

Térgeometria

„Karod erős – szived emelkedett:
Végetlen a tér, mely munkára hív,
S ha jól ügyelsz, egy szózat zeng feléd
Szünetlenül, mely visszaint és emel,
Csak azt kövesd.”

(Madách Imre: Az ember tragédiája)

Holt-tenger.

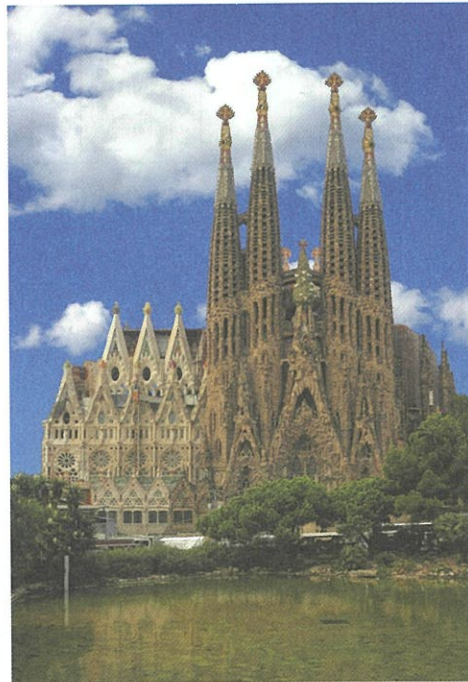
A Kelet-afrikai-árok északi részén, Izrael és Jordánia határán terül el



következő képek arról tanúskodnak, hogy az egyszerű mértani testből kiindulva a művészi fantázia milyen csodálatos alkotásokra képes.



Parlament (Budapest)



Sagrada Familia (Barcelona)

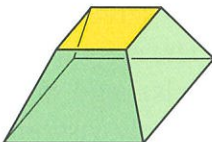
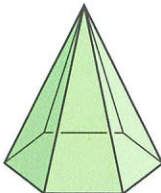
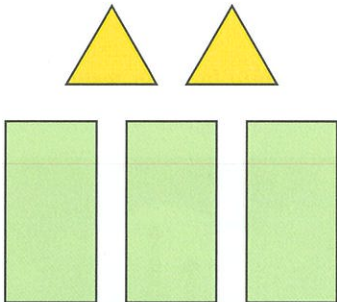
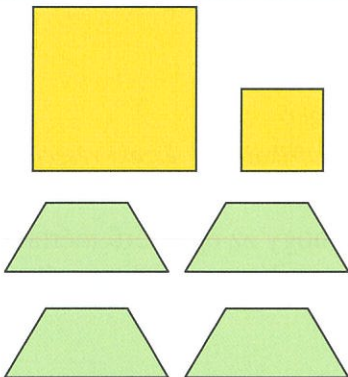
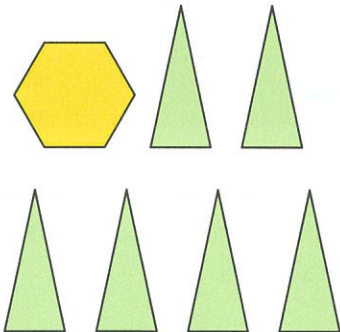
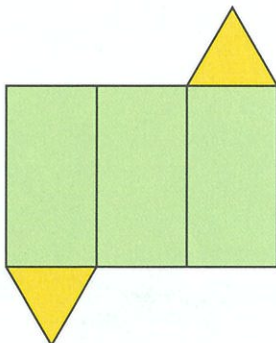
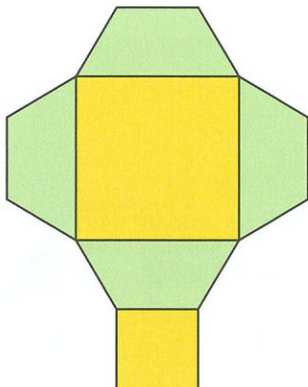
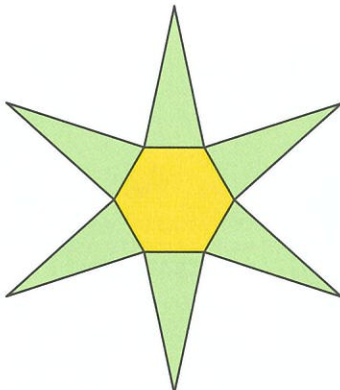
fantasztikus építmények alkotóelemei hasábokkal, hengerekkel, gúlákkal, kúpokkal és gömbökkel modellezhetők. Most ezeknek a mértani testeknek a tulajdonságaival ismerkedünk meg.

példa

soportmunka

-) Építsetek sokszöglapokból különböző mértani testeket!
-) Rajzoljátok le, milyen lapok határolják a megépített testet!
-) Rajzoljátok le a test egyik hálóját!
-) Állapítsátok meg, hogy hány csúcsa, lapja és éle van a testeknek!

Megoldás

1. test			2. test			3. test		
								
A határoló lapok								
								
A test egyik hálója								
								
Csúcs	Lap	Él	Csúcs	Lap	Él	Csúcs	Lap	Él
6	5	9	8	6	12	7	7	12
Összefüggés az adatok között								
$6 + 5 = 9 + 2$			$8 + 6 = 12 + 2$			$7 + 7 = 12 + 2$		

Euler tétele (Kiegészítő tananyag)



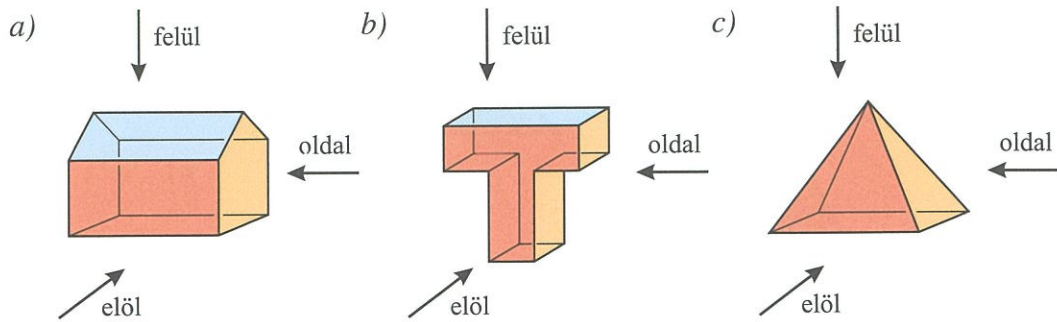
A táblázat utolsó sorában leírt összefüggések általában is igazak. A sokszöglapokkal határolt egyszerű testek esetében a csúcsok és lapok számának összege 2-vel több, mint az élek száma:

$$c + l = é + 2.$$

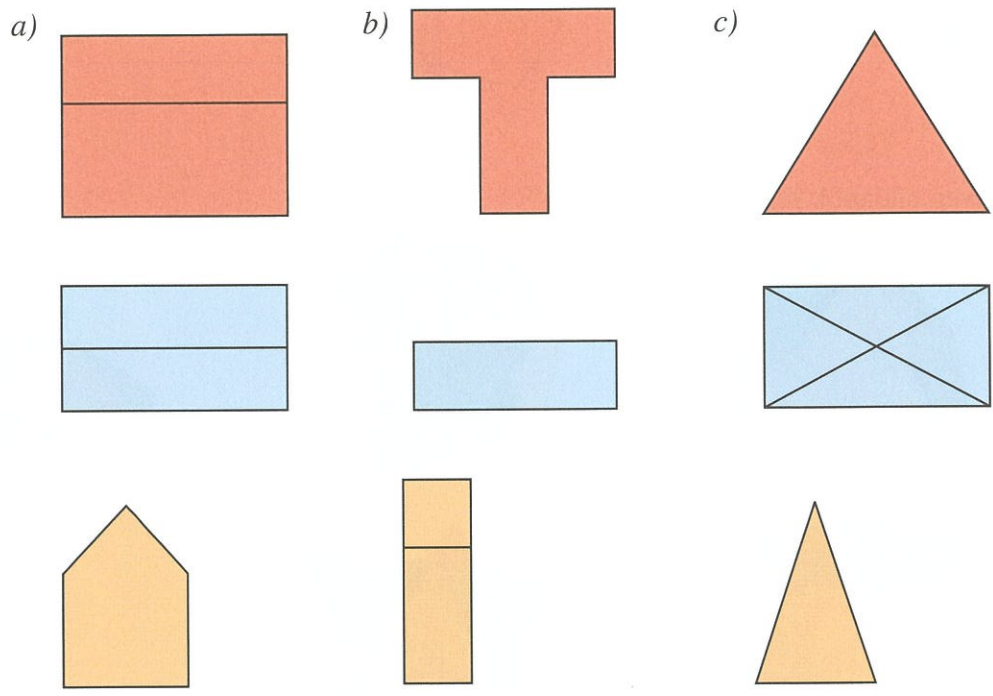
Ezt az összefüggést Leonard Euler [ejtsd: leonárd ajler] (1707–1783) svájci matematikus fedezte fel.

példa

ajzoljuk meg a testek elöl-, felül- és oldalnézetét!

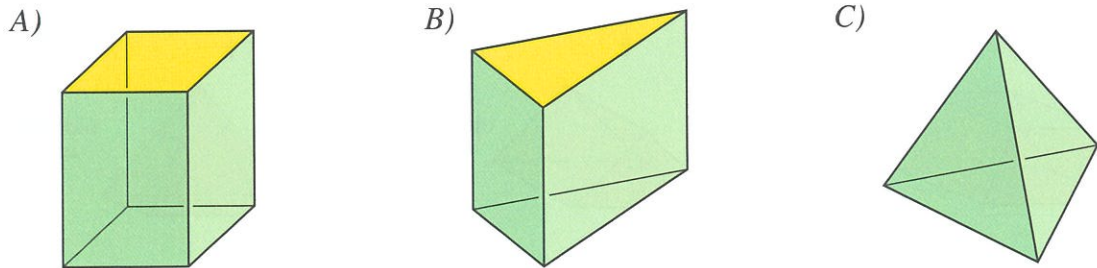


megoldás



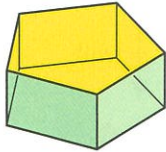
feladatok

1. a) Rajzold le, milyen határoló lapjai vannak az ábrán látható testeknek!
- b) Rajzold le a testek egyik hálóját!
- c) Hány csúcsuk, lapjuk és élük van?

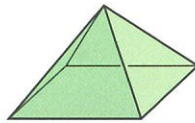


2. Melyik testnek melyik a hálója? Keresd meg a párokat!

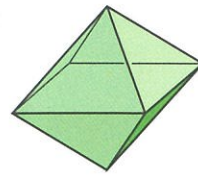
A)



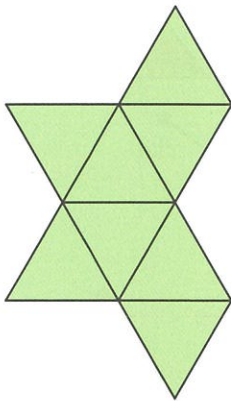
B)



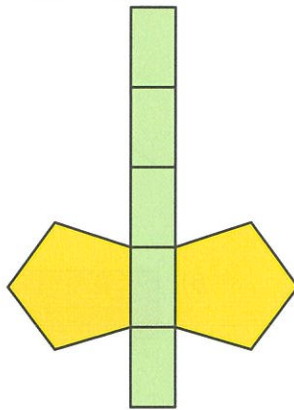
C)



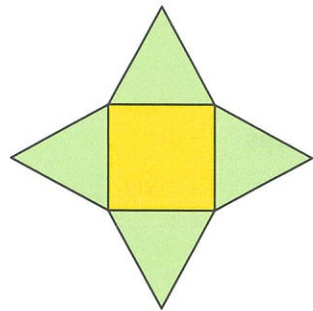
a)



b)

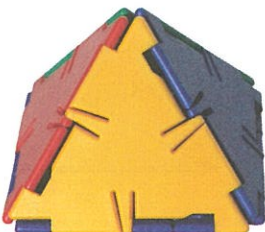


c)

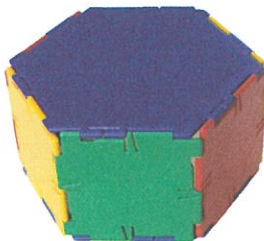


3. Milyen síklapok határolják a testeket?

a)



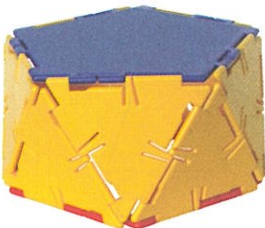
b)



c)



d)

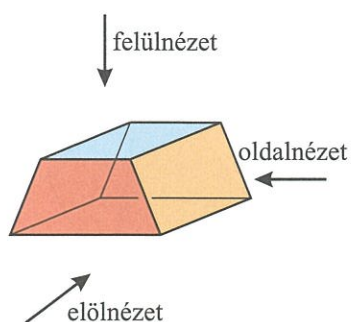


e)

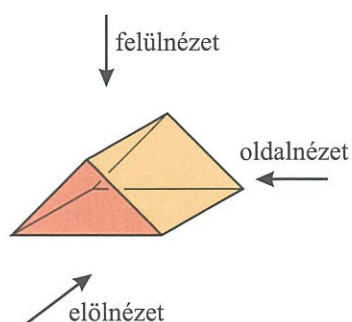


4. Az alábbi ábrákon egy-egy test és annak három különböző nézete látható. Párosítsd a testek a nézetekkel!

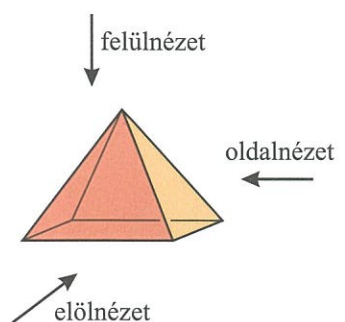
A)

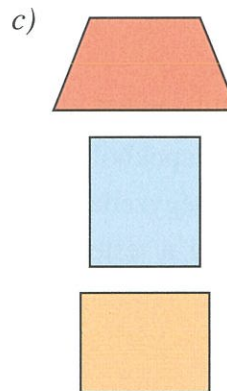
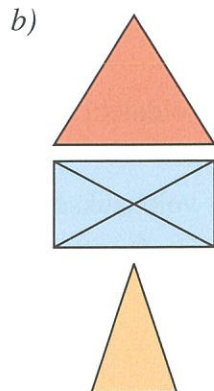
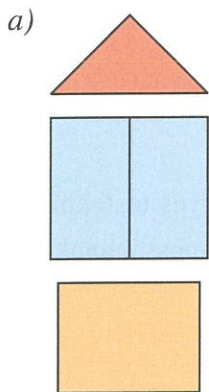


B)



C)





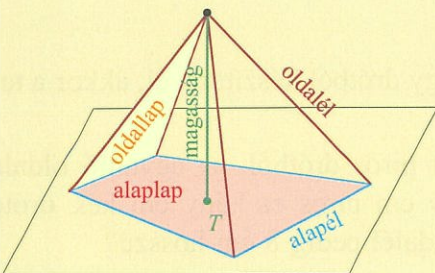
A gúla



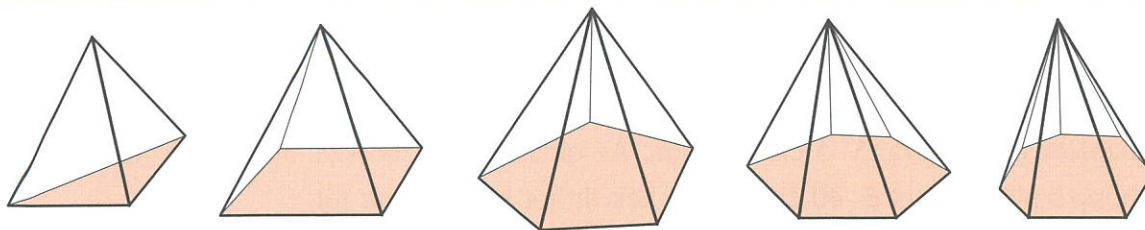
Kisalföld épületei (Szentendrei Szabadtéri Múzeum)



Kamra tornáca, Visa (Erdély)

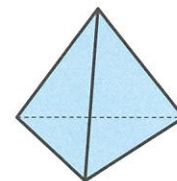


A gúlát egy n oldalú sokszög és n darab, egy csúcsba „összefutó” háromszög határolja. Az n oldalú sokszög a gúla **alaplappja**, a háromszögek az **oldallapok**. Az oldallapok **oldalélekben**, az alaplapp és az oldallapok az **alapélekben** metszik egymást. A Q pontnak az alaplapp síkjától való távolsága a gúla **magassága**, ami a Q pontból az alaplapp síkjára bocsátott merőleges szakasz hossza.



rdemes megjegyezni, hogy a gúlának csak lapátlója van, testátlója nincs, mivel bármely két csúcsát összekötő szakasz mindig valamelyik lapon vagy annak határán fekszik.

Ha a gúla alapja háromszög, akkor a testet négy háromszög határolja. Ezért az ilyen gúlát tetraédernek is nevezik. Közülük nevezetes az ábrán látható szabályos tetraéder, amelynek minden határolólapja szabályos háromszög.



1. példa

Csoportmunka

A) Építsetek síklapokból négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúlát!

B) Építsetek síklapokból szabályos tetraédert!

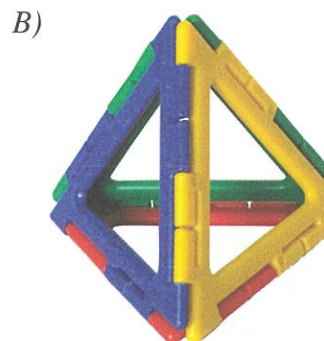
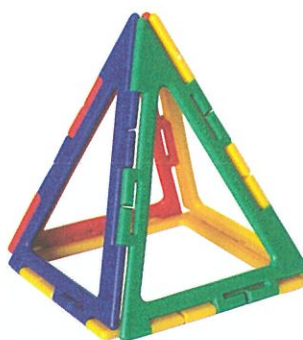
a) Hány darab négyzetlapra és háromszöglapra volt szükség külön-külön az egyes testekhez?

b) Mérjétek meg a testek alapélének, oldalélének, lapmagasságának és testmagasságának hosszát!

Megoldás

a) Az A testhez 1 db négyzet és 4 db egyenlő szárú háromszög kellett.

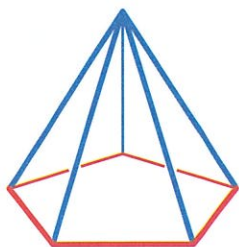
A B testhez 4 db szabályos háromszög kellett.



b) (A táblázat a Polydron építővel készült testek adatait tartalmazza.)

	Alapél hossza	Oldalél hossza	Lapmagasság	Testmagasság
Négyzet alapú gúla	6 cm	9 cm	8,5 cm	7,9 cm
Háromszög alapú gúla	6 cm	6 cm	5,2 cm	4,9 cm

2. példa



Ha egy gúlát szívószalakból, pálcikából vagy drótból készítünk el, akkor a te **élvázát** kapjuk meg.

a) A szabályos ötszög alapú gúla alapéleit piros drótból, az egyenlő oldalait pedig kék drótból készítettük. Hány cm piros és hány cm kék drót használtunk fel, ha az alapél 5 cm, az oldalél pedig 8 cm hosszú?

b) Milyen hosszú drót szükséges az olyan gúla megépítéséhez, amelynek minden éle kétszer ilyen hosszú?

Megoldás

a) Az alapélek összhossza: $5 \cdot 5 \text{ cm} = 25 \text{ cm}$. Az oldalélek összhossza: $5 \cdot 8 \text{ cm} = 40 \text{ cm}$. 25 cm hosszú piros drót és 40 cm hosszú kék drót használtunk fel.

b) Ha az oldalélek mindegyike kétszerese az eredetinek, akkor a piros drótból $(2 \cdot 5 \text{ cm}) \cdot 5 = 50 \text{ cm}$ a kék drótból $(2 \cdot 8 \text{ cm}) \cdot 5 = 80 \text{ cm}$ hosszú drót szükséges.

A nagyobb gúla élvázának összhossza kétszer akkora, mint a kisebbiké.

eladatok

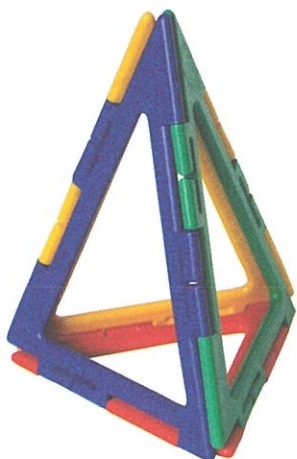
1. Keress a környezetben gúla alakú tárgyakat, és jellemezd őket!

2. Műanyag elemekből építettük a testeket.

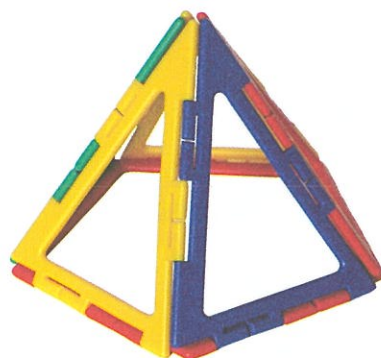
a) Milyen síkidomok határolják a testet? Rajzold le a határolólapokat!

b) Hány egybevágó síkidomot használtunk az egyes testek építésénél?

A)

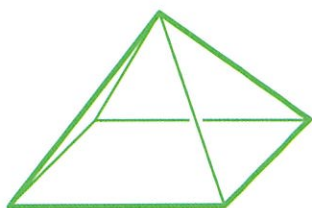


B)

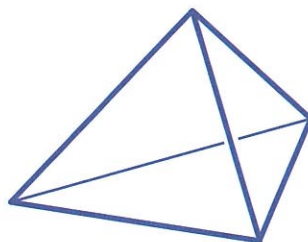


3. Az alábbi gúla minden éle 7 cm hosszú. A négyzet alapú gúla zöld drótból, a háromszög alapú pedig kék drótból készült. Milyen hosszú drótot használtak fel az elkészítésük során?

A)

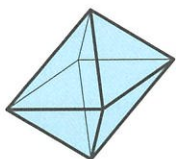


B)

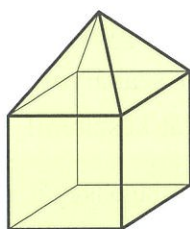


4. Válaszd ki a testek közül a gúlákat!

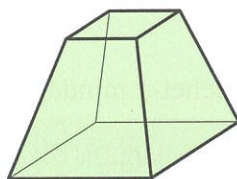
a)



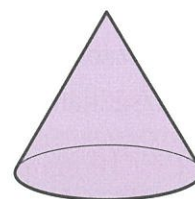
b)



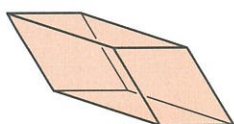
c)



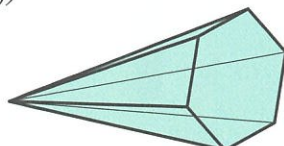
d)



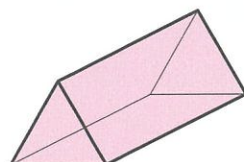
e)



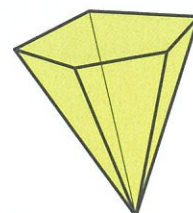
f)



g)



h)

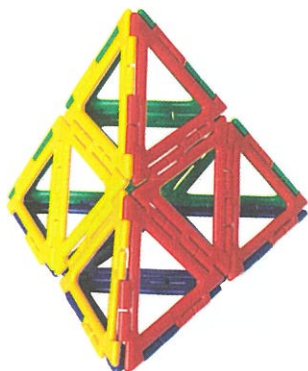


5. 24 cm hosszú, vékony drótból elkészítjük egy szabályos tetraéder élvázis modelljét. Hányszor annyi dróra lenne szükségünk, ha ennél háromszor nagyobb élhosszú szabályos tetraédert szeretnénk készíteni? Mennyivel hosszabb ez a drót az eredetinél?

6. Az állítások az alábbi két gúlára vonatkoznak. Ezeket a gúlákat olyan szabályos háromszöglapokból építettük, amelyeknek egy oldala 6 cm hosszú. Dönts el, melyik tulajdonság igaz az A gúlára, melyik a B)-re és melyik mindkettőre!

- A gúla minden éle egyenlő.
- A gúlát 4 db szabályos háromszög határolja.
- A gúla egy lapjának kerülete 18 cm.
- Sárga háromszögből ugyanannyit használtunk az építésnél, mint zöldből.
- A gúla egyik oldallapjának a területe négyszer akkora, mint a másik gúláé.
- A gúla egy éle 12 cm hosszú.

A)



B)



7. Igazak-e az állítások? Válaszaidat indokold!

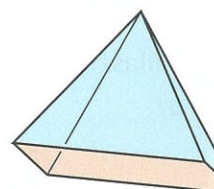
- A gúla oldallapjai szabályos háromszögek.
- A háromszög alapú gúla minden határoló lapja háromszög.
- Ha egy testet csak háromszögek határolnak, akkor az gúla.
- Az egyenlő oldalélű, négyzet alapú gúlának hosszabb az oldaléle, mint a testmagassága.
- Ha egy gúla alaplappja négyzet, akkor nem lehet minden éle egyenlő.
- A gúláknak nincs testátlója.

8. Csoportmunka

Készítsétek el olyan gúla hálóját, amelynek minden éle egyenlő, alaplappja

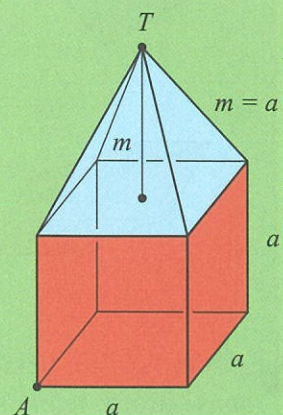
- szabályos háromszög,
- négyzet,
- szabályos ötszög,
- szabályos hatszög!

Vizsgáljátok meg, hogy lehet-e mindegyikből gúlát készíteni!



9. Egy 10 cm élű kocka egyik lapjára olyan 10 cm magasságú, egyenlő oldalélű gúlát ragasztunk, amelynek alaplappja egybevágó a kocka lapjával. Keresd meg a T csúcsból az A csúcsba vezető legrövidebb utat, ha a test

- élein,
- belsejében,
- lapjain haladhatunk!



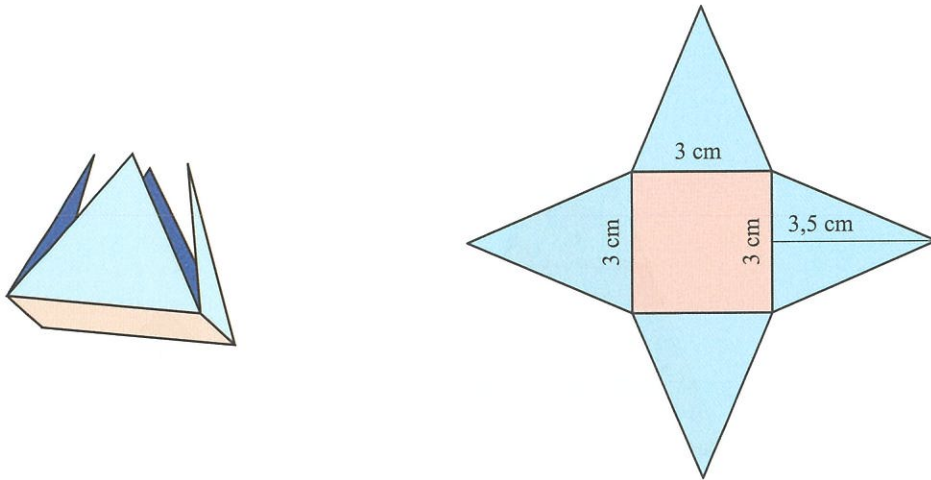
A gúla hálója

példa

- Készítsük el egy négyzet alapú gúla egyik hálóját!
- Számítsuk ki a háló területét az ábrán feltüntetett adatokkal!

megoldás

- Egy lehetséges háló:



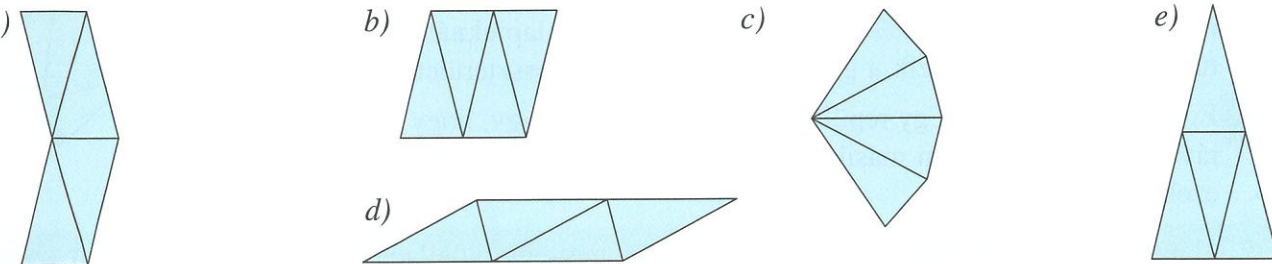
Pedagoguery Software: Poly Pro internetes lapon sokféle test hálóját lehet tanulmányozni.

- A háló területe a négyzet és a négy háromszög területének összege:

$$T_{\text{összes}} = t_{\square} + 4t_{\triangle} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot \frac{3 \cdot 3,5}{2} = 30 \text{ (cm}^2\text{)}$$

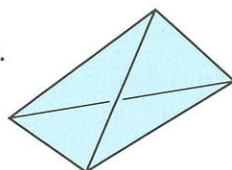
példa

gyenlő szárú háromszögekből készítettük az ábrán látható sokszögeket. Melyik lehet egy háromszög alapú gúla hálója, és melyik nem?



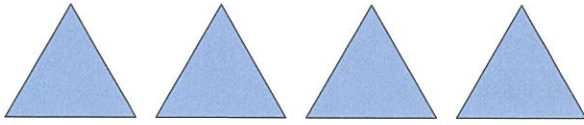
megoldás

- b), a d) és az e) sokszögekből készíthető gúla képe.
- a) és a c) sokszögek nem gúlahálók.



Feladatok

1. Az ábrán látható 4 darab szabályos háromszögből készíts különböző gúlahálókát!



2. Páros munka

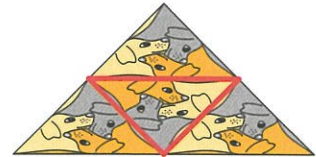
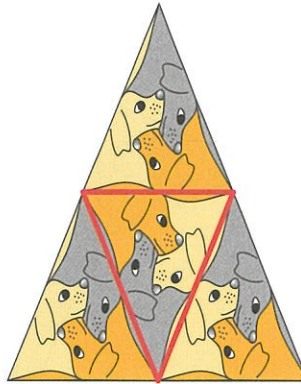
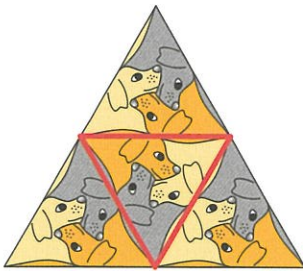
Készítsétek el az ábrán látható háromszögeket, majd vágjátok ki!

Milyen fajta gúla készíthető az a), a b) és a c) háromszögből, ha a pirossal rajzolt szakasz mentén a sarkokat fölhajtogatjuk?

a)

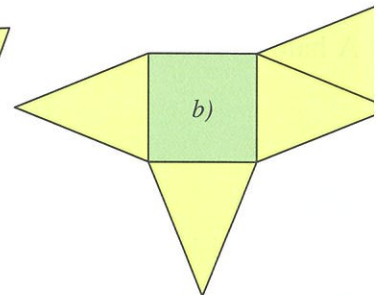
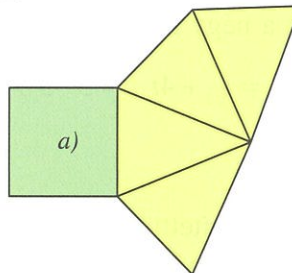
b)

c)



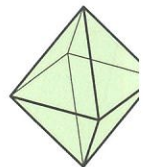
3. Szerkeszd meg annak a négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúlának a hálóját, amelynek alapéle 3 cm, oldallapjának magassága pedig 4 cm!

4. Egy négyzetből és négy háromszögből sokszögeket raktunk össze. Melyikből lehet négyzet alapú gúlát készíteni, és melyikből nem?

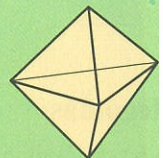


5. Egy négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla alapéle 12,5 cm hosszú, oldallapjának magassága az alapél 120%-a. Két ilyen gúlát az alaplapjuknál egymáshoz ragasztunk. Mennyivel változik a gúla határoló lapjainak összterülete?

6. Egy légi bemutatón négy repülőgép száll kötelékben úgy, hogy mindegyik 100 m távolságra van a három másiktól. Milyen az a test, amelynek csúcsában szállnak ezek a repülők?



7. Hat darab egybevágó szabályos háromszögből egy-egy oldallapjuk egymáshoz illesztésével sokszögeket készítünk. Hány különböző sokszög létezik? Ezek közül hány olyan van, amely kettős gúla hálója? (Azokat tekintjük különböző sokszögeknek, amelyek semmilyen mozgattással nem hozhatók fedésbe.)



8. Egy négyzet alapú, egyenlő oldalélű tömör fából készült gúlát kékre festünk, majd az alaplap-pal szemközti csúcsán áthaladó, az oldalmagasságokat is tartalmazó síkkal elmetsszük. Hány festetlen lap keletkezik, ha

a) egy sík,

b) két sík

mentén végezzük el a vágást? Rajzold le a festetlen lapokat!

A gúla felszíne (Kiegészítő tananyag)

Egy sokszöglapokkal határolt test felszínét a határolólapok területének összege adja.

A gúla felszíne ezért:

$A = T_a + T_p$, ahol T_a az alaplapp terület, T_p pedig az oldallapok területének összege.

Ha a gúla n oldalú, szabályos sokszög alapú, egyenlő oldalélű, akkor felszíne:

$A = T_a + nt$, ahol a t egy oldalháromszög területét jelöli, vagy

$A = T_a + \frac{K_a m_o}{2}$, ahol K_a az alaplapp kerülete, m_o pedig az oldalháromszög magassága.

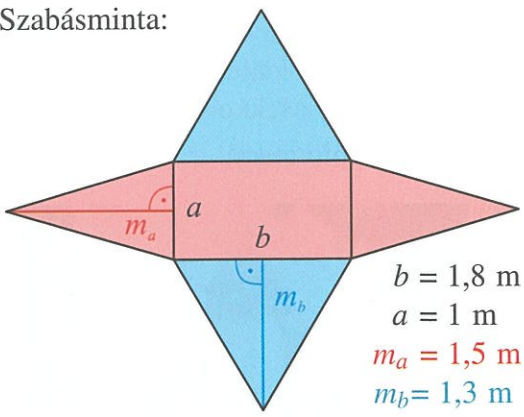
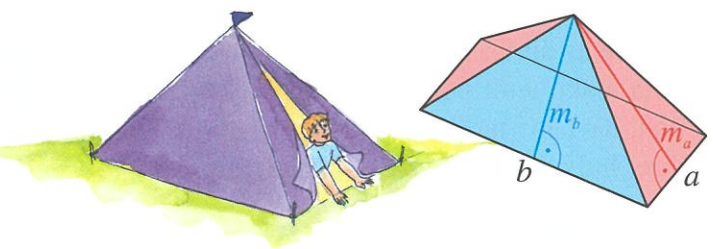
A felszín mértékegységei megegyeznek a terület mértékegységeivel.

$$1 \text{ mm}^2 < 1 \text{ cm}^2 < 1 \text{ dm}^2 < 1 \text{ m}^2 < [1 \text{ ár (1 a)}] < [1 \text{ hektár (1 ha)}] < 1 \text{ km}^2$$

100
100
100
100
100
100

Élde

Iarci édesanyja a nyári szünetben egy gúla alakú, alul írt sátrat készít fiának, az ábrán látható szabásminta szerint. Mennyi anyagra van szüksége, ha a megvásárolt anyagból 15% hulladékre kell számítani?



- Legoldás**
- szükséges anyag mennyiségét a háló (a szabásminta) területének meghatározásával kaphatjuk meg.
 - megadott hosszúságokat deciméterben fejezzük ki: $b = 1,8 \text{ m} = 18 \text{ dm}$, $a = 1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$, $m_a = 1,5 \text{ m} = 15 \text{ dm}$, $m_b = 1,3 \text{ m} = 13 \text{ dm}$.
 - az alaplapp téglalap, ennek területe $T_a = ab = 10 \cdot 18 = 180 \text{ [dm}^2\text{]}$.
 - az oldallapokat alkotó háromszögek közül kettő-kettő egybevágó.
 - az a oldalú és m_a magasságú háromszög területe: $t_1 = a \cdot m_a : 2 = 10 \cdot 15 : 2 = 75 \text{ [dm}^2\text{]}$. Ebből kettő van, ezek területe: $2t_1 = 150 \text{ [dm}^2\text{]}$.
 - b oldalú és m_b magasságú háromszög területe: $t_2 = b \cdot m_b : 2 = 18 \cdot 13 : 2 = 117 \text{ [dm}^2\text{]}$. Ebből is kettő van, ezek területe: $2t_2 = 234 \text{ [dm}^2\text{]}$.
 - az oldallapok területe: $T_p = 2t_1 + 2t_2 = 150 + 234 = 384 \text{ [dm}^2\text{]}$.
 - gúla hálójának teljes területe: $T_a + T_p = 180 + 384 = 564 \text{ [dm}^2\text{]}$.
 - ha a megvásárolt anyagmennyiség 15%-a hulladék, akkor a most kiszámolt terület a teljes anyag 85%-a. Ezért az $x \cdot 0,85 = 564$ egyenletet kell megoldanunk. Innen $x \approx 663,5 \approx 664$.
 - így figyelembe véve a sátor megvarrásához kb. $664 \text{ dm}^2 \approx 6,64 \text{ m}^2$ anyagra van szükség.

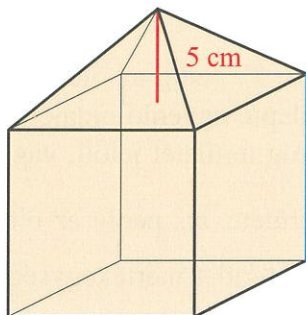
Legjegyzés

méterárúüzletekben általában 1,4 m széles anyagokat árusítanak. Ha a sátorhoz $6,64 \text{ m}^2$ anyagot vásárolunk fel, akkor $6,64 \text{ m}^2 : 1,4 \text{ m} \approx 4,74 \text{ m}$ -t kellene ebből az anyagból megvásárolni, és ügyes eljárással lehetne kiszabni a sátrat. A varrónők a biztonság kedvéért minden esetben fölfelé kerekítenek. Ezért anyukának az 1,4 m szélességű sátoranyagból legalább 5 m-t kellene vennie.

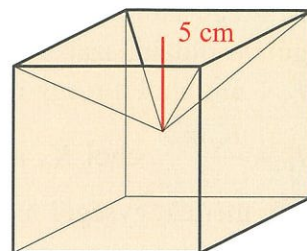
Feladatok

1. Egy háromszög alapú gúlát egybevágó háromszögek határolnak. Egy odallap területe $6,5 \text{ cm}^2$. Mekkora a gúla felszíne?

2. Egy 10 cm élű kocka egyik lapjára az ábrán látható módon, kétféleképpen helyezünk egy 5 cm magasságú, egyenlő oldalélű, négyzet alapú gúlát. Határozd meg mindkét test felszínét!

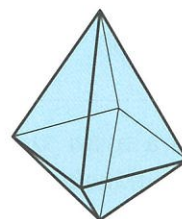


10 cm



10 cm

3. Az ábrán látható karácsonyfadísz két 25 cm^2 alapterületű, négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla összeillesztésével készítettük. Számítsd ki, hány cm^2 papírt használtunk el!



$m_t = 6,5 \text{ cm}$

$m_a = 3,5 \text{ cm}$

4. Párizsban a Louvre udvarában álló üvegpiramis egy négyzet alapú, egyenlő oldalú gúla. A gúla alapéle $35,4 \text{ m}$, magassága pedig $21,6 \text{ m}$. Mekkora az üvegfelület nagysága?

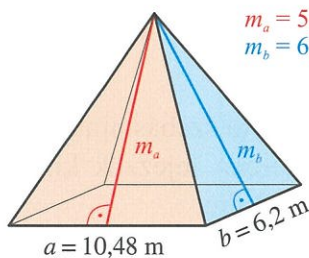
(Az üvegpiramisról a 125. oldalon találsz fotót.)

- 5.



Erődtemplom (Bârna, Románia)

Fedjük be az ábrán látható téglalap alapú, egyenlő oldalú, gúla alakú tetőt palával! Hány darab palára van szükségünk, ha 1 m^2 területre 9 darabot tudunk lerakni, és a résekre, hulladékokra plusz 8%-ot számolunk?



$m_a = 5,2 \text{ m}$

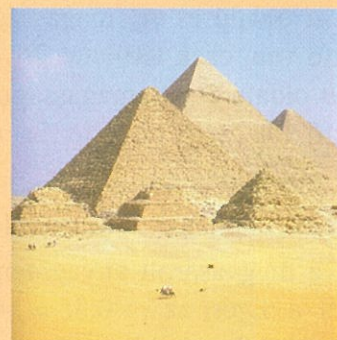
$m_b = 6,7 \text{ m}$

$a = 10,48 \text{ m}$

$b = 6,2 \text{ m}$



6. Az ábrán látható hatalmas síremlékek a gízai piramisok. Közülük az egyik négyzet alapú gúla alapéle $232,4 \text{ m}$, testmagassága $146,7 \text{ m}$. Mekkora a kőóriás felülete?

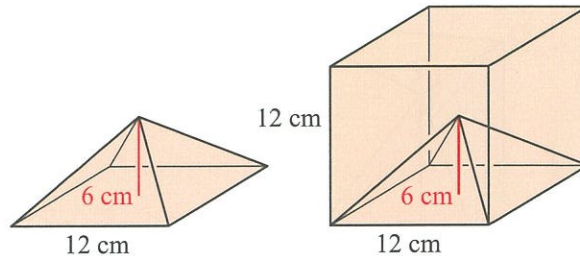


Hasábok és gúlák

példa

2 cm élű kockából egyik oldallapjánál kivágunk egy 6 cm magasságú, négyzet alapú gúlát.

- 1) Hány ilyen gúlából áll ez a kocka?
- 2) A kocka térfogatának hányadrészét foglalja el egy ilyen gúla?
- 3) Mekkora egy kivágott gúla térfogata?



legoldás

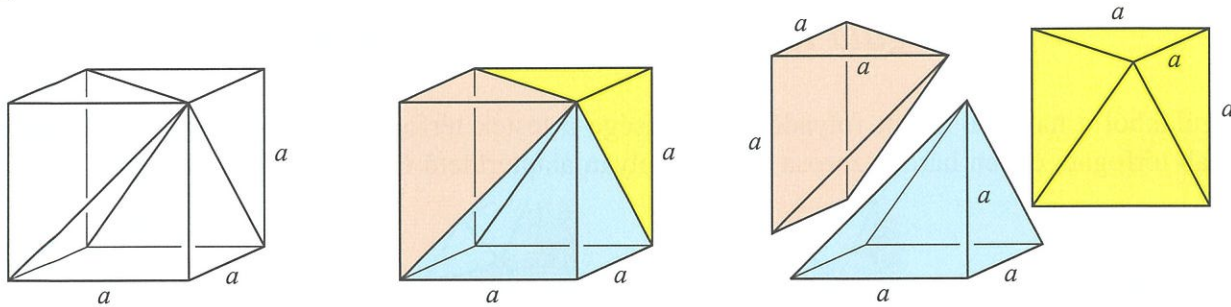
- 1) A kocka mind a hat lapjánál elvégezhető ez a művelet. Tehát a kocka 6 db ilyen gúlából rakható ki.
- 2) Egy gúla térfogata hatodrésze a kocka térfogatának.

A kivágott gúla térfogata: $V = \frac{12 \cdot 12 \cdot 12}{6} = 288 \text{ cm}^3$.

példa

Egy kockát felvágunk három lapátlója és egy testátlója mentén, az ábrán látható módon. Hányadrésze egy ilyen gúla térfogata a kocka térfogatának?

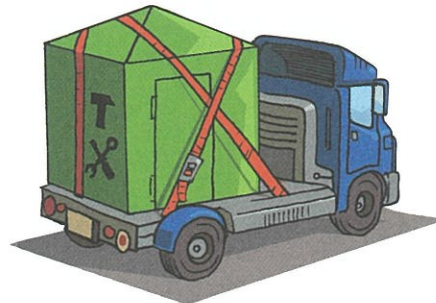
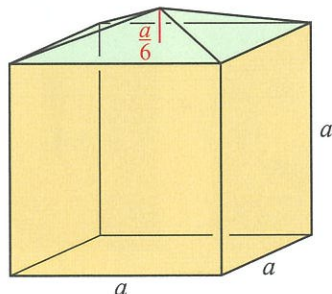
legoldás



A vágások után három olyan egybevágó, négyzet alapú gúlát kapunk, amelynek alaplapja azonos a kocka lapjával, magassága pedig egyenlő a kocka élével. Egy gúla térfogata a kocka térfogatának harmada.

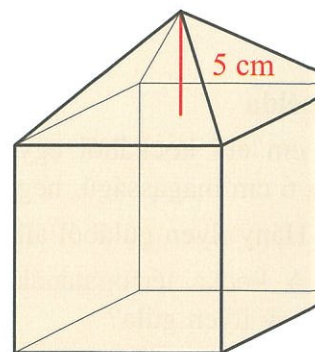
feladatok

1. Az ábrán látható szerszámos kamrát egy teherautó szállítja le a vidéki telekre. A szállítmánynak az országúton többször kell felüljáró alatt áthaladni. A legalacsonyabb felüljáró a vízszintes talajtól 4 m magasságban halad. A teherautó 2,4 m × 4 m méretű, téglalap alakú rakodófelülete 1,2 m magasan van. Add meg annak a kamrának a méreteit, amely a felüljáró alatt állítva vagy fektetve elfér a teherautón!

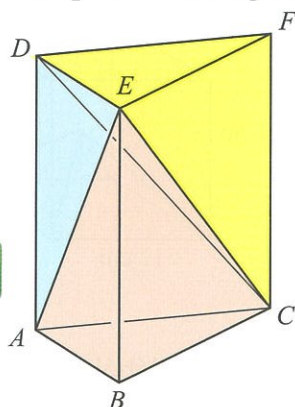


2. Egy 10 cm élű kocka egyik lapjára illesztünk egy 5 cm magasságú, négyzet alapú gúlát (jobb oldali ábra).

A kapott test térfogata hány százaléka a kocka térfogatának?



3.



A hasábot a színezésnek megfelelően gúlákra vágjuk szét (bal oldali ábra). Csúcsainak felsorolásával add meg a kék, a rózsaszín és a piros gúlát!

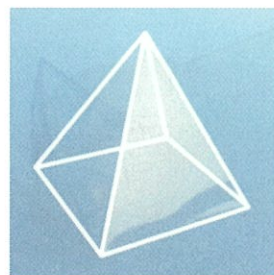
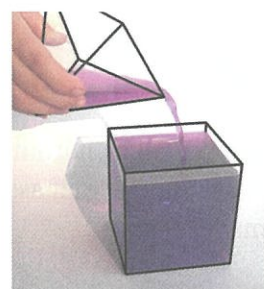
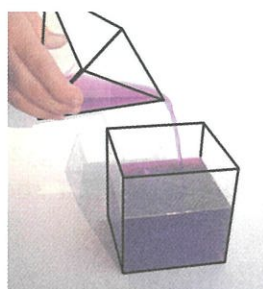
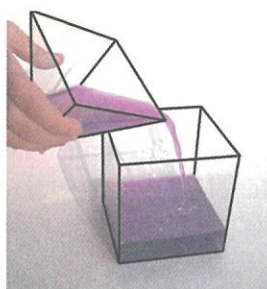
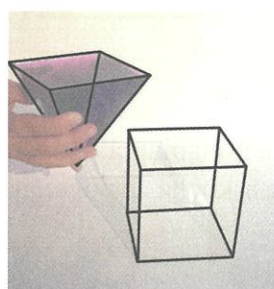


4. Egy a oldalélű kocka minden lapjára kifelé olyan egyenlő oldalélű gúákat illesztünk, amelyeknek magassága a kocka élének a fele.

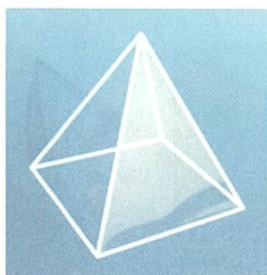
- Milyen lapjai lesznek az így kapott testnek?
- Konvex vagy konkáv testet kapunk?
- Hány éle, hány lapja és hány csúcsa lesz az új testnek?

A gúla térfogata (Kiegészítő tananyag)

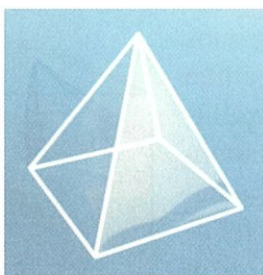
A gúlákból a hasábra öntött folyadék mennyisége a testek térfogatát méri. A tapasztalat szerint hasáb térfogata éppen háromszorosa az ugyanolyan alapterületű és magasságú gúlának.



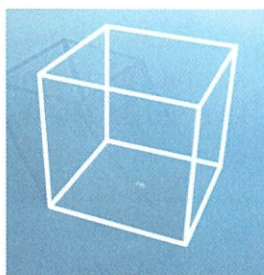
+



+



=



A térfogat mértékegységei a hosszúság egységeiből eredően:

$$1 \text{ mm}^3 < 1 \text{ cm}^3 < 1 \text{ dm}^3 < 1 \text{ m}^3 < 1 \text{ km}^3$$

$$1000 \quad 1000 \quad 1000 \quad 1\,000\,000\,000$$

térfogatot űrmértékegységekkel is mérhetjük:

$$1 \text{ ml} < 1 \text{ cl} < 1 \text{ dl} < 1 \text{ l} < 1 \text{ hl}$$

$$10 \quad 10 \quad 10 \quad 100$$

mert összefüggések: $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$

$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$

$1 \text{ m}^3 = 10 \text{ hl} = 1000 \text{ l}$

A gúla térfogata harmadrésze az ugyanakkora alapterületű és magasságú hasábnak:

$$V_g = \frac{V_h}{3}, \quad \text{tehát} \quad V_g = \frac{T_a m}{3},$$

ahol T_a a gúla alapterülete, m pedig a magassága.

feladatok

1. Számítsd ki a négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla térfogatát, ha

- a) alapéle 2 cm, magassága 3,6 cm,
- b) alapéle 4 cm, magassága 3,6 cm,
- c) alapéle 4 cm, magassága 1,8 cm!

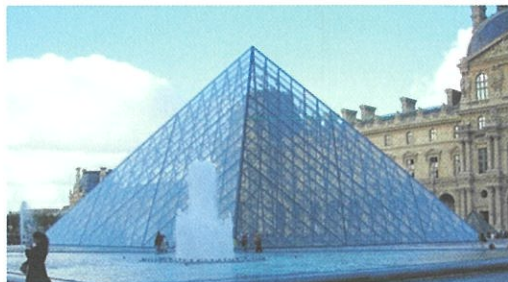
2. Számítsd ki annak a háromszög alapú gúlának a térfogatát, amelynek

- a) alapterülete: $T_a = 20 \text{ cm}^2$, magassága: $m = 15 \text{ cm}$,
- b) alapterülete: $T_a = 30 \text{ cm}^2$, magassága: $m = 10 \text{ cm}$!

3. Párizsban a Louvre udvarán áll az ábrán látható hatalmas üvegpiramis. Ez egy olyan négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla, amelynek alapéle $a = 35,4$ méter, magassága $m = 21,6$ m.

Határozd meg a piramis térfogatát!

Nézz utána az interneten, hogy az üvegpiramison hány különböző síkidom látható!

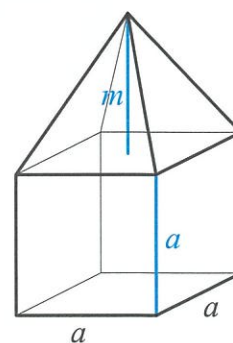


Louvre (Párizs, Franciaország)

4. Két egybevágó, négyzet alapú gúlát alapjuknál összeragasztunk. A gúlák minden éle 10 cm. Milyen lapok határolják a testet? Mekkora a térfogata?

5. Hány cm^3 az ábrán látható „házikó” térfogata, ha $a = m = 13 \text{ mm}$?

6. Mennyi a tömege annak az ólomüvegből készült, négyzet alapú, gúla alakú dísz tárgynak, melynek alapéle 9 cm, magassága 12,6 cm, ha az üveg sűrűsége $2600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?



A kúp

1. példa

Az ábrán látható használati tárgyak közül válasszuk ki azokat, amelyeknek alakja általunk ismert mértani testre hasonlít, és soroljuk a megfelelő halmazba!

Megoldás



Hasáb: C-vitamin, doboz

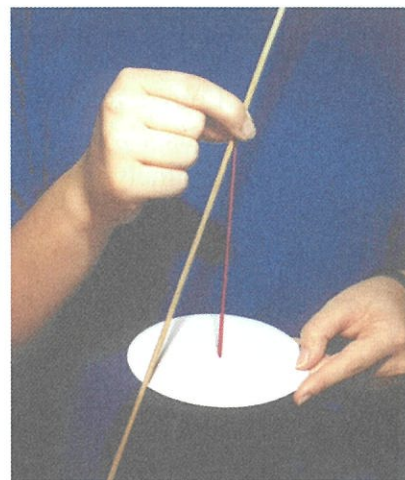
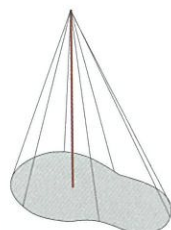
Henger: lila színű flakon, sótartó, gyertya

Gúla: csokigolyós doboz

Kúp: a tölcsér alsó része

Gömb: labda, narancs

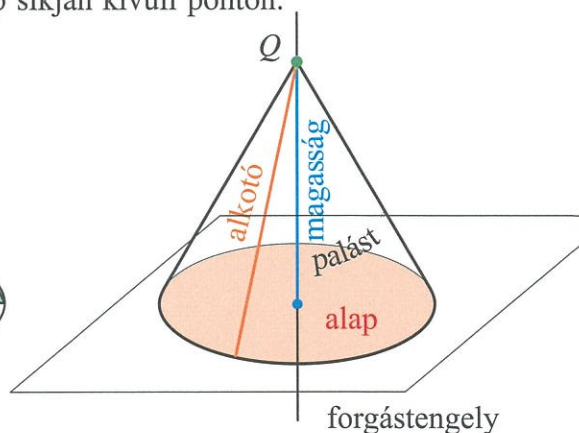
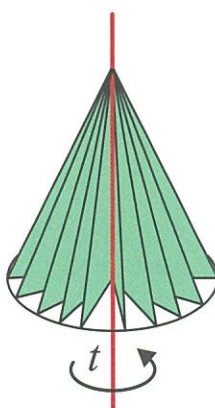
Az alábbi ábrákon különböző kúpokat látunk.

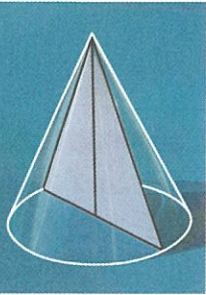


A kúpot egy görbe vonallal határolt síkidom, az alaplap és egy felület, a palást határolja. A palást azzal szemléltethetjük, hogy az alaplap határvonalán végigvezetünk egy hurkapálcikát úgy, hogy pálcika minden helyzetében áthaladjon egy, az alaplap síkján kívüli ponton.

Az egyenes kőrkúpnak van forgástengelye, ezért ezt **forgáskúp**-nak is nevezik.

A forgáskúpot úgy is elképzelhetjük, hogy egy egyenlő szárú háromszöget szimmetriatengelye körül megforgatunk.





A kúpnak nincs éle. A Q pont a kúp csúcsa. A csúcsnak az alap síkjától való távolsága a kúp **magassága**. A felület a kúp **palástja**. Az alaplap határvonalának egy tetszőleges pontját a kúp csúcsával összekötő szakasz a kúp **alkotója**.

A kúp csúcsán áthaladó, alaplapjára merőleges sík a kúpot egyenlő szárú háromszögben metszi. Ez a háromszög a kúp **tengelymetszete**.

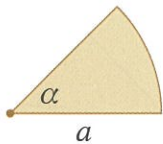
példa

soportmunka

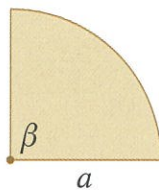
ülönböző fajtájú, azonos sugarú körcikkekből kúppalástokat állítunk elő.

-) Bármelyik körcikkből készíthető kúppalást?
-) Melyik kúpnek legkisebb az alapkörsugara?
-) Melyik kúppalástnak legkisebb, és melyiknek legnagyobb a magassága?
-) Hogyan változik a kúp magassága a körcikk középponti szögének növelésével?

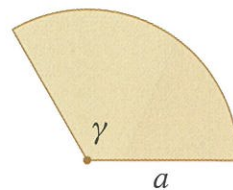
A)



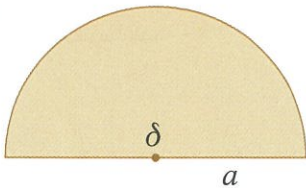
B)



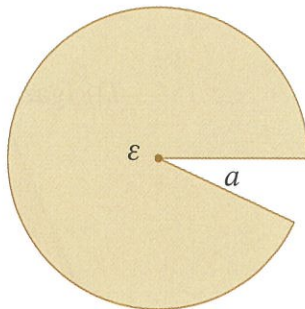
C)



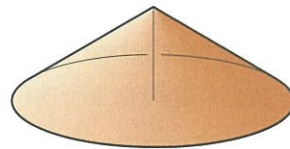
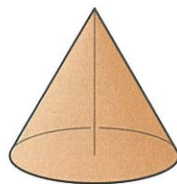
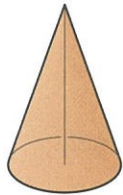
D)



E)



egoldás



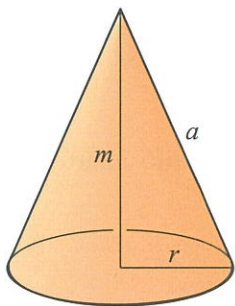
Bármilyen a körcikkből lehet kúppalástot készíteni, tehát a fenti öt különböző körcikkből is.

Az A) kúpnek legkisebb az alapkörsugara.

Az E) kúpnek legkisebb a magassága és az A)-nak a legnagyobb.

Ha körcikk középponti szöge nagyobb, akkor a keletkező kúp magassága kisebb.

3. példa



Az ábrán az m a kúp magasságát, a az alkotóját, r pedig az alapkörének sugár jelöli.

Az ábrán látható kúp adatainak változtatásával más-más kúpot kapunk. Az állítások ezekre a kúpokra vonatkoznak. Döntsük el, hogy hány állítás igaz és hány hamis.

A) Ha két kúp alapkörének sugara egyenlő, akkor annak nagyobb a magasság amelyiknek hosszabb az alkotója.

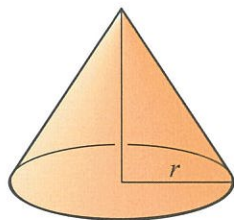
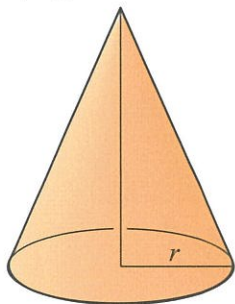
B) Ha két kúpnak egyenlő az alkotója, akkor a kisebb magasságúnak kisebb sugara.

C) Ha két kúpnak egyenlő a magassága, akkor a kisebb alapkörsugarúhoz nagyobb alkotó tartozik.

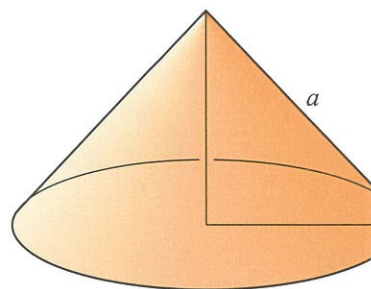
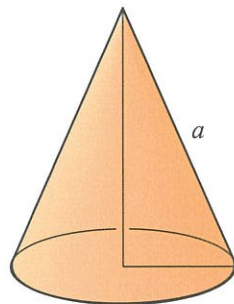
D) Ha két kúp közül az egyiknek feleakkora az alkotója és a magassága, mint a másiknak, akkor kisebb kúpnak feleakkora az alapkörsugara is.

Megoldás

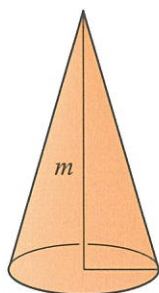
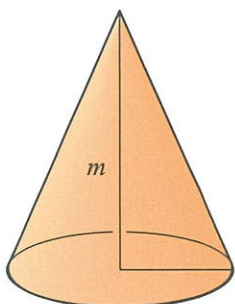
A) Igaz.



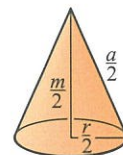
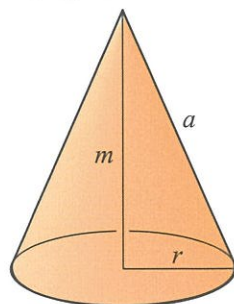
B) Hamis.



C) Hamis.



D) Igaz.



Az állítások igaz vagy hamis voltának eldöntésénél a kúpok tengelymetszetén megjelenő derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt alkalmaztuk.

Az állítások között két igaz és két hamis szerepelt.

Feladatok

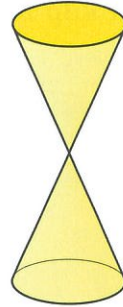
1. Vágjunk el egy kúpot a

a) forgástengelyére illeszkedő síkkal,

b) forgástengelyére merőleges síkkal!

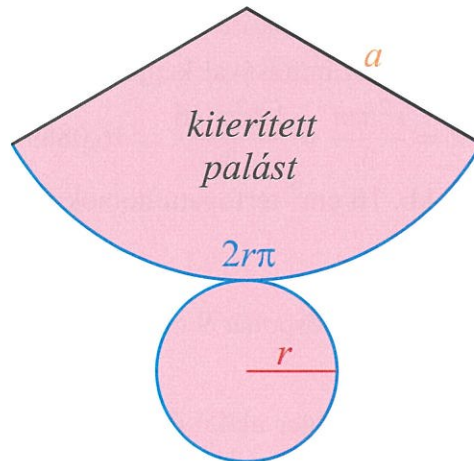
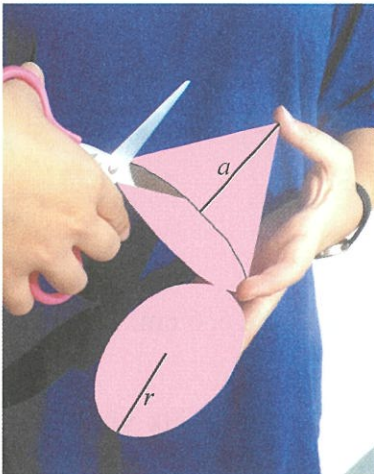
Rajzold le, milyen síkidomok a síkmetszetek!

2. a) Mekkora egy 4,2 cm alapkör sugarú kúp magassága, ha alkotója 60 mm?
b) Rajzold le a kúp tengelymetszetét!
c) Mekkora a tengelymetszet területe?
3. Rajzold le, milyen síkbeli alakzatot kell a szimmetriatengelye körül megforgatni, hogy a homokórát szemléltető mértani testet kapjuk!
4. Egy tömör fából készült kúp felületét kékre festjük, majd a tengelyére illeszkedő két, egymásra merőleges síkkal négy részre vágjuk. Rajzold le a vágás után látható festetlen lapokat!
5. A varázsló kúp alakú kalapját és a kínai kalapot a sugarú körcikkekéből készítették. Melyik körcikkeknek nagyobb a középponti szöge? Rajzold le a körcikkeket!
6. Egy sátorábró közepén álló rúdra egy elemmel működő, nagy fényű ledes lámpát akasztanak fel. A lámpa fénykúpjának a kúp csúcsnál lévő szöge 90° . A gyerekek az esti játék után a rúd 2,5 méter sugarú környezetében elhagytak néhány pingponglabdát. Milyen magasra kell akasztani a lámpát, hogy az a labdákat megvilágítsa? Készíts rajzot!



A kúp felszíne és térfogata (Kiegészítő tananyag)

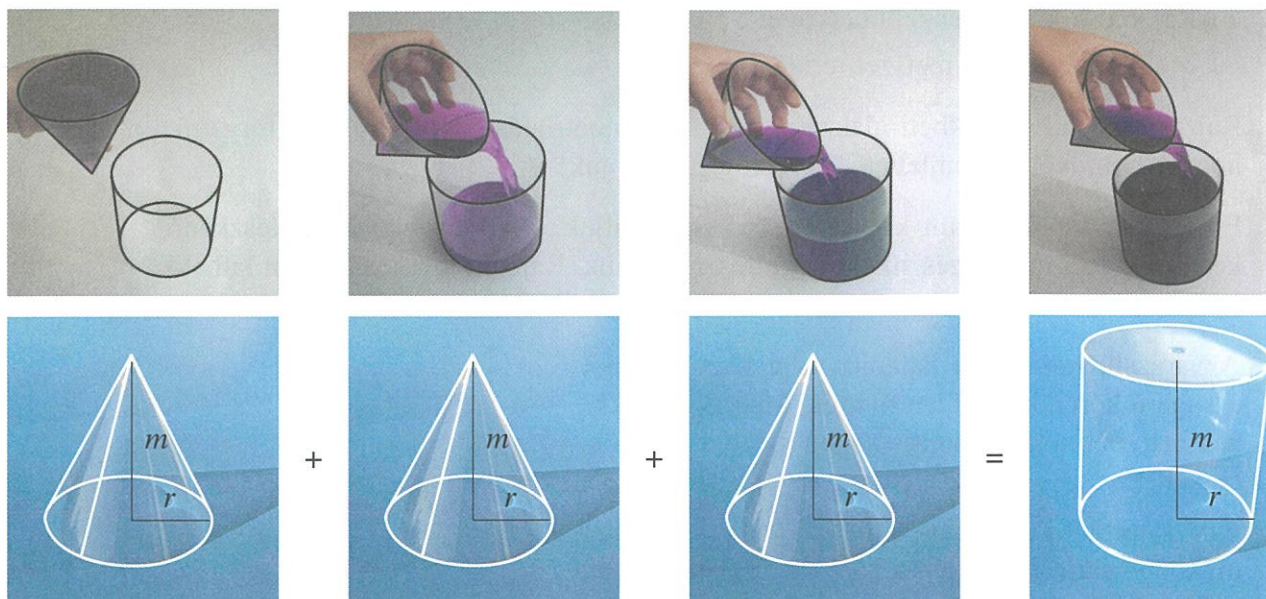
kúp felszínének meghatározásához előállítjuk a kúp hálóját.



háló egy körből és a kiterített palástból áll. A kiterített palást egy körívk. A kúp felszínét ennek két síkidomnak a területösszege adja.

$$A = T_{\text{kör}} + T_{\text{palást}} = T_a + T_p = r^2\pi + r\pi a, \text{ ahol } r \text{ a kúp alapkörének sugara, } a \text{ pedig az alkotója.}$$

A kúp térfogatát az ugyanolyan alapkör sugarú és magasságú henger térfogatához viszonyítjuk.



Tehát a kúp térfogata: $V = \frac{r^2 \pi m}{3}$, ahol r a kúp alapkörének a sugara, m pedig a magassága.

Példa

A kettős kúp formájú homokóra magassága 12 cm, az alapkörök sugara 1,6 cm. Hány cm^3 homok fér bele úgy, hogy működtetni tudjuk?

Megoldás

A homokóra akkor indítható el, ha egyik kúp alakú tartálya éppen tele van. Egy ilyen kúp magassága a homokóra magasságának a fele, tehát 6 cm.

A kúp térfogatának kiszámításával kapjuk meg a benne lévő homok mennyiségét.

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{1,6^2 \pi \cdot 6}{3} \approx 16,0849 \text{ (cm}^3\text{)} \approx 16,1 \text{ (cm}^3\text{)}$$

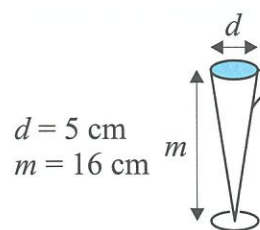
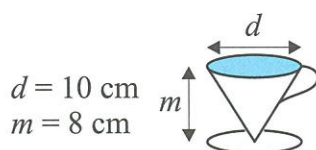
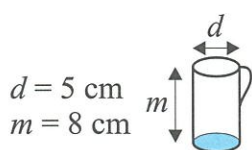
A homokórában kb. 16 cm^3 térfogatú homok van.



Feladatok

1. Egy kúp alakú pezsgőspohár 9 cm magas, fedőkörének átmérője 6,6 cm. Hány deciliter pezsgő fér bele?

2. Az ábrán látható henger alakú és kúp alakú poharakat színültig töltjük vízzel. Kevesebb vagy több víz fér a kúp alakú poharakba, mint a henger alakúba?





Pásztorház (Bugac)

Fotó: Varga Mihály

A bugaci pásztormúzeum kúp alakú tetőszerkezetének magassága 5,6 m, alapkörének átmérője: 13 m. Hány m^3 -es a tetőtér? Ennek a kúpnak milyen síkidom a tengelymetszete?



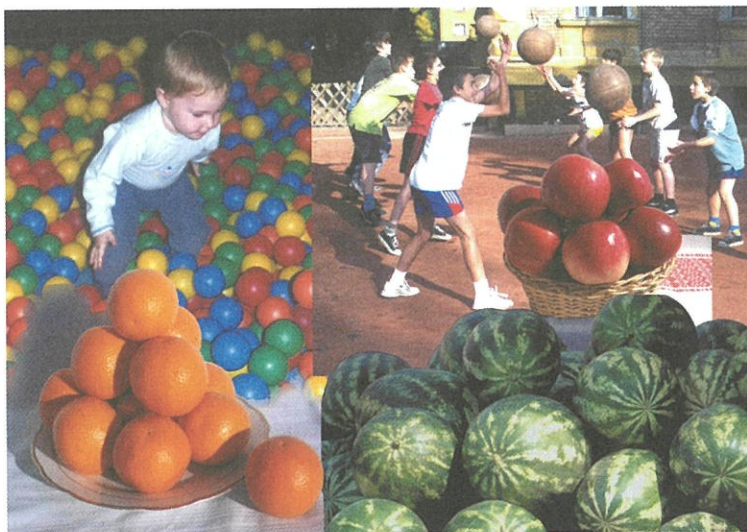
Árpád-kori körtemplom
(Kiszombor)

4. Az ábrán látható kiszombori templom kupolája olyan kúp, amelynek alkotója 8 m. A kúp tengelymetszete szabályos háromszög. Hány méter hosszú az a csatorna, amely a kupola alapját körbe-fogja?

5. Egy 6,4 cm magas kúpot helyezünk el egy olyan négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla, amelybe éppen befér. A gúla alaplapéle 6 cm. Hányszor nagyobb a gúla térfogata, mint a kúp térfogata?

A gömb

Gömb alakú tárgyak igen gyakran megjelennek az ember életében. Már a csecsemőkorú gyermek is játszik a labdával; az óvodás már azt is tudja, hogy gömbnek hívják. Geometriai tulajdonságait részletesen viszont csak magasabb matematikai ismeretek segítségével írhatjuk le.

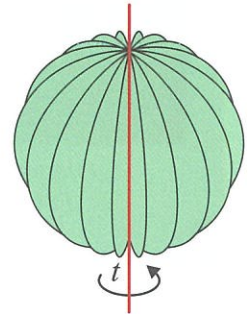


Ötödik osztályban tanultuk, hogy a gömbfelület olyan térbeli pontok halmaza, amelyek egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak. Az adott pont a gömb középpontja, az adott távolság a gömb sugara.



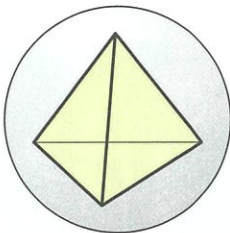
A gömb középpontját a gömbfelülettel összekötő szakasz a gömb **sugara**. A gömbfelület két tetszőleges pontját összekötő szakasz a gömb **húrja**. A gömb minden **síkmetszete kör**. A legnagyobb ilyen kör a gömb **főköre**, amelyet a középpontján áthaladó sík metsz ki a gömbből; ezt a gömb tengelymetszetének is nevezik. Ennek a körnek az átmérője egyben a gömb **átmérője** is.

Ha egy kört valamelyik átmérőjének egyenesé körül megforgatunk, a forgatás közben gömböt látunk. Ezért a gömb, hasonlóan a hengerhez és a kúphoz, **forgástest**.

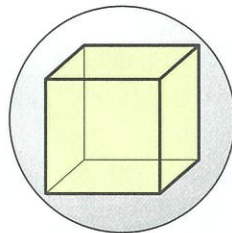


A gömb nagyon különleges test. A mindennapi életünkben, ha valami tökéletes, akkor arra azt is szokták mondani, hogy „gömbölyű”. Valóban a „legsabályosabb” test a gömb. Ilyen elnevezés persze nincs a geometriában, de szabályos testek léteznek. A szabályos test minden határolólapja egymással egybevágó szabályos sokszög, ezenkívül a test gömbbe írható úgy, hogy minden csúcsa a gömb felületén van. Érdekes, hogy míg a síkidomok között végtelen sok szabályos sokszög van, addig a szabályos testekből csak ötféle létezik. Közülük az első hárommal már megismerkedtünk.

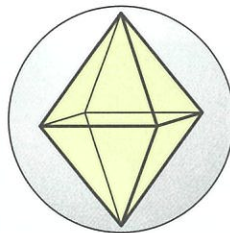
A szabályos tetraédert 4 szabályos háromszög,
a szabályos hexaédert (a kockát) 6 négyzet,
a szabályos oktaédert 8 szabályos háromszög,
a szabályos dodekaédert 12 szabályos ötszög,
a szabályos ikozaédert 20 szabályos háromszög határolja.



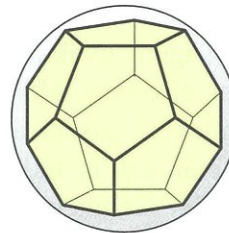
tetraéder



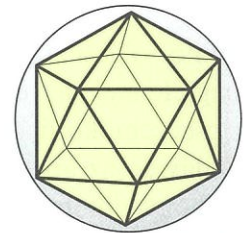
hexaéder (kocka)



oktaéder



dodekaéder



ikozaéder

1. példa

Néhány főköre mentén színes szalagokkal díszített a gömböt látunk az ábrán. A gömb sugara 4 cm. Milyen hosszú szalagot használtak az elkészítésénél?

Megoldás

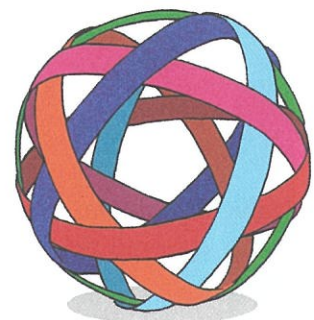
A főkör sugara ugyanakkora, mint a gömb sugara. Egy főkörön haladó szalag hossza egyenlő a főkör területével.

Egy piros, egy narancssárga, egy kék, egy világoskék, egy lila és egy zöld szalag határolja a gömböt. Ez összesen hat főkör.

1 főkör kerülete: $K = 2 \cdot r \cdot \pi \approx 8 \text{ cm} \cdot 3,14 = 25,12 \text{ cm} \approx 25 \text{ cm}$.

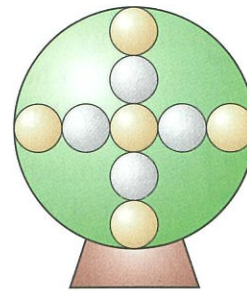
6 főkör kerülete: $6 \cdot 25 \text{ cm} = 150 \text{ cm}$.

Összesen 150 cm hosszúságú szalagot használtak fel a gömb díszítésére.



2. példa

Egy ajándékboltban kapható az alábbi asztali dísz tárgy: egy 15 cm átmérőjű, átlátszó műanyagból készült gömbbe 1,5 cm sugarú csillogó kis gömböket helyeztek el úgy, hogy a kis gömbök középpontjai a nagy gömb három, egymásra páronként merőleges átmérőjén sorakoznak. A kis gömbök érintik egymást és átmérőik egybeesnek a nagy gömbével. Összesen hány gömbből áll ez a dísz tárgy?



Megoldás

Az ábrán a dísz tárgy egyik tengelymetszetét látjuk. Ebben a síkban két irányban sorakozik a 9 db kis gömb képe. Erre a síkra merőleges átmérőn további 4 db gömb helyezhető el.

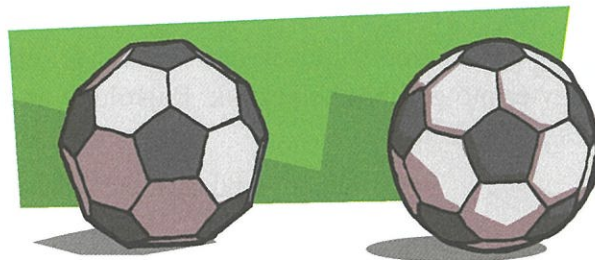
Így a nagy gömbbel együtt összesen 14 db gömb van a dísz tárgyban.

3. példa

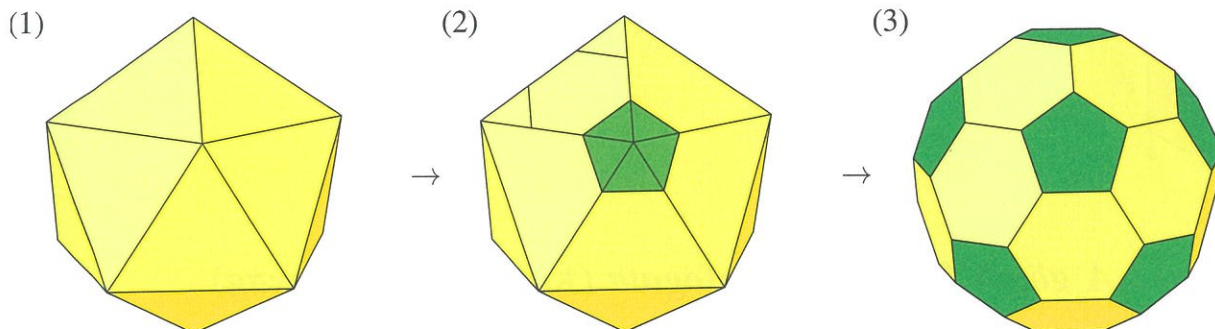
Páros munka

Hogyan lehet elkészíteni a focilabda modelljét az egyik szabályos testből, az ikozaéderből?

20 db szabályos háromszögből készítsünk egy ikozaédert!



Megoldás



Megjelöljük az ikozaéder minden élének harmadoló pontjait és ezeket a (2)-es ábrán látható módon összekötjük. A csúcsokhoz közelebbi fekete szakasz mentén levágjuk az ikozaéder csúcsát. Egy csúcsnál például a (2)-es ábrán látható zöld, ötszög alapú gúlát vágjuk le. Ha a hatszöget minden lapon kijelöljük, és a levágást minden csúcsnál elvégezzük, akkor a (3)-as ábrán látható focilabda-modellt kapjuk.

Ezt a testet annyi ötszög határolja, ahány csúcsa, és annyi hatszög határolja, ahány lapja van az ikozaédernek, vagyis 12 ötszög és 20 hatszög. A focilabda tehát ezekből a sokszögekből készül.

Feladatok

1. Léna egy labdát ajándékoz testvérének. A labdát a főkörénél egy 85 cm hosszú szalaggal átköti úgy, hogy a masnira 20 cm hosszú szalagot hagy. Mekkora az ajándéklabda sugara?

2. Az ábrán látható 14 cm átmérőjű gömb vázát színes műanyag csövekből készítették. A csövek a főkörök mentén haladnak. Milyen hosszú külön-külön egy műanyag cső? Mennyi a csövek hossza összesen? (A gömb tetején és alján lévő összeillesztő idomok méretét figyelmen kívül hagyjuk.)

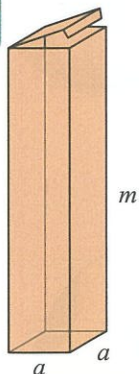
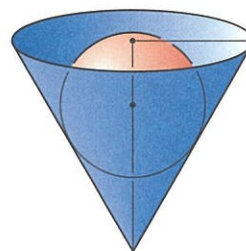
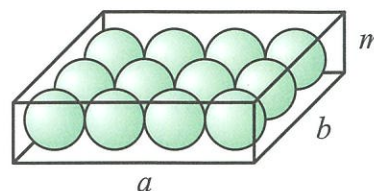
3. 12 db marcipángolyó van a téglatest alakú dobozban. Egy golyó átmérője 3,2 cm.
Mekkora a doboz térfogata?

4. Becsüld meg, hány 2,5 cm sugarú díszgömb fér el a 20 cm magas, henger alakú tároló dobozban, ha egy rétegbe maximum hetet lehet elhelyezni!

Mekkora a henger alapkörének átmérője, ha a gömbök érintik egymást és a henger falát?

5. Egy alul nyitott kúpot nyitott felével felfelé tartunk. A kúpba egy érintő gömböt helyezünk. Rajzold le az alakzat elől-, oldal- és felülnézetét!

6. A pingponglabdákat négyzetes hasáb alakú dobozban árulják.
A doboz mérete olyan, hogy a labdák pontosan egymás fölött éppen beleférnek. Hány labdát tehetünk ebbe a dobozba, ha a doboz alapja 2,8 cm oldalú négyzet, magassága 14 cm?



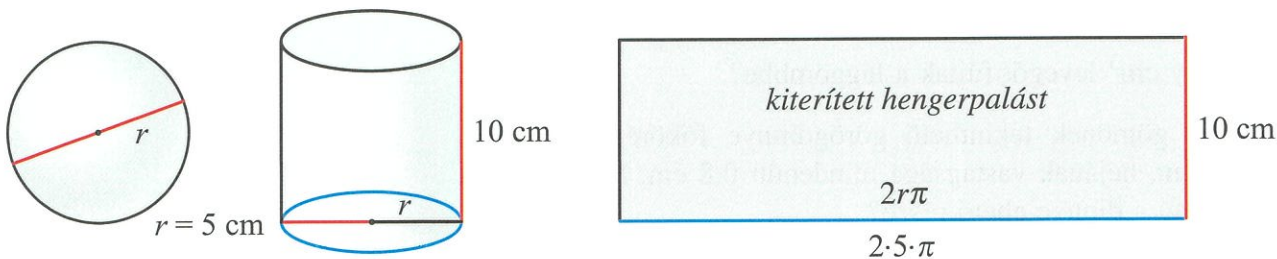
A gömb felszíne és térfogata (Kiegészítő tananyag)

A gömb felszínének meghatározásakor az okozza a nehézséget, hogy míg az eddig tanult mértani testek mindegyikének el tudtuk készíteni a síkbeli hálóját, addig a gömb esetében ez lehetetlen. Bármilyen parányi gömbfelületet vágunk is ki például egy játéklabdából, annak is van görbülete, így nem tudjuk azt síkba kiteríteni, ezért a gömbnek nincs hálója.



A gömb felszíne: $A = 4r^2\pi$, ahol r a gömb sugara.



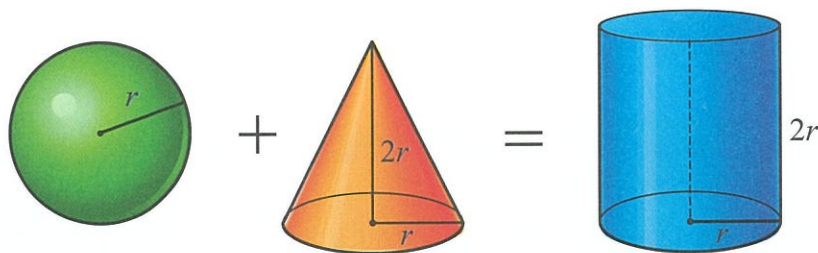


Érdeemes megfigyelni, hogy például egy 5 cm sugarú gömb felszíne egy 5 cm sugarú és 10 cm magasú hengerpalást területével egyenlő, ugyanis a gömb felszíne: $A_g = 4 \cdot 5^2 \pi = 100\pi$, a hengerpalást felszíne: $A_{hp} = 2 \cdot 5\pi \cdot 10 = 100\pi$.

Az ilyen henger tengelymetszete négyzet. Ebbe a hengerbe ez a gömb éppen „belefér”; azt mondjuk, hogy ez a henger beírt gömbje.

A **gömb térfogatának** meghatározására sincsenek elemi módszerek.

Arkhimédész a gömb térfogatát úgy határozta meg, hogy ugyanolyan anyagú vékony körlemezekből készített egy r sugarú gömböt, egy r sugarú, $2r$ magasságú hengert és egy szintén r sugarú, $2r$ magasságú kúpot. Ezeket egy kétkarú mérleg segítségével megmérte, és azt találta, hogy a kúp és a gömb tömegének összege megegyezik a henger tömegével. Felhasználva, hogy az ugyanolyan sűrűségű testek térfogata egyenesen arányos a tömegükkel, eddig ismert testek (a henger és a kúp) térfogatának segítségével kapta meg a gömb térfogatát. Jóval később Cavalieri [ejtsd: kavalieri] (1598–1647) olasz matematikus ezeket a körlemezeket síklapvékonyságúnak képzelve be is bizonyította Arkhimédész képleteit.



A gömb térfogata: $V = \frac{4r^3\pi}{3}$, ahol r a gömb sugara.

Feladatok

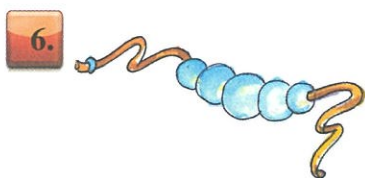
1. Számítsd ki a gömb felszínét és térfogatát, ha sugara

- a) 1,2 m,
- b) 12 cm,
- c) 120 dm,
- d) $1,2 \cdot 10^4$ mm!

Van-e közöttük olyan, amelynél a felszín és a térfogat mérőszáma megegyezik?

2. Két 4 cm sugarú félgömb felszínének összege mennyivel nagyobb, mint egy 4 cm sugarú gömbé?

3. Egy gyermeknapi, gömb alakú léggömb átmérője 24 cm. Hány cm^3 levegőt fújtak a léggömbbe?
4. Egy gömbnek tekinthető görögdinnye főkörének kerülete 60 cm, héjának vastagsága mindenütt 0,8 cm. Mekkora térfogatú a dinnye ehettő része?
5. A szemcseppentő egyszeri megnyomásával 3 mm átmérőjű, gömb alakú cseppeket tudunk képezni. Egy alkalommal 4 cseppet kell a gyógyszerből a szemünkbe csöpögtetni. Hány milliliter gyógyszert használunk el, ha naponta ötször kell kezelni a szemünket?



6. Egy üvegből készült gyöngysor középső gömbjének átmérője 12 mm. A három különböző méretű, gömb alakú gyöngy sugarának aránya 3 : 2 : 1. Mekkora a gyöngysorban lévő 5 db gyöngy együttes tömege, ha az üveg sűrűsége $2,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$? (Az átfúrás miatti térfogatcsökkenést ne vegyük figyelembe!)

7. A gyógyszeres kapszulát egy 10 mm magasságú hengerpalást és két 2,5 mm sugarú félgömb határolja. Becsüld meg, mekkora lehet egy kapszula térfogata, mekkora lehet a felszíne! Becslésedet számolással ellenőrizd!



- ★ 8. a) Egy 9 cm élű kockából esztergálással a lehető legnagyobb gömböt készítették el. Mekkora a gömb felszíne és térfogata?
- b) Egy 9 cm átmérőjű fagolyóból esztergálással a lehető legnagyobb kockát készítették el. Mekkora a kocka felszíne és térfogata?
9. Egyetlen nagy gömb alakú cseppé alakul 8 db 1 mm átmérőjű, gömb alakú esőcsepp. Mekkora a nagy csepp és egy kis csepp felszínének aránya?

Tudáspróba

1. Helyezd a tárgyakat a megfelelő halmazba!

Hasábok:

Hengerek:

Gúlák:

Kúpok:

Gömbök:

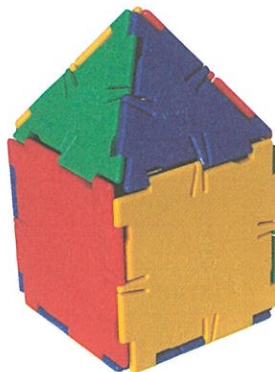
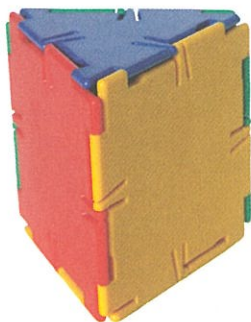


2. a) Nevezd meg és rajzold le a testek oldallapjait!

b) Határozd meg a B) alakzat hálójának területét, ha a kocka éle 4 cm a háromszög oldallapjának magassága 3,5 cm!

A)

B)



3. Egy tömör fából készült, négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúla alapéle 7 cm, oldaléle 9 cm hosszú. A gúlát pirosra festjük, majd kettévágjuk egy olyan sík mentén, amely az alaplappra merőleges és annak egyik átlóján áthalad.

a) Milyen festetlen lapjai lesznek a kettévágott gúlának?

b) Mekkora a festetlen síkidom(ok) oldalai?

4. a) Milyen testek alkotják az ábrán látható körtemplomot?

b) Rajzold le a tengelymetszetét!

c) Mekkora a tengelymetszet területe, ha a templom alapkörének átmérője 8 m, oldalfalának magassága 6 m, a kúp alakú tetőtér magassága 5 m?



5. Egy 6 cm átmérőjű karácsonyi gömböt az ábrán látható módon szalaggal feldíszítünk. A szalag, amivel a fára felakaszthatjuk, 14 cm hosszú. Összesen hány cm szalagra van szükségünk 8 ilyen gömb feldíszítésére?



6. A kelfeljancsi fejét alkotó gömb sugara 2,5 cm. A hasát és a fejét alkotó gömb átmérőinek aránya 11 : 5. Milyen magas dobozban fér el álló helyzetben?



Statisztika

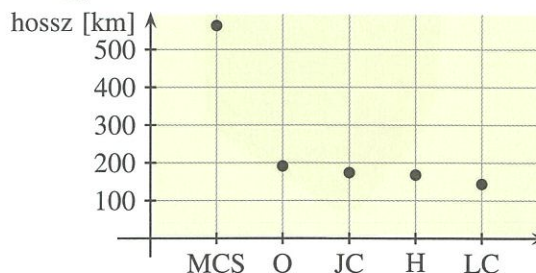
Alapfogalmak, elnevezések



A 6. osztályban meghatároztuk a statisztikai adatok átlagát, az adatokat táblázatba rendeztük, és grafikonon ábrázoltuk. Megismertük a pontdiagramot, a vonaldiagramot, az oszlopdiagramot és a kördiagramot.

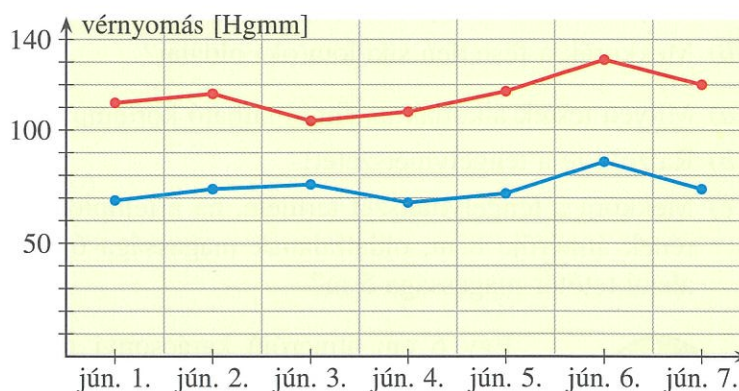
1. Pontdiagramon szemléltetjük a Föld öt legnagyobb barlangjának hosszát:

Barlang neve	Ország	Hosszúság km/ben
Mammoth Cave System	USA	563,27
Optimiszticsna	Ukrajna	191,4
Jewel Cave	USA	174
Hölloch	Svájc	168
Lechuguilla Cave	USA	143,85



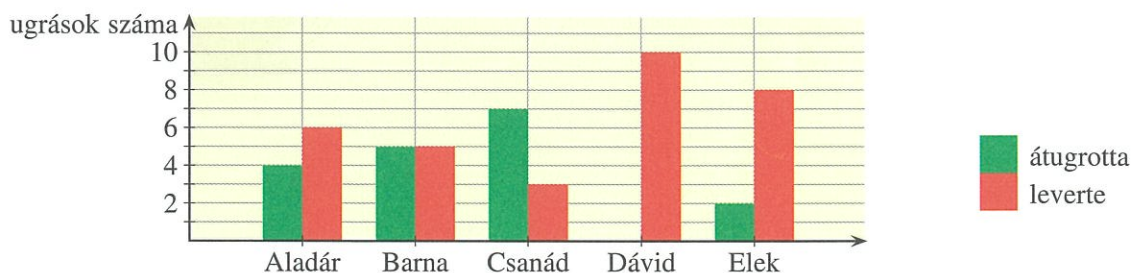
2. Vonaldiagramon szemléltetjük egy 60 éves férfi vérnyomás-ingadozását, egy héten át mért adatok alapján:

Dátum	Felső	Alsó
	érték	
Június 1.	112	69
Június 2.	116	74
Június 3.	104	76
Június 4.	108	68
Június 5.	117	72
Június 6.	131	80
Június 7.	120	74

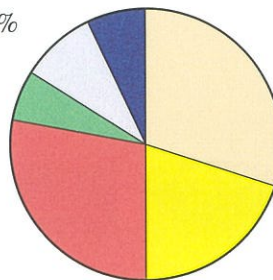


3. Testnevelésórán a magasugrást gyakorolják a fiúk. A 8. osztályban Aladár, Barna, Csanád, Dávid és Elek általában áтуgrották a 130 cm-es magasságra tett lécet. Az új kihívás számukra az, hogy a tanár 5 cm-rel magasabbra emelte a lécet. Mindegyik gyerek tízszer próbálkozott. Az eredményeket táblázatba foglaltuk. Az adatokat **kettős oszlopdiagramon** ábrázoljuk.

	Aladár	Barna	Csanád	Dávid	Elek
Áтуgrotta a lécet	4	5	7	0	2
Leverte a lécet	6	5	3	10	8



4. A **kördiagramon** a földrészek területének százalékos eloszlását ábrázoljuk:



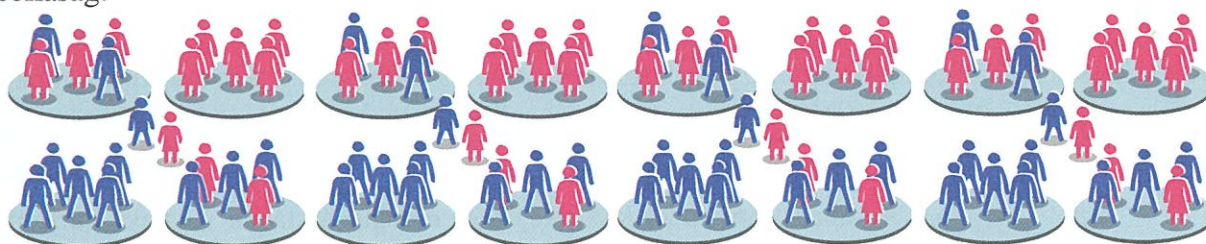
A statisztikai kutatások adatok gyűjtésére épülnek. A statisztikusok gyűjthetnek adatokat tárgyakról, élőlényekről, hagyományokról, egészségi állapotról, étkezési szokásokról, emberi kapcsolatokról, gondolkodásmódról stb., majd az összegyűjtött adatokat (adatsokaságokat) rendezik, táblázatba foglalják, grafikusan ábrázolják, és különböző statisztikai mutatók segítségével elemzik azokat. Több adatsokaság esetén összehasonlító elemzéseket végeznek. Kutatásaik közzétett eredményeit a mai világban az élet minden területén használják: a tudományokban, a kultúrában, a sportvilágban, a politikában stb.

Míg a valószínűség-számítás a XVII. század óta szerves része a matematika tudományának, addig a statisztika, ezen belül a matematikai statisztika csak a XX. században érte el tudományos rangját.

Vannak statisztikai adatok, amelyek pontosan nyomon követhetők, mert megtalálhatók valamilyen adatnyilvántartásban. Gyakori azonban, hogy egy nagy létszámú sokaság minden tagját nem lehet elérni.

Ilyenkor a felmérésben megjelölt tulajdonság vizsgálata céljából a sokaságból **mintát** vesznek.

A sokaság:



A minta:



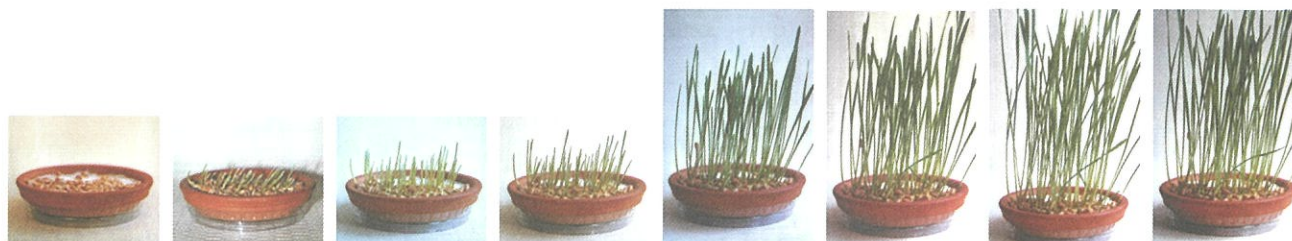
Az adatok gyűjtésének többféle módja van. A négy alapvető módszer:

1. Kérdőív: szakszerűen összeállított kérdések sorozata, megadott válaszlehetőségekkel.
2. Interjú: személyes beszélgetés, tematikusan felépített kérdésekkel.
3. Megfigyelés.
4. Kísérlet.

Az utóbbi kettőre mutatunk példát:

Megfigyelés

Népi hagyomány, hogy december 13-án, Luca napján egy kis tálkába búzát tesznek, abban csíráztatják. A búza, ha jól gondozzák, karácsonyra felnövekszik. A növény fejlődéséből következtetnek az eljövendő esztendő búzatermésére és a család, valamint a jószágállomány egészségére. Eredete visszavezethető az egyiptomi gabonacsíráztatás rítusára, amely a Kr. e. XVII. századi Ozirisz-kultuszban játszott fontos szerepet.



Megfigyeltük a búza gyarapodását az ültetést követő 11 napban, naponként megmértük a növekedést, és az adatokat a táblázatban rögzítettük:

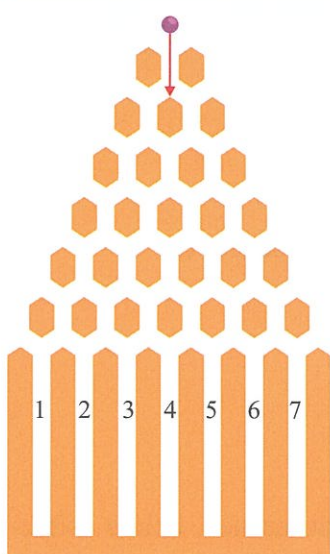
Nap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Hossz [mm]	1	5	20	60	90	100	130	150	170	180	190

A megfigyelés a statisztikai vizsgálatok egyik leghasznosabb módja. Alkalmazzák is gyakran a mindennapokban. *Például:*

- Az autópálya egy adott pontján a gyorsajtók megfigyelése, számlálása.
- Utasszámlálás egy-egy tömegközlekedési eszközön.
- Kereskedők árrendelése a korábban megfigyelt kereslet alapján.

Kísérlet

Francis Galton [ejtsd: franszisz galton] (1822–1911) angol író és utazó volt, aki orvosi tanulmányait felhasználva a születendő gyermekek nemét vizsgálta. Kutatásainak eredményét az ún. születési táblában foglalta össze. Statisztikai megfigyelésen alapuló feljegyzései segítettek a valószínűség-számítás fejlődését is. A róla elnevezett Galton-deszkával végzett kísérletekkel modellezni lehet azt a statisztikai törvényt, hogy egy adatsokaságban nagy valószínűséggel az átlagos tulajdonságú elemből van a legtöbb. Az eszköz egyszerűsített változata az ábrán látható.



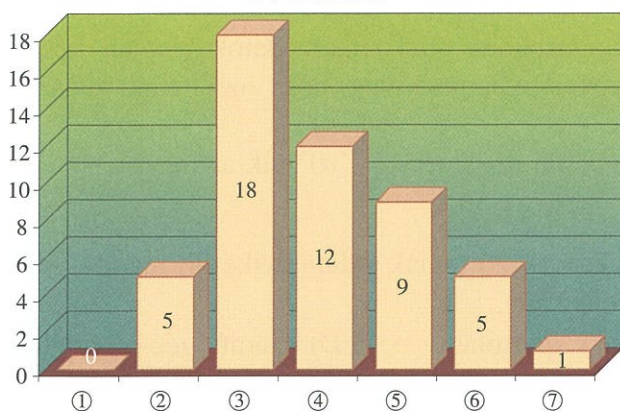
Az ábrán látható eszköz tetején és oldalán nyílások vannak. Bármelyik nyíláson bedobott golyót az elágazásoknál levő ékek egyenlő valószínűséggel terelik a két irány valamelyikébe.

A Galton-deszka számítógépes modelljével először 50, majd 500 kísérletet végeztünk úgy, hogy a golyót a felső nyíláson dobtuk be. Lejegyeztük az egyes folyosókba érkező golyók számát.

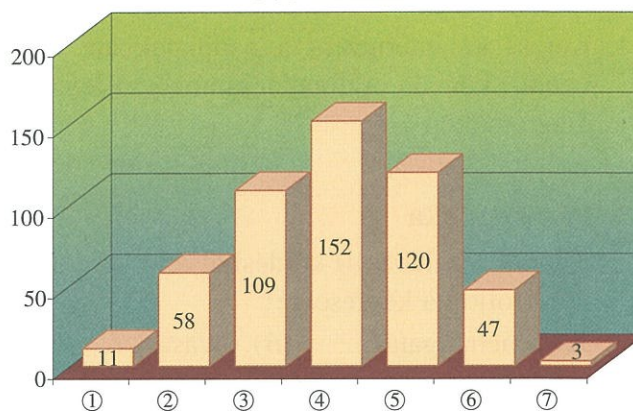
Az adatok alapján készítsünk oszlopdiagramot!

Folyosó	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	Összes
Leérkező golyók száma	0	5	18	12	9	5	1	50
	11	58	109	152	120	47	3	500

50 kísérlet



500 kísérlet



Ha n kísérletből az A esemény k -szor következik be, akkor k szám az A esemény bekövetkezésének **gyakoriságát**, a $\frac{k}{n}$ hányados pedig a **relatív gyakoriságát** jelenti.

A kísérleti eredmények alapján meghatározzuk az egyes folyosókba való megérkezés gyakoriságát és relatív gyakoriságát.

		1	2	3	4	5	6	7
50 kísérlet	gyakoriság	0	5	18	12	9	5	1
	relatív gyakoriság	$\frac{0}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{18}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{1}{50}$
500 kísérlet	gyakoriság	11	58	109	152	120	47	3
	relatív gyakoriság	$\frac{11}{500}$	$\frac{58}{500}$	$\frac{109}{500}$	$\frac{152}{500}$	$\frac{120}{500}$	$\frac{47}{500}$	$\frac{3}{500}$

Példa

Megkérdeztük a 8. osztályos tanulókat, hogy a maximum 50 pontos térgeometriai témazáró dolgozatra ki hány pontot kapott. A huszonhárom választ a táblázat tartalmazza:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.
37	50	16	41	22	37	46	43	38	49	10	29	25	24	45	26	18	12	40	50	40	27	20

Állapítsuk meg, hogy ebben a mintában

- a) mi a statisztikai sokaság,
- b) mik az egyedek,
- c) mi az ismerv,
- d) mi az adat,
- e) mi az adatsokaság!

Megoldás

- a) A 8. osztályos tanulók alkotják a **statisztikai sokaságot**.
- b) A közülük megkérdezett tanulók az **egyedek**: őket a táblázat első sorában sorszámmal jelöltük.
- c) A vizsgált tulajdonság az **ismerv**: itt a dolgozat pontszáma.
- d) Az ismerv egy-egy konkrét értéke az **adat**: példánkban a táblázat második sorában egy-egy szám.
- e) Ezek összessége az **adatsokaság**: a táblázat második sorában szereplő számok.

Feladatok

1. Keress az interneten, a napilapokban, a katalógusokban statisztikai adatok alapján készült vonal-, kör- és oszlopdiagramokat! Elemezd azokat! Állapítsd meg, hogy az általad választott diagramokon

a) mi a sokaság, b) mik az egyedek, c) mi az ismérv, d) mik az adatok!

2. Páros munka

Készíts legalább 10 kérdésből álló kérdőívet a következő témák valamelyikéről, majd a párocd válaszoljon a kérdésekre!

A) zenehallgatás, B) olvasás, C) sportolás, D) számítógép-használat, E) általad választott téma.

Adjátok meg, hogy az általatok összeállított kérdőívben,

a) mi a sokaság, b) mik az egyedek, c) mi az ismérv, d) mik az adatok!

3. Adatgyűjtés, beszámoló

A diákönkormányzat vezetőjeként a következő összefüggésbe be kell számolnod arról, hogy a mostani nyolcadikosok közül ki hogyan folytatja tanulmányait a következő tanévben, vagy ha nem tanul tovább, mivel foglalkozik majd. Készítsd el ezt a statisztikát!

A kapott adatokat foglald táblázatba az alábbiak szerint!

Gimnázium, Szakközépiskola, Szakiskola, Egyéb.

4. Egy kis falu most megnyílt vegyesboltjának vagy az üzletvezetője. Készíts olyan felmérést (kérdőívvel, interjúval vagy az általad választott tetszőleges módszerrel), amely alapján le tudod adni az árurendelést!

5. Egy 36 fős nyolcadikos osztály egész évi hiányzásának összesítését tartalmazza a táblázat. Határozd meg a mulasztott napok relatív gyakoriságát, és add meg ezeket az értékeket százalékalakban is!

A mulasztott napok száma	0	1	5	8	9	10	15
A tanulók száma	2	3	7	6	4	13	1

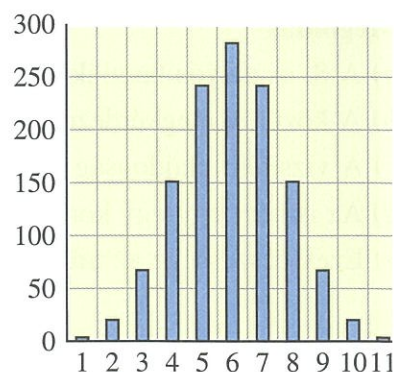
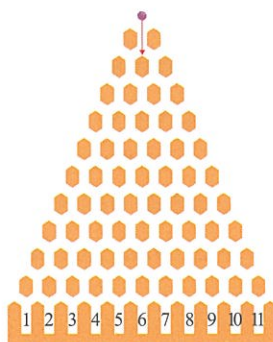
6. Válassz egyet a szabályos dobótestek közül! Dobd fel 40-szer! Készítsd el az egyes számok dobásának relatívgyakoriság-grafikonját!



7. Figyeld meg egy héten keresztül, hogy a nap legforgalmasabb időszakában, negyedóra alatt hány ember halad el az ablakotok vagy a kaputok előtt! Megfigyeléseid eredményét foglald táblázatba!

8. Magyarázd meg, hogy a Galton-deszka kísérletnél

- a) miért érkeznek a golyók nagyobb eséllyel a középső folyosókba, mint a szélsőkbe,
b) milyen kapcsolat van a két ábra között!



Diagramok

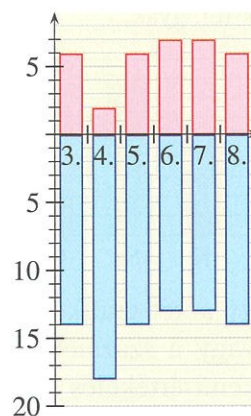
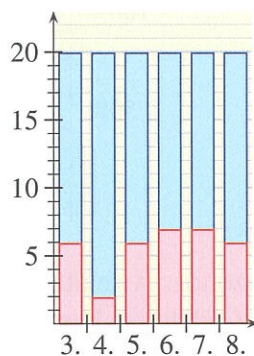
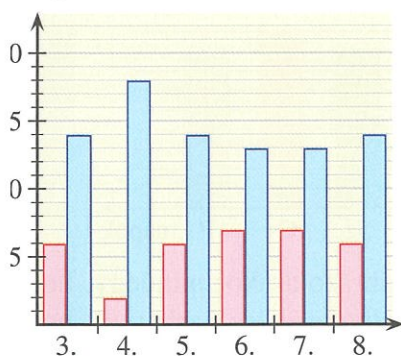
A statisztikai adatok szemléltetésére az oszlopdiagramnak sokféle változatát használják.

1. példa

A táblázatban a 2002. évi Zrínyi Ilona-matematikaverseny országos döntőjében az első 20 helyen végzett tanulók lakóhely szerinti megoszlását olvashatjuk évfolyamonként. Az adatok alapján készítsünk különböző oszlopdiagramokat!

Tanulók	3. évfolyam	4. évfolyam	5. évfolyam	6. évfolyam	7. évfolyam	8. évfolyam
Budapesti	6	2	6	7	7	6
Vidéki	14	18	14	13	13	14

Megoldás



A grafikonokon a téglalapok egy-egy oldalhossza egyenlő, ezért a másik oldaluk hosszának aránya és így a területük aránya is megegyezik a táblázatban adott megfelelő értékek arányával.

Az adatsokaság jellegétől függ, hogy mikor melyik fajta oszlopdiagram alkalmas az adatok szemléltetésére. Ha kétféle adat tartozik egy-egy helyhez, akkor bármelyik típus használható. Ha kettőnél több olyan adatunk van, ami ugyanahhoz a helyhez tartozik, akkor az első, illetve a második javasolható. Ha egy helyhez sok adat tartozik, akkor az egymásra helyezett téglalapok áttekinthetetlenül magas új téglalapot hoznak létre, ezért ilyenkor kis szélességű, egymás mellé illesztett téglalapok alkalmasabbak az adatok ábrázolására.

2. példa

a) Jocó naponta 2 órát tölt kosárlabdaedzéssel. Edzője mindennap feljegyezi, hogy a lejátszott meccsek alatt a palánkra dobott labdák közül hány talált a kosárba – ezzel jellemzi Jocó heti teljesítményét. Készítsük el az adatok alapján a naponkénti találatok relatív gyakoriságának grafikonját!

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
Dobások száma	12	8	16	11	9
Találatok száma	5	4	13	10	7

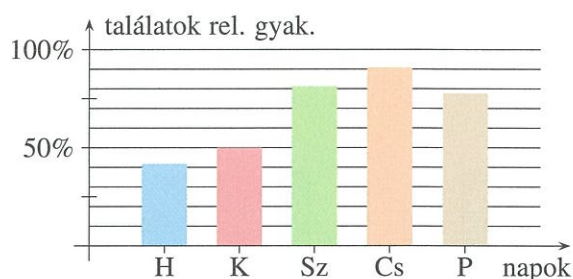
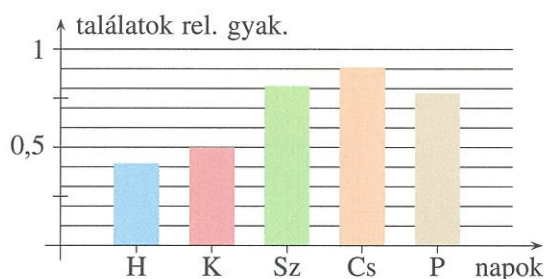
b) Az edző arra is kíváncsi, hogy milyen Jocó kosárdobásainak napok szerinti eloszlása. Ehhez a heti összes találat egy-egy napra eső részarányát kell kiszámítani. Adjuk meg ezeket az arányokat százalékalakban, és készítsünk az adatokból kördiagramot!

Megoldás

a)

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
Dobások száma	12	8	16	11	9
Találatok száma	5	4	13	10	7
A találatok relatív gyakorisága	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{7}{9}$
A találatok relatív gyakorisága %-ban	42%	50%	81%	91%	78%

Az $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{7}{9}$ számok a megfigyelés adatainak naponként kiszámított **relatív gyakoriság sorát** alkotják. A 42%, 50%, 81%, 91%, 78% arányszámok a sikeres dobások **százalékos eloszlását** adják hétfőtől péntekig.



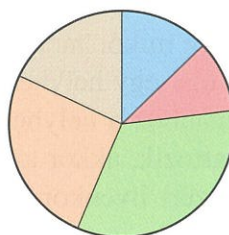
Láthatjuk, hogy a két grafikon majdnem azonos. A relatív gyakoriság ábrázolásakor mindegy, hogy az arányban vagy a százalékban megadott adatokat használjuk. A grafikonról leolvashatjuk, hogy Joco a naponkénti értékelés szerint csütörtökön volt a legeredményesebb.

b) A fenti táblázat adatai szerint Joco hétfőtől péntekig összesen 39-szer dobott kosarat.

A keresett arányok:

	H	K	Sz	Cs	P
Találatok száma	5	4	13	10	7
Rel. gyak.	$\frac{5}{39}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{13}{39}$	$\frac{10}{39}$	$\frac{7}{39}$
Rel. gyak. %-ban	13	10	33	26	18

A kördiagram:

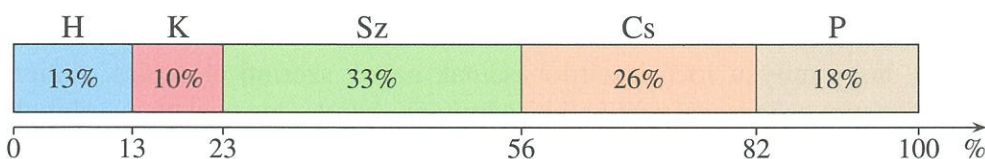


A kördiagram egyes részeinek középponti szögeit a 360° -os teljes szögnek a találatok száma szerinti arányos osztásával kapjuk.

Ezeket az adatokat egyszerűbb formában **szalagdiagram** segítségével is ábrázolhatjuk. A szalagdiagramot úgy készítjük el, hogy felveszünk egy adott hosszúságú téglalapot, melyet 100%-nak tekintünk, majd elkészítjük ennek a téglalapnak az adatokkal arányos felosztását úgy, hogy a „résztéglalapok” egyik oldala állandó, a másik pedig arányos a megfelelő adattal.

Így az egyes téglalapok területe arányos a megfelelő adattal. Ez a diagram hasonlít a kördiagramhoz hiszen azt is hasonlóan készítjük el, csak annál téglalap helyett kört osztunk fel az adatokkal arányos területű körképekre.

A szalagdiagram:



3. példa

Rendkívül szemléletes és „beszédese” az adatok ábrázolásánál alkalmazott **piktogram**. Ezt a formát főleg a napilapok, folyóiratok és egyes szakkönyvek használják. Az adatok értékét ebben az esetben a figurák vagy szimbólumok száma, illetve mérete szemlélteti.

- a) 2014-ben Magyarország élőfakészlete 369,6 millió m^3 volt. Ennek százalékos eloszlását olvashatjuk le a grafikonról. Adjuk meg, hogy közelítőleg hány m^3 volt a fenyőfaállomány ebben az évben!

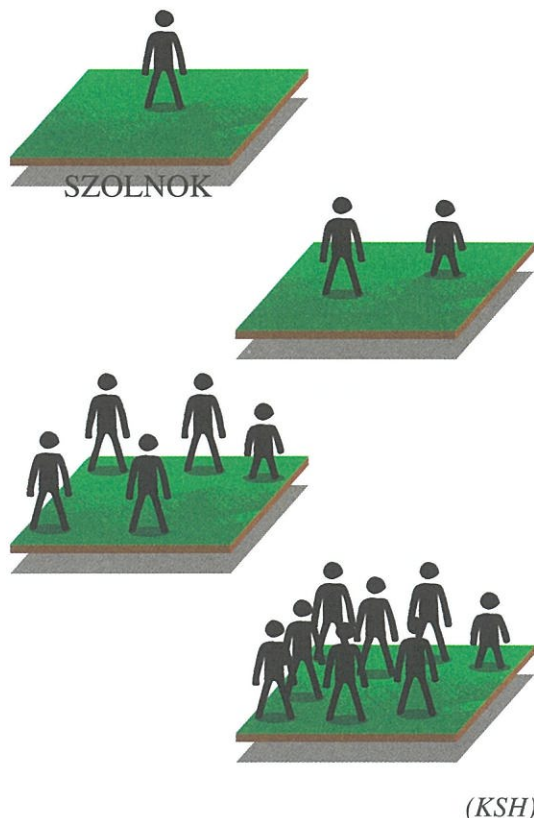


	Tölgy	Bükk	Akác	Cser	Fenyő	Nyár	Egyéb fák
%-os arány	23	11	14	13	15	12	12

- b) A táblázatban az egy főre jutó zöldterület nagyságát láthatjuk a felsorolt magyar városokban. Állapítsuk meg, hogy a diagram melyik városok adatát szemlélteti!

Magyar városok egy főre jutó zöldterülete

Sorrend	Város	Zöldterület ($\text{m}^2/\text{fő}$)
1.	Szolnok	118
2.	Pécs	78
3.	Zalaegerszeg	73
4.	Győr	63
5.	Nyíregyháza	51
6.	Székesfehérvár	44
7.	Tatabánya	43
8.	Miskolc	41
9.	Eger	35
10.	Békéscsaba	33
11.	Szeged	25
12.	Kaposvár	24
13.	Salgótarján	22
14.	Szekszárd	21
15.	Szombathely	19
16.	Debrecen	18
17.	Kecskemét	15
18.	Veszprém	14



Megoldás

a) A fenyőállomány a teljes élőfakészlet 15%-a. $369,6 \text{ millió m}^3 \cdot 0,15 \approx 55 \text{ millió m}^3$.

b) Szolnokon az egy főre jutó zöldterület 118 m^2 .

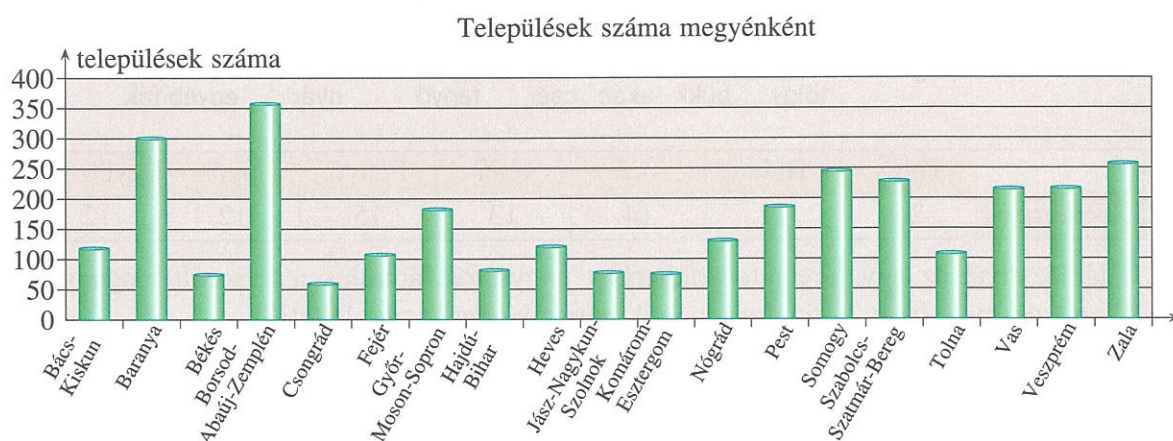
A második diagramon kb. 1,8-szer annyi embernek jut ugyanakkora zöldterület, mint Szolnokon. Ez azt jelenti, hogy az egy főre jutó zöldterület $118 \text{ m}^2 : 1,8 \approx 65 \text{ m}^2$. Ez Győr város adatát közelíti meg. A harmadikon egy főre kb. 4,7-szer annyi embernek jut ugyanakkora zöldterület, mint Szolnokon. $118 \text{ m}^2 : 4,7 \approx 25 \text{ m}^2$. Ez Szeged. A negyediken 7,8-szer annyi embernek jut ugyanakkora zöldterület, mint Szolnokon. $118 \text{ m}^2 : 7,8 \approx 15 \text{ m}^2$, akkor ez Kecskemét.



Keress érdekes diagramokat a KSH honlapján, az interaktív diagramok cím alatt!

Feladatok

1. a) Olvasd le a grafikonról, hogy az egyes megyékben hány település található!



(Dr. Tokodiné Újházi Andrea: Földrajz a számok tükrében. Tóth Könyvkiadó,

- b) Foglald táblázatba a grafikonról leolvasott adatokat!
 c) Hány megyében van 100-nál több település?
 d) Sorold fel azokat a megyéket, amelyekben legfeljebb 100 település van!

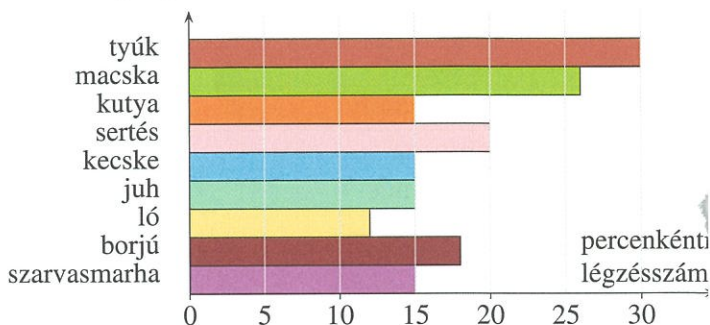
2. A táblázat adatai alapján készíts hármass oszlopdiagramot a tanulókról és szüleikről!

Testmagasság [cm]	1	2	3	4	5	6	7	8	9
14 éves gyermek	165	155	186	160	164	172	165	172	165
Apa	170	167	187	185	186	181	175	189	173
Anya	160	158	171	162	176	171	160	173	161

A grafikon elkészítésénél használhatod az Excel programot.

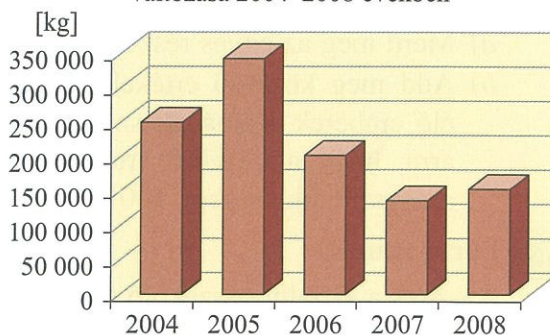
3. A háziállatok percenkénti átlagos légzésszámát olvashatjuk le az oszlopdiagramról.

Foglald táblázatba a következő adatokat: hányat lélegzik 12 másodperc alatt a tyúk, a sertés, a kutya, a kecske, a juh és a szarvasmarha!



4. a) Olvasd le a grafikonról egész számra kerekítve, hogy évenként hány tonna veszélyes hulladék keletkezett! Az adatok felhasználásával készíts táblázatot!
- b) Hány tonna hulladék keletkezett összesen az öt év alatt? (A táblázatod adataival számolj!)
- c) Add meg a hulladék mennyiségének évenkénti százalékos eloszlását ebben az öt esztendőben!
- d) A százalékarányok segítségével készíts az adatokból szalagdiagramot!

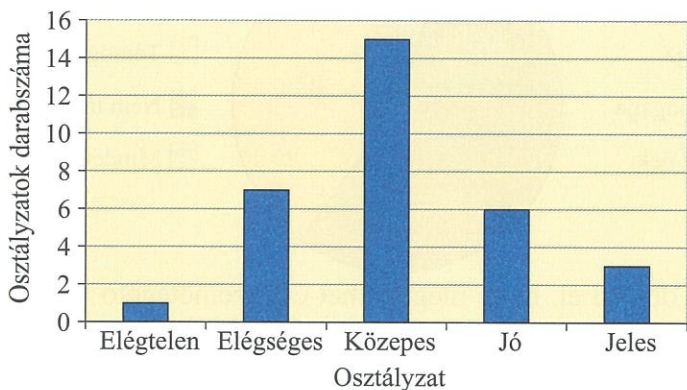
Keletkezett veszélyes hulladékok mennyiségének változása 2004–2008 években



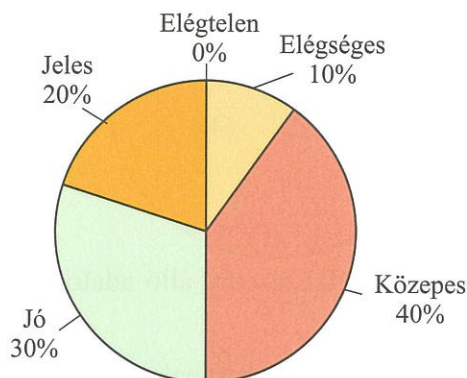
(KSH)

5. A diákönkormányzat tanulmányi versenyt hirdetett az osztályok számára matematikából. A versenyen való részvételhez minden osztálynak le kellett adnia az év végi matematikaosztályzatokat. Az *A* osztály oszlopdiagramon, a *B* osztály kördiagramon adta le az eredményeket.

A osztály eredményei



B osztály eredményei (30 tanuló)

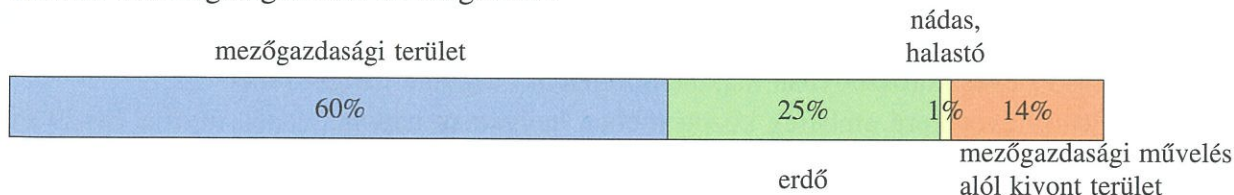


A diagramok alapján dönts el, melyik igaz, illetve melyik hamis a következő állítások közül!

- A) Mindkét osztályban közepes osztályzatot értek el a legtöbben.
- B) Az *A* osztályban kevesebben értek el jeles eredményt, mint a *B*-ben.
- C) A két osztályban ugyanannyi az osztálylétszám.
- D) A két osztályban összesen 17 tanuló kapott elégséges osztályzatot.

(Országos kompetenciamérés, 2010)

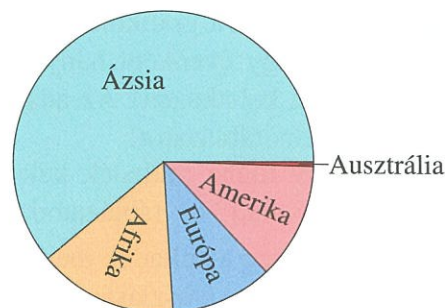
6. A magyarországi a földterület művelési ágak szerinti megoszlását mutatja a szalagdiagram. Készíts a szalagdiagramból kördiagramot!



7. A kördiagram a Föld lakosságának százalékos eloszlása alapján készült.

a) Mérd meg az egyes részek középponti szögét!

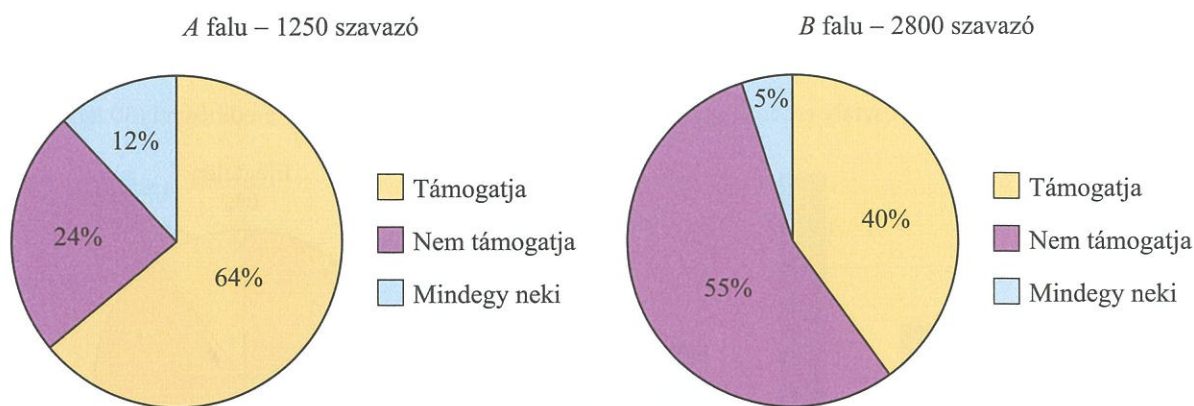
b) Add meg közelítő értékekkel az egyes földrészeken élő emberek számának százalékos eloszlását! Figyelj arra, hogy a közelítő értékek ellenére a százalékos arányszámok összege 100 legyen!



8. Páros munka

Az A és a B falut összekötő út mellé szeméttégetőt szeretnének telepíteni. A szeméttégető felépítéséhez azonban a két falu beleegyezésére van szükség, ezért szavazást írtak ki.

Akkor építik meg a szeméttégetőt, ha azt a két falu szavazóinak együttesen több mint 50%-a támogatja. A következő diagramok mutatják a szavazás végeredményét:



A rendelkezésedre álló adatok alapján dönts el, hogy megépülhet-e a szeméttégető vagy sem! (Országos kompetenciamérés, 2012)

9. Csendesvár városának lakóit zenehallgatási szokásairól kérdezték a statisztikusok. A legfiatalabb megkérdezett 14 éves volt. A grafikonon ábrázolt szalagdiagramok a válaszok korosztályonkénti százalékos aránya alapján készültek.

Az alábbi állítások közül melyek biztosan igazak, melyek lehetséges, hogy igazak, és melyek biztosan hamisak?

A) A 14–17 éves korosztályban majdnem mindenki naponta hallgat zenét.

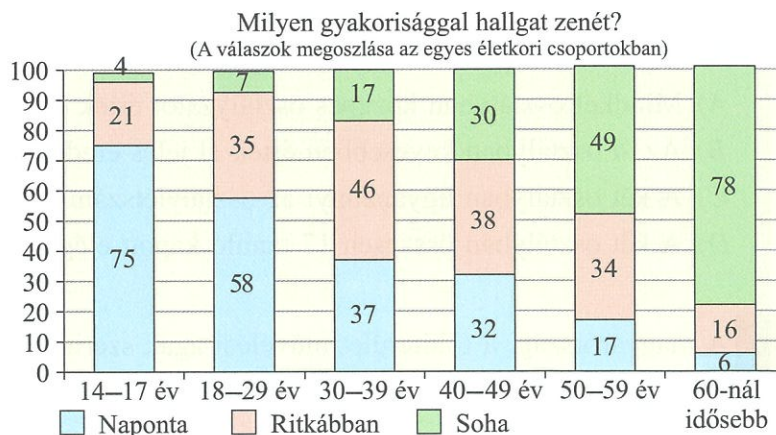
B) A 30–39 éves korú emberek között többen hallgatnak naponta zenét, mint a 18–29 év közöttiek.

C) Minden korcsoportban van olyan ember, aki soha nem hallgat zenét.

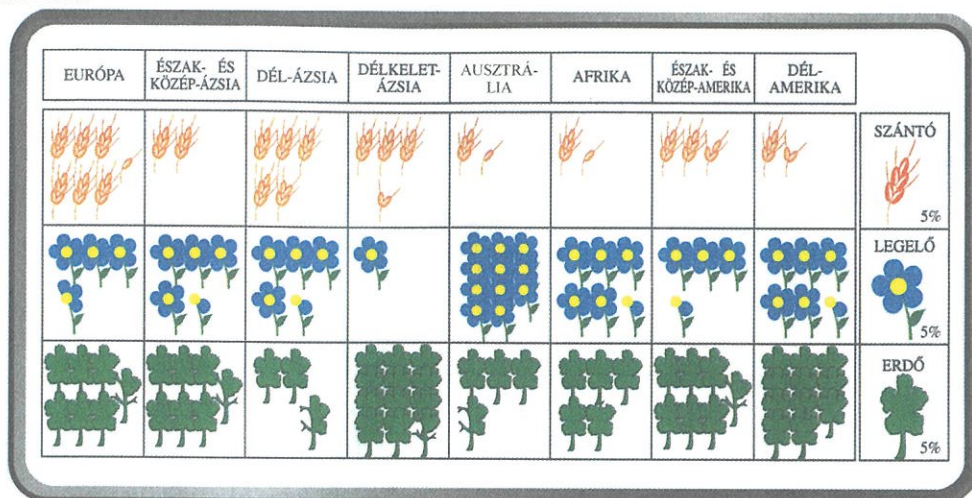
D) Az 50–59 éves emberek majdnem fele sohasem hallgat zenét.

E) A 40–49 éves emberek harmada naponta hallgat zenét.

F) Többen vannak azok a 60 évesnél idősebb emberek, akik sohasem hallgatnak zenét, mint azok a legfiatalabb megkérdezett városlakók, akik naponta hallgatnak zenét.



10. Csoportmunka



(Dr. Nádai Magda: Földanyai gondok. Móra, 1995)

- A) A diagram alapján válaszoljatok a kérdésekre!
- Délkelet-Ázsia területének hány százaléka szántó?
 - Afrika területének hány százaléka legelő?
 - Ausztrália területének hány százaléka erdő?
 - Dél-Amerikában vagy Afrikában nagyobb a legelők összterülete?
 - Európában a szántók vagy az erdők összterülete kisebb?
- B) A diagram alapján a csoport minden tagja fogalmazzon meg egy-egy állítást, a többiek dönt-
sék el az állítások igaz vagy hamis voltát!

Középtértékek

1. példa

A Krumplihámozó Kft. hét dolgozójának havi fizetése:

Ügyvezető igazgató:	2 000 000 Ft
Ügyvezetőigazgató-helyettes:	600 000 Ft
Könyvelő:	320 000 Ft
Menedzser:	250 000 Ft
Oktató:	97 000 Ft
Krumplihámozó szakmunkás:	75 000 Ft
Takarító:	43 000 Ft

Jellemezzük a hét különböző beosztású dolgozó fizetéseiből álló halmazt!

Megoldás

A cégnél dolgozó emberek **átlagfizetése**:

$$(2\,000\,000 + 600\,000 + 320\,000 + 250\,000 + 97\,000 + 75\,000 + 43\,000) \text{ Ft} : 7 \approx 483\,571 \text{ Ft}$$

Az ügyvezető igazgató kiugró fizetése miatt az átlagfizetés nem jól jellemzi ezt az adatsokasá-
got, hiszen a kft. beosztottjainak fizetése átlag alatti, csak az igazgató és a helyettese keres az
átlagnál többet. Gondoljunk arra, hogy ha valaki egy hirdetésben azt olvassa, hogy ennél a cég-

nél milyen magas az átlagfizetés, azonnal el kíván szegődni ide, például oktatónak, aztán kiderül, hogy nem jól döntött. Az átlag ebben az esetben félrevezet. Meg kell adni egyéb statisztikai mutatót is. Ilyen például a **minta terjedelme**, ami a legnagyobb és a legkisebb adat különbsége. Itt $2\,000\,000\text{ Ft} - 43\,000\text{ Ft} = 1\,957\,000\text{ Ft}$. További információt ad a sokaságról a benne szereplő bérek nagyság szerinti sorrendjében a **középső**. Jelen esetben ez **250 000 Ft**. Ez alatt és e fölött is három-három érték van.

2. példa

Egy matematikadolgozat osztályzatait foglalja össze a táblázat. Az értékelést többféleképpen is elmondjuk. Milyen statisztikai jellemzőkre támaszkodnak az egyes szereplők?

Ötös	Négyes	Hármas	Kettes	Egyes
3	6	10	8	2

A tanárnő beszámolója:

„Az osztályzatok átlaga 3 egész. Sajnos sokan gyengén produkáltak. A 29 tanulóból csak 9-en írtak számomra elfogadható dolgot.”

Lili beszámolója otthon, aki 3-as dolgot írt:

„Nekem jól sikerült a dolim, hisz az osztályból legtöbben 3-ast írtak, és én köztük vagyok.”

Béci beszámolója otthon, aki szintén 3-ast írt:

„Szerintem az én dolim jó lett, mert többen írtak nálam rosszabbat, mint jobbat.”

Megoldás

– A tanárnő az adatsokaság **számtani közepét**, vagyis az osztályzatok átlagát adta meg a tanulóknak. A 3-as átlag önmagában semmit nem árul el a különböző osztályzatok számáról. Mivel ő a többi dolgozatjegyet is ismerte, beszámolója helyes volt.

– Lili a számára legkedvezőbb jellemzést választotta. Az osztályzatok között a leggyakoribb a 3-as, és ő valóban ebben a csoportban van. Lehet, hogy anyukának a 3-as dolgozat nem jó, de Lili statisztikailag helyesen, egy másik középértékkel: az adatok **móduszával** jellemezte dolgozatának eredményét.

– Béci, Lilihez hasonlóan, magát mentegetve az adatok **mediánjával** magyarázta otthon 3-as osztályzatát. Ha nála többen írtak rosszabbat, mint jobbat, akkor ő jó helyen áll a sorban. Béci a 29 darab osztályzatot nagyság szerint sorba állította, és ennek a sornak a középső eleme 3-as. Továbbá az is igaz, hogy tízen írtak nála rosszabbat, és csak kilencen jobbat.

Az adatok összegének és az adatok számának a hányadosa az adatsokaság **átlaga** (számtani közepe): $s = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Az adatsokaságban leggyakrabban előforduló elem a sokaság **módusza**. Ha több ilyen van, akkor azok mindegyike módusz. A móduszt m -mel jelöljük.

Egy adatsokaság elemeit (ha ez lehetséges) nagyság szerint sorba rendezzük. Ha az páratlan számú elemből áll, akkor a sorban a középső elem a sokaság **mediánja**. Ha páros számú elemből áll, akkor a sorban a két középső elem számtani közepe a sokaság **mediánja**. A mediánt M -mel jelöljük. A medián a sokaságot két azonos elemszámú részre osztja.

Az adatsokaságok ismérvei **menyiségi** vagy **minőségi** jellegűek. A mennyiségi ismérvek adatai általában számsokaságot alkotnak. Az ilyen adatsokaságnak van átlaga, módusza és mediánja. A minőséget jellemző adatok rendszerint valamilyen tulajdonságot hordoznak, például: fajta, szín, ezér az ilyen adatsokaságnak csak módusza van, átlaga, mediánja nincs.

A medián a szomszédos adatok távolságát, illetve különbségét figyelmen kívül hagyja. Ezért olyan adatok esetén is alkalmazható, ahol nem mérhető az egyes adatok közötti távolság. Ilyen például a különböző sportversenyek eredménylistája, az egyes árucikkek minőség szerinti osztályozása vagy az iskolában használt érdemjegyek sorozata.

3. példa

A 8. b osztályba járó 26 tanuló cipőinek méretei:

36, 36, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 39, 39, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 43, 43

Adjuk meg az adatok számtani közepét, móduszát és mediánját!

Megoldás

Az adatok átlaga: $s \approx 39,27$ Ez az átlagos lábméret.
 módusza: $m = 38$ Ez fordul elő a legtöbbször (6-szor).
 mediánja: $M = 39$ A 13. és a 14. elem is 39, és azok számtani közepe 39.

Az adatsokaságok jellemzésekor feltétlenül szükség van a középértékekre. Különösen akkor, ha nagyszámú, esetenként több millió adat gyakran áttekinthetetlen listáját kell összehasonlítani más, ugyanilyen méretű listával.

A középértékek meghatározásánál használhatjuk az Excel programot is.

Feladatok

1. Határozd meg az 1, 3, 3, 3, 3, 4, 7, 8, 12, 12, 15, 19, 20 adatsokaság számtani közepét, móduszát és mediánját!

2. Egy nyolcadikos tanuló tankönyveinek oldalszámai a táblázatban olvashatók.

Számítsd ki, hogy összesen hány oldalnyi tananyagot kellene egy év alatt egy nyolcadikosnak megtanulni! Mennyi a könyvek átlagos oldalszáma? Hogyan alakul ez az átlag abban az iskolában, ahol nem tanulnak nyolcadikban számítástechnikát?

Magyar irodalom	Magyar nyelvtan	Történelem	Angol	Matematika	Fizika	Kémia	Biológia	Földrajz	Ének	Számítástechnika
345	152	230	144	219	151	136	173	193	126	70

3. A matematikatanár megbetegedett, ezért a kijavított dolgozatokat nem tudta kiosztani. Telefonon lediktálta a táblázatban olvasható adatokat. A tanulóknak meg kell határozni a dolgozat osztályzatainak átlagát, móduszát és mediánját.

Ötös	Négyes	Hármas	Kettes	Egyes
4	7	6	5	1

Add meg ezeket a középértékeket! Számítsd ki a különböző osztályzatok relatív gyakoriságát! Készítsd el a relatív gyakoriságok grafikonját!

4. Laci így számolt be egy másik osztályba járó barátjának történelemdolgozata értékeléséről. „A 21 fős csoportból ugyanannyian írtak nálam rosszabb dolgozatot, mint ahányan jobbat.” Lehet-e Laci dolgozata 5-ös, 4-es, 3-as, 2-es vagy 1-es?

5. Készíts olyan 10 elemből álló adatsort, amelynek

- a) nincs számtani közepe,
- b) számtani közepe nincs, de módusza van,
- c) számtani közepe 4, módusza 5,
- d) számtani közepe is, módusza is 6!

6. Készíts olyan 15 elemből álló adatsort, amelynek
- átlaga, módusza és mediánja egyaránt 7,
 - mediánja és számtani közepe egyenlő,
 - módusza van, de mediánja nincs,
 - három különböző módusza van!
7. Az újkori nyári olimpiai játékokon a magyar versenyzők által megszerzett érmek számát foglalja össze a táblázat 1896 és 1996 között, az 1920-as és az 1984-es év kihagyásával. Határozd meg az érmek számából álló adatsokaság átlagát, móduszát és mediánját! Vajon miért több az érmek száma a táblázat második részében?

Év	Hely	Érmek száma
1896	Athén	5
1900	Párizs	6
1904	St. Louis	4
1908	London	8
1912	Stockholm	8
1920	Antwerpen	nem vettünk részt
1924	Párizs	10
1928	Amszterdam	10
1932	Los Angeles	16
1936	Berlin	16
1948	London	28

Év	Hely	Érmek száma
1952	Helsinki	42
1956	Melbourne	26
1960	Róma	21
1964	Tokió	22
1968	Mexikó	32
1972	München	35
1976	Montreal	22
1980	Moszkva	32
1984	Los Angeles	nem vettünk részt
1988	Szöul	23
1992	Barcelona	30
1996	Atlanta	21

8. Táborozás előtt az osztályfőnök megkéri a 26 táborozót, hogy sorolják fel, milyen ételeket esznek szívesen. Ennek alapján állítja össze az étrendet. A begyűjtött adatokat figyelembe véve mi lesz az ebéd a hatnapos táborozás egyes napjain, ha mindennap mást rendel az osztályfőnök?

Ételek	Rántott pulyka- mell	Rakott burgo- nya	Milánói makaró- ni	Sajt- felfújt	Rakott kel- káposzta	Pala- csinta	Csirke- pörkölt	Spenót	Borsó- főzelék	Rizses hús
Gyakoriság	10	4	8	8	2	18	12	0	6	5

9. Jenci márciusig 6 osztályzatot szerzett matematikából. Ekkor érdemjegyeinek átlaga 3,5 volt. Év végéig még egy dolgozatot írnak. Jenci szeretne év végén 4-est kapni, aminek az a feltétele, hogy a 7 osztályzat átlaga elérje a 3,6-et. Hányasra kell megírnia a hátralévő dolgozatot, hogy megkapja a 4-est év végén? Pótdolgozatra és javítófelelésre nincs lehetőség.
10. Az Erős Leszel SE kosárlabda-szakosztályába járó 10 tag életkorának átlaga 28 év. Egy játékos távozott közülük, így az ott maradt 9 játékos átlagéletkora 29 év lett. Hány éves volt, aki elment a szakosztályból?

Valószínűség-számítás

A relatív gyakoriság és a valószínűség

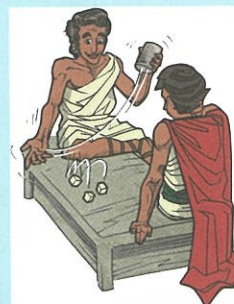
Az emberiség története során a hazardjátékok nyerési esélyének, a fogadások kimenetelének találgatása minden embert élénken foglalkoztatott (a mai napig is foglalkoztat). A kockajátékok szenvedélyét már az ókori római birodalomban is ismerték (pl. Claudius, Augustus, Nero, Caligula, Commodus, Domitianus császárok a kockajáték rabjai voltak).

Sokáig úgy képzelték, hogy egy-egy ilyen szerencsejátékban mindent a véletlenre kell bízni. Először az 1477-ben kiadott „Dante-kommentár” említi meg a három kocka feldobása során előforduló pontösszegek matematikai leírását.

Később, az 1600-as években de Méré lovag a következő kérdéssel fordult Pascalhoz, a híres matematikushoz: ha egy kockával négyszer dobunk, annak nagyobb az esélye, hogy egyszer sem dobunk hatost, vagy annak, hogy legalább egyszer azt dobunk?

Pascal ennek a problémának a helyes megfejtésén kívül matematikus barátjával, Fermat-val még számtalan valószínűség-számítási tételt állított fel.

A matematikatörténet a valószínűség-számítás megszületését Pascalnak a Francia Akadémia számára 1654-ben írt levelétől számítja.



1. példa

Egy 10 Ft-os érmét 1000-szer feldobtunk, és feljegyeztük a táblázatban feltüntetett dobásszámok esetén az addig előfordult fejek számát. Állapítsuk meg, hogy az addigi dobások számának hányadrésze fej, azaz adjuk meg a fejek és a dobások számának arányát!

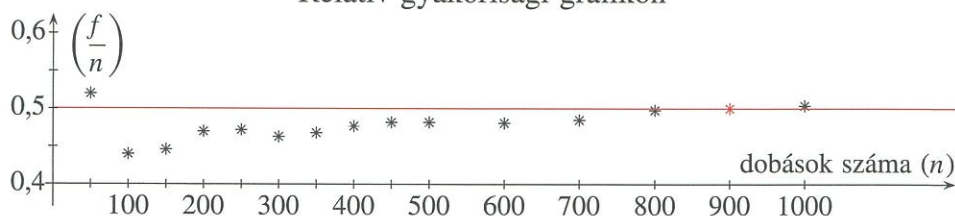
Dobások száma (n)	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	600	700	800	900	1000
Fejek száma (f)	26	44	67	94	118	139	164	191	217	241	289	340	399	450	507
f és n aránya ($\frac{f}{n}$)	$\frac{26}{50}$	$\frac{44}{100}$	$\frac{67}{150}$	$\frac{94}{200}$	$\frac{118}{250}$	$\frac{139}{300}$	$\frac{164}{350}$	$\frac{191}{400}$	$\frac{217}{450}$	$\frac{241}{500}$	$\frac{289}{600}$	$\frac{340}{700}$	$\frac{399}{800}$	$\frac{450}{900}$	$\frac{507}{1000}$
f és n aránya tizedes törtben	0,52	0,44	0,447	0,47	0,472	0,463	0,469	0,478	0,482	0,482	0,482	0,486	0,499	0,5	0,507

Megoldás

Az érme feldobását a valószínűség-számításban **kísérletnek** nevezzük, a kísérlet **kimenetele** pedig ebben az esetben kétféle lehet: fej, illetve írás. A fej dobása legyen az **A esemény**, az írásé a **B esemény**. A táblázat második sorában az **A esemény** előfordulásának **gyakorisága** áll, a harmadik és a negyedik sorában kapott arányszámok pedig az **A esemény relatív** (viszonylagos) **gyakoriságát** fejezik ki. Ez a hányados – melyet megadhatunk százalék alakban is – megmutatja, hogy az addig előfordult dobások mekkora része volt fej.

Hasonló módon határozhatjuk meg a B eseménynek, az írások előfordulásának gyakoriságát, illetve relatív gyakoriságát. A grafikont a kísérletek kimeneteleit tartalmazó táblázat alapján készítettük.

Relatív gyakorisági grafikon



A grafikonon megfigyelhetjük, hogy a relatív gyakoriság értéke egy bizonyos állandó körül ingadozik. A pénzérme dobásakor a két, **egyenlő esélyű** kimenetel miatt ez az állandó érték éppen $\frac{1}{2}$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy

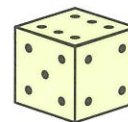
a fej dobásának valószínűsége $\frac{1}{2}$, vagy
az írás dobásának valószínűsége $\frac{1}{2}$.

Az a p szám, amely körül egy esemény relatív gyakorisága ingadozik, az esemény **valószínűsége**. Az A esemény bekövetkezésének valószínűségét $P(A) = p$ ($0 \leq p \leq 1$) való szám jelöli. (P betű a latin probabilis, 'valószínű' szó kezdőbetűje.)

2. példa



Mindannyiunk számára ismert, hogy ha egy szabályos dobókockával végzünk dobássorozatot, a kísérlet kimenetele az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok valamelyike lehet. Ezek az események **egyenlő valószínűséggel** következnek be, tehát mindegyik esemény valószínűsége $p = \frac{1}{6}$.



Végezzünk most kísérletsorozatot egy négyzet alapú egyenes hasábbal, amelynek magassága feleakkora, mint az alapéle. A dobótest hat lapjára ugyanolyan rendben vannak a pöttyök elhelyezve, mint a szabályos dobókockán. Határozzuk meg az egyes kimenetek relatív gyakoriságát!



Megoldás

A négyzetes oszlop oldallapjai nem egyenlő méretűek, ezért azt sejtjük, hogy a kísérlet 1, 2, 3, 4, 5, 6 kimenetelei nem egyenlő eséllyel következnek be.

Egy kísérletsorozat eredményét táblázatba foglaltuk:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
6	1	5	4	1	6	5	1	6	1	5	1	4	6	1	6	2	6	4	6	3	6	6	6	1	3	4	1	2	1

Az egyes kimenetek relatív gyakorisága:

Dobott szám	1	2	3	4	5	6
Relatív gyakoriság	$\frac{9}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{10}{30}$

Sejtésünket megerősítette a kísérlet eredménye. Már 30 dobás esetén is jól látható, hogy ebben a kísérletben az egyes események bekövetkezése **nem egyenlően valószínű**.

Egy kísérlet kimeneteleit **eseményeknek** nevezzük. A kísérlet során bekövetkező kimenetek halmaza az **összes esemény**, a megfigyelt kimenetek halmaza pedig a **kedvező esemény**. Ha az események bekövetkezése **egyenlően valószínű**, akkor a megfigyelt A esemény valószínűségét a $P(A) = \frac{K}{N} (= p)$ hányados adja, ahol K a kedvező esetek, N pedig az összes eset száma.

Feladatok

1. Csoportfeladat

Dobjatok fel egy szabályos dobókockát 100-szor! A dobások eredményeit foglaljátok táblázatba, majd egyesítsétek a csoporttagok dobási eredményeit és töltsétek ki a füzetekben az alábbi táblázatot!

	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság						
Relatív gyakoriság						
Eltérés az $\frac{1}{6} \approx 0,17$ értéktől						

2. Egy kocka lapjait így festjük be: 1 lap sárga, 1 lap zöld, 1 lap piros, 1 lap barna és 2 lap kék. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy dobás után

- a) kék, b) sárga, c) zöld színű lap lesz fölül?

3. Végezd el a következő kísérletet! Egy dobozban 3 piros és 2 kék szívószál van. Ezekből húzz véletlenszerűen egyet, majd írd le, milyen színű a kihúzott szívószál. A húzást ismételd meg 20-szor úgy, hogy a szívószálát a kihúzás után mindig visszateszed a dobozba! A kísérlet elvégzése után számítsd ki

- a) a piros húzásának gyakoriságát és relatív gyakoriságát,
b) a kék húzásának gyakoriságát és relatív gyakoriságát!

4. Játék 3 fős csoportoknak

A játék előtt a dobások lehetséges kimenetelei közül az alábbi hármat külön-külön cédulára fölírjuk. Minden játékos húz egy cédulát.

I. A dobott szám prímszám.

II. A dobott szám 2-vel osztható.

III. A dobott szám 2 pozitív hatványa.



A játékosok szabályos dobókockával dobnak egyet-egyet, körbe haladva.

Az a játékos kap pontot, aki a céduláján lévő számnak megfelelőt dobott. 10 kör után nézzétek meg az eredményeket! A játék több fordulóban lejátszható. A játék után döntsétek el, hogy igazak-e az állítások!

- A) Az I. és II. cédulákon szereplő kimenetek egyenlően valószínűek.
B) A III. cédulán szereplő kimenetelnek nagyobb a valószínűsége, mint a II-esen lévőnek.
C) Mindhárom játékos számára igazságos a játék.

5. Egy dobozban három betűkártyát helyeztünk el, egyiken A, másikon K, harmadikon R betű van. Egymás után kihúzzuk a kártyákat, és a kihúzás sorrendjében az asztalra tesszük. Mekkora annak a valószínűsége, hogy értelmes szót kapunk?

6. Elhelyezünk a egy dobozban 20 számkártyát, amelyekre a pozitív egész számok vannak felírva 1–20-ig. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az általunk kihúzott egy számkártyán

a) 3-mal,

b) 5-tel,

c) 4-gyel osztható szám lesz?

7. Anyuka ebédre 20 szilvás és 10 lekváros gombócot készített. A gombócok külseje teljesen egyforma. Béci jobban szereti a szilvás gombócot, mint a lekvárost.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első gombóc, amit választ, éppen szilvás lesz?

b) Bécinek sikerült elsőre szilvás gombócot választani. Mekkora az esélye, hogy másodszorra lekvárost vesz ki?

8. Egy pénzérmével, egy tetraéderrel és egy kockával végeztünk dobássorozatokot. A pénzérme egyik oldala fej (F), a másik oldala írás (I), a tetraéder egy lapjára fej (F), három lapjára írás (I), a kocka egy lapjára fej (F), öt lapjára pedig írás (I) van írva. Mit gondolsz, hogy a három dobássorozat közül melyik tartozik az érméhez, melyik a tetraéderhez, és melyik a kockához?

A) F F I I I F F F I I F I I I F F I I I F F F I I I I F I I

B) F F I I F F F I I F I I I I F F F F I F F I I F F I I I F F

C) F F I I I I I I F I I F F F I I I I F I F I I I I I I F I I

Mennyi az írás relatív gyakorisága az A), a B) és a C) dobássorozatban?

9. Páros feladat

Végezzétek el a következő kísérletet! Tegyetek egy dobozba 5 sárga és 3 zöld golyót. Ezekből húzzatok egymás után két golyót, és a két kihúzott golyót tegyétek vissza a dobozba! 20 húzás eredményét jegyezzétek le, és minden húzás után számítsátok ki a felsorolt események relatív gyakoriságát!

a) Sárga–sárga húzás,

b) sárga–zöld húzás ebben a sorrendben,

c) sárga–zöld húzás tetszőleges sorrendben.

10. A) Egy kocka két lapjára 1-est, három lapjára 2-est, egy lapjára pedig 3-ast írunk.

Milyen eséllyel dobhatunk ezzel a kockával

a) 1-est,

b) 2-est,

c) 2-est vagy 3-ast,

d) nem 1-est és nem 2-est?

B) Hat színes lapunk van, két piros, három sárga és egy kék. A lapokat összekeverjük, és véletlenszerűen húzunk közülük egyet.

Milyen eséllyel húzhatunk

e) piros, f) sárga, g) sárga vagy kék, h) nem piros és nem sárga színű lapot?

Milyen kapcsolat van az A) és a B) feladat között?

Elemi és összetett események (Kiegészítő tananyag)

1. példa

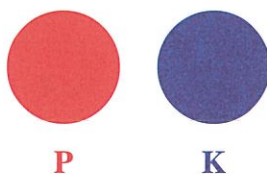
A) Feldobunk egy olyan korongot, amelynek egyik oldala piros, másik pedig kék. A leesett korong látható oldalát figyeljük.

B) Két különböző méretű piros-kék korongunk van. Ezeket egyszerre feldobjuk, majd a leesett korongok látható oldalát figyeljük.

Határozzuk meg a lehetséges kimeneteket!

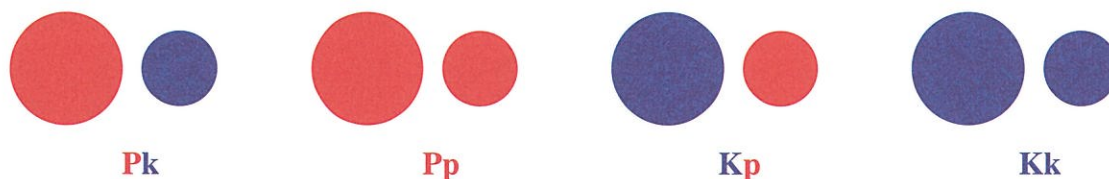
Megoldás

A) A kimenetel kétféle lehet:



Ezek a kimenetel **elemi események**.

B) Négyféle kimenetel lehet:



Két korong esetén négyféle elemi esemény van.

Az összes elemi esemény alkotja az eseményteret. Ha az eseménytérben minden elemi esemény bekövetkezése egyenlően valószínű, akkor az egyes események bekövetkezésének valószínűségét a K/N hányadossal határozhatjuk meg. K a kedvező elemi események száma, N az összes elemi esemény száma.

Példánkban:

$$P(\mathbf{Pk}) = \frac{1}{4}; \quad P(\mathbf{Pp}) = \frac{1}{4}; \quad P(\mathbf{Kp}) = \frac{1}{4}; \quad P(\mathbf{Kk}) = \frac{1}{4}.$$

2. példa

Két különböző színű szabályos dobókockával dobunk. A dobott pontok összegét figyeljük.



Mekkora a valószínűsége annak, hogy

A) két egyforma számot dobunk,

B) a dobott két szám összege 5,

C) a dobott két szám összege 12,

D) a dobott számok összege 14,

E) a dobott számok összege legalább 2 és legfeljebb 12?

Megoldás

Két kocka esetén az eseménytér elemi eseményeit ez a 6×6 -os táblázat tartalmazza:

	1	2	3	4	5	6
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
6	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)

Az alábbi valószínűségeket a táblázatban szereplő számpárok segítségével határozzuk meg.

Az összes elemi események száma 36.

	A kedvező elemi események	A valószínűség
A) Két egyforma számot dobunk	(1; 1) (2; 2) (3; 3) (4; 4) (5; 5) (6; 6)	$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
B) A dobott két szám összege 5	(1; 4) (2; 3) (3; 2) (4; 1)	$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
C) A dobott számok összege 12	(6; 6)	$P(C) = \frac{1}{36}$
D) A dobott számok összege 14	Ilyen eset nem fordulhat elő.	$P(D) = 0$
E) A dobott számok összege legalább 2 és legfeljebb 12	Ez bármelyik dobás során bekövetkezik. Az elemi események száma egyenlő az összes események számával.	$P(E) = \frac{36}{36} = 1$

A D eseményt **lehetetlen eseménynek**, az E eseményt pedig **biztos eseménynek** nevezzük.

3. példa

Kovács apuka három gyermeke, Ákos, Dezső és Jutka közül szeretné valamelyik kettőt elküldeni vásárolni. Mivel a gyerekek vonakodnak, apuka mind a három nevet felírja egy-egy cédulára, és kihúz közülük két nevet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy

- két fiú,
- egy fiú és egy lány,
- Jutka és Ákos megy vásárolni?

Megoldás

A feladat a) részének egy *hibás* megoldása: három gyerek között két fiú van. Ezek kiválasztásának valószínűsége $\frac{2}{3}$.

Helyes megoldás:

Először meghatározzuk az elemi eseményeket. A gyerekeket párba kell állítani. Itt mindegyik esemény összetett, hiszen bármelyik páros kétféleképpen fordulhat elő. Az **elemi események** táblázata alapján a kérdezett valószínűségek:

$$a) P(\text{két fiú}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$b) P(\text{egy lány és egy fiú}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$c) P(\text{Jutka és Ákos}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

	Ákos	Dezső	Jutka
Ákos	–	Á–D	Á–J
Dezső	D–Á	–	D–J
Jutka	J–Á	J–D	–

Feladatok

- Sorold fel a dobás után bekövetkező elemi eseményeket, ha
 - két különböző pénzérmét egyszer feldobunk,
 - három különböző pénzérmét egyszer feldobunk!
- Két különböző pénzérmét egyszer feldobunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobás után
 - I, I;
 - I, F;
 - F, F látható az érméken?
- Egy szabályos dobókockával egyszer dobunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott szám
 - páros,
 - páratlan,
 - prím,
 - 3-mal osztható,
 - 7-tel osztható?
- Egy szabályos dobókockával egyszer dobva mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott szám
 - legalább 3,
 - legfeljebb 2?
- Milyen esemény valószínűsége lehet az $\frac{1}{2}$, a $\frac{2}{3}$, illetve az $\frac{1}{3}$ érték, ha egy szabályos dobókockával egyszer dobunk?
- Az A, U, K, P betűkből véletlenszerűen négybetűs betűsorokat készítünk úgy, hogy mindegyik betűt egyszer használjuk fel. Mekkora valószínűséggel kapunk értelmes magyar szót?
- Két szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Foglald táblázatba a lehetséges elemi eseményeket, majd közülük válaszd ki azokat a párokat, ahol
 - a dobott számok összege 3,
 - a dobott számok összege 10,
 - a dobott számok összege 9!

Ezek közül melyiknek legnagyobb a valószínűsége?
- Két szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege
 - legalább 10,
 - legfeljebb 3,
 - legalább 3 és legfeljebb 10,
 - legalább 10 és legfeljebb 3?

(Használd a 6×6 -os táblázatot!)



9. Az ábrán látható 4 lapú, 6 lapú, 8 lapú, 12 lapú és 20 lapú szabályos testek lapjaira ráírták sorban, 1-től kezdve a természetes számokat. Melyik testet dobjuk fel, hogy legnagyobb legyen a valószínűsége

- a) a 2-es, b) legfeljebb 3-as,
c) legalább 11-es, d) prímszám dobásának?



10. Karesz pénztárcájában 5 db 20 Ft-os van. Édesanyja betett a húsasok mellé néhány 10 Ft-ost is. Hány db tízest kapott Karesz, ha ezek után a pénztárcájából taláломra kiválasztott érme 0,8 valószínűséggel 10 Ft-os?

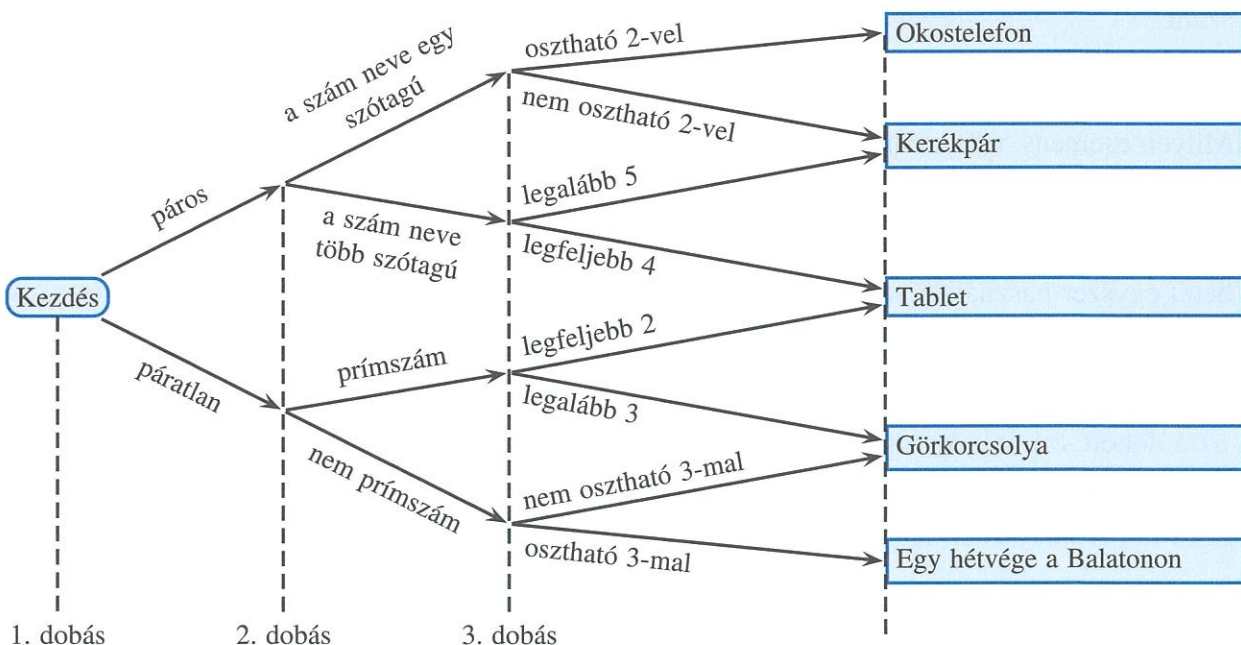
Valószínűségi játékok (Kiegészítő tananyag)

1. játék

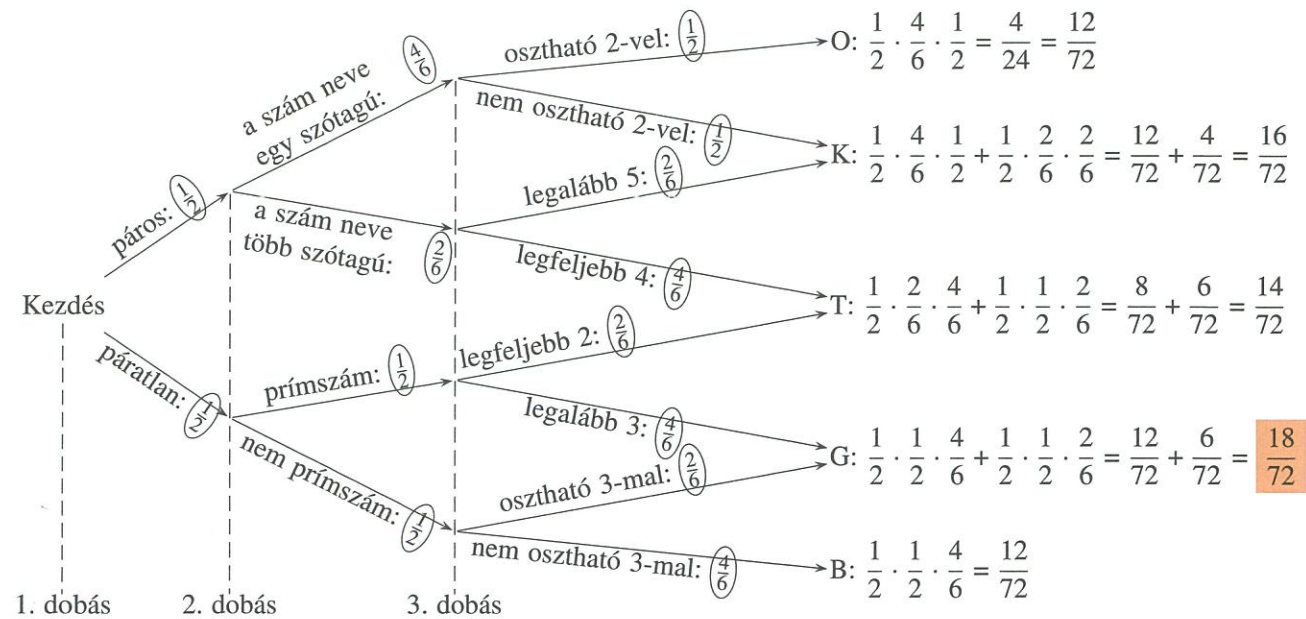
Dönci matematikus szülei az ábrán látható diagram alapján döntenek el, hogy 14. születésnapjára milyen ajándékot adnak fiuknak. A nyilakra írt utasítások alapján számítják ki az öt különböző kimenetel valószínűségét, majd azt az ajándékot adják Döncinek, amelyiknek legnagyobb a valószínűsége.

a) Melyik ajándékot kapja Dönci?

b) Játsszátok el a játékot többször egymás után kockadobással, és a kapott relatív gyakoriságokat hasonlítsátok össze a számolással kapott valószínűségekkel!



Megoldás



A legvalószínűbb kimenetel a **gördeszkához** vezet.

Az ellenőrzés megmutatja, hogy a valószínűség-értékek összege 1, ami azt jelenti, hogy Dönci valamelyik ajándékot biztosan megkapja.

Ellenőrzés:

$$\frac{12}{72} + \frac{16}{72} + \frac{14}{72} + \frac{18}{72} + \frac{12}{72} = \frac{72}{72} = 1$$

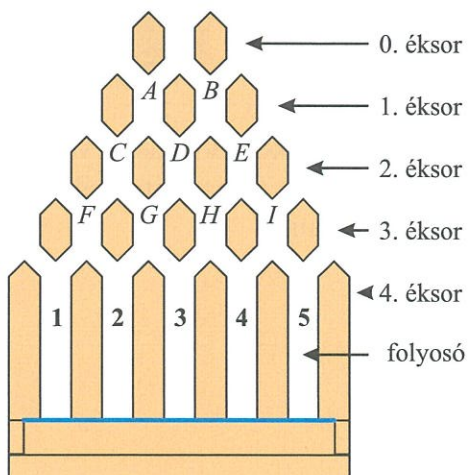
2. játék

Galton-deszka

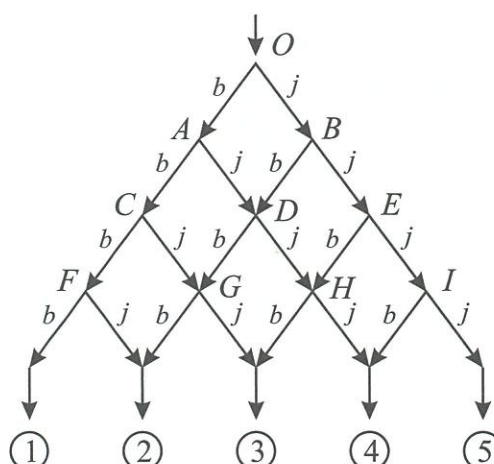
A statisztikai fejezetben megismert Galton-deszkán bármelyik nyílásból (fölről vagy valamelyik oldalon) indított golyókat az ékek egyenlő valószínűséggel terelik két irányba. Indítsuk a golyókat a felső nyíláson át! Figyeljük meg a golyók lehetséges útját, és határozzuk meg az egyes folyosókba való „megérkezés” valószínűségét!

Megoldás

A Galton-deszka rajza



A golyó útja



A golyók minden elágazásnál $\frac{1}{2}$ valószínűséggel változtatnak irányt: balra (b) vagy jobbra (j) gurulhatnak.

Az 1-es folyosóba: b, b, b, b irányban haladva, **egy**féle útvonalon érkehetnek.

A 2-es folyosóba: b, b, b, j ; b, b, j, b ; b, j, b, b ; j, b, b, b irányokban haladva, **négy**féle útvonalon érkehetnek.

A 3-as folyosóba: b, b, j, j ; b, j, b, j ; b, j, j, b ; j, b, b, j ; j, b, j, b ; j, j, b, b irányokban haladva, **hat**féle útvonalon érkehetnek.

A 4-es folyosóba: b, j, j, j ; j, b, j, j ; j, j, b, j ; j, j, j, b irányokban haladva, **négy**féle útvonalon érkehetnek.

Az 5-ös folyosóba: j, j, j, j irányban haladva, **egy**féle útvonalon érkehetnek.

A Galton-deszkán a felül bedobott golyó összesen 16-féleképpen érkezik meg az öt folyosóba, mivel minden elágazásnál megduplázódik a lehetőségek száma, az F, G, H, I -nél, kétféle (b, j) választási lehetősége van. Ez $2^4 = 16$ eset.

Így a keresett valószínűségek:

$$P(1) = \frac{1}{16} \quad P(2) = \frac{4}{16} \quad P(3) = \frac{6}{16} \quad P(4) = \frac{4}{16} \quad P(5) = \frac{1}{16}$$

Megfigyelhetjük a valószínűségek értékeinek szimmetriáját: $P(1) = P(5)$, $P(2) = P(3)$, valamint hogy $\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = 1$.

Feladatok, játékok

1. Inci egér vacsorázni indul az ábrán berajzolt úton. Az elágazásnál döntenie kell, hogy az öt lehetséges út közül melyiken folytatja útját. A járatokban mindenütt egyenletes sajtszag kering, de csak a megjelölt helyeken található sajtot. Mekkora az esélye annak, hogy Inci sajtot vacsorázik?

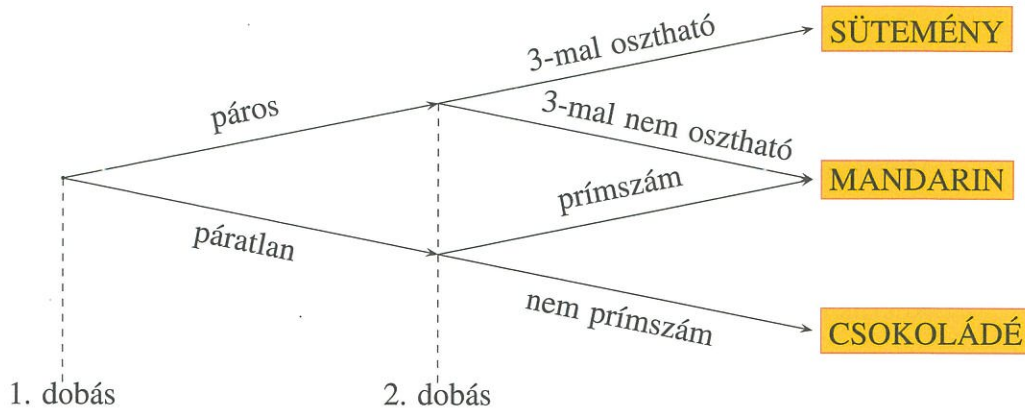


2.



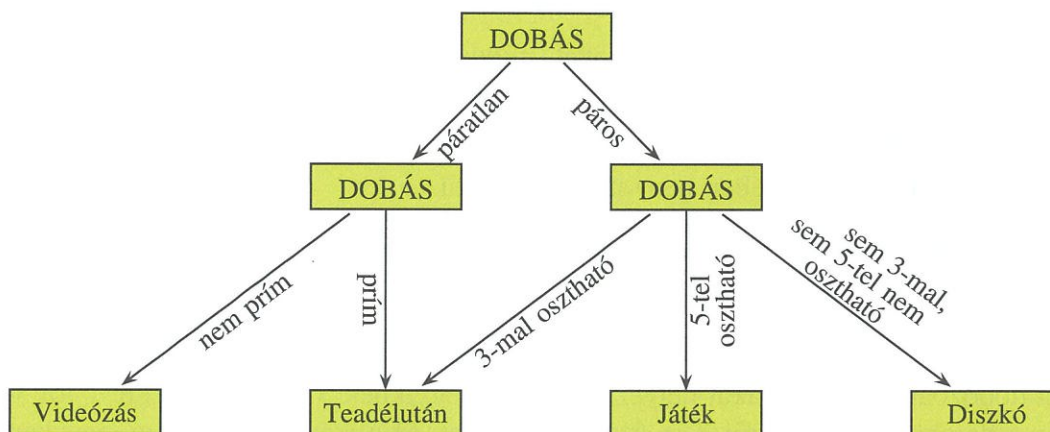
Blanka az ebéd utáni desszertet kétszeri kockadobással választotta ki. A dobások után az ábrán látható módon választ útvonalat. Számítsd ki, mekkora valószínűséggel választhatja

- a süteményt,
- a mandarint,
- a csokoládét!



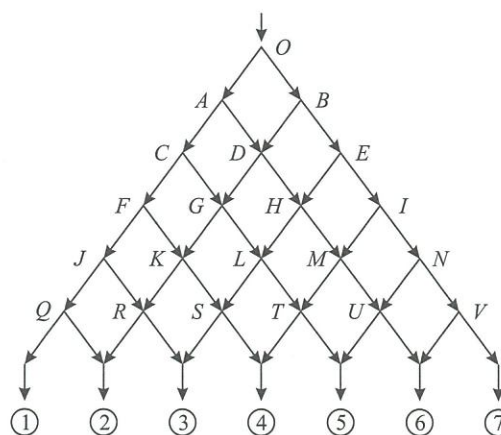
3. Egy nyolcadikos osztály hétvégére bulit tervez. Mivel az összejövétel programjában nem tudnak megegyezni, a döntést az alábbi ábra alapján hozzák meg. Ezen egy szabályos dodekaéderrel végzett dobássorozat feltételeinek modellje látható.

A dodekaéder minden lapjára írtak egy-egy egész számot 1–12-ig. Minden dobás után a nyilakra írt utasítások szerint haladnak tovább a programok felé, végül azt a programot fogadják el, amelyhez a legnagyobb valószínűséggel lehet eljutni. Határozd meg, melyik ez a program!



4. A 7 folyosós Galton-deszka felső nyílását jelölje O , a jobb oldali bemeneteleket rendre: B, E, I, N, V , a bal oldaliakat: A, C, F, J, Q . Igazak-e az alábbi állítások?

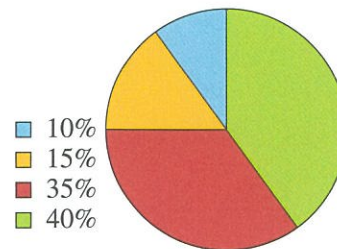
- Az O nyíláson bedobott golyó 3. és 5. folyosóba érkezésének valószínűsége egyenlő.
- Az O nyíláson bedobott golyó 2. és 3. folyosóba érkezésének valószínűsége egyenlő.
- Az E nyíláson bedobott golyó legnagyobb valószínűséggel az 5. folyosóba érkezik.
- A 4. folyosóba mindig érkezik golyó, bármelyik nyílásnál is indítjuk el.



Tudáspróba

1. Az osztály farsangi rendezvényére a nyolcadikosok 80 db fánkot sütöttek. A vetélkedő végén a négy csapat a kördiagramon ábrázolt arányban ehetett a fánkokból.

- Mekkora a kördiagramban az egyes részek középponti szögei?
- Hány darab fánkot kapott egy-egy csapat?
- Foglald táblázatba a kapott adatokat!
- Készíts oszlopdiagramot a kapott adatokkal!



2. Az iskolai kosárlabdacsapat részt vesz a régióban működő iskolák közötti bajnokságon. Az előző idényben az edző-tanár minden meccsen feljegyezte, hogy összesen hány egy pontos kosarat dobtak a játékosok. A táblázat adatai alapján válaszolj a kérdésekre!

Meccsek	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Kosarak	41	37	36	41	52	60	50	43

- Mennyi az adatok átlaga, módusza, mediánja?
 - Írd fel az adatok relatív gyakorisági sorát!
3. Készíts olyan 20 elemből álló adatsokaságot, amelynek átlaga 15, módusza 14, mediánja 13!
4. 12 db cédulára felírtuk a hónapok nevét, minden cédulára egyet. Ezekből véletlenszerűen húzunk egy cédulát. Melyik kimenetelnek nagyobb a valószínűsége?
- A: a kihúzott hónap nevében szerepel r betű.
B: a kihúzott hónap nevében nem szerepel r betű.
5. Egy szabályos oktaéder minden lapjára ráírtuk az egész számokat 1–8-ig. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az oktaédert egyszer feldobva
- 4-gyel osztható számot,
 - 6-tal osztható számot,
 - prímszámot kapunk?
6. Két dobozban számkártyákat helyeztünk el. Az egyikben 3 darabot, ezekre 1-től 3-ig, a másikban 4 darabot, ezekre 4-től 7-ig írtunk számokat. Mindkét dobozból egy-egy kártyát húzunk, és belőlük a húzás sorrendjében egy kétjegyű számot készítünk. Írd fel az elemi eseményeket! Állapítsd meg a következő események valószínűségét!
- A számjegyek összege 8,
 - a számjegyek összege 6,
 - a szám osztható 9-cel,
 - a szám nem osztható 3-mal.

Geometriai transzformációk

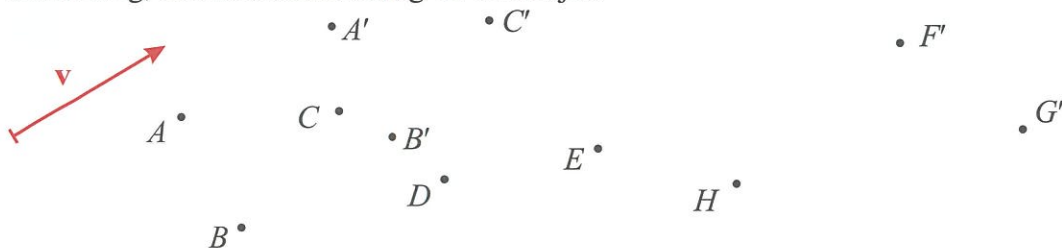
Eltolás

1. példa

Adott a síkon egy irányított szakasz. Az ábrán pirossal rajzoltuk és v -vel jelöltük. Megadtunk néhány pontot, és némelyiknek a párját is.

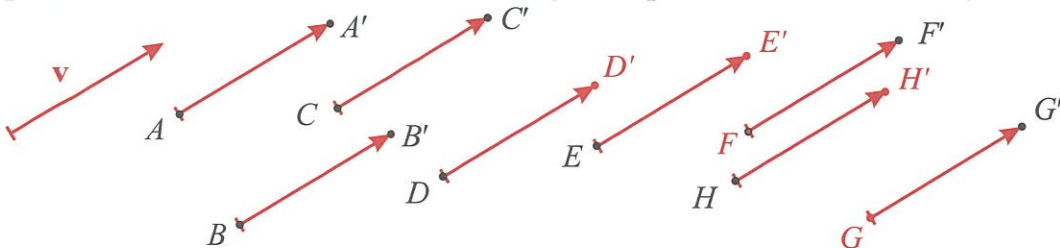
Mi lehet a hozzárendelés szabálya?

Amelyik pontnak nem adtuk meg a képét, annak keressük meg! Amelyiknek pedig csak a képét adtuk meg, annak keressük meg az eredetijét!



Megoldás

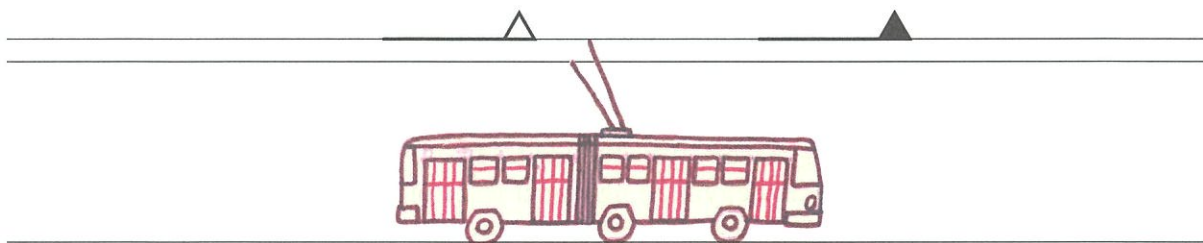
Bármely pont párját megkaphatjuk úgy, hogy a ponton keresztül a megadott irányított szakasszal párhuzamost húzunk, és arra az adott irányban a pontból kiindulva felmérjük a v hosszúságot.



Ezt a transzformációt **eltolásnak** nevezzük.

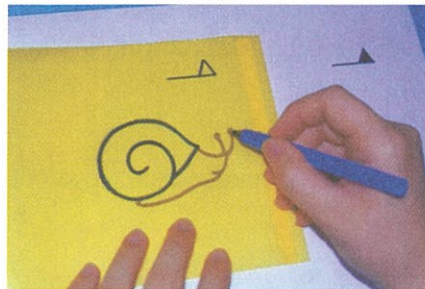
Az eltolás mozgítás; megadhatjuk zászlós mutatókkal is. Ilyenkor átlátszó papír segítségével állítjuk elő az alakzat képét.

Másold át a megadott ábrát a fehér zászlójú mutatóval együtt az átlátszó papírra! Ezután emeld fel a másolatot, majd tedd le úgy, hogy a fehér zászlójú mutató pontosan fedje a fekete zászlójút! Ha ezután az átlátszó papírra újra átmásolod az eredeti ábrát is, akkor a másolópapíron együtt lesz az elmozgatással kapott kép és az eredeti rajz.

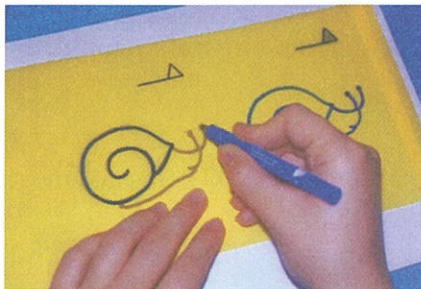


Ugyanezt a mozgást többször egymás után elvégezve szép mintákat rajzolhatsz.

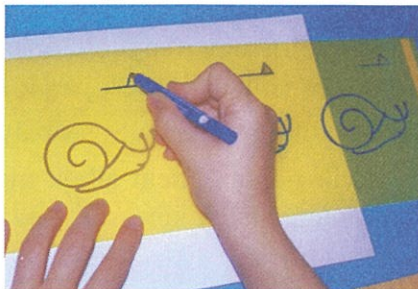
Először lemásolod a rajzot a fehér zászlóval együtt.



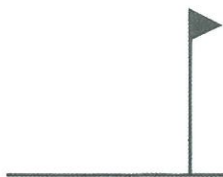
A fehér zászlót a feketere mozgatód, majd újra lemásolod a rajzot a fehér zászlóval együtt.



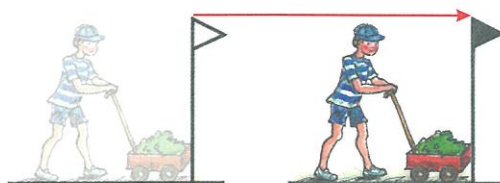
Most az új fehér zászlót teszed rá a fekete zászlóra, és újra lemásolod az eredeti rajzot a fehér zászlóval együtt. És így tovább, ameddig akarsz.



2. példa



Végezzük el az eltolást, és rajzoljuk meg az eltolást jellemző irányított szakaszt is!



Megoldás

Az eltolásra kétféle meghatározást adhatunk.

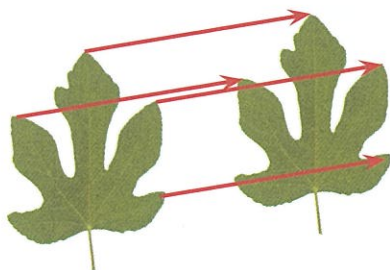
1. Pontról pontra.

Adott egy v irányított szakasz. Bármely P pont P' képét megkapjuk, ha a ponton át félegyenest indítunk a v irányított szakasszal párhuzamosan és egyező irányban, majd a P pontból kiinduló félegyenestre felmérjük a v irányított szakasz hosszát.

2. Mozgatás

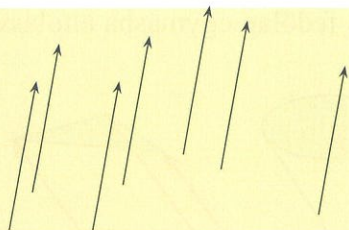
Ha két zászló olyan, hogy hosszúságuk egyenlő, rúdjaik párhuzamosak és egyirányúak, valamint a zászlók háromszögei is ugyanarra az oldalra néznek, akkor a két zászló eltolást határoz meg. Az eltolás egy irányított szakaszt megkaphatod, ha a fehér zászló kezdőpontját (vagy bármely más pontját) összekötöd a párja kezdőpontjával.

Vektorok



Az ábrán látható irányított szakaszok párhuzamosak, egyirányúak és egyforma hosszúak.

Ilyen szakaszt a sík bármelyik pontjából indíthatunk. Bárhol is legyen az ilyen tulajdonságú irányított szakaszoknak a kezdőpontja, mindegyikkel ugyanazt az eltolást adjuk meg. Az eltolás szempontjából ezek a szakaszok egyenértékűek (ekvivalensek), egyetlen vektort határoznak meg.



A vektort irányított szakasszal adjuk meg. Két vektor egyenlő, ha párhuzamos, egyirányú és egyenlő hosszúságú irányított szakasszal adjuk meg őket.

Ez sok **különböző irányított szakasz**, de **egyetlen vektor**.

Mindegyik ugyanazt az eltolást határozza meg.

Ez két **különböző irányított szakasz** és két **különböző vektor**.



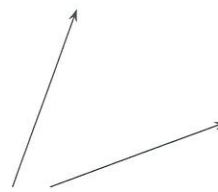
Ezek párhuzamosak, egyenlő hosszúak, de nem egyirányúak.

Ez két **különböző irányított szakasz** és két **különböző vektor**.



Ezek párhuzamosak, egyirányúak, de nem egyenlő hosszúak.

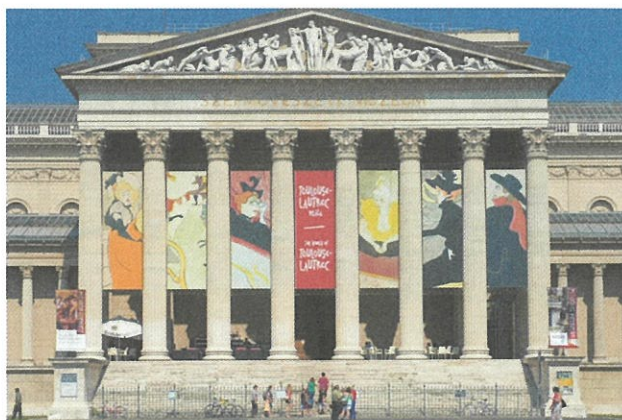
Ez két **különböző irányított szakasz** és két **különböző vektor**.



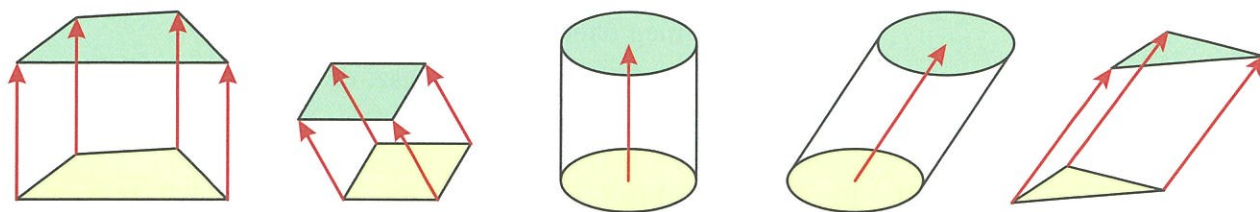
Ezek egyenlő hosszúak, de nem párhuzamosak.

A vektort így jelöljük: $\vec{a}$, vagy $\overrightarrow{AB}$, vagy $\mathbf{a}$, vagy $\underline{a}$, vagy $\vec{a}$.

Eltolásról térben is beszélhetünk. A térbeli transzformációt, a síkbelihez hasonlóan, egy vektorral adhatjuk meg.

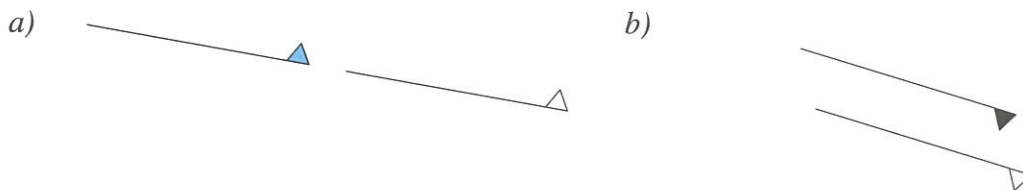


A hasábok és hengerek éppen olyan testek, amelyekben az alaplap és a fedőlap egymásba eltolással vihető át.

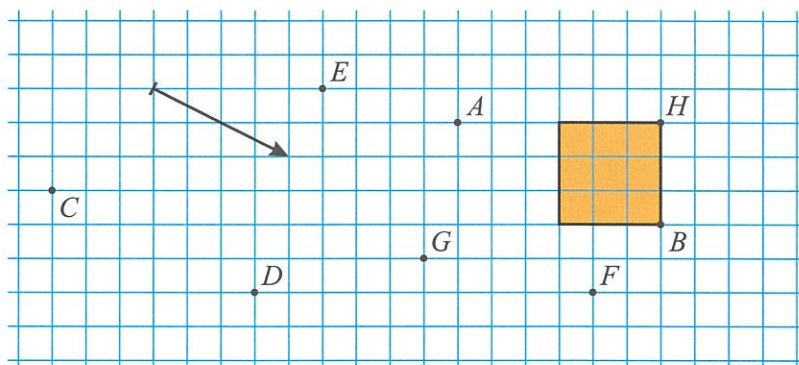


Feladatok

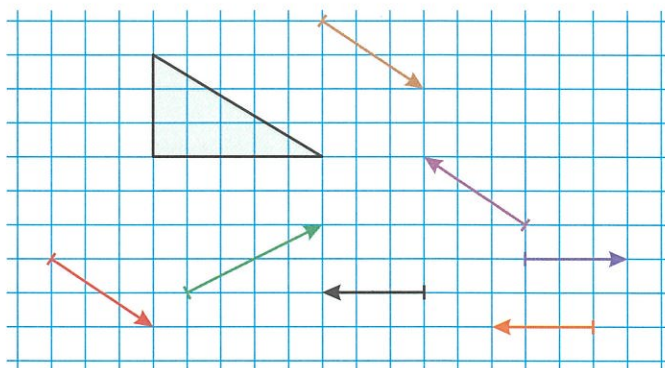
1. Egyetlen másolópapír segítségével végezd el a zászlókkal megadott eltolást! Add meg mind-egyik esetben az eltolás vektorát! A képet a megfelelő zászlóval azonos színűre színezd!



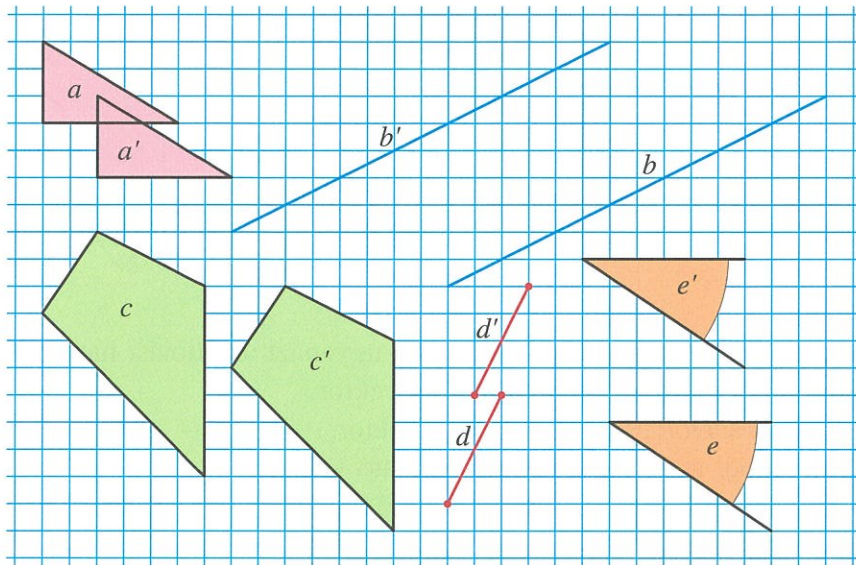
2. Rajzolj az adott irányított szakasszal egyenlő vektorokat úgy, hogy éppen a megadott pontokból induljanak ki! Hova viszi az eltolás a sárga négyzetet?



3. Rajzolj a füzetedbe egy derékszögű háromszöget! Told el sorra a megadott irányított szakaszoknak megfelelően! Válaszd ki azokat az irányított szakaszokat, amelyek ugyanazt az eltolást adják meg!

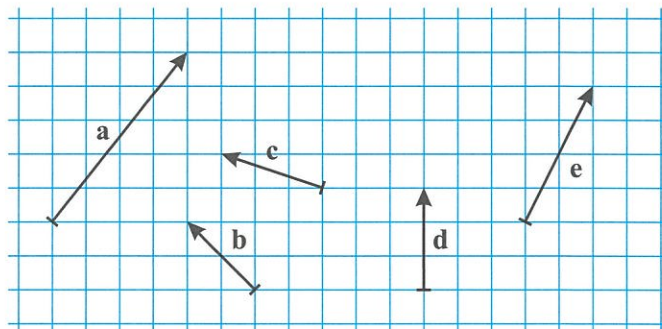
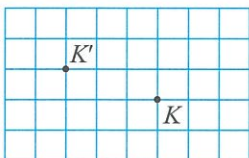


4. A következő ábrákon a vesszős betűkkel jelölt alakzat lehet-e eltolással kapott képe a sima betűkkel jelölt alakzatoknak? Ahol igen, ott rajzold meg az eltolás vektorát is!

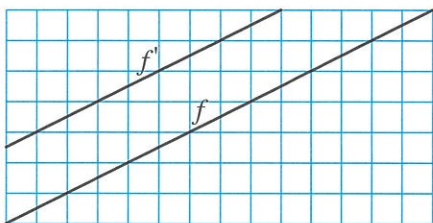


5. Adottak az **a**, **b**, **c**, **d** és **e** vektorok.

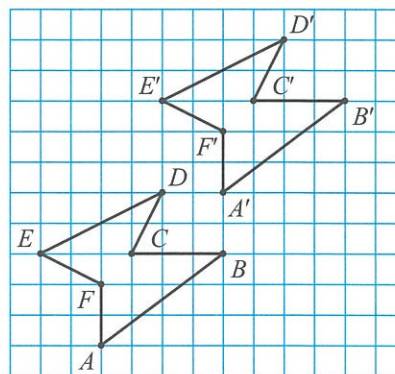
- a) Add meg annak a vektornak a betűjelét, amelyik a K pontot a K' pontba viszi!



- b) Add meg annak a vektornak a betűjelét, amelyik az f egyenest az f' egyenesbe viszi!



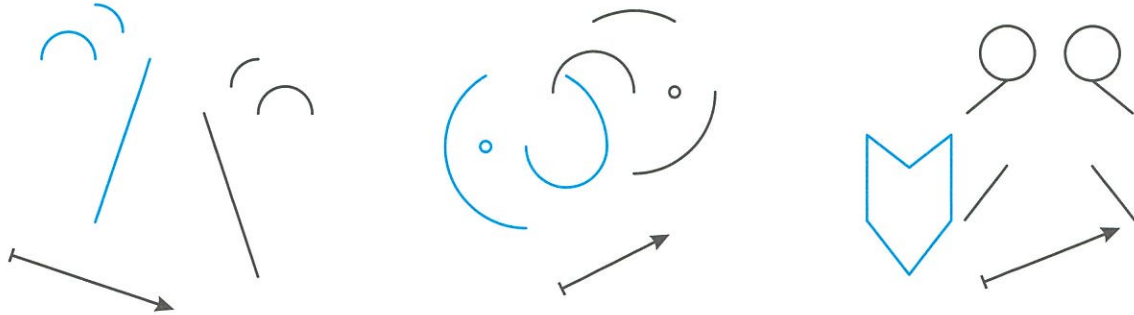
- c) Írd ide annak a vektornak a betűjelét, amelyik az $ABCDEF$ hatszöget az $A'B'C'D'E'F'$ hatszögbe viszi!



6. Egy ABC háromszög csúcsainak a koordinátái: $A(2; 3)$, $B(6; 3)$, $C(6; 7)$. Rajzold meg a háromszöget!

- Told el a háromszöget úgy, hogy az A csúcsa az $A_1(8; 1)$ pontba kerüljön!
- Végezd el azt az eltolást, amelynek eredményeképpen az ABC háromszög A csúcsa az $A_2(14; -1)$ pontba kerül!
- Told el az ABC háromszöget úgy, hogy az A csúcsa az $A_3(-4; 1)$ pontba menjen át!
- Melyik eltolás vektora a leghosszabb?

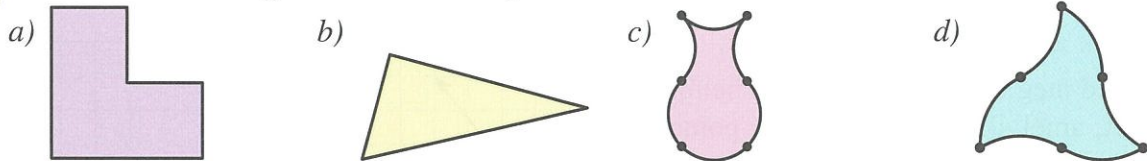
7. Másolópapír segítségével told el a kék ábrát a megadott vektorral! Ekkor megkapod, mit ábrázoltak eredetileg az itt látható széttörözött ábrák!



8. Az alábbi vektorok közül melyek azok, amelyek ugyanazt az eltolást határozzák meg?

- Az $A(2; 5)$ pontból a $B(6; 8)$ pontba mutató vektor,
- a $C(1; 3)$ pontból a $D(7; 5)$ pontba mutató vektor,
- az $E(-3; 5)$ pontból az $F(3; -3)$ pontba mutató vektor,
- a $G(-3; -2)$ pontból a $H(1; 1)$ pontba mutató vektor.

9. Készíts mintát a megadott elemből csupa eltolással!



Melyik elemmel tudod hézagmentesen és egyrétegűen lefedni az egész síkot csupa eltolást végezve?

Az eltolás tulajdonságai

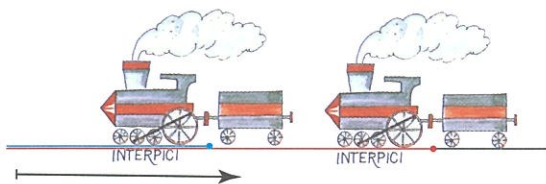
Az eltolás mozgatás, tehát egybevágósági transzformáció. Ebből következik:

- Bármely alakzat egybevágó az eltoló képével.
- Minden szakasz hossza egyenlő az eltoló képének a hosszával.
- Minden szög nagysága egyenlő az eltoló képének a nagyságával.

Az eltolás **megfordítható** transzformáció. Minden pontnak egyetlen képe van, és minden képpontnak van egyetlen őse.

Egyenes, félegyenes, szakasz és szög képe

Ha az eltolást megadó vektorral párhuzamos egyenest tolunk el, akkor az egyenes képe saját maga lesz, bár egyetlen pontja sem marad a helyén.



Ha az eltolást megadó vektorral nem párhuzamos egyenest tolunk el, akkor párhuzamos lesz az egyenes a képével.

