$ arányban csökkentjük.

Ez a származtatás módot ad ellipszispontok másféle szerkesztésére. Vegyük fel az O pontban az a és b sugarú koncentrikus köröket (3.24 ábra). Húzzunk a O pontból tetszés szerinti sugarat; ez a köröket a Q , illetve P pontban metszi. Húzzuk meg a Q pont ordinátáját, és arra bocsássunk P -ből merőlegest! Azt állítjuk, hogy a kapott R pont az ellipszis pontja. A háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{PD}{QS} = \frac{PO}{QO} = \frac{b}{a}.$$



3.24 ábra

Mivel $PD = RS$,

$$RS = \frac{b}{a} QS,$$

$QS = y_k$, a kör ordinátája.

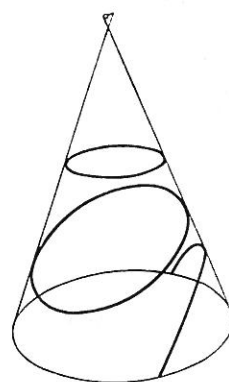
$$RS = \frac{b}{a} y_k,$$

tehát RS valóban az ellipszis ordinátája.

3.2.4 A kúp síkmetszetei

Elemi geometriai úton bebizonyítható, hogy egy egyenes körkúp síkmetszetei (3.25 ábra):

ha a sík merőleges a tengelyre: kör,
ha a sík valamennyi alkotót metszi: ellipszis;
ha a sík egy alkotóval párhuzamos: parabola;
ha a sík két alkotóval párhuzamos: hiperbola.



3.25 ábra

3.2.5 A kúpszeletek csúcsponti egyenlete

A kúpszelet csúcspontjának nevezzük a kúpszelet olyan pontját, amelyben a kúpszelet valamelyik tengelye metszi a görbét.

Ha a kúpszelet egyenletét olyan koordináta-rendszerben írjuk fel, amelynek kezdőpontja egy csúcspont, és tengelyei egybeesnek a kúpszelet tengelyeivel, a felírt egyenletet csúcsponti egyenletnek nevezzük.

A csúcsponti egyenlet levezetéséhez vezessünk be a kúpszeletekre jellemző közös adatot: paramétert.

Parabola. A parabolát meghatározza paramétere, a fókuszhoz a direktrixtől való távolsága.

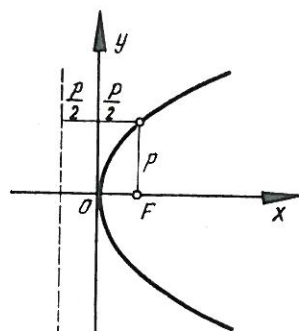
Ha a csúcspont az origó és a tengely az x tengely, a parabola egyenlete

$$y^2 = 2px.$$

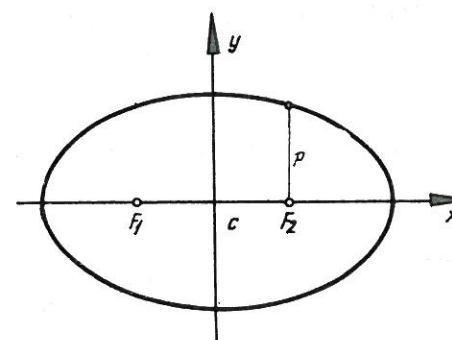
Az F helyhez tartozó $y > 0$ ordináta:

$$y = p.$$

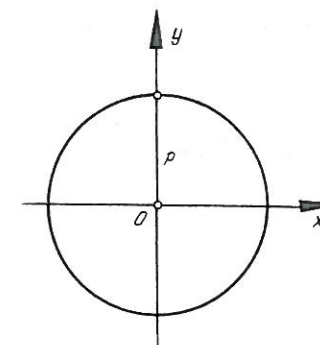
A parabola definíciója értelmében ugyanis, a P pont a fókuszhoz és a direktrixtől egyenlő (p) távolságra van (3.26 ábra).



3.26 ábra



3.27 ábra



3.28 ábra

Ellipszis. Határozzuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipszis fókuszához tartozó ordináta nagyságát. Az ellipszis y koordinátája

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$x = c \text{ értéknél: } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{b^2}{a}.$$

A $\frac{b^2}{a}$ érték az ellipszis jellemzője, paramétere:

$$p = \frac{b^2}{a} \quad (3.27 \text{ ábra}).$$

A kör az ellipszis speciális esete, itt

$$a = b \quad (c = 0).$$

Ekkor a paraméter a középponthez tartozó ordináta (3.28 ábra):

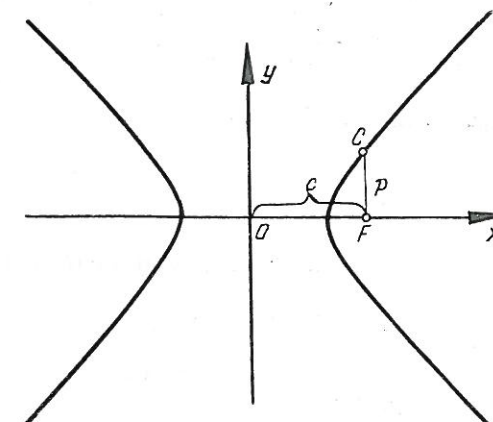
$$p = a.$$

Hiperbola. Az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletből kifejezve y -t ($y > 0$),

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Az $x = c$ pontban (3.29 ábra)

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{b^2}{a}.$$



3.29 ábra

A fókuszhoz tartozó y érték a hiperbola jellemzője, paramétere:

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

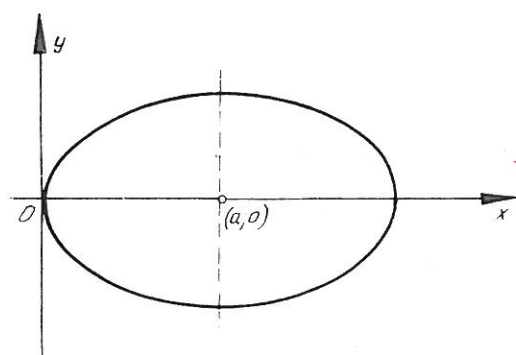
Határozzuk meg a p paraméter segítségével a kúpszeletek csúcsponti egyenletét!

Parabola. A parabola csúcsponti egyenlete az ismert

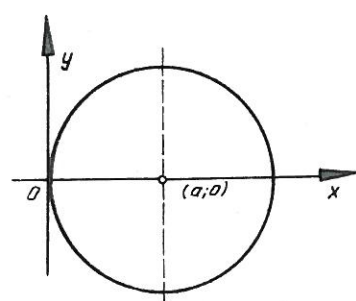
$$y^2 = 2px \quad \text{egyenlet (3.26 ábra).}$$

Ellipszis. Az ellipszis egyenlete, ha csúcspontja az origó, azaz középpontja: $(a; 0)$ (3.30 ábra),

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



3.30 ábra



3.31 ábra

A műveleteket elvégezve:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rendezve:

$$y^2 = 2 \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

A paraméter, $p = \frac{b^2}{a}$ segítségével:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2.$$

Kör. A kör egyenlete, ha középpontja $(a; 0)$ (3.31 ábra):

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2,$$

azaz

$$y^2 = 2ax - x^2.$$

Az $a = p$ értékkel

$$y^2 = 2px - x^2.$$

Hiperbola. A hiperbola egyenlete, ha a jobb oldali ághoz tartozó csúc az origóban van, tehát középpontja $(-a; 0)$ (3.32 ábra),

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

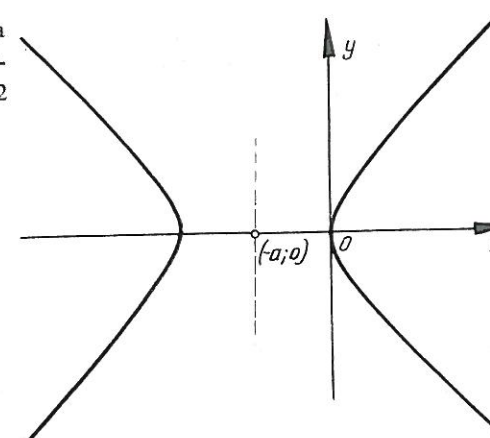
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{2ax}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rendezve:

$$y^2 = 2 \frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

A $p = \frac{b^2}{a}$ paraméter bevezetésével:

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2.$$



3.32 ábra

A p paraméter bevezetésével a kúpszeletek csúcsponti egyenlete hasonlóvá válik.

$$y^2 = 2px \quad \text{a parabola egyenlete.}$$

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2 \quad \text{az ellipszis egyenlete.}$$

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2 \quad \text{a hiperbola egyenlete.}$$

A kúpszelet elnevezése ezekből az egyenletekből származik. (Parabola = egyenlőség, ellipszis = hiány, hiperbola = felesleg.)

3.2.6 A kúpszeletek fokális egyenlete

Helyezzük úgy el a kúpszeleteket, hogy fókuszuk az origóba kerüljön. Egyenleteik így alakulnak:

A parabola csúcsa a $(-\frac{p}{2}; 0)$ pontba kerül (3.33 ábra). Egyenlete:

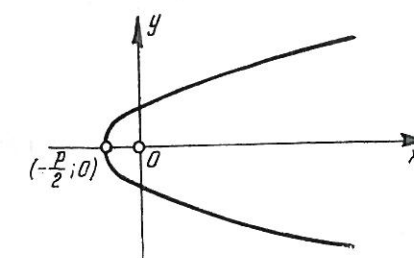
$$y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2} \right), \quad \text{azaz}$$

$$y^2 = 2px + p^2.$$

Mindkét oldalhoz x^2 -et adva:

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2,$$

$$x^2 + y^2 = (x+p)^2.$$



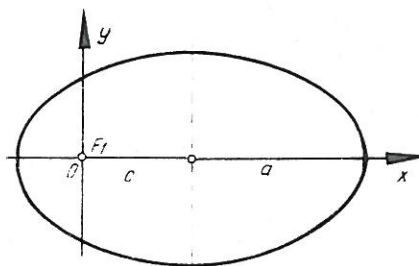
3.33 ábra

Ellipszis. Ha az ellipszis F_1 fókusza az origó, a középponti ellipszis c -vel balra tolódott. Egyenlete (3.34 ábra):

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Innen

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2}x^2 + 2\frac{b^2}{a^2}cx - \frac{b^2c^2}{a^2} + b^2.$$



3.34 ábra

Mindkét oldalhoz x^2 -et adva:

$$x^2 + y^2 = x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + 2\frac{b^2}{a^2}cx - \frac{b^2c^2}{a^2} + b^2.$$

x^2 -et, illetve b^2 -et kiemelve:

$$x^2 + y^2 = x^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2} + 2\frac{b^2}{a^2}cx + \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2}.$$

Mivel $a^2 - b^2 = c^2$ és $a^2 - c^2 = b^2$,

$$x^2 + y^2 = x^2 \frac{c^2}{a^2} + 2\frac{b^2}{a^2}cx + \frac{b^4}{a^2}.$$

Helyettesítsük be az egyenletbe a

$$p = \frac{b^2}{a} \text{ paramétert,}$$

$$x^2 + y^2 = x^2 \frac{c^2}{a^2} + 2\frac{c}{a}px + p^2.$$

c az ellipszis lineáris excentricitása, a a fél nagytengelye. Bevezetve az $e = \frac{c}{a}$ numerikus excentricitást:

$$x^2 + y^2 = e^2x^2 + 2exp + p^2.$$

Az ellipszis fokális egyenlete:

$$x^2 + y^2 = (ex + p)^2.$$

(Az ellipszishöz $e < 1$).

Kör. A kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = a^2; \quad a = p \text{ jelöléssel (3.28 ábra):}$$

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

A kör fokális egyenlete:

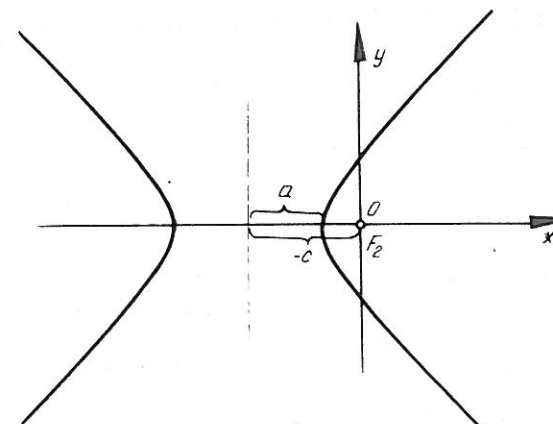
$$x^2 + y^2 = (ex + p)^2. \quad (\text{A körnél: } e = 0.)$$

Hiperbola. Helyezzük el a hiperbolát úgy, hogy jobb oldali fókusza az origóba kerüljön (3.35 ábra). Egyenlete

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rendezve:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 + 2\frac{b^2}{a^2}cx + \frac{b^2}{a^2}c^2 - b^2.$$



3.35 ábra

Mindkét oldalhoz x^2 -et adva:

$$x^2 + y^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 + 2\frac{b^2}{a^2}cx + \frac{b^2}{a^2}c^2 - b^2.$$

x^2 és b^2 kiemelésével:

$$x^2 + y^2 = x^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} + 2\frac{b^2}{a^2}cx + \frac{b^2(c^2 - a^2)}{a^2}.$$

Mivel $a^2 + b^2 = c^2$ és $c^2 - a^2 = b^2$,

$$x^2 + y^2 = x^2 \frac{c^2}{a^2} + 2\frac{b^2}{a^2}cx + \frac{b^4}{a^2}.$$

A paraméter $p = \frac{b^2}{a}$ bevezetésével:

$$x^2 + y^2 = x^2 \frac{c^2}{a^2} + 2\frac{c}{a}px + p^2.$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{c}{a}x + p\right)^2.$$

A hiperbolánál a a valós tengely fele, c a lineáris excentricitás.

Bevezetve az $e = \frac{c}{a}$ numerikus excentricitást (a hiperbolánál $e > 1$), a hiperbola fokális egyenlete:

$$x^2 + y^2 = (ex + p)^2.$$

A kúpszeletek közös fokális egyenlete:

$$x^2 + y^2 = (ex + p)^2,$$

ahol e – a numerikus excentricitás.

e értékei: parabolánál: $e = 1$; ellipszishöz: $e < 1$; körnél: $e = 0$; hiperbolánál: $e > 1$.

3.2.7 Másodrendű görbék

Az előző pontokban levezettük a kör, a parabola, az ellipszis és a hiperbola egyenletét. Az alakzatokat speciális módon helyeztük el úgy, hogy tengelyeik párhuzamosak voltak a koordinátatengelyekkel.

A levezetett egyenletek közös tulajdonsága, hogy bennük az x vagy az y , vagy mindkét változó másodfokon szerepelt, vagyis a görbék egyenlete másodfokú egyenlet.

Az egyenes diszkussziójánál láttuk, hogy az $Ax + By + C = 0$ egyenlet az $A^2 + B^2 > 0$ feltétel mellett mindig egyenest határoz meg.

Ennek analógiájára foglalkozunk a következő problémával. Tekintsük az

$$(1) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

másodfokú egyenletet.

Vizsgáljuk, hogy az egyenlet milyen görbét határoz meg a síkon.

Az (1) egyenlet által meghatározott görbék másodrendű görbéknek nevezzük.

A továbbiakban feltesszük, hogy A, B és C nem lehet egyszerre zérus, mert különben lineáris egyenlethez jutnánk.

A másodrendű görbék olyan módon vizsgáljuk, hogy meghatározó egyenletüket, az (1) egyenletet, a koordinátarendszer alkalmas transzformációival (elforgatás és eltolás) áttekinthetőbb alakra hozzuk.

I. Tegyük fel, hogy az (1) egyenletben

$$B = 0.$$

$$\text{Ekkor} \quad A^2 + C^2 > 0.$$

$$1. \quad AC \neq 0$$

$$a) \quad A = C \neq 0.$$

Az (1) egyenletet $\frac{1}{A} = \frac{1}{C}$ -vel szorozva:

$$x^2 + \frac{D}{A}x + y^2 + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0.$$

Teljes négyzetté való kiegészítéssel:

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}.$$

Jelöljük a jobb oldalon álló kifejezést G -vel!

$$G = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

$$(2) \quad \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = G.$$

Ha $G > 0$, akkor a (2) egyenlet kört határoz meg.

$$\alpha = -\frac{D}{2A}, \quad \beta = -\frac{E}{2A}, \quad G = r^2 \quad \text{jelöléssel az ismert}$$

$$(3) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

egyenlethez jutunk.

Ha $G = 0$, akkor a (2) egyenlet pontot (nulla sugarú kört) határoz meg. Ez a pont a

$$\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2A}\right) \text{ pont.}$$

Ha $G < 0$, akkor a (2) egyenletet a sík egyetlen pontja sem elégíti ki; ilyenkor azt mondjuk, az egyenlet üres alakzat: képzetes kör egyenlete.

Összefoglalva: az (1) egyenlet kört vagy pontkört határoz meg, ha

$$A = C \neq 0, \quad B = 0 \quad \text{és} \quad D^2 + E^2 - 4AF \geq 0.$$

$$b) \quad A \neq C.$$

Teljes négyzetté kiegészítve az (1) egyenlet:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F.$$

Toljuk el a koordinátarendszert az

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \frac{D}{2A} \\ y' &= y + \frac{E}{2C} \end{aligned} \right\}$$

egyenleteknek megfelelően, azaz az origót helyezzük az

$$O' \left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2C}\right) \text{ pontba!}$$

Alkalmazva a

$$G = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \quad \text{jelölést,}$$

az (1) egyenlet

$$(4) \quad Ax'^2 + Cy'^2 = G$$

alakú lesz.

$$\alpha) \quad AC < 0,$$

azaz A és C ellentétes előjelűek.

Ez az egyenlet

$$\frac{G}{A} < 0 \quad \text{esetén üres alakzat egyenlete;}$$

$\frac{G}{A} > 0$ esetén az $x' = \sqrt{\frac{G}{A}}$ és $x' = -\sqrt{\frac{G}{A}}$ párhuzamos egyenespár egyenlete;

$\frac{G}{A} = 0$ esetén az $x' = 0$ egyenes (egybeeső párhuzamos egyenespár) egyenlete.

Ha (9)-ben $E \neq 0$, akkor az egyenlet

$$y' - \frac{G}{E} = -\frac{A}{E} x'^2$$

alakra hozható.

Toljuk el a koordinátarendszert az

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x \\ y^* &= y' - \frac{G}{E} \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszernek megfelelően.

Az (x^*, y^*) koordinátarendszerben

$$y^* = -\frac{A}{E} x^{*2} \quad \text{alakú egyenletet kapunk.}$$

$$-\frac{A}{E} = a \quad \text{jelöléssel}$$

$$(10) \quad y^* = ax^{*2}.$$

Az egyenlet olyan parabola egyenlete, amelynek tengelye párhuzamos az y tengellyel.

Analóg módon az $A = 0$ feltétellel az

$$(11) \quad x^* = ay^{*2}$$

egyenletű, az x tengellyel párhuzamos tengelyű parabolához, vagy az x tengellyel párhuzamos egyenespár egyenletéhez jutunk.

Összefoglalva:

$$\begin{aligned} B = 0 \quad \text{esetén az} \\ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{aligned}$$

egyenlet kört, ellipszist, hiperbolát, parabolát metsző egyenespárt, párhuzamos egyenespárt vagy üres alakzatot határoz meg.

II. $B \neq 0$.

Megmutatjuk, hogy a koordinátarendszert alkalmasan elforgatva a II. eset az I. esetre visszavezethető, azaz az új koordinátarendszerben az (1) egyenlet olyan alakú, amelyben nem szerepel vegyes másodfokú tag.

Tétel: Mindig található olyan ω szög, hogy az

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos \omega - \eta \sin \omega \\ y &= \xi \sin \omega + \eta \cos \omega \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

egyenletű koordinátatranszformációt (3.1.2. pont) alkalmazva az

$$(a) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

kifejezés a

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 \quad \text{alakú kifejezéssé alakítható.}$$

Bizonyítás. Írjuk (a)-ba a koordinátaelforgatás egyenleteit:

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 &= \\ &+ A(\xi^2 \cos^2 \omega - 2\xi\eta \sin \omega \cos \omega + \eta^2 \sin^2 \omega) + \\ &+ 2B(\xi^2 \sin \omega \cos \omega + \xi\eta \cos^2 \omega - \xi\eta \sin^2 \omega - \eta^2 \sin \omega \cos \omega) + \\ &+ C(\xi^2 \sin^2 \omega + 2\xi\eta \sin \omega \cos \omega + \eta^2 \cos^2 \omega) = \\ &= \xi^2(A \cos^2 \omega + C \sin^2 \omega + 2B \sin \omega \cos \omega) + \\ &+ \eta^2(A \sin^2 \omega + C \cos^2 \omega - 2B \sin \omega \cos \omega) + \\ &+ \xi\eta[2B(\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) - (A - C) 2 \sin \omega \cos \omega] = \\ &= \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \xi\eta[2B \cos 2\omega - (A - C) \sin 2\omega]. \end{aligned}$$

Itt λ_1 és λ_2 ξ^2 , illetve η^2 szorzóját jelöli.

Úgy akarjuk meghatározni ω -t, hogy a

$$(b) \quad 2B \cos 2\omega - (A - C) \sin 2\omega = 0$$

feltétel teljesüljön.

Ha $A - C = 0$, azaz $A = C$, a (b) feltétel akkor teljesül, ha

$$\cos 2\omega = 0, \quad \text{azaz} \quad \omega = \frac{\pi}{4}.$$

Ha $A - C \neq 0$, akkor $\cos 2\omega \neq 0$, mert $\cos 2\omega = 0$ esetén $(A - C) \sin 2\omega = 0$, azaz $\sin 2\omega = 0$ teljesülne, de $\cos 2\omega$ és $\sin 2\omega$ nem lehet egyszerre zérus.

Ezért a (b) egyenlet

$$(c) \quad \operatorname{tg} 2\omega = \frac{2B}{A - C}$$

alakúra rendezhető.

A (c) egyenletből ω -t meghatározva $\xi\eta$ együtthatója ismét nulla lesz.

Valóban van tehát olyan ω , hogy az elforgatás után

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2.$$

Nyilvánvaló, hogy az (I.) helyettesítéssel a $Dx + Ey + F$ lineáris kifejezés ξ -ben és η -ban lineáris kifejezéssé transzformálódik. Végül tehát az (I.) alatti helyettesítéssel az (1) egyenlet olyan ξ -ben és η -ban másodfokú egyenletbe megy át, amelyben $\xi\eta$ együtthatója nulla.

Tehát a (ξ, η) koordinátarendszerben olyan egyenletet kapunk, amelyet az I. pontban részletesen diszkutáltunk.

Ilyen módon általában érvényes, hogy a másodrendű görbe vagy kúpszelet vagy pont vagy egyenespár (párhuzamos vagy metsző) vagy üres alakzat egyenlete.

Példák

1. Milyen kúpszeletet jellemez a

$$3x^2 - 4y^2 - 18x + 8y + 11 = 0 \quad \text{egyenlet?}$$

xy -os tag nincs, a négyzetes tagok előjele különböző; a görbe hiperbola egyenlete. Kiemeléssel:

$$3(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -11.$$

Teljes négyzetté kiegészítve:

$$\begin{aligned} 3(x-3)^2 - 4(y-1)^2 &= -11 + 27 - 4 \\ 3(x-3)^2 - 4(y-1)^2 &= 12 \\ \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{3} &= 1. \end{aligned}$$

A hiperbola középpontja: $O'(3; 1)$,
főtengelyei:

$$a = 2, \quad b = \sqrt{3}.$$

Lineáris excentricitása $c = \sqrt{7}$

2. Bizonyítsuk be, hogy az

$$y = \frac{1}{x}$$

egyenlet egyenlőszárú hiperbola egyenlete.

Mivel az $y = \frac{1}{x}$ görbe az $y = x$ egyenesre nézve szimmetrikus, forgassuk el a koordinátarendszert $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ -kal (3.36 ábra).

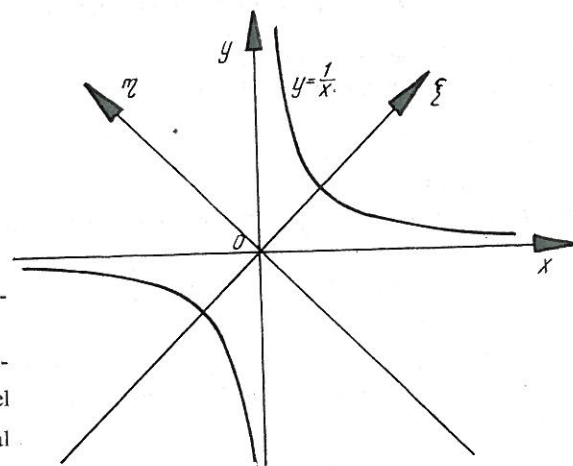
Az $xy = 1$ egyenletbe a 3.1.1. pont (I) egyenletrendszerét helyettesítve

$$(\xi \cos \omega - \eta \sin \omega)(\xi \sin \omega + \eta \cos \omega) = 1.$$

Mivel $\omega = \frac{\pi}{4}$, $\cos \omega = \sin \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \xi - \frac{1}{\sqrt{2}} \eta \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \xi + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta \right) = 1,$$

azaz
$$\frac{\xi^2}{2} - \frac{\eta^2}{2} = 1.$$



3.36 ábra

A $\frac{\pi}{4}$ -del elforgatott $(\xi; \eta)$ koordinátarendszerben a görbe egyenlőszárú hiperbola egyenlete és $a = b = \sqrt{2}$.

3. Milyen görbét jelent a

$$21x^2 - 10\sqrt{3}xy + 31y^2 - 144 = 0 \quad \text{egyenlet?}$$

Forgassuk el a koordinátarendszert olyan ω szöggel, hogy a $(\xi; \eta)$ koordinátarendszerben ne legyen vegyes másodfokú tag.

Az
$$\begin{cases} x = \xi \cos \omega - \eta \sin \omega \\ y = \xi \sin \omega + \eta \cos \omega \end{cases}$$

egyenletrendszert behelyettesítve:

$$\begin{aligned} 21(\xi \cos \omega - \eta \sin \omega)^2 - 10\sqrt{3}(\xi \cos \omega - \eta \sin \omega)(\xi \sin \omega + \eta \cos \omega) + \\ + 31(\xi \sin \omega + \eta \cos \omega)^2 - 144 = 0. \end{aligned}$$

A műveleteket elvégezve és rendezve:

$$\begin{aligned} \xi^2(21 \cos^2 \omega - 10\sqrt{3} \sin \omega \cos \omega + 31 \sin^2 \omega) + \\ + \xi\eta(-42 \sin \omega \cos \omega + 10\sqrt{3} \sin^2 \omega - 10\sqrt{3} \cos^2 \omega + 62 \sin \omega \cos \omega) + \\ + \eta^2(21 \sin^2 \omega + 10\sqrt{3} \sin \omega \cos \omega + 31 \cos^2 \omega) - 144 = 0. \end{aligned}$$

Mivel

$$2 \sin \omega \cos \omega = \sin 2\omega$$

és

$$\cos^2 \omega - \sin^2 \omega = \cos 2\omega,$$

$$\begin{aligned} \xi^2(21 \cos^2 \omega - 5\sqrt{3} \sin 2\omega + 31 \sin^2 \omega) + \\ + \xi\eta(10 \sin 2\omega - 10\sqrt{3} \cos 2\omega) + \\ + \eta^2(21 \sin^2 \omega + 5\sqrt{3} \sin 2\omega + 31 \cos^2 \omega) - 144 = 0. \end{aligned}$$

A vegyes másodfokú tag eltűnik, ha $\xi\eta$ együtthatója nulla.

$$10 \sin 2\omega - 10\sqrt{3} \cos 2\omega = 0,$$

azaz

$$\operatorname{tg} 2\omega = \sqrt{3},$$

$$2\omega = 60^\circ,$$

$$\omega = 30^\circ = \frac{\pi}{6},$$

Tehát a koordinátarendszert 30° -kal kell elforgatni. A kapott ω értéket ξ^2 és η^2 együtthatójába helyettesítve:

mivel
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\xi^2 \left(21 \cdot \frac{3}{4} - 5\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + 31 \cdot \frac{1}{4} \right) + \\ + \eta^2 \left(21 \cdot \frac{1}{4} + 5\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + 31 \cdot \frac{3}{4} \right) = 144.$$

$$16\xi^2 + 36\eta^2 = 144$$

$$\frac{\xi^2}{9} + \frac{\eta^2}{4} = 1.$$

A $\frac{\pi}{6}$ -tal elforgatott koordinátarendszerben az egyenlet ellipszis egyenlete. Az ellipszis középpontja az origó, főtengelyei $a = 3$, $b = 2$.

4. KOMPLEX SZÁMOK

4.1 A KOMPLEX SZÁMOK ALGEBRAI ALAKJA

A valós számok körét úgy akarjuk kibővíteni, hogy a kibővített számkörben minden korlátozás nélkül elvégezhető legyen a gyökvonás.

Természetesen megköveteljük, hogy a valós számok körében megszokott műveleti szabályok érvényben maradjanak az új számokra is.

A valós számok bevezetésének szemléletes alapja a számegyenes. A komplex számokat ehhez hasonló módon, úgy vezetjük be, hogy a sík pontjait, illetve a pontok helyvektorait számoknak tekintjük.

Ennek hangsúlyozására új jelölési módot vezetünk be.

Az $[1; 0]$ vektort, amely a valós egyenesen az 1 számnak felel meg, egyszerűen 1-gyel, a $[0; 1]$ vektort pedig i -vel jelöljük (4.1 ábra).

Ennek megfelelően az $[a; b]$ vektort az

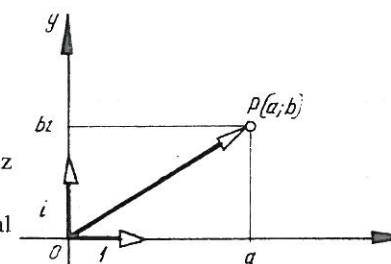
$$a + bi$$

komplex számmal azonosítjuk.

Ez természetesen megfelel az $(a; b)$ pontnak, azaz az $(a; b)$ valós számpárnak (4.1 ábra).

Tehát az $a + bi$ komplex számot az $(a; b)$ számpárral is megadhatjuk:

$$a + bi = [a; b].$$



4.1 ábra

Az i számot imaginárius vagy képzetes egységnek nevezzük.

Az x tengelyre a valós tengely, az y tengelyre a képzetes tengely elnevezést használjuk. Az $(x; y)$ síkot Gauss-féle számsíknak szokás nevezni.

Az $a + bi$ alak a komplex szám algebrai vagy kanonikus alakja.

Az $a + bi$ komplex szám valós része a , képzetes része b .

4.2 MŰVELETEK AZ ALGEBRAI ALAKBAN ADOTT KOMPLEX SZÁMOKKAL

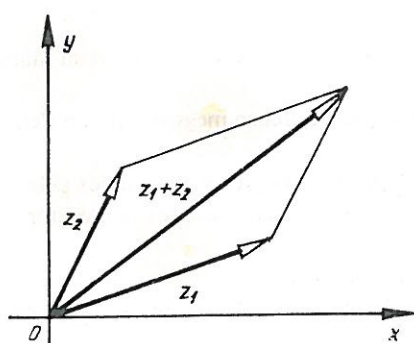
Komplex számok összeadása. A komplex számok körében úgy értelmezzük az összeadást, hogy egyszerűen átvesszük a vektorok körében megszokott összeadási műveleteket. Legyen z_1 és z_2 két komplex szám.

$$z_1 = a+bi, \quad z_2 = c+di.$$

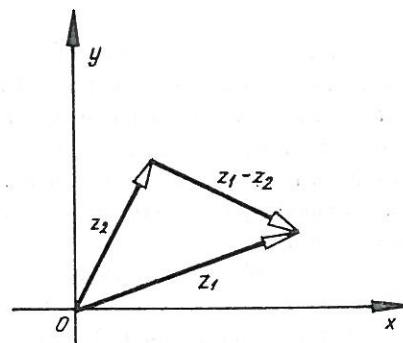
Definíció szerint:

$$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i \quad (4.2 \text{ ábra}).$$

Ez a definíció biztosítja, hogy a komplex számok körében az összeadás kommutatív és asszociatív maradjon.



4.2 ábra



4.3 ábra

Komplex számok kivonása. Az összeadáshoz hasonlóan:

$$z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di) = (a-b) + (b-d)i. \quad (4.3 \text{ ábra})$$

Komplex szám szorzata valós számmal. Egy komplex szám és egy valós szám szorzatát ugyancsak a vektoroknál elfogadott definíció alapján határozzuk meg. Ha λ valós,

$$\lambda(a+bi) = (a+bi)\lambda = \lambda a + \lambda bi.$$

Ezek a definíciók jogosulttá teszik az $a+bi$ jelölésmódot.

A komplex számok speciális esetként tartalmazzák a valós számokat, annak megfelelően, hogy a számsík tartalmazza a számegyeneset.

$$a = a + 0i.$$

Komplex számok szorzása. Most definiáljuk a komplex számok szorzatát, méghozzá úgy, hogy a szorzásra továbbra is érvényben maradjanak a valós számok műveleti szabályai. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a vektorok körében már bevezetett skaláris és vektoriális szorzás egyike sem alkalmas ilyen célra.

Tegyük fel egyelőre, hogy már definiáltuk a szorzást és érvényes a disztributív szabály. Ekkor

$$(a+bi)(c+di) = c(a+bi) + di(a+bi) = ac + bci + adi + bdi^2.$$

Ebből látható, hogy bármely két komplex szám szorzata meghatározott, ha az $i^2 = i \cdot i$ komplex szám már definiált van.

Az i^2 definíciójára különféle megfontolások alapján juthatunk el.

Ilyen következtetés például:

A valós számok körében érvényes az

$$(1) \quad |ab| = |a| |b|$$

azonosság.

Nevezzük a

$$z = a+bi$$

komplex szám abszolút értékének a

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

menyiséget, azaz a z -nek megfelelő síkvektor hosszát.

Ha z valós, az így definiált abszolút érték azonos a valós számokra már definiált abszolút értékkel.

A komplex számok szorzatára is megköveteljük, hogy az (1) azonosság fennálljon.

Ekkor

$$|i^2| = |i| |i| = 1.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} |1+i| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \\ |1-i| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ezért

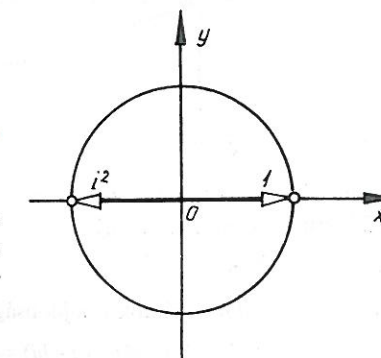
$$\begin{aligned} |1-i^2| &= |(1-i)(1+i)| = \\ &= |1-i| \cdot |1+i| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2. \end{aligned}$$

Tehát $|1-i^2| = 2$.

Két egységvektor különbségének hossza nem más, mint az egységnyi sugarú kör egy húrjának hossza. Ezért ez a hosszúság csak akkor lehet 2, azaz az átmérő, ha a két vektor egymás ellentettje (4.4 ábra).

Ezért szükségképpen

$$i^2 = -1.$$



4.4 ábra

Ez indokolja a komplex szám szorzására vonatkozó következő definíciót:

Legyen $z_1 = a+bi, \quad z_2 = c+di.$

Definíció. $z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i.$

Egyszerű számolással kimutatható, hogy az így definiált szorzás

1. kommutatív művelet: $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
2. asszociatív művelet: $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;
3. az összeadással disztributív művelet: $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$;
4. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$;
5. $i^2 = -1$;
6. ha az egyik tényező valós, az így definiált szorzat megegyezik a már definiált szorzattal.

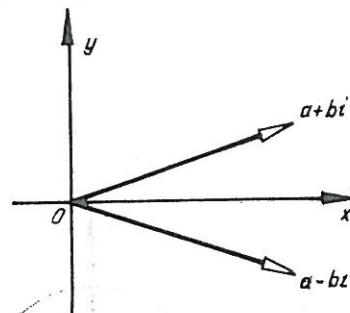
Megjegyzés. A 4. tulajdonságból leolvasható a szorzás következő fontos tulajdonsága.

Ha $z_1 z_2 = 0$,
akkor vagy $z_1 = 0$ vagy $z_2 = 0$.
Ugyanis, ha $z_1 z_2 = 0$,
akkor $0 = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

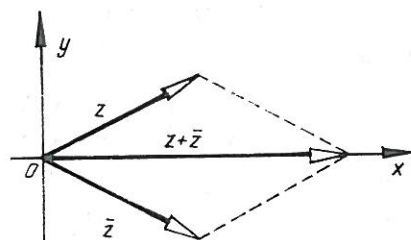
Innen, vagy $|z_1| = 0$ vagy $|z_2| = 0$, hiszen a valós számok körében a szorzás rendelkezik az említett tulajdonsággal.

Egy komplex szám abszolút értéke azonban akkor és csak akkor nulla, ha maga a szám nulla.

Konjugált komplex számok. Definíció. A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltja a $\bar{z} = a - bi$ komplex szám.



4.5 ábra



4.6 ábra

Geometriaileg a konjugált a komplex számnak a valós tengelyre való tükörképe (4.5 ábra). A $\bar{z}$ komplex szám konjugáltja z .

$$\bar{\bar{z}} = z.$$

Konjugált komplex számok tulajdonságai:

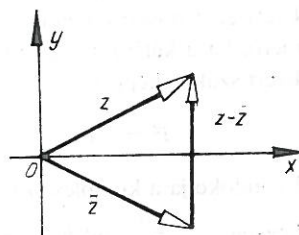
$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a. \quad (4.6 \text{ ábra}),$$

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi. \quad (4.7 \text{ ábra}),$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

$$\text{Tehát} \quad z\bar{z} = |z|^2.$$

Ez az azonosság hasznos segítséget nyújt komplex számokkal való osztásnál.



4.7 ábra

Komplex számok osztása. Legyenek z_1 és z_2 adott komplex számok ($z_2 \neq 0$).
Legyen

$$\frac{z_1}{z_2} = z.$$

$\frac{z_1}{z_2}$ az a szám, amely z_2 -vel szorozva z_1 -et ad.

$$\text{azaz} \quad \frac{z_1}{z_2} z_2 = z_1,$$

$$z z_2 = z_1.$$

Szorozzuk be az egyenletet $\bar{z}_2$ -vel:

$$z z_2 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_2, \quad \text{azaz}$$

$$z |z_2|^2 = z_1 \bar{z}_2.$$

$|z_2|^2$ -tel osztva

$$z = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Ez az eljárás módot ad komplex számokkal való osztás elvégzésére.

Legyen $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Érdeemes külön megjegyezni, hogy $i^2 = -1$ miatt

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1}, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

i hatványai:

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1.$$

Általában, ha n pozitív egész szám,

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1$$

$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = i$$

$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = -1$$

$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = -i.$$

4.3 A KOMPLEX SZÁMOK TRIGONOMETRIKUS ALAKJA

Tegyük fel, hogy a z komplex szám egységnyi abszolút értékű: $|z| = 1$.

A z -nek megfelelő vektor és a valós tengely pozitív ága közötti pozitív forgásirányú hajlás-szöget jelöljük φ -vel! Ekkor a $\cos \varphi$ -re és $\sin \varphi$ -re adott definíciók alapján:

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Legyen általában z tetszőleges, nullától különböző komplex szám. Ekkor $\frac{z}{|z|}$ egységnyi abszolút értékű, ezért előállítható a következő alakban:

$$\frac{z}{|z|} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Innen $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

A $|z| = r$ jelöléssel:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (4.8 \text{ ábra}).$$

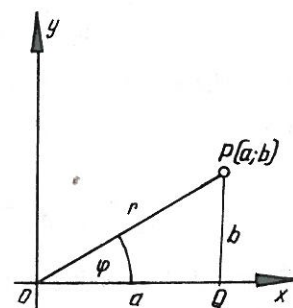
Ezt az alakot a komplex szám trigonometrikus alakjának nevezzük.

A kétféle felírási mód a következő egyenletek szerint nyerhető (4.8 ábra):

$$\left. \begin{aligned} a &= r \cos \varphi \\ b &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\},$$

illetve

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \cos \varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$



4.8 ábra

A φ szöget a komplex szám argumentumának nevezzük.

Az argumentum nincs egyértelműen meghatározva, hiszen a szöghöz $2k\pi$ -t ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) hozzáadva ugyanahhoz a vektorhoz, azaz ugyanahhoz a komplex számhoz jutunk. Mindig feltehetjük, hogy a komplex szám argumentuma:

$$0 \leq \varphi < 2\pi.$$

A 0-nak nincs argumentuma, így nincs trigonometrikus alakja sem.

Példák

$$\begin{aligned} 1 &= 1(\cos 0 + i \sin 0), \\ i &= 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right), \\ -1 &= 1(\cos \pi + i \sin \pi), \\ -i &= 1\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right), \\ 1+i &= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

4.4 MŰVELETEK TRIGONOMETRIKUS ALAKBAN ADOTT KOMPLEX SZÁMOKKAL

Komplex számok összeadása és kivonása esetén célszerű a kanonikus alak használata, szorzásnál, osztásnál, hatványozásnál, gyökvonásnál hasznos a trigonometrikus alak.

Komplex számok szorzása. Legyen két komplex számunk trigonometrikus alakban adva:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Mivel az addíciós tételek szerint (2.2.2):

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2), \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 &= \sin(\varphi_1 + \varphi_2), \\ r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Két trigonometrikus alakra hozott komplex számot tehát úgy szorzunk egymással, hogy az abszolút értékeket egymással megszorozzuk, az argumentumokat pedig összeadjuk.

E szabály értelmében könnyen megszerkeszthető két komplex szám szorzata.

Jelöljük a z_1 és z_2 komplex számokat a P_1 és P_2 pontokhoz vezető vektorok (4.9 ábra).

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2). \end{aligned}$$

Kössük össze P_1 -et a valós tengely $A(1; 0)$ pontjával. Szerkesszük meg az $OAP_1 \triangle$ -höz hasonló $OP_2P \triangle$ -et.

Az így kapott $\vec{OP}$ vektor a keresett $z_1 z_2$ komplex számot ábrázolja.

A komplex szám argumentuma $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, abszolút értéke az

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_2} &= \frac{r_1}{1} \quad \text{összefüggésből} \\ r &= r_1 r_2. \end{aligned}$$

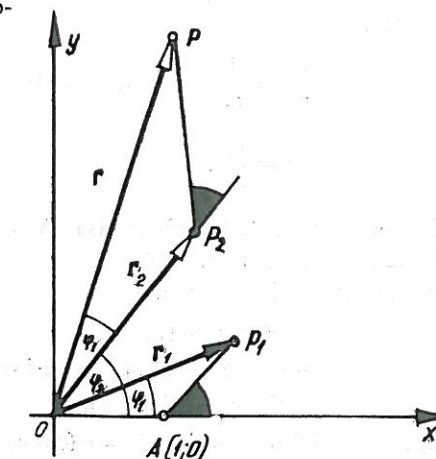
Komplex számok osztása. Legyen

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2). \end{aligned}$$

Keressük a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)}$$

hányadost.



4.9 ábra

Szorozzuk meg az

$$\frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

komplex számot

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)\text{-vel.}$$

A komplex számok szorzási szabályát alkalmazva éppen z_1 -et kapjuk.

Mivel

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad \text{azaz}$$

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Két trigonometrikus alakra hozott komplex szám osztását tehát úgy végezzük, hogy az osztandó abszolút értékét az osztó abszolút értékével osztjuk, az osztandó argumentumából pedig az osztó argumentumát kivonjuk.

Két komplex szám hányadosát a következőképpen szerkeszthetjük meg.

Legyen

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

A két komplex szám a 4.10 ábrán a P_1 és P_2 pont.

Kössük össze P_2 -t az $A(1; 0)$ ponttal!

Szerkesszünk az OP_2A háromszöghöz hasonló OP_1P háromszöget! Az így kapott P pont a keresett $z =$

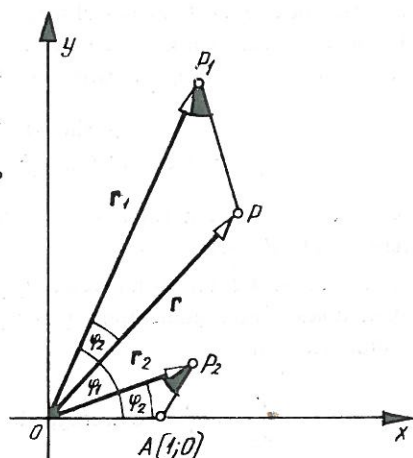
$$= \frac{z_1}{z_2} \text{ komplex szám képe.}$$

Argumentuma $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$,

abszolút értéke pedig az

$$\frac{r}{r_1} = \frac{1}{r_2} \quad \text{összefüggésből:}$$

$$r = \frac{r_1}{r_2}.$$



4.10 ábra

Komplex számok hatványozása. A komplex számok szorzásának szabálya tetszőleges számú tényezőre is igazolható.

Ezért, ha n természetes szám,

$$\begin{aligned} [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n &= \\ &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \dots r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

A komplex számok hatványozásának ezt a képletét Moivre-képletnek nevezik.

Gyökvonás komplex számokból. Az $i^2 = -1$ egyenlet szerint a komplex számok körében lehet találni olyan számot, amelynek négyzete -1 , azaz értelmezve van a $\sqrt{-1}$ mennyiség. Megmutatjuk, hogy a komplex számok körében nemcsak a negatív valós számokból, hanem bármilyen komplex számból vonható négyzetgyök, sőt ennél általánosabban, akár-hányadik gyök.

Tehát érvényes, hogy adott n pozitív egész szám és adott z komplex szám esetén, mindig megoldható a

$$w^n = z$$

egyenlet.

Még általánosabban igaz, hogy ha

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$$

adott komplex számok, akkor a

$$z_n w^n + z_{n-1} w^{n-1} + \dots + z_1 w + z_0 = 0$$

algebrai egyenletnek mindig van n számú megoldása a komplex számok körében. Ez a tétel az *algebra alaptétele*. Ennek bizonyítása meghaladja a könyv kereteit.

Részletesen foglalkozunk azonban a

$$(1) \quad w^n = z$$

egyenlettel.

Ha $z = 0$, nyilvánvaló, hogy $w = 0$ az egyetlen megoldás.

Feltesszük, hogy $z \neq 0$.

Legyen

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\text{és} \quad w = R(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Felhasználva a Moivre-képletet, az (1) egyenlet így alakul:

$$(2) \quad R^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ebből látható, hogy

$$R = \sqrt[n]{r}$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{n}$$

választással az (1) egyenlet megoldását kapjuk. Az egyenletnek azonban további megoldásai is vannak.

Helyettesítsük α -t az

$$\alpha_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \text{argumentummal,}$$

azaz legyen

$$w_k = R(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} w_k^n &= R^n(\cos n\alpha_k + i \sin n\alpha_k) = \\ &= r \cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi) = \\ &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \end{aligned}$$

Az így adódó w_k számok tehát valamennyien megoldásai a

$$w^n = z \quad \text{egyenletnek.}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ esetén csupa különböző w_k értéket kapunk, hiszen a megfelelő α_k argumentumok között 2π -nél kisebb az eltérés.

$k = n, n+1, \dots$ esetén, amint az könnyen belátható, ugyanazok a w_k számok ismétlődnek. Az is könnyen belátható, hogy az egyenletnek már nincsenek további gyökei. Ugyanis bármely megoldás esetén $n\alpha$ és φ 2π -nek egészszámu többszörösében különböznek.

$$n\alpha - \varphi = 2k\pi,$$

és ebből

$$\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Így

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Tehát minden 0-tól különböző komplex számnak pontosan n darab különböző n -edik gyöke van.

Példák

1. Az egységgyökök kiszámítása. n -ik egységgyököknek nevezzük a

$$w^n = 1$$

egyenlet megoldásait.

Jelöljük ezeket a számokat

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}\text{-gyel!}$$

Az előző általános eredmény szerint, mivel

$$\begin{aligned} 1 &= 1(\cos 0 + i \sin 0), \\ \varepsilon_k &= \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

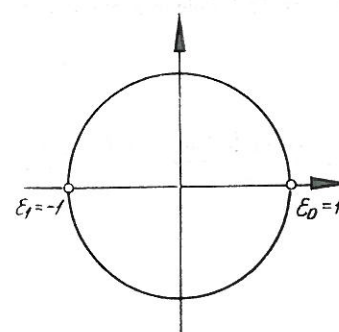
Az egységgyökök tehát annak az egységkörbe beírt szabályos n -szögnek a csúcaiban helyezkednek el, amelynek egyik csúcsa az $(1; 0)$ pont.

Speciálisan:

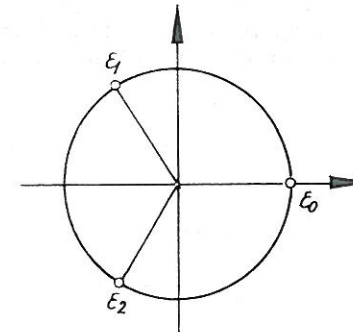
$n = 2$ -re:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1, \\ \varepsilon_1 &= \cos \pi + i \sin \pi = -1. \end{aligned}$$

Tehát $\sqrt{1} = \pm 1$ (4.11 ábra).



4.11 ábra



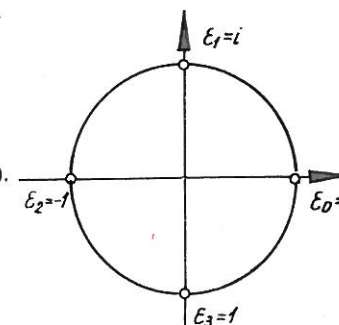
4.12 ábra

$n = 3$ -ra:

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} \varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 \\ \varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (4.12 \text{ ábra}).$$

$n = 4$ -re:

$$\sqrt[4]{1} = \begin{cases} \varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 \\ \varepsilon_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \\ \varepsilon_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \\ \varepsilon_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i \end{cases} \quad (4.13 \text{ ábra}).$$



4.13 ábra

2.

$$w = \sqrt[3]{-8}.$$

Mivel

$$-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$w = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \quad (k = 0, 1, 2).$$

Így

$$w_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$w_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

3. A másodfokú egyenlet megoldása.

A komplex együtthatójú

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0) \text{ egyenlet}$$

megoldására is érvényes a jól ismert

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

megoldóképlet azzal a kiegészítéssel, hogy most már a gyökvonás mindig elvégezhető.

Speciálisan, ha a valós együtthatós másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, az egyenlet megoldásai egymáshoz konjugált komplex számok.

Példaként oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

5. FÜGGVÉNYEK

5.1 A HALMAZELMÉLET ALAPFOGALMAI

Az egyetem egyik karának hallgatói halmazt alkotnak.

Egy gép összeszereléséhez szükséges alkatrészek halmazt alkotnak.

Az első száz páratlan szám halmazt alkot.

Halmaznak nevezzük a valamilyen módon meghatározott dolgok, objektumok összességét.

Azok a dolgok, objektumok, amelyek a halmazhoz tartoznak, a halmaz *elemei*.

A halmaz és a halmaz elemeinek fogalma az ember gondolkodásával kialakult fogalmak, ezeket nem definiáljuk.

Halmazt alkotnak például

- a természetes számok,
- a racionális számok,
- a valós számok,
- a természetes számok négyzetei,
- a hárommal osztható természetes számok,
- a sík azon pontjai, amelyek adott ponttól adott távolságra vannak (kör),
- a tér azon pontjai, amelyek adott egyenestől adott távolságra vannak (hengerfelület).

A halmazelmélet a 19. század második felében alakult ki. Megalapozója Georg CANTOR német matematikus (1845—1918).

Egy halmazt akkor tekintünk megadottnak, ha tudjuk, mik az elemei. A halmazt megadhatjuk, ha meghatározzuk, milyen tulajdonságú objektumok az elemei. Másik módszer a halmaz megadására: elemeinek felsorolása.

A halmazt nagybetűvel, elemeit kisbetűvel jelöljük. Azt, hogy x eleme A -nak, így jelöljük:

$$x \in A.$$

Ha x nem eleme B -nek, így jelöljük:

$$x \notin B.$$

A halmaz állhat véges és végtelen sok elemből. Az előbbi véges, az utóbbit végtelen halmaznak nevezzük. A halmaz elemeit kapcsos zárójelbe írva adjuk meg.

A leggyakrabban előforduló halmazokat külön jelöljük:

N : a természetes számok halmaza, beleértve a nullát,

G : az egész számok halmaza,

R : a valós számok halmaza.

Más halmazok pl.:

$$A = \{-10; -3; 2; 4\}; \quad B = \{2; 4; 6; \dots; 2n; \dots\}.$$

A halmaz elemeinek definiálásával adjuk meg a következő halmazokat:

$$A = \{x: |x| \leq 2, \quad x \text{ valós}\}.$$

(A halmaz elemei azok a valós számok, amelyeknek abszolút értéke nem nagyobb 2-nél.)

$$B = \{x: x = 2n+3, \quad n \text{ természetes szám}\}.$$

Két halmaz egyenlősége. Két halmaz egyenlő, ha elemeik azonosak. Ezt így jelöljük:

$$\text{Ha } A = B, \quad \text{akkor } x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Tartalmazás. Ha A minden eleme B -nek is eleme, akkor az A halmaz a B halmaz részhalmaza.

Jelben:

$$A \subset B \quad \text{vagy} \quad B \supset A.$$

A halmazokat síkbeli tartományokkal szemléltetjük.

Az 5.1. ábra az $A \subset B$ relációt szemlélteti.

A halmazok közé soroljuk az üres halmazt. Üres halmaz az, amelynek egyetlen eleme sincs.

Az üres halmaz jele: $\emptyset$.

Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

Tétel. $A \subset B$ és $B \supset A$ csak akkor állhat fenn egyszerre, ha

$$A = B.$$

A tartalmazás tranzitív.

$$\text{Ha } A \subset B \quad \text{és} \quad B \subset C, \quad \text{akkor } A \subset C.$$

Egyesítés: Az A és B halmazok összes elemeiből alkotott halmazt az A és B halmazok egyesítésének, *uniójának* nevezzük.

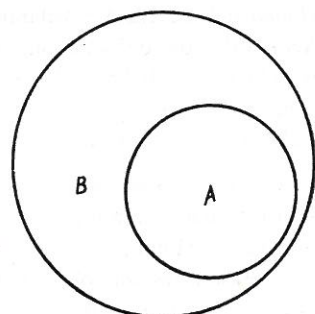
Jele: $A \cup B$.

$$\text{Pl. } \{1; 3; 5\} \cup \{2; 4; 6\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

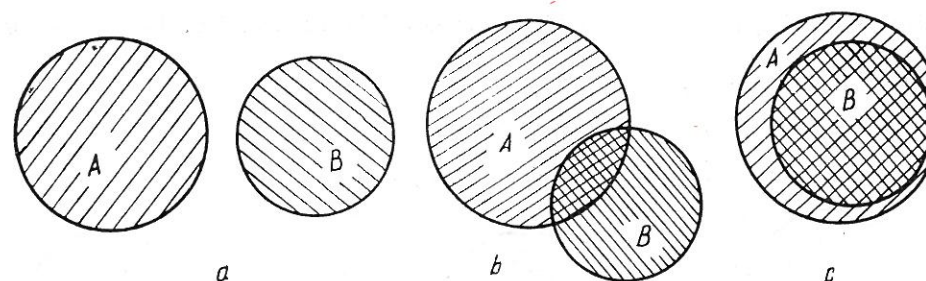
Ha az egyik halmaz üres halmaz:

$$\emptyset \cup A = A.$$

Két halmaz egyesítésének eseteit mutatja az 5.2.a, b, c ábra.



5.1 ábra



5.2 ábra

A halmazok egyesítését az ábrán vonalkázással jelöltük. Több halmaz egyesítése hasonlóan definiálható. Jelölése:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad \text{röviden } \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Közös rész (metszet). Két halmaz közös elemeinek halmaza a halmazok közös része, metszete.

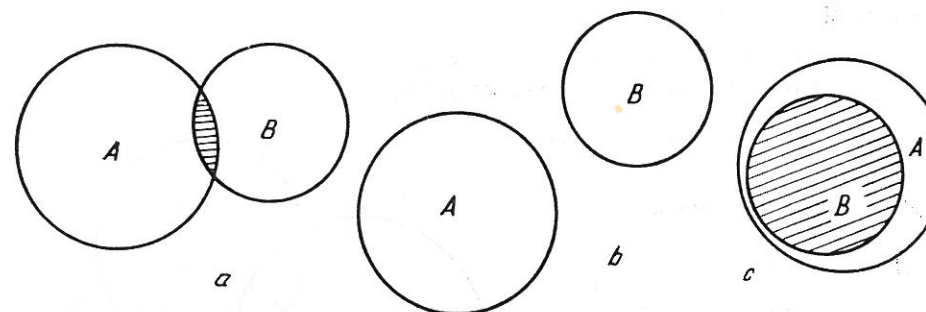
Jele: $A \cap B$,

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{és} \quad x \in B.$$

Ha két halmaznak nincs közös eleme:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Ha a metszetet vonalkázással jelöljük, a metszet szemléltetését az 5.3.a, b, c ábra mutatja.



5.3 ábra

Példa

$$A = \{x: x > 2\} \quad B = \{x: x < 10\},$$

$$A \cap B = \{x: 2 < x < 10\}.$$

Több halmaz metszete hasonlóan definiálható. Jelölése:

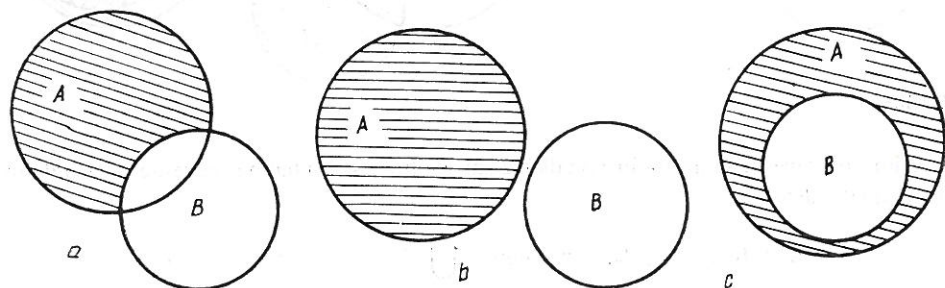
$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, \quad \text{röviden } \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Kivonás. Két halmaz különbsége $(A - B)$ azon elemek halmaza, amelyek A -nak elemei, de B -nek nem elemei.

Az $(A - B)$ halmazt így is jelöljük: $A \setminus B$.

$$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \text{ és } x \notin B.$$

$A \setminus B$ szemléletes jelölését az 5.4.a, b, c ábrán mutatjuk meg.



5.4 ábra

Az ábráról leolvasható:

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B.$$

Ha $A \subset B$, $A \setminus B = \emptyset$.

Műveleti szabályok:

1. Kommutatív szabály:

$$A \cup B = B \cup A,$$

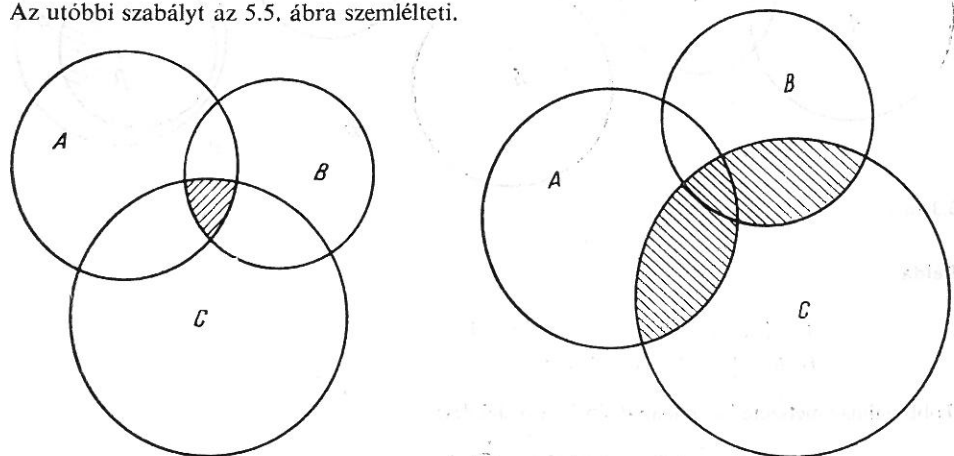
$$A \cap B = B \cap A.$$

2. Asszociatív szabály:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C,$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Az utóbbi szabályt az 5.5. ábra szemlélteti.



5.5 ábra

5.6 ábra

3. Disztributív szabály:

$$(A \cup B) \cap C =$$

$$= (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

(5.6. ábra)

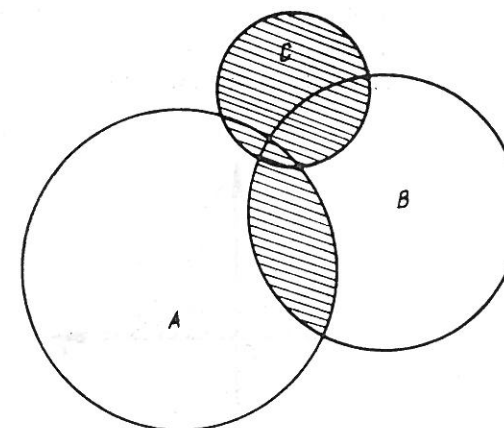
Disztributív szabály:

$$(A \cap B) \cup C =$$

$$= (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

(5.7. ábra)

A szabályok több halmaz esetében is érvényesek.



5.7 ábra

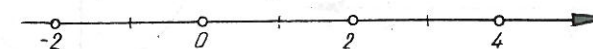
Számhalmazok és lineáris pont-halmazok. A valós számokat a számegyenesen ábrázoljuk. A valós számok halmazának a számegetes pontjainak halmaza felel meg.

$$1. \{-2; 0; 2; 4\} \quad (5.8. \text{ ábra})$$

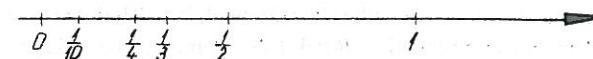
$$2. A = \left\{ \frac{1}{x} : x \in \mathbb{N} \right\} \quad (5.9. \text{ ábra})$$

$$3. A = \{x : a \leq x \leq b\} \quad (5.10. \text{ ábra})$$

$$4. A = \{x : 0 < x < +\infty\} \quad (5.11. \text{ ábra})$$



5.8 ábra



5.9 ábra



5.10 ábra



5.11 ábra

Sík és térbeli pont-halmazok. Számpárok halmazával a derékszögű koordináta-rendszer, pontjai számhármassok halmazával a térbeli derékszögű koordináta-rendszer pontjai jelölhetők meg.

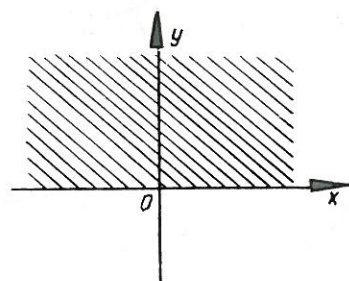
$$1. A = \{(x; y) : y \geq 0\}$$

(5.12. ábra)

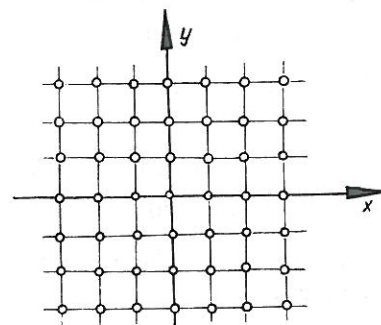
$$2. A = \{(x; y) : y \in G\}$$

(A sík rácspontjai) (5.13. ábra)

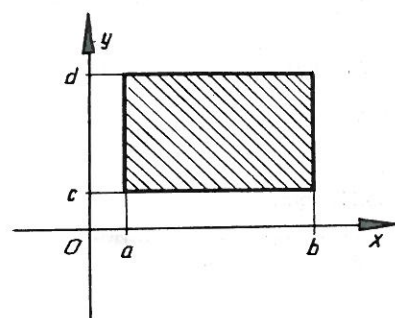
3. $A = \{(x; y) : a < x < b; \quad c < y < d\}$ (5.14. ábra)
 4. $A = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ (5.15. ábra)
 5. $A = \{(x; y; z) : x, y, z \in G\}$ (A tér rács pontjai)



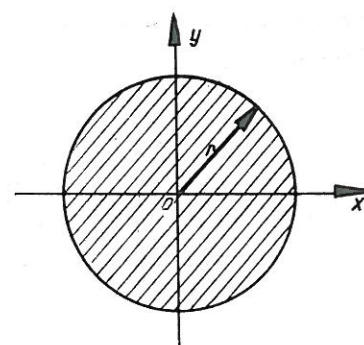
5.12 ábra



5.13 ábra



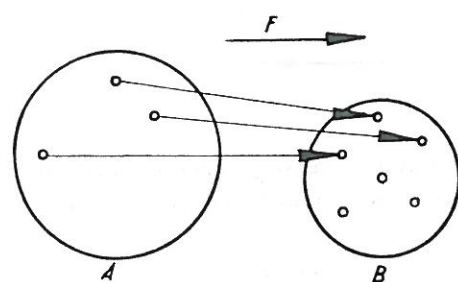
5.14 ábra



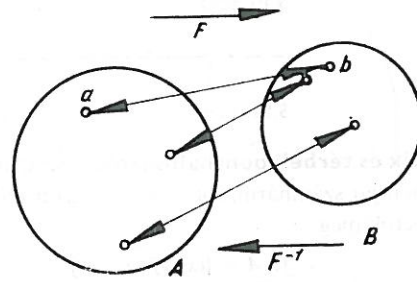
5.15 ábra

Leképezés. Ha az A halmaz bizonyos elemeihez hozzárendeljük a B halmaz bizonyos elemeit úgy, hogy A -nak egy eleméhez sem rendeljük B -nek több elemét, akkor leképezést végzünk. A leképezés jele: F (5.16. ábra).

Inverz leképezés. Ha az F leképezés A különböző elemeinek B különböző elemeit felelteti meg, és B minden eleme megfelel az A halmaz valamelyik elemének, akkor ezt az eljárást F inverz leképezésének nevezzük. F^{-1} -gyel jelöljük azt a leképezést, amely minden $b \in B$ elemnek azt az $a \in A$ elemet felelteti meg, amelyre $F(a) = b$ (5.17. ábra).



5.16 ábra



5.17 ábra

Az ilyen F leképezést az A és B halmaz közötti kölcsönösen egyértelmű leképezésnek nevezzük. Az invertálás fogalmából adódik:

$$(F^{-1})^{-1} = F.$$

Ekvivalencia. Ha két halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű leképezést végezhetünk, akkor a két halmazt ekvivalensnek vagy egyenlő számosságúnak nevezzük. Az A és B halmazok ekvivalenciájának jele:

$$A \sim B.$$

Példák

1. A páros számok halmaza és a páratlan számok halmaza ekvivalens:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & \dots \end{array}$$

2. A természetes számok és a négyzetszámok halmaza ekvivalens:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \dots & n^2 & \dots \end{array}$$

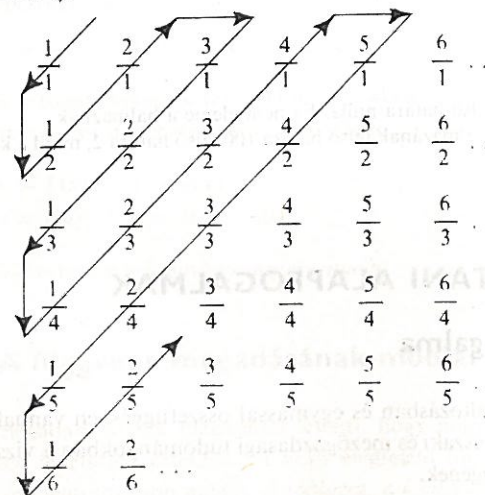
Megszámlálható halmazok. A halmazt megszámlálhatónak nevezzük, ha véges, vagy ekvivalens a természetes számok halmazával.

Két megszámlálható halmaz egyesítése is megszámlálható.

Megszámlálható halmaz például a páros számok halmaza vagy a négyzetszámok halmaza.

A racionális számok halmaza megszámlálható. Ezt a következőképpen láthatjuk be:

A racionális számok közösleges törték (lásd 1.1 fejezet). Írjuk fel a pozitív törtéket úgy, hogy az első sorba az 1, a másodikba a 2, a harmadikba a 3 nevezőjű törték kerüljenek. Rendezzük a törtéket a nyíllal való haladás leolvasási sorrendjében (a számláló és nevező összege 2, 3, 4 ...):



Ezzel a törteket rendeztük. Most hagyjuk el az egyszerűsíthető törteket, a rendezettség megmarad. A halmaz megszámlálható. Ugyanezt tehetjük a negatív törtekkel. A két halmaz egyesítése is megszámlálható. Tehát a racionális számok végtelen halmaza megszámlálható. Bizonyítás nélkül közöljük, hogy a $0 \leq x \leq 1$ intervallumban levő irracionális számok halmaza már nem megszámlálható. Így még inkább igaz, hogy az összes irracionális számok halmaza nem megszámlálható.

Számhalmazok korlátossága

Definíció. A H számhalmaz felülről korlátos, ha van olyan K szám, hogy minden $a \in H$ számra, $a \leq K$.

A K számot a H halmaz felső korlátjának nevezik. (Nyilvánvaló, hogy ha egy halmaznak van egy felső korlátja, akkor végtelen sok felső korlátja van, mert a definíció értelmében minden K -nél nagyobb szám is felső korlát.)

Definíció. A H számhalmaz alulról korlátos, ha van olyan k szám, hogy minden $a \in H$ számra, $a \geq k$.

A k számot a számhalmaz alsó korlátjának nevezik. (A definícióból következően minden k -nél kisebb szám is alsó korlát.)

Definíció. A számhalmaz korlátos, ha alulról is, felülről is korlátos.

Tétel. Minden felülről korlátos számhalmaz felső korlátai között van egy legkisebb. A legkisebb felső korlátot a számhalmaz felső határának nevezik.

Tétel. Minden alulról korlátos számhalmaz alsó korlátai között van egy legnagyobb.

A legnagyobb alsó korlátot a számhalmaz alsó határának nevezik.

A tételek bizonyítását nem közöljük.

Példák

1. A negatív számok halmazának felső határa nulla. Ez nem eleme a halmaznak.
2. A 2 és 100 közötti páros számok halmazának felső határa 100, alsó határa 2, mind a kettő a halmaz eleme.

5.2 FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

5.2.1 A függvény fogalma

A természet jelenségei állandó változásban és egymással összefüggésben vannak.

A természettudományokban, a műszaki és mezőgazdasági tudományokban a vizsgált és a le-mért mennyiségek egymástól függenek.

Az m tömegű test mozgási energiája a sebességtől függ:

$$W_k = \frac{mv^2}{2},$$

helyzeti energiája a magasság függvénye:

$$w_p = mgh.$$

Ha a fajlagos talajellenállás és a szántás keresztmetszete állandó, a vonóerőigény a szántási sebességtől függ. Például:

ha a szántási sebesség 0,5 m/s, a vonóerőigény 800 kp,
ha a szántási sebesség 1, — m/s, a vonóerőigény 900 kp,
ha a szántási sebesség 1,75 m/s, a vonóerőigény 1100 kp.

A vezetõben az áram által keltett hőmennyiség:

$$Q = 0,24I^2Rt.$$

[I az áram erőssége (intenzitása), R a vezető ellenállása, t az időtartam, Q a keletkezett hőmennyiség.] Azok a változó mennyiségek, amelyek csak egyetlen másik változótól függenek, egyváltozós függvények, azok a változó mennyiségek pedig, amelyek több változótól függenek, többváltozós függvények.

Definíció. Egy változó mennyiség függvényének nevezünk egy másik változót akkor, ha az első mennyiség minden szóba jöhető értékének megfelel a másik mennyiség egy meghatározott értéke.

Azt a mennyiséget, amelynek megváltozása egy másik mennyiség megváltozását eredményezi, független változónak, a másik által már meghatározott mennyiséget függő változónak vagy függvénynek nevezzük.

A függvények jelölése. A független változót x -szel, a függvényt y -nal szoktuk jelölni. A függvénykapcsolat jele:

$$y = f(x) \quad (\text{olv.: } y \text{ egyenlő } ef \ x).$$

Az f betű csak a függvénykapcsolatot jelöli, a funkció szó (függvény) rövidítése.

A függvénykapcsolatot más betűkkel is jelölhetjük.

$$y = F(x); \quad y = g(x); \quad y = \varphi(x); \quad y = \gamma(x);$$

$$y = f(u); \quad z = f(u) \quad \text{stb.}$$

Az $y = f(x)$ jelölésben x a függvény argumentuma.

5.2.2 A függvény megadásának módjai

A függvény megadása annak megadását jelenti, hogy hogyan találhatjuk meg a független változó minden lehetséges értékéhez a neki megfelelő függvényértéket. A függvény megadásának három legfontosabb módja: a táblázat, a képlet és a grafikon.

- a) A függvényt táblázattal adjuk meg, ha a független változó sok értékéhez megadjuk a függő változó megfelelő értékét. Ilyen táblázat a már jól ismert logaritmus- és szögfüggvénytábla.
- b) A képlettel való vagy analitikus megadás megmutatja, milyen matematikai műveletekkel kaphatjuk meg x -ből és konstansokból y -t.
- Ilyen képlet például:

$$y = \frac{x+3}{x^2-5},$$

$$y = \sqrt{x^3+3},$$

$$y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right).$$

A függvénykapcsolat megadásához néha nem elég egy képlet.

Így megadott függvény például:

$$\begin{cases} y = x+1, & \text{ha } -\infty < x < 0, \\ y = 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 2, \\ y = -2x+5, & \text{ha } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

c) **Függvény megadása grafikonnal.** Grafikus megadáskor a függvényt görbéjével adjuk meg. Ilyen például, ha mérési eredmények adatai alapján ábrázolt pontokat folytonos vonallal kötünk össze (5.18. ábra).

5.2.3 A függvények ábrázolása

A függvényeket legtöbbször a *Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben* ábrázoljuk. Azon pontok halmaza, amelyek abszcisszája a független változó szóba jöhető értékei, ordinátái a megfelelő függvényértékek, alkotják a függvény görbéjét vagy képét. Tehát a $(Px; f(x))$ pontok halmaza az $y = f(x)$ függvény görbéje.

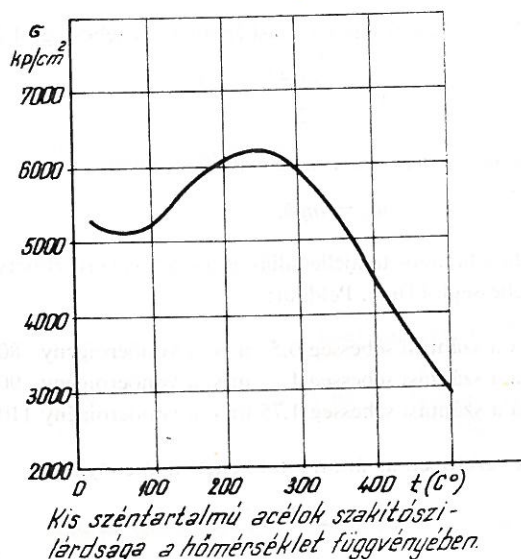
Helyettesítési érték. Ha a függvénykapcsolatot kifejező egyenletbe a független változó egy adott értékét helyettesítjük be, a kapott függvényérték a *helyettesítési érték*. Az $y = f(x)$ függvény helyettesítési értékét az $x = a$ helyen így jelöljük:

$$y = f(a).$$

Példák

$$y = \sqrt{x+3}, \quad \text{ha } x = 1, \quad y(1) = 2,$$

$$y = \sin x, \quad \text{ha } x = \frac{\pi}{6}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$



5.18 ábra

5.2.4 Értelmezési tartomány

Azon x értékek halmaza, amelyekhez az $y = f(x)$ függvény valamilyen y értéket rendel, a függvény *értelmezési tartománya*.

Példák

1. $y = \sqrt{x}.$

A valós számok körében negatív számból nem lehet négyzetgyököt vonni. Az értelmezési tartomány a $0 \leq x < +\infty$ vagy a $[0; \infty)$ intervallum.

2. $y = \frac{1}{x}.$

Nullával nem lehet osztani. Az értelmezési tartomány:

$$-\infty < x < 0 \cup 0 < x < +\infty, \quad \text{azaz } (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

3. $y = \frac{x+3}{x-2}.$

A függvénynek az $x = 2$ helyen nincs értelme. Az értelmezési tartomány:

$$-\infty < x < 2 \cup 2 < x < +\infty.$$

4. $y = \sqrt{9-x^2}.$

A gyöknek csak akkor van értelme, ha $|x| \leq 3$. Az értelmezési tartomány:

$$-3 \leq x \leq 3 \quad (5.19 \text{ ábra}).$$



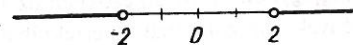
5.19 ábra

5. $y = \sqrt{x^2-4}.$

A gyöknek csak akkor van értelme, ha $|x| \geq 2$.

Az értelmezési tartomány:

$$-\infty < x \leq -2 \cup 2 \leq x < +\infty \quad (5.20 \text{ ábra}).$$



5.20 ábra

6. $y = \frac{1}{\sqrt{x-4}}.$

Negatív számnak nincs valós gyöke, nullával nem lehet osztani. Az értelmezési tartomány nyílt intervallum:

$$4 < x < +\infty.$$

7. $y = \log_2 x.$

Csak pozitív számnak van logaritmus. Az értelmezési tartomány:

$$0 < x < +\infty.$$

8. A gömb térfogata:

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

A képlet szerint a függvény r minden valós értékére értelmezve van. A gömb sugara azonban csak pozitív lehet, így a függvény értelmezési tartománya:

$$0 < r < +\infty.$$

5.2.5 Értékkészlet

Azon y értékek halmaza, amelyeket a függvény az értelmezési tartományban felvesz, a függvény értékkészlete.

Példák

Függvény	Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$y = x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
$y = x^2$	$-\infty < x < +\infty$	$0 \leq y < +\infty$
$y = \sqrt{x}$	$0 \leq x < +\infty$	$0 \leq y < +\infty$
$y = -\sqrt{x}$	$0 \leq x < +\infty$	$-\infty < y \leq 0$
$y = x $	$-\infty < x < +\infty$	$0 \leq y < +\infty$
$y = \log_2 x$	$0 < x < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$

Nézzük a következő függvényt:

$$y = \operatorname{sgn} x \quad (\text{olv. szignum } x).$$

$y = \operatorname{sgn} x$ függvény meghatározása a következő:

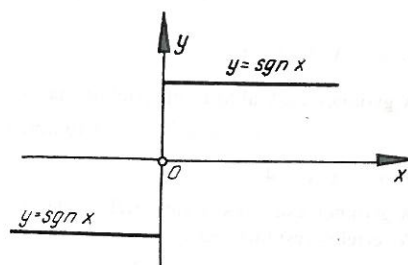
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \quad (5.21 \text{ ábra})$$

Értelmezési tartomány az egész számegyenes:

$$-\infty < x < +\infty,$$

az értékkészlet csak három számból áll

$$y = \{-1; 0; 1\}.$$



5.21 ábra

Megjegyzés. A következőkben az $y = f(x)$ függvények ábrázolásánál az értéktáblázatok segítségével kapott x ; $f(x)$ értékpároknak megfelelő $P(x; f(x))$ pontokat folytonos vonallal kötjük össze. Hogy ez a görbe mennyire közelíti meg a függvény tényleges képét, arra a függvények diszkussziójánál (lásd 7.2.3 fejezet) térünk rá.

5.2.6 A függvény definíciója halmazokkal

A függvény definícióját általánosabban is megadhatjuk.

A függvény olyan utasítás, amellyel egy A halmaz bizonyos A_1 részhalmazának minden eleméhez egy B halmaz meghatározott elemét, a B_1 részhalmaz elemeit rendeljük hozzá. Az $A_1 \subset A$ részhalmaz a függvény értelmezési tartománya.

A $B_1 \subset B$ részhalmaz a függvény értékkészlete.

A függvénykapcsolat utasítás, amellyel az A_1 halmaz elemeit a B_1 halmazra (illetve B halmazra) képezzük le.

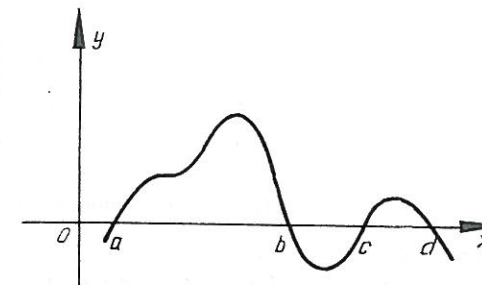
Megjegyzés. A továbbiakban olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete a valós számok halmazának részhalmaza, illetve a valós számok halmaza.

A függvények zérushelyei, jeltartási intervallumai.

A függvény zérushelyei azok az x valós számok, amelyekre $f(x)=0$. A függvény görbéjének a zérushelyeken az x tengellyel közös pontja van.

A függvény jeltartási intervallumai az x tengely azon szakaszai, amelyekben a függvény csak pozitív vagy csak negatív értékeket vesz fel.

Az 5.22 ábrán látható függvény zérushelyei az $x = a$, $x = b$, $x = c$, $x = d$ pontok. A köztük levő intervallumok a függvény jeltartási intervallumai.



5.22 ábra

5.2.7 Páros és páratlan függvények. Periodicitás

Az $y = ax^2 + c$ függvény a $(-x)$ helyen ugyanazt az értéket veszi fel, mint az x helyen:

$$y_{(+x)} = ax^2 + c,$$

$$y_{(-x)} = a(-x)^2 + c = ax^2 + c.$$

Definíció. Páros függvény az olyan függvény, amely negatív x értékekhez ugyanazokat az értékeket rendel, mint azonos abszolút értékű pozitív értékekhez.

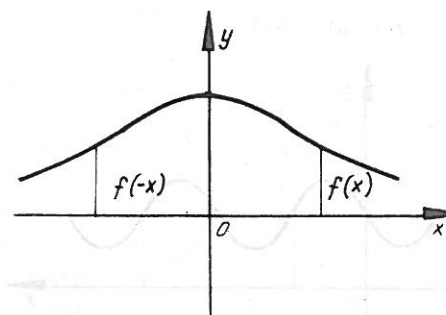
Képletben:

$$f(-x) = f(+x).$$

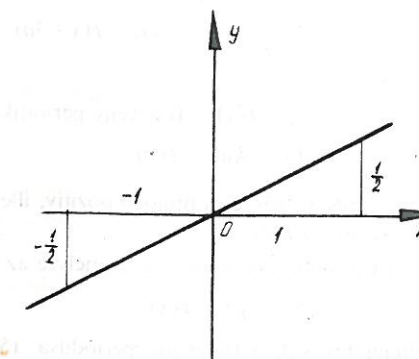
A páros függvény görbéje az y tengelyre nézve szimmetrikus (5.23 ábra).

Páros függvények például az

$$y = 2, \quad y = 2x^2 - 1, \quad y = \frac{1}{x^2}, \quad y = |x| \quad \text{függvények.}$$



5.23 ábra



5.24 ábra

Tekintsük az $y = \frac{1}{2}x$ függvényt (5.24 ábra):

$$y_{(+x)} = \frac{1}{2}x,$$

$$y_{(-x)} = -\frac{1}{2}x.$$

A függvénygörbe az origóra nézve szimmetrikus, a függvény páratlan függvény.

Definíció. Páratlan az olyan függvény, amely negatív x értékekhez ugyanolyan abszolút értékű, de ellenkező előjelű értékeket rendel, mint az azonos abszolút értékű pozitív x értékekhez.

Képletben:

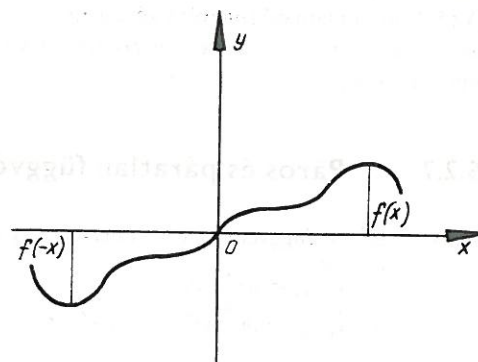
$$f(x) \text{ páratlan, ha } f(-x) = -f(x).$$

A páratlan függvény görbéje az origóra nézve szimmetrikus (5.25 ábra).

Páratlan függvények például a következők:

$$y = ax, \quad y = \frac{|x|}{x},$$

$$y = x^3, \quad y = \frac{1}{x}.$$



5.25 ábra

Periodicitás. A függvény periodikus, ha van olyan $a \neq 0$ szám, hogy az értelmezési tartomány minden x értékére:

$$f(x+a) = f(x).$$

Ez azt jelenti, hogy a függvény az $x+a$ helyen ugyanazt az értéket veszi fel, mint az a helyen.

Ebből következik, hogy

$$f(x+2a) = f(x); \quad f(x+3a) = f(x); \quad f(x-a) = f(x); \dots$$

Általában

az $y = f(x)$ függvény periodikus,

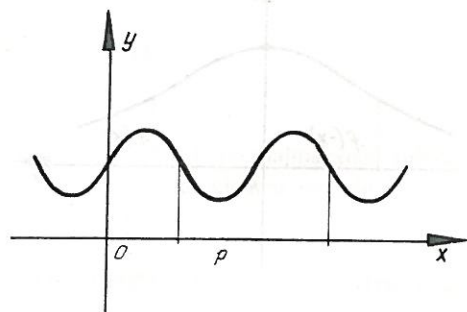
ha $f(x+ka) = f(x)$

tetszőleges x helyre és minden pozitív, illetve negatív egész k -ra.

Az a legkisebb pozitív p szám, amelyre az

$$f(x+p) = f(x)$$

feltétel teljesül, a függvény periódusa (5.26 ábra).



5.26 ábra

5.2.8 A függvények növekedése, fogyása, maximuma, minimuma

Definíció. Az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban *monoton nő*, ha az $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ feltételt kielégítő, minden $x_1; x_2$ értékpárra fennáll, hogy

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

Az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban *monoton fogy*, ha az $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ feltételt kielégítő minden $x_1; x_2$ értékpárra fennáll, hogy

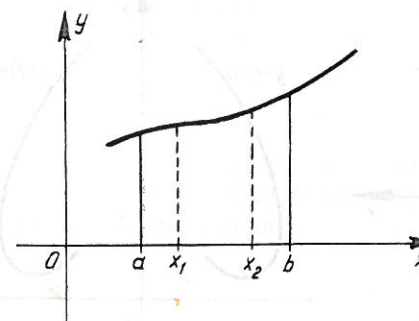
$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Definíció. Az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban *szigorúan monoton nő*, ha az $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ feltételt kielégítő minden $x_1; x_2$ értékpárra fennáll, hogy

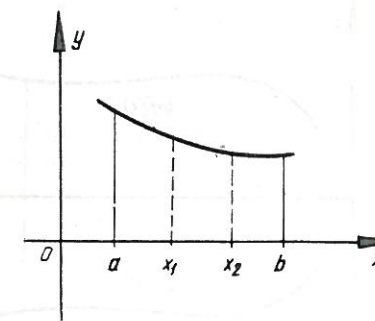
$$f(x_1) < f(x_2) \quad (5.27 \text{ ábra}).$$

Az $y = f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumban *szigorúan monoton fogy*, ha az $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ feltételt kielégítő minden $x_1; x_2$ értékpárra fennáll, hogy

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (5.28 \text{ ábra}).$$



5.27 ábra



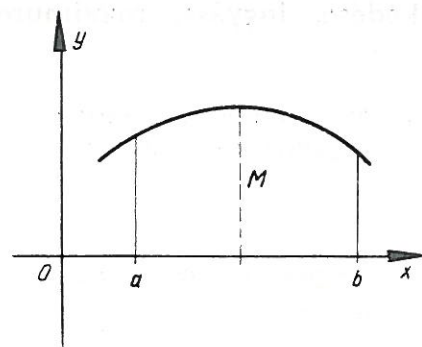
5.28 ábra

Definíció. Az $y = f(x)$ függvénynek az $[a; b]$ intervallumban *maximuma* van, ha az intervallumban felvett függvényértékek között van olyan M érték, amelynél nagyobb értéket a függvény az intervallumban nem vesz fel (5.29 ábra).

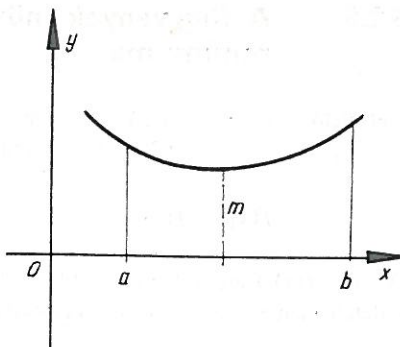
Az $y = f(x)$ függvénynek az $[a; b]$ intervallumban *minimuma* van, ha az intervallumban felvett függvényértékek között van olyan m érték, amelynél kisebb értéket a függvény az intervallumban nem vesz fel (5.30 ábra).

A maximumot vagy minimumot a függvény az intervallum valamelyik végpontjában is felveheti.

Megjegyezzük, hogy nem biztos, hogy valamely $[a; b]$ intervallumban értelmezett függvénynek van maximuma vagy minimuma az $[a; b]$ -ben.



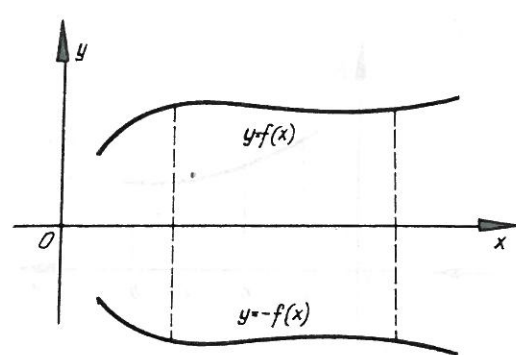
5.29 ábra



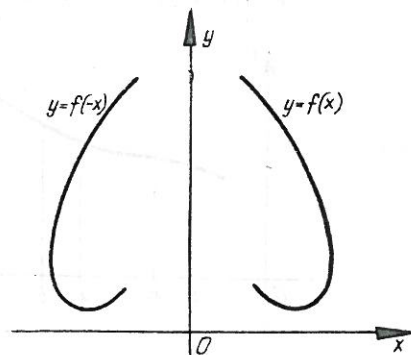
5.30 ábra

5.2.9 A függvény transzformációja. Függvények grafikus összetétele (görbék szuperpozíciója)

a) A görbe tükrözése a koordinátatengelyekre. Az $y = -f(x)$ függvény görbét megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény görbéjének minden ordinátáját (-1) -gyel szorozzuk. Ezért az $y = -f(x)$ függvény görbét úgy ábrázolhatjuk, hogy az $y = f(x)$ függvény görbét az x tengelyre tükrözzük (5.31 ábra).



5.31 ábra

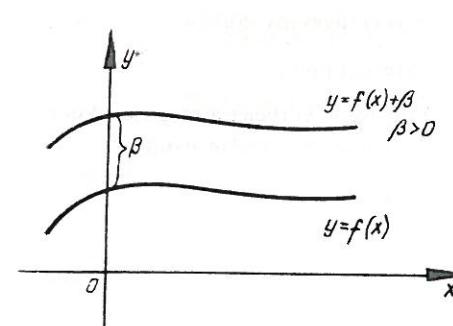


5.32 ábra

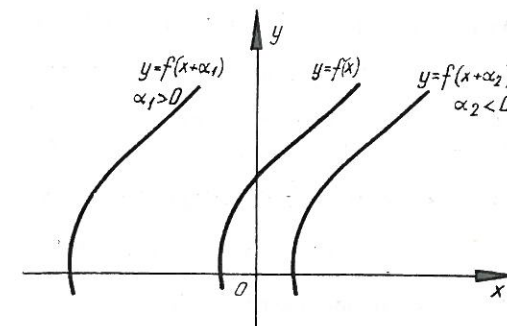
Az $y = f(-x)$ függvény ugyanazokat az értékeket veszi fel az x helyeken, mint az $y = f(x)$ függvény az ugyanolyan abszolút értékű $(-x)$ helyeken. Ezért az $y = f(-x)$ függvény görbét megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény görbét az y tengelyre tükrözzük (5.32 ábra).

b) Görbék eltolása. Hasonlítsuk össze az $y = f(x) + \beta$ és $y = f(x)$ függvényeket! Azonos x értéknél az első függvény ordinátái β értékkel nagyobbak, mint a második. Ezért az $y = f(x) + \beta$ függvény görbét megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény görbét önmagával párhuzamosan az y tengely irányában eltoljuk β egységgel. Ha $\beta > 0$, a görbét felfelé, ha $\beta < 0$, lefelé toljuk (5.33 ábra).

Hasonlítsuk össze az $y = f(x + \alpha)$ függvényt az $y = f(x)$ -szel!



5.33 ábra



5.34 ábra

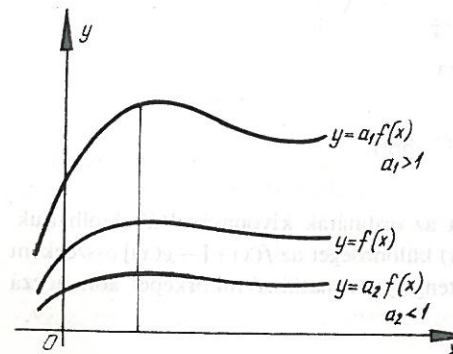
$y = f(x + \alpha)$ az $(x - \alpha)$ helyeken veszi fel ugyanazokat a függvényértékeket, mint $y = f(x)$ az x helyeken. Ezért képét megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény görbét az x tengely irányában α egységgel eltoljuk. Ha $\alpha > 0$, a görbét balra, ha $\alpha < 0$, jobbra toljuk (5.34 ábra). Az $y = f(x + \alpha) + \beta$ függvény görbét megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény görbét az y tengely pozitív irányában β , az x tengely pozitív irányában $(-\alpha)$ egységgel toljuk el.

c) Görbék összenyomása, illetve széthúzása. Hasonlítsuk össze az $y = af(x)$ és $y = f(x)$ függvényeket! Jelentsen a pozitív számot.

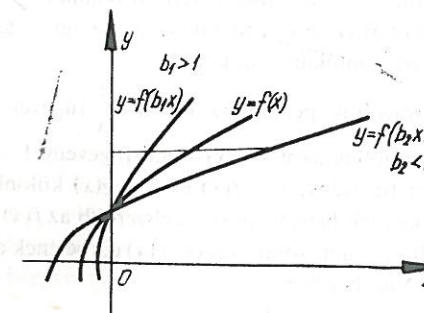
Az $y = af(x)$ függvény görbét az $y = f(x)$ görbéjéből megkapjuk, ha annak minden ordinátáját a -szorosra nyújtjuk, azaz az $y = f(x)$ függvény görbét az y tengely irányában a -szorosra nyújtjuk. ($a < 1$ a görbe összenyomását jelenti.) (5.35 ábra.)

Hasonlítsuk össze az $y = f(bx)$ és $y = f(x)$ függvényeket. Jelentsen b pozitív számot.

Az $y = f(bx)$ függvény $\frac{x}{b}$ helyeken veszi fel ugyanazokat a függvényértékeket, mint az $y = f(x)$ az x helyeken. Ez azt jelenti, hogy $y = f(bx)$ függvény görbét megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény görbéje minden abszcisszáját változatlan ordináták mellett b -ed részére nyomjuk össze. Így az $y = f(bx)$ függvény görbét megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény görbét az x tengely irányában $b > 1$ esetén b -ed részére nyomjuk össze, $0 < b < 1$ esetén $\frac{1}{b}$ -szeresre nyújtjuk (5.36 ábra).



5.35 ábra



5.36 ábra

Az $y = af(bx)$ függvény görbét megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény görbét az y tengely irányában a -szorosra, az x tengely irányában $\frac{1}{b}$ -szeresre nyújtjuk.

Ha az a és b együtthatók negatív számok, az $y = f(x)$ függvény görbét a megfelelő koordinátatengelyre tükrözzük, és az így kapott görbét $|a|$, illetve $|b|$ -szeresre nyújtjuk.

d) Az összenyomás és eltolás együttes alkalmazása. Ábrázoljuk az

$$y = af(bx + \alpha) + \beta \quad \text{függvényt!}$$

Az argumentumból kiemeljük b -t:

$$y = af\left[b\left(x + \frac{\alpha}{b}\right)\right] + \beta.$$

A függvény képét megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény képét az y tengely irányában a -szorosra, az x tengely irányában $\frac{1}{b}$ -szeresre nyújtjuk, majd az így kapott görbét az x tengely irányában $\left(-\frac{\alpha}{b}\right)$ -vel, az y tengely irányában β -val eltoljuk.

A transzformációkat más sorrendben is elvégezhetjük:

$$y = af(bx + \alpha) + \beta.$$

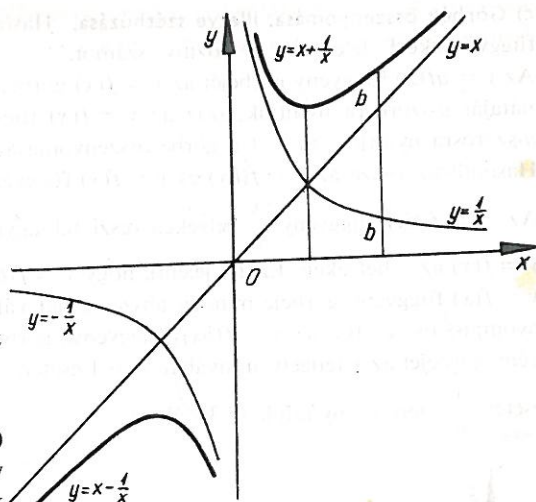
Az argumentumot változatlanul hagyjuk. Az $y = f(x)$ függvény görbét az x tengely irányában α egységgel eltoljuk ($\alpha > 0$ esetén balra, $\alpha < 0$ esetén jobbra). Az így kapott görbét az y tengely irányában a -szorosra, az x tengely irányában $\frac{1}{b}$ -szeresre nyújtjuk. Végül a görbét az y tengely irányában β egységgel eltoljuk.

e) Ábrázoljuk az $y = f(x) + g(x)$ függvényt! Két függvény összegét úgy ábrázoljuk, hogy több helyen összeadjuk a két függvény ordinátáit, és az így nyert pontokat összekötjük.

Ábrázoljuk például az $y = x + \frac{1}{x}$ függvényt (5.37 ábra)!

Ábrázoljuk az $y = f(x) - g(x)$ függvényt!

Két függvény, $y = f(x)$ és $y = g(x)$ különbségét az ordináták kivonásával ábrázolhatjuk. A kivonás helyett sokszor célszerűbb az $f(x) - g(x)$ különbséget az $f(x) + [-g(x)]$ összegként felfogva ábrázolni, vagyis $g(x)$ görbéjének az x tengelyre vonatkozó tükröképét adni hozzá $f(x)$ görbéjéhez.



5.37 ábra

5.3 ELEMÍ FÜGGVÉNYEK

5.3.1 Racionális egészfüggvények

Definíció. Racionális egészfüggvény az

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

alakú függvény, ahol n természetes szám, és az $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ együtthatók konstansok. A racionális egészfüggvényt *polinomnak* is nevezzük, és gyakran $P_n(x)$ -szel jelöljük. A racionális egészfüggvény fokszámát x legmagasabb hatványának kitevője adja meg. A felírt függvény tehát n -ed fokú racionális egészfüggvény, vagy n -ed fokú polinom, ha $a_n \neq 0$. A racionális egészfüggvények összege és szorzata szintén racionális egészfüggvény. Ha a racionális egészfüggvény két polinom összege

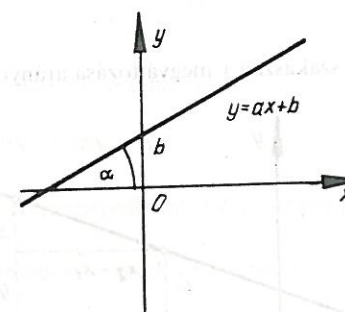
$$y = P_n(x) + P_m(x), \quad \text{fokszáma a magasabb fokú polinom fokszáma, ha } n \neq m \text{ és } n, \text{ ha } n = m.$$

Ha a racionális egészfüggvény két polinom szorzata

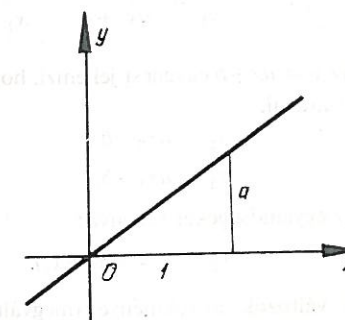
$$y = P_n(x) \cdot P_m(x), \quad \text{fokszáma } n+m.$$

5.3.1.1 A lineáris függvény és az egyenes arány

Definíció. Az $y = ax + b$ ($a \neq 0$) alakú függvény elsőfokú vagy lineáris függvény (5.38 ábra), ahol $a = \tan \alpha$.



5.38 ábra

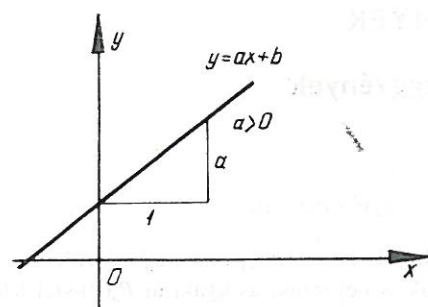


5.39 ábra

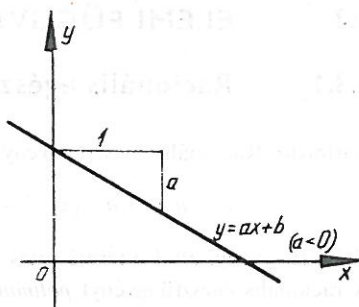
A függvény lineáris, mert képe egyenes.

Az $y = ax + b$ függvény speciális esete az $y = ax$ ($b=0$), az origón átmenő egyenes (5.39 ábra). Az $y = ax + b$ függvény, ha $a > 0$, monoton nő, ha $a < 0$, monoton fogy (5.40 és 5.41 ábrák). Az $y = ax$ függvény az egyenes arányt írja le. x és y akkor vannak egyenes arányban, ha az egyik változó megváltozásakor a másik változó ugyanolyan arányban változik. Azaz, ha $x_1; y_1$ és $x_2; y_2$ egymáshoz rendelt függvényértékek, akkor

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}.$$



5.40 ábra



5.41 ábra

Az $y = ax$ egyenletből:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{ax_2}{ax_1} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Tehát az $y = ax$ képlet az egyenes arányosság képlete.

5.3.1.1.1 A növekmény

Az $y = ax + b$ egyenletben a változók nem egyenesen arányosak.

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{ax_2 + b}{ax_1 + b} \neq \frac{x_2}{x_1}.$$

Az $y = ax + b$ egyenest jellemzi, hogy bármely szakaszán y megváltozása arányos x megváltozásával.

$$\begin{aligned} y_2 &= ax_2 + b, \\ y_1 &= ax_1 + b. \end{aligned}$$

Az egyenlőségeket kivonva:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

A változók növekménye (megváltozása) egyenesen arányos (5.42 ábra).

Jelöljük a változók növekményét a Δx (olv. delta x), illetve Δy (olv. delta y) szimbólummal!

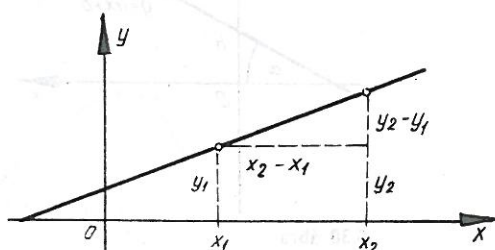
$$\Delta y = a \Delta x$$

(Δx és Δy nem szorzatot jelent, hanem értékek megváltozását szimbolizálják.)

Tehát a lineáris egészfüggvény koordinátáinak növekményei egyenesen arányosak.

A tétel fordítottja is bebizonyítható. Ha a változók növekményei egyenesen arányosak, a függvény lineáris függvény.

Lineáris függvénnyel írható le a természetben minden egyenletes folyamat.



5.42 ábra

5.3.1.1.2 A lineáris interpoláció

A lineáris egészfüggvény képe egyenes. A lineáris egészfüggvényt két pontja meghatározza.

A lineáris interpoláció a következő eljárás:

Az $y = f(x)$ függvényt ábrázoló görbe két adott pontjából megközelítőleg kiszámíthatjuk a görbe egy közbülső abszcisszához tartozó pontjának ordinátáját úgy, hogy helyette a két adott pontot összekötő húr megfelelő ordinátáját vesszük.

Legyen a görbe az 5.43 ábrán látható $f(x)$ függvény görbéje. Húzzuk meg a görbe adott $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ pontjait összekötő húrt.

Ha a görbe kevésbé tér el az egyenestől

$$PN \approx MN.$$

(Ahol PN a görbe, MN az egyenes x -ponthoz

tartozó ordinátája.) Az egyenes növekményeinek egyenes arányossága miatt:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Innen az egyenes M pontjának ordinátája

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

A görbe P pontjainak ordinátája:

$$PN \approx MN = y.$$

Ugyanez az eljárás használható, ha az x pont az $[x_1; x_2]$ intervallumon kívül van (lineáris extrapoláció).

Ha adott y értékhez keressük az x értéket:

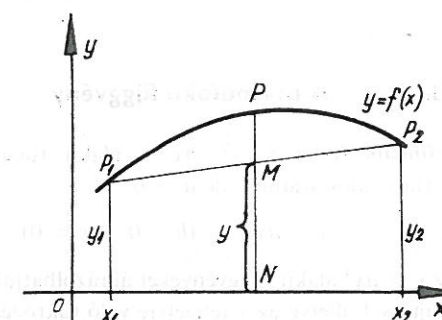
$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} (y - y_1).$$

A lineáris interpoláció természetesen csak akkor használható, ha a görbe kevésbé tér el a húrtól.

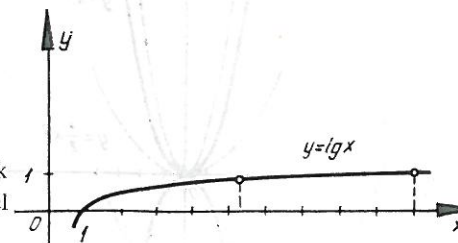
Lineáris interpolációt alkalmazunk sokszor a függvénytáblázatok használatakor.

Lineárisan interpolálunk, ha négyjegyű szám 10-es alapú logaritmusát akarjuk megkeresni, és a táblázat csak 3 jegyű szám logaritmusát tünteti fel.

Az $y = \lg x$ függvény görbéje kevésbé tér el az egyenestől (5.44 ábra). Mennyi $\lg 5,337$?



5.43 ábra



5.44 ábra

A táblázatban megtalálható:

$$\lg 5,330 = 0,7267 \quad \text{és} \quad \lg 5,340 = 0,7275.$$

$$\lg 5,337 = 0,7267 + \frac{0,7275 - 0,7267}{0,010} \cdot 0,007 \approx 0,7267 + 0,0006 = 0,7273.$$

5.3.1.2 A másodfokú függvény

Definíció. Az $y = ax^2 + bx + c$ alakú függvény másodfokú függvény. a , b , c tetszés szerinti valós számok, de $a \neq 0$.

a) $y = ax^2 \quad (b = 0, \quad c = 0).$

Az $y = ax^2$ alakú függvényeket ábrázolhatjuk értéktáblázattal, vagy az $y = x^2$ függvényből nyújtással, illetve az x tengelyre való tükrözéssel.

Az $y = x^2$ függvény értéktáblázata:

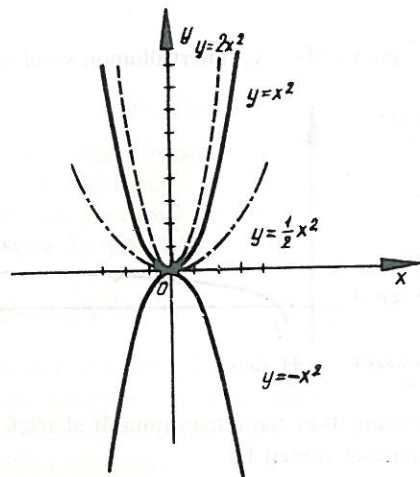
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

Hasonlóan készíthető el az $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -x^2$ függvények értéktáblázata.

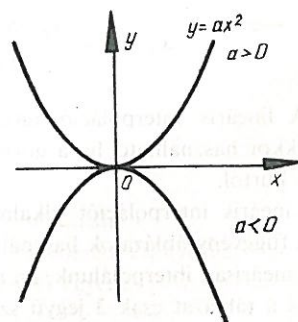
A függvények képét az 5.45 ábra mutatja.

Az $y = ax^2$ egyenlet parabola egyenlete (lásd a 3.2.2. pontot). Az $y = -ax^2$ függvény az $y = ax^2$ függvény tükörképe az x tengelyre (5.46 ábra).

b) $y = ax^2 + c. \quad (b = 0)$



5.45 ábra



5.46 ábra

Az $y = ax^2 + c$ függvény görbét az $y = ax^2$ függvényéből kapjuk, ha azt az y tengely irányában c egységgel eltoljuk. A parabolának a $(0; c)$ pontban csúcsa van (5.47 ábra). Az $y = ax^2$ és $y = ax^2 + c$ alakú függvények páros függvények.

c) $y = ax^2 + bx + c$ alakú függvények.

Vizsgáljuk az

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 \quad \text{függvényt!}$$

Hozzuk a függvényt $y' = \frac{1}{2}x'^2$ alakúra, az

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + \alpha \\ y &= y' + \beta \end{aligned} \right\} \quad \text{transzformációval (lásd a 3.1.1 pontot).}$$

A transzformációs egyenleteket behelyettesítve:

$$y' + \beta = \frac{1}{2}(x' + \alpha)^2 - 2(x' + \alpha) - 1.$$

A műveleteket elvégezve:

$$y' + \beta = \frac{1}{2}x'^2 + x'\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 - 2x' - 2\alpha - 1.$$

Rendezve:

$$y' + \beta = \frac{1}{2}x'^2 + x'(\alpha - 2) + \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1.$$

A függvény akkor

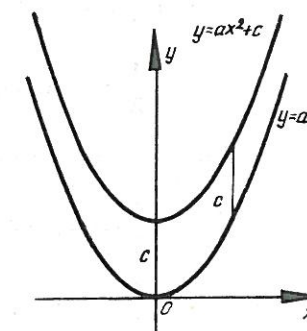
$$y' = \frac{1}{2}x'^2 \quad \text{alakú,}$$

ha az elsőfokú tag együtthatója és a konstans zérus, azaz

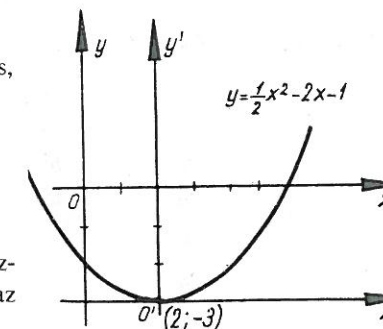
$$\alpha - 2 = 0 \quad \text{és} \quad \beta = \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1.$$

Innen $\alpha = 2, \quad \beta = -3.$

A függvény képét megkapjuk, ha az $O'(2; -3)$ kezdőpontú koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $y' = \frac{1}{2}x'^2$ parabolát (5.48 ábra).



5.47 ábra



5.48 ábra

Ábrázoljuk a függvényt a görbe transzformációjával.

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1.$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 4x) - 1.$$

A zárójelben levő kifejezést teljes négyzetté alakítva:

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) - 1 - 2.$$

$$y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3.$$

A görbét megkapjuk, ha az $y = x^2$ függvény ordinátáit $\frac{1}{2}$ -szeresre zsugorítjuk, majd a görbét 2 egységgel jobbra és 3 egységgel lefelé eltoljuk.

Az $y = ax^2 + bx + c$

egyenletről bebizonyítottuk, hogy parabola egyenlete (lásd 3.2.2 pontot).

Ábrázoljuk az $y = ax^2 + bx + c$ függvényt!

A függvényt az

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + \alpha \\ y &= y' + \beta \end{aligned} \right\} \text{transzformációval } y' = ax'^2$$

alakúra hozzuk.

$$y' + \beta = a(x' + \alpha)^2 + b(x' + \alpha) + c.$$

A műveleteket elvégezve:

$$y' + \beta = ax'^2 + 2\alpha ax' + \alpha^2 a + bx' + b\alpha + c.$$

Rendezve

$$y' + \beta = ax'^2 + x'(2\alpha a + b) + \alpha^2 a + b\alpha + c.$$

A függvény akkor $y' = ax'^2$ alakú, ha

$$2\alpha a + b = 0 \quad \text{és} \quad \beta = \alpha^2 a + b\alpha + c,$$

azaz

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = a \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c.$$

Tehát

$$\alpha = -\frac{b}{2a},$$

$$\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Az $y = ax^2 + bx + c$ függvény képét megkapjuk, ha az $y' = ax'^2$ parabolát az $O' \left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ kezdőpontú koordináta-rendszerben ábrázoljuk. Ellenőrizzük így az

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 \quad \text{parabolára számított értékeket!}$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-2 - 4}{2} = -3.$$

Vizsgáljuk az $y = ax^2 + bx + c$ függvényt a görbe transzformálásával!

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c.$$

Teljes négyzetté való kiegészítéssel:

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a}.$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

A függvény képét megkapjuk, ha az $y = ax^2$ parabolát az x tengely irányában $-\frac{b}{2a}$, az y tengely irányában $\frac{4ac - b^2}{4a}$ egységgel eltoljuk.

Példa

Adott kerületű téglalapok közül melyiknek van a legnagyobb területe? Legyenek az oldalak x és z , a kerület k (5.49 ábra). A feltétel szerint:

$$x + z = \frac{k}{2}, \quad \text{innen } z = \frac{k}{2} - x.$$

A terület:

$$y = xz.$$

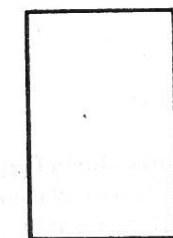
$$y = x \left(\frac{k}{2} - x \right).$$

$$y = -x^2 + \frac{k}{2}x.$$

Mivel a másodfokú tag együttthatója negatív, a függvénynek maximuma van. A szélső érték helye a parabola csúcsa.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{k}{2}}{-2} = \frac{k}{4}. \quad \text{Tehát } x = \frac{k}{4}, \quad z = \frac{k}{4}.$$

Maximális területe a négyzetnek van.



5.49 ábra

A másodfokú függvény zérushelyei. Az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény zérushelyei azok az x értékek, amelyeknél $y = 0$, azaz az

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{egyenlet gyökei.}$$

A másodfokú egyenletek ismert megoldása szerint

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Az $y = ax^2 + bx + c$ függvény zérushelyei tehát a

$$P_1 \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; 0 \right)$$

és

$$P_2 \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; 0 \right)$$

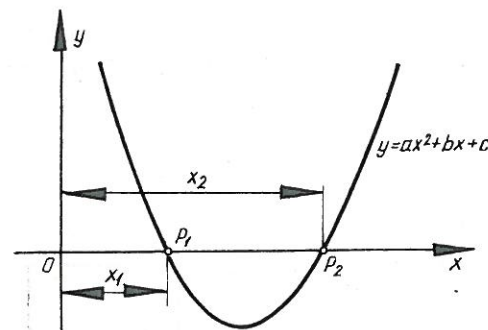
pontok (5.50 ábra).

A zérushelyek létezése a diszkrimináns, $D = b^2 - 4ac$ előjelétől függ.

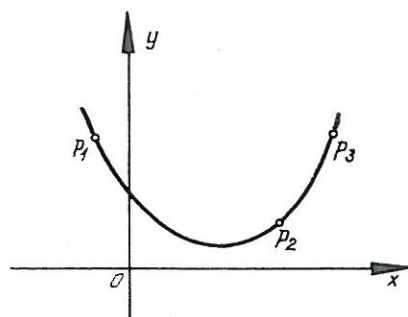
$D > 0$, két zérushely van, a parabola két helyen metszi az x tengelyt.

$D = 0$, egy zérushely van, a parabola érinti az x tengelyt.

$D < 0$, nincs zérushely, a parabola nem metszi az x tengelyt.



5.50 ábra



5.51 ábra

A másodfokú függvény meghatározása adott pontjaiból. Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletben három állandó szerepel. A parabola három pontjából meghatározható.

A $P_1(x_1; y_1)$; $P_2(x_2; y_2)$; $P_3(x_3; y_3)$ pontok koordinátáit az egyenletbe helyettesítve az a , b , c konstansok meghatározhatók (5.51 ábra).

A parabola meghatározásához három független adat szükséges. Mivel az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabolát az $x = konst$ egyenes csak egy pontban metszi, nem adhatunk meg olyan pontokat, amelyekkel x koordinátái megegyeznek.

Előfordulhat, hogy a három pont egy egyenesben fekszik. Tehát három különböző abszcisszájú pont első vagy másodfokú polinomot határoz meg.

Az $y = ax^2 + c$ alakú függvény meghatározásához két pont, az $y = ax^2$ meghatározásához egy adott pont elegendő.

Példa

Írjuk fel azt a másodfokú függvényt, amely átmegy a $P_1(-3; 12)$; $P_2(-1; -2)$; $P_3(2; 7)$ pontokon! Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletbe helyettesítve:

$$12 = 9a - 3b + c.$$

$$-2 = a - b + c,$$

$$7 = 4a + 2b + c.$$

A második, illetve harmadik egyenletet az elsőből kivonva:

$$\begin{cases} 14 = 8a - 2b \\ 5 = 5a - 5b \end{cases}$$

Innen $a = 2$, $b = 1$.

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe $c = -3$. Tehát a függvény:

$$y = 2x^2 + x - 3.$$

5.3.1.3 A harmadfokú függvény

Definíció. Az $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) alakú függvények harmadfokú függvények.

a) $y = ax^3$ ($b = 0$, $c = 0$, $d = 0$).

Az $y = x^3$ függvény egyes pontjait értéktáblázat segítségével ábrázoljuk.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	-8	-3,375	-1	-0,125	0	0,125	1	3,375	8

A függvény az egész számegyenesen értelmezve van, és az egész értelmezési tartományban monoton nő (5.52 ábra).

Mivel $y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$,

az $y = x^3$ függvény páratlan, görbéje az origóra szimmetrikus. A görbét az x tengely az origóban érinti és metszi, a $y = -x^3$ függvénynek az origóban *inflexiós pontja* van.

Inflexiós pont az a pont, ahol az érintő átmetszi a görbét. Az inflexiós pont szabatos tárgyalására a 7.2.3.3 pontban térünk rá.

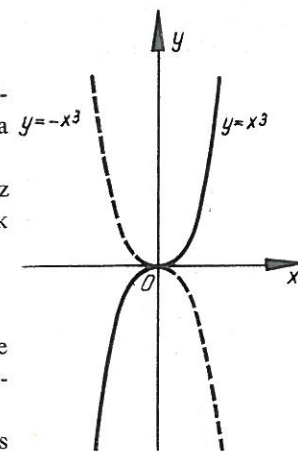
$$y = -x^3.$$

A függvény képe az $y = x^3$ függvény görbéjének tükörképe az x tengelyre. Menete és tulajdonságai az 5.52 ábrából leolvashatók.

Hasonlóan értéktáblázattal ábrázolhatjuk az $y = 2x^3$ és

$y = \frac{1}{2}x^3$ függvényeket (5.53 ábra).

Az $y = ax^3$ függvény görbét megkapjuk, ha az $y = x^3$ függvény görbéjének ordinátáit a -szorosra nyújtjuk ($a < 1$ esetén zsugorítjuk).



5.52 ábra

Ha $a > 0$, a függvény monoton nő, ha $a < 0$, monoton csökken.

$$y = ax^3 \text{ páratlan, mert}$$

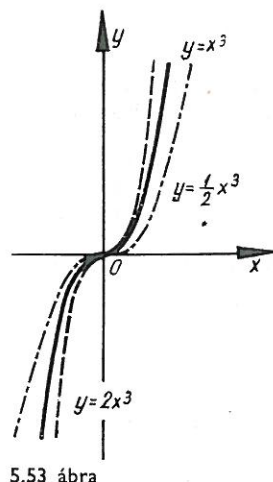
$$y(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -y(x).$$

b) $y = ax^3 + cx$ alakú függvények ($b = 0$, $d = 0$, hiányzik a másodfokú és az állandó tag). A függvény páratlan:

$$y(-x) = a(-x)^3 + c(-x) = -ax^3 - cx = -y(x).$$

1. Ábrázoljuk az $y = x^3 + x$ és az $y = -x^3 - x$ függvényeket! Az $y = x^3 + x$ függvényt értéktáblázat segítségével ábrázoljuk.

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
y	-4,9	-2	-0,6	0	0,6	2	4,9



5.53 ábra

Az $y = -x^3 - x$ függvény görbéje az $y = x^3 + x$ függvény görbéjének tükörképe az x és y tengelyre (5.54 ábra).

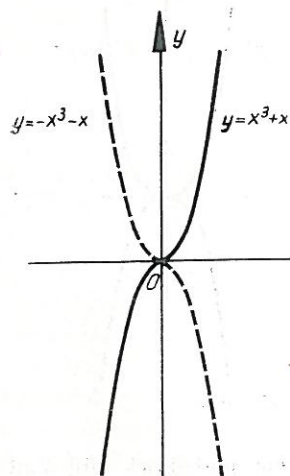
2. Ábrázoljuk az $y = x^3 - x$ és $y = -x^3 + x$ függvényeket!

$y = x^3 - x$	x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
	y	-6	-1,9	0	0,4	0	-0,4	0	1,9	6

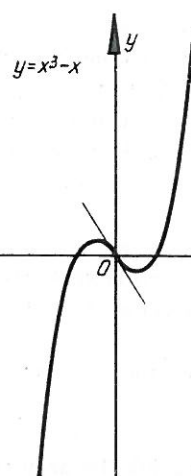
$y = -x^3 + x$	x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
	y	6	1,9	0	-0,4	0	0,4	0	-1,9	-6

A függvények képe az 5.55 és 5.56 ábrákon szemlélhető.

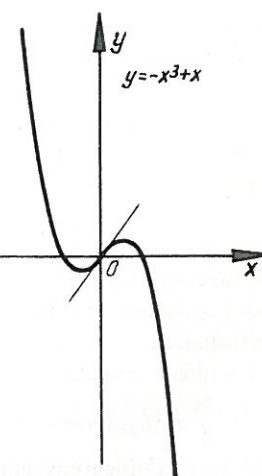
Az ábrákból látható, hogy az $y = x^3 - x$ függvénynek a $[-1; 0]$ intervallumban maximuma, a $[0; +1]$ -ben minimuma, az $x = 0$ helyen inflexiós pontja van.



5.54 ábra



5.55 ábra

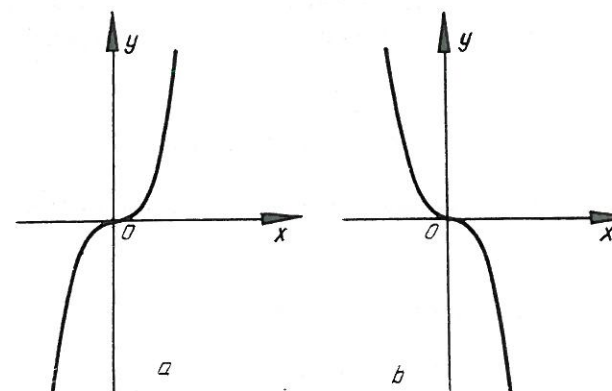


5.56 ábra

Az $y = -x^3 + x$ függvénynek a $[-1; 0]$ -ban minimuma, a $[0; 1]$ -ben maximuma, az $x = 0$ pontban inflexiós pontja van.

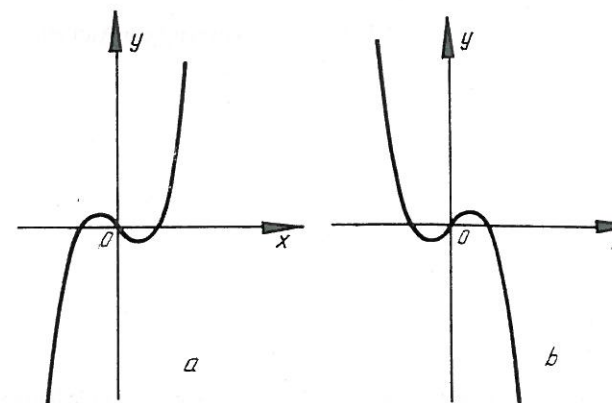
Általában az $y = ax^3 + cx$ alakú függvény az 1. és 2. pontokban ábrázolt függvények valamelyikéhez hasonló.

Ha a és c előjele egyező, nincsen szélsőértéke (5.57/a és b ábrák).



5.57 ábra

Ha a és c előjele különböző, két szélsőértéke van (5.58/a és b ábrák).



5.58 ábra

Az $y = ax^3 + cx$ függvényt az $y = ax^3$ és az $y = cx$ egyenletű görbék szuperpozíciójával is ábrázolhatjuk.

Az $y = ax^3 + cx$ függvény páratlan függvény.

c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

Általában kimutatható, hogy minden harmadfokú függvény az 5.57 és 5.58 ábrán szereplő négy típusba tartozik.

Ugyanis, ha az

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{függvényénél az}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + \alpha \\ y &= y' + \beta \end{aligned} \right\}$$

koordinátatranszformációt alkalmazzuk, elérhetjük, hogy az $x'; y'$ koordináta-rendszerben kapott egyenletben a másodfokú tag együttthatója és az állandó tag 0 legyen, és a függvény az

$$y' = ax'^3 + c_1 x' \quad \text{alakot vegye fel.}$$

Az (α, β) -ra kapott értékek lesznek az inflexió pont koordinátái.

Nézzük például az $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ függvényt! A függvényt az $y' = ax'^3 + c_1 x'$ alakra akarjuk hozni.

Alkalmazzuk az

$$\left. \begin{aligned} y &= y' + \beta \\ x &= x' + \alpha \end{aligned} \right\} \quad \text{koordinátatranszformációt.}$$

$$y' + \beta = (x' + \alpha)^3 - 3(x' + \alpha)^2 - 9(x' + \alpha) + 4.$$

$$y' + \beta = x'^3 + 3x'^2\alpha + 3\alpha^2 x' + \alpha^3 - 3x'^2 - 6x'\alpha - 3\alpha^2 - 9x' - 9\alpha + 4.$$

x' hatványai szerint rendezve:

$$y' = x'^3 + x'^2(3\alpha - 3) + x'(3\alpha^2 - 6\alpha - 9) + \alpha^3 - 3\alpha^2 - 9\alpha + 4 - \beta.$$

Ebből akkor kaphatjuk az $y' = ax'^3 + c_1 x'$ alakot, ha a másodfokú tag együttthatója és a konstans tag 0, vagyis

$$3\alpha - 3 = 0,$$

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 - 9\alpha + 4 - \beta = 0.$$

Innen pedig $\alpha = 1$,

$$\beta = \alpha^3 - 3\alpha^2 - 9\alpha + 4 = -7.$$

α értékét felhasználva:

$$x' \text{ együttthatója: } c_1 = 3\alpha^2 - 6\alpha - 9 = -12.$$

$$\text{Tehát } \alpha = 1, \beta = -7, c_1 = -12,$$

$$\text{azaz } y' = x'^3 - 12x'.$$

Tehát az $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ függvényt úgy ábrázolhatjuk, hogy a koordináta-rendszer kezdő-pontját az $(1; -7)$ pontba toljuk, és az új koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $y' = x'^3 - 12x'$ függvényt.

Magasabb fokú racionális egészfüggvények. A negyed- és negyedfokúnál magasabb fokú racionális egészfüggvények tárgyalása az eddigi módszerekkel hosszadalmas. Egyes függvények vizsgálatára az analízis módszereinek segítségével térünk vissza.

5.3.1.4 A Newton-féle interpoláció

$$\text{Az } y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

n -ed fokú racionális egészfüggvények helyettesítési értékei adott $x = x_0$ helyeken összeadás és szorzás segítségével kiszámíthatók. Az értékek különösen gyorsan kaphatók meg már a legegyszerűbb számológépek segítségével is. Ezért célszerűnek látszik egy függvényt, amelynek bizonyos helyeken ismerjük az értékét, racionális egészfüggvénnyel megközelíteni. Az n -ed fokú függvényben $n+1$ konstans szerepel, ezért meghatározásához $n+1$ adat, azaz a koordináta-rendszer $n+1$ pontja szükséges.

A legegyszerűbb megközelítés a lineáris interpoláció, amikor a görbe egy szakaszát egyenessel helyettesítjük, a görbe két pontjának ismeretében (lásd az 5.3.1.1.2 pontot).

Általában pontosabb megközelítést kapunk, ha a görbét 3 pontja ismeretében a három ponton áthaladó parabola segítségével közelítjük meg (kvadrátikus interpoláció).

A három pont egy

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

egyenletű parabolát határoz meg. Három pont legfeljebb másodfokú egészfüggvényt ad.

Általában jobb megközelítést kapunk, ha a görbének háromnál több pontja ismert, és magasabb fokú polinommal közelítjük meg.

Ha $n+1$ pont ismeretében a pontok koordinátáit az n -ed fokú polinom egyenletébe helyettesítjük, a konstansok $n+1$ egyenlettel meghatározhatók. Így legfeljebb n -ed fokú polinomot kapunk.

NEWTON az adott $n+1$ ponton átmenő n -ed fokú polinom,

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

meghatározására a következő módszert adta.

Legyenek az adott pontok a

$$P_0(x_0; y_0), \quad P_1(x_1; y_1), \quad P_2(x_2; y_2), \quad \dots, \quad P_n(x_n; y_n) \quad \text{pontok.}$$

Írjuk fel a polinomot a következő alakban:

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \\ &\quad + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots \\ &\quad + c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

A polinom az ún. Newton-féle interpolációs polinom. Helyettesítsük a függvénybe sorra az $x = x_0; x = x_1; x = x_2; \dots; x = x_n$ értékeket!

$$y_0 = c_0$$

$$y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$$

$$y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$y_3 = c_0 + c_1(x_3 - x_0) + c_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + \\ + c_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$y_n = c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots$$

$$+ c_n(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

Az első egyenletből:

$$c_0 = y_0.$$

Ezt behelyettesítve a másodikba:

$$y_1 = y_0 + c_1(x_1 - x_0), \quad \text{innen} \quad c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

A c_0 és c_1 értékeket a harmadik egyenletbe helyettesítve megkapjuk c_2 -t. Így sorra, lépésről lépésre megkapjuk a $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ együtthatókat.

Határozzuk meg például azt a harmadfokú polinomot, amely átmegy a következő pontokon:

x	0	1	4	5
y	7	2	-1	22

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Az $x = x_0, x = x_1, x = x_2$ értékeket helyettesítsük be az

- (1) $y_0 = c_0$
- (2) $y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$
- (3) $y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$
- (4) $y_3 = c_0 + c_1(x_3 - x_0) + c_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

egyenletekbe. Az adott értékekkel az (1) egyenletből:

$$y_0 = c_0, \quad y_0 = 7;$$

a (2) egyenletből:

$$2 = 7 + c_1(1 - 0), \quad \text{ebből} \quad c_1 = -5;$$

a (3) egyenletből:

$$-1 = 7 - 5(4 - 0) + c_2(4 - 0)(4 - 1), \quad \text{innen} \quad c_2 = 1;$$

a (4) egyenletből:

$$22 = 7 - 5(5 - 0) + 1(5 - 0)(5 - 1) + c_3(5 - 0)(5 - 1)(5 - 4),$$

$$22 = 7 - 25 + 20 + c_3 \cdot 20, \\ c_3 = 1.$$

Tehát

$$y = 7 - 5(x - 0) + 1(x - 0)(x - 1) + 1(x - 0)(x - 1)(x - 4).$$

A beszorzást elvégezve és rendezve:

$$y = x^3 - 4x^2 - 2x + 7.$$

*

A Newton-féle interpolációs polinom jóval egyszerűbben számítható ki, ha az adott helyek x koordinátái számtani sorozatot alkotnak.

Az átalakítást harmadfokú polinomnál végezzük el:

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

$$\text{Legyen} \quad x_0 = x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h.$$

Ezeket az értékeket behelyettesítve az

$$\begin{aligned} y_0 &= c_0, \\ y_1 &= c_0 + c_1(x_1 - x_0), \\ y_2 &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1), \\ y_3 &= c_0 + c_1(x_3 - x_0) + c_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

egyenletek így alakulnak:

$$\begin{aligned} y_0 &= c_0, \\ y_1 &= c_0 + c_1h, \\ y_2 &= c_0 + c_12h + c_2 \cdot 2h \cdot h, \\ y_3 &= c_0 + c_1 \cdot 3h + c_2 \cdot 3h \cdot 2h + c_3 \cdot 3h \cdot 2h \cdot h. \end{aligned}$$

Azaz

- (1) $y_0 = c_0,$
- (2) $y_1 = c_0 + c_1h,$
- (3) $y_2 = c_0 + 2c_1h + 2c_2h^2,$
- (4) $y_3 = c_0 + 3c_1h + 6c_2h^2 + 6c_3h^3.$

Az (1) egyenlet alapján:

$$c_0 = y_0.$$

Vonjuk ki a (2) egyenletből az (1) egyenletet:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= c_1h, \\ y_1 - y_0 &= \Delta y_0 \quad \text{jelöléssel:} \\ c_1 &= \frac{\Delta y_0}{h}. \end{aligned}$$

Δy_0 különbség, differencia; az index a kivonandó ordinátára utal.

A (3) egyenletet kivonva a (2)-ből:

$$y_2 - y_1 = c_1h + 2c_2h^2.$$

$$\text{Mivel} \quad c_1 = \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$y_2 - y_1 = \Delta y_0 + 2c_2h^2.$$

$$y_2 - y_1 = \Delta y_1 \quad \text{jelöléssel:}$$

$$\Delta y_1 = \Delta y_0 + 2c_2h^2.$$

$$\text{Innen} \quad c_2 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2h^2}.$$

$\Delta y_1 - \Delta y_0$ két differencia differenciája, másodrendű differencia. Vezessük be rá, a $\Delta^2 y_0$ jelölést, nem felejtve el, hogy itt a Δ^2 jel nem négyzetét, hanem a másodrendű különbséget jelenti. ($\Delta^2 y_0$ -t delta kettő y_0 -nak olvassuk.)

Így

$$c_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2},$$

ahol $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$.

Végül vonjuk ki a (4) egyenletből a (3)-at:

$$y_3 - y_2 = c_1 h + 4c_2 h^2 + 6c_3 h^3.$$

Ebből az egyenletből vonjuk le az előbb kapott

$$y_2 - y_1 = c_1 h + 2c_2 h^2 \quad \text{egyenletet.}$$

$$(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = 2c_2 h^2 + 6c_3 h^3.$$

Az elsőrendű különbség jelölésével:

$$\Delta y_2 - \Delta y_1 = 2c_2 h^2 + 6c_3 h^3.$$

$$\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1.$$

A $2c_2 h^2 = \Delta^2 y_0$ értékkel:

$$\Delta^2 y_1 = \Delta^2 y_0 + 6c_3 h^3.$$

$$\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 6c_3 h^3.$$

Bevezetve a harmadrendű differencia jelölését:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 6c_3 h^3.$$

Tehát az együtthatók:

$$c_0 = y_0, \quad c_1 = \frac{\Delta y_0}{h}, \quad c_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}, \quad c_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{6h^3}.$$

Alkalmazva az $1 = 1!$, $2 = 1 \cdot 2 = 2!$, $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$ jelöléseket az

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{egyenletben:}$$

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Teljes indukcióval igazolható, hogy az n -ed fokú polinom az

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad \dots, \quad x_n = x_0 + nh$$

helyeken vett függvényértékek segítségével így írható:

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Példák

1. Írjuk fel azt a polinomot, amely átmegy a $P_0(-2; -1)$; $P_1(-1; -9)$; $P_2(0; -3)$; $P_3(1; -1)$; $P_4(2; 3)$ pontokon. A polinom legfeljebb negyedfokú.

A számítást megkönnyíti, ha a differenciákat a következőképpen készített táblázatba írjuk:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-2	-1				
-1	-9	-8			
0	-3	6	14		
1	-1	2	-4	-18	
2	3	4	2	6	24

A különbségeket mindig az előző két sor közé írtuk. Így leolvasható:

$$y_0 = -1, \quad \Delta y_0 = -8, \quad \Delta^2 y_0 = 14, \quad \Delta^3 y_0 = -18, \quad \Delta^4 y_0 = 24 \quad \text{és} \quad h = 1.$$

A polinom:

$$y = -1 + \frac{-8}{1!} (x + 2) + \frac{14}{2!} (x + 2)(x + 1) - \frac{18}{3!} (x + 2)(x + 1)x + \frac{24}{4!} (x + 2)(x + 1)x(x - 1).$$

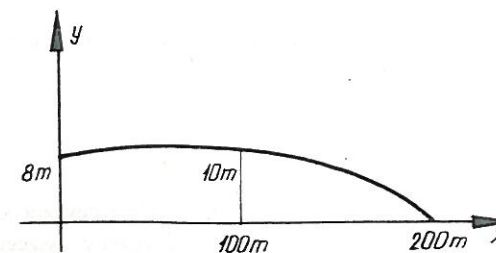
A műveleteket elvégezve:

$$y = -1 - 8x - 16 + 7x^2 + 21x + 14 - 3x^3 - 9x^2 - 6x + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x.$$

Összevonva, a keresett polinom:

$$y = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 3.$$

2. Egy vasúti pálya felett vezető autót három pontjának magasságát az 5.59 ábrán tüntettük fel. Közelítsük meg a pályát



5.59 ábra

másodfokú polinommal, és állapítsuk meg a pálya legmagasabb pontját, 100 m-t tekintve egységnek:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	0,08		
1	0,10	0,02	
2	0	-0,10	-0,12

$$y = 0,08 + \frac{0,02}{1!}x - \frac{0,12}{2!}x(x-1).$$

Innen

$$y = -0,06x^2 + 0,08x + 0,08.$$

A pálya legmagasabb az

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{0,08}{0,12} = -\frac{2}{3} \text{ pontban.}$$

Legmagasabb pontja:

$$\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-0,0192 - 0,0064}{-0,24} = \frac{0,0256}{0,24} = 0,108.$$

Métekre átszámítva a pálya 66,6 m-nél a legmagasabb, és ott 10,8 m magas.

5.3.2 Racionális törtfüggvények

Definíció. Racionális törtfüggvények az

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

alakú függvények.

Tehát a racionális törtfüggvény két racionális egészfüggvény hányadosa.

Ha $n < m$, a számláló fokszáma kisebb, mint a nevezőé, a törtfüggvény valódi törtfüggvény.

Pl.: $y = \frac{x+2}{x^2+x}.$

Ha $n \geq m$, a számláló fokszáma nagyobb vagy egyenlő a nevező fokszámával, a törtfüggvény nem valódi törtfüggvény.

Pl.: $y = \frac{x^2+x+3}{x+2}.$

Ha a számláló fokszáma nem kisebb a nevezőénél, osztással átalakíthatjuk egy racionális egészfüggvény és egy valódi törtfüggvény összegévé.

Előző példánkban

$$\begin{array}{r} (x^2+x+3):(x+2) = x-1 \\ \underline{+x^2+2x} \\ -x+3 \\ \underline{+x+2} \\ 5 \end{array}$$

Így

$$y = \frac{x^2+x+3}{x+2} \text{ az osztás elvégzése után}$$

$$y = x-1 + \frac{5}{x+2} \text{ alakú lesz.}$$

5.3.2.1 Lineáris törtfüggvények

Lineáris törtfüggvény az

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

alakú függvény, ahol a számláló és nevező elsőfokú függvény.

a) $y = \frac{a}{x}$ alakú függvények.

$$y = \frac{a}{x} \text{ az } y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

lineáris függvény speciális esete. A számlálóban nem szerepel x , a számláló konstans, a nevezőben pedig nem szerepel konstans tag.

Az $y = \frac{a}{x}$ a fordított arányosság képlete. Két változó fordított arányban van, ha bármely $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ értékpárra fennáll, hogy

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Ezt a követelményt az $y = \frac{a}{x}$ képlet kielégíti.

$$y_2 = \frac{a}{x_2}, \quad y_1 = \frac{a}{x_1},$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\frac{a}{x_2}}{\frac{a}{x_1}} = \frac{x_1}{x_2}.$$

A fordított arányosság így is fogalmazható:

$xy = a$, azaz a változók szorzata állandó.

Ábrázoljuk az $y = \frac{1}{x}$ és $y = -\frac{1}{x}$ függvényeket! $y = \frac{1}{x}$ értéktáblázata:

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Az $y = -\frac{1}{x}$ függvény képe az $y = \frac{1}{x}$ függvény tükörképe az x tengelyre ($y = -\frac{1}{x}$)

miatt, vagy az y tengelyre ($y = \frac{1}{(-x)}$ miatt) (5.60 ábra).

Az $y = \frac{a}{x}$ függvény képét megkaphatjuk értéktáblázattal, vagy ha az $y = \frac{1}{x}$ függvény ordinátáit $a > 0$

esetén a -szorosra nyújtjuk ($a < 1$ zsugorítás, 5.61 ábra). Ha $a < 0$, az $y = \frac{1}{x}$ -et előbb az x tengelyre tükrözzük, majd $|a|$ -szorosra nyújtjuk (5.62 ábra).

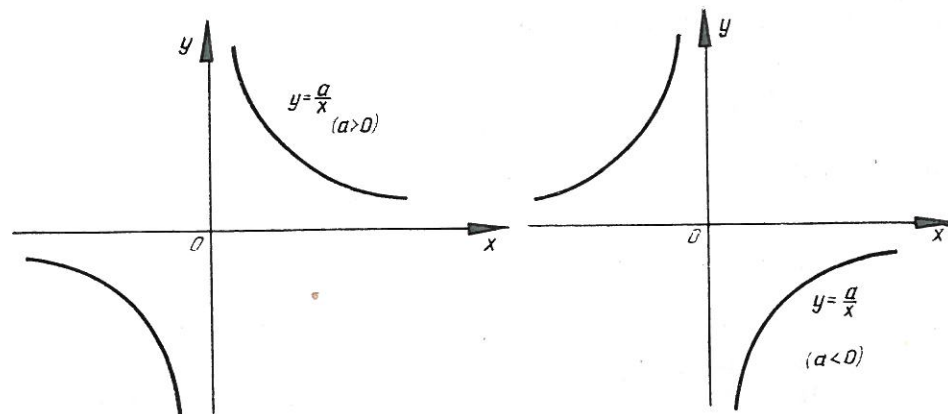
Az $y = \frac{a}{x}$ függvény tulajdonságai:

$y = \frac{a}{x}$ páratlan függvény, $y_{(-x)} = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x} = -y_{(+x)}$.

A függvény az $x = 0$ helyen nincs értelmezve.

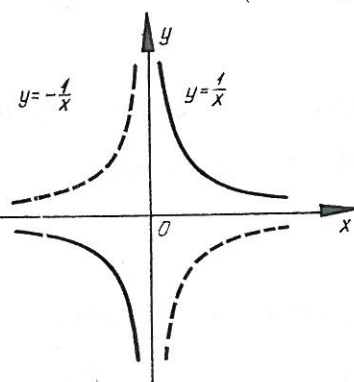
Értelmezési tartománya: $-\infty < x < 0 \cup 0 < x < +\infty$.

Értékkészlete: $-\infty < y < 0 \cup 0 < y < +\infty$.



5.61 ábra

5.62 ábra



5.60 ábra

$a > 0$ esetben: ha $x \rightarrow 0$ balról, $y \rightarrow -\infty$

(olv.: x tart a nullához balról, y tart a mínusz végtelenhez),

ha $x \rightarrow 0$ jobbról, $y \rightarrow +\infty$,

$a < 0$ esetben: ha $x \rightarrow 0$ balról, $y \rightarrow +\infty$,

ha $x \rightarrow 0$ jobbról, $y \rightarrow -\infty$.

Ha $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 0$,

ha $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow 0$.

Az $y = \frac{a}{x}$ görbének az x és y tengelyek aszimptótái.

Hogy a görbének az $y = 0$ egyenes, azaz az x tengely aszimptótája, az azt jelenti, hogy a görbe pontjának az x tengelytől való távolsága tetszőlegesen kicsi, ha $|x|$ megfelelően nagy. Hogy a görbének az $x = 0$ egyenes, azaz az y tengely aszimptótája, az azt jelenti, hogy a görbe pontjának az y tengelytől való távolsága tetszőlegesen kicsi, ha $|x|$ megfelelően kicsi. Az aszimptóta fogalmának tárgyalására a 7.2.5 pontban térünk rá.

Az $y = \frac{a}{x}$ függvényben x és y szerepe szimmetrikus.

Ha $a > 0$, $y = \frac{a}{x}$ az I. és III. negyedben halad, és az értelmezési tartományban fogy.

Ha $a < 0$, $y = \frac{a}{x}$ a II. és IV. negyedben halad, és az értelmezési tartományban nő.

Az $y = \frac{a}{x}$ és $y = -\frac{a}{x}$ függvények egymás tükörképei, az x és y tengelyekre.

Az $y = \frac{a}{x}$ egyenlet egyenlő szárú hiperbola egyenlete (lásd a 3.2.7 pontot).

Az $y = \frac{a}{x}$ ($a > 0$) függvény görbéjének és az $y = x$ egyenesnek metszéspontjai

az egyenletekből:

$$x = \frac{a}{x},$$

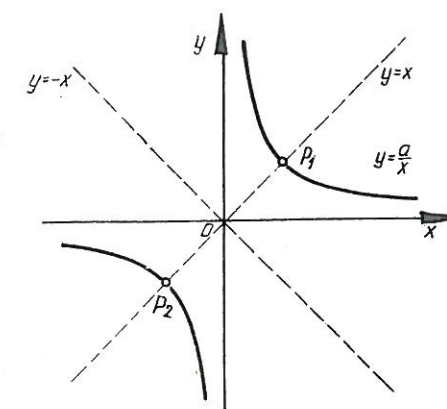
$$x^2 = a, \quad x = \pm \sqrt{a}.$$

A metszéspontok:

$$P_2(-\sqrt{a}; -\sqrt{a}) \quad \text{és} \quad P_1(+\sqrt{a}; +\sqrt{a}) \quad (5.63 \text{ ábra}).$$

Az $y = \frac{a}{x}$ görbék az $y = x$ és $y = -x$ egyenesre nézve szimmetrikusak.

b)
$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$



5.63 ábra

Vizsgáljuk az általános lineáris törtfüggvényt. Feltesszük, hogy $c \neq 0$, mert különben y egészfüggvény. Nézzünk először két példát:

$$1. \quad y = \frac{4x-6}{2x-3}.$$

A függvény ott nincs értelmezve, ahol a nevező 0, azaz ha $2x-3=0$, $x=\frac{3}{2}$. Tehát a függvény az $x=\frac{3}{2}$ helyen nincs értelmezve.

Az összes többi helyen viszont

$$y = \frac{4x-6}{2x-3} = 2.$$

A függvény tehát konstans, kivéve az $x=\frac{3}{2}$ helyet.

Általában, ha az

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{törtfüggvényben} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

valamint $ad=bc$; a függvény konstans (kivéve azt a helyet, ahol a nevező 0, $cx+d=0$, $x=-\frac{d}{c}$, itt a függvény nincs értelmezve).

Tegyük fel tehát most már, hogy az

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{lineáris törtfüggvényben}$$

$$c \neq 0 \quad \text{és}$$

$$ad \neq bc.$$

$$2. \quad y = \frac{3x+2}{2x-4};$$

$$\frac{3}{2} \neq \frac{2}{-4}.$$

Hozzuk a függvényt az

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + \alpha \\ y &= y' + \beta \end{aligned} \right\} \quad \text{transzformációval}$$

$$y' = \frac{A}{x'} \quad \text{alakúra.}$$

$$y' + \beta = \frac{3(x' + \alpha) + 2}{2(x' + \alpha) - 4},$$

$$y' + \beta = \frac{3x' + 3\alpha + 2}{2x' + 2\alpha - 4}.$$

Ha $2\alpha - 4 = 0$, azaz $\alpha = 2$, akkor α értékét behelyettesítve:

$$y' + \beta = \frac{3x' + 8}{2x'},$$

$$y' + \beta = \frac{3}{2} + \frac{4}{x'}.$$

$$\text{Innen} \quad \beta = \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad y' = \frac{4}{x'} \quad (A=4).$$

A függvényt megkapjuk, ha az $O' \left(2; \frac{3}{2}\right)$ kezdőpontú koordináta-rendszerben az

$y' = \frac{4}{x'}$ függvényt ábrázoljuk (5.64 ábra).

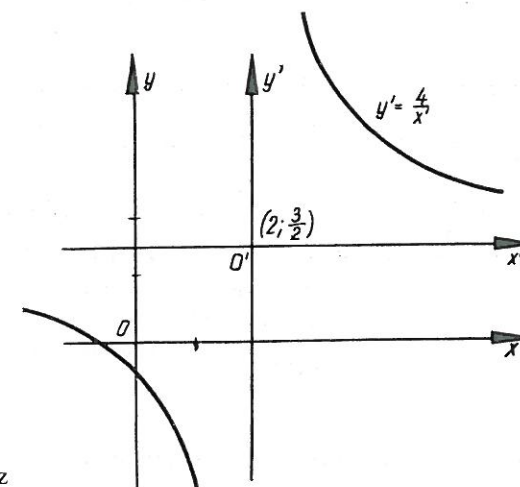
A függvényt a görbe transzformációjával is megkaphatjuk.

$$y = \frac{3x+2}{2x-4}.$$

$$(3x+2) : (2x-4) = \frac{3}{2} \\ \pm \frac{3x \mp 6}{8}$$

$$y = \frac{3}{2} + \frac{8}{2x-4},$$

$$y = \frac{3}{2} + \frac{4}{x-2}.$$



A függvény görbét megkapjuk, ha az

$y = \frac{1}{x}$ függvény ordinátáit négyszeresre

5.64 ábra

nyújtjuk, majd a görbét 2 egységgel jobbra és $\frac{3}{2}$ egységgel felfelé eltoljuk. A függvény képe megegyezik az 5.64 ábrán kapott képpel.

*

Az $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ általános lineáris törtfüggvény vizsgálatánál hasonlóan járhatunk el. A számlálót elosztjuk a nevezővel:

$$(ax+b) : (cx+d) = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\pm ax \pm \frac{ad}{c}}{b - \frac{ad}{c}}$$

Így

$$y = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d}$$

$$y = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$$

$$\frac{bc - ad}{c^2} = A \quad \text{jelöléssel:}$$

$$y = \frac{a}{c} + \frac{A}{x + \frac{d}{c}}$$

A függvény görbét megkapjuk, ha az $y = \frac{1}{x}$ függvény görbét A -szorosra nyújtjuk, majd azt $\frac{d}{c}$ -vel balra és $\frac{a}{c}$ -vel felfelé eltoljuk.

A függvénynek az $x = -\frac{d}{c}$ pontban szakadása van. Aszimptótái az $x = -\frac{d}{c}$ és $y = \frac{a}{c}$ egyenesek. Ha $A > 0$, a függvény az értelmezési tartományban nő, ha $A < 0$, fogy. Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha

az $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ függvényt a koordinátatengelyek eltolásával ábrázoljuk.

5.3.2.2 Másodfokú törtfüggvények

Ábrázoljunk néhány másodfokú törtfüggvényt:

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

A függvény páros függvény. A függvény a $(-\infty; 0)$ intervallumban nő, a $(0; +\infty)$ intervallumban csökken.

A függvény az $x = 0$ helyen nincs értelmezve.

A függvénynek az $x = 0$ helyen szakadása van.

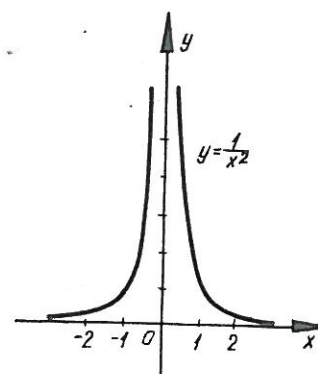
Ha $x \rightarrow 0$ balról, $y \rightarrow +\infty$.

Ha $x \rightarrow 0$ jobbról, $y \rightarrow +\infty$.

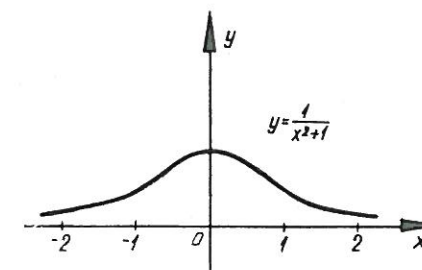
Ha $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 0$.

Ha $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow 0$.

A függvény képét az 5.65 ábra mutatja.



5.65 ábra



5.66 ábra

Az $y = \frac{1}{x^2}$ függvénynek az $x = 0$ és $y = 0$ egyenesek aszimptótái.

Ábrázoljuk az $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ függvényt!

Az $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ függvény páros függvény. A függvény minden x -re értelmezve van, mert $x^2 + 1 = 0$ nem következhet be a valós számok körében.

A függvénynek az $x = 0$ helyen maximuma van (5.66 ábra).

Ha $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 0$,
 $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow 0$.

Az $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ függvénynek egy aszimptótája van, az x tengely.

A racionális törtfüggvények vizsgálatára a függvények folytonosságának tárgyalása során (6.3.2) még visszatérünk.

Példák

1. A Boyle—Mariotte-törvény szerint az ideális gázok nyomásának és térfogatának szorzata állandó hőmérsékleten állandó.

$$pV = c,$$

$$\text{innen} \quad p = \frac{c}{V},$$

a nyomás és a térfogat fordítottan arányosak. (Mivel negatív térfogat nincs, a függvénynek csak $V > 0$ -ra van fizikai értelme.)

2. A Poiseuille-féle törvény szerint adott kapillaris csövön át állandó nyomáskülönbséggel, az időegység alatt átáramló V folyadék térfogata fordítottan arányos az η viszkozitással.

$$V = \frac{A}{\eta}.$$

A Poiseuille-törvény alapján határozzák meg a legfontosabb viszkozitásmérési módszereket.

5.3.3 A hatványfüggvény

Definíció. Az $y = x^a$ alakú függvény hatványfüggvény.
(Az alap a független változó, a kitevő konstans, tetszés szerinti valós szám.)

1. α racionális szám

a) $\alpha = n$, a kitevő természetes szám

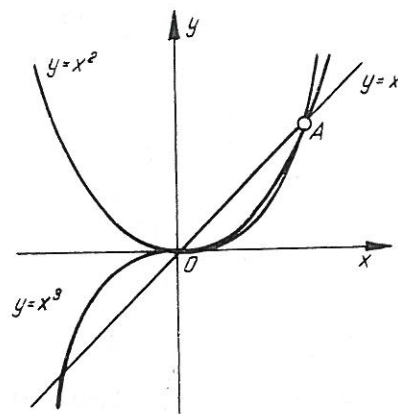
$$y = x^n.$$

Nézzük a következő függvényeket:

$$y = x, \quad y = x^2, \quad y = x^3.$$

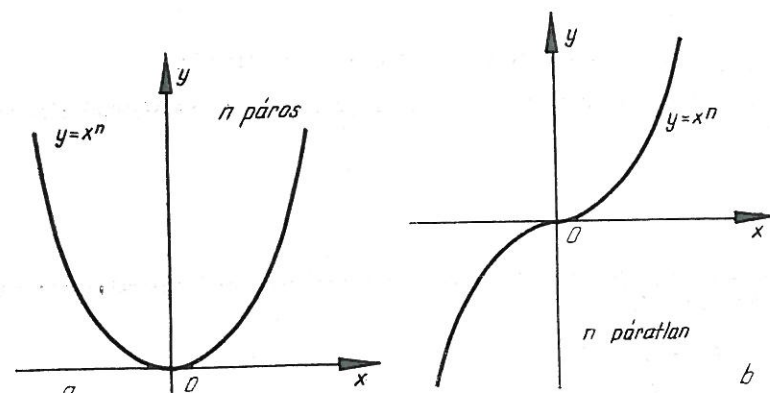
A görbék az $O(0; 0)$ és $A(1; 1)$ pontokban metszik egymást.

A $0 < x < 1$ intervallumban $x > x^2 > x^3$,
az $1 < x < +\infty$ intervallumban $x < x^2 < x^3$.



5.67 ábra

Az $y = x$ és $y = x^3$ függvények monoton nőnek, az $y = x^2$ függvénynek az $x = 0$ helyen minimuma van (5.67 ábra).
Az $y = x^n$ hatványfüggvény képe páros n -nél x^2 -hez, páratlan n -nél x^3 -hoz hasonló. Minél nagyobb a kitevő, annál jobban simul a görbe a 0 hely környezetében az x tengelyhez, és annál rohamosabban növekszik az 1-nél nagyobb x -eknél (5.68a és b ábra).
 $y = x^n$ hatványfüggvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza.



5.68 ábra

b) α pozitív racionális szám.

$$\alpha = \frac{p}{q}.$$

$$y = x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

Ha p páratlan és q páros, akkor $y = x^{\frac{p}{q}}$ értelmezési tartománya: $0 \leq x < +\infty$.
Példaként ábrázoljuk az $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$ és $y = \sqrt{x^3}$ függvényeket.

$$y = \sqrt{x}$$

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

$$y = \sqrt[3]{x}$$

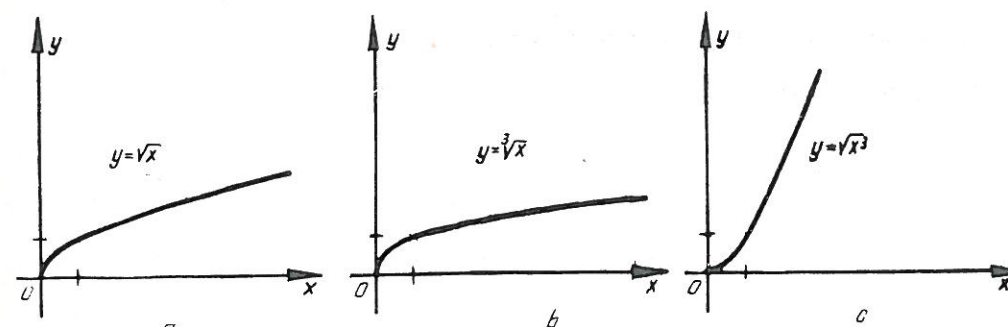
x	-8	-1	0	1	8
y	-2	-1	0	1	2

$$y = \sqrt{x^3}$$

x	0	1	2
y	0	1	2,83

A függvények képét az 5.69a, b, c ábrák mutatják.

Ha α racionális és $\alpha > 0$, az $y = x^{\alpha}$ függvény $x > 0$ esetén szigorúan monoton nő.



5.69 ábra

c) $\alpha = 0$

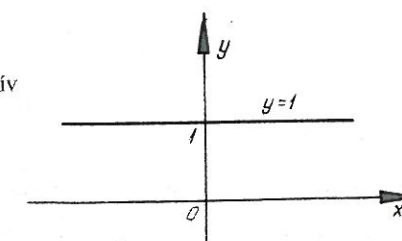
$$y = x^0,$$

$$y = 1 \quad (5.70 \text{ ábra}).$$

d) $\alpha < 0$ racionális szám. Jelöljük a kitevő negatív voltát $\alpha = -\beta$ jelöléssel, ahol $\beta > 0$ és

$$\beta = \frac{p}{q}.$$

$$y = x^{\alpha} = x^{-\beta} = \frac{1}{x^{\beta}} \quad (x \neq 0).$$

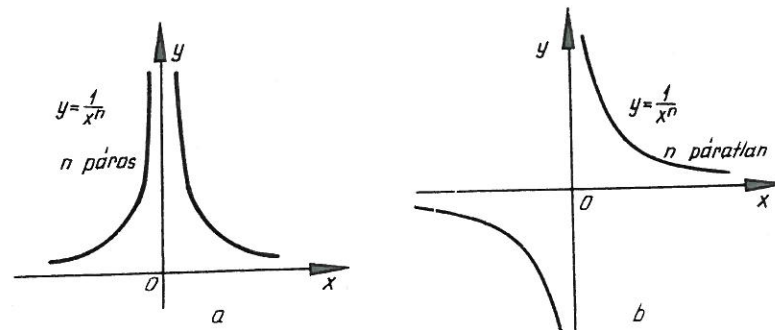


5.70 ábra

Ha α negatív egész szám, a függvény

$$y = \frac{1}{x^n} \text{ alakú.}$$

Az $y = \frac{1}{x}$ és $y = \frac{1}{x^2}$ menetéhez hasonlóan az $y = \frac{1}{x^n}$ függvény görbéje, ha n páros, az első és második negyedben, ha n páratlan, az első és a harmadik negyedben halad (5.71a és b ábra).



5.71 ábra

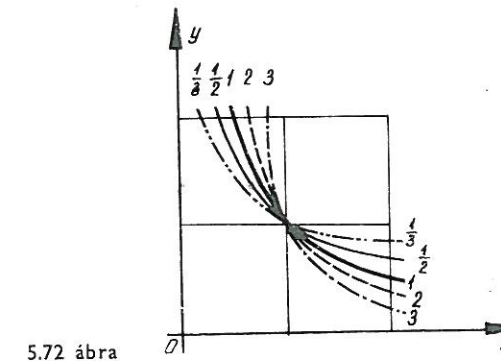
Vizsgáljunk néhány $y = \frac{1}{x^\alpha}$ egyenletű függvényt!

Az értéktáblázatok:

$y = \frac{1}{x}$		$y = \frac{1}{x^2}$		$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$		$y = \frac{1}{x^3}$		$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\frac{1}{4}$	4	0,5	4	$\frac{1}{4}$	2	0,5	8	0,25	1,6
$\frac{1}{2}$	2	0,8	1,6	$\frac{1}{2}$	1,4	0,8	1,9	0,5	1,20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	$\frac{1}{2}$	1,5	0,44	2	0,7	1,5	0,3	1,5	0,87
4	$\frac{1}{4}$	2	0,25	4	$\frac{1}{2}$	2	0,13	2	0,79

A függvények képeit az 5.72 ábra mutatja.

II. α irracionális szám. Az $y = x^\alpha$ függvény definíciójára az exponenciális függvénynél (5.3.4.1) visszatérünk.



5.72 ábra

5.3.3.1 Az inverz függvény fogalma

Definíció. $y = f(x)$ függvény inverzén értjük azt az $x = \varphi(y)$ függvényt, amely adott y -hoz azt az x értéket rendeli, amelyre $f(x) = y$.

A definícióból következik, hogy az $y = f(x)$ függvénynek olyan szakaszában, ahol $y = f(x)$ folytonos és szigorúan monoton, biztosan van inverz függvénye. Olyan szakaszban ugyanis, ahol a függvény nem monoton, az $x = \varphi(y)$ kapcsolat ugyanazon y értékhez esetleg több x értéket rendelne.

Valamely $y = f(x)$ függvény inverz függvényét megkapjuk, ha x -et tekintve függvénynek és y -t független változónak, az egyenletből x -et kifejezzük (ha ez lehetséges), majd a változók szerepét felcseréljük.

$$y = f(x)\text{-ből } x\text{-et kifejezve}$$

legyen az új függvény

$$x = \varphi(y).$$

A változók szerepét felcserélve, az inverz függvény:

$$y = \varphi(x).$$

A változók szerepének felcserélésére azért van szükség, hogy az ábrázolás során ne az eredeti görbét kapjuk.

Az inverz függvény értelmezéséből következik, hogy ha $f(x)$ függvény inverz függvénye $\varphi(x)$, akkor

$$f[\varphi(x)] = x.$$

Az $y = f(x)$ függvény inverzét így is jelölhetjük:

$$y = f^{-1}(x).$$

Az inverz függvény fogalmából adódik, hogy az $y = \varphi(x)$ függvény inverze az $y = f(x)$ függvény. Egy függvény inverzének képét az eredeti függvény görbéjének az $y = x$ egyenesre való tükrözésével nyerjük.

A tükrözés helyessége a koordináták felcserélődéséből adódik. Az $(x; y)$ és $(y; x)$ számpárokat ábrázoló pontok egymásnak tükörképei az $y = x$ egyenesre.

Példák

Határozzuk meg a következő függvények inverzeit:

1. $y = 3x + 1$.

A függvény a $(-\infty; +\infty)$ intervallumban szigorúan monoton nő. Az egyenletből:

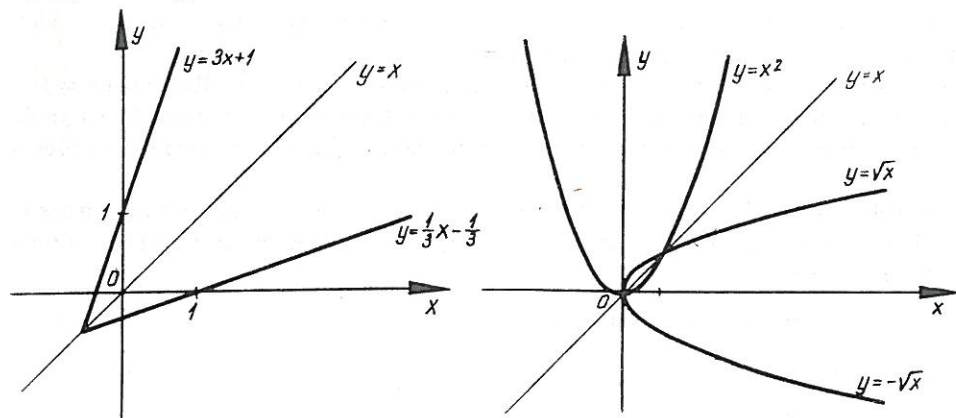
$$x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}.$$

A változókat felcserélve az inverz függvény:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \quad (5.73 \text{ ábra}).$$

2. $y = x^2$.

A függvény az értelmezési tartományban nem monoton. Az inverz függvényt csak a monoton szakaszokban lehet meghatározni.



5.73 ábra

5.74 ábra

$y = x^2$, ha $0 \leq x < +\infty$ szigorúan monoton nő, inverze:

$$x = \sqrt{y}.$$

A változók felcserélésével:

$$y = \sqrt{x} \quad (5.74 \text{ ábra}).$$

$y = x^2$, ha $-\infty < x < 0$ szigorúan monoton fogy, inverze

$$x = -\sqrt{y}.$$

A változók felcserélésével:

$$y = -\sqrt{x} \quad (5.74 \text{ ábra}).$$

3. $y = x^3$.

A függvény a $-\infty < x < +\infty$ intervallumban szigorúan monoton nő, inverz függvénye $x = \sqrt[3]{y}$, illetve a változók felcserélésével

$$y = \sqrt[3]{x} \quad (5.75 \text{ ábra}).$$

4. $y = \frac{a}{x}$ ($a > 0$).

A függvény a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumokban szigorúan monoton fogy. Inverze a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumokban $x = \frac{a}{y}$, illetve a változók felcserélésével:

$$y = \frac{a}{x}.$$

5. $y = \frac{1}{x^2}$.

A függvény a $(0; +\infty)$ intervallumban szigorúan monoton fogy. Az egyenletből

$$x^2 = \frac{1}{y}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

A változók felcserélve, az inverz függvény:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

5.75 ábra

A görbét a 5.72 ábrán láthatjuk.

6. Írjuk fel az $y = x^\alpha$ hatványfüggvény inverzét, ha α tetszőleges racionális szám!

Ha $\alpha > 0$, az inverz függvény:

$$x = \sqrt[\alpha]{y}.$$

A változók felcserélésével:

$$y = \sqrt[\alpha]{x} \quad (5.76 \text{ ábra}).$$

Ha $\alpha < 0$ $\alpha = -\beta$, ahol $\beta > 0$

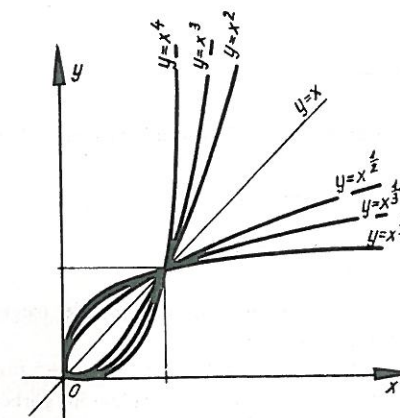
$$y = x^\alpha$$

$$y = x^\alpha = x^{-\beta} = \frac{1}{x^\beta}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[\beta]{y}}.$$

A változók felcserélésével az inverz függvény:

$$y = \frac{1}{\sqrt[\beta]{x}}.$$



5.76 ábra

5.3.3.2 Az összetett függvény fogalma

Definíció. Ha az $y = f(u)$ függvénykapcsolatban az argumentum maga is függvény, azaz $u = g(x)$ és a $g(x)$ függvény értékkészlete vagy annak egy része beleesik az $y = f(x)$ függvény értelmezési tartományába, akkor összetett vagy közvetett függvénynek nevezzük az

$$y = f[g(x)] \quad \text{függvényt.}$$

Összetett függvény például az

$$y = \frac{1}{u} \quad \text{és} \quad u = x^2 + x \text{ -ből összetett}$$

$$y = \frac{1}{x^2 + x} \quad \text{függvény.}$$

5.3.3.3 Irracionális függvények

Az irracionális függvényekben a független változó a gyök alatt szerepel. Ilyenek például:

$$1. y = \sqrt{x}.$$

$$2. y = \sqrt[3]{x-2}.$$

A függvény az $y = \sqrt[3]{u}$, $u = x-2$ függvények összetétele.

$$3. y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}}.$$

A függvényt az $y = \frac{1}{u}$, $u = \sqrt{t}$, $t = x^2 + \frac{1}{x}$ függvényekből tehetjük össze.

Példák

a) Ábrázoljuk a következő irracionális függvényeket:

$$1. y = \sqrt{x+5} + 2,$$

$$y = -\sqrt{x+5} + 2.$$

Az $y = \sqrt{x+5} + 2$ függvény görbét megkapjuk, ha az $y = \sqrt{x}$ függvény görbét balra 5, felfelé 2 egységgel eltoljuk.

Hasonlóan kapjuk meg az $y = -\sqrt{x+5} + 2$ függvény képét, ha az $y = -\sqrt{x}$ függvény görbét toljuk el balra 5, felfelé 2 egységgel. A két függvény görbét az 5.77 ábra szemlélteti.

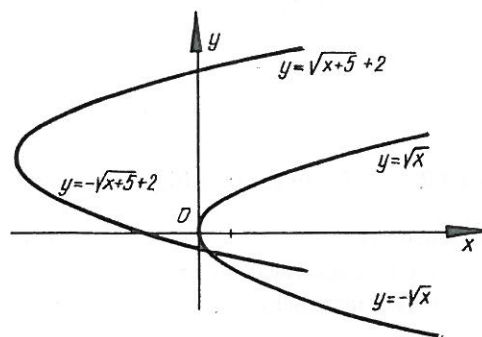
$$2. y = \sqrt{6-2x},$$

$$y = -\sqrt{6-2x}.$$

Nézzük az $y = \sqrt{6-2x}$ függvényt:

$$y = \sqrt{6-2x} = \sqrt{-2(x-3)}.$$

Az $y = \sqrt{x}$ függvény görbét az y tengelyre 5.77 ábra



tükrözzük. A kapott görbét, azaz a $\sqrt{-x}$ ($x \leq 0$) függvény görbét az x tengely irányában felére összenyomjuk, majd 3 egységgel jobbra toljuk.

Hasonlóan kapjuk meg az $y = -\sqrt{x}$ függvény görbéből az $y = -\sqrt{6-2x}$ függvény képét (5.78 ábra).

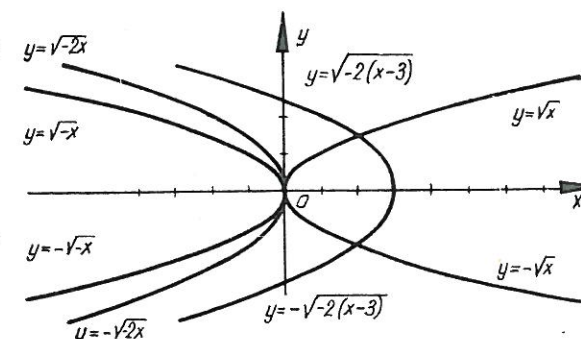
b) Írjuk fel a következő függvények inverzét:

$$1. y = 2x^3 - 1.$$

Az egyenletből $x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{2}},$

a változók szerepét felcserélve az inverz függvény: $y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}.$

$$2. y = \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}.$$



5.78 ábra

Az egyenletet x -re rendezve:

$$x-2 = \frac{1}{y^4}$$

$$x = \frac{1}{y^4} + 2.$$

A változók szerepét felcserélve:

$$y = \frac{1}{x^4} + 2.$$

5.3.4 Az exponenciális és a logaritmusfüggvény

5.3.4.1 Az exponenciális függvény

Definíció. Az $y = a^x$ alakú függvény *exponenciális függvény*. Az alap konstans, a kitevő (exponens) a független változó.

Az exponenciális függvényt csak $a > 0$ alapra értelmezzük. A hatvány fogalmából adódik, hogy az $y = a^x$ minden pozitív egész számra értelmezve van. A hatványozás általánosítása értelmezi az $y = a^x$ -et 0, negatív egész és tört számokra. Eszerint $y = a^x$ minden racionális számra értelmezve van.

Ha $a > 1$, az $y = a^x$ függvény racionális kitevőkre nézve szigorúan monoton növekedő, ha $0 < a < 1$, szigorúan monoton fogyó.

Meg lehet mutatni, hogy a monotonitás megtartásával a^x , x irracionális értékeire is értelmezhető, mégpedig úgy, hogy a racionális kitevőkre érvényes azonosságok érvényben maradnak. Ezt itt nem bizonyítjuk.

Az a^x számot egyértelműen meghatározza $a > 1$ esetén az

$$a^r < a^x < a^R$$

egyenlőtlenség, ha azt minden olyan r, R racionális számpárra vonatkoztatjuk, amelyre

$$r < x < R.$$

Hasonlóan értelmezhető a^x , $0 < a < 1$ esetén.

Az exponenciális függvény értelmezésével az

$$y = x^x \quad (x \geq 0)$$

hatványfüggvény értékeit is definiáltuk, tetszőleges valós x kitevőre.

Ábrázoljuk értéktáblázat segítségével az $y = 2^x$ és $y = 3^x$ függvényeket!

$$y = 2^x$$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$$y = 3^x$$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

A függvények képe az 5.79 ábrán látható.

Az ábrából leolvasható, ha $x \rightarrow +\infty$ $y = 2^x \rightarrow +\infty$; $y = 3^x \rightarrow +\infty$. Ha $x \rightarrow -\infty$, a függvények 0-hoz tartanak.

Az $y = 2^{-x}$ függvény az $y = 2^x$ függvény tükörképe az y tengelyre (5.79 ábra).

A szemlélet alapján kimondjuk az *exponenciális függvények* következő tulajdonságait:

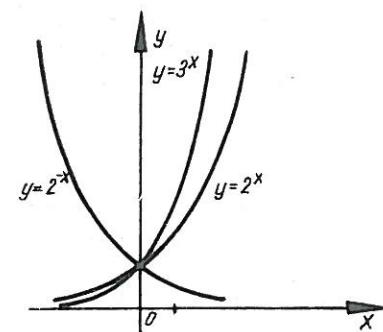
Az $y = a^x$ exponenciális függvény

értelmezési tartománya: $-\infty < x < +\infty$,

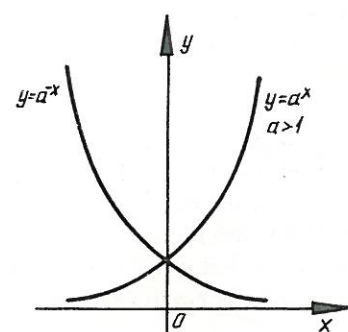
értékkészlete: $0 < y < +\infty$.

Ha $a > 1$, az exponenciális függvény monoton nő, ha $0 < a < 1$, monoton fogy.

Az $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ függvény az $y = a^x$ függvény tükörképe az y tengelyre (5.80 ábra).



5.79 ábra



5.80 ábra

Minden exponenciális függvény átmegy a $P(0; 1)$ ponton (bármely szám 0-dik hatványa 1).

Az $y = a^x$ függvény aszimptotája az x tengely.

Az $y = a^x$ függvény speciális esete az

$$y = 1^x \equiv 1 \quad \text{függvény.}$$

Exponenciális függvény igen sokszor fordul elő a gyakorlatban.

Példák

- Ha a fény fényelnyelő közegen halad keresztül, a fénysugár energiája a közeg vastagságával exponenciálisan csökken.
- Az elektromos áram be- és kikapcsolása esetén az áramerősség az idővel exponenciálisan változik.

5.3.4.2 A logaritmusfüggvény

Írjuk fel az $y = a^x$ függvény inverzét. Mivel $a > 1$, illetve $0 < a < 1$ esetén az exponenciális függvény szigorúan monoton, minden $y > 0$ számhoz tartozik olyan x , amelyre $y = a^x$. Ezt az x -et a alapú logaritmus y -nak nevezzük, és így jelöljük:

$$x = \log_a y.$$

A változók szerepét felcserélve az

$$y = \log_a x$$

logaritmusfüggvény az exponenciális függvény inverze.

Definíció. Az $y = a^x$ függvény inverzét, az $y = \log_a x$ függvényt a alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük.

Ábrázoljuk értéktáblázattal az

$$y = \log_2 x, \quad y = \log_3 x, \quad y = \log_4 x \quad \text{és} \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad \text{függvényeket!}$$

$$y = \log_2 x$$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-2	-1	0	1	2	3

$$y = \log_3 x$$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	-2	-1	0	1	2

$$y = \log_4 x$$

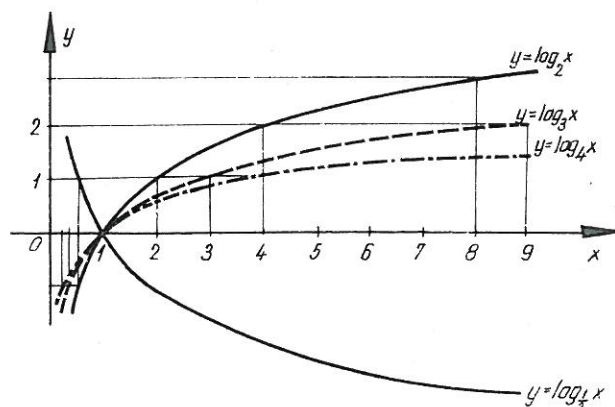
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

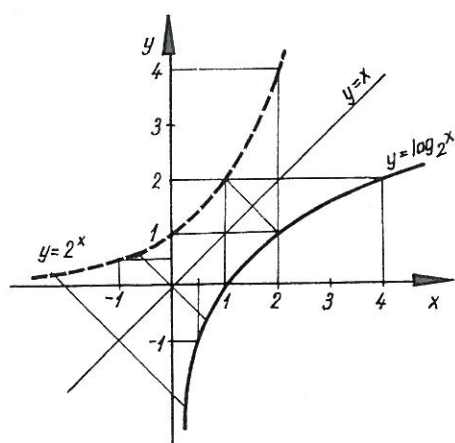
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	1
y	2	1	0	-1	-2	-3

A függvények képe az 5.81 ábrán látható.

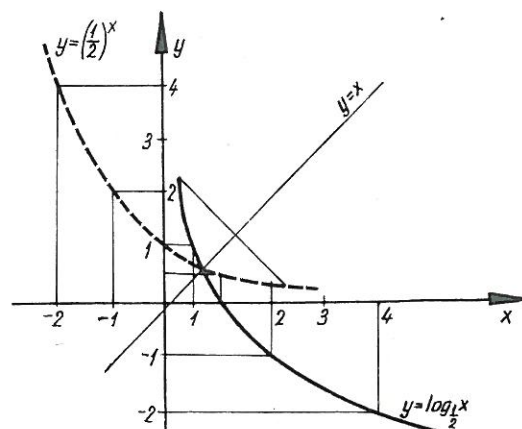
Ábrázoljuk az $y = \log_2 x$ és $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ függvényeket, mint az $y = 2^x$, illetve $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ függvények inverzeit (5.82 és 5.83 ábra).



5.81 ábra



5.82 ábra



5.83 ábra

A logaritmusfüggvények tulajdonságai:

Az $y = \log_a x$ függvény az $y = a^x$ függvény inverze.

Az $y = \log_a x$ függvény értelmezési tartománya $0 < x < +\infty$,
értékkészlete $-\infty < y < +\infty$.

Az $y = \log_a x$ függvény monoton nő, ha $a > 1$, és monoton fogy, ha $a < 1$.

Minden logaritmusfüggvény átmegy az $(1; 0)$ ponton.

Az $y = \log_a x$ és $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ függvények egymás tükörképei az x tengelyen.

Példák

a) Mi az értelmezési tartománya a következő függvényeknek?

1. $y = \log_3 (2-4x)$.

A függvény értelmezve van, ha $2-4x > 0$, azaz $x < \frac{1}{2}$,

az értelmezési tartomány: $-\infty < x < \frac{1}{2}$.

2. $y = \lg (x^2 - 3x - 4)$.

A függvény ott van értelmezve, ahol az $u = x^2 - 3x - 4$ argumentum pozitív, azaz $x^2 - 3x - 4 > 0$.

Mivel $u = x^2 - 3x - 4$ zérushelyei $x_1 = -1$ és $x_2 = 4$, és az $x = \frac{3}{2}$ helyen minimuma van,

$$y = \lg (x^2 - 3x - 4)$$

értelmezési tartománya:

$$-\infty < x < -1 \cup 4 < x < +\infty.$$

b) Ábrázoljuk a következő függvényeket:

1. $y = 2^{\frac{1}{2}x-1} + 1$.

A függvényt így írjuk: $y = 2^{\frac{1}{2}(x-2)} + 1$.

Az $y = 2^x$ függvény görbét az x tengely irányában kétszeresre nyújtjuk, majd ugyancsak az x tengely irányában jobbra 2 egységgel, az y tengely irányában felfelé 1 egységgel eltoljuk (5.84 ábra).

2. Ábrázoljuk az

$$y = \log_2 (3x+6) - 1$$

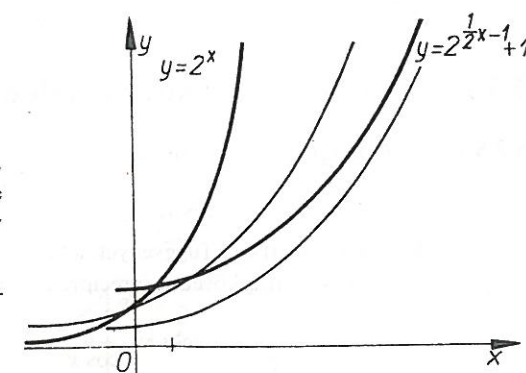
$$y = \log_2 3(x+2) - 1.$$

Ábrázoljuk az $y = \log_2 x$ függvényt. A görbét az x tengely irányában harmadrészére összenyomjuk, majd balra 2, lefelé 1 egységgel eltoljuk (5.85 ábra).

c) Írjuk fel a következő függvények inverzeit:

1. $y = 3^{x-4} + 7$.

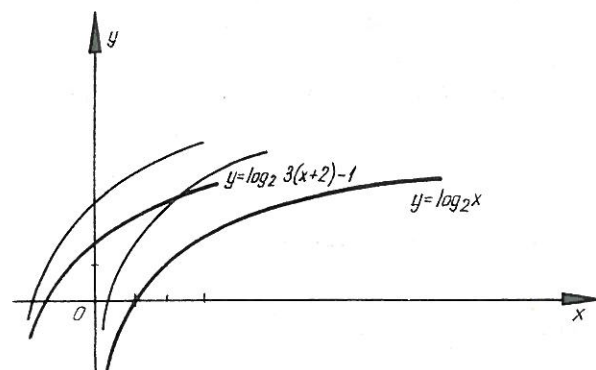
$$y - 7 = 3^{x-4}.$$



5.84 ábra

A logaritmus definíciója értelmében

$$x-4 = \log_3(y-7), \quad \text{azaz} \\ x = \log_3(y-7) + 4.$$



5.85 ábra

Az inverz függvény:

$$y = \log_3(x-7) + 4.$$

$$2. \quad y = \log_{\frac{1}{2}}(x-5) + 3.$$

$$y-3 = \log_{\frac{1}{2}}(x-5).$$

A hatvány:

$$x-5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-3}.$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-3} + 5.$$

A változók szerepét felcserélve, az inverz függvény:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 5, \quad \text{azaz} \quad y = 2^{3-x} + 5.$$

5.3.5 Trigonometrikus és ciklometrikus függvények

5.3.5.1 A trigonometrikus függvények

Az $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$ függvényeket trigonometrikus függvényeknek nevezzük.

A szögfüggvények között a következő reciprok kapcsolat van:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

($\sec x$ olv: szekáns x , $\operatorname{cosec} x$ olv: koszekáns x).

A trigonometrikus függvények közül most csak az első négygel foglalkozunk.

A szögfüggvények definíciója értelmében (lásd 2.2.1 pontot) az egységsugarú körben az x szög szögfüggvényei a következők:

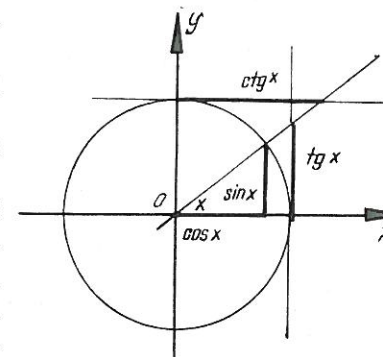
$\sin x$: a mozgó szár és a kör metszéspontjának ordinátája;

$\cos x$: a mozgó szár és a kör metszéspontjának abszcisszája;

$\operatorname{tg} x$: a mozgó szár és az $(1; 0)$ pontban húzott érintő metszéspontjának ordinátája;

$\operatorname{ctg} x$: a mozgó szár és a $(0; 1)$ pontban húzott érintő metszéspontjának abszcisszája (5.86 ábra).

A szögfüggvényeket úgy ábrázoljuk, hogy az egységsugarú kör mellé felvesszünk egy ugyanolyan egységeket tartalmazó koordinátarendszert. Ezen független változónak (abszcisszának) felvesszük a szöget (ívmértékben); függvénynek (ordinátának) a megfelelő szögfüggvényeket. Az ábrázolás megkönnyítésére a kör teljes szögét negyedenként három egyenlő részre osztjuk ($30^\circ = \frac{\pi}{6}$ szögekkel).



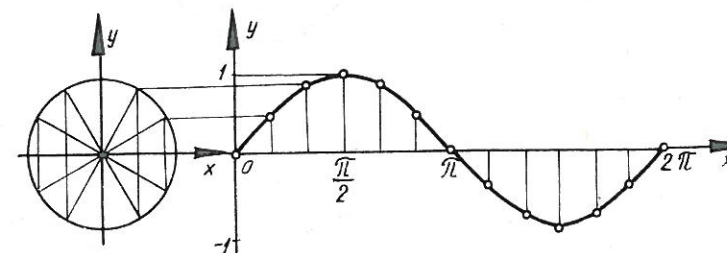
5.86 ábra

$$1. \quad y = \sin x.$$

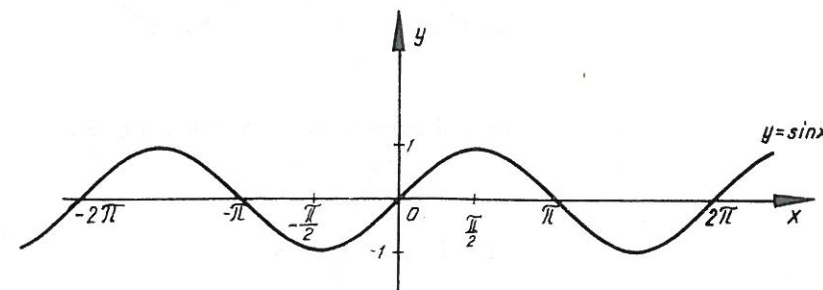
Ha $0 \leq x \leq 2\pi$, a görbe képe az 5.87 ábrán látható.

$\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+2k\pi)$, azaz az $y = \sin x$ függvény 2π szerint periodikus. $\sin(-x) = -\sin x$; a szinuszfüggvény páratlan.

Az $y = \sin x$ függvényt hosszabb szakaszon az 5.88 ábra mutatja.



5.87 ábra



5.88 ábra

Az $y = \sin x$ függvény

értelmezési tartománya: $-\infty < x < +\infty$,

értékkészlete: $-1 \leq y \leq 1$.

A függvény viselkedése egy periódusban:

Legyen a periódus $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

A függvény $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ -ben monoton nő,

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ -ben monoton fogy,

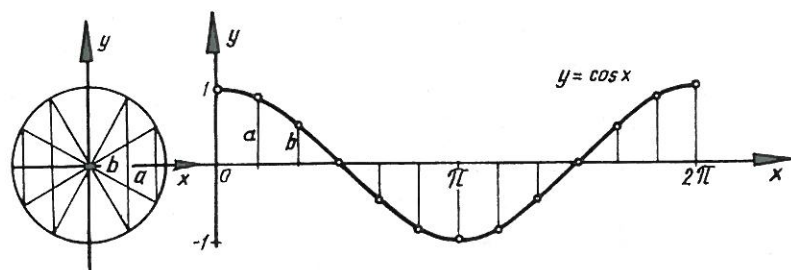
$x = -\frac{\pi}{2}$ és $x = \frac{3\pi}{2}$ helyeken minimuma van: $y = -1$; $x = \frac{\pi}{2}$ helyen maximuma van: $y = 1$.

2. $y = \cos x$.

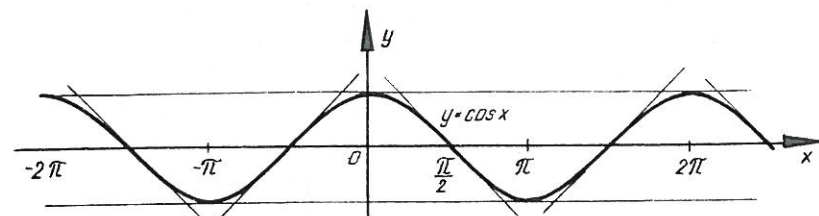
A függvényt $0 \leq x \leq 2\pi$ intervallumban az 5.89 ábra szemlélteti.

$\cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x+2k\pi)$, tehát

a függvény 2π szerint periodikus. $\cos(-x) = \cos x$, a függvény páros.



5.89 ábra



5.90 ábra

Az $y = \cos x$ függvény hosszabb szakaszon ábrázolva az 5.90 ábrán látható.

Az $y = \cos x$ függvény

értelmezési tartománya: $-\infty < x < +\infty$,

értékkészlete: $-1 \leq y \leq 1$.

$y = \cos x$ viselkedése egy perióduson belül:

Legyen a periódus $0 \leq x \leq 2\pi$.

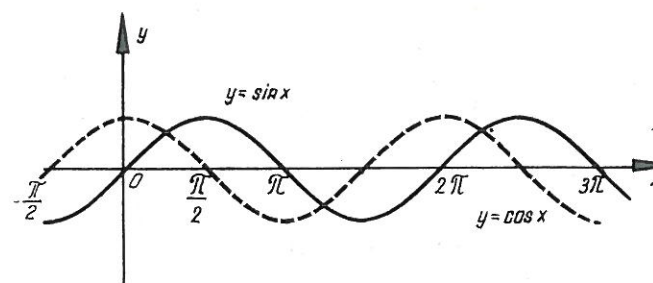
$0 < x < \pi$ -ben $y = \cos x$ monoton fogy,

$\pi < x < 2\pi$ -ben $y = \cos x$ monoton nő.

$y = \cos x$ függvénynek az $x = 0$ és $x = 2\pi$ helyeken maximuma van: $y = 1$;

az $x = \pi$ helyen minimuma van: $y = -1$.

Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ függvényeket. $y = \cos x$ ugyanazokat a függvényértékeket veszi fel, mint $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (5.91 ábra).



5.91 ábra

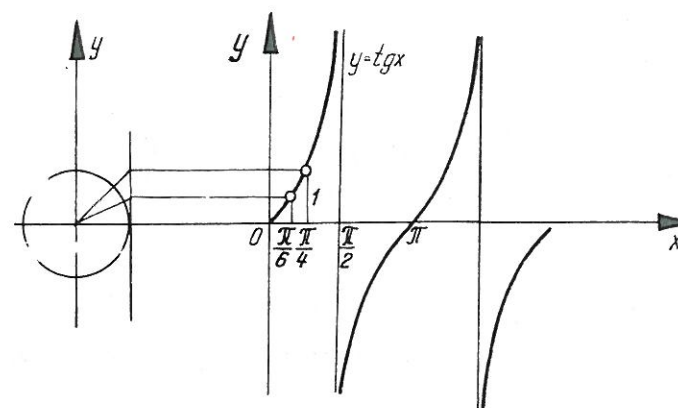
A szemléletesen belátható összefüggést addíciós tétellel igazoljuk:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

3. $y = \tan x$.

A függvényt a szög egy körforgásával ábrázolva beláthatjuk, hogy $y = \tan x$ az $x = \frac{\pi}{2}$

és $x = \frac{3\pi}{2}$ helyeken nincs értelmezve (5.92 ábra).



5.92 ábra

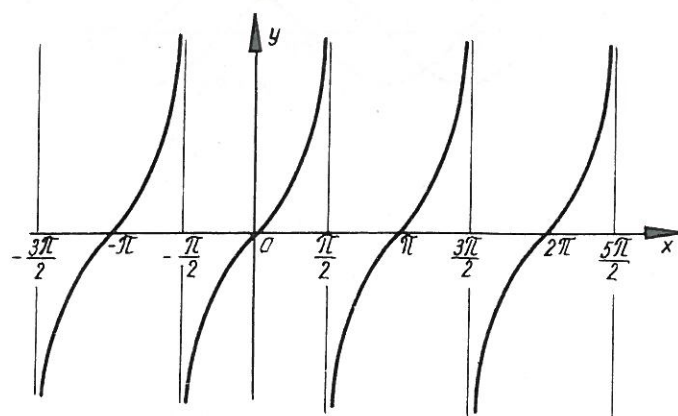
Ha $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ balról, $y \rightarrow +\infty$,
 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ jobbról, $y \rightarrow -\infty$,
 $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ balról, $y \rightarrow +\infty$,
 $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ jobbról, $y \rightarrow -\infty$.

Mivel $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x + k\pi)$, $y = \operatorname{tg} x$ π szerint periodikus.

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$

$$y = \operatorname{tg} x \quad \text{páratlan függvény.}$$

$y = \operatorname{tg} x$ -et hosszabb szakaszon ábrázolva az 5.93 ábra mutatja.



5.93 ábra

Az $y = \operatorname{tg} x$ egymással párhuzamos görbékkel áll. A függvény π szerint periodikus, páratlan.

A függvény az $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$) helyeken nincs értelmezve, ezeken a helyeken szakadása van.

$y = \operatorname{tg} x$ az értelmezési tartományon belül monoton nő.

Értékkészlete $-\infty < y < +\infty$.

Zérushelyei $x = k\pi$ pontok (ahol $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$).

$y = \operatorname{tg} x$ -nek az $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $\dots$, $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $\dots$ egyenesek aszimptótái.

4. $y = \operatorname{ctg} x$.

Az $y = \operatorname{ctg} x$ függvénynek az $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2; \dots$) helyeken szakadása van.

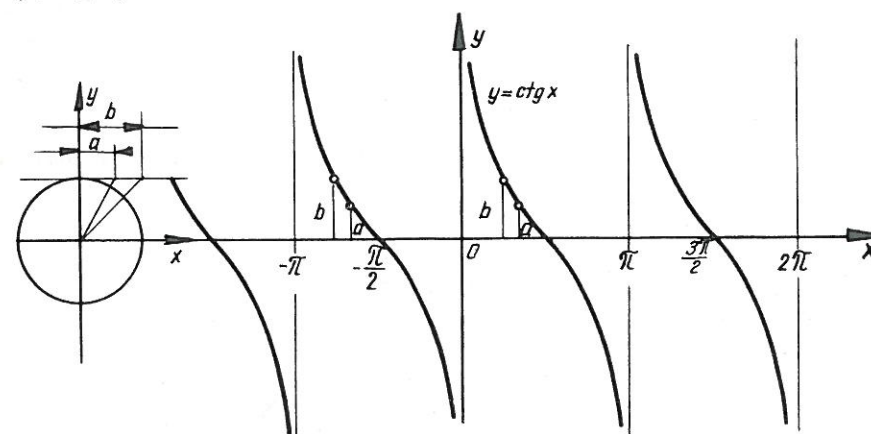
$$x \rightarrow 0 \quad \text{balról,} \quad y \rightarrow -\infty,$$

$$x \rightarrow 0 \quad \text{jobbról,} \quad y \rightarrow +\infty.$$

Értékkészlete:

$$-\infty < y < +\infty.$$

A függvény az értelmezési tartományon belül monoton csökkenő párhuzamos ágakból áll (5.94 ábra).



5.94 ábra

$y = \operatorname{ctg} x$ -nek az $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$, $\dots$ $x = k\pi$, $\dots$ egyenesek aszimptótái.

Az $y = \operatorname{tg} x$ és $y = \operatorname{ctg} x$ függvények tulajdonságait megállapíthatjuk az

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{és} \quad y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

összefüggések alapján is.

A függvények nincsenek értelmezve a nevezők zérushelyein. $y = \operatorname{tg} x$ nincs értelmezve, ha $\cos x = 0$, azaz $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. $y = \operatorname{ctg} x$ nincs értelmezve, ha $\sin x = 0$, azaz $x = k\pi$. A függvények π szerint periodikusak,

$$\text{pl.:} \quad \operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

5.3.5.2 A ciklotrimikus (arcus) függvények

1. $y = \arcsin x$.

(olv: arkusz szinusz x)

Az $y = \sin x$ függvény minden $-1 \leq y \leq 1$ értéket végtelen sokszor vesz fel. Létezik azonban inverz függvénye minden olyan intervallumban, amelyben a függvény monoton. Ezért az $y = \sin x$ függvény inverz függvénye létezik minden

$$(2k-1)\frac{\pi}{2} \leq x \leq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{szakaszban} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2; \dots).$$

Tekintsük az $y = \sin x$ függvényt a $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ szakaszon.

Inverz függvényét így jelöljük:

$$x = \operatorname{Arcsin} y.$$

A változók felcserélésével:

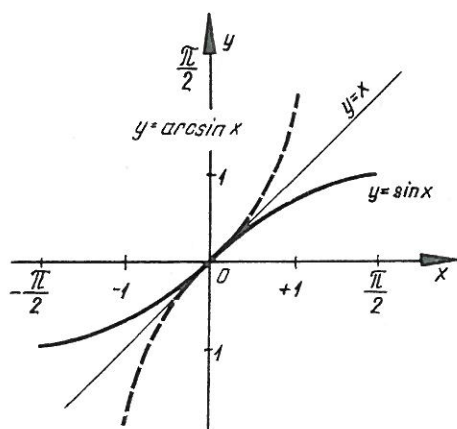
$$y = \operatorname{Arcsin} x \quad (5.95 \text{ ábra}).$$

$\operatorname{Arcsin} x$ tehát azt a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közötti értéket jelenti, amelynek szinusza x .

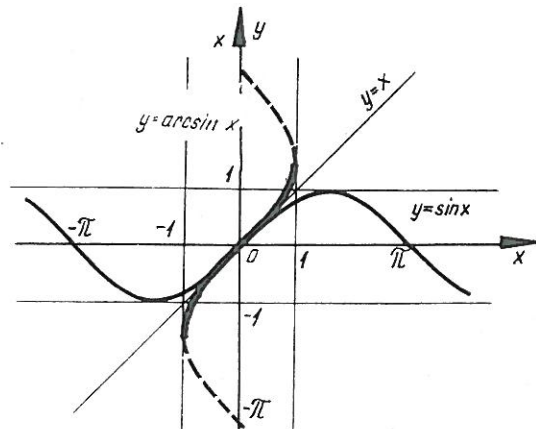
Tekintsük az $y = \sin x$ függvény monoton szakaszait. Az $y = \sin x$ függvény bármely monoton szakaszán az inverz függvényt így jelöljük:

$$y = \arcsin x$$

($\arcsin x$ tehát azon számok bármelyikét jelenti, amelyek szinusza x).



5.95 ábra



5.96 ábra

Az $y = \operatorname{Arcsin} x$ függvény az $y = \arcsin x$ függvény főértéke.

Az $y = \arcsin x$ függvény a főértékkel így adható meg:

$$\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{Arcsin} x + 2k\pi & (k = 0, \pm 1, \pm 2; \dots) \\ \pi - \operatorname{Arcsin} x + 2k\pi & (k = 0, \pm 1, \pm 2; \dots) \end{cases}$$

A függvény képe az 5.96 ábrán látható. A főértéket vastagított vonallal jeleztük.

Az $y = \operatorname{Arcsin} x$ függvény monoton növekedő, páratlan függvény. Értelmezési tartománya:

$$-1 \leq x \leq 1, \text{ értékkészlete: } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

2. $y = \arccos x$.

Az $y = \cos x$ függvény inverz függvénye létezik minden olyan szakaszon, ahol a függvény monoton, azaz minden

$k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ szakaszon ($k = 0, \pm 1, \pm 2; \dots$). Tekintsük az $y = \cos x$ függvényt a $(0; \pi)$ szakaszon.

Inverz függvényét így jelöljük:

$$x = \operatorname{Arccos} y.$$

A változók felcserélésével:

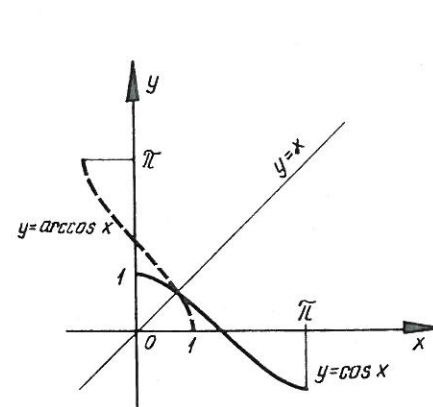
$$y = \operatorname{Arccos} x \quad (5.97 \text{ ábra}).$$

$\operatorname{Arccos} x$ tehát azt a 0 és π közötti értéket jelenti, amelynek koszinusza x .

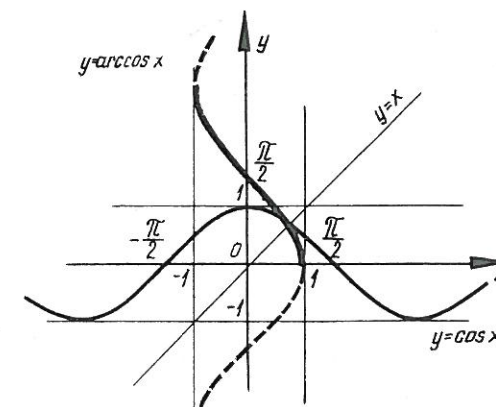
Az $y = \cos x$ függvény bármely monoton szakaszán az inverz függvényt így jelöljük:

$$y = \arccos x.$$

($\arccos x$ tehát azon számok bármelyikét jelöli, amelyek koszinusza x .)



5.97 ábra



5.98 ábra

Az $y = \operatorname{Arccos} x$ az $y = \arccos x$ függvény főértéke.

Az $y = \arccos x$ függvény a főértékkel így adható meg:

$$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{Arccos} x + 2k\pi & (k = 0, \pm 1; \pm 2; \dots) \\ -\operatorname{Arccos} x + 2k\pi & (k = 0, \pm 1; \pm 2; \dots) \end{cases}$$

Az $y = \arccos x$ értelmezési tartománya: $-1 \leq x \leq 1$.

(Az $y = \operatorname{Arccos} x$ értékkészlete $0 \leq y \leq \pi$, a függvény monoton fogy.)

A függvény képét lásd az 5.98 ábrán. A főértéket vastagított vonallal jeleztük.

Tétel. Az $\operatorname{Arcsin} x$ és $\operatorname{Arccos} x$ főértékekre igaz a következő összefüggés:

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}.$$

Bizonyítás. Minden α szögre érvényes, hogy

$$\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

α helyére $\operatorname{Arcsin} x$ -et írva:

$$\sin (\operatorname{Arcsin} x) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x \right).$$

Az $\text{Arcsin } x$ és $\text{Arccos } x$ definíciójából adódóan:

$$\sin(\text{Arcsin } x) = x, \quad \text{és} \quad \cos(\text{Arccos } x) = x,$$

így $\sin(\text{Arcsin } x) = \cos(\text{Arccos } x),$

azaz $\cos(\text{Arccos } x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } x\right).$

Mivel $0 \leq \text{Arccos } x \leq \pi,$ illetve

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } x \leq \pi,$$

és a koszinuszfüggvény $[0, \pi]$ -ben minden értéket pontosan egyszer vesz fel, a koszinuszok egyenlőségéből a szögek egyenlősége is következik:

$$\text{Arccos } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } x.$$

Tehát

$$\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2} \quad (5.99 \text{ ábra}).$$

3. $y = \text{arctg } x.$

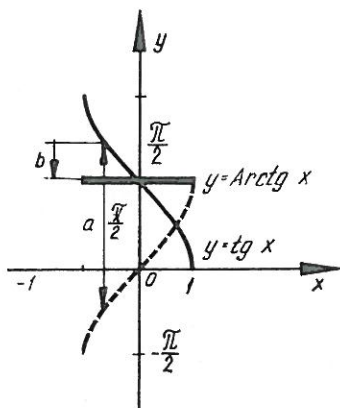
Az $y = \text{tg } x$ függvény a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban szigorúan monoton nő. Létezik inverz függvénye, ezt így jelöljük:

$$x = \text{Arctg } y,$$

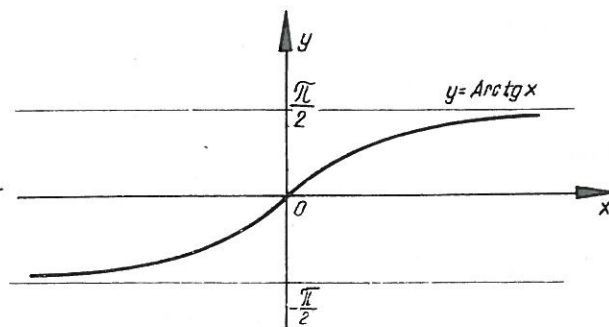
illetve a változók felcserélésével:

$$y = \text{Arctg } x \quad (5.100 \text{ ábra}).$$

$\text{Arctg } x$ tehát azt a számot jelöli a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban, amelynek tangense x .



5.99 ábra



5.100 ábra

Ha az $y = \text{tg } x$ függvény többi monoton szakaszában képezzük az inverz függvényt, ezt így jelöljük:

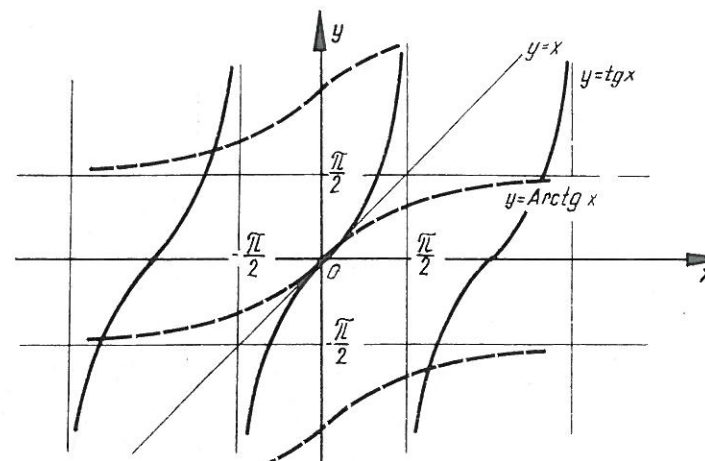
$$y = \text{arctg } x.$$

Az $y = \text{Arctg } x$ függvényt az $y = \text{arctg } x$ függvény főértékének nevezzük.

A főérték segítségével:

$$\text{arctg } x = \text{Arctg } x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2; \dots).$$

$\text{arctg } x$ tehát azon számok bármelyikét jelenti, amelyek tangense x .



5.101 ábra

Az $y = \text{arctg } x$ képe az $y = \text{tg } x$ képének tükörképe az $y = x$ egyenesre (5.101 ábra).

Az $y = \text{Arctg } x$ tulajdonságai:

Értelmezési tartománya: $-\infty < x < +\infty.$

Értékkészlete: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$

Monoton növekvő, páratlan függvény. Az $y = -\frac{\pi}{2}$ és $y = \frac{\pi}{2}$ vízszintes egyenesek aszimptótái. ($y = \text{tg } x$ -nek függőleges aszimptótái vannak.)

4. $y = \text{arctg } x.$

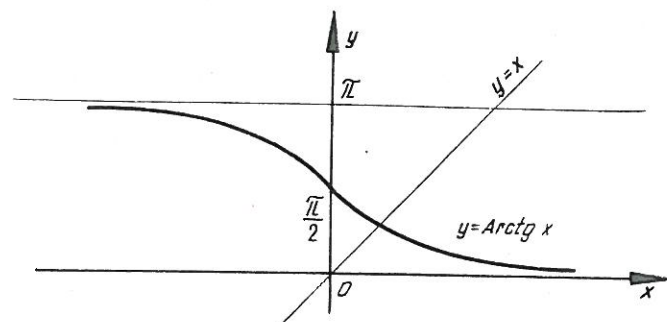
Az $y = \text{ctg } x$ függvény a $(0; \pi)$ intervallumban szigorúan monoton fogy. Létezik inverze, ezt így jelöljük:

$$x = \text{Arcctg } y. \quad \text{A változók felcserélésével:}$$

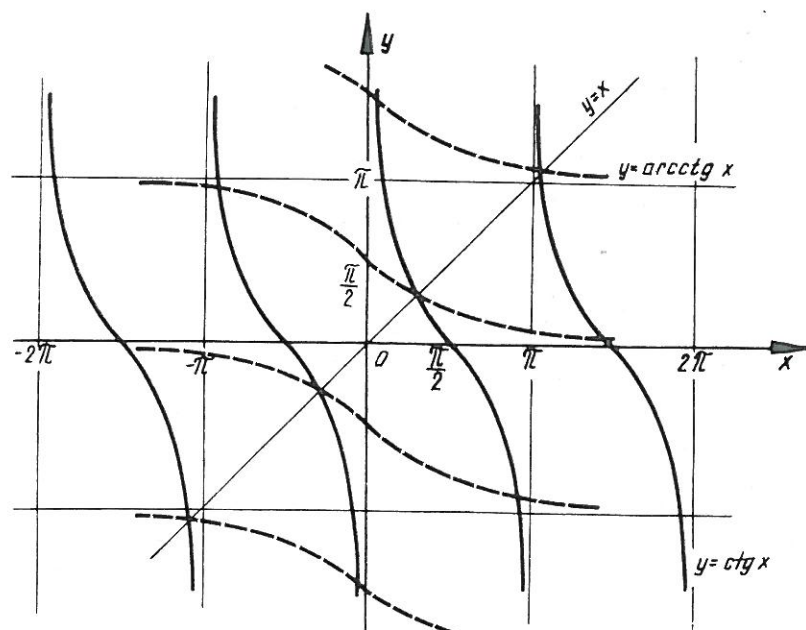
$$y = \text{Arcctg } x \quad (5.102 \text{ ábra}).$$

Az $y = \text{ctg } x$ függvény többi monoton szakaszán az inverz függvény:

$$y = \text{arctg } x \quad (5.103 \text{ ábra}).$$



5.102 ábra



5.103 ábra

Az $y = \text{Arctg } x$ függvény az $y = \text{arctg } x$ függvény főértéke.

$$\text{arctg } x = \text{Arctg } x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2; \dots).$$

Az $y = \text{Arctg } x$ görbét az $y = \text{ctg } x$ függvény görbéje $(0; \pi)$ szakaszának az $y = x$ egyenesre való tükrözésével kaphatjuk. Az $y = \text{Arctg } x$ függvény értelmezési tartománya:

$(-\infty; +\infty)$, értékkészlete $0 < y < \pi$. A függvény az értelmezési tartományban monoton fogy.

Tétel. Az $\text{Arctg } x$ és $\text{Arcctg } x$ főértékekre érvényes a következő összefüggés:

$$\text{Arctg } x + \text{Arcctg } x = \frac{\pi}{2}.$$

Bizonyítás. $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ szögekre érvényes:

$$\text{tg } \alpha = \text{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Legyen $\alpha = \text{Arctg } x$.

$$\text{tg} (\text{Arctg } x) = \text{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctg } x \right).$$

A definícióból következik, hogy

$$\begin{aligned} \text{tg} (\text{Arctg } x) &= x \quad \text{és} \\ \text{ctg} (\text{Arcctg } x) &= x, \quad \text{így} \\ \text{tg} (\text{Arctg } x) &= \text{ctg} (\text{Arcctg } x). \end{aligned}$$

$$\text{Ezért} \quad \text{ctg} (\text{Arcctg } x) = \text{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctg } x \right).$$

$$\text{Mivel} \quad 0 < \text{Arcctg } x < \pi,$$

$$0 < \frac{\pi}{2} - \text{Arctg } x < \pi,$$

és a $(0, \pi)$ intervallumban a kotangens függvény minden értékét pontosan egyszer veszi fel, ezért a kotangensek egyenlőségéből a szögek egyenlősége következik:

$$\text{Arcctg } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg } x.$$

Tehát

$$\text{Arctg } x + \text{Arcctg } x = \frac{\pi}{2}.$$

5.3.5.3 Feladatok a trigonometrikus és ciklometrikus függvények alkalmazására

a) Mi az értelmezési tartománya a következő trigonometrikus, illetve ciklometrikus függvények segítségével összetett függvényeknek?

1. $v = \text{tg } 2x$

A függvény szakadási helyei a $2x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ pontok, azaz, ahol $2x \cdot \frac{\pi}{2}$ páratlan számú többszöröseivel egyenlő.

$$2x = \dots - \frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \dots;$$

azaz

$$x = -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \dots$$

A függvény a szakadási pontokon kívül mindenütt értelmezve van.

$$2. y = \arccos(3x+2).$$

A függvény ott van értelmezve, ahol

$$\begin{aligned} -1 &\leq 3x+2 \leq 1, & \text{azaz} \\ -3 &\leq 3x \leq -1. \end{aligned}$$

Az értelmezési tartomány: $-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$.

b) Írjuk fel a következő függvények inverz függvényeit:

$$1. y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 3, \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$y - 3 = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right).$$

$2x - \frac{\pi}{2}$ az a szög, amelynek szinusza $(y-3)$, azaz

$$2x - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arcsin}(y-3). \quad \text{Innen:}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arcsin}(y-3).$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(y-3).$$

A változók szerepét felcserélve:

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(x-3).$$

$$2. y = 3 \operatorname{Arctg} \frac{x}{2} - 4.$$

Az egyenletből

$$y + 4 = 3 \operatorname{Arctg} \frac{x}{2}$$

$$\frac{y+4}{3} = \operatorname{Arctg} \frac{x}{2} \quad \left(-\frac{3\pi}{2} - 4 < y < \frac{3\pi}{2} - 4\right).$$

$\frac{x}{2}$ az a szög, amelynek tangense $\frac{y+4}{3}$, azaz

$$\frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{y+4}{3},$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{y}{3} + \frac{4}{3}\right).$$

$$x = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{y}{3} + \frac{4}{3}\right).$$

A változók szerepét felcserélve az inverz függvény:

$$y = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{x}{3} + \frac{4}{3}\right).$$

c) Ábrázoljuk a következő függvényeket:

$$1. y = 3 \sin(2x+1).$$

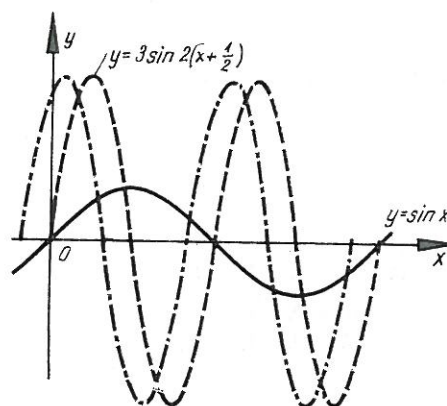
x együtthatóját kiemeljük:

$$y = 3 \sin 2 \left(x + \frac{1}{2}\right).$$

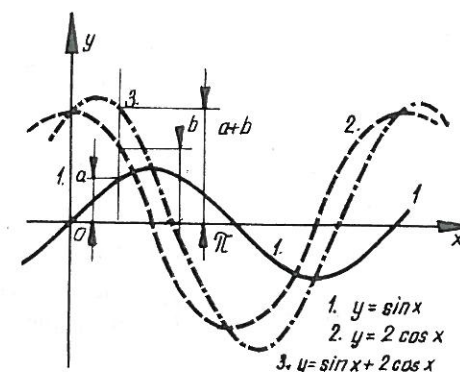
Az $y = \sin x$ függvény görbét az x tengely irányában felére nyomjuk össze, az y tengely irányában 3-szorosra nyújtjuk, végül az így kapott görbét $\frac{1}{2}$ egységgel balra toljuk el (5.104 ábra).

$$2. y = \sin x + 2 \cos x.$$

Elegendő egy 2π hosszúságú szakaszt vizsgálni, mert azon túl a $\sin x$ és $\cos x$ értékek ismétlődnek (5.105 ábra).



5.104 ábra



5.105 ábra

d) Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

$$1. \operatorname{Arcsin}(\sin x).$$

Az inverz függvény fogalmából adódóan, ha $y = f(x)$ függvény inverze $y = \varphi(x)$, akkor

$$f[\varphi(x)] = x.$$

Ezért az $\operatorname{Arcsin} x$ definíciójából következik: ha $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x.$$

Hasonlóan a definícióból következik:

$$\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$\operatorname{Arccos}(\cos x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

$$\cos(\operatorname{Arccos} x) = x \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$\operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} x) = x \quad -\infty < x < +\infty.$$

2. $\cos(\operatorname{Arcsin} x)$.

$$\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - (\sin \operatorname{Arcsin} x)^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Mivel $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arcsin} x \leq \frac{\pi}{2}$, ebben az intervallumban pedig a koszinusz pozitív, a gyök előjele pozitív.

Így

$$\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$3. \operatorname{Arcsin}(\cos x) = \operatorname{Arcsin}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$4. \operatorname{tg}(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{\sin(\operatorname{Arcsin} x)}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

5. $\sin \operatorname{Arctg} x$.

Mivel

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\sin \operatorname{Arctg} x = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{Arctg} x}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \operatorname{Arctg} x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

6. $\arcsin(\sin x)$.

$$\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{Arcsin} x + 2k\pi & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ \pi - \operatorname{Arcsin} x + 2k\pi & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

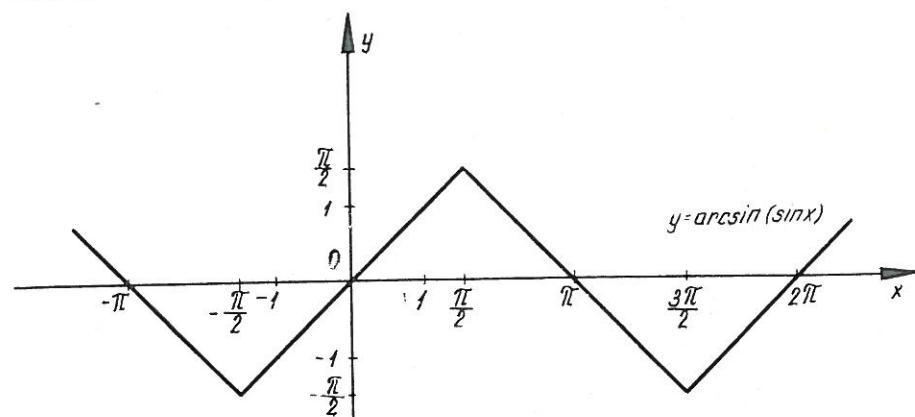
$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} \operatorname{Arcsin}(\sin x) + 2k\pi & (k = 0, \pm 1, \dots) \\ \pi - \operatorname{Arcsin}(\sin x) + 2k\pi & (k = 0, \pm 1, \dots) \end{cases}$$

Ezért

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{és} \quad f(x + 2k\pi) = f(x).$$

Ábrázoljuk az $y = \arcsin(\sin x)$ függvényt (5.106 ábra).



5.106 ábra

7. $\sin(\operatorname{arcsin} x)$.

$$\sin(\operatorname{arcsin} x) = \begin{cases} \sin(\operatorname{Arcsin} x + 2k\pi) = x \\ \sin(\pi - \operatorname{Arcsin} x + 2k\pi) = x. \end{cases}$$

A függvény képe az

$$y = x \text{ egyenes} \quad -1 \leq x \leq 1 \text{ szakasza.}$$

$$8. \cos(\operatorname{arcsin} x) = \sqrt{1 - (\sin \operatorname{arcsin} x)^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ha $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsin} x < \frac{\pi}{2}$, a gyök előjele pozitív, ha $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsin} x < \frac{3\pi}{2}$, a gyök előjele negatív. Hasonlóan változik az előjel az $\operatorname{arcsin} x$ megfelelő többi szakaszában.

e) *Rezgéstan alkalmazások*

$$\begin{aligned} \text{Az} \quad y &= r \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{és} \\ x &= r \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

mozgásegyenletek egy-egy lineáris harmonikus mozgást írnak le ($r > 0$, $\omega > 0$).

E mozgásokat megkapjuk, ha az r sugarú kör kerületén ω szögsebességgel mozgó P pontot a koordinátatengelyekre vetítjük.

Legyen a mozgás kezdeti pontja P_0 , α a kezdő fázis, ω a szögsebesség.

A t idő alatt végzett szögelfordulás: ωt (5.107 ábra).

Az x és y mozgásegyenletekben r a maximális kilengés vagy amplitúdó, ω az úgynevezett kör-frekvencia. A rezgés ideje: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

A rezgés periódusa, az úgynevezett frekvencia:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}.$$

Így az

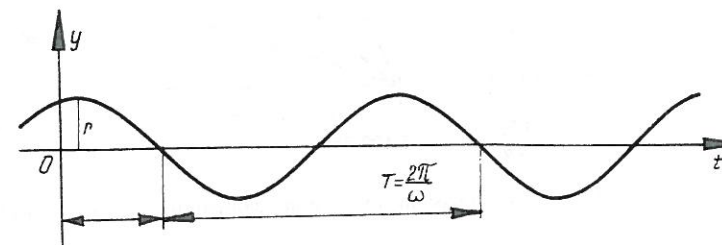
$$y = r \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{rezgő mozgás képe: 5.108 ábra.}$$

Rezgő mozgást végez egy rugóra függesztett tömegpont, ha a rugót megnyújtás után elengedjük, mindaddig, amíg a maximális kilengés állandónak tekinthető.

Gyakran fordul elő különböző harmonikus mozgások összege, azaz ilyen alakú függvény:

$$y = r_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + r_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + r_n \sin(\omega_n t + \alpha_n).$$

Az összeg a harmonikus mozgások szuperpozíciója.



5.108 ábra

Egyenlő frekvenciájú rezgéseket összegezve az eredő ugyanolyan frekvenciájú harmonikus rezgés lesz.

Legyen

$$y_1 = r_1 \sin(\omega t + \alpha_1),$$

$$y_2 = r_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

Azt állítjuk, hogy

$$y_1 + y_2 = r(\sin \omega t + \alpha) \text{ alakban írható.}$$

Azaz

$$r_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + r_2 \sin(\omega t + \alpha_2) = r \sin(\omega t + \alpha).$$

Az egyenlet bal oldalát az addíciós tétellel átalakítva, majd rendezve:

$$\begin{aligned} r_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + r_2 \sin(\omega t + \alpha_2) &= \\ &= r_1 \sin \omega t \cos \alpha_1 + r_1 \cos \omega t \sin \alpha_1 + r_2 \sin \omega t \cos \alpha_2 + \\ &+ r_2 \cos \omega t \sin \alpha_2 = \\ &= (r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2) \sin \omega t + \\ &+ (r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Jelöljük az utolsó zárójelekben levő állandókat a következőképpen:

$$r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2 = r \cos \alpha,$$

$$r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2 = r \sin \alpha.$$

Az összeg így írható:

$$\begin{aligned} r_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + r_2 \sin(\omega t + \alpha_2) &= \\ &= r \cos \alpha \sin \omega t + r \sin \alpha \cos \omega t = r \sin(\omega t + \alpha), \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

A kapott harmonikus rezgő mozgás:

$$y = r \sin(\omega t + \alpha)$$

r amplitúdóját és α kezdő fázisát az

$$\left. \begin{aligned} r \cos \alpha &= r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2 \\ r \sin \alpha &= r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\}$$

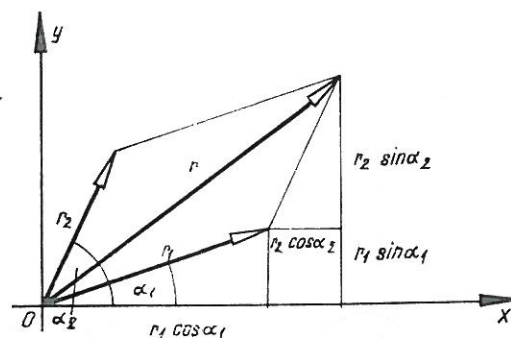
egyenletekből könnyen megkaphatjuk.

A két egyenlet négyzetét összeadva:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

A második egyenletet az elsővel elosztva:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2}{r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2}.$$



5.109 ábra

Az eredő rezgés r amplitúdója és α kezdő fázisa az ábra szerint geometriailag könnyen meghatározható (5.109 ábra).

Ha két különböző frekvenciájú mozgást szuperponálunk, az eredő nem lesz harmonikus.

Ha ω_1 és ω_2 viszonya racionális, az eredő periodikus, de nem harmonikus mozgás. A grafikon periodikus, de nem szinuszcörbe.

Periodikus mozgást kapunk, ha

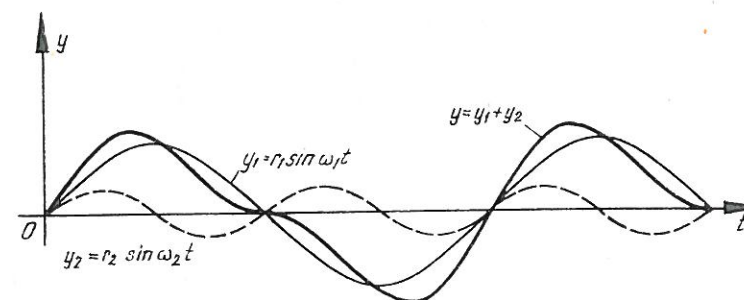
$$\omega_1 = p\omega \quad \text{és} \quad \omega_2 = q\omega, \quad \text{ahol } p \text{ és } q \text{ relatív prim.}$$

$$y_1 = r_1 \sin \omega_1 t \quad \text{és} \quad y_2 = r_2 \sin \omega_2 t.$$

$$y = r_1 \sin \omega_1 t + r_2 \sin \omega_2 t.$$

Az eredő mozgás periódusa

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.110 \text{ ábra}).$$



5.110 ábra

A rezgések összetételének fontos esete a „lebegés”. Az amplitúdók egyenlők, a két rezgésszám viszonya racionális, és közöttük kicsiny különbség van.

$$y_1 = r \sin \omega_1 t,$$

$$y_2 = r \sin \omega_2 t.$$

$$y_1 + y_2 = r(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) =$$

$$= 2r \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

Az eredő mozgás amplitúdója:

$$R = 2r \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$$

periodikusan változik 0 és $2r$ között (5.111 ábra).

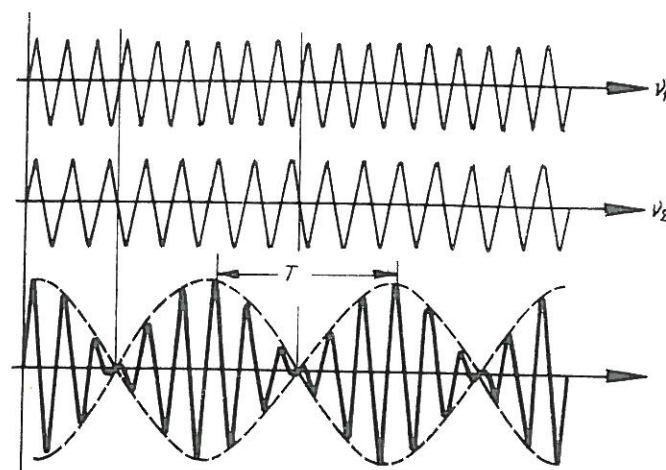
Az amplitúdó változását nevezik lebegésnek.

A rezgés frekvenciája: $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

$$v_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}, \quad v_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \quad \text{jelöléssel:}$$

a lebegések száma 2 s alatt $v_1 - v_2$,

az eredő mozgás rezgésszáma pedig $\frac{v_1 + v_2}{2}$.



5.111 ábra

Példák

1. Két hangvilla rezgésénél, ha a rezgésszám kevésbé különböző, lebegés áll elő; a lebegés frekvenciája megadja, hogy 1 s alatt hányszor lesz maximális a hangerősség.

2. A váltakozó áram feszültsége (u) és erőssége (i) ohmikus ellenállás esetén

$$u = U_{\max} \sin \omega t,$$

$$i = I_{\max} \sin \omega t.$$

Önindukciós, ohmos és kapacitív ellenállás esetén

$$u = U_{\max} \sin \omega t,$$

$$i = I_{\max} \sin (\omega t - \varphi),$$

ahol

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}.$$

(ω a körfrekvencia,
 L az önindukciós együttható,
 C a kapacitás,
 R az ohmikus ellenállás.)

5.4 A függvények osztályozása

A függvényeket különböző szempontok szerint osztályozhatjuk. Így a függvényt megadó képletek szerint a függvények lehetnek:

a) **Elemi alapfüggvények és elemi függvények.** Elemi alapfüggvények a következő függvények:
 hatványfüggvény: $y = x^a$, ahol a állandó valós szám;
 exponenciális függvény: $y = a^x$, ahol a állandó pozitív szám;

logaritmusfüggvény: $y = \log_a x$, ahol a logaritmus alapja (a) pozitív szám;
 a trigonometrikus függvények: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
 a ciklotrimetrikus függvények: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ és $y = \operatorname{arccotg} x$.

Elemi függvény az a függvény, amely véges számú aritmetikai művelet (összeadás, kivonás, szorzás és osztás) és az összetett függvény képzésének véges számú alkalmazása segítségével nyerhető az elemi alapfüggvényekből, és így egyetlen analitikus kifejezéssel adható meg.

b) **Explicit és implicit módon adott függvények.** Explicit a függvény, ha a függvénykapcsolat x és y között y -ra kifejezve van megadva.

Explicit függvények például:

$$y = 3^{2x-5} + 5.$$

Implicit a függvény, ha az egyenlet nem y -ra megoldott alakban adott.

Implicit függvények például:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$y^3 - 2xy^2 + 5x^2 - 6y + 3 = 0,$$

$$xy^2 + 2x - 3y = 4.$$

Az első egyenletből könnyen megadható y explicit alakja, a másodikból már nehezebben (harmadfokú egyenlettel), a harmadikból nem tudjuk y -t explicit véges számú algebrai művelet és elemi alapfüggvények segítségével kifejezni.

Az explicit függvény jelölése: $y = f(x)$, az implicit függvényé: $F(x; y) = 0$.

c) **Algebrai és transzcendens függvények.** Ha a függvény implicit alakban adott, azaz

$$F(x; y) = 0$$

és $F(x; y)$ az $a_{ik}x^i y^k$ (i és k nem negatív egész számok) típusú tagok összege, akkor az

$$F(x; y) = 0$$

függvényt algebrai függvénynek nevezzük.

Az algebrai egészfüggvény explicit alakban adott eseteire a racionális egész- és törtfüggvények, valamint az irracionális függvények tárgyalásánál láttunk példákat.

A nem algebrai függvényeket transzcendens függvényeknek nevezzük.

Példák

$$\begin{aligned} y &= \sin x; & y &= \operatorname{arctg}(3x-1); \\ y &= \log_3 x; & y &= 2^{x+3} - 5. \end{aligned}$$