

2.3.4	Vektorok vegyes szorzata	74
2.3.5	A vektori és a vegyes szorzat geometriai alkalmazása	76
2.3.6	Vektor felbontása összetevőire	78
2.4	A vektoralgebra alkalmazása	80
2.4.1	A vektoralgebra alkalmazása az analitikus geometriában	80
2.4.1.1	A pont analitikus geometriája	80
2.4.1.2	Az egyenes egyenletrendszere	83
2.4.1.3	Az egyenes síkbeli egyenletei	85
2.4.1.4	A sík egyenlete	92
2.4.1.5	Metszéspont, dőféspont, metszészvonal	95
2.4.1.6	Távolságfeladatok	97
2.4.1.7	Vetületfeladatok	100
2.4.1.8	Tükrözési feladatok	101
2.4.2	Néhány geometriai tétel bizonyítása vektorokkal	105
2.4.3	Mechanikai alkalmazások	107
3.	KÚPSZELETEK	
3.1	Koordináta transzformációk	114
3.1.1	A koordináta-rendszer párhuzamos eltolása	114
3.1.2	A koordináta-rendszer elforgatása	114
3.2	Kúpszeletek	115
3.2.1	A kör	115
3.2.1.1	A kör egyenlete	116
3.2.1.2	A kör érintője	117
3.2.2	A parabola	118
3.2.3	Az ellipszis és a hiperbola	120
3.2.3.1	Az ellipszis	120
3.2.3.2	A hiperbola	121
3.2.3.3	Az ellipszis és a hiperbola egyenlete	122
3.2.3.4	Az ellipszis főköre	127
3.2.4	A kúp síkmetszetei	128
3.2.5	A kúpszeletek csúcsponti egyenlete	128
3.2.6	A kúpszeletek fokális egyenlete	131
3.2.7	Másodrendű görbék	134
4.	KOMPLEX SZÁMOK	
4.1	A komplex számok algebrai alakja	143
4.2	Műveletek az algebrai alakban adott komplex számokkal	144
4.3	A komplex számok trigonometrikus alakja	148
4.4	Műveletek a trigonometrikus alakban adott komplex számokkal	149
5.	FÜGGVÉNYEK	
5.1	A halmazelmélet alapfogalmai	155
5.2	Függvénytani alapfogalmak	162
5.2.1	A függvény fogalma	162

5.2.2	A függvény megadásának módjai	163
5.2.3	A függvények ábrázolása	164
5.2.4	Értelmezési tartomány	165
5.2.5	Értékkészlet	166
5.2.6	A függvény definíciója halmazokkal	166
5.2.7	Páros és páratlan függvények. Periodicitás	167
5.2.8	A függvények növekedése, fogyása, maximuma, minimuma	169
5.2.9	A függvény transzformációja. Függvények grafikus összetétele (görbék szuperpozíciója)	170
5.3	Elemi függvények	173
5.3.1	Racionális egészfüggvények	173
5.3.1.1	A lineáris függvény és az egyenes arány	173
5.3.1.1.1	A növekmény	174
5.3.1.1.2	A lineáris interpoláció	175
5.3.1.2	A másodfokú függvény	176
5.3.1.3	A harmadfokú függvény	181
5.3.1.4	A Newton-féle interpoláció	185
5.3.2	Racionális törtfüggvények	190
5.3.2.1	Lineáris törtfüggvények	191
5.3.2.2	Másodfokú törtfüggvények	196
5.3.3	A hatványfüggvény	198
5.3.3.1	Az inverz függvény fogalma	200
5.3.3.2	Az összetett függvény fogalma	203
5.3.3.3	Irracionális függvények	204
5.3.4	Az exponenciális és a logaritmus függvény	205
5.3.4.1	Az exponenciális függvény	205
5.3.4.2	A logaritmus függvény	207
5.3.5	Trigonometrikus és ciklometrikus függvények	210
5.3.5.1	A trigonometrikus függvények	210
5.3.5.2	A ciklometrikus (arcus) függvények	215
5.3.5.3	Feladatok a trigonometrikus és ciklometrikus függvények alkalmazására	221
5.4	A függvények osztályozása	228
6.	A HATÁRÉRTÉK	
6.1	Számsorozatok határértéke	230
6.1.1	A számsorozat	230
6.1.2	Monoton sorozatok	232
6.1.3	Sorozatok korlátossága	233
6.1.4	Sorozatok határértéke	233
6.1.5	Műveletek sorozatokkal	238
6.1.6	Konvergencia kritériumok	243
6.1.7	Az „e” szám	250
6.2	Függvények határértéke	254
6.2.1	Határértékekre vonatkozó tételek	256
6.2.2	Példák függvények határértékére	258

6.2.3 A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ és $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ határértékek	261
6.3 Függvények folytonossága	266
6.3.1 Zárt intervallumban folytonos függvények tulajdonságai	269
6.3.2 Néhány függvény folytonosságának vizsgálata	271
7. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS	
7.1 A differenciálszámítás alapfogalmai	280
7.1.1 A differenciálhányados fogalma	281
7.1.2 Példák függvények deriváltjainak kiszámítására	283
7.1.3 Differenciálási szabályok	284
7.1.3.1 Hiperbolikus függvények	303
7.1.3.2 Az area függvények	307
7.1.3.3 A differenciálási szabályok összefoglalása	313
7.1.4 Grafikus differenciálás	314
7.1.5 A differenciál	315
7.1.6 A differenciálszámítás középértéktételei	317
7.2 A differenciálszámítás alkalmazása	321
7.2.1 Síkgörbék érintője és normálisa	321
7.2.2 Polinomok Taylor-formulája	324
7.2.3 A függvény menetének vizsgálata	325
7.2.3.1 Függvények helyi növekedése, fogyása	325
7.2.3.2 Függvények helyi (lokális) szélsőértéke	329
7.2.3.3 Görbék konvex és konkáv szakaszai. Inflexiós pont	335
7.2.3.4 A függvényvizsgálat általános menete	341
7.2.4 Egyenletek közelítő megoldása	345
7.2.5 Síkgörbék aszimptótája	347
7.2.6 A l'Hospital szabály	350
7.2.7 A simuló kör	360
7.3 Síkgörbék paraméteres egyenletrendszere	363
7.3.1 Paraméteres egyenletekkel megadott görbék	363
7.3.2 A paraméteres alakban adott görbék érintőjének meghatározása	371
7.3.3 Paraméteresen adott görbék simuló köre	372
7.4 Síkgörbék polárkoordinátás egyenlete	374
7.4.1 Polárkoordinátás egyenletekkel megadott görbék	375
7.4.2 Polárkoordinátákban megadott görbék érintőjének meghatározása	383
8. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS	
8.1 Határozott integrál	386
8.1.1 A görbe alatti terület	386
8.1.2 A határozott integrál fogalma	393
8.1.3 A határozott integrál tulajdonságai	395
8.1.4 Az integrálszámítás középértéktétele	398
8.1.5 Az integrálszámítás alaptétele	399
8.2 Határozatlan integrál	404
8.2.1 A határozatlan integrál fogalma	404

8.2.2 Alapintegrálok	405
8.2.3 Általános integrálási szabályok	406
8.2.4 Integrálás helyettesítéssel	407
8.2.5 Parciális integrálás	414
8.2.6 Racionális törtfüggvények integrálása	417
8.2.7 Irracionális függvények integrálása	428
8.2.8 Exponenciális függvényből racionálisan felépülő függvények integrálása	433
8.2.9 Trigonometrikus függvények integrálása	435
8.3 A határozott integrál alkalmazása	442
8.3.1 Határozott integrálok kiszámítása határozatlan integrálok segítségével	442
8.3.2 Területszámítás	452
8.3.3 Síkgörbék ívhossza	459
8.3.3.1 A görbület	467
8.3.4 Térfogatszámítás	469
8.3.4.1 Forgástestek térfogata	471
8.3.5 Forgástestek felszíne	477
8.3.6 Gyakorlati feladatok térfogat- és felszínszámításra	484
8.3.7 Fizikai alkalmazások	487
8.3.8 Néhány mezőgazdasági gépészeti feladat	490
8.4 Határozott integrálok közelítő számítása	493
8.4.1 Numerikus integrálás	493
8.4.1.1 A téglalapszabály	493
8.4.1.2 A trapézsabály	494
8.4.1.3 A Simpson-formula	495
8.4.2 Grafikus integrálás	497
8.5 Improprius integrálok	498
8.5.1 Függvények integrálása végtelen intervallumban	498
8.5.2 Nem korlátos függvények integrálása	501
8.5.3 Az improprius integrálok konvergencia kritériumai	504
9. VÉGTELEN SOROK	
9.1 Numerikus sorok	509
9.1.1 A végtelen sor konvergenciája	509
9.1.2 Pozitív tagú sorok	513
9.1.3 Váltakozó előjelű sorok	520
9.1.4 Abszolút konvergens sorok	522
9.1.5 Feltételesen konvergens sorok	523
9.2 Függvénysorok	524
9.2.1 Függvénysorok konvergenciája	524
9.2.2 Függvénysorok integrálása és differenciálása	526
9.2.3 Hatványsorok	528
9.2.3.1 A Taylor-sor. A Taylor-formula	533
9.2.3.2 Néhány függvény Maclaurin-sora	538
9.2.3.3 A binomiális sor	546

Az egységet bal felé egymás után felmérve az így adódó pontokhoz a *negatív számokat* rendeljük; a -szori felmérés után kapott ponthoz a $-a$ számot rendeljük (1.2 ábra).

Definíció szerint:

$$a + (-a) = a - a = 0.$$

$$a + (-b) = a - b.$$

Ebből következik: $a - (-b) = a + b$.

Az összeadás és a szorzás művelete kiterjeszthető a nullára és a negatív egész számokra úgy, hogy a műveleti szabályok továbbra is érvényben maradjanak.

A (-1) -gyel való szorzás megfelel a kezdőpontra való tükrözésnek. Legyen a pozitív egész szám.

$$(-1) \cdot a = -a.$$

$$(-1) \cdot (-a) = a.$$

Törtszám. Az egész számok körében az összeadás, szorzás, kivonás, hatványozás mindig elvégezhető. Az osztás nem mindig végezhető el.

Pl. $8 : 4$ elvégezhető; $8 : 4 = 2$, mert $2 \cdot 4 = 8$. $2 : 3$ az egész számok körében nem végezhető el, mert nincs olyan egész szám, amely hárommal szorozva 2-t ad.

Ezért az egész számokat további számokkal bővítjük.

Az $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) törtszám, azt a számot jelenti, amelynek b -szerese a :

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Így pl: $2 : 3 = \frac{2}{3}$ az a szám, amelynek 3-szorosa 2.

$$\frac{2}{3} \cdot 3 = 2.$$

A nullával való osztást nem engedjük meg.

A törtszámok körében az összeadást, a szorzást és osztást a következő egyenletek alapján végezzük el:

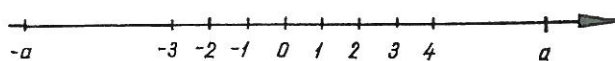
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Belátható, hogy a műveleti szabályok továbbra is érvényben maradnak.

Ha $b = 1$, akkor az $\frac{a}{b}$ törtszám megegyezik az a egész számmal.



1.3 ábra

Ha c bármely 0-tól különböző szám, akkor

$$\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}.$$

Speciálisan:

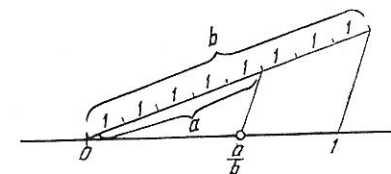
$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}.$$

Ezért mindig feltételezhetjük, hogy egy tört nevezője pozitív egész szám.

A törtszámok is ábrázolhatók a számegyenesen.

Ábrázoljuk az $\frac{a}{b}$ törtszámot. Legyen b pozitív egész szám.

Osszuk a számegyenes egységnyi darabját b egyenlő részre, és egy ilyen részt a kezdőpontból kiindulva mérjük fel a -szor jobb felé, ha a pozitív (1.3 ábra), vagy $(-a)$ -szor bal felé, ha a negatív.



1.3 ábra

Racionális számok. Az egész és törtszámok összességét racionális számoknak nevezzük.

Ha a $\frac{p_1}{q_1}$ tört számlálója és nevezője is osztható egy a számmal, azaz

$$p_1 = ap \quad \text{és} \quad q_1 = aq$$

(p és q egész számok), akkor

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p}{q}.$$

A $\frac{p}{q}$ szám a $\frac{p_1}{q_1}$ szám egyszerűsített alakja.

Minden tört felírható olyan alakban, amely tovább már nem egyszerűsíthető.

Tétel. A racionális számoknak megfelelő pontok a számegyenesen mindenütt sűrűn helyezkednek el.

A tétel azt jelenti, hogy ha r_1 és r_2 két olyan racionális szám, amelyek közül $r_1 < r_2$, akkor bármilyen kicsi ϵ két szám különbsége, közéjük végtelen sok racionális szám iktatható be.

Bizonyítás. Adjuk r_1 -hez az $\frac{r_2 - r_1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots, n, \dots$) számokat.

Mivel $\frac{r_2 - r_1}{n} > 0$, és $r_2 > r_1$,

$$r_1 < r_1 + \frac{r_2 - r_1}{n} = \frac{(n-1)r_1 + r_2}{n} < \frac{(n-1)r_2 + r_2}{n} = r_2.$$

Tehát

$$r_1 < r_1 + \frac{r_2 - r_1}{n} < r_2.$$

9.2.3.4	Sorfejtés végtelen mértani sor segítségével	551
9.2.3.5	Sorfejtés integrálás segítségével	552
9.2.3.6	Integrálás sorfejtéssel	554
9.2.3.7	Elliptikus integrálok	555
9.2.4	Komplex tagú sorok	557
9.3	Fourier-sorok	560
9.3.1	A 2π szerint periodikus függvények sorba fejtése	560
9.3.2	Tetszőleges periódusú függvények sorba fejtése	573
10.	TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK	
10.1	A többváltozós függvények fogalma	580
10.1.1	A többváltozós függvény megadása	580
10.1.2	Felületek jellemzése síkokkal való metszsvonalak segítségével	582
10.1.3	A kétváltozós függvények értelmezési tartománya	591
10.1.4	Többváltozós függvények határértéke és folytonossága	593
10.2	A többváltozós függvények differenciálhányadosai és differenciáljai	595
10.2.1	Parciális differenciálhányadosok	595
10.2.2	A teljes differenciál	600
10.2.2.1	Hibaszámitás	602
10.2.3	Az iránymenti differenciálhányados	604
10.2.4	Az érintő egyenes egyenletrendszere	606
10.2.5	Az érintő sík egyenlete	607
10.2.6	Többváltozós összetett függvények differenciálása	609
10.3	Taylor-formula és Taylor-sor. Implicit függvények deriválása. Kétváltozós függvények szélsőértéke	611
10.3.1	Kétváltozós függvények Taylor-formulája és Taylor-sora	611
10.3.2	A Lagrange-féle középértéktétel kétváltozós függvényekre	613
10.3.3	Implicit függvények deriválása	613
10.3.4	Kétváltozós függvények szélsőértékei	616
10.3.5	Kétváltozós függvények feltételes szélsőértékei	621
10.4	Síkgörbék szinguláris pontjai. Görbeseregek burkoló görbéi	624
10.4.1	Síkgörbék szinguláris pontjai	624
10.4.2	Görbeseregek burkoló görbéi	630
10.5	Többváltozós függvények integrálása	635
10.5.1	A kettős integrál	635
10.5.1.1	Síkbeli ponthalmazok területe	635
10.5.1.2	Kettős integrál fogalma	636
10.5.1.3	A kettős integrál egzisztenciátételei	637
10.5.1.4	A kettős integrál tulajdonságai	639
10.5.1.5	A kettős integrál kiszámítása	640
10.5.1.6	A kettős integrál változóinak transzformációja	649
10.5.1.6.1	Polárkoordináták	650
10.5.1.6.2	Elliptikus koordináták	653
10.5.2	A kettős integrál alkalmazása	654
10.5.2.1	Területszámitás	654
10.5.2.2	Térfogatszámítás	656

10.5.2.3	Felszínszámitás	660
10.5.2.4	A kettős integrál alkalmazása a mechanikában	663
10.5.2.4.1	Súlypontszámítás	663
10.5.2.4.1.1	Lemez súlypontjának kiszámítása	665
10.5.2.4.1.2	Anyagi görbe súlypontja	669
10.5.2.4.1.3	Forgásfelület súlypontja	672
10.5.2.4.1.4	Guldin tételei	676
10.5.2.4.2	Síkidom másodrendű nyomatéka	678
10.5.2.5	A kettős integrál alkalmazása egyszeres improprius integrál kiszámítására	684
10.5.3	A hármas integrál	686
10.5.3.1	Mérhető térfogatú halmazok	686
10.5.3.2	A hármas integrál fogalma, kiszámítása	687
10.5.3.3	A hármas integrál transzformációja új változókra	690
10.5.3.3.1	Hengerkoordináták	691
10.5.3.3.2	Gömbi koordináták	692
10.5.3.3.3	Ellipszoid koordináták	694
10.5.3.4	Példák hármas integrálokra	694
10.5.3.5	A hármas integrál alkalmazása a mechanikában	695
10.5.3.5.1	Súlypontszámítás	695
10.5.3.5.2	Tehetetlenségi nyomaték kiszámítása	701
10.5.3.5.2.1	Testek tehetetlenségi nyomatéka	701
10.5.3.5.2.2	Forgástest tehetetlenségi nyomatéka	706
11.	VEKTORANALÍZIS	
11.1	Vektor-skalár függvények	709
11.1.1	Egyváltozós vektor-skalár függvények	709
11.1.1.1	Vektor-skalár függvények határértéke és folytonossága	714
11.1.1.2	Vektor-skalár függvény differenciálhányadosa, a derivált vektor	717
11.1.1.3	Térgörbe érintő egyenese	720
11.1.1.4	Térgörbék ívhossza	721
11.1.1.5	A simuló sík	726
11.1.1.6	Vektorfüggvények szögsebessége	730
11.1.1.7	Térgörbék görbülete	731
11.1.1.8	A torzió	737
11.1.1.9	A derivált vektor fizikai alkalmazásai	740
11.1.2	Kétváltozós vektor-skalár függvények	742
11.1.2.1	Felületek egyenlete. Geometriai szemléltetés	742
11.1.2.2	A kétváltozós vektor-skalár függvények deriváltjai	747
11.1.2.2.1	Parciális deriváltak	747
11.1.2.2.2	A felületre rajzolt térgörbe érintője	748
11.1.2.2.3	A felület érintősíkja	748
11.1.2.3	Felületdarab felszíne	751
11.2	Skalár-vektor függvények	754
11.2.1	A skalár-vektor függvények fogalma, szemléltetése	754

11.2.2 A skalár-vektor függvények határértéke, folytonossága	755
11.2.3 A skalár-vektor függvények deriváltja, a gradiensvektor	756
11.3 Vektor-vektor függvények (vektorterek)	760
11.3.1 A vektor-vektor függvények fogalma, szemléltetése	760
11.3.2 Határérték, folytonosság	762
11.3.3 Görbementi vagy vonalintegrál	763
11.3.3.1 A görbementi integrál fogalma	764
11.3.3.2 A görbementi integrál az (x, y) síkban fekvő görbénél	767
11.3.3.3 A görbementi integrál függetlensége az úttól, ha a görbe síkgörbe	768
11.3.4 Felületi integrál	773
11.3.4.1 A felületi integrál kiszámítása	774
11.3.5 Vektortér divergenciája	778
11.3.6 Vektortér rotációja	781
11.3.6.1 A rotáció és a cirkuláció kapcsolata	784
11.3.7 A nabla operátor többszöri alkalmazása	787
11.3.8 Integrálatalakítási tételek	789
11.3.9 A görbementi integrál függetlensége az úttól térgörbék esetén	802
12. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK	
12.1 Elsőrendű differenciálegyenletek	810
12.1.1 Általános fogalmak	810
12.1.1.1 Bevezetés	810
12.1.1.2 Iránymező	812
12.1.1.3 A differenciálegyenlet megoldása	813
12.1.2 A változók szétválasztásával megoldható differenciálegyenletek	814
12.1.3 Szétválasztható változójú differenciálegyenletekre visszavezethető differenciálegyenletek	824
12.1.3.1 Az $y' = f(ax + by + c)$ alakú differenciálegyenletek	824
12.1.3.2 Homogén differenciálegyenletek	827
12.1.3.3 Az $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ alakú differenciálegyenletek	833
12.1.4 Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek	837
12.1.4.1 Az elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek megoldása	838
12.1.4.2 Az elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek megoldása	840
12.1.5 A Bernoulli-féle differenciálegyenletek	848
12.1.6 Egzakt differenciálegyenletek	851
12.1.7 Izogonális és ortogonális trajektoriak	860
12.1.8 Elsőrendű differenciálegyenletek egzisztencia- és unicitási tételei	865
12.1.9 Differenciálegyenletek szinguláris megoldása	874
12.1.9.1 A Clairaut-féle differenciálegyenlet	879
12.2 Másodrendű differenciálegyenletek	882
12.2.1 Általános fogalmak	882

12.2.2 Másodrendű differenciálegyenletek egzisztencia- és unicitási tételei	883
12.2.3 Hiányos másodrendű differenciálegyenletek	884
12.2.3.1 A másodrendű differenciálegyenletből hiányzik y és y'	884
12.2.3.2 A másodrendű differenciálegyenletből hiányzik y	885
12.2.3.3 A másodrendű differenciálegyenletből hiányzik x	892
12.2.4 Másodrendű lineáris differenciálegyenletek	899
12.2.4.1 Másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek	900
12.2.4.2 Másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek	905
12.2.4.3 Állandó együtthatójú másodrendű lineáris differenciálegyenletek	910
12.2.4.3.1 Állandó együtthatójú lineáris homogén differenciálegyenletek	910
12.2.4.3.2 Állandó együtthatójú lineáris inhomogén differenciálegyenletek	914
12.2.4.3.3 A másodrendű lineáris differenciálegyenletek alkalmazása a műszaki gyakorlatban	919

13. A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS MATEMATIKAI MEGALAPOZÁSA

13.1 Kombinatorika	927
13.1.1 Ismétlés nélküli permutáció	928
13.1.2 Ismétléses permutáció	930
13.1.3 Ismétlés nélküli kombináció	933
13.1.4 Ismétléses kombináció	936
13.1.5 Ismétlés nélküli variáció	939
13.1.6 Ismétléses variáció	941
13.2 Események algebrája (Boole-algebra)	943
13.2.1 Alapfogalmak	943
13.2.1.1 Kísérlet	943
13.2.1.2 Esemény	944
13.2.1.3 Ellentett esemény	944
13.2.1.4 Lehetetlen esemény	944
13.2.1.5 Biztos esemény	944
13.2.1.6 Részesemény	944
13.2.2 Műveletek és műveleti szabályok	945
13.2.2.1 Azonosság	945
13.2.2.2 Szorzás	946
13.2.2.3 Összeadás	947
13.2.2.4 Kivonás	948
13.2.2.5 Szimmetrikus differencia	949
13.2.3 Műveletek egymás közti kapcsolata	950
13.2.3.1 Disztributív szabály (összeadásra és szorzásra)	950
13.2.3.2 Disztributív szabály (kivonásra és szorzásra)	952
13.2.3.3 Abszorpciós szabály	952
13.2.3.4 Részleges abszorpciós szabály	953
13.2.3.5 De Morgan-összefüggések	953
13.2.4 Az eseményalgebra axiomatikus felépítése	954

13.2.4.1	Boole-algebra	954
13.2.4.2	A Boole-algebra néhány speciális esete	955
13.2.4.2.1	Eseményalgebra	955
13.2.4.2.2	Halmazalgebra	957
13.2.4.2.3	Logikai algebra	957
13.2.4.2.4	Jelfogó berendezések algebrája	957
13.2.5	Véges eseményalgebra néhány definíciója és tétele	958
13.2.5.1	Egymást kizáró események	958
13.2.5.2	Elemi (egyszerű) esemény	958
13.2.5.3	Összetett esemény	959
13.2.5.4	Teljes eseményrendszer	963
13.2.6	Eseményalgebra kiterjesztése megszámlálhatóan végtelen sok eseményre	965
13.2.6.1	Borel-féle eseményalgebra	965
13.2.6.2	Teljes eseményrendszer	965
13.2.7	Eseményalgebra előállítás halmazalgebrával	966
13.2.7.1	Kolmogorov-elmélet	966
13.2.7.1.1	A Kolmogorov-féle elmélet feltevései	966
13.2.7.2	A halmazalgebra Kolmogorov-féle axiómái	967
13.2.7.3	A halmazalgebra Kolmogorov-féle axiómáinak néhány következménye	967
14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS		
14.1	A valószínűség	970
14.1.1	A valószínűség statisztikus értelmezése	970
14.1.1.1	Relatív gyakoriság	970
14.1.2	A valószínűség axiomatikus definíciója	973
14.1.3	Klasszikus valószínűség	978
14.1.4	A valószínűségszámítás néhány fogalma és tétele	980
14.1.4.1	Feltételes valószínűség	981
14.1.4.2	Összetett valószínűségi tétel	984
14.1.4.3	Teljes valószínűségi tétel	986
14.1.4.4	Bayes-tétel	988
14.1.4.5	Események függetlensége	990
14.1.4.5.1	Két esemény függetlensége	990
14.1.4.5.2	Több esemény függetlensége (teljes függetlensége)	993
14.1.4.5.3	Teljes eseményrendszerek függetlensége	996
14.1.4.5.4	Kísérletek függetlensége	997
14.1.5	Néhány modell valószínűségek kombinatorikus úton történő meghatározására	1001
14.1.5.1	Véletlen sorrendek	1001
14.1.5.2	Mintavétel	1002
14.1.5.2.1	Visszatevéses mintavétel	1003
14.1.5.2.2	Visszatevés nélküli mintavétel	1004
14.1.5.3	Elhelyezés problémák	1006
14.1.5.3.1	Maxwell—Boltzmann-statisztika	1006
14.1.5.3.2	Bose—Einstein-statisztika	1006

14.1.5.3.3	Fermi—Dirac-statisztika	1007
14.1.6	Valószínűségek meghatározása geometriai módszerrel	1008
14.2	A valószínűségi változó	1013
14.2.1	A valószínűségi változó fogalma	1013
14.2.1.1	Diszkrét valószínűségi változó	1014
14.2.1.2	Folytonos valószínűségi változó	1014
14.2.1.3	Valószínűségi változók összetétele	1015
14.2.2	Valószínűségi változó eloszlása. Sűrűségfüggvény	1016
14.2.2.1	A diszkrét valószínűségi változó eloszlása	1017
14.2.2.2	Folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye	1018
14.2.3	Valószínűségi változók eloszlásfüggvénye	1023
14.2.3.1	Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye	1024
14.2.3.2	Folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye	1027
14.2.4	Többdimenziós valószínűségi változók	1035
14.2.4.1	Két valószínűségi változó együttes eloszlása	1035
14.2.4.2	Két valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvénye	1037
14.2.5	Valószínűségi változók függetlensége	1040
14.2.5.1	Diszkrét valószínűségi változók függetlensége	1040
14.2.5.2	Folytonos valószínűségi változók függetlensége	1041
14.3	A valószínűségi változók számszerű jellemzői	1043
14.3.1	A valószínűségi változó várható értéke	1043
14.3.1.1	A diszkrét valószínűségi változó várható értéke	1043
14.3.1.2	A folytonos valószínűségi változó várható értéke	1044
14.3.1.3	Többdimenziós valószínűségi változó várhatóérték-vektora	1045
14.3.2	A várható értékre vonatkozó néhány tétel	1047
14.3.3	A valószínűségi változó szórása	1051
14.3.3.1	Diszkrét valószínűségi változó szórása	1053
14.3.3.2	Folytonos valószínűségi változó szórása	1053
14.3.3.3	Többdimenziós valószínűségi változó szórása	1054
14.3.4	A szórásra vonatkozó néhány tétel	1057
14.3.5	A valószínűségi változó momentumai	1060
14.3.5.1	Diszkrét valószínűségi változó momentumai	1061
14.3.5.2	Folytonos valószínűségi változó momentumai	1061
14.4	Karakterisztikus függvények	1063
14.4.1	Komplex értékű valószínűségi változók	1063
14.4.2	A karakterisztikus függvény értelmezése	1064
14.4.2.1	Diszkrét valószínűségi változó karakterisztikus függvénye	1064
14.4.2.2	Folytonos valószínűségi változó karakterisztikus függvénye	1064
14.4.2.3	Többdimenziós valószínűségi változó karakterisztikus függvénye	1064
14.4.3	A karakterisztikus függvény néhány tulajdonsága	1065
14.5	Néhány becslés a valószínűségi változó várható érték körüli elhelyezkedésére	1070
14.5.1	Markov-féle egyenlőtlenség	1070
14.5.1.1	A diszkrét eloszlás esete	1070
14.5.1.2	A folytonos eloszlás esete	1071

14.5.1.3	Csebisev-féle egyenlőtlenség	1071
14.5.1.4	A nagy számok törvényének Csebisev-féle alakja	1072
14.5.1.5	A nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakja	1074
14.6	Kovariancia és korrelációs együttható	1076
14.6.1	A valószínűségi változók kapcsolatának mértéke a valószínűségi változók jellemzői segítségével	1076
14.6.1.1	Korrelációs együttható	1077
14.7	Néhány klasszikus valószínűségi eloszlás és jellemzőik	1080
14.7.1	Diszkrét eloszlások	1080
14.7.1.1	Hipergeometrikus eloszlás	1080
14.7.1.2	Polihipergeometrikus eloszlás (Többdimenziós eloszlás; a hipergeometrikus eloszlás általánosítása)	1083
14.7.1.3	Binomiális (Bernoulli-) eloszlás	1084
14.7.1.4	Polinomiális eloszlás (Többdimenziós eloszlás; a binomiális eloszlás általánosítása)	1089
14.7.1.5	Geometriai eloszlás	1090
14.7.1.6	Negatív binomiális eloszlás (A geometriai eloszlás általánosítása)	1092
14.7.1.7	Poisson-eloszlás (A binomiális eloszlás határeset)	1095
14.7.2	Folytonos eloszlások	1101
14.7.2.1	Egyenletes eloszlás	1101
14.7.2.2	Exponenciális eloszlás	1104
14.7.2.3	A Cauchy-eloszlás	1110
14.7.2.4	Normális (Gauss-) eloszlás	1112
14.7.2.5	Pearson-féle χ^2 -eloszlás	1125
15.	MATEMATIKAI STATISZTIKA	
15.1	Kísérletek tervezése	1130
15.1.1	Mintavétel	1130
15.1.2	Többfaktoros kísérletek	1131
15.1.2.1	Latin négyzetek	1132
15.1.2.2	Véletlen blokktervek	1133
15.1.2.3	Ortogonalis latin négyzetek	1134
15.1.2.4	Faktoriális kísérletek	1136
15.2	Valószínűségeloszlások ismeretlen paraméterekkel	1137
15.2.1	Ismeretlen valószínűség	1138
15.2.1.1	A valószínűség becslése	1138
15.2.1.2	A valószínűségekre vonatkozó hipotézisek	1143
15.2.1.3	Megjegyzések az ismeretlen valószínűségek vizsgálatával kapcsolatban	1146
15.2.2	Ismeretlen várható érték és szórás	1146
15.2.2.1	A várható érték és szórás becslése	1146
15.2.2.2	Az átlag és a tapasztalati szórás kiszámításának módszerei	1151
15.2.2.3	A várható értékre és a szórásra vonatkozó hipotézisek	1154
15.2.3	A becslélmélet általános kérdései	1156
15.2.3.1	A becslélméletben szereplő fogalmak	1156

15.2.3.2	Maximum likelihood módszer	1159
15.2.4	A hipotézisvizsgálat általános kérdései	1161
15.2.4.1	A hipotézisvizsgálatban szereplő általános fogalmak	1161
15.2.4.2	u -próba	1163
15.2.4.3	A t -próba	1166
15.2.4.4	χ^2 -próba	1167
15.2.4.5	v^2 -próba	1175
15.3	Szórásanalízis	1176
15.3.1	n normális eloszlású változó várható értékének összehasonlítása	1176
15.3.2	n normális eloszlású változó várható értékének összehasonlítása különböző hatások figyelembevétele esetén	1182
15.3.3	Többfaktoros kísérletek kiértékelése	1188
15.3.3.1	Latin négyzetes kísérletek kiértékelése	1188
15.3.3.2	Faktoriális kísérletek	1191
15.4	Eloszlás- és sűrűségfüggvények meghatározása. (Nemparaméteres statisztikák, rendezett minták)	1193
15.4.1	Sűrűségfüggvény becslése	1194
15.4.1.1	Hisztogram	1194
15.4.1.2	A hisztogram mint a sűrűségfüggvény becslése	1200
15.4.2	Az eloszlásfüggvény meghatározása statisztikai adatokból	1201
15.4.2.1	Az eloszlásfüggvény becslése	1201
15.4.2.2	Az eloszlásfüggvényre vonatkozó hipotézisek vizsgálata	1202
15.4.2.3	Grafikus eljárások	1204
15.5	Valószínűségi változók közötti kapcsolatok jellemzése	1207
15.5.1	Korrelációs együttható	1207
15.5.2	A regresszióanalízis	1210
15.5.2.1	A regresszióanalízis feladattípusai	1213
15.5.2.2	A regresszióanalízis feladatainak osztályozása a kapcsolatot leíró függvényosztály típusa szerint	1216
15.5.2.3	A regressziós görbékkel kapcsolatos hipotézisek vizsgálata	1220
15.5.2.4	Konfidenciaintervallum a regressziós görbe körül	1222
15.5.2.5	Többváltozós regresszió	1223

16. LINEÁRIS ALGEBRA

16.1	Az n -dimenziós euklideszi tér	1231
16.2	Lineáris operátorok mátrix alakja	1240
16.3	Mátrixok szorzata	1243
16.4	Lineáris egyenletrendszer mátrix alakja	1247
16.5	Mátrixok inverzének meghatározása	1249
16.6	Lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmazának vizsgálata	1253
16.7	A lineáris programozás feladata	1258

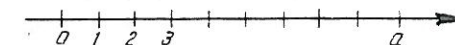
TÁBLÁZATOK	1265
------------	------

1. VALÓS SZÁMOK

1.1 A VALÓS SZÁMOK FOGALMA

Pozitív egész számok. A természetes számokhoz számlálással jutunk. A természetes számokat (másképpen pozitív egész számokat) a számegyenesen ábrázoljuk egy előre megadott kezdőpont, egység és irány segítségével. (1.1 ábra.)

A kezdőponttól jobb felé a választott egységet a -szor felmérve kapjuk az a természetes számnak megfelelő pontot.



1.1 ábra

A természetes számok körében az összeadás és szorzás mindig elvégezhető.

Az összeadás és a szorzás kommutatív és asszociatív művelet, azaz érvényesek a következő szabályok.

Jelentsenek a, b, c pozitív egész számokat.

Kommutatív szabály:

$$a + b = b + a.$$

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Asszociatív szabály:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

$$(ab) \cdot c = a \cdot (bc).$$

Disztributív szabály:

$$(a + b) \cdot c = ac + bc.$$

Zérus. Negatív számok. A kivonás a természetes számok körében nem mindig végezhető el. Ezért a természetes számok halmazát további számokkal bővítjük, azaz a számegyenes további pontjaihoz rendelünk számokat.

A felvett kezdőpontnak felel meg a *zérus* vagy *nulla*, az a szám, amely bármely pozitív egész számhoz hozzáadva ugyanazt a számot adja eredményül. Jele: 0. A definíció szerint:

$$a + 0 = a.$$

Fennáll továbbá a következő egyenlőség:

$$0 \cdot a = 0.$$

Irracionális számok. A racionális számok mindenütt sűrűn fekszenek a számegyenesen, mégsem töltik ki azt teljesen. Ábrázoljuk például az egységnyi befogójú, egyenlőszárú, derékszögű háromszög átfogóját a számegyenesen (1.4 ábra.)!

Bebizonyítjuk, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám, azaz nincs olyan racionális szám, amelynek négyzete 2.

A bizonyítás ún. indirekt módszerrel történik. Feltesszük a tétel ellenkezőjét, és bebizonyítjuk, hogy a feltevés lehetetlen volt.

Tehát feltesszük, hogy van olyan $\frac{p}{q}$ tört, amelyre

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2},$$

azaz $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$

Azt is feltesszük, hogy a tört már nem egyszerűsíthető.

$$\frac{p^2}{q^2} = 2.$$

$$p^2 = 2q^2.$$

$2q^2$ páros szám, ezért p^2 és vele p is páros szám. Írjuk p -t $p = 2p_1$ alakban

$$(2p_1)^2 = 2q^2.$$

$$4p_1^2 = 2q^2.$$

$$2p_1^2 = q^2.$$

$2p_1^2$ páros szám, tehát q is páros szám.

Arra az eredményre jutottunk, hogy p is, q is páros szám, ami nem lehet, mert feltettük,

hogy $\frac{p}{q}$ nem egyszerűsíthető. Tehát lehetetlen az a feltevés, hogy

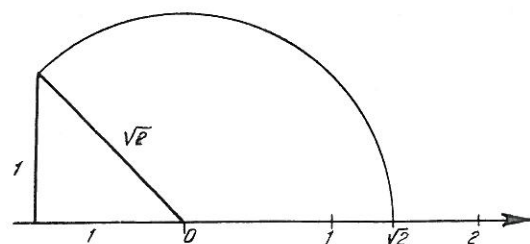
$$\frac{p}{q} = \sqrt{2},$$

nincs olyan tört, amelynek négyzete 2.

$\sqrt{2}$ tehát nem racionális szám. $\sqrt{2}$ irracionális szám. A számegyenesen $\sqrt{2}$ -nek megfelelő pont irracionális pont. Irracionális számot kapunk, ha bármilyen racionális számhoz $\sqrt{2}$ -t hozzáadunk.

Irracionális szám például a könnyen megszerkeszthető $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ stb., valamint $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ stb., továbbá azok a számok, amelyeket úgy kapunk, ha bármelyik racionális számhoz hozzáadjuk az irracionális számokat.

Ha a számegyenesen felvesszük mindazokat a pontokat, amelyek racionális számoknak vagy a racionális számokból gyökvonással származó irracionális számoknak felelnek meg,



1.4 ábra

még mindig nem kapjuk meg a teljes számegyenest. A gyökvonás művelete nem definiálja az irracionális számokat.

Egy irracionális szám definiálása racionális számok segítségével véges sok lépésben általában nem végezhető el.

Az irracionális számok definiálására a végtelen tizedes törtet használjuk.

Tétel. Minden racionális szám felírható mint véges tizedes tört vagy végtelen szakaszos tizedes tört.

Bizonyítás. Ha a $\frac{p}{q}$ törtet osztással tizedes törtté alakítjuk, maradékként $0, 1, 2, \dots, q-1$

léphet fel. Ha valamelyik lépésnél a maradék nulla, a hányados véges tizedes tört. Ha a maradék sohasem nulla, akkor az osztás során fellép egy korábban már szereplő maradék. Ekkor a művelet nem fejeződik be, az első ismétlődő maradéktól kezdve a maradékok és a hányadosok periodikusan ismétlődnek, végtelen szakaszos tizedes törtet kapunk.

Így $\frac{2}{5} = 0,4$, $\frac{1}{3} = 0,3 = 0,333 \dots$,

$$\frac{2}{7} = 0,285714,$$

$$\frac{5}{6} = 0,8\bar{3} \text{ (vegyes szakaszos tizedes tört).}$$

Fordítva: minden véges tizedes tört vagy végtelen szakaszos tizedes tört racionális számot

állít elő, azaz $\frac{p}{q}$ alakban írható, ahol p és q egész számok.

A tételt példákkal illusztráljuk.

1. Írjuk fel tört alakban a

$$0,\bar{7} = 0,777 \dots \text{ számot.}$$

Legyen $0,777 \dots = x \quad / \cdot 10.$

$$7,777 \dots = 10x.$$

$$7 + 0,777 \dots = 10x.$$

$$7 + x = 10x.$$

$$7 = 9x.$$

$$\frac{7}{9} = x.$$

Tehát $0,777 \dots = 0,\bar{7} = \frac{7}{9}.$

2. $0,7\bar{8}3 = ?$

Legyen $0,8383 \dots = x \quad / \cdot 100.$

$$83,8383 \dots = 100x.$$

$$83 + x = 100x.$$

$$x = \frac{83}{99}.$$

$$0,0\bar{8}3 = \frac{83}{990}.$$

$$0,7\bar{8}3 = \frac{7}{10} + \frac{83}{990} = \frac{693 + 83}{990} = \frac{776}{990} = \frac{783 - 7}{990}.$$

Tehát a racionális számok véges vagy végtelen szakaszos tizedes törtet.

Definíció. Irracionális számoknak nevezzük a végtelen, nem szakaszos tizedes törtet. Irracionális szám például a

$$\pi = 3,1415926 \dots \text{ szám}$$

Irracionális számot alkothatunk pl. a következőképpen:

$$0,1011011101110 \dots$$

A 0-k és 1-esek váltják egymást, de a végtelen tizedes tört nem szakaszos, mert az 1-esek száma mindig nő.

A számkört tehát kibővítettük az irracionális számokkal.

A racionális és irracionális számok összessége együttvéve a valós számok összességét alkotja. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a valós szám és az azt ábrázoló pont között nem teszünk különbséget.

A valós számok a számegyenesen teljesen ellepik. (Ezt az állítást nem bizonyítjuk.)

A műveletek kiterjesztése az irracionális számokra és a műveleti szabályok ellenőrzése nem annyira egyszerű, mint az eddigi bővítéseknél.

Minden irracionális szám tetszőleges pontossággal megközelíthető racionális számokkal. Ez abból következik, hogy a racionális számok sűrűn borítják a számegyeneset. Tehát minden irracionális szám tetszőlegesen kicsi környezetében találunk racionális számot. Például $\sqrt{2}$ egységnyi pontosságú megközelítése racionális számokkal:

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$

egy tizednyi pontosságú megközelítés:

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5,$$

egy századnyi pontosságú megközelítés:

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

és így tovább, a $\sqrt{2}$ -t akárhány tizedes pontossággal megközelíthetjük.

Az irracionális számoknak ez a tulajdonsága ad lehetőséget a műveletek kiterjesztésére.

Az irracionális számok helyett közelítőleg mindig számolhatunk racionális számokkal.

Megjegyzés. A valós számok körében az összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás mindig elvégezhető. A gyökvonás a valós számok körében nem mindig végezhető el. Negatív számból nem lehet négyzetgyököt, általában páros gyököt vonni úgy, hogy a gyök valós szám legyen.

Így például $\sqrt{-1}$ -nek a valós számok körében nincs értelme.

1.2 A VALÓS SZÁMOK RENDEZÉSE. EGYENLŐTLENSÉGEK

A valós számok körében természetes módon rendezés vezethető be.

$a > b$ (a nagyobb, mint b), ha a a számegyenesen b -től jobbra fekszik.

$a < b$ (a kisebb, mint b), ha a a számegyenesen b -től balra fekszik.

Bármely 0-tól különböző valós szám vagy pozitív, vagy negatív aszerint, hogy a 0-tól jobbra vagy balra fekszik.

$a > b$ ugyanazt jelenti, mint $a - b > 0$.

$a < b$ ugyanazt jelenti, mint $a - b < 0$.

$a = b$, ha $a - b = 0$.

Két valós szám között a fenti három összefüggés közül kizárólag egy lehet érvényes.

Tétel. Transzitivitás: ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$.

Bizonyítás. Ha $(b - a)$ és $(c - b)$ pozitívak, akkor összegük is pozitív.

$$(b - a) + (c - b) > 0,$$

$$c - a > 0, \quad \text{azaz}$$

$$c > a, \quad \text{vagyis} \quad a < c.$$

Az $a \leq c$ (a kisebb vagy egyenlő c) jelölés azt jelenti, hogy a vagy kisebb c -nél, vagy egyenlő vele. Hasonlóan

$$a \geq b \text{ (} a \text{ nagyobb vagy egyenlő } b \text{)}$$

azt jelenti, hogy a vagy nagyobb b -nél, vagy egyenlő vele.

Az egyenlőtlenségekre érvényesek a következő tételek:

I. tétel. Az egyenlőtlenség érvényes marad, ha mindkét oldalához ugyanazt a számot adjuk hozzá.

II. tétel. Az egyenlőtlenség érvényes marad, ha mindkét oldalt ugyanazzal a pozitív számmal szorozzuk vagy osztjuk.

III. tétel. Az egyenlőtlenség ellenkezőre változik, ha mindkét oldalt ugyanazzal a negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk.

IV. tétel. Ha az egyenlőtlenség két oldalának reciprok értékét vesszük, akkor, ha a két oldal egyező előjelű volt, az egyenlőtlenség megfordul, ha különböző előjelű volt, az egyenlőtlenség érvényes marad.

A tételek közül az I., II. és III. tétel könnyen belátható. A IV. tételt bizonyítjuk.

Legyen

$$a < b.$$

Osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát $a \cdot b$ -vel! Ha a és b előjele egyenlő, $ab > 0$, ezért

$$\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab},$$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Ha a és b előjele különböző, $ab < 0$,

ezért $a < b$ -ből következik, hogy

$$\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab},$$

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

V. tétel. Ha a és b pozitív szám és

$$a < b,$$

akkor, ha n egész szám,

$$a^n < b^n.$$

Példa

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$2 < \frac{4-3x}{x-2} < 6.$$

Az egyenlőtlenségből következik, hogy $\frac{4-3x}{x-2} > 0$. Ez csak akkor lehet, ha a számláló és a nevező azonos előjelűek.

a) $x-2 < 0$ és ugyanakkor $4-3x < 0$,

azaz $x < 2$ és ugyanakkor $x > \frac{4}{3}$.

Tehát $\frac{4}{3} < x < 2$.

b) $x-2 > 0$ és ugyanakkor $4-3x > 0$,

azaz $x > 2$ és ugyanakkor $x < \frac{4}{3}$.

Ez egyidejűleg lehetetlenség.

Az a) és b) esetek közül csak az a) eset állhat fenn.

$$2 < \frac{4-3x}{x-2} < 6.$$

Mivel $x-2 < 0$, az egyenletet végigszorozva $(x-2)$ -vel:

$$2x - 4 > 4 - 3x > 6x - 12.$$

$$2x - 4 > 4 - 3x.$$

$$x > \frac{8}{5}.$$

$$4 - 3x > 6x - 12.$$

$$16 > 9x.$$

$$x < \frac{16}{9}.$$

$$\frac{8}{5} < x < \frac{16}{9}.$$

Ezt összehasonlítva a feltételből adódó

$$\frac{4}{3} < x < 2 \quad \text{egyenlőtlenséggel,}$$

$$\text{a megoldás } \frac{8}{5} < x < \frac{16}{9}.$$

1.3 INTERVALLUM, ABSZOLÚT ÉRTÉK

Intervallum a számegetes két pontja között levő pontok halmaza, vagy a megfelelő két szám közötti számok halmaza.

Ha $a < b$, akkor nyílt intervallumon értjük azoknak az x valós számoknak a halmazát, amelyekre $a < x < b$. Jele: $(a; b)$.

Ha $a < b$, akkor zárt intervallumon értjük azoknak az x valós számoknak a halmazát, amelyekre $a \leq x \leq b$. Jele: $[a; b]$, (1.5 ábra).



1.5 ábra

Ha $a < b$, akkor félig nyílt vagy egyik oldalról zárt intervallumon értjük azoknak az x valós számoknak a halmazát, amelyekre

$$a \leq x < b, \quad \text{illetve} \quad a < x \leq b.$$

Jelük: $[a; b)$, illetve $(a; b]$.

Egy adott c számnál kisebb vagy nem nagyobb valós számok halmazát is intervallumnak (végtelen intervallumnak) nevezzük, és így jelöljük:

$$(-\infty; c) \quad \text{vagy} \quad -\infty < x < c,$$

$$\text{illetve} \quad (-\infty; c] \quad \text{vagy} \quad -\infty < x \leq c.$$

Egy adott c számnál nagyobb, illetve nem kisebb számok halmazai a következő végtelen intervallumok:

$$(c; +\infty) \quad \text{vagy} \quad c < x < +\infty,$$

$$\text{illetve} \quad [c; +\infty) \quad \text{vagy} \quad c \leq x < +\infty.$$

Ezek a végtelen intervallumok félegyenesek.

Végül az egész számegetest is felfoghatjuk végtelen intervallumként. Ekkor így jelöljük:

$$(-\infty; +\infty), \quad \text{illetve} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Legyen $l > 0$. Az $(a-l; a+l)$ intervallumot az a pont l sugarú környezetének nevezik.

Abszolút érték. Az a szám abszolút értékét: $|a|$ -t így definiáljuk:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0 \\ -a, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

Az abszolút érték mindig nem negatív. Valamely szám abszolút értéke a számnak a számegetesen az origótól való távolságával egyenlő. Ennek megfelelően a különbség abszolút értéke, $|b-a|$ a két szám távolságát jelenti.

A definícióból következik, hogy

a) ha a bármilyen szám

$$-|a| \leq a \leq |a|,$$

b) ha $|a| \leq p$, (p pozitív szám)

$$-p \leq a \leq p$$

Az abszolút értékekre érvényesek a következő tételek:

1. tétel. Az összeg abszolút értéke kisebb vagy egyenlő az abszolút értékek összegénél.

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Bizonyítás. Az abszolút érték definíciójából következő a) összefüggés alapján

$$-|a| \leq a \leq |a|,$$

$$-|b| \leq b \leq |b|.$$

Adjuk össze a két egyenlőtlenséget!

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Ez pedig a b) összefüggés értelmében azt jelenti, hogy

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

A tétel tetszőlegesen sok tagra is igazolható.

II. tétel. Különbőség abszolút értéke nagyobb vagy egyenlő, mint az abszolút értékek különbsége:

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

Bizonyítás. Legyen $a - b = c$, azaz $a = b + c$.

Az I. tételt alkalmazva:

$$|a| = |b + c| \leq |b| + |c| = |b| + |a - b|,$$

azaz $|a| \leq |b| + |a - b|.$

Innen $|a - b| \geq |a| - |b|.$

Következmény: a és b szerepét felcserélve:

$$|a - b| = |b - a| \geq |b| - |a|,$$

és ebből

$$|a - b| \geq ||a| - |b||.$$

III. tétel. Szorzat abszolút értéke egyenlő az abszolút értékek szorzatával.

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

IV. tétel. Hányados abszolút értéke egyenlő az abszolút értékek hányadosával.

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

A III. és IV. tétel könnyen belátható, ha megmutatjuk, hogy mindkét tétel igaz akkor, ha a és b előjele megegyezik, illetve különböző. A III. tétel tetszőleges számú tényezőre is igazolható.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\left| \frac{2}{3}x - 4 \right| \geq 2.$$

3-mal szorozva és 2-vel osztva az

$$|x - 6| \geq 3$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Az $|x - 6| < 3$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$-3 < x - 6 < 3, \quad \text{azaz}$$

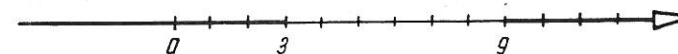
$$3 < x < 9.$$

Ezért az

$$|x - 6| \geq 3$$

egyenlőtlenség akkor és csak akkor érvényes, ha

$$x \leq 3 \quad \text{vagy} \quad x \geq 9 \quad (1.6 \text{ ábra}).$$



1.6 ábra

1.4 A TELJES INDUKCIÓ

Legyen A_n valamilyen n természetes számra vonatkozó állítás. A teljes indukció módszere annak igazolására szolgál, hogy az A_n állítás minden természetes számra igaz.

Tétel. Ha (1.) az A_1 állítás igaz, továbbá (2.) abból, hogy az A_n állítás igaz, következik, hogy az A_{n+1} állítás is igaz, akkor A_n minden n -re igaz.

Bizonyítás. A tételt indirekt úton bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy a tétel feltételei mellett van olyan A_m , amely hamis.

Keressük meg azt a legkisebb m indexet, amelyre az A_m állítás hamis.

Az 1. feltétel miatt $m > 1$, ezért létezik az A_{m-1} állítás, és ez m minimális választása miatt igaz.

Ekkor azonban a 2. feltétel alapján A_{m-1} igazságából következik, hogy A_m is igaz, ami ellentmondás.

Példák

1. Az első n természetes szám összege:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bizonyítás. A tétel $n = 1$ -re igaz:

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Ha az állítás n -re igaz, azaz

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

akkor

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + n + 1 &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Eszerint az állítás $n+1$ -re is igaz.

Tehát a teljes indukcióval kimutattuk, hogy az összegképlet minden n -re igaz.

2. Az első n természetes szám négyzetösszege:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bizonyítás. $n = 1$ -re: $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$; a tétel igaz.

Ha a tétel n -re igaz, vagyis

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ebből következtetve $(n+1)$ -re:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n+1}{6} [n(2n+1) + 6(n+1)] = \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Azaz a teljes indukcióval igazoltuk, hogy

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Az első n természetes szám köbének összege:

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Bizonyítás. $n = 1$ -re: $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$; a tétel igaz.

Ha n -re teljesül az egyenlőség:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2,$$

akkor

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + (n+1)^3 = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) = \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

Tehát igaz a tétel:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

A tételt így is írhatjuk:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4. Igazoljuk a következő, ún. Bernoulli-féle egyenlőtlenséget!

Ha n természetes szám, és $h > -1$,

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Bizonyítás. $n = 1$ -re: $1+h = 1+h$.

Tegyük fel, hogy a tétel n -re igaz:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát az $(1+h) > 0$ számmal!

$$\begin{aligned} (1+h)^{n+1} &\geq (1+nh)(1+h) = 1 + nh + h + nh^2 = \\ &= 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h. \end{aligned}$$

Tehát

$$(1+h)^{n+1} \geq 1 + (n+1)h.$$

Ezzel bebizonyítottuk a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh, \quad \text{ha } h > -1.$$

Ez a gondolatmenet mutatja, hogy az egyenlőség csak a $h = 0$, vagy az $n = 1$ esetben állhat fenn.

5. Igazoljuk a Newton-féle binomiális tételt!

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

Keressük azt a képletet, amely egy kéttagú kifejezés (binom) n -ik hatványát,

$$(a+b)^n\text{-t közvetlenül megadja.}$$

Ehhez a következő fogalmakat vezetjük be:

1. Az első n természetes szám szorzatát n faktoriálisnak nevezzük és így jelöljük:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!.$$

($n!$ olv.: n faktoriális.)

Megállapodás. $0! = 1$.

2. Legyen n és k egész szám, és $n \geq k$.

Az $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ törtet röviden $\binom{n}{k}$ -val jelöljük (olv.: n alatt k) és binomiális együttható-nak nevezzük.

Mivel $0! = 1$,

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1, \quad \text{tehát} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Példák

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = 1.$$

Általában $\binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1.$

A binomiális együtthatókra érvényes a következő két összefüggés:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$

Bizonyítás. Az összefüggés a definícióból következik:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{és}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Ez az összefüggés a binomiális együtthatók szimmetrikus tulajdonsága.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{így is előállítható:}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots3\cdot2\cdot1}{(1\cdot2\dots k)[1\cdot2\dots(n-k)]} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot2\dots k}.$$

A számlálóban is, a nevezőben is k tényező marad.)

2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$

Bizonyítás. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!} =$

$$= \frac{n!}{k![n-(k-1)]!} [n-(k-1)+k] =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

Ez az összefüggés a binomiális együtthatók összeadási tulajdonsága.

A Newton-féle binomiális tétel. A kéttagú kifejezés, $(a+b)$ n -edik hatványára érvényes a következő, ún. Newton-féle binomiális tétel:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Bizonyítás. A tétel $n=1$ -re igaz.

Ha $n=1$, $(a+b)^1 = a+b$.

Most feltesszük, hogy a tétel n -re igaz:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(a+b)$ -vel.

A bal oldal $(a+b)^{n+1}$ lesz.

A jobb oldal:

$$\left[a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \right] (a+b) =$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} +$$

$$+ \binom{n}{n} ab^n + \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-1} +$$

$$+ \binom{n}{n-1} ab^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}.$$

Felhasználjuk, hogy

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{és} \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1.$$

Összevonva:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0} \right] a^n b + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1} \right] a^{n-2}b^2 + \dots +$$

$$+ \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} \right] a^2 b^{n-1} + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} \right] ab^n +$$

$$+ \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}.$$

Mivel $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$, továbbá $\binom{n+1}{n+1} = 1$,

és a binomiális együtthatók összegezési tulajdonsága alapján:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-2}b^2 +$$

$$+ \dots + \binom{n+1}{n} ab^n + b^{n+1}.$$

Ezzel kimutattuk, hogy ha a binomiális tétel igaz az n kitevőre, akkor igaz az $(n+1)$ kitevőre is.

Mivel $n = 1$ -re az állítás igaz, bebizonyítottuk teljes indukcióval a binomiális tételt:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Példa

$$(a+b)^5 = a^5 + \binom{5}{1} a^4b + \binom{5}{2} a^3b^2 + \binom{5}{3} a^2b^3 + \binom{5}{4} ab^4 + b^5.$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5; \quad \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10; \quad \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10;$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5.$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

2. VEKTORALGEBRA

2.1 VEKTORALGEBRAI ALAPFOGALMAK

2.1.1 A vektor fogalma

A fizikai mennyiségek között vannak olyanok, amelyeknek jellemzésére elegendő a mértékegység és a mértékszám. Ezeket skaláris mennyiségeknek, röviden *skalároknak* nevezzük. Skaláris mennyiségek például a hőmérséklet, a terület, a térfogat, a tömeg. Más fizikai mennyiségek jellemzésére a mértékegységen kívül két adat szükséges, a mértékszám (nagyság) és az irány. Ezeket irányított mennyiségeknek, vektormennyiségeknek, röviden *vektoroknak* nevezzük. Vektormennyiség például az elmozdulás vektora, az erővektor, a sebességvektor, a gyorsulásvektor.

A fizikai törvényeket sokszor egyszerűbben lehet vektorokkal kifejezni, mint vektorok nélkül. Két vektorhoz sokszor hozzárendelünk egy harmadikat. E hozzárendelés szabályai sokban hasonlítanak az algebrai eljárásokhoz. A vektorok azonosságai is sok esetben meg-egyeznek az algebrai azonosságokkal. Ezért a vektorokkal való műveletek elméletét *vektor-algebrának* nevezzük. A továbbiakban a vektorokra érvényes összefüggésekkel foglalkozunk, és ezért a vektorok konkrét fizikai jelentésétől eltekintünk.

2.1.2 A vektorok szemléltetése, jelölése, jellemzése

A vektorokat irányított egyenes szakaszokkal szemléltetjük.

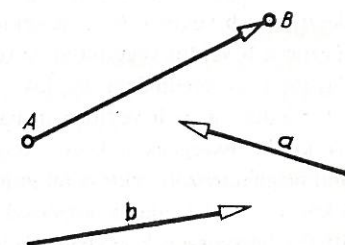
A vektor jelölése a kezdő és végpont feltüntetésével, $\overrightarrow{AB}$ jelöléssel vagy félkövér kisbetűvel történhet ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{v}$ stb.). Rajzban a vektor irányát nyíllal jelöljük (2.1 ábra).

A vektort két adattal: a vektor abszolút értékével és irányával jellemezzük.

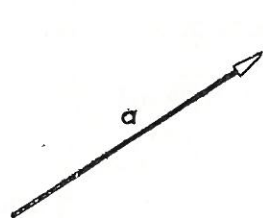
Az $\mathbf{a}$ vektor abszolút értéke (nagysága) az irányított egyenes szakasz hossza, tehát nem negatív szám. A vektor irányát a vektor végpontjába rajzolt nyíl jelzi. (2.2 ábra)

A 2.3 ábrán rajzolt párhuzamos vektorok közül $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egyirányúak, a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok ellentétes irányúak.

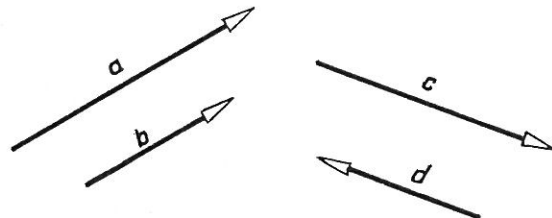
Megjegyzés. Számos műben (pl. általában a mechanikai könyvekben) a vektorok jelölésére három adatot



2.1 ábra



2.2 ábra



2.3 ábra

használnak: nagyságot, irányt és értelmet. Így a mechanika terminológiája szerint **a** és **b** vektorok egyező értelműek, **c** és **d** egyirányúak, de ellentétes értelműek (2.3 ábra). Mi a továbbiakban a vektor jellemzésére az abszolút értéket és irányt adjuk meg.

Egységvektor. Egységvektor egy vektor, ha egységnyi hosszúságú, azaz az egységvektor abszolút értéke 1. Az egységvektorra gyakran használjuk az **e** jelölést. Valamely adott **a** vektorral egyirányú egységvektorra az **a_e** vagy **a⁰** jelölést használjuk. (2.4 ábra.)

Zérusvektor. Azt a vektort, amelynek abszolút értéke 0, zérusvektornak vagy nullavektornak nevezzük. A zérusvektort bármely vektorral párhuzamosnak tekintjük. Jele **0**.

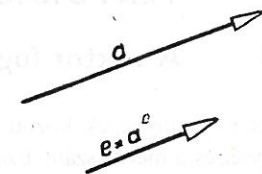
Két vektor szöge. A vektorokat a térben önmagukkal párhuzamosan eltolhatóknak tekintjük. Ha két vektor szögét meg akarjuk határozni, azokat úgy toljuk el, hogy egy pontban messék egymást.

Definíció. Két vektor szöge az általuk bezárt, 0-nál nem kisebb és π -nél nem nagyobb szög. Két vektor szögét a sorrendtől függetlenül értelmezzük.

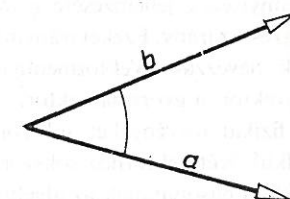
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \triangleq (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \triangleq. \quad (2.5 \text{ ábra})$$

2.1.3 Vektorok összeadása

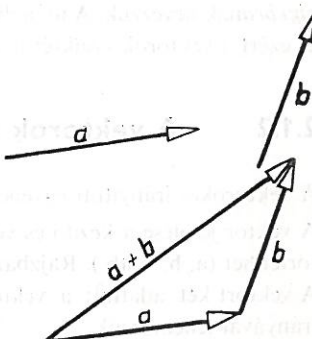
Definíció. Az **a** és **b** vektorok összegét megkapjuk, ha az **a** vektor végpontjához nagyság és irány szerint hozzáillesztjük a **b** vektort, és az **a** vektor kezdőpontjából meghúzzuk a **b** vektor végpontjához vezető vektort (2.6 ábra). Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a közös kezdőpontból kiinduló **a** és **b** vektorokat paralelogrammává egészítjük ki, és összegnek a közös kezdőpontból kiinduló átló által meghatározott vektort tekintjük (2.7 ábra). A két összeadási eljárás azonosságát a 2.6 és 2.7 ábrán látható háromszögek egybevágósága és a vektorok megfelelő irányítása igazolja.



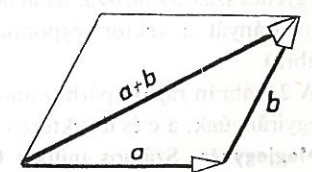
2.4 ábra



2.5 ábra



2.6 ábra

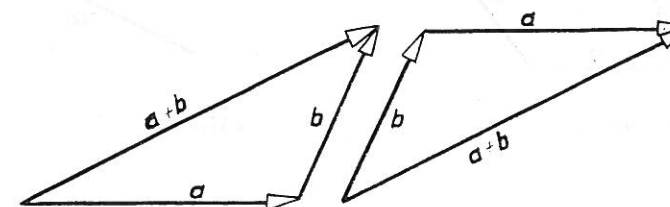


2.7 ábra

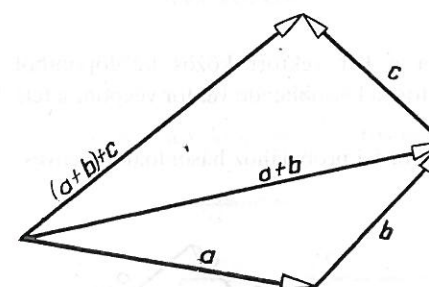
A paralelogrammaszabályt a fizikában az erők összegezése magyarázza. Az összeadandó erőket összetevőknek vagy komponenseknek, az összeget eredőnek vagy rezultánsnak nevezzük.

Speciálisan: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

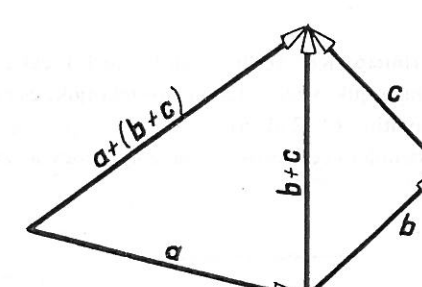
Vektoroknak a definíció szerinti összeadására érvényesek az összeadás szabályai: a kommutatív és asszociatív szabály. A szabályok helyességét geometriai úton igazolhatjuk.



2.8 ábra



2.9/a ábra



2.9/b ábra

Kommutatív szabály. A 2.8 ábrából leolvasható a kommutatív szabály:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Tehát két vektor összeadásakor az összeadandók sorrendje felcserélhető.

Asszociatív szabály. A 2.9/a és b ábrákból leolvasható az asszociatív szabály:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

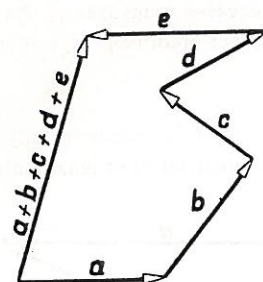
Több összeadandó esetén az összeadandók tetszés szerint csoportosíthatók.

Az asszociatív szabály teszi lehetővé, hogy több vektor összeadásakor a részletösszegeket ne jelöljük meg. A vektorokat sorrend, irány és nagyság szerint egymás végpontjához húzzuk. Az első vektor kezdőpontját az utolsó végpontjával összekötő vektor az összegvektor. Ez az eljárás a vektorsokszög vagy vektorpoligon eljárás (2.10 ábra).

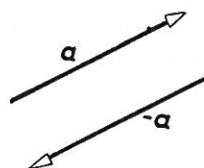
Negatív vektor. Az **a** vektorral egyenlő abszolút értékű, ellentétes irányú vektort az **a** vektor ellentettjének nevezzük és **(-a)**-val jelöljük. (2.11 ábra)

Az összeadás definíciójából következik, hogy

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$



2.10 ábra

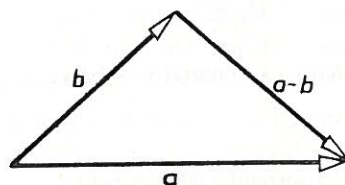


2.11 ábra

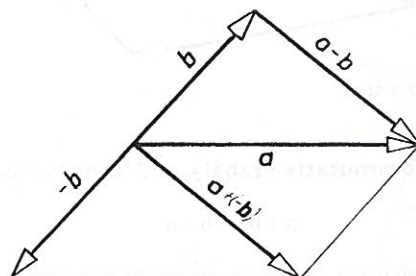
2.1.4 Vektorok kivonása

Definíció. Két vektor különbségét megkapjuk, ha a két vektort közös kezdőpontból felrajzoljuk, végpontjaikat összekötjük, és ezt a vektort a kisebbítendő vektor végpontja felé irányítjuk (2.12 ábra).

A definíció célszerűségét igazolja, hogy a számok kivonási próbájához hasonlóan érvényes:



2.12 ábra



2.13 ábra

ha a különbségvektort a kivonandó vektorhoz hozzáadjuk, a kisebbítendő vektort kapjuk. A 2.12 ábrából leolvasható:

$$b + (a - b) = a.$$

Az $a - b$ különbségvektort úgy is megkaphatjuk, hogy az a vektorhoz a $(-b)$ vektort adjuk. A 2.13 ábrából leolvasható, hogy

$$a - b = a + (-b).$$

Speciálisan: $a - a = 0$,

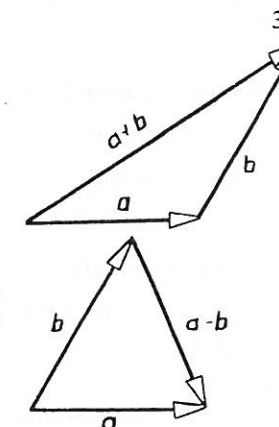
$$0 - a = -a.$$

Vektorok között a „kisebb-nagyobb” relációnak nincs értelme. Összehasonlítani csak a vektorok abszolút értékét lehet.

Az összeadás és kivonás definíciójából következik, hogy a háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenségek szerint (2.14 ábra):

$$|a| + |b| \geq |a + b|.$$

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$



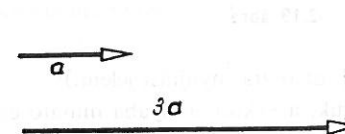
2.14 ábra

2.1.5 Vektor szorzása és osztása számmal. Párhuzamos vektorok

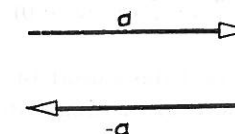
Vektor szorzása természetes számmal ugyanúgy az összeadás rövidítése, mint a számoknál.

$$a + a + a = 3a.$$

Tehát $3a$ az a vektor háromszoros nyújtását jelenti (2.15 ábra).



2.15 ábra

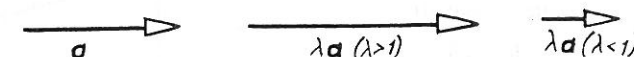


2.16 ábra

Hasonlóan $(-1)a = -a$ ((-1) -gyel való szorzás) az a vektor ellentett vektorát adja. (2.16 ábra.)

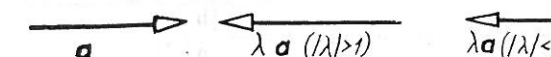
Általában a λa vektor (ahol λ tetszőleges valós szám) az a vektorból a következőképpen áll elő:

1. $\lambda > 0$



2.17 ábra

λa , az a vektor nyújtását jelenti, ha $\lambda > 1$, és az a vektor zsugorítását, ha $\lambda < 1$. (2.17 ábra.)



2.18 ábra

2. $\lambda < 0$

λa az a vektorral ellentétes irányú (2.18 ábra).

3.

Ha $|\lambda| > 1$ λa a $-a$ vektor nyújtása,

ha $|\lambda| < 1$ λa a $-a$ vektor zsugorítása.

Vektor számmal való szorzására érvényesek a szorzás kommutatív, asszociatív és disztributív szabályai.

Kommutatív szabály. Megállapodás szerint:

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{a} \lambda.$$

Asszociatív szabály. $\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.

A szabály érvényessége a számmal való szorzás definíciója alapján belátható.

Disztributív szabály. 1. Számok összegét szorozzuk vektorral.

$$(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}.$$

A szabály érvényessége ábrázolással könnyen belátható.

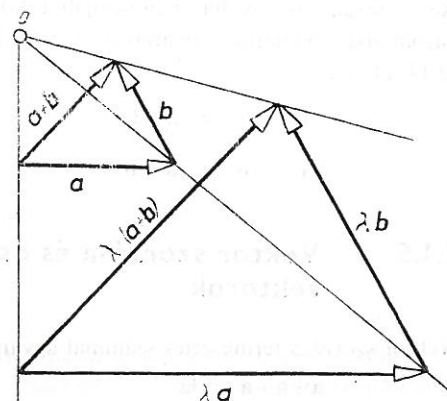
2. Vektorok összegét szorozzuk számmal.

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}.$$

A szabály érvényessége a háromszögek hasonlóságából (az O -pontból való vetítéssel) λ bármilyen értékénél könnyen belátható (2.19 ábra).

Vektor osztása számmal a szám reciprok értékével való szorzást jelenti:

$$\frac{\mathbf{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{a}, \quad (\lambda \neq 0).$$



2.19 ábra

(Ha $|\lambda| > 1$ az osztás zsugorítást, ha $|\lambda| < 1$, az osztás nyújtást jelent.)

Ha az $\mathbf{a}$ vektort saját abszolút értékével osztjuk, a vektor irányába mutató egységvektort kapunk:

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \mathbf{a}^0.$$

Párhuzamos vektorok kapcsolata. Értelmezésünk szerint az $\mathbf{a}$ és $\lambda \mathbf{a}$ vektorok párhuzamosak. Megfordítva, ha két vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamos és $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b}$ létrehozható $\mathbf{a}$ nyújtásával (zsugorításával).

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}.$$

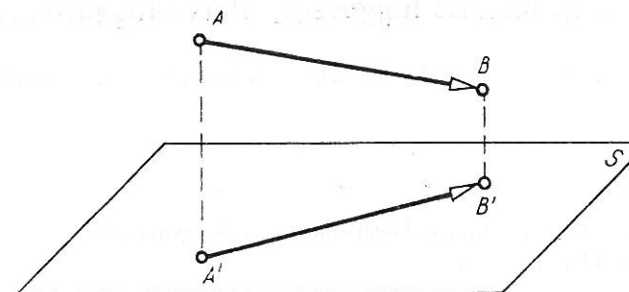
Ha a két vektor egyirányú: $\lambda = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$,

ha a két vektor ellentétes irányú: $\lambda = -\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$.

(λ abszolút értéke megmutatja, hogy $\mathbf{b}$ hányszor „hosszabb” $\mathbf{a}$ -nál.)

2.1.6 A vektor vetítése

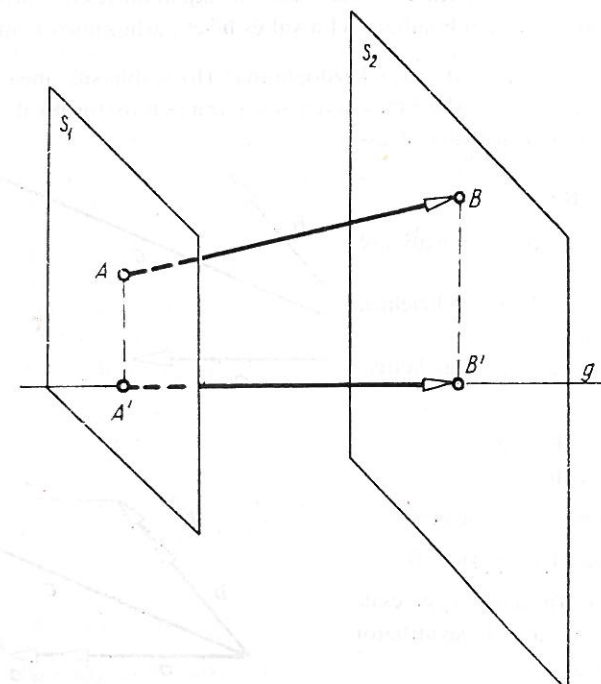
Vektor vetítése síkra. Az $\overrightarrow{AB}$ vektort az S síkra úgy vetítjük, hogy végpontjaiból az S síkra merőleges egyeneseket bocsátunk, és az A', B' dőléspontokat a vektor irányításának megfelelően összekötjük. Így az $\overrightarrow{AB}$ vektor vetülete az S síkra az $\overrightarrow{A'B'}$ vektor (2.20 ábra).



2.20 ábra

Ha az $\overrightarrow{AB}$ vektort párhuzamosan elmozgatjuk, a vetítő egyenesek iránya és távolsága azonos marad. Tehát az egyenlő nagyságú és irányú vektorok vetületvektora azonos.

Vektor vetítése egyenesre. Az $\overrightarrow{AB}$ vektor végpontjain át a g egyenesre merőleges S_1 és S_2 síkokat fektetünk. A síkok és a g egyenes metszéspontjait összekötő $\overrightarrow{A'B'}$ vektor az $\overrightarrow{AB}$ vektor vetülete a g egyenesre (2.21 ábra). Ha az $\overrightarrow{AB}$ vektort önmagával párhuzamosan elmozgatjuk, a vetítősíkok iránya és távolsága változatlan marad, a vetületvektorok is önmagukkal párhuzamosan tolnak el. Azonos nagyságú és irányú vektorok vetülete egy egyenesre azonos vetületvektort ad.



2.21 ábra

2.1.7 Vektorok lineáris függősége, illetve függetlensége

Vektorok felbontása. Láttuk, hogy ha két vektor párhuzamos, egyik a másik nyújtásával hozható létre.

Tehát ha $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$,
akkor $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a vektorok lineárisan függenek egymástól.
Az egyenletet más alakban írva:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = 0,$$

ahol az együtthatók közül legalább az egyik nem nulla, azaz

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Tehát két vektor lineáris függősége általánosan azt jelenti, hogy

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = 0$$

és $\alpha^2 + \beta^2 > 0$

egyidejűleg fennállhat.

Ha viszont a két vektor nem párhuzamos, tehát lineárisan függetlenek, az

$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = 0$ feltétel csak úgy jöhet létre, ha α és β együtthatók mindegyike nulla,

azaz $\alpha^2 + \beta^2 = 0$.

Tétel. Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak, akkor a síkjukban fekvő bármely $\mathbf{c}$ vektor felbontható, és csak egyféleképpen bontható fel $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos komponensekre.

Bizonyítás. Töljük a három vektort közös kezdőpontba! Hosszabbítsuk meg $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ irányát! A $\mathbf{c}$ végpontjából húzzunk párhuzamos egyeneseket az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal! A 2.22 ábrából a paralelogrammaszabály alapján leolvasható, hogy

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}.$$

Tehát a $\mathbf{c}$ vektor az $\alpha \mathbf{a}$ és $\beta \mathbf{b}$ komponensekre bontható.

Most még bebizonyítjuk, hogy a feltételnek csak egyetlen α, β számpár felel meg.

Tegyük fel a tétellel ellentétben, hogy kétféle felbontás lehetséges:

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \quad \text{és}$$

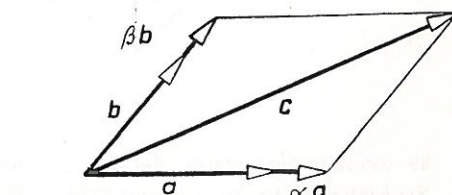
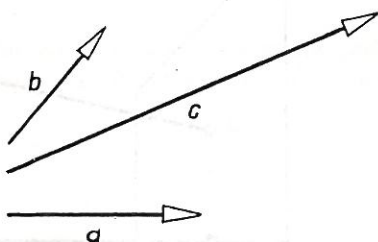
$$\mathbf{c} = \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}.$$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{a} + (\beta_1 - \beta_2) \mathbf{b} = 0.$$

Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függetlenek, ez csak akkor következhet be, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ együtthatói egyidejűleg nullák, vagyis

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 = 0.$$



2.22 ábra

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{és} \quad \beta_1 = \beta_2,$$

tehát a feltételnek csak egy α, β számpár felel meg. A

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$$

egyenlet így is írható:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = 0,$$

ahol $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$.

Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok lineárisan függenek, egy síkban vannak, komplanárisak.

Ha az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok nem fekszenek egy síkban, azaz lineárisan függetlenek, az

$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = 0$ feltétel csak akkor állhat fenn, ha egyidejűleg

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Tétel. Ha adott három nem komplanáris, azaz lineárisan független $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektor, a tér bármelyik $\mathbf{d}$ vektora felbontható — és csak egyféleképpen bontható fel — az adott vektorokkal párhuzamos komponensekre.

Bizonyítás. Töljük a négy vektort közös kezdőpontba (2.23 ábra)! Fekessünk az $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, valamint a $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ vektorpárokon át egy-egy síkot! Legyen a két sík metszésvonala a g egyenes. A $\mathbf{d}$ vektort az előző tétel értelmében felbontjuk $\mathbf{c}$ -vel és g -vel párhuzamos komponensekre.

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_g + \gamma \mathbf{c}.$$

A $\mathbf{d}_g$ vektor párhuzamos az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor síkjával, ezért felbontható $\alpha \mathbf{a}$ és $\beta \mathbf{b}$ komponensekre.

$$\mathbf{d}_g = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}.$$

Így $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}.$

Most még bebizonyítjuk, hogy a felbontás csak egyféleképpen lehetséges.

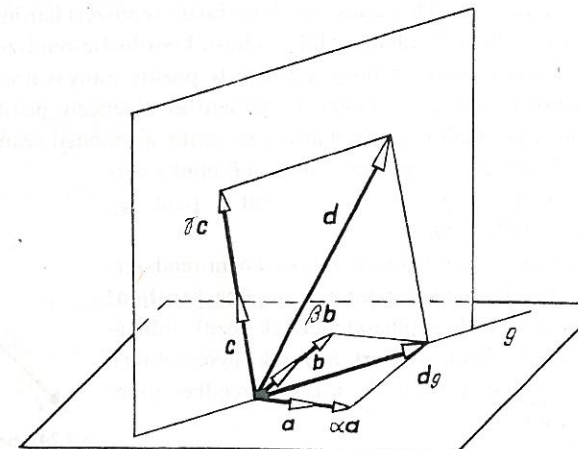
Tegyük fel a feltétellel ellentétben, hogy két felbontás lehetséges:

$$\mathbf{d} = \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} + \gamma_1 \mathbf{c} \quad \text{és}$$

$$\mathbf{d} = \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b} + \gamma_2 \mathbf{c}.$$

A két egyenletet egymásból kivonva:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{a} + (\beta_1 - \beta_2) \mathbf{b} + (\gamma_1 - \gamma_2) \mathbf{c} = 0.$$



2.23 ábra

Mivel az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok nem komplanárisak, azaz lineárisan függetlenek, ez csak akkor teljesülhet, ha

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2 = 0,$$

azaz $\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2.$

Összefoglalva: az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos vektorok síkjában fekvő $\mathbf{c}$ vektor előállítható

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \quad \text{alakban.}$$

Az α és β számok a $\mathbf{c}$ vektor koordinátái az $\mathbf{a}$; $\mathbf{b}$ alapvektorokra vonatkoztatva.

A térben bármely $\mathbf{d}$ vektor előállítható, három nem komplanáris $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektor segítségével,

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \quad \text{alakban.}$$

Az α , β , γ számok a $\mathbf{d}$ vektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ alapvektorokra vonatkozó koordinátái.

2.1.8 Vektorok megadása derékszögű koordinátákkal

Egységvektorok. Helyezzük a vektorokat térbeli derékszögű koordináta-rendszerbe! A térbeli derékszögű (Descartes-féle) koordináta-rendszert három, egymásra páronként merőleges koordinátatengely alkotja. Jobbsodrású koordináta-rendszert használunk, azaz a tengelyek úgy követik egymást, hogy a z tengely pozitív irányával szembe nézve az x tengely pozitív ága pozitív forgási irányban forgatható az y tengely pozitív ágába (2.24 ábra). A térben minden pontnak egy számhármasság és fordítva, minden számhármasságnak egy pont felel meg. A 2.25 ábrából leolvasható, hogy a P pont koordinátái $x = 2, y = 4, z = 5$. Tehát a pont így írható: $P(2; 4; 5)$.

Helyezzük el a $\mathbf{v}$ vektort a koordináta-rendszerben úgy, hogy kezdőpontja az origóba kerüljön! Vegyünk fel a koordinátatengelyek pozitív irányában három egységvektort, az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ egységvektort. A három egységvektor az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sorrendben jobbsodrást alkot.

Ezek nem komplanárisak, ezért a $\mathbf{v}$ vektor három, egymásra merőleges vetületvektor összegeként írható fel:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z \quad (2.26 \text{ ábra}),$$

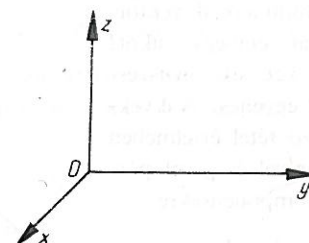
ahol a három vetületvektor az egységvektorok nyújtása:

$$\mathbf{v}_x = x\mathbf{i} \quad \mathbf{v}_y = y\mathbf{j} \quad \mathbf{v}_z = z\mathbf{k}.$$

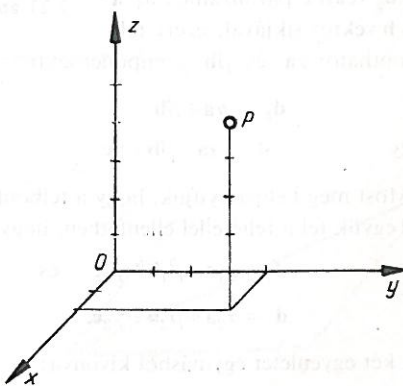
A $\mathbf{v}$ vektor tehát az egységvektorok segítségével így írható fel:

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2.27 \text{ ábra}).$$

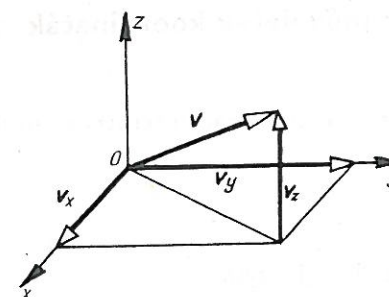
Az x, y, z számok a $\mathbf{v}$ vektor vektorkoordinátái. Ugyanez a számhármasság jellemzi a vektor végpontjában levő P pontot.



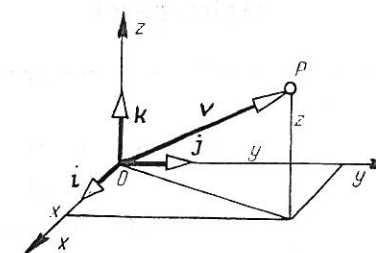
2.24 ábra



2.25 ábra



2.26 ábra



2.27 ábra

A vektorkoordináták segítségével a $\mathbf{v}$ vektort így is írhatjuk:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x; y; z).$$

Hogy a $P(x; y; z)$ ponttól a vektort és a pont koordinátáitól a vektorkoordinátákat megkülönböztessük, szögletes zárójelet használunk:

$$\mathbf{v} = [x; y; z].$$

A vektor abszolút értéke. A $\mathbf{v}$ vektor abszolút értéke az irányított egyenes szakasz hossza. Amint az a 2.28 ábrából könnyen leolvasható:

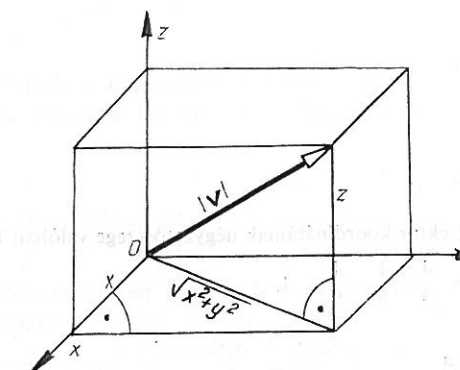
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2},$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

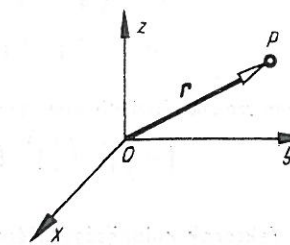
A vektor abszolút értéke egyenlő a koordináták négyzetösszegének négyzetgyökével.

Helyvektor. Az origóból egy adott P ponthoz mutató vektort a pont helyvektorának nevezzük. $\vec{OP} = \mathbf{r}$ jelöléssel (2.29 ábra):

$$\vec{OP} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$



2.28 ábra



2.29 ábra

2.1.9 Vektorokkal végzett műveletek koordináták segítségével

a) Vektorok összege koordináták segítségével. Legyen az adott két vektor, amelynek összegét képezzük:

$$\mathbf{v}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} \quad \text{és}$$

$$\mathbf{v}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) + (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}).$$

Alkalmazva a műveleti szabályokat:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\mathbf{k}.$$

A vektorok összegének koordinátáit megkapjuk, ha a megfelelő koordinátákat összeadjuk. A szabály tetszés szerinti számú összeadandóra is érvényes.

b) Vektor számmal való szorzása. Adott a $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektor. Írjuk fel a koordináták segítségével a $\lambda\mathbf{v}$ vektort:

$$\lambda\mathbf{v} = \lambda(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Alkalmazva a disztributív szabályt:

$$\lambda\mathbf{v} = \lambda x\mathbf{i} + \lambda y\mathbf{j} + \lambda z\mathbf{k}.$$

Tehát egy vektor λ -szorosának a koordinátáit megkapjuk, ha koordinátáit rendre λ -val szorozzuk.

Írjuk fel így a $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektor egységvektorát.

$$\mathbf{v}^0 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

$$\text{Mivel } |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\mathbf{v}^0 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{k}.$$

Példa

$$\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3,$$

$$\mathbf{v}^0 = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az egységvektor koordinátáinak négyzetösszege valóban 1.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1.$$

c) Vektorok különbsége. Képezzük a

$$\mathbf{v}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

vektorok különbségét:

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}).$$

$$\text{Mivel } \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + (-1)\mathbf{v}_1,$$

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) + (-1)(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}).$$

Alkalmazva az asszociatív és disztributív szabályt:

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

Két vektor különbségvektorának a koordinátáit megkapjuk, ha a megfelelő koordinátákat egymásból kivonjuk.

d) Két pontot összekötő vektor. Adott a $P_1(x_1; y_1; z_1)$ és $P_2(x_2; y_2; z_2)$ pont. Jelöljük a két ponthoz vezető helyvektorokat $\mathbf{r}_1$ -gyel és $\mathbf{r}_2$ -vel!

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}.$$

A $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor, amint az a 2.30 ábrából látható:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

e) Párhuzamos vektorok kapcsolata. Két vektor párhuzamos, ha az egyik a másik nyújtásával hozható létre.

$$\mathbf{v}_2 \parallel \mathbf{v}_1, \quad \text{ha}$$

$$\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_1.$$

$$\text{Legyen } \mathbf{v}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}.$$

Az $\mathbf{v}_1$ vektor λ -szorosa:

$$\lambda\mathbf{v}_1 = \lambda x_1\mathbf{i} + \lambda y_1\mathbf{j} + \lambda z_1\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_1 \quad \text{csak úgy lehetséges, ha a megfelelő koordináták egyeznek, azaz}$$

$$x_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda y_1, \quad z_2 = \lambda z_1.$$

Ezek az egyenletek ekvivalensek a λ kiküszöbölésével nyerhető

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

egyenletekkel, feltéve, hogy egyik nevező sem nulla.

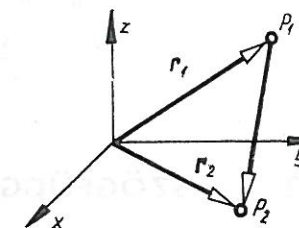
Ezt továbbra is feltéve két vektor párhuzamos, ha megfelelő koordinátáik hányadosa megegyezik.

Az

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

egyenletrendszer három egyenletből álló egyenletrendszert jelent. Ezekből csak kettő független, például

$$\text{az} \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \quad \text{és} \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{z_2}{z_1}$$



2.30 ábra

egyenletek, a harmadik egyenlet,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

az első kettő következménye.

Ha valamelyik vektor valamelyik vektorkoordinátája 0, pl. $y_1 = 0$, a párhuzamosság csak akkor állhat fenn (0-val nem lehet osztani), ha az $y_2 = \lambda y_1$ egyenlet alapján $y_2 = \lambda \cdot y_1 = = \lambda \cdot 0 = 0$, azaz a megfelelő másik koordináta is nulla.

Példák

1. Párhuzamosak-e a $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

és $\mathbf{v}_2 = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ vektorok?

Mivel $\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$, a vektorok párhuzamosak.

2. Párhuzamosak-e az $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

és $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektorok?

$\frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{3}$, a két vektor nem párhuzamos.

2.2 SZÖGFÜGGVÉNYEK. TRIGONOMETRIA

2.2.1 Szögfüggvények

Forgassuk el a $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i} = [1; 0]$ vektort α szöggel pozitív forgásirányban. Az így adódó egységnyi hosszúságú vektort jelöljük $\mathbf{v}_\alpha$ -val (2.31 ábra). (Ha α negatív, az α -val pozitív irányban való elforgatás az $|\alpha|$ értékkel való negatív irányú elforgatást jelenti.)

Definíció. A $\mathbf{v}_\alpha$ vektor koordinátáit az α szög koszinuszának (cosinus), illetve szinusának (sinus) nevezzük.

Jelölésük: $\cos \alpha$ és $\sin \alpha$.

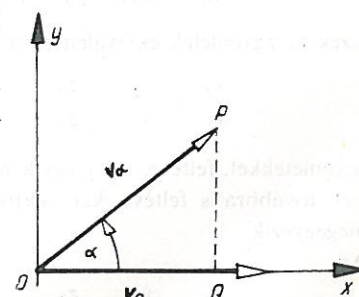
Tehát

$$\mathbf{v}_\alpha = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j},$$

illetve

$$\mathbf{v}_\alpha = [\cos \alpha; \sin \alpha].$$

Könnyen belátható, hogy ha $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, akkor az így definiált és az ismert módon a derékszögű háromszög oldalaival definiált $\cos \alpha$ és $\sin \alpha$ szögfüggvények megegyeznek. A 2.31 ábrán az OQP derékszögű háromszögből ez leolvasható.



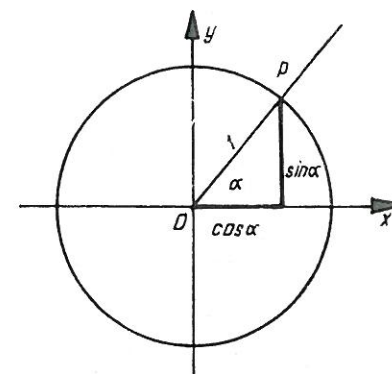
2.31 ábra

A koszinusz és szinusz szögfüggvények előbb adott definíciója ekvivalens a következő definícióval.

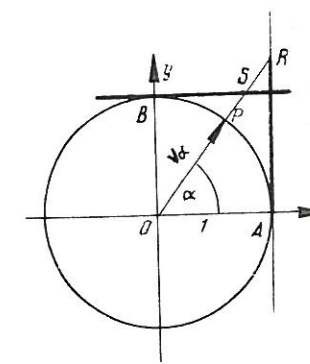
Definíció. Rajzoljunk az $(x; y)$ koordináta-rendszerbe egy origó középpontú egységsugarú kört!

Legyen az α forgásszög csúcsa az origóban, nyugvó szára pedig a pozitív x tengely.

Az α forgásszög koszinusza a mozgó szár és a kör metszéspontjának abszcisszája, szinusza a metszéspont ordinátája (2.32 ábra).



2.32 ábra



2.33 ábra

Az α szög tangens és kotangens (cotangens) szögfüggvényeit a következőképpen definiáljuk.

Definíció. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, feltéve, hogy $\cos \alpha \neq 0$.

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, feltéve, hogy $\sin \alpha \neq 0$.

Ez a definíció ekvivalens a következővel:

Definíció. Rajzoljunk az origó körüli egységsugarú körhöz az $(1; 0)$ és $(0; 1)$ pontban érintőt!

Vizsgáljuk a $\mathbf{v}_\alpha$ vektor meghosszabbításával keletkezett OP egyenesnek az előző érintőkkel alkotott metszéspontjait, R -et és S -et (2.33 ábra).

Az RA és SB szakaszok $\operatorname{tg} \alpha$ -t és $\operatorname{ctg} \alpha$ -t adják. (Az RA , illetve az SB szakasz hosszának előjelét az R pont ordinátájának, illetve az S pont abszcisszájának előjele határozza meg.)

A szögfüggvények definíciójából közvetlenül adódnak a következő tulajdonságok:

1. $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ 2π szerint periodikus:
 $\sin \alpha = \sin (\alpha + 2k\pi), \quad k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots,$
 $\cos \alpha = \cos (\alpha + 2k\pi), \quad k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$
2. Mivel $\mathbf{v}_{(\alpha+\pi)} = -\mathbf{v}_\alpha$,
 $\sin (\alpha + \pi) = -\sin \alpha,$
 $\cos (\alpha + \pi) = -\cos \alpha.$

3. v_α -t tükrözve az x , illetve y tengelyre, adódik, hogy

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos \alpha, \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos \alpha, \\ \sin(\pi-\alpha) &= \sin \alpha.\end{aligned}$$

4. A 3. pont alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned}\cos(2\pi-\alpha) &= \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \\ \sin(2\pi-\alpha) &= \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.\end{aligned}$$

5. A szögfüggvények definíciója alapján adódnak a következő táblázatok:

α	$0^\circ-90^\circ$	$90^\circ-180^\circ$	$180^\circ-270^\circ$	$270^\circ-360^\circ$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha; \operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

α	0°	90°	180°	270°
$\sin \alpha$	0	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	0	-1	0

6. Mivel

$$|v_\alpha| = 1, \quad \text{minden } \alpha\text{-ra} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Innen:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

A gyök előjelét az egyes negyedekben esetenként kell megállapítanunk.

7. $\operatorname{tg} \alpha = 0$, ha $\alpha = k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \dots$).

$\operatorname{ctg} \alpha = 0$, ha $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \dots$).

$\operatorname{tg} \alpha$ nincs értelmezve, ha $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \dots$).

$\operatorname{ctg} \alpha$ nincs értelmezve, ha $\alpha = k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \dots$).

A 2) alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha + \pi) &= \operatorname{tg} \alpha, \\ \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) &= \operatorname{ctg} \alpha,\end{aligned}$$

azaz a tangens és kotangens szögfüggvények már π szerint periodikusak.

A 2.33 ábra alapján:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \\ \cos \alpha &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.\end{aligned}$$

A gyök előjelét most is az egyes negyedekben esetenként kell megállapítanunk.

2.2.2 Addíciós tételek

Tétel. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$,
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

Bizonyítás. Vegyük fel az i és j alapvektorokat (koordináta-egységvektorokat) és az α szöggel való elforgatásuk által nyert i' és j' egységvektorokat.

Az i' vektor az i és j alapvektorokkal kifejezve (2.34 ábra):

$$(a) \quad i' = \cos \alpha i + \sin \alpha j.$$

Fejezzük ki a j' vektort a j és $-i$ vektorok segítségével, figyelembe véve, hogy j , illetve $-i$ pozitív irányú derékszögű forgatással áll elő i -ből, illetve j -ből.

A j' vektor az egymást jobbsodrásban követő j és $-i$ alapvektorokkal kifejezve:

$$j' = \cos \alpha j + \sin \alpha (-i),$$

azaz

$$(b) \quad j' = -\sin \alpha i + \cos \alpha j.$$

Húzzuk meg az i -vel $(\alpha + \beta)$ szöget bezáró e egységvektort! Az e vektort kétféleképpen írjuk fel.

Az i és j alapvektorokkal:

$$(c) \quad e = \cos(\alpha + \beta) i + \sin(\alpha + \beta) j.$$

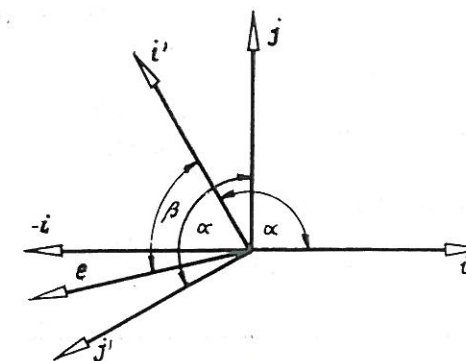
Az i' és j' alapvektorokkal:

$$e = \cos \beta i' + \sin \beta j'.$$

Írjuk be ebbe az egyenletbe i' és j' (a) és (b)-ben kapott értékeit:

$$e = \cos \beta (\cos \alpha i + \sin \alpha j) + \sin \beta (-\sin \alpha i + \cos \alpha j),$$

4*



2.34 ábra

azaz

$$(d) \quad e = i (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + j (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta).$$

A (c) és (d) egyenleteket összehasonlítva:

$$(1) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$(2) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Írjuk az egyenletekben β helyett $(-\beta)$ -t, és használjuk fel az előző pont 3. alatti egyenleteit!

$$(3) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$(4) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Tegyük fel, hogy $\cos \alpha$, $\cos \beta$ és $\cos(\alpha + \beta)$ egyike sem nulla.

Ekkor

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}. \end{aligned}$$

Vagyis

$$(5) \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

 β helyett $(-\beta)$ -t írva:

$$(6) \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

(feltéve, hogy a szereplő tangensek mind léteznek).

Kétszeres szögek függvényei. Az addíciós tételekre kapott (1), (2), illetve (5) egyenletekben β helyébe α -t helyettesítve:

$$(1) \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$(2) \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Félszögek függvényei. Írjuk fel újra a következő két ismert azonosságot:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$$

Az egyenlőségeket összeadva, illetve kivonva egymásból, majd 2-vel osztva:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

 α helyére $\frac{\alpha}{2}$ -t írva és gyököt vonva:

$$(1) \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

$$(2) \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Innen

$$(3) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

A gyök előjelét esetenként mindig meg kell állapítanunk.

2.2.3 Szögfüggvények összegének szorzattá alakítása

Alakítsuk szorzattá a következő összegeket, illetve különbségeket:

$$\sin \alpha + \sin \beta; \quad \sin \alpha - \sin \beta;$$

$$\cos \alpha + \cos \beta; \quad \cos \alpha - \cos \beta.$$

Kiindulunk az addíciós tételekből:

$$\left. \begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{aligned} \right\}.$$

A két azonosságot összeadva, illetve egymásból kivonva:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y,$$

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x \sin y.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\left. \begin{aligned} x + y &= \alpha \\ x - y &= \beta \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenletrendszerből: $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Ezeket az értékeket az utolsó két egyenletbe helyettesítve:

$$(1) \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$(2) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Hasonlóan két szög összegének és különbségének koszinuszából kiindulva:

$$\left. \begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned} \right\}$$

A két azonosságot összeadva, illetve kivonva:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y,$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y.$$

Az $x+y = \alpha; \quad x-y = \beta; \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}; \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

értékeket behelyettesítve:

$$(3) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$(4) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

2.2.4 Szinusztétel. Koszinusztétel

Gyakori feladat, hogy egy háromszög ismeretlen adatait ismert adatok alapján ki kell számítani. Ilyen feladatok megoldására alkalmasak a következő tételek.

A szinusztétel. Bármely háromszögben az oldalak aránya egyenlő a szemben fekvő szögek szinuszaival.

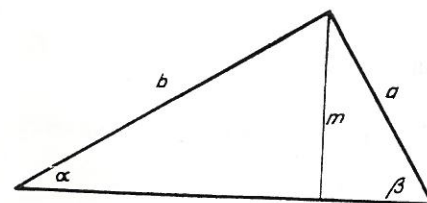
Bizonyítás. Hegyesszögű háromszögben (2.35 ábra):

$$\sin \beta = \frac{m}{a}, \quad \text{innen} \quad m = a \sin \beta,$$

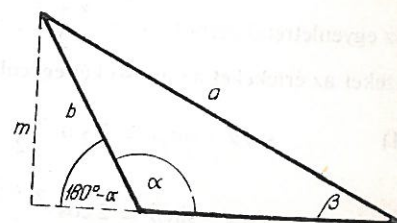
$$\sin \alpha = \frac{m}{b}, \quad \text{innen} \quad m = b \sin \alpha.$$

Azaz $a \sin \beta = b \sin \alpha$ vagy

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$



2.35 ábra



2.36 ábra

Tompaszögű háromszögben (2.36 ábra):

$$\sin \beta = \frac{m}{a}, \quad \text{innen} \quad m = a \sin \beta.$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{m}{b}, \quad \text{innen} \quad m = b \sin(180^\circ - \alpha).$$

Mivel $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha),$

$$a \sin \beta = b \sin \alpha.$$

Innen:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Így minden háromszögben érvényes a szinusztétel:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

A szinusztételt alkalmazzuk, ha a háromszögben adott:

a) egy oldal és két szög,

b) két oldal és a nagyobbikkal szemben levő szög.

A koszinusztétel. A háromszögben egy oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegéből kivonva a két oldal és a közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzata.

Bizonyítás. Hegyesszögű háromszögben (2.37 ábra):

$$a^2 = (c-x)^2 + m^2 = c^2 - 2cx + x^2 + m^2.$$

$$b^2 = x^2 + m^2.$$

Így $a^2 = c^2 - 2cx + b^2.$

Mivel $x = b \cos \alpha,$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Tompaszögű háromszögben (2.38 ábra):

$$a^2 = (c+x)^2 + m^2 = c^2 + 2cx + x^2 + m^2.$$

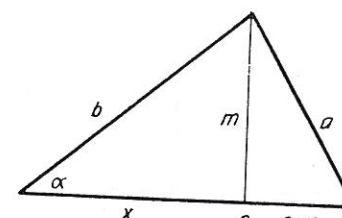
$$b^2 = x^2 + m^2.$$

Így $a^2 = c^2 + 2cx + b^2.$

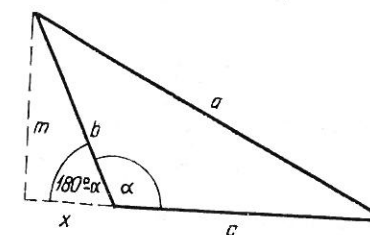
$$x = b \cos(180^\circ - \alpha),$$

és $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha,$ ezért

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$



2.37 ábra



2.38 ábra

Így minden háromszögben érvényes a koszinusz-tétel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

A koszinusz-tételt alkalmazzuk a háromszög ismeretlen alkotórészeinek meghatározására, ha adott:

- a) két oldal és a közbezárt szög
- b) három oldal.

2.2.5 A háromszög területe

Tétel. A háromszög területe egyenlő két szomszédos oldal és a közbezárt szög szinuszának szorzatának felével.

Bizonyítás. A háromszög területe:

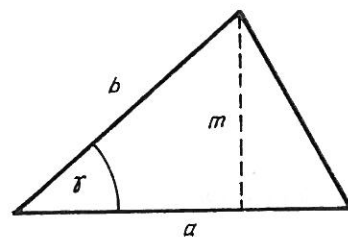
$$A = \frac{am}{2}.$$

Hegyesszögű háromszögnél (2.39. ábra):

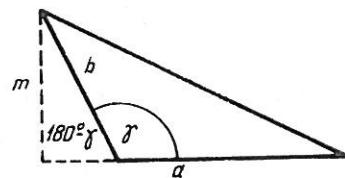
$$m = b \sin \gamma.$$

Így

$$A = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$



2.39. ábra



2.40. ábra

Tompaszögű háromszögnél (2.40. ábra):

$$m = b \sin (180^\circ - \gamma),$$

$$m = b \sin \gamma,$$

$$A = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

Tétel. Ha a háromszög kerülete,

$$a + b + c = 2s,$$

akkor a háromszög területe:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Bizonyítás. $A = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$

A félszögek függvényének képletével:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{2}}$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{2}}.$$

A koszinusz-tételből: $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$

Így

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2 - (a-b)^2}{ab}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{ab}},$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}.$$

Mivel

$$a + b + c = 2s \quad (\text{a háromszög kerülete}),$$

ezért

$$a + b - c = 2s - 2c = 2(s - c),$$

$$a + c - b = 2s - 2b = 2(s - b),$$

$$b + c - a = 2s - 2a = 2(s - a).$$

Így

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(s-a)2(s-b)}{ab}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2s \cdot 2(s-c)}{ab}} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

$$A = \frac{ab}{2} \sin \gamma = \frac{ab}{2} 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = ab \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

$$A = ab \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{ab}} \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Ez Heron képlete, amely a háromszög területét az oldalak segítségével fejezi ki.

2.2.6 Trigonometriai feladatok

1. Az $F_1 = 5,2$ kp és $F_2 = 3,9$ kp erő egymással 73° -os szöget zár be. Mekkora az eredő erő és milyen irányú?

Az eredő erő a fizika tanítása szerint a paralelogrammának a két erő közös kezdőpontjából kiinduló átlója (2.41 ábra).

Az eredő erő nagysága a koszinusz-tétellel:

$$F^2 = 5,2^2 + 3,9^2 - 2 \cdot 5,2 \cdot 3,9 \cos 107^\circ$$

$$F^2 = 5,2^2 + 3,9^2 + 2 \cdot 5,2 \cdot 3,9 \cos 73^\circ$$

Legyen $z = 2 \cdot 5,2 \cdot 3,9 \cos 73^\circ$

$$\lg z = \lg 2 + \lg 5,2 + \lg 3,9 + \lg \cos 73^\circ$$

$$\lg z = 0,3010 + 0,7160 + 0,5911 + 9,4659 - 10 = 1,0740$$

$$z = 11,9$$

$$F^2 = 27,04 + 15,21 + 11,9 = 54,15$$

$$F = 7,36$$

Az eredő erő irányát az F_1 -gyel alkotott szöggel jellemezzük. A szinusz-tétellel:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin 107^\circ} = \frac{3,9}{7,36}$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{3,9 \sin 107^\circ}{7,36} = \frac{3,9 \sin 73^\circ}{7,36}$$

$$\lg \sin \alpha_1 = \lg 3,9 + \lg \sin 73^\circ - \lg 7,36$$

$$\lg \sin \alpha_1 = 0,5911 + 9,9806 - 10 - 0,8669 = 9,7048 - 10$$

$$\alpha_1 = 30,4^\circ$$

2. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

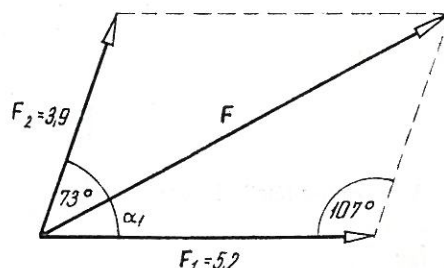
$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = 1.$$

A bal oldalt átalakítva:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{1 - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} =$$



2.41 ábra

$$= \frac{1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1.$$

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $\sin 2x + 3 \sin x = 2 \operatorname{tg} x$, ahol $x \neq 90^\circ; 270^\circ$

$$2 \sin x \cos x + 3 \sin x - 2 \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \quad / \cdot \cos x,$$

$$2 \sin x \cos^2 x + 3 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0.$$

$$\sin x (2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2) = 0.$$

Szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

1. $\sin x = 0$, $x = 0^\circ \pm k\pi$.

2. $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$, $\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ +2 \end{cases}$

$$\cos x = +2 \quad \text{nem megoldás,}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \begin{cases} 120^\circ \pm n \cdot 360^\circ \\ 240^\circ \pm n \cdot 360^\circ \end{cases}$$

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

$$\sin 3x + \sin x = 2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \sin 2x \cos x.$$

$$\sin 4x + \sin 2x = 2 \sin \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2} = 2 \sin 3x \cos x.$$

Következésképpen az egyenlet így alakul:

$$2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x = 0.$$

$$2 \cos x (\sin 3x + \sin 2x) = 0, \quad \text{azaz}$$

$$2 \cos x \cdot 2 \sin \frac{3x+2x}{2} \cos \frac{3x-2x}{2} = 0$$

$$\cos x \cdot \sin \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0.$$

Ez akkor igaz, ha

vagy $\sin \frac{5x}{2} = 0$, $x_1 = (0 + k \cdot 72^\circ)$,

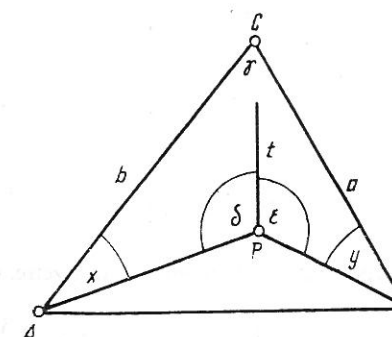
vagy $\cos \frac{x}{2} = 0$, $x_2 = (2k+1) 180^\circ$,

vagy $\cos x = 0$, $x_3 = (2k+1) \cdot 90^\circ$.

4. Hátrametszési feladat

Térképkészítés során gyakori feladat egy kiszemelt pont adott pontokhoz viszonyított helyzetének meghatározása. Ilyenkor a műszerrel a P pontban helyezkednek el.

A térképről ismerik az AC és BC távolságot és azoknak egymással bezárt γ szögét. A teodolittal P -ből lemérik az AC és BC szakaszok δ és ϵ látószögét (2.42 ábra).



2.42 ábra

Jelöljük az ismeretlen $\overline{PC}$ távolságot t -vel, az A -nál levő szöget x -szel, a B -nél levő szöget y -nal. $\overline{AC} = b$ és $\overline{BC} = a$ jelöléssel:

$$APC \triangle -ből: \frac{t}{b} = \frac{\sin x}{\sin \delta},$$

$$BPC \triangle -ből: \frac{t}{a} = \frac{\sin y}{\sin \varepsilon}.$$

A két egyenletet egymással elosztva:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin x}{\sin y}.$$

$$y = 360^\circ - (\gamma + \delta + \varepsilon + x).$$

Ebből $360^\circ - (\gamma + \delta + \varepsilon)$ ismert, jelöljük ω -val,

$$y = \omega - x.$$

Ezt behelyettesítve:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin x}{\sin(\omega - x)}.$$

Az addíciós tétel alkalmazásával:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin x}{\sin \omega \cos x - \cos \omega \sin x}.$$

Az egyenletből x -en kívül minden adat ismert. Az egyenlet $\sin x$ -re megoldható.

$$\frac{t}{b} = \frac{\sin x}{\sin \delta} \quad \text{összefüggésből:} \quad t = b \frac{\sin x}{\sin \delta}.$$

2.2.7 Vektorok iránykoszinuszai

Jelöljük a $\mathbf{v}$ vektor és a koordinátatengelyek által bezárt szögeket (irányszögeket) rendre α, β, γ -val. A szögek koszinuszai, az iránykoszinuszok a 2.43 ábráról leolvashatók:

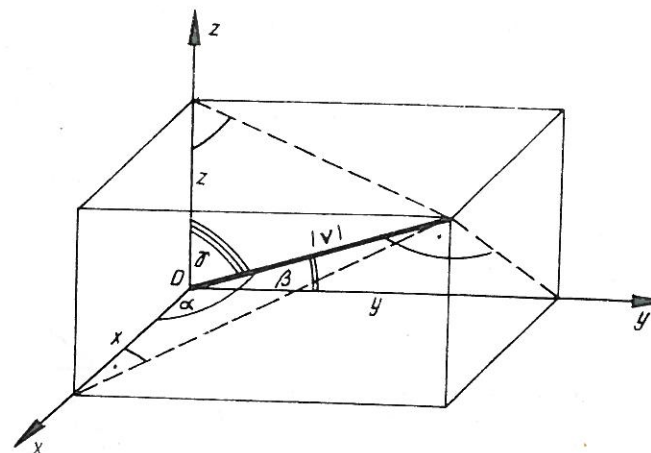
$$\cos \alpha = \frac{x}{|\mathbf{v}|},$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\mathbf{v}|},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\mathbf{v}|}.$$

A kapott egyenleteket emeljük négyzetre, majd adjuk össze:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{|\mathbf{v}|^2}.$$



2.43 ábra

$$\begin{aligned} \text{Mivel} \quad |\mathbf{v}|^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1. \end{aligned}$$

Az iránykoszinuszok négyzetösszege 1.

Vegyük fel egy, az origóból kiinduló $\mathbf{e}$ egységvektort (2.44 ábra)!

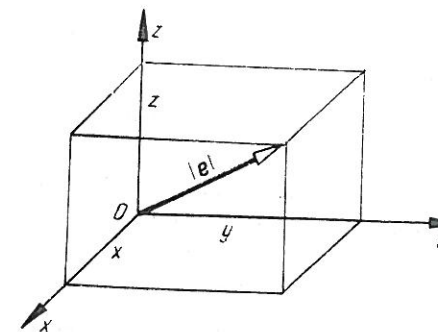
$$\begin{aligned} \text{Mivel} \quad |\mathbf{e}| &= 1 \\ \cos \alpha &= \frac{x}{1} = x \\ \cos \beta &= y \\ \cos \gamma &= z, \end{aligned}$$

azaz

az egységvektor koordinátái egyenlők az iránykoszinuszokkal.

Az egységvektor tehát így írható:

$$\mathbf{e} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}.$$



2.44 ábra

2.3 VEKTOROK SZORZÁSA

2.3.1 Vektorok skaláris szorzata

Definíció. Két vektor skaláris szorzata a vektorok abszolút értékének és hajlásszögük koszinuszának szorzata.

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ vagy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, esetleg $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ jelöli. (Olvasva: $\mathbf{a}$ -szor $\mathbf{b}$ skalárisan.)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi \quad (2.45 \text{ ábra}).$$

Az egyenlet jobb oldalán csak skaláris mennyiség szerepel. Két vektorhoz egy számot rendelünk, innen ered a skaláris szorzat elnevezés.

A fizikában valamely F erő hatására s elmozdulást végző testnél az erő munkája (2.46 ábra):

$$W = |F| \cdot |s| \cdot \cos \varphi, \text{ tehát a munka}$$

$$W = F \cdot s \text{ skaláris szorzat.}$$

A skaláris szorzat tulajdonságai.

1. A skaláris szorzat értéke:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi.$$

A skaláris szorzat nulla, ha valamelyik tényezője nullavektor, vagy ha a két vektor által közbezárt szög $\frac{\pi}{2}$, mivel $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Tehát, ha $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Fordítva, ha két vektor skaláris szorzata nulla, a két vektor merőleges, vagy az egyik tényező nullvektor.

Ha $\varphi = 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos 0 = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$;

ha $\varphi = \pi$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \pi = -|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$;

ha $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$;

ha $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$.

2. A merőleges vetület és a skaláris szorzat kapcsolata. Vetítsük a $\mathbf{b}$ vektort az $\mathbf{a}$ vektorra és vizsgáljuk a merőleges vetületet, amelyet b_a -val jelölünk (2.47 ábra)!

$$b_a = |\mathbf{b}| \cos \varphi.$$

A merőleges vetület, másképpen előjeles vetület vagy skalárvetület, előjellel ellátott távolság.

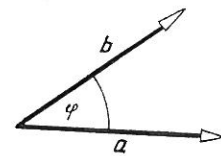
Ha $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $b_a = 0$;

ha $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $b_a > 0$;

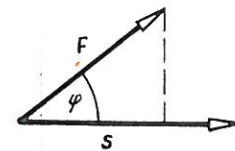
ha $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, $b_a < 0$;

ha $\varphi = 0$, $b_a = |\mathbf{b}|$;

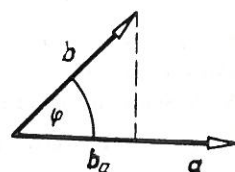
ha $\varphi = \pi$, $b_a = -|\mathbf{b}|$.



2.45 ábra



2.46 ábra



2.47 ábra

Mivel $b_a = |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi$,

és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi$,

ezért $b_a = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$.

A merőleges vetületet megkapjuk, ha a skaláris szorzatot osztjuk annak a vektornak abszolút értékével, amelyre a vetítés történik.

Ebből $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot b_a$.

3. Kommutatív tulajdonság. Mivel a skaláris szorzat definíciójában a sorrend nem szerepelt,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

A skaláris szorzat kommutatív.

4. Asszociatív tulajdonság. Az asszociatív tulajdonságot két vektor skaláris szorzatára és egy skalár tényezőre vonatkoztatjuk.

Tétel. $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b})$.

Elegendő a $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$

azonosságot igazolni a tényezők szimmetrikus szerepe miatt.

Bizonyítás. a) $\lambda \geq 0$.

A bal oldal így alakul:

$$\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \lambda |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi = |\lambda\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

b) $\lambda < 0$.

Legyen $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \angle = \varphi$.

Ekkor $(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) \angle = \pi - \varphi$.

A bal oldalból kiindulva:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= -|\lambda| |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi = |\lambda\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| (-\cos \varphi) = \\ &= |\lambda\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\pi - \varphi) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

A bizonyított tétel alapján a 2. pontban bevezetett b_a vetületet

$$b_a = (\mathbf{a}^0) \cdot \mathbf{b}$$

alakban írhatjuk.

Ugyanis

$$b_a = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}^0) \cdot \mathbf{b}.$$

5. A disztributív szabály.

Tétel. $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.

A kommutativitás miatt a szabályt

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \text{ alakban írhatjuk.}$$

Bizonyítás. A bizonyítást a skaláris szorzat és a merőleges vetület kapcsolata alapján végezzük.

Legyen $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{d}$.

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} = d_a \cdot |\mathbf{a}|.$$

A 2.48 ábráról leolvasható, hogy

$$d_a = b_a + c_a.$$

Így

$$\begin{aligned} (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} = d_a \cdot |\mathbf{a}| = \\ &= (b_a + c_a) \cdot |\mathbf{a}| = b_a \cdot |\mathbf{a}| + c_a \cdot |\mathbf{a}| = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned}$$

A szabály ismételt alkalmazásával:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}.$$

6. Vektorok négyzete.

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos 0 = |\mathbf{a}|^2.$$

A vektor négyzete egyenlő abszolút értékének négyzetével.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

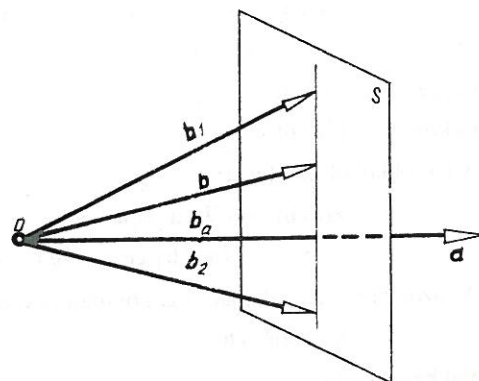
$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

7. Különbség az algebrai és skaláris szorzat között. A skaláris szorzat más jellegű mennyiség, mint a tényezők. A skaláris szorzat akkor is lehet zérus, ha egyik tényező sem zérusvektor, hanem a vektorok merőlegesek.

Általánosabban: az egyik tényező és a skaláris szorzat ismeretében nem lehet a másik tényezőt egyértelműen meghatározni. A vektorral való osztás nem értelmezhető.

Ha ugyanis találunk egy olyan $\mathbf{b}$ vektort, amelynek az $\mathbf{a}$ vektorral való skaláris szorzata adott s szám, akkor mindazon vektorok, amelyeknek $\mathbf{a}$ -ra való vetülete b_a , ugyanazt a skaláris szorzatot adják.

Emeljünk az $\mathbf{a}$ vektorra a b_a merőleges vetület végpontjában egy merőleges S síkot! Mindazok a 0-ból kiinduló $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ stb. vektorok, amelyeknek végpontja a síkon van, $\mathbf{a}$ -val az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skaláris szorzatot adják (2.49 ábra).



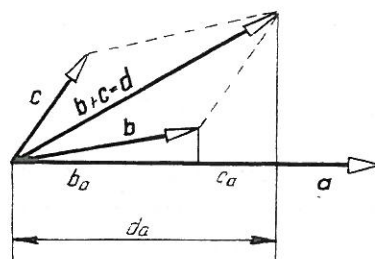
2.49 ábra

A skaláris szorzat kifejezése koordinátákkal. Először vizsgáljuk a koordinátatengelyek pozitív ágának irányába mutató egységvektorok skaláris szorzatát.

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{i}| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{j}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Egységvektor önmagával való skaláris szorzata 1, rá merőleges egységvektorral való skaláris szorzata 0.



2.48 ábra

Tehát

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Legyen

$$\mathbf{v}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k} \quad \text{és}$$

$$\mathbf{v}_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}.$$

A két vektor skaláris szorzata:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) \cdot (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}).$$

Alkalmazva a disztributív szabályt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= x_1 x_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + y_1 y_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + z_1 z_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + x_1 y_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + \\ &+ y_1 x_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + x_1 z_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + z_1 x_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + y_1 z_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + z_1 y_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Felhasználva az egységvektorok skaláris szorzatára az előbb kapott értékeket:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Két vektor skaláris szorzata egyenlő a megfelelő koordináták szorzatösszegével.

Ha $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

akkor $\mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Megkapjuk az ismert képletet: a vektor abszolút értéke egyenlő a koordináták négyzetösszegének négyzetgyökével.

Példa

1. Két vektor hajlásszögének meghatározása.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi.$$

Innen a két vektor hajlásszögének koszinusza:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$

Számítsuk ki a következő két vektor hajlásszögét:

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 - 6 + 8 = 5.$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17} \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{1 + 9 + 16} = \sqrt{26}.$$

$$\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{26}} = 0,2378.$$

$$\varphi = 76^\circ 14'.$$

2. Merőleges vetület és vetületvektor kiszámítása. A $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{a}$ vektorra való merőleges vetülete

$$b_a = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}.$$

A vetületvektor $\mathbf{a}$ -val párhuzamos, hossza $|b_a|$, iránya $\mathbf{a}$ -éval azonos, ha $b_a > 0$, ellentétes, ha $b_a < 0$.

$$\mathbf{b}_a = b_a \cdot \mathbf{a}^0 = b_a \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \quad (2.50 \text{ ábra}).$$

Legyen $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

Határozzuk meg a merőleges vetületet, a vetületvektort és a $\mathbf{b} - \mathbf{b}_a = \mathbf{b}_m$ vektort.

$$b_a = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4)}{\sqrt{4+4+1}}.$$

$$b_a = \frac{6+2-4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}.$$

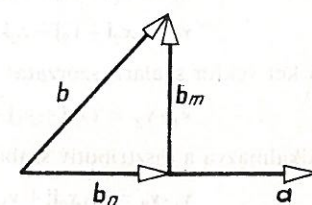
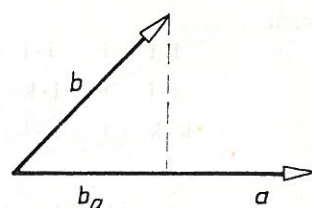
$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{b}_a = b_a \cdot \mathbf{a}^0 = \frac{8}{9}\mathbf{i} + \frac{8}{9}\mathbf{j} + \frac{4}{9}\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{b} - \mathbf{b}_a = \left(3 - \frac{8}{9}\right)\mathbf{i} + \left(1 - \frac{8}{9}\right)\mathbf{j} + \left(-4 - \frac{4}{9}\right)\mathbf{k} = \frac{19}{9}\mathbf{i} + \frac{1}{9}\mathbf{j} - \frac{40}{9}\mathbf{k}.$$

A $\mathbf{b}$ vektort két összetevőre bontottuk. A vetületvektort, mely párhuzamos az $\mathbf{a}$ vektorral, párhuzamos összetevőnek nevezzük és $\mathbf{b}_a$ -val is jelöljük. A $\mathbf{b}_m$ -et merőleges összetevőnek nevezzük.

Tehát $\mathbf{b} = \mathbf{b}_a + \mathbf{b}_m$.



2.50 ábra

2.3.2 Vektorok vektori szorzata

Definíció. Két vektor vektori vagy vektoriális szorzata vektor, amelynek abszolút értéke a két vektor abszolút értékének és a közbezárt szög szinuszának szorzata, iránya merőleges a két vektor síkjára úgy, hogy vele szembe nézve az első vektor a másodikra pozitív (180° -nál kisebb) forgási szöggel forgatható (2.51 ábra).

A vektori szorzat jele:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (\text{Olv.: „a és b vektori szorzata” vagy „a kereszt b”}).$$

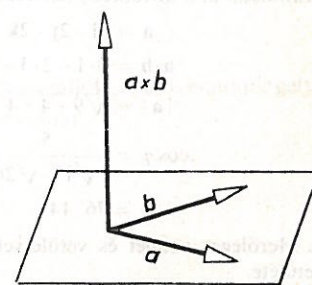
Tehát

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi,$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot \mathbf{e}.$$

A $\mathbf{e}$ egységvektor $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$ sorrendben jobbrendszert alkot.

Mivel $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$, a vektori szorzat abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területe. A vektori szorzatot megkapjuk, ha a terület mértékszámával egyenlő abszolút értékű vektort $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjára



2.51 ábra

merőlegesen felmérjük úgy, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jobbrendszert alkosson (2.52 ábra).

Ha egy A pontban ható $\mathbf{F}$ erő az O pont körül forgást idéz elő, a forgatónyomaték abszolút értéke az erő karjának és az erő abszolút értékének szorzata. Az erő karja a forgáspontból az erő irányára húzott merőleges (2.53 ábra).

$$|\mathbf{M}| = k \cdot |\mathbf{F}| = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{F}| \cdot \sin \varphi.$$

A forgatónyomaték vektor. Az O pontra vonatkozó nyomatékvektor az

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \text{vagy}$$

$$\mathbf{M} = O A \times \mathbf{F} \quad \text{vektori szorzat} \quad (2.54 \text{ ábra}).$$

Az O pontban rögzített test egyensúlyban van, ha az O pontra vonatkozó forgatónyomatékok vektori összege zérus.

A vektori szorzat tulajdonságai

1. Mivel $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$, a vektori szorzat zérus, ha valamelyik vektor zérusvektor, vagy ha $\varphi = 0$, illetve $\varphi = \pi$.

Tehát, ha két vektor párhuzamos, vektori szorzatuk nulla. Fordítva, két vektor párhuzamosságának feltétele a vektori szorzat zérus volta.

Ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, és egyik vektor sem zérusvektor, a két vektor párhuzamos.

2. A kommutatív szabály nem érvényes.

A vektori szorzás definíciójában szerepel a sorrend, tehát

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Ezzel szemben érvényes, hogy

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (2.55 \text{ ábra}).$$

A sorrend felcserélése a vektori szorzatot ellentétes irányúvá változtatja.

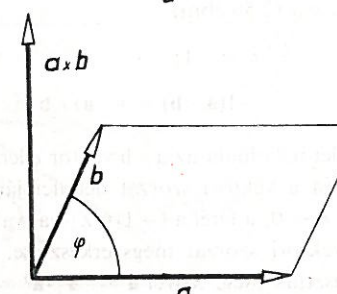
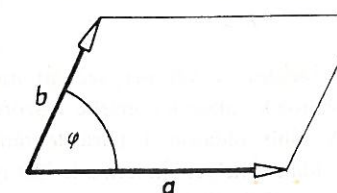
3. Az asszociatív szabály három vektor vektori szorzatára általában nem érvényes

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

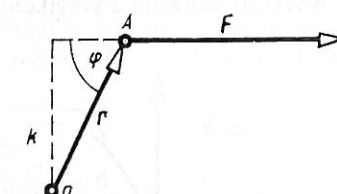
4. Skalárral való szorzásra érvényes az asszociatív szabály.

$$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \lambda \mathbf{b}).$$

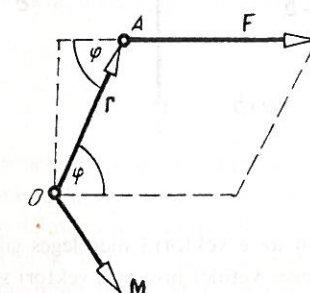
Elegendő $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ helyességét igazolnunk.



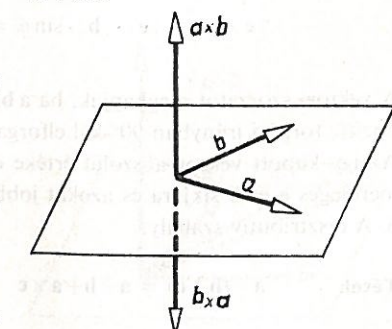
2.52 ábra



2.53 ábra



2.54 ábra



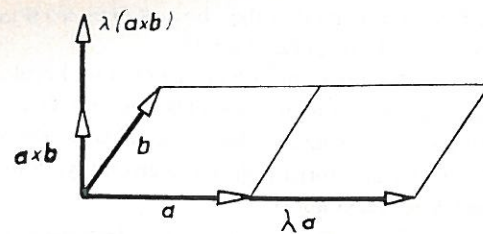
2.55 ábra

a) $\lambda > 0$.

A bal oldalon a vektori szorzat iránya nem változik, abszolút értéke λ -szorosra nő. A jobb oldalon a paralelogramma egyik oldala $\mathbf{a}$ helyett $\lambda\mathbf{a}$ lett, a terület is λ -szoros lesz (2.56 ábra).

b) $\lambda = -1$;

A $-1(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$



2.56 ábra

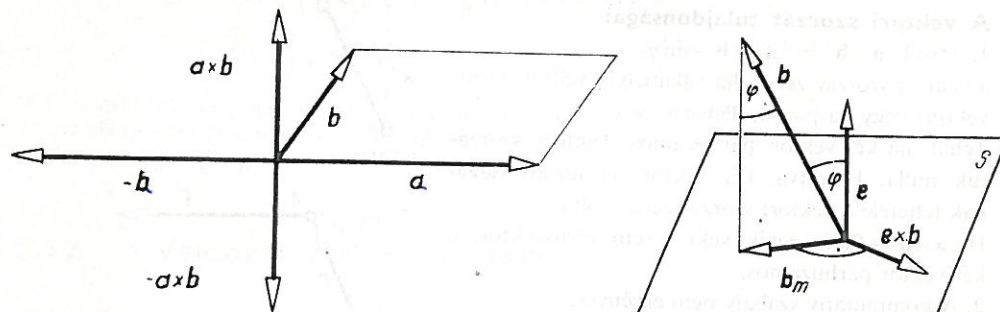
egyenlet bal oldala az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor ellentettje. A jobb oldalon levő $-\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektori szorzata a vektori szorzat definíciójának értelmében szintén $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ellentettje (2.57 ábra).

c) Ha $\lambda < 0$, a tétel a $(-1) \cdot |\lambda|$ -val való kétszeri szorzással a)-ból és b)-ból következik.

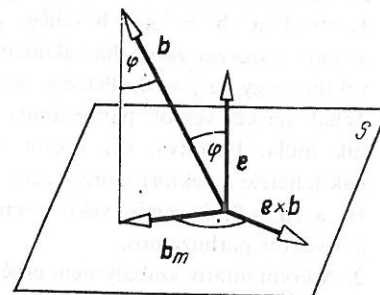
5. A vektori szorzat megszerkesztése. Az egyszerűség kedvéért az $\mathbf{a}^0 \times \mathbf{b}$ vektori szorzatot szerkesztjük meg. Mivel $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^0 = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{e}$,

az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektori szorzat szerkesztése az előzőből nyújtással adódik.

Az $\mathbf{e} \times \mathbf{b}$ vektori szorzatot a következőképpen szerkesztjük meg. A két vektor közös kezdő-



2.57 ábra



2.58 ábra

pontjában az $\mathbf{e}$ vektorra merőleges síkot állítunk (S). A $\mathbf{b}$ vektort rávetítjük az S síkra. A merőleges vetület hossza a vektori szorzat abszolút értéke.

$$|\mathbf{e} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{e}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi = 1 \cdot |\mathbf{b}| \sin \varphi = b_m.$$

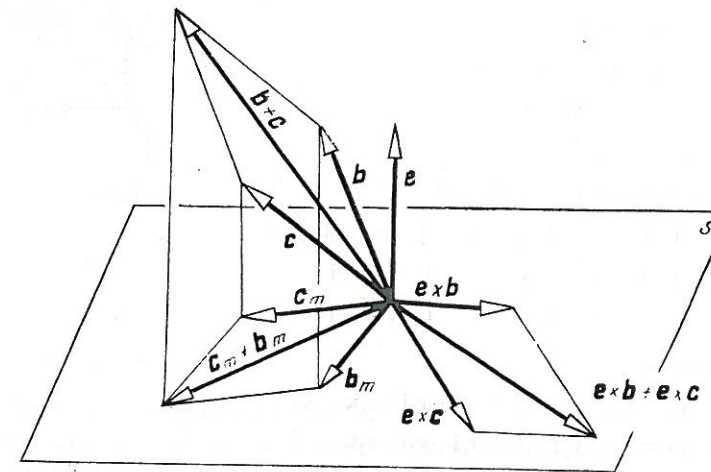
A vektori szorzatot megkapjuk, ha a $\mathbf{b}_m$ merőleges összetevőt az S síkban, az $\mathbf{e}$ felől nézve pozitív forgási irányban 90° -kal elforgatjuk (2.58 ábra).

Az így kapott vektor abszolút értéke egyenlő a vektori szorzat abszolút értékével, iránya merőleges $\mathbf{e}$ és $\mathbf{b}$ síkjára és azokat jobbrendszerben követi.

6. A disztributív szabály.

Tétel. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (I.)

$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ (II.)



2.59 ábra

Bizonyítás. Elég a tétel első alakját igazolnunk. Ugyanis, ha csak (-1) -gyel szorozzuk (I)-et azáltal, hogy tényezőit felcseréljük, a második alakhoz (II) jutunk. Elegendő a tételt

$\mathbf{e} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ -re igazolni, mert

ebből az $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ szorzatra a disztributív szabály

$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{e}$ helyettesítéssel az asszociatív szabályból adódik.

Vetítsük a $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektorokat az $\mathbf{e}$ -re merőleges S síkra, majd forgassuk el a vektorokat 90° -kal (2.59 ábra)!

A paralelogrammák egybevágósága igazolja, hogy

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{e} \times \mathbf{b} + \mathbf{e} \times \mathbf{c}.$$

A disztributív szabály a különbségvektorra vagy kettőnél több tagú összegre is érvényes.

7. A vektorális szorzásnak nincs egyértelmű megfordítása. Vagyis a szorzatvektor és az egyik tényező ismeretében nem lehet a másik tényezőt egyértelműen meghatározni.

A 2.60 ábra szerint a feltüntetett $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \dots$ vektorok az $\mathbf{a}$ vektorral azonos területű paralelogrammát feszítenek ki, és az azonos irányítás miatt ugyanazt a vektori szorzatot adják.

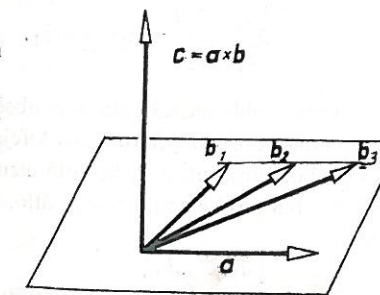
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Ezért a skaláris szorzathoz hasonlóan most sem lehet osztani vektorral.

8. A vektori szorzat kifejezése koordinátákkal. Képezzük először a koordináta-egységvektorok vektori szorzatát:

$$|\mathbf{i} \times \mathbf{i}| = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{i}| \cdot \sin 0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

$$|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$$



2.60 ábra

és a jobbrendszert miatt

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad (2.61 \text{ ábra}).$$

Ha a sorrendet megfordítjuk:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}.$$

A vektorok szerepének felcserélésével:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Állapítsuk meg a

$$\mathbf{v}_1 = [x_1; y_1; z_1] = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} \quad \text{és}$$

$$\mathbf{v}_2 = [x_2; y_2; z_2] = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$$

vektorok vektori szorzatát.

Felhasználva a szorzási szabályt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \times (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = x_1x_2(\underbrace{\mathbf{i} \times \mathbf{i}}_0) + x_1y_2(\underbrace{\mathbf{i} \times \mathbf{j}}_{\mathbf{k}}) + \\ &+ x_1z_2(\underbrace{\mathbf{i} \times \mathbf{k}}_{-\mathbf{j}}) + y_1x_2(\underbrace{\mathbf{j} \times \mathbf{i}}_{-\mathbf{k}}) + y_1y_2(\underbrace{\mathbf{j} \times \mathbf{j}}_0) + y_1z_2(\underbrace{\mathbf{j} \times \mathbf{k}}_{\mathbf{i}}) + \\ &+ z_1x_2(\underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{i}}_{\mathbf{j}}) + z_1y_2(\underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{j}}_{-\mathbf{i}}) + z_1z_2(\underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{k}}_0). \end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} + (z_1x_2 - z_2x_1)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Vagy a második tagból (-1) -et kiemelve:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.$$

A vektori szorzat koordinátákkal való kifejezésének megjegyzését megkönnyíthetjük determinánsok segítségével.

Determinánsok. A másodrendű determináns $2^2 = 4$ elemből áll. Jelölése és értelme két függőleges vonal közötti négyzetszerű elrendezéssel a következő:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

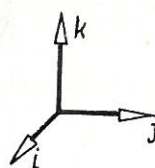
Az egyenlet jobb oldalán álló különbség a determináns kifejtése.

Tehát a másodrendű determináns kifejtése definíciószerűen a következő: a főátló elemeinek szorzatából kivonjuk a mellékátló elemeinek a szorzatát.

Főátló a bal felső elemről húzott átló, mellékátló a bal alsó elemből húzott átló.

Így

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$



2.61 ábra

Fejtsünk ki néhány másodrendű determinánst:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - 5(-1) = -6 + 5 = -1.$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 11(-2) = 21 + 22 = 43.$$

A harmadrendű determináns $3^2 = 9$ elemből áll. Általános jelölése:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Kifejtése aldeterminánsok segítségével történik. Egy sor összes elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal és a szorzatokat összegezzük. Az aldeterminánst megkapjuk, ha a megfelelő elemhez tartozó sort és oszlopot a determinánsból elhagyjuk. Az aldetermináns előjelét úgy kapjuk meg, hogy a determináns minden eleméhez sakktáblaszerűen váltakozva a $+$; $-$ előjeleket rendeljük, mint a megfelelő aldetermináns előjelét. A harmadrendű determináns aldeterminánsai másodrendű determinánsok.

A harmadrendű determináns első sora szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Példánk szerint az a_1 -hez tartozó aldeterminánst megkapjuk, ha az első sort és első oszlopot elhagyjuk. A b_1 -hez tartozót, ha az első sort és második oszlopot hagyjuk el (itt az előjel negatív), a c_1 -hez tartozó aldeterminánst pedig, ha az első sortól és a harmadik oszloptól tekintünk el.

Fejtsünk ki példaként egy harmadrendű determinánst:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ = 3(-4 + 6) + 1(-5 + 3) + 2(10 - 4) = 3 \cdot 2 + 1(-2) + 2 \cdot 6 = 16.$$

9. A vektori szorzat meghatározása a koordinátákból alkotott determinánsokkal. Láttuk, hogy a $\mathbf{v}_1 = [x_1; y_1; z_1] = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ és $\mathbf{v}_2 = [x_2; y_2; z_2] = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ vektorok vektori szorzata a vektorkoordináták segítségével:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Írjuk a két vektor koordinátáit egymás alá:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

A $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ vektori szorzat x irányú komponensét, i együtthatóját megkapjuk, ha az előbbi elrendezésből elhagyjuk az első oszlopot, és képezzük a másik két oszlopból kapott másod-

rendű determinánst:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 z_2 - y_2 z_1,$$

j együtthatóját megkapjuk, ha a második oszlopot hagyjuk el, és a kapott másodrendű determináns (-1) -szeresét vesszük:

$$-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = -(x_1 z_2 - x_2 z_1),$$

végül k együtthatóját a harmadik oszlop elhagyásával nyerhető másodrendű determináns adja:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Tehát a

$$\mathbf{v}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k} = [x_1; y_1; z_1]$$

$$\mathbf{v}_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k} = [x_2; y_2; z_2]$$

vektorok vektori szorzata a vektorkoordinátákból nyerhető a másodrendű determinánsok és az egységvektorok segítségével.

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = [4; 2; -3]$ és $\mathbf{b} = [-1; 4; -5]$ vektorok vektori szorzatát!

Másodrendű determinánsok segítségével a vektori szorzat:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \\ &= (-10 + 12) \mathbf{i} - (-20 - 3) \mathbf{j} + (16 + 2) \mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 23\mathbf{j} + 18\mathbf{k}, \end{aligned}$$

azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [2; 23; 18]$.

A koordináták segítségével kapott vektori szorzatban szerepelnek a koordináta-egységvektorok, megfelelően annak, hogy a vektori szorzat mindig vektor.

A $\mathbf{v}_1 = [x_1; y_1; z_1]$ és $\mathbf{v}_2 = [x_2; y_2; z_2]$ vektorok vektori szorzatát megadhatjuk egy olyan harmadrendű determinánssal, amelynek első sorát az $\mathbf{i}$; $\mathbf{j}$; $\mathbf{k}$ egységvektorok, második és harmadik sorát $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ komponensei alkotják.

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

A harmadrendű determinánst az aldeterminánsok segítségével kifejtve ugyanis a már ismert eredményt kapjuk.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \mathbf{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Példa

Számítsuk ki a

$$\mathbf{v}_1 = [1; -1; 3] \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_2 = [2; 4; -1]$$

vektorok vektori szorzatát:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i}(-1 - 12) - \mathbf{j}(-1 - 6) + \mathbf{k}(4 + 2) = -11\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}. \\ \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= [-11; 7; 6]. \end{aligned}$$

2.3.3 A kifejtési tétel

Két vektor vektori szorzatának egy harmadik vektorral való vektori szorzatára érvényesek a kifejtési tételek:

Tétel. I. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$

II. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$

Elegendő csak az első tételt bizonyítani, abból a második már következik.

Tegyük fel, hogy az első tétel helyes. Ha a bal oldalon a tényezőket felcseréljük, az érték (-1) -szeres lesz, tehát a jobb oldal is (-1) -szeres lesz.

Így $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}$.

Cseréljük fel ciklikus permutációval a betűk sorrendjét, azaz $\mathbf{b}$ helyett $\mathbf{a}$ -t, $\mathbf{c}$ helyett $\mathbf{b}$ -t, $\mathbf{a}$ helyett $\mathbf{c}$ -t írjunk:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c}.$$

Mivel a skaláris szorzat kommutatív, ez így írható:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}.$$

Tehát elegendő az I. tételt, az

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

egyenlőséget igazolnunk.

Bizonyítás. Legyen

$$\mathbf{a} = [a_1; a_2; a_3] \quad \mathbf{b} = [b_1; b_2; b_3] \quad \mathbf{c} = [c_1; c_2; c_3].$$

Először kiszámítjuk a $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ vektori szorzatot:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2 c_3 - c_2 b_3) \mathbf{i} - (b_1 c_3 - c_1 b_3) \mathbf{j} + (b_1 c_2 - c_1 b_2) \mathbf{k}.$$

rendű determinánst:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 z_2 - y_2 z_1,$$

j együtthatóját megkapjuk, ha a második oszlopot hagyjuk el, és a kapott másodrendű determináns (-1) -szeresét vesszük:

$$-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = -(x_1 z_2 - x_2 z_1),$$

végül k együtthatóját a harmadik oszlop elhagyásával nyerhető másodrendű determináns adja:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Tehát a

$$\mathbf{v}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k} = [x_1; y_1; z_1]$$

$$\mathbf{v}_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k} = [x_2; y_2; z_2]$$

vektorok vektori szorzata a vektorkoordinátákból nyerhető a másodrendű determinánsok és az egységvektorok segítségével.

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = [4; 2; -3]$ és $\mathbf{b} = [-1; 4; -5]$ vektorok vektori szorzatát!

Másodrendű determinánsok segítségével a vektori szorzat:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \\ &= (-10 + 12) \mathbf{i} - (-20 - 3) \mathbf{j} + (16 + 2) \mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 23\mathbf{j} + 18\mathbf{k}, \end{aligned}$$

azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [2; 23; 18]$.

A koordináták segítségével kapott vektori szorzatban szerepelnek a koordináta-egységvektorok, megfelelően annak, hogy a vektori szorzat mindig vektor.

A $\mathbf{v}_1 = [x_1; y_1; z_1]$ és $\mathbf{v}_2 = [x_2; y_2; z_2]$ vektorok vektori szorzatát megadhatjuk egy olyan harmadrendű determinánssal, amelynek első sorát az $\mathbf{i}$; $\mathbf{j}$; $\mathbf{k}$ egységvektorok, második és harmadik sorát $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ komponensei alkotják.

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

A harmadrendű determinánst az aldeterminánsok segítségével kifejtve ugyanis a már ismert eredményt kapjuk.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \mathbf{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Példa

Számítsuk ki a

$$\mathbf{v}_1 = [1; -1; 3] \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_2 = [2; 4; -1]$$

vektorok vektori szorzatát:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i}(1 - 12) - \mathbf{j}(-1 - 6) + \mathbf{k}(4 + 2) = -11\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}. \\ \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= [-11; 7; 6]. \end{aligned}$$

2.3.3 A kifejtési tétel

Két vektor vektori szorzatának egy harmadik vektorral való vektori szorzatára érvényesek a kifejtési tételek:

- Tétel.** I. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$
 II. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$

Elegendő csak az első tételt bizonyítani, abból a második már következik.

Tegyük fel, hogy az első tétel helyes. Ha a bal oldalon a tényezőket felcseréljük, az érték (-1) -szeres lesz, tehát a jobb oldal is (-1) -szeres lesz.

Így $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$.

Cseréljük fel ciklikus permutációval a betűk sorrendjét, azaz $\mathbf{b}$ helyett $\mathbf{a}$ -t, $\mathbf{c}$ helyett $\mathbf{b}$ -t, $\mathbf{a}$ helyett $\mathbf{c}$ -t írjunk:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a}.$$

Mivel a skaláris szorzat kommutatív, ez így írható:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}.$$

Tehát elegendő az I. tételt, az

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

egyenlőséget igazolnunk.

Bizonyítás. Legyen

$$\mathbf{a} = [a_1; a_2; a_3] \quad \mathbf{b} = [b_1; b_2; b_3] \quad \mathbf{c} = [c_1; c_2; c_3].$$

Először kiszámítjuk a $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ vektori szorzatot:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2 c_3 - c_2 b_3) \mathbf{i} - (b_1 c_3 - c_1 b_3) \mathbf{j} + (b_1 c_2 - c_1 b_2) \mathbf{k}.$$

Most kiszámítjuk az $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ vektori szorzatot:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - c_2b_3 & -(b_1c_3 - c_1b_3) & b_1c_2 - c_1b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(a_2b_1c_2 - a_2c_1b_2 - a_3c_1b_3 + a_3b_1c_3) -$$

$$- \mathbf{j}(a_1b_1c_2 - a_1c_1b_2 - a_3b_2c_3 + a_3c_2b_3) +$$

$$+ \mathbf{k}(a_1c_1b_3 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_1c_2b_3).$$

Az $\mathbf{i}$ együtthatójához adjuk hozzá és vonjuk le $a_1b_1c_1$ -et,

a $\mathbf{j}$ együtthatójához adjuk hozzá és vonjuk le $a_2b_2c_2$ -t,

a $\mathbf{k}$ együtthatójához adjuk hozzá és vonjuk le $a_3b_3c_3$ -at.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{i}(a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 + a_1b_1c_1 - a_1b_1c_1) +$$

$$+ \mathbf{j}(-a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 + a_2b_2c_2 - a_2b_2c_2) +$$

$$+ \mathbf{k}(a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 + a_3b_3c_3 - a_3b_3c_3) =$$

$$= \mathbf{i}\{b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\} +$$

$$+ \mathbf{j}\{b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\} +$$

$$+ \mathbf{k}\{b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\}.$$

Felhasználva, hogy a zárójelekben levő kifejezések skaláris szorzatok:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{i}\{b_1(\mathbf{ac}) - c_1(\mathbf{ab})\} + \mathbf{j}\{b_2(\mathbf{ac}) - c_2(\mathbf{ab})\} + \mathbf{k}\{b_3(\mathbf{ac}) - c_3(\mathbf{ab})\}.$$

Emeljük ki az $\mathbf{ac}$, illetve $\mathbf{ab}$ skaláris szorzatot:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{ac}(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) - \mathbf{ab}(c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}).$$

Tehát

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}.$$

2.3.4 Vektorok vegyes szorzata

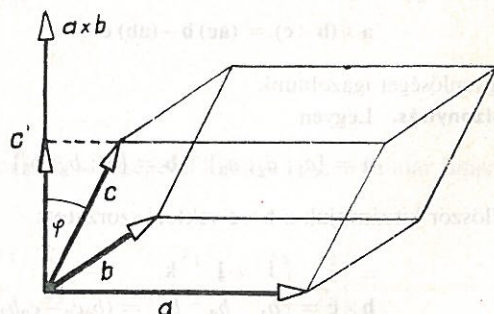
Definíció. Egy vektoriális szorzatnak egy harmadik vektorral képzett skaláris szorzatát a három vektor vegyes szorzatának nevezzük. A vegyes szorzat skalármennyiség.

Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ vegyes szorzat abszolút értéke az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített hasáb térfogatát adja meg (2.62 ábra).

Ugyanis

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos \varphi = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot c',$$

ahol c' a $\mathbf{c}$ vektor skalárvetülete az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorra. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ azonban az alap-paralelogramma területe, $|c'|$ pedig a hasáb magasságával egyezik, és így $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ abszolút értéke valóban megadja a térfogatot.



2.62 ábra

Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ szorzat előjelét az dönti el, hogy $\mathbf{c}$ -nek az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoron levő skalárvetülete pozitív, illetve negatív-e. Ha a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott síknak ugyanazon oldalán van, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, akkor a szorzat pozitív, ellenkező esetben pedig negatív. Ezt így is megfogalmazhatjuk: ha $\mathbf{c}$ irányával szemben $\mathbf{a}$ -t egy 180° -nál kisebb „pozitív” forgással $\mathbf{b}$ irányba forgathatjuk, a vegyes szorzat pozitív, ellenkező esetben negatív. (Másképpen kifejezve: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ pozitív, ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok a felírt sorrendben jobbrendszert, és negatív, ha balrendszert alkotnak.)

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorból hatféleképpen lehet vegyes szorzatot alkotni:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \quad (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \quad (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}.$$

Mind a hat szorzatnak abszolút értéke ugyanannak a hasábnak a térfogatával egyenlő. Az egymás alatt álló értékek ellentétes előjelűek. Az egy sorban állók — ezek egymásból ciklikus felcseréléssel hozhatók létre — egyező előjelűek.

Tehát

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b},$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}.$$

Az

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

egyenlőség módot ad a vegyes szorzat következő, rövidebb jelölésére:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = abc.$$

Az előbbieket szerint:

$$abc = bca = cab = -cba = -acb = -bac.$$

Mikor zérus három vektor vegyes szorzata?

a) Ha az egyik vektor zérusvektor.

b) Ha a három vektor egy síkba esik (a kifeszített hasáb térfogata nulla). Speciálisan ez az eset akkor fordul elő, ha két vektor párhuzamos.

A vegyes szorzat kifejezése koordinátákkal. A $\mathbf{v}_1 = [x_1; y_1; z_1]$, $\mathbf{v}_2 = [x_2; y_2; z_2]$, $\mathbf{v}_3 = [x_3; y_3; z_3]$ vektorok $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$ vegyes szorzatának kiszámításához először a $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$ vektort állítjuk elő.

$$\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Ezt kell $\mathbf{v}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ -val skalárisan szorozni.

Mint tudjuk, a skaláris szorzat skalármennyiség, és koordináták segítségével a következőképpen állítható elő.

$$\text{Ha} \quad \mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

$$\text{és} \quad \mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$

$$\text{akkor} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Ezért vegyes szorzatunk esetében a

$$\mathbf{v}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

és $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{k}$ vektorok

skaláris szorzata:

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

A kapott kifejezés nem más, mint az

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \text{ harmadrendű determináns kifejtése.}$$

Ezért a $\mathbf{v}_1 = [x_1; y_1; z_1]$, $\mathbf{v}_2 = [x_2; y_2; z_2]$ és $\mathbf{v}_3 = [x_3; y_3; z_3]$ vektorok vegyes szorzatát a koordinátákból alkotható harmadrendű determináns adja meg.

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

A harmadrendű determinánsnál nem szerepelnek az egységvektorok, így is látható, hogy a vegyes szorzat skaláris mennyiség.

Példa

Képezzük a $\mathbf{v}_1 = [2; 1; 4]$; $\mathbf{v}_2 = [-1; 2; 1]$ és $\mathbf{v}_3 = [-3; 1; -2]$ vektorok vegyes szorzatát!

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 2(-4-1) - 1(2+3) + 4(-1+6) = -10-5+20 = 5. \end{aligned}$$

2.3.5 A vektori és a vegyes szorzat geometriai alkalmazása

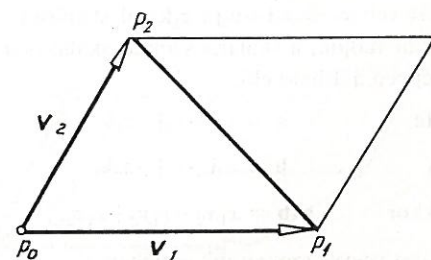
A háromszög területe. Határozzuk meg a P_0, P_1, P_2 csúcspontok által meghatározott háromszög területét.

A háromszög területe fele a $\overrightarrow{P_0 P_1}$ és $\overrightarrow{P_0 P_2}$ vektorok által kifeszített paralelogrammáénak.

A paralelogramma területe a két vektor vektori szorzatának abszolút értéke.

Legyen $\overrightarrow{P_0 P_1} = \mathbf{v}_1$, $\overrightarrow{P_0 P_2} = \mathbf{v}_2$ (2.63 ábra).

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|.$$



2.63 ábra

Példa

Határozzuk meg a következő három pont által alkotott háromszög területét!

$$P_0(-1; 1; -1)$$

$$P_1(-2; 2; 1)$$

$$P_2(3; -1; 2).$$

$$\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{P_0 P_1} = [-1; 1; 2],$$

$$\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{P_0 P_2} = [4; -2; 3].$$

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

$$|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = \sqrt{49 + 121 + 4} = \sqrt{174} = 13,19,$$

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = 6,59.$$

A tetraéder térfogata. Határozzuk meg a P_0, P_1, P_2, P_3 pontok mint csúcspontok által meghatározott tetraéder térfogatát.

Legyen a P_0 pontból kiinduló három vektor (2.64 ábra):

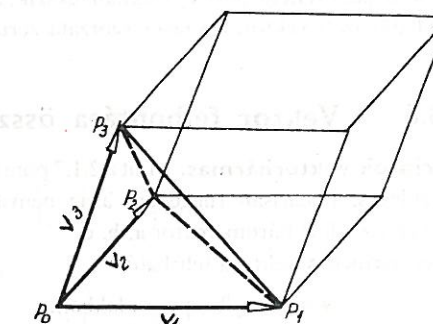
$$\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{P_0 P_1},$$

$$\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{P_0 P_2},$$

$$\mathbf{v}_3 = \overrightarrow{P_0 P_3}.$$

A három vektor által kifeszített hasáb térfogata a vegyes szorzat abszolút értéke.

$$V_h = |\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3|.$$



2.64 ábra

A tetraéder térfogata a hasáb térfogatának $\frac{1}{6}$ része. Tekintsük ugyanis a $P_0 P_1 P_2$ $\triangle$ -et a tetraéder alapjának, és jelöljük területét A -val, illetve a hozzá tartozó magasságot m -mel. A tetraéder térfogata:

$$V_{\text{tetr}} = \frac{Am}{3}.$$

A hasáb térfogata:

$$V_h = 2A \cdot m.$$

Így
$$V_{\text{tetr}} = \frac{1}{6} V_h.$$

Példa

Legyenek a tetraéder csúcspontjai a $P_0(2; -1; 4)$; $P_1(6; -4; 9)$; $P_2(-1; 2; 3)$; $P_3(4; -2; 5)$ pontok. A tetraéder, illetve a hasáb éleit alkotó vektorok:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \overrightarrow{P_0P_1} = [4; -3; 5] \\ \mathbf{v}_2 &= \overrightarrow{P_0P_2} = [-3; 3; -1] \\ \mathbf{v}_3 &= \overrightarrow{P_0P_3} = [2; -1; 1] \end{aligned}$$

A hasáb térfogata a vektorok vegyes szorzatának abszolút értéke. A vegyes szorzat:

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(3-1) + 3(-3+2) + 5(3-6) = 8-3-15 = -10.$$

Így a hasáb térfogata:

$$V_h = |-10| = 10.$$

A tetraéder térfogata:

$$V_t = \frac{V_h}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Ha a megadott négy pont egy síkban fekszik, a térfogat nulla. Fordítva, ha a négy pont által meghatározott vektorok vegyes szorzata zérus, a négy pont egy síkban fekszik.

2.3.6 Vektor felbontása összetevőire

Reciprok vektorhármass. Mint a 2.1.7 pontban láttuk, bármely vektor felbontható három tetszőleges, lineárisan független, azaz nem komplanáris vektor irányába eső összetevőre. Legyen az adott három vektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

A tér bármely $\mathbf{v}$ vektora felírható

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \quad \text{alakban.}$$

Kérdés, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ koordinátáinak ismeretében hogyan tudjuk az α , β , γ koordinátákat meghatározni. Képezzük a következő három vektort:

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{abc}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{abc}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{abc}.$$

Szorozzuk meg a $\mathbf{v}$ vektort skalárisan ezekkel a vektorokkal!

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}; \quad \mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{abc},$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}' = \alpha \frac{\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{abc} + \beta \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{abc} + \gamma \frac{\mathbf{c}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{abc}.$$

Mint látjuk, az α melletti tényező 1, a β és γ melletti tényező nulla (a vegyes szorzatok két tényezője egyenlő), így

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}' = \alpha.$$

Tehát az α -koordináta:

$$\alpha = \mathbf{v} \mathbf{a}'.$$

Hasonlóan: $\beta = \mathbf{v} \mathbf{b}'$,

$$\gamma = \mathbf{v} \mathbf{c}'.$$

Az $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ vektorhármast reciprok vektorhármassnak nevezik. Bebizonyítható, hogy az $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ vektorok reciprok vektorhármasa viszont az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektor.

Példa

Bontsuk fel a $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ vektort, az $\mathbf{a} = [2; 0; 1]$, $\mathbf{b} = [1; -1; 1]$, $\mathbf{c} = [3; -2; -1]$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre!

A $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}$ alakot keressük.

$$\alpha = \mathbf{v} \mathbf{a}' = \mathbf{v} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{abc} = \frac{\mathbf{v} \mathbf{b} \mathbf{c}}{abc},$$

$$\beta = \mathbf{v} \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{v} \mathbf{c} \mathbf{a}}{abc},$$

$$\gamma = \mathbf{v} \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{v} \mathbf{a} \mathbf{b}}{abc}.$$

Négy vegyes szorzatot kell kiszámítanunk:

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 1 = 7.$$

$$\mathbf{v} \mathbf{b} \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 9 - 16 + 2 = -5.$$

$$\mathbf{v} \mathbf{c} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 20 + 8 = 22.$$

$$\mathbf{v} \mathbf{a} \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 4 - 4 = 3.$$

$$\text{Így } \alpha = -\frac{5}{7}, \quad \beta = \frac{22}{7}, \quad \gamma = \frac{3}{7}.$$

2.4 A VEKTORALGEBRA ALKALMAZÁSA

2.4.1 A vektoralgebra alkalmazása az analitikus geometriában

2.4.1.1 A pont analitikus geometriája

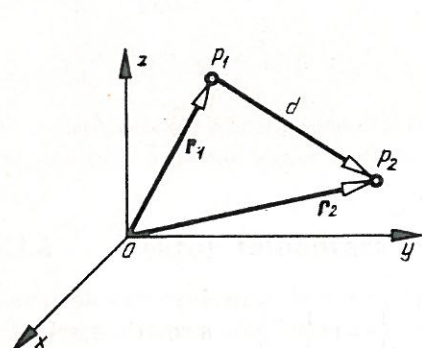
a) Két pont távolsága. Legyen a tér két adott pontja $P_1(x_1; y_1; z_1)$ és $P_2(x_2; y_2; z_2)$. A két pont távolsága az összekötő vektor abszolút értéke (2.65 ábra).

$$d = \overline{P_1P_2} = |\overrightarrow{P_1P_2}|.$$

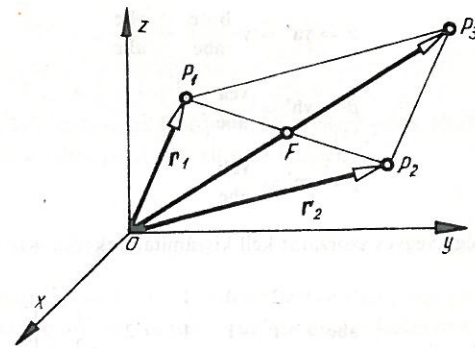
A megfelelő helyvektorok $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$.

Mivel $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$, és a vektor abszolút értéke a koordináták négyzetösszegének négyzetgyöke,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



2.65 ábra



2.66 ábra

Legyen a két pont az $(x; y)$ síkban levő $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ pont. Ekkor $z_1 = z_2 = 0$.

Így $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

b) A felezőpont koordinátái. Határozzuk meg a $P_1(x_1; y_1; z_1)$ és $P_2(x_2; y_2; z_2)$ pontokat összekötő távolság F felezőpontjának koordinátáit. Egészítsük ki a ponthoz húzott helyvektorokat paralelogrammává! Mivel a paralelogramma átlói felelik egymást, a 2.66 ábráról leolvasható, hogy

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OP_3}}{2} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}.$$

Így a felezőpont koordinátái:

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Ha a két pont az $(x; y)$ síkban van, a felezőpont koordinátái:

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

c) Adott szakaszt adott arányban osztó pont koordinátái. Osszuk fel a P_1P_2 szakaszt a 2.67 ábra szerint $m:n$ arányban. Legyenek a pontokhoz vezető helyvektorok $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$, és jelöljük az osztópont helyvektorát $\mathbf{r}$ -rel. Az ábrából leolvashatóan:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \overrightarrow{P_1P}.$$

Mivel $\overrightarrow{P_1P} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{P_1P_2}$,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{P_1P_2}.$$

Viszont $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, ezért

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \frac{m}{m+n} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

A műveleteket elvégezve:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \frac{m\mathbf{r}_2 - m\mathbf{r}_1}{m+n} = \frac{m\mathbf{r}_1 + n\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2 - m\mathbf{r}_1}{m+n},$$

$$\mathbf{r} = \frac{m\mathbf{r}_1 + n\mathbf{r}_2}{m+n}.$$

Az osztópont koordinátái pedig:

$$P\left(\frac{mx_1 + nx_2}{m+n}; \frac{my_1 + ny_2}{m+n}; \frac{mz_1 + nz_2}{m+n}\right).$$

d) A háromszög súlypontja. Legyenek a háromszög csúcspontjai a P_1, P_2, P_3 pontok. Azelemi geometriából ismeretes tétel szerint a súlypont a súlyvonalakat a csúcstól számítva $2:1$ arányban osztja. (2.68 ábra.)

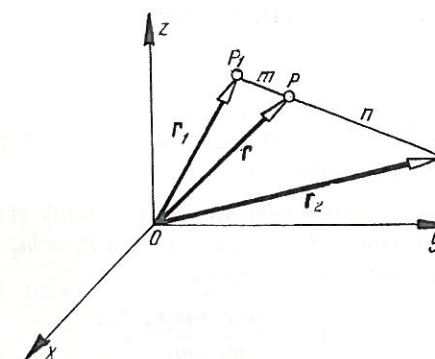
Ha a P_1 és P_2 pontok közötti szakasz felezőpontja F , a súlypont tulajdonsága szerint $FS : SP_3 = 1:2$. Ha a helyvektorokat a 2.68 ábrán látható módon jelöljük:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \frac{2\overrightarrow{OF} + \mathbf{r}_3}{2+1} = \\ &= \frac{2\overrightarrow{OF} + \mathbf{r}_3}{3}. \end{aligned}$$

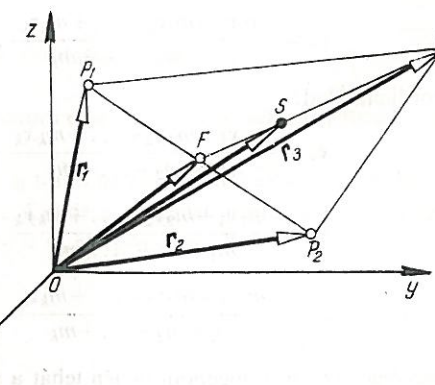
Mivel $\overrightarrow{OF} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$,

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}.$$

2.68 ábra



2.67 ábra



A súlypont koordinátái pedig:

$$S \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right).$$

A háromszög súlypontjának koordinátáit megkapjuk, ha a csúcspontok koordinátáinak számtani közepét vesszük.

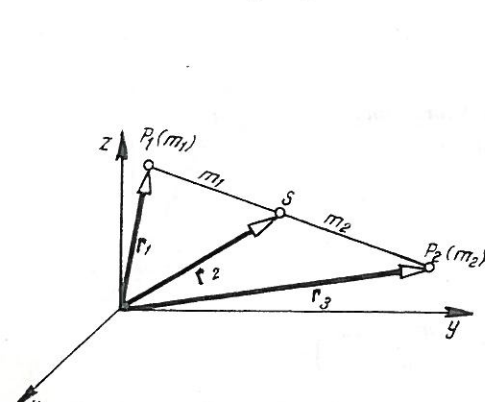
e) A súlypont koordinátái. α) Helyezzünk el a P_1 pontban m_1 , a P_2 pontban m_2 tömeget. Az S súlypont a P_1P_2 szakaszt $P_1S : SP_2 = m_2 : m_1$ arányban osztja. (2.69 ábra.)

Így a súlypont helyvektora:

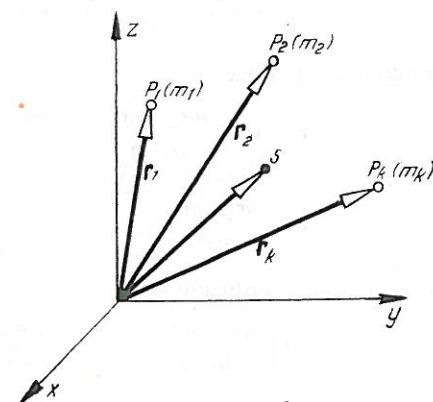
$$\mathbf{r}_s = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Koordinátákkal:

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad y_s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}; \quad z_s = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}.$$



2.69 ábra



2.70 ábra

β) Hasonlóan kaphatjuk meg a $P_1, P_2, \dots, P_k$ pontokban elhelyezett $m_1, m_2, \dots, m_k$ tömegek súlypontjának helyvektorát (2.70 ábra):

$$\mathbf{r}_s = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_k \mathbf{r}_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}.$$

Koordinátákkal:

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k},$$

$$y_s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_k y_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k},$$

$$z_s = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_k z_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}.$$

Tetszőleges számú tömegpont esetén tehát a súlypont koordinátái a koordináták súlyozott közepével egyenlők.

2.4.1.2 Az egyenes egyenletrendszere

a) Adott iránnyal párhuzamos, adott ponton átmenő egyenes. Az egyenes skaláris egyenletrendszere. Vizsgáljuk a $P_0(x_0; y_0; z_0)$ ponton átmenő és a $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ vektorral párhuzamos egyenest. Legyen $P(x; y; z)$ az egyenes egy tetszőleges pontja (2.71 ábra).

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}.$$

A feltétel szerint a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor a $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos

$$\overrightarrow{P_0P} \parallel \mathbf{v}, \quad \text{azaz} \quad \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}.$$

Legyen a P_0 rögzített pont helyvektora $\mathbf{r}_0$, a P tetszőleges pont helyvektora $\mathbf{r}$ (2.72 ábra).

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v},$$

azaz

$$(1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}.$$

A t segédváltozót paraméternek nevezzük.

Koordinátákat írva:

$$(2) \quad \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}.$$

Ez az egyenes paraméteres egyenletrendszere.

Ha a t paraméter befutja a $(-\infty; +\infty)$ intervallumot, a megfelelő $P(x; y; z)$ pont végigfut az adott egyenesen.

Ha az a, b, c koordináták egyike sem nulla, a t paramétert kiküszöbölve:

$$(3) \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Ez a térben az adott ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes egyenletrendszere, az egyenes skaláris egyenletrendszere.

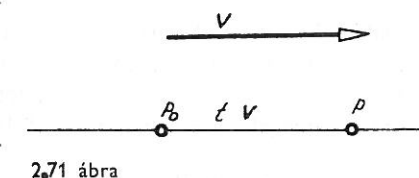
(Mint a 2.1.9 e) pontban említettük, a felírt három egyenletből csak kettő független, a harmadik következménye az első kettőnek.)

Ha valamelyik tört nevezője nulla, akkor ezt a törtet az egyenletből kihagyjuk, és helyette egyenletként felírjuk, hogy a számláló nulla. Ekkor az egyenes párhuzamos valamelyik koordinátasíkkal. Ha például $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$, az egyenes egyenletrendszere:

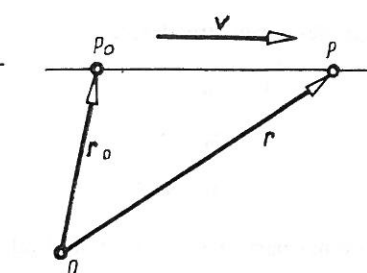
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

$$z - z_0 = 0.$$

Az egyenes párhuzamos az $(x; y)$ síkkal.



2.71 ábra



2.72 ábra

Az egységesség kedvéért gyakran akkor is használjuk az egyenletrendszernek

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

alakját, ha a nevezők valamelyike nulla, megállapodva, hogy a zérus nevezőjű törtet a számláló nulla voltát kifejező egyenlet helyett szerepeltetjük.

Ha két tört nevezője nulla, azaz az adott vektor két koordinátája nulla, az egyenes párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel. Ha például

$$\mathbf{v} = [a; 0; 0],$$

az egyenes egyenletrendszere:

$$y = y_0$$

$$z = z_0$$

$$x = x_0 + at,$$

az egyenes párhuzamos az x tengellyel.

b) Két adott ponton átmenő egyenes egyenletrendszere. Írjuk fel a $P_1(x_1; y_1; z_1)$ és $P_2(x_2; y_2; z_2)$ pontokon áthaladó egyenes skaláris egyenletrendszerét. Jelöljük az egyenes tetszős szerinti pontját $P(x; y; z)$ -vel.

Az egyenes irányát megadja a $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ vektor (2.73 ábra).

$$a = x_2 - x_1, \quad b = y_2 - y_1, \quad c = z_2 - z_1$$

helyettesítéssel az a) pont (2) egyenletrendszeréből az

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszer adódik.

A skaláris egyenletrendszer:

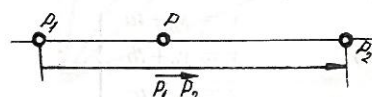
$$(2) \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

feltéve, hogy a nevezők nem nullák.

Ha $z = 0$, azaz a két pont az $(x; y)$ síkban van,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

$$(3) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$



2.73 ábra

Példák

1. Írjuk fel a $P_1(-3; -2; 5)$ és $P_2(-1; 1; 3)$ pontokon átmenő egyenes egyenletrendszerét:

$$\frac{x+3}{-1+3} = \frac{y+2}{1+2} = \frac{z-5}{3-5}$$

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-2}.$$

Paraméteres alakban:

$$x = -3 + 2t \quad y = -2 + 3t \quad z = 5 - 2t.$$

2. Melyik egyenest jellemzi az

$$\frac{x+4}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-3} \quad \text{egyenletrendszer?}$$

A két független egyenlet közül az egyik csak az $x+4=0$, azaz $x=-4$ lehet, a másik

$$\frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-3}.$$

Az egyenes átmegy a $P(-4; 1; -2)$ ponton, és párhuzamos a $\mathbf{v} = 0\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = [0; 2; -3]$ vektorral.

3. Írjuk fel az origón átmenő egyenes egyenletrendszerét! Az egyenes $\mathbf{v} = [a; b; c]$ irányú, és átmegy az $O(0; 0; 0)$ ponton.

$$\text{Egyenletrendszere } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

$$\text{illetve } x = at \quad y = bt \quad z = ct.$$

4. Írjuk fel a koordinátatengelyek egyenletét!

Az x tengely átmegy az origón és párhuzamos az $\mathbf{i} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = [1; 0; 0]$ vektorral.

$$\text{Egyenletrendszere } \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

Független egyenleteknek csak az $y = 0$ és $z = 0$ egyenleteket választhatjuk.

Tehát az x tengely egyenletrendszere

$$y = 0 \quad \text{és} \quad z = 0.$$

Ez geometriailag is nyilvánvaló, hiszen az x tengelyre jellemző, hogy minden pontjának y és z koordinátája zérus.

Hasonlóan az y tengely egyenletrendszere $x = 0$ és $z = 0$,

a z tengely egyenletrendszere $x = 0$ és $y = 0$.

2.4.1.3 Az egyenes síkbeli egyenletei

a) Adott ponton átmenő, adott irányvektorú egyenes egyenlete. Az egyenes iránytényezőző egyenlete. Amint az előző pontban láttuk, ha az $(x; y)$ síkban fekvő e egyenes átmegy az $(x_0; y_0)$ ponton, és irányvektora $\mathbf{v} = [v_1; v_2]$ (2.74 ábra), akkor egyenletrendszere:

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \end{aligned} \right\}.$$

Ha v_1 vagy v_2 nulla, az egyenes párhuzamos az y , illetve x tengellyel, és egyenlete $x = x_0$, illetve $y = y_0$. Az y tengely egyenlete: $x = 0$, az x tengely egyenlete: $y = 0$. Ha $v_1 \neq 0$ és $v_2 \neq 0$, akkor az (1) egyenletrendszerből a t paramétert kiküszöbölve:

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}.$$

Innen

$$(2) \quad y - y_0 = \frac{v_2}{v_1} (x - x_0).$$

Feltehetjük, hogy az egyenes irányvektora a v egységvektor. Ekkor $v_1 = \cos \alpha$, $v_2 = \sin \alpha$. (α jelenti a v vektor és a pozitív x tengely hajlásszögét.)

Ilyen módon:

$$y - y_0 = \operatorname{tg} \alpha (x - x_0),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = m \quad \text{jelöléssel:}$$

$$(3) \quad y - y_0 = m (x - x_0).$$

$m = \operatorname{tg} \alpha$ az egyenes iránytényezője (iránytangense). A (3) egyenlet az adott ponton átmenő, adott iránytényezőjű egyenes egyenlete.

A (3) egyenletből

$$y = mx + y_0 - mx_0,$$

$$y_0 - mx_0 = b \quad \text{jelöléssel:}$$

$$(4) \quad y = mx + b,$$

b az $x = 0$ ponthoz tartozó ordináta, $m = \operatorname{tg} \alpha$ (2.75 ábra).

Az $y = mx + b$ egyenlet az egyenes ún. iránytényező egyenlete.

Speciálisan, ha

$$b = 0,$$

$$y = mx,$$

az origón átmenő egyenes iránytényező egyenlete.

Ha adva van az egyenesnek $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ pontja, akkor v irányvektorát a

$$v_1 = x_2 - x_1,$$

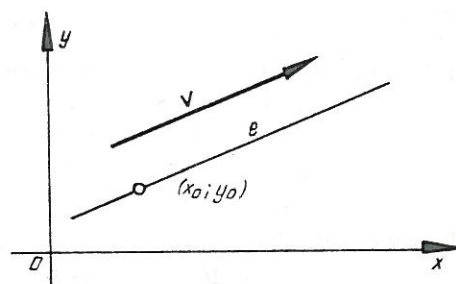
$$v_2 = y_2 - y_1$$

koordinátákkal adhatjuk meg.

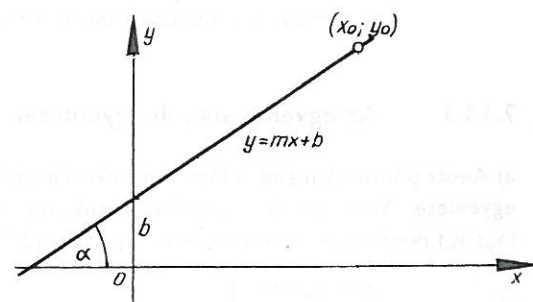
Ekkor egyenlete (2) alapján

$$(5) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

(feltéve, hogy $x_2 \neq x_1$).



2.74 ábra



2.75 ábra

Ez a síkban adott, két ponton átmenő egyenes egyenlete.

Az eredmény azonos a 2.4.1.2 b) pontjában kapott (3) egyenlettel.

b) Adott ponton átmenő, adott normálvektorú egyenes egyenlete. Tegyük fel, hogy az egyenes átmegy az r_0 helyvektorú, $P_0(x_0; y_0)$ ponton és merőleges az $n = [A, B]$ vektorra. Az n vektort az egyenes normálvektorának nevezzük.

Ha $r = [x; y]$ az egyenes tetszőleges $P(x; y)$ pontjának helyvektora, akkor

$$(r - r_0) \perp n \quad (2.76 \text{ ábra}),$$

azaz

$$(6) \quad n \cdot (r - r_0) = 0.$$

Ez az egyenes egyenlete n normálvektorával és egy pontjának r_0 helyvektorával kifejezve.

Koordinátákra átvéve:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Innen

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0.$$

A $C = -Ax_0 - By_0$ jelöléssel:

$$(7) \quad Ax + By + C = 0.$$

Ez az egyenes általános egyenlete.

Mivel $n = [A; B]$ nem lehet nullvektor, $A^2 + B^2 \neq 0$.

Könnyű ellenőrizni, hogy minden

$$Ax + By + C = 0$$

egyenlet az $A^2 + B^2 \neq 0$ feltétel mellett egyenest határoz meg.

Ha az egyenes az

$$y = mx + b$$

egyenlettel adott, akkor átrendezve az

$$mx - y + b = 0 \quad \text{egyenlethez jutunk.}$$

Innen pedig láthatjuk, hogy az egyenes normálvektora az

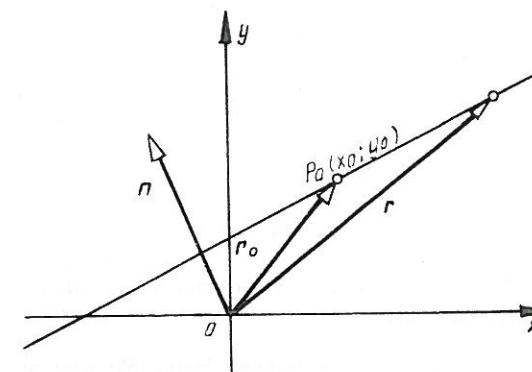
$$n = [m; -1] \quad \text{vektor.}$$

c) Az egyenes tengelymetszetes egyenlete. Tegyük fel, hogy az

$$Ax + By + C = 0$$

egyenletű egyenes nem megy át az origón, és nem párhuzamos egyik koordinátatengellyel sem.

Ilyen feltételek között az egyenes mindkét koordinátatengelyt az origótól különböző pontban metszi.



2.76 ábra

Az x tengelyen levő metszéspontban $y = 0$, ezért a (7) egyenletből $x = -\frac{C}{A}$.

Hasonlóan az y tengelyen levő metszéspontban: $x = 0$, $y = -\frac{C}{B}$.

Az $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$ mennyiségeket tengelymetszeteknek nevezzük (2.77 ábra).

A (7) egyenletet rendezve és $(-C)$ -vel végigosztva:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Azaz

$$(8) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Ez az egyenes tengelymetszetes vagy Salmon-féle egyenlete.

d) Az egyenes egyenletének Hesse-féle normálalakja. Legyen az

$$Ax + By + C = 0$$

egyenlettel adott egyenes normálvektora

$$\mathbf{n} = [A; B] \quad \text{egységvektor.}$$

Ekkor a normálvektor koordinátái

$$A = \cos \alpha, \quad B = \sin \alpha$$

alakban adhatók meg.

Ezt behelyettesítve és használva a $C = -p$ jelölést:

$$(9) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Ez az egyenes ún. Hesse-féle normálalakja.

Ha a normálvektort úgy irányítjuk, hogy α jelöli a kezdőpontból az egyenesre bocsátott merőleges irányszögét, akkor p az origónak az egyenestől való előjeles távolságát adja (2.78 ábra).

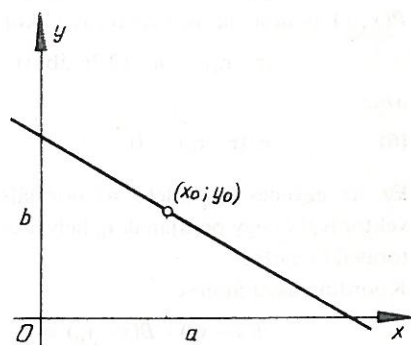
e) Egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének feltétele

$\alpha)$ A párhuzamosság feltétele

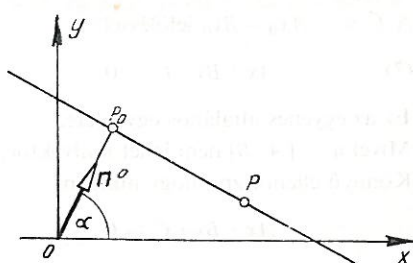
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

egyenletű egyenesek akkor és csak akkor párhuzamosak, ha normálvektoraik párhuzamosak, akkor és csak akkor merőlegesek, ha normálvektoraik merőlegesek.



2.77 ábra



2.78 ábra

Feltehetjük, hogy a normálvektorok egységvektorok, különben végigoszthatjuk az egyenleteket $\sqrt{A_1^2 + B_1^2}$, illetve $\sqrt{A_2^2 + B_2^2}$ -tel. Ekkor a párhuzamosság feltétele:

$$[A_1; B_1] = [A_2; B_2]$$

$$\text{vagy} \quad [A_1; B_1] = [-A_2; B_2].$$

Az irányítványos alakban adott

$$y = m_1x + b_1$$

$$y = m_2x + b_2$$

egyenletű egyenesek párhuzamosak, ha

$$m_1 = m_2.$$

$\beta)$ A merőlegesség feltétele. Az $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ normálvektorú egyenesek merőlegesek, ha

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0.$$

Ha az egyenesek egyenlete

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

a két egyenes merőleges, ha

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Az

$$y = m_1x + b_1$$

$$y = m_2x + b_2$$

egyenlettel adott egyenesek merőlegesek, ha

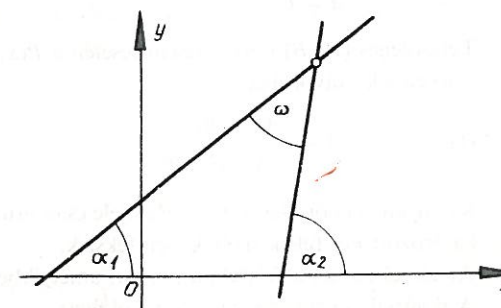
$$[m_1; -1] \cdot [m_2; -1] = 0,$$

azaz

$$m_1m_2 + 1 = 0.$$

Ebből

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$



f) Két egyenes hajlásszöge. Legyen az α_1 és α_2 irányszögű egyenesek hajlásszöge ω . 2.79 ábra

Tegyük fel, hogy $\omega \neq \frac{\pi}{2}$. A 2.79 ábra szerint

$$\omega = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = m_1 \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = m_2 \quad \text{jelöléssel:}$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

(Ha a sorrendet felcseréljük, $\operatorname{tg} \omega$ előjele megváltozik, és így a kiegészítő szög tangensét kapjuk.)

g) Pont távolsága egyenestől. Legyen az e egyenes egyenlete

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

alakban adott.

Feltehetjük, hogy $\mathbf{n} = [A; B]$ egységvektor. Legyen adva a síkban a $\mathbf{p}$ helyvektorú $P(x_1; y_1)$ pont.

A P pontnak az e egyenestől való előjeles távolsága a $(\mathbf{p} - \mathbf{r}_0)$ vektor skalárvetülete az $\mathbf{n}$ normálvektorra (2.80 ábra).

$$d = \mathbf{n}(\mathbf{p} - \mathbf{r}_0).$$

Koordinátákkal kifejezve:

$$d = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0),$$

azaz

$$d = Ax_1 + By_1 + C.$$

Ha az (x_1, y_1) pont az egyenesen van, akkor $d = 0$ értékkel az egyenes egyenletét kapjuk.

Speciálisan az origónak az egyenestől való előjeles távolsága:

$$d = C.$$

Tetszőleges $[A; B]$ normálvektor esetén a $P(x_1; y_1)$ pontnak az $Ax + By + C = 0$ egyenestől való előjeles távolsága:

$$(1) \quad d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy d előjele csak attól függ, hogy a $P(x_1; y_1)$ az egyenes által meghatározott két félsík melyikében fekszik.

Az előjel abban a félsíkban pozitív, amelyikbe az $\mathbf{n}$ normálvektor mutat.

A pontnak az egyenestől való távolsága:

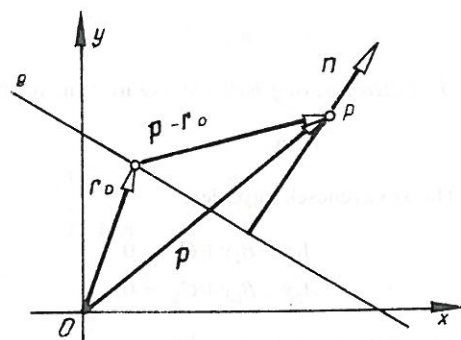
$$|d| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Ha az egyenes az

$$y = mx + b$$

alakban adott, akkor a $P(x_1; y_1)$ pontnak az egyenestől való előjeles távolsága

$$(2) \quad d = \frac{mx_1 - y_1 + b}{\sqrt{1 + m^2}}.$$



2.80 ábra

A pontnak az egyenestől való távolsága pedig:

$$|d| = \frac{|mx_1 - y_1 + b|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

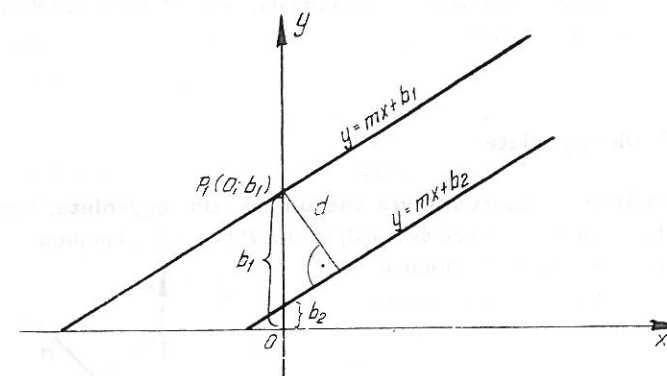
h) Két párhuzamos egyenes távolsága. Határozzuk meg az

$$y = mx + b_1 \quad \text{és}$$

$$y = mx + b_2$$

párhuzamos egyenesek távolságát (2.81 ábra)!

A feladat azonos annak meghatározásával, hogy az egyik egyenes egyik pontja milyen tá-



2.81 ábra

volságra van a másik egyenestől. Az $y = mx + b_1$ egyenes $P_1(0; b_1)$ pontjának távolságát a másik egyenestől megkapjuk, ha P_1 koordinátáit az előző pont (2) képletébe helyettesítjük. Az előjeles távolság:

$$d = \frac{b_2 - b_1}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

A távolság pedig:

$$|d| = \frac{|b_2 - b_1|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

i) A szögfelező egyenes egyenlete. A szögfelező mindazon pontok mértani helye, amelyek a szög két szárától egyenlő távol vannak.

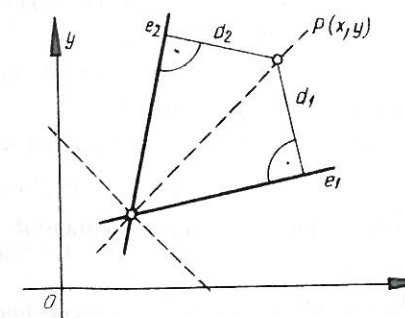
Legyen a két szög szár egyenlete (2.82 ábra):

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

A szögfelezőn fekvő $P(x; y)$ pont távolsága az e_1 egyenestől:

$$|d_1| = \frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}},$$



2.82 ábra

az e_2 egyenestől:

$$|d_2| = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Mivel a definíció szerint:

$$|d_1| = |d_2|,$$

a szögfelező egyenesek egyenlete:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

ahol x és y a szögfelező futópontjának koordinátái. (Az előjelek kétféle megválasztása adja a két szögfelező egyenletét.)

2.4.1.4 A sík egyenlete

Adott ponton átmenő, adott irányra merőleges sík egyenlete. Legyen a sík az $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ vektorra merőleges, és haladjon át a $P_0(x_0; y_0; z_0)$ ponton.

Az $\mathbf{n}$ vektort a sík normálvektorának nevezzük. Vegyük fel a sík egy tetszés szerinti $P(x; y; z)$ pontját! A síkra jellemző, hogy

$$\vec{P_0P} \perp \mathbf{n} \quad (2.83 \text{ ábra}).$$

A helyvektorokkal kifejezve: $\vec{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Mivel a vektorok merőlegesek, skaláris szorzatuk nulla.

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

Ez a sík **vektori** egyenlete.

A skaláris szorzat a koordináták szorzatösszegével egyenlő.

Mivel

$$\vec{P_0P} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k},$$

és

$$\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k},$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Ez a sík **skaláris** egyenlete.

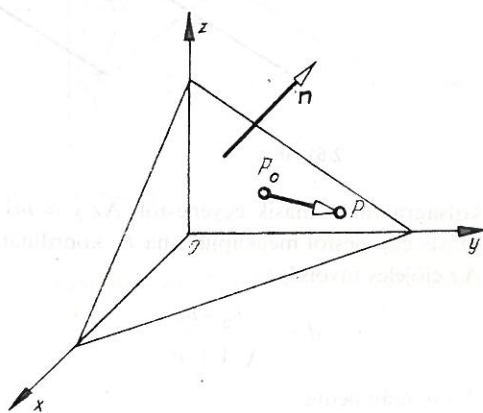
A beszorzást elvégezve és az egyenletet rendezve:

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

Jelöljük a jobb oldalon álló konstans d -vel:

$$ax + by + cz = d.$$

Tehát a térben egy háromismeretlenes lineáris egyenlet jellemzi a síkot. Az egyenest kétismeretlenes lineáris egyenlet adja meg.



2.83 ábra

Az origón átmenő sík egyenlete. Helyettesítsük a sík

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

egyenletébe az origót, azaz az $O(0; 0; 0)$ pontot.

Az egyenlet:

$$ax + by + cz = 0.$$

Megfordítva: utolsó egyenletünket a $P(0; 0; 0)$ pont kielégíti, tehát az egyenlet az origón átmenő sík egyenlete.

A sík tengelymetszetes egyenlete

Legyen a sík egyenlete

$$ax + by + cz = d \quad (2.84 \text{ ábra}).$$

Messe a sík a koordinátatengelyeket a következő pontokban:

az x tengellyel való metszéspont $A(a_1; 0; 0)$,
az y tengellyel való metszéspont $B(0; b_1; 0)$,
a z tengellyel való metszéspont $C(0; 0; c_1)$.

Ezek a pontok kielégítik a sík egyenletét. Behelyettesítve:

$$aa_1 = d, \quad bb_1 = d, \quad cc_1 = d.$$

$$\text{Innen} \quad a = \frac{d}{a_1}, \quad b = \frac{d}{b_1}, \quad c = \frac{d}{c_1}.$$

Ezeket az értékeket az

$$ax + by + cz = d \quad \text{egyenletbe helyettesítve:}$$

$$\frac{d}{a_1}x + \frac{d}{b_1}y + \frac{d}{c_1}z = d,$$

$$\text{azaz} \quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1} = 1.$$

Ez a sík **tengelymetszetes** egyenlete.

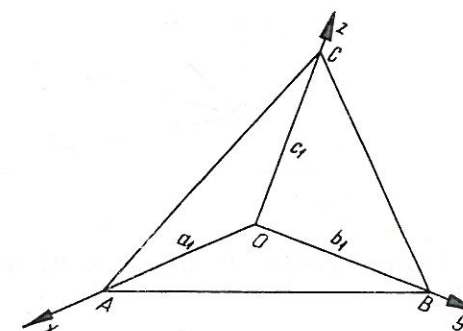
Síkok párhuzamossága. Két sík párhuzamos, ha normálvektoraik párhuzamosak.

Két sík hajlásszöge. Két sík hajlásszöge megegyezik normálvektoraik szögével. Ha a normálvektorokat $\mathbf{n}_1$ -gyel és $\mathbf{n}_2$ -vel jelöljük, a két sík hajlásszögének koszinusza:

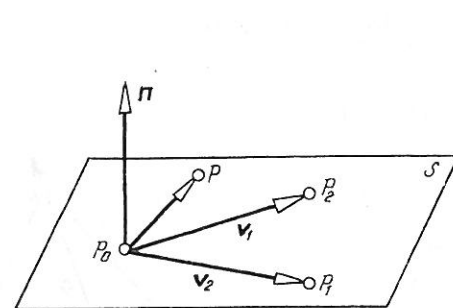
$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}.$$

Három pont által meghatározott sík egyenlete. Legyen az adott három pont a P_0, P_1 és P_2 pont (2.85 ábra). Képezzük a $\vec{P_0P_1} = \mathbf{v}_1$ és $\vec{P_0P_2} = \mathbf{v}_2$ vektorokat! A normálvektor merőleges a síkra, tehát megkapjuk, ha képezzük a $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ vektori szorzatot.

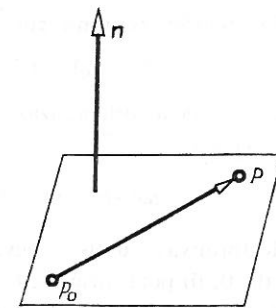
$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2.$$



2.84 ábra



2.85 ábra



2.86 ábra

A sík bármely pontját a P_0 -lal összekötő $\overrightarrow{P_0P}$ vektor merőleges $\mathbf{n}$ -re, tehát skaláris szorzatuk nulla.

Mivel $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$,

a három ponton átmenő sík vektori egyenlete (2.86 ábra):

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 0 \quad \text{vagy}$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

A skaláris alakhoz felírjuk a vegyes szorzatot determinánssal:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Példa

Legyen az adott három pont

$$P_0(-1; -2; 3), \quad P_1(1; 0; 2), \quad P_2(3; -1; 4).$$

$$\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{P_0P_1} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{P_0P_2} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$

Mivel a normálvektor abszolút értéke mellékes, a vektort végigoszthatjuk 3-mal:

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

A sík egyenlete

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{azaz}$$

$$(x+1) - 2(y+2) - 2(z-3) = 0, \quad \text{innen}$$

$$x - 2y - 2z = -3.$$

A sík egyenletének Hesse-féle normálalakja. Húzzunk az origóból a síkra merőleges egyenest, jelöljük a dőléspontot P_0 -val (2.87 ábra).

Ha az origónak a síktól való távolságát p -vel jelöljük, a sík normálvektorának egységvektorát pedig $\mathbf{n}^0$ -val, P_0 helyvektora a sík normálvektora:

$$\mathbf{r}_0 = p \cdot \mathbf{n}^0.$$

Ha a sík egy futópontját P -vel jelöljük,

$$\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

merőleges $\mathbf{n}^0$ -ra.

$$\text{Így} \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}^0 = 0,$$

$$\text{azaz} \quad (\mathbf{r} - p \cdot \mathbf{n}^0) \cdot \mathbf{n}^0 = 0.$$

A beszorzást elvégezve

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0 - p \cdot \mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{n}^0 = 0, \quad \text{Mivel} \quad \mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{n}^0 = 1,$$

$$p - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0 = 0.$$

$$p = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^0.$$

Adjuk meg a vektorokat a koordinátákkal:

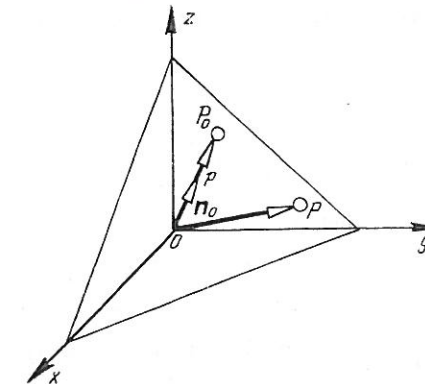
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{n}^0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}.$$

(Az egységvektort az iránykoszinuszokkal adjuk meg.) Így az origónak a síktól való előjeles távolsága:

$$p = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$$

Ez a sík egyenletének Hesse-féle normálalakja, ahol x, y, z a sík egy tetszőleges pontjának koordinátái.



2.87 ábra

2.4.1.5 Metszéspont, dőléspont, metszésvonal

1. Két egyenes metszéspontja. Metszik-e egymást az

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{1} \quad \text{és}$$

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{2} \quad \text{egyenesek?}$$

Az egyenesek nem párhuzamosak.

Az első egyenes egyenletrendszeréből felírjuk az

$$(1) \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{-4}$$

$$(2) \quad \frac{x+1}{3} = \frac{z+2}{-1},$$

a másodikból az

$$(3) \quad \frac{x+2}{2} = \frac{y+5}{3}$$

$$(4) \quad \frac{x+2}{2} = \frac{z-1}{2}$$

egyenleteket.

A három ismeretlenre négy egyenlet van. Megoldjuk az első hármat. Ha a kapott értékek a (4) egyenletet kielégítik, az egyenesek metszik egymást, ha nem, kitérőek. Az (1) és (3) egyenletből

$$\begin{cases} 4x+3y=11 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$$

Megoldásuk $x=2$ $y=1$.

Ezt a (2) egyenletbe helyettesítve $z=-3$.

Az értékek a (4) egyenletet nem elégítik ki; az egyenesek kitérőek.

2. *Sík és egyenes dőféspontja.* Állapítsuk meg az

$$\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-1} \quad \text{egyenes és a}$$

$$3x-2y+4z=14 \quad \text{sík dőféspontját!}$$

Az egyenes paraméteres egyenletei:

$$x=-3t-2; \quad y=2t+1; \quad z=-t-3.$$

Ezeket az értékeket a sík egyenletébe helyettesítve:

$$-9t-6-4t-2-4t-12=14,$$

$$17t=-34, \quad t=-2.$$

$$\text{Így} \quad x=4 \quad y=-3 \quad z=-1.$$

A dőféspont $D(4; -3; -1)$.

3. *Két sík metszésvonala.* Írjuk fel a

$$2x-y+z=6 \quad \text{és}$$

$$x+3y-2z=-4 \quad \text{síkok metszésvonalát.}$$

A metszésvonal egyenletét felírhatjuk egy pontja és iránya ismeretében.

A pontot megkapjuk, ha a két síkot jellemző két háromismeretlenes egyenletben az egyik koordinátát tetszés szerint megválasztjuk, majd a kétismeretlenes egyenletrendszert megoldjuk.

Legyen pl. $z=0$, így

$$\begin{cases} 2x-y=6 \\ x+3y=-4 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldása $x=2$ $y=-2$.

Így a két sík közös pontja $P_0(2; -2; 0)$.

A két sík metszésvonala benne fekszik mindkét síkban, tehát merőleges a két normálvektorra.

A metszésvonal irányvektorát tehát megadja a normálvektorok vektori szorzata.

Mivel $\mathbf{n}_1 = [2; -1; 1]$ és $\mathbf{n}_2 = [1; 3; -2]$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

A metszésvonal egyenletrendszere:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{7}.$$

4. *Három sík metszéspontja.* Három sík metszéspontját megkapjuk, ha a síkok egyenlete által adott három háromismeretlenes egyenletet megoldjuk.

2.4.1.6 Távolaságfeladatok

1. *Két pont távolsága.* Milyen távol vannak egymástól a $P_1(2; -1; 5)$ és $P_2(4; 2; 3)$ pontok?

A 2.4.1.1.a) pont szerint:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (2+1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17} = 4,123.$$

2. *Pont távolsága egyenestől.* Milyen távol van a $P(5; 4; -1)$ pont az

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{egyenestől?}$$

Meghatározzuk az egyenes egy P_0 pontját. A pontot összekötjük a P ponttal. Ezután kiszámítjuk a $\overrightarrow{P_0P}$ vektornak az egyenesre merőleges vetületét és a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor abszolút értékét (2.88 ábra).

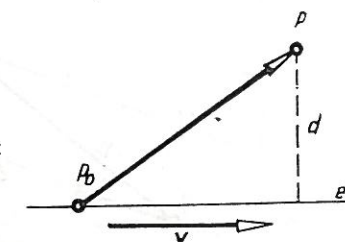
Ezekből Pitagorasz tételével a keresett távolság:

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{P_0P}|^2 - |(\overrightarrow{P_0P})_{\mathbf{v}}|^2}.$$

Az egyenes egy pontja az egyenletéből leolvasható:
 $P_0(-1; 1; 2)$.

$$\overrightarrow{P_0P} = [6; 3; -3]; \quad |\overrightarrow{P_0P}| = \sqrt{54}.$$

Az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = [2; 2; 1]; |\mathbf{v}| = 3$.

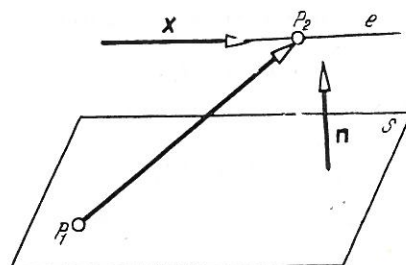


2.88 ábra

A távolság meghatározásához felvesszünk a síkon egy P_1 és az egyenesen egy P_2 pontot.

A $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor merőleges vetülete a sík normálvektorára a keresett távolság (előjeltől eltekintve) (2.93 ábra).

A távolság: $d = (\overrightarrow{P_1P_2})_n$.

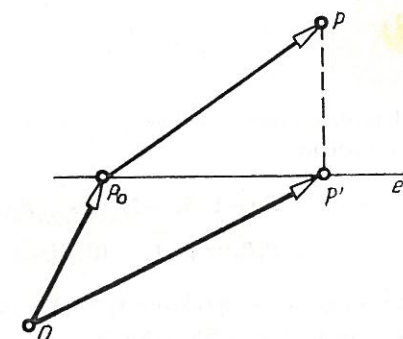


2.93 ábra

2.4.1.7 Vetületfeladatok

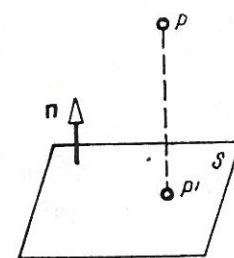
1. **Pont vetülete egyenesre.** A P pontnak az e egyenesre való vetülete a pontból az egyenesre bocsátott merőleges talppontja. Felvesszünk az egyenesen egy P_0 pontot. Ezt összekötjük a P ponttal. Meghatározzuk a $\overrightarrow{P_0P}$ vektornak az e egyenesre való vetületvektorát, $\overrightarrow{P_0P'}$ -t. A vektor P' végpontja a keresett vetületi pont. A P' pont koordinátáit megadja helyvektora.

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P'} \quad (2.94 \text{ ábra}).$$



2.94 ábra

2. **Pont vetülete síkra.** A P pontnak az S síkra való vetülete a ponton átmenő és a síkra merőleges egyenesnek a síkkal való dőléspontja: P' . A síkra merőleges egyenes a sík normálvektorával párhuzamos egyenes (2.95 ábra).



2.95 ábra

Példa

Határozzuk meg a $P(5; -4; 3)$ pontnak a

$$2x - 3y + z = 11 \quad \text{síkra való vetületét!}$$

A sík normálvektora

$$\mathbf{n} = [2; -3; 1].$$

A ponton átmenő, a síkra merőleges egyenes egyenlete

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-3}{1}, & \text{illetve} \\ x = 2t+5 \\ y = -3t-4 \\ z = t+3 \end{cases}$$

Ezeket az értékeket a sík egyenletébe helyettesítve:

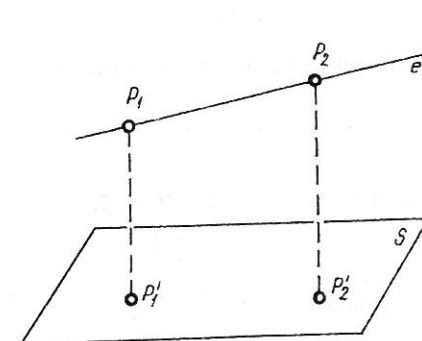
$$\begin{aligned} 4t + 10 + 9t + 12 + t + 3 &= 11, \\ 14t &= -14 \\ t &= -1. \end{aligned}$$

Így $x = 3 \quad y = -1 \quad z = 2$.
A vetület $P'(3; -1; 2)$.

3. **Egyenes vetülete síkra.** Az e egyenesnek az S síkra való vetületét megkapjuk, ha felvesszük az egyenes két pontját, P_1 -et és P_2 -t, meghatározzuk ezek vetületét a síkra, P'_1 -t és P'_2 -t, és felírjuk az ezeket összekötő egyenes egyenletét (2.96 ábra).

Az egyik vetületi pont helyett célszerű az egyenes és sík dőléspontját venni. (Kivétel, ha a sík és az egyenes párhuzamos.)

Ha az egyenes merőleges a síkra, a vetület egyetlen pont, a dőléspont.



2.96 ábra



2.97 ábra

2.4.1.8 Tükrözési feladatok

1. **Pont pontra vonatkozó tükröképe.** Határozzuk meg a P pontnak a P_0 pontra vonatkozó P' tükröképét. A tükrökép a P és P_0 pontokat összekötő egyenesen, a P -vel ellentétes oldalon, $\overrightarrow{PP_0}$ távolsággal egyenlő távolságra van. A meghatározáshoz felhasználjuk, hogy P_0 a P és P' pontokat összekötő távolság felezőpontja (2.97 ábra).

Ha $P(x; y; z)$, $P_0(x_0; y_0; z_0)$, a keresett pont $P'(x'; y'; z')$, akkor

$$x_0 = \frac{x+x'}{2} \quad y_0 = \frac{y+y'}{2} \quad z_0 = \frac{z+z'}{2}, \quad \text{ahonnan}$$

$$x' = 2x_0 - x \quad y' = 2y_0 - y \quad z' = 2z_0 - z.$$

Példa

Mi a $P(-4; -1; 3)$ pontnak a $P_0(3; -1; 4)$ pontra vonatkozó tükröképe?

$$x' = 6 + 4 = 10 \quad y' = -1 \quad z' = 5.$$

A tükrökép: $P'(10; -1; 5)$.

2. **Egyenes pontra vonatkozó tükröképe.** Az e egyenesnek a P_0 pontra vonatkozó tükröképe az egyenes minden pontjának a P_0 -ra vonatkozó tükröképe. A tükröképeggyenes párhuzamos az e egyenessel, és olyan távoli van a P_0 ponttól, mint az e egyenes. A meghatározáshoz

A merőleges vetület:

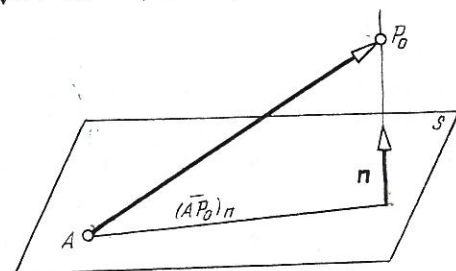
$$(\overrightarrow{P_0P})_v = \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{12+6-3}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

A keresett távolság:

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{P_0P}|^2 - |(\overrightarrow{P_0P})_v|^2} = \sqrt{54-25} = \sqrt{29} = 5,38.$$

3. Pont távolsága síktól. Milyen távol van a $P_0(3; -2; 4)$ pont a $2x-5y+z=2$ síktól?

Meghatározzunk a síkon egy A pontot, és kiszámítjuk az $\overrightarrow{AP_0}$ vektornak a sík normálvektorára való előjeles vetületét. Ennek abszolút értéke a keresett távolság (2.89 ábra).



2.89 ábra

A $2x-5y+z=2$ egyenletben két koordinátát tetszés szerint választhatunk meg.

Legyen $x=1$, $y=1$, akkor az egyenletből $z=5$ következik.

Tehát $A(1; 1; 5)$ a sík egy pontja. Az $\overrightarrow{AP_0}$ vektor pedig:

$$\overrightarrow{AP_0} = (3-1)\mathbf{i} + (-2-1)\mathbf{j} + (4-5)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

A sík normálvektora $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Az előjeles vetület:

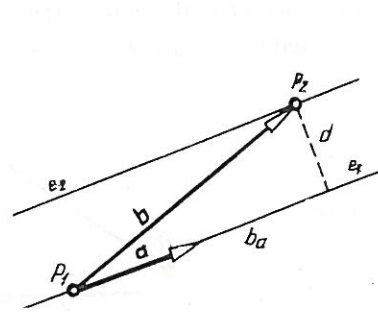
$$(\overrightarrow{AP_0})_n = \frac{\overrightarrow{AP_0} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{4+15-1}{\sqrt{4+25+1}} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{18\sqrt{30}}{30} = \frac{3\sqrt{30}}{5} = 3,28.$$

4. Párhuzamos egyenesek távolsága. Felveszünk mindkét egyenesen egy-egy pontot, P_1 -et és P_2 -t. Meghatározzuk a $\mathbf{b} = \overrightarrow{P_1P_2}$ vektornak a két egyenes közös irányvektorára, $\mathbf{a}$ -ra való előjeles vetületét, b_a -t (2.90 ábra). A keresett távolság:

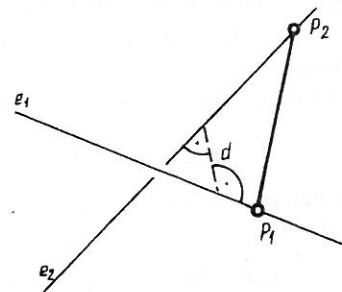
$$d = \sqrt{|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 - b_a^2}.$$

5. Kitérő egyenesek távolsága. Legyenek az e_1 és e_2 kitérő egyenesek. Irányukat jelezzék a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok, egy-egy pontjukat a P_1 , illetve P_2 pont.

A két kitérő egyenes távolsága a $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor merőleges vetülete a normáltranszverzálisra (2.91 ábra).



2.90 ábra



2.91 ábra

A normáltranszverzális iránya merőleges mindkét egyenesre. Tehát

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2.$$

A két kitérő egyenes távolsága:

$$d = (\overrightarrow{P_1P_2})_n.$$

Mint a 2.4.1.5 pont 1. példájában láttuk, az

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{-1} \quad \text{és}$$

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{2} \quad \text{egyenesek kitérők.}$$

Határozzuk meg a két kitérő egyenes távolságát! A két egyenes egy-egy pontja az egyenletből leolvasható:

$$P_1(-1; 5; -2) \quad \text{és} \quad P_2(-2; -5; 1).$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [-1; -10; 3].$$

A két egyenes irányvektora $\mathbf{v}_1 = [3; -4; -1]$ és $\mathbf{v}_2 = [2; 3; 2]$.

A normáltranszverzális vektora:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = [-5; -8; 17].$$

A keresett távolság:

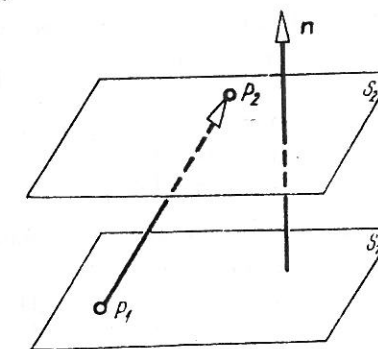
$$d = (\overrightarrow{P_1P_2})_n = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{5+80+51}{\sqrt{25+64+289}} = \frac{136}{\sqrt{378}} = \frac{136}{19,4} = 7,01.$$

6. Párhuzamos síkok távolsága. Meghatározzuk a két sík egy-egy pontját. Az ezeket összekötő vektornak a közös normálvektorra való merőleges vetületének abszolút értéke a keresett távolság (2.92 ábra).

$$d = |(\overrightarrow{P_1P_2})_n| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}.$$

7. Síknak vele párhuzamos egyenestől való távolsága. Az egyenes párhuzamos a síkkal, ha nincs közös pontjuk. A párhuzamosság feltétele úgy is fogalmazható, hogy a sík normálvektora és az egyenes irányvektora merőlegesek, skaláris szorzatuk nulla.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0.$$



2.92 ábra