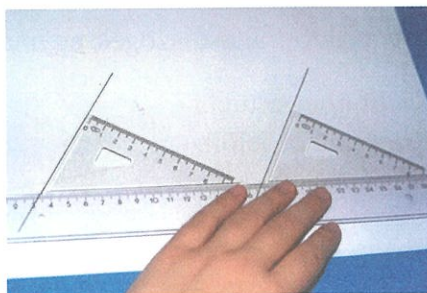


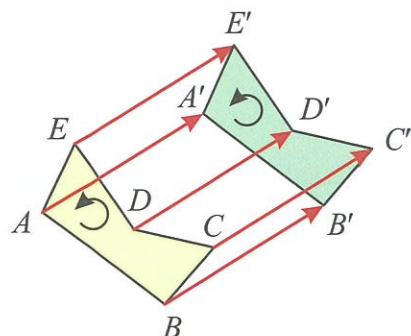
Minden egyenes párhuzamos az eltolással kapott képével, vagy egy egyenesbe esik vele.

Ezt a tulajdonságot használtuk fel akkor, amikor vonalzó segítségével párhuzamos egyeneseket rajzoltunk.

Az előbbi kisvonalatos ábrán a kék félegyenesek képei a piros félegyenesek lettek. Láttuk, hogy a félegyenesek irányítása nem fordul meg.



Minden félegyenes egyállású az eltolással kapott képével.

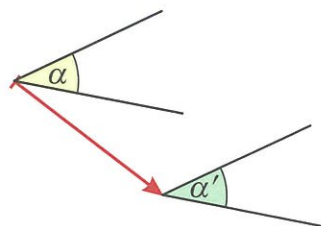


Minden szakasz párhuzamos az eltolással kapott képével, vagy egy egyenesbe esik vele.

Az alakzat és a képe egyező körüljárású.

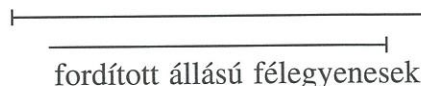
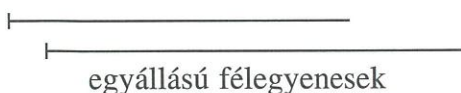
Az eltolás a szögszárakat alkotó félegyeneseket egyállású félegyenesekbe viszi át.

Szög és eltolt képe egyállású szögek.



Párhuzamos szárú szögek

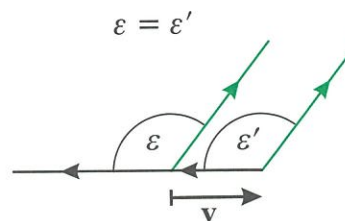
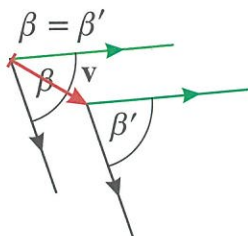
Az olyan félegyeneseket, amelyek párhuzamosak vagy egy egyenesbe esnek: **egyállású** vagy **fordított állású félegyeneseknek** nevezzük aszerint, hogy irányításuk megegyezik vagy ellentétes egymással.



Ha két szög szárai páronként egyállású félegyenesek, akkor **egyállású szögekről** beszélünk.

Az egyállású szögek egymásból eltolással keletkeznek.

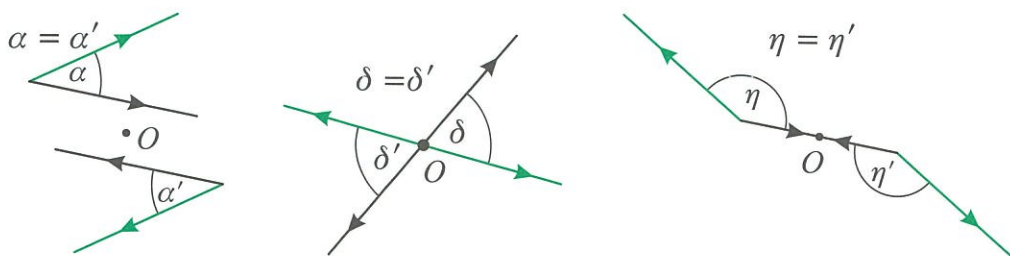
A $\mathbf{v}$ vektor az eltolás vektora.



 Ha két szög szárai páronként fordított állású félegyenesek, akkor **fordított állású szögekről** beszélünk. Ezeket **váltószögeknek** nevezzük.

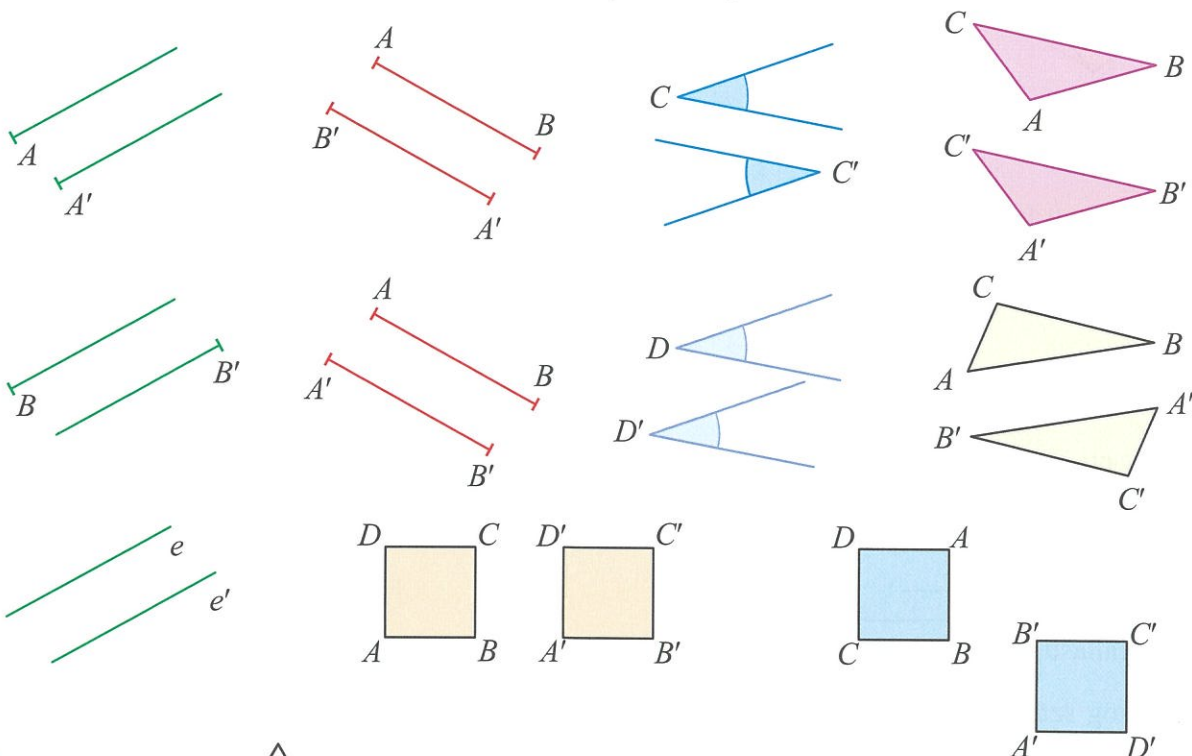
A fordított állású szögek egymásból középpontos tükrözéssel keletkeznek.

Az O pont a tükörközéppontot jelöli.

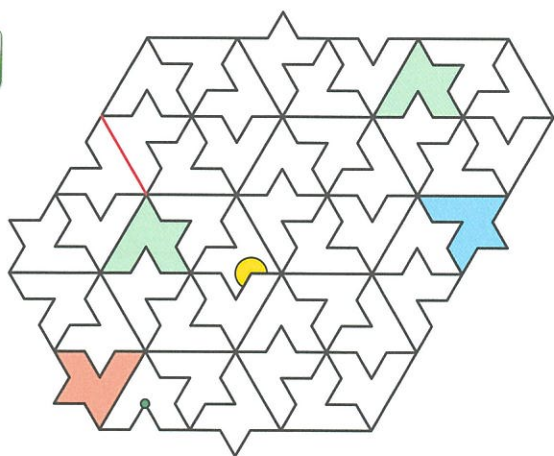


Feladatok

1. A következő ábrákon a vesszős betűkkel jelölt alakzat lehet-e eltolással kapott képe a sima betűkkel jelölt alakzatoknak? Ahol igen, ott rajzold meg az eltolás vektorát is!



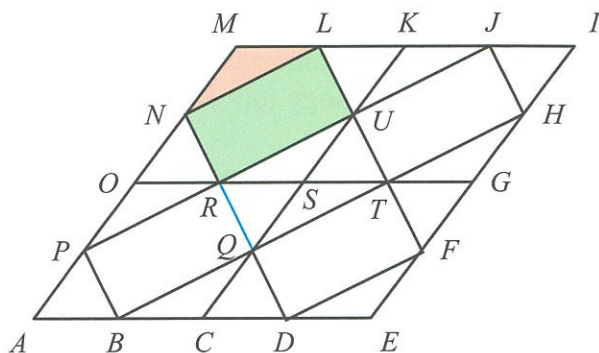
2.



Egy eltolás az ábrán lejjebb lévő zöld lapocskát egy másik zöld lapocskába vitte át.

- Add meg az eltolás vektorát! Ugyanezzel az eltolással hová került a piros lap?
- Melyik lap került a kék helyére?
- Hová került a piros szakasz?
- Melyik a zöld pont képe?
- Hová került a sárga szögtartomány?

3. a) $MNL\triangle$ eltolással az ábra másik háromszögébe került. Add meg, hová kerülhetett, és milyen eltolás vitte oda!
- b) Az $LNRU$ négyszög eltolással az ábra másik négyszögébe került. Add meg, hová kerülhetett, és milyen eltolás vitte oda!
- c) Az RQ szakasz eltolással az ábrán egy másik szakaszba került. Hova kerülhetett, és milyen eltolás vitte oda?



4. Az eltolás milyen tulajdonságait tudod a képeken felfedezni?



Nemzeti Múzeum (Budapest)



Lágymányosi híd (Budapest)

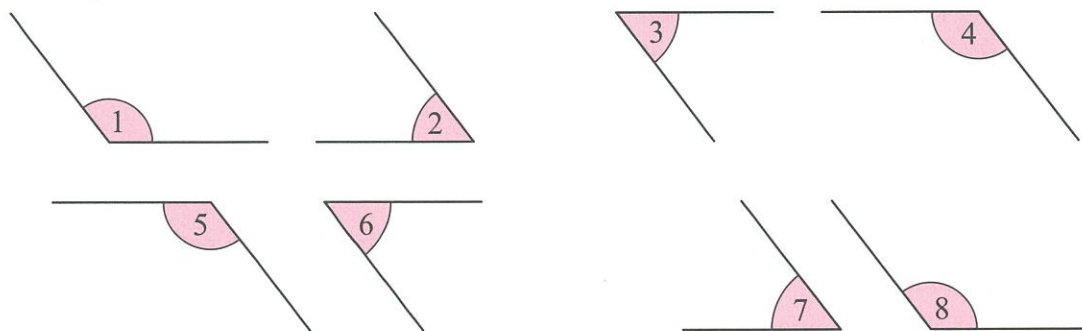


Budavári Sikló

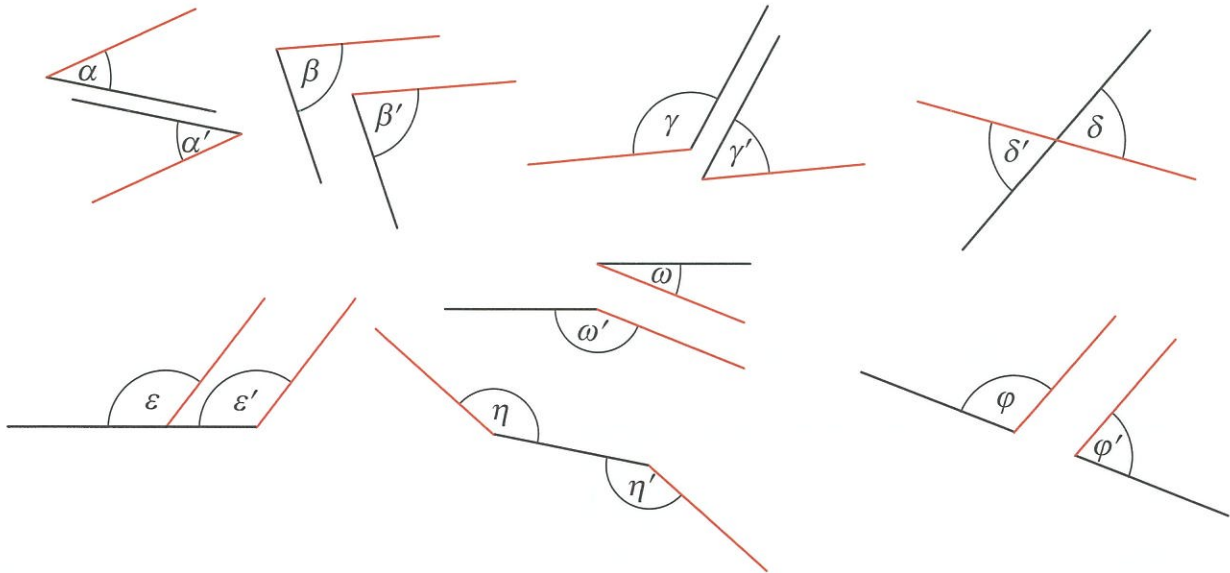


Irodaház

5. Keress olyan szögpárokat, amelyekben az egyik szög a másiktól eltolással származtatható! (A megadott szögek szárai egymással mind párhuzamosak.)

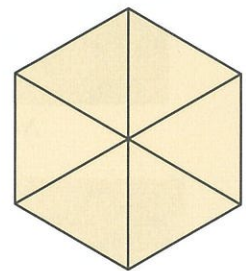


6. Párhuzamos szárú konvex szögpárokat rajzoltunk. A párhuzamos vagy egy egyenesbe eső szakaszokat azonosan színeztük. Válaszd ki az egyenlő szögekből álló párokat, és a kiválasztottaknál állapítsd meg, hogy milyen transzformáció viszi az egyik szöget a másikba!

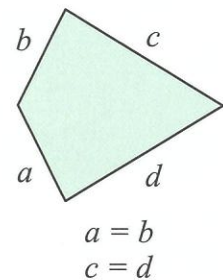
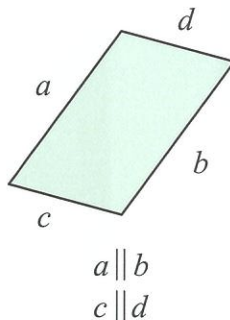
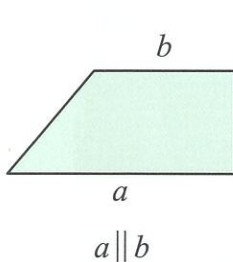


7. Keresd a szabályos hatszögben

- egyállású szögeket,
- fordított állású szögeket,
- párhuzamos szárú, de nem egyenlő szögeket!



8. Az alábbi négyszögekben jelölj meg olyan szögeket (ezek lehetnek akár belső, akár külső szögek), amelyek eltolással átvihetők egymásba!



9. Az α és β szögekről annyit tudunk, hogy párhuzamos szárú szögek. Az alábbi állítások erre a két szögre vonatkoznak. Dönts el, melyik igaz, melyik hamis!

- Lehet, hogy a két szög középpontosan szimmetrikus.
- Biztos, hogy egymásba eltolással átvihetők.
- Az egyik szög hegyesszög, a másik pedig tompaszög.
- A két szög összege 180° -nál biztosan nagyobb.
- A két szög egyenlő.
- A két szög egyike lehet egy paralelogramma belső szöge, a másik pedig ugyanannak a paralelogrammának belső vagy külső szöge.
- A két szög lehet ugyanannak a háromszögnek egy-egy szöge.

10. Igaz vagy hamis a következő állítás?

Ha két háromszög szögei páronként egyállásúak, akkor a két háromszög egybevágó.

11. A paralelogramma átellenes szögei egyenlők és párhuzamos szárúak. Átvihetők-e egymásba eltolással?

12. Két szög szárai páronként párhuzamosak egymással, és az egyik szög 90° -kal nagyobb a másikonál. Milyen fajta szögek lehetnek ezek?

13. Két szög szárai páronként párhuzamosak egymással, és az egyik szög háromszor akkora, mint a másik. Milyen fajta szögek lehetnek ezek?

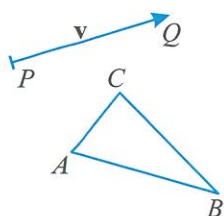
Az eltolt kép szerkesztése

1. példa

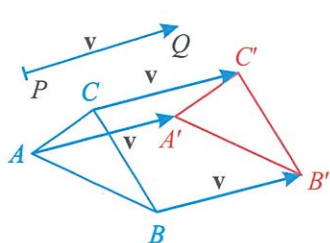
Adott egy $\mathbf{v}$ vektor és egy ABC háromszög. A síkot eltoljuk az adott $\mathbf{v}$ vektorral. Szerkesszük meg az ABC háromszög képét!

Megoldás

Adatok:



Vázlat:



Összefüggések:

Bármely pontot a képével összekötve PQ irányított szakasszal párhuzamos és ugyanolyan hosszú szakaszt kapunk. Ezek a szakaszok egymással is párhuzamosak és egyenlők.

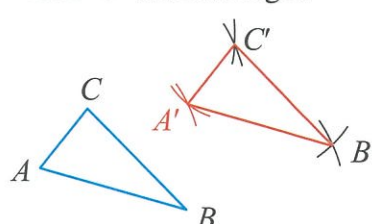
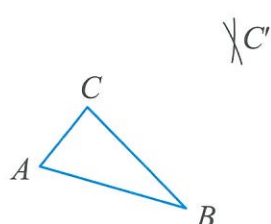
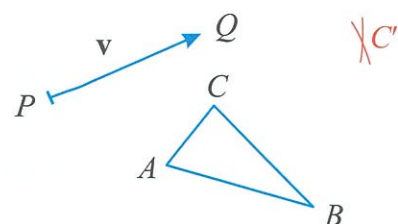
Ezért $PQC'C$, $PQB'B$, $PQA'A$, $CC'A'A$, $CC'B'B$, $AA'B'B$ négyszögek paralelogrammák.

A szerkesztés lépései:

1. Megszerkesztjük a $PQC'C$ paralelogramma hiányzó C' csúcsát.

2. Megszerkesztjük a $C'CB'B$ paralelogramma hiányzó B' csúcsát.

3. Megszerkesztjük a $C'CAA'$ paralelogramma hiányzó A' csúcsát, így megkapjuk az $A'B'C'$ háromszöget.

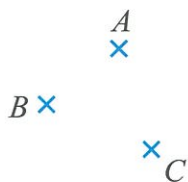


2. példa

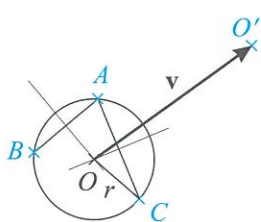
A, B, C egy k kör három pontja. O' a k kör középpontjának eltolással kapott képe. Szerkesszük meg az eltolás vektorát és az eltolt kört!

Megoldás

Adatok:



Vázlat:

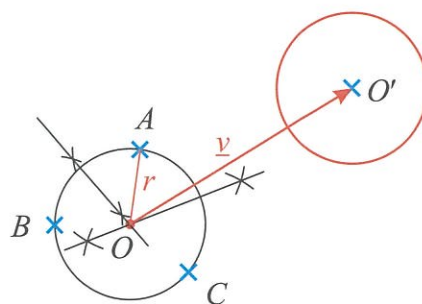
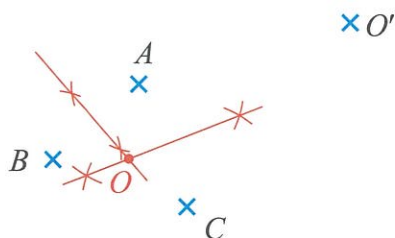


Összefüggések:

A k kör O középpontja A, B, C pontok mindegyikétől ugyanolyan távolságra van, ezért rajta van AB és AC húrok felezőmerőlegesén. Mivel az eltolás egybevágóság, k' sugara egyenlő k kör sugarával.

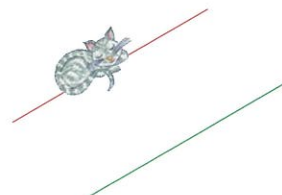
A szerkesztés lépései:

1. Megszerkesztjük AB és AC húrok felezőmerőlegesét. Metséspontjuk a k kör középpontja.
2. Az eltolás vektorát az OO' irányított szakasz adja meg. Az O' középponttól OA sugarral kört rajzolva kapjuk k kör k' képét.



Feladatok

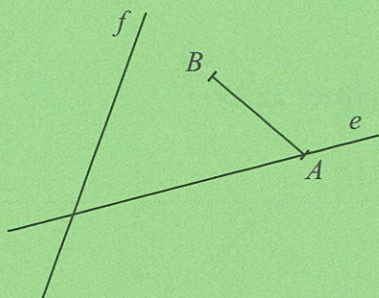
1. Vegyél fel egy ABC háromszöget! Az ABC háromszög eltolásával az A pont a szemközti oldal felezőpontjába került. Add meg az eltolás vektorát, és szerkeszd meg a háromszög képét!
2. Vegyél fel egy szakaszt és egy pontot! Told el a szakaszt úgy, hogy
 - a) az egyik végpontja az adott pontra kerüljön;
 - b) a képét az adott pont felezze;
 - c) a képe haladjon át az adott ponton, és a pont a képszakaszt 3 : 1 arányban ossza fel!
3. Vegyél fel egy háromszöget és egy pontot! Told el úgy a háromszöget, hogy valamelyik csúcsa az adott pontba kerüljön! Hány megoldás van?
4. Vegyél fel egy szöget és egy pontot! Told el a szöget úgy, hogy egyik szára áthaladjon a ponton, és a csúcs képe 2 cm távolságra legyen az adott ponttól!
5. Vegyél fel egy szöget és egy pontot! Told el a szöget úgy, hogy a szögfelező áthaladjon az adott ponton, és a csúcs képe 3 cm távolságra legyen tőle!
6. Vegyél fel egy háromszöget és egy pontot! Told el a háromszöget úgy, hogy a magasságpontja az adott pontba kerüljön!
7. A piros egyenest az eltolás a zöld egyenesbe vitte át. Hová kerülhetett a piros egyenesen alvó cica az eltolás után?



8. Vegyél fel egy szöget és egy pontot! Szerkeszd meg a szög eltolt képét úgy, hogy az egyik szárának egyenese ugyanaz az egyenes maradjon (önmagában mozduljon el), másik szára pedig áthaladjon az adott ponton!

9. Adott az AB szakasz és az e egyenes. Szerkessz legalább 10 db olyan szakaszt, amely párhuzamos AB -vel, ugyanolyan hosszú, és az egyik végpontja e egyenesre esik! Milyen alakzaton helyezkednek el az így megszerkesztett szakaszok végpontjai?

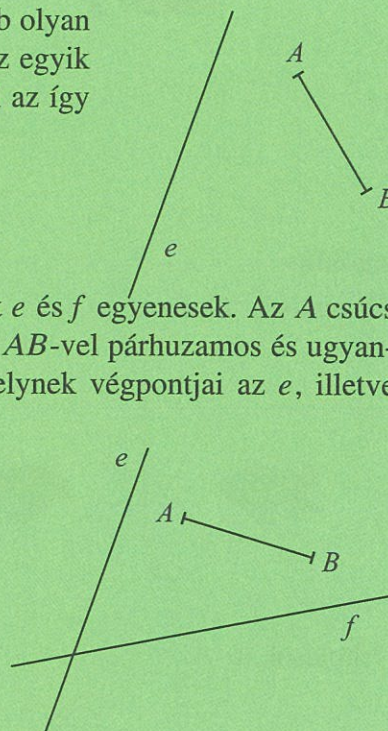
10.



Adott az AB szakasz, valamint e és f egyenesek. Az A csúcs az e egyenesen van. Szerkessz AB -vel párhuzamos és ugyanolyan hosszúságú szakaszt, melynek végpontjai az e , illetve az f egyenesen vannak!

11. Adott egy paralelogramma két csúcsa, A és B , továbbá e és f egyenesek. Szerkessz paralelogrammát úgy, hogy a másik két csúcs e és f egyenesekre essen!

12. Vegyél fel egy szöget és 2 pontot! Told el a szöget úgy, hogy két szára áthaladjon a két adott ponton!



Egybevágósági transzformációk összefoglalása

A középpontos tükrözés és az eltolás **síkmozgás**, mivel a síkot önmagába forgatjuk el, illetve toljuk el, ilyenkor a másolópapírt nem kell felemelni. Ezekben az esetekben a körüljárás iránya nem változik meg. A tengelyes tükrözés **térmozgás**. Ahhoz, hogy az alakzatot a tükörképébe mozgassuk, ki kell lépni a síkból – a másolópapírt át kell fordítani –, ekkor a körüljárás iránya megváltozik. A mozgások mindegyike **távolságtartó**.

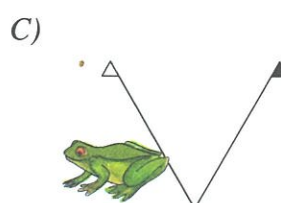
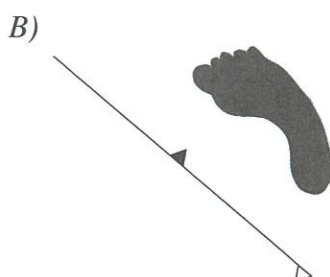
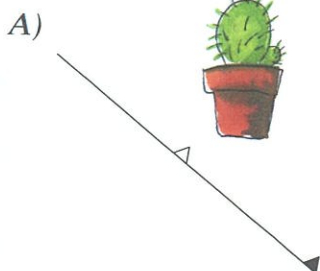
A **távolságtartó** transzformációt **egybevágósági** transzformációnak nevezzük.

Példa

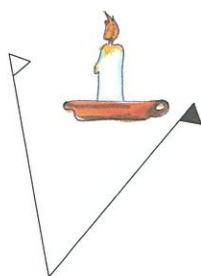
Válasszuk ki az alábbi mozgásokból, melyik

- a) tengelyes tükrözés – adjuk meg a tengelyt!
c) eltolás – adjuk meg a vektorát!

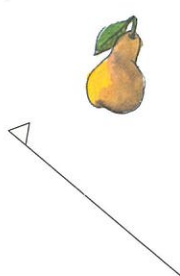
- b) középpontos tükrözés – adjuk meg a középpontot!
d) A kimaradó mozgásoknak adjunk nevet!



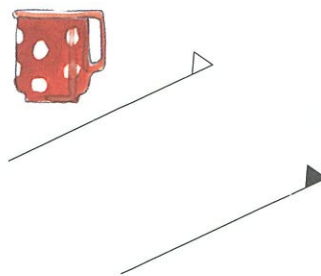
D)



E)

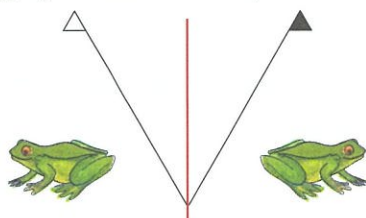


F)

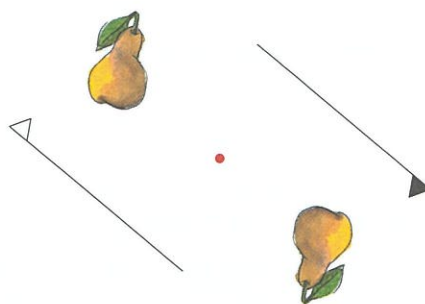


Megoldás

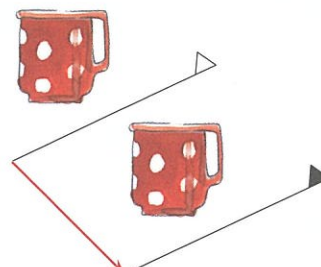
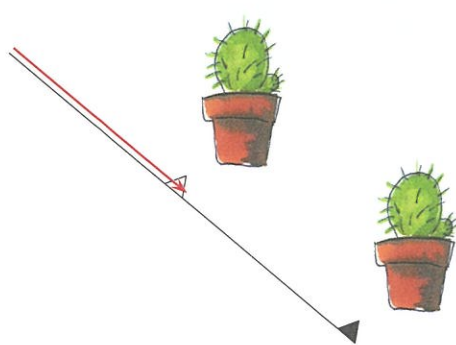
a) Tengelyes tükrözés a C).



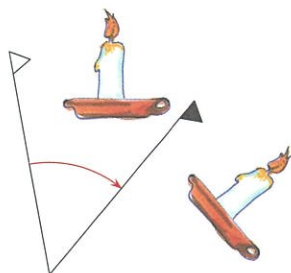
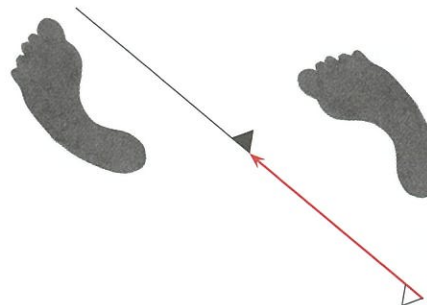
b) Közepontos tükrözés az E).



c) Eltolások az A), F).



d) A B) mozgás olyan, mintha egy tükörképet elcsúsztatnánk a tengely mentén. Ezt **csúsztatva tükrözésnek** nevezik, és egy irányított szakasszal lehet megadni. Ez egy eltolás vektorát határozza meg, az egyenese pedig tükörtengely.



A D) transzformáció elforgatja az alakzatot a zászlók végpontja körül 50° -os szöggel. Ezt **forgatásnak** nevezzük. A pont körüli forgatást egy középponttal és egy irányított szöggel adjuk meg.

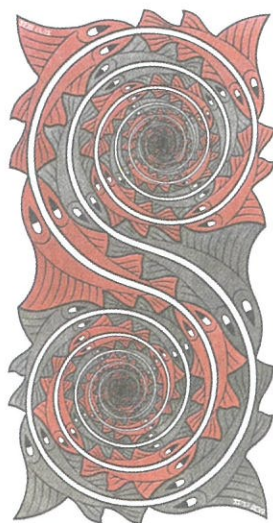
Akkor is egybevágósági transzformációt kapunk, ha a transzformáció során minden pont az eredeti helyén marad, vagy oda visszasikerül. Ezt néha nulla fokos forgatásnak, nulla vektorral történő eltolásnak vagy helyben hagyásnak is nevezik.

Szimmetria



J. R. R. Tolkien: Numenori szőnyeg

Ez az ábra **tengelyesen szimmetrikus**, mert van olyan egyenes, amelyre tükrözve az alakzat önmagába megy át.



M. C. Escher: Örvény

Ez az ábra **középpontosan szimmetrikus**, mert van olyan pont, amelyre tükrözve az alakzat önmagába megy át.

A természetben, a képzőművészetben sok helyen, sokféle szimmetriával találkozhatunk. Ezek persze matematikailag sohasem teljesen pontosak.

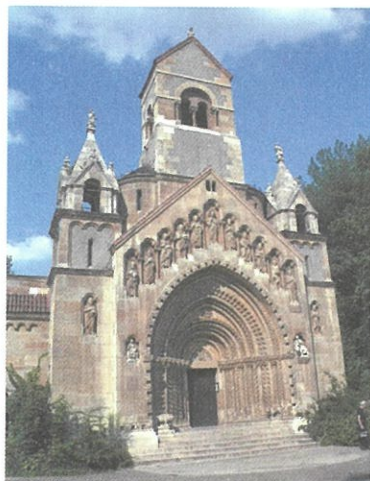


A virág **forgásszimmetrikus**, mert van olyan pont, amely körül elforgatva a kép önmagába megy át.



Ez a kép **eltolásszimmetrikus**, mert van olyan vektor, amellyel eltolva a síkot az ábra önmagába megy át. (Az ábrát végtelen hosszúnak kell képelnünk.)

Zsinagóga (Budapest)



Jákai kápolna (Budapest)

Ez a test **síkra szimmetrikus**, mert van a térben olyan sík, amelyre tükrözve az alakzat önmagába megy át.



M. C. Escher: Gömbi spirálok

Ez a test **középpontosan szimmetrikus**, mert van a térben olyan pont, amelyre tükrözve az alakzat önmagába megy át.



Pravoszláv templom (Pszkov)

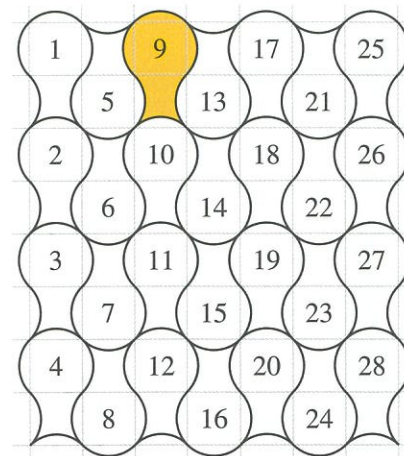
A templom tornya **forgásszimmetrikus**, a torony tengelye körül elforgatva önmagába kerül.

Feladatok

1. Milyen transzformációt alkalmaztunk, és hova került a színes csempe, ha

- a) az ⑤-ös ⑨-esbe ment át, röviden: ⑤ $\rightarrow$ ⑨
- b) ② $\rightarrow$ ⑮
- c) ② $\rightarrow$ ⑲
- d) ⑤ $\rightarrow$ ⑲
- e) ⑤ $\rightarrow$ ⑳

Ellenőrizz másolópapírral!



2. Gondoltunk egy mozgásra.

Eláruljuk, hogy a mozgás az egyik kék négyszöget egy feketébe juttatta.

Hová kerülhetett ekkor a koronás darab?

Mi lehetett a transzformáció?

Lehetett tengelyes tükrözés?

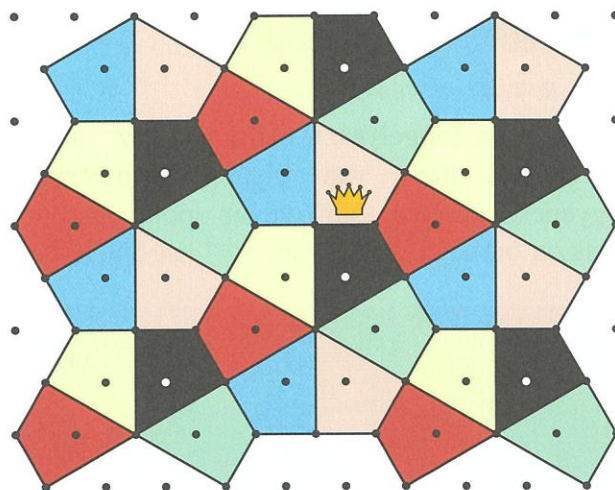
Melyik tengelyre?

Lehetett középpontos tükrözés?

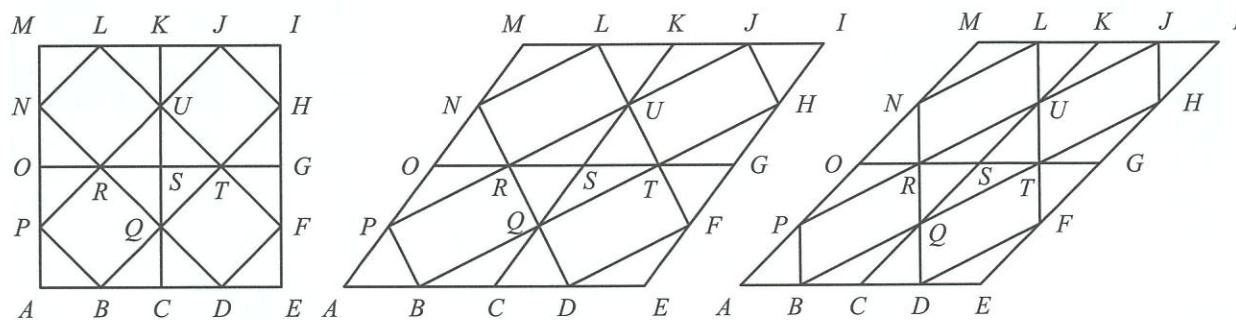
Melyik középpontra?

Lehetett eltolás?

Melyik vektorral?



3. Döntsd el, hogy az alábbi állítások melyik ábrára igazak, melyikre nem! Ahol igaz, ott add meg a tengelyt, a középpontot vagy az eltolás vektorát!



a) $MNL\triangle$ eltolt képe

$SQT\triangle$

b) $MNL\triangle$ középpontos tükröképe

$DEF\triangle$

c) $MNL\triangle$ tengelyes tükröképe

$DEF\triangle$

d) $NLUR$ középpontos tükröképe

$PBQR$

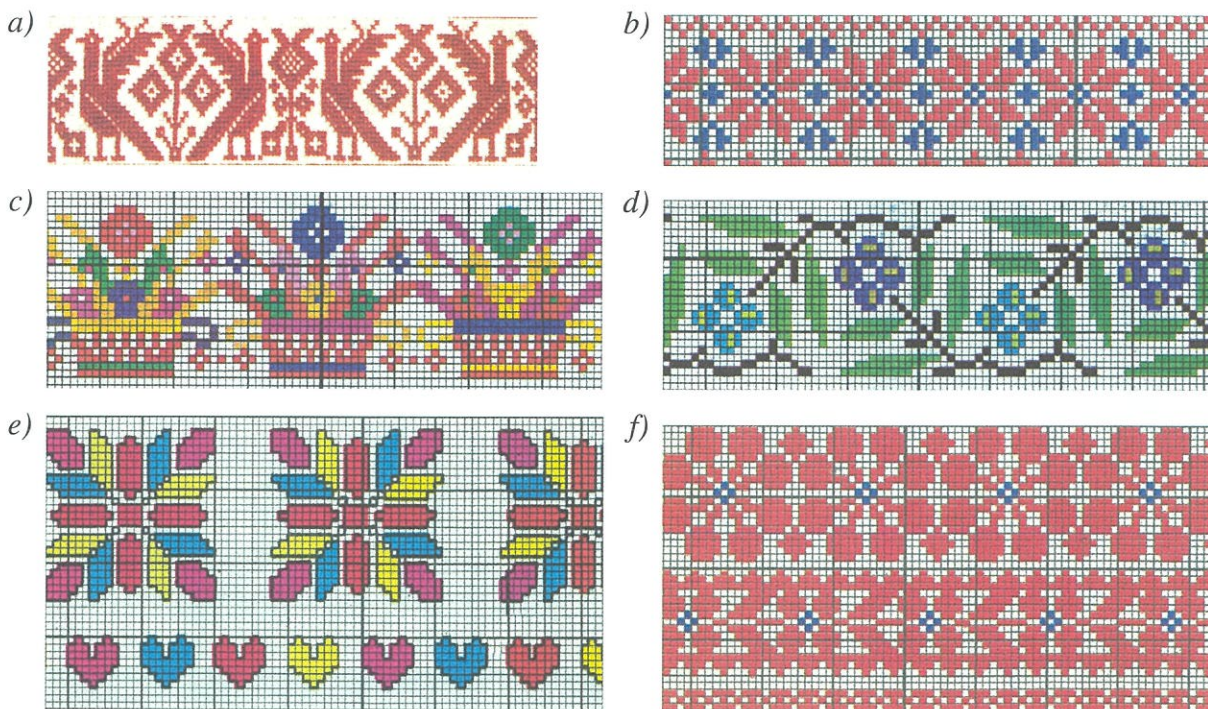
e) $NLUR$ tengelyes tükröképe

$PBQR$

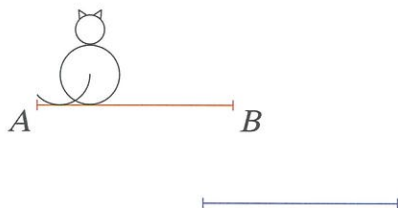
f) $NLUR$ eltolt képe

$PBQR$

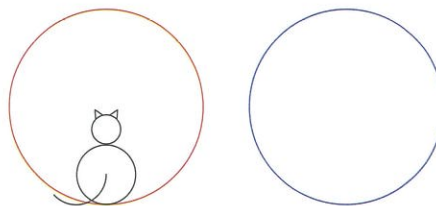
4. A rajzok mindegyikéhez – ha a színezéstől eltekintünk – található olyan transzformáció, amely az ábrát önmagába viszi át, vagyis amely szerint az ábra szimmetrikus. Mindegyik képhez keresd meg, melyik ez a transzformáció!



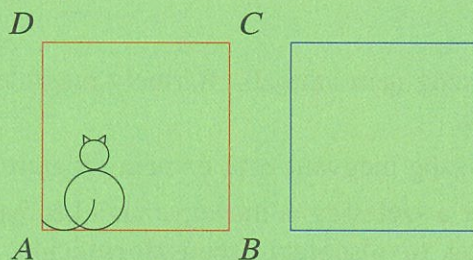
5. a) Hányféle és milyen mozgással kerülhet az AB szakasz a kék szakaszra?



- b) Hányféle és milyen transzformáció viheti át a piros kört a kék körbe? Segít, ha elképzeled, hogy hova került a cica!



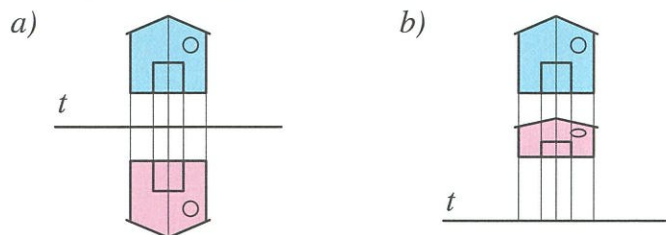
6. Hányféle és milyen mozgással kerülhet az $ABCD$ négyzet a kék négyzetre? Készíts rajzokat mindegyik esethez, és betűzd megfelelően a kék négyzetet! Segít a betűzésben, ha a kék négyzetre rárajzolod a cica képét.



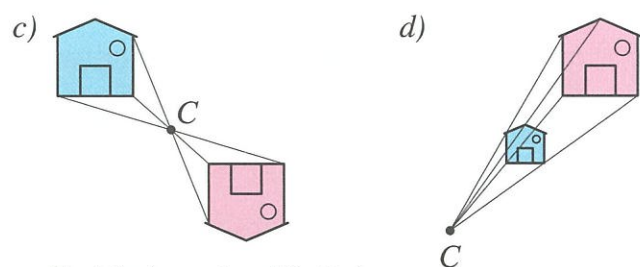
Nem egybevágósági transzformációk

Változik a szabály, változik a kép

Megrajzoltunk egy alakzatot (a házikót), és különböző szabályok alapján a képét is.



Ez tengelyes tükrözés.



Ez középpontos tükrözés.

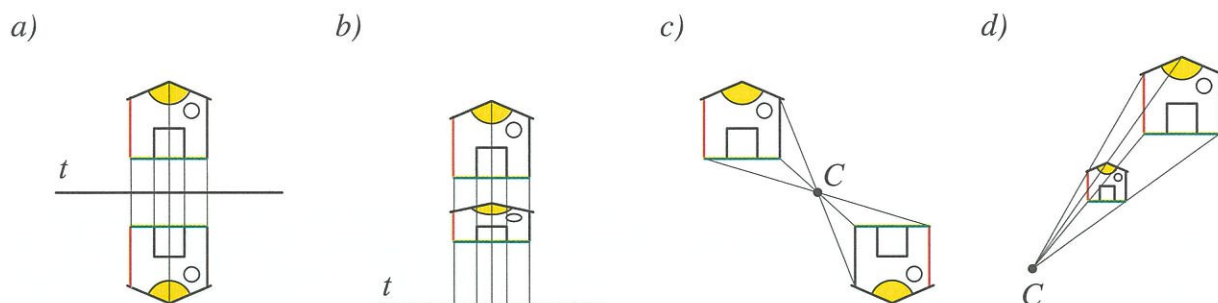
A *b)* esetben az alakzat pontjainak képéhez úgy jutottunk, hogy a pontból a tengelyre merőlegest bocsátottunk, és erre a tengellyel való metszéspontból felmértük a tengely ugyanazon oldalára a pont és a tengely távolságának a felét.

A *d)* esetben az alakzat pontjainak képéhez úgy jutottunk, hogy a pontot egy megadott ponttal (a centrummal) összeköttöttük, és erre a félegyenesre a centrumból kiindulva felmértük a pont és a centrum távolságának a felét. (Úgy is mondhatjuk, hogy az alakzatot a centrumból felére kicsinyítettük.)

1. példa

Figyeljük meg, hogyan változnak a távolságok és a szögek az előbbi transzformációkban!

Hasonlítsuk össze a tető hajlásszögét (sárga), a házikó magasságát (piros) és a házikó szélességét (zöld) az eredeti alakzaton és a képen!



Megoldás

Az *a)*, *c)*, *d)* szabályok esetén a szög nem változik. Bármely megfelelő szögpárra ugyanez teljesül. **Ezek szögtartó transzformációk.**

A *b)* transzformációnál a kijelölt szög megváltozott; ez nem szögtartó transzformáció.

Az *a)* és *c)* esetben a magasság és a szélesség is megegyezik a képpel, és ugyanez teljesül bármely más távolságra és a képre is. Ezek **távolságtartó transzformációk, egybevágóságok.**

A *b)* és a *d)* transzformációk nem távolságtartóak. A *d)* esetben azonban a távolságok mindegyike éppen a felére csökken. Ebben az esetben a megfelelő távolságok megváltoznak, de az arányuk (hányadosuk) egyenlő. Ez **aránytartó transzformáció.**

Ez a tulajdonság a *b)* esetben nem teljesül.

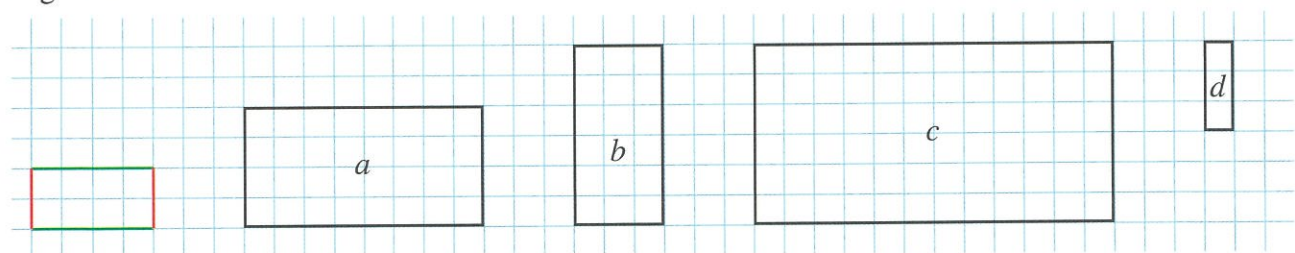
Azokat a transzformációkat, amelyekre igaz az, hogy bármely két pont esetén a képtávolság és az eredeti távolság aránya ugyanannyi, **aránytartó transzformációnak hívjuk**.

Ilyen a transzformációk a szögeket nem változtatják meg. A kép az eredetinek nagyított vagy kicsinyített mása, **hasonló** az eredetihez.

Az aránytartó transzformációkat **hasonlóságnak** vagy hasonlósági transzformációnak nevezzük.

2. példa

Válasszuk ki a színes téglalaphoz hasonló téglalapokat! Minden kiválasztotton színezd egyformán a megfelelő szakaszokat!



Megoldás

A színes téglalaphoz hasonló téglalapok: a , b , c .

Az a téglalap mindegyik mérete az eredetinek kétszerese, a **hasonlóság aránya 2**.

A b téglalap mindegyik mérete az eredetinek másfélszerese, a **hasonlóság aránya $\frac{3}{2}$** .

Az c téglalap mindegyik mérete az eredetinek háromszorosa, a **hasonlóság aránya 3**.

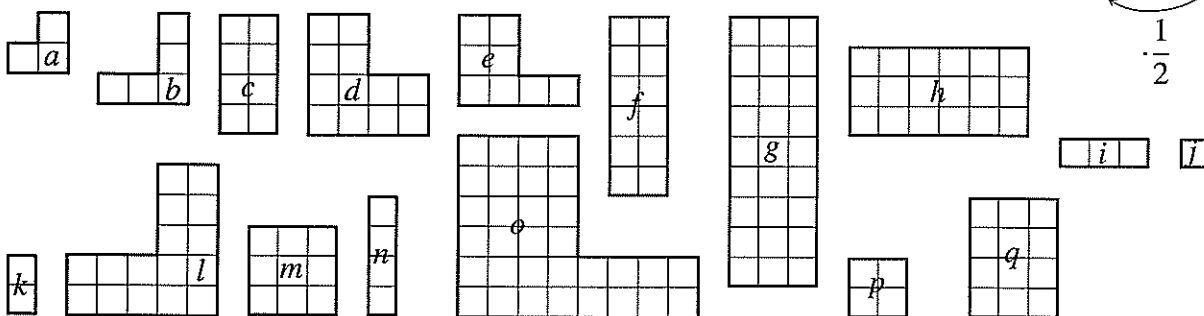
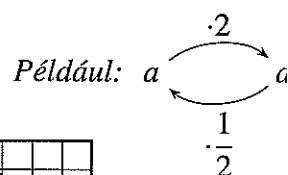
Sokszor készülnek makettek meglévő épületekről, vagy éppen a tervezettekről. Egy szép gyűjtemény a mórakalmi szabadtéri múzeum, amely 2015 márciusában nyílt meg. Nézz utána, milyen arányú kicsinyítésben láthatók a Mini Hungary szabadtéri múzeumban a nevezetes épületek!



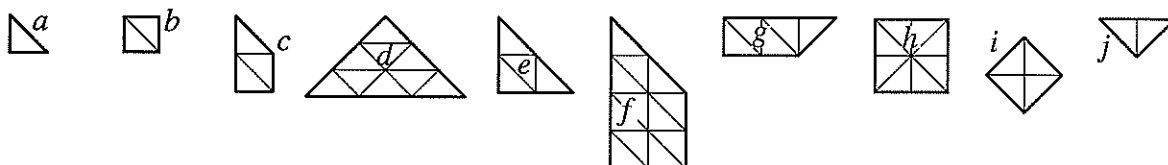
Feladatok

1. Egybevágó lapokból építettünk síkidomokat.

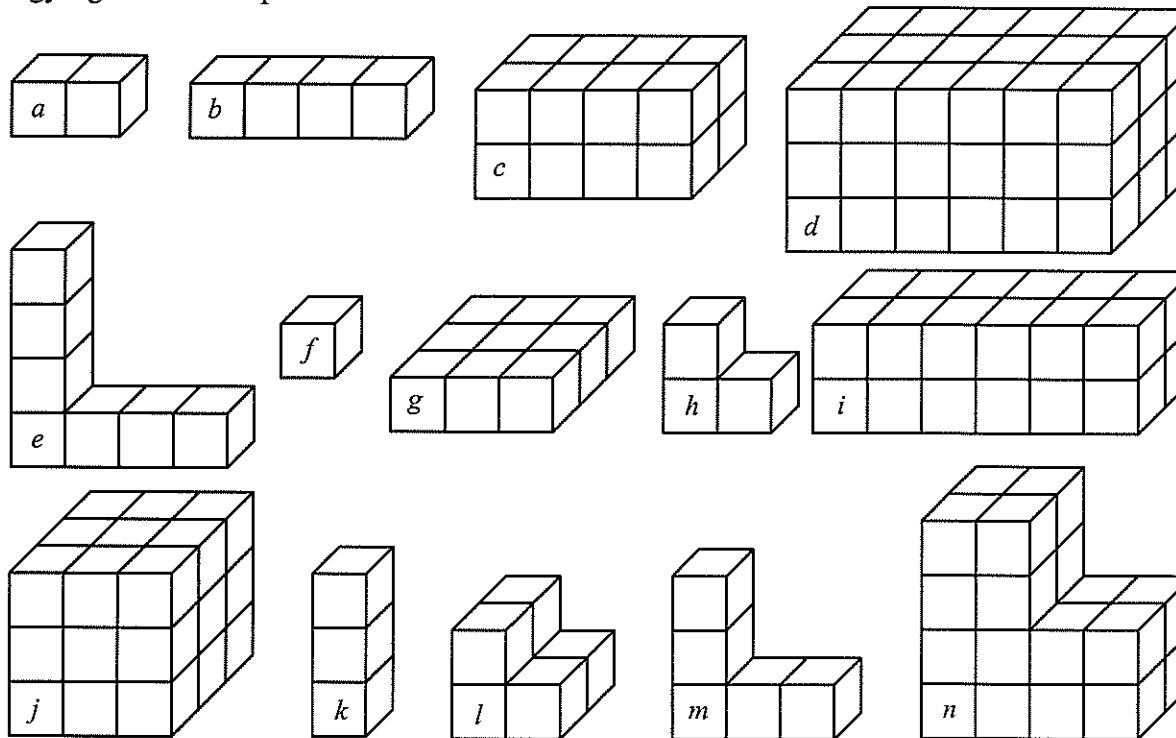
Add meg a hasonló alakzatok betűjelét és a hasonlóság arányát!



2. Egybevágó háromszögekből építettünk síkidomokat. Vannak-e közöttük hasonló alakzatok
 Add meg a betűjelüket és a hasonlóság arányát!



3. a) Egységkockákból építettünk testeket. Vannak-e köztük hasonlóak?



- b) Igazak-e az állítások?

A: a és b hasonlóak.

C: h és e nem hasonlóak.

E: j és f hasonlóak.

G: b -nek 2-szeres nagyítása i .

I: a $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítése e -nek.

B: a -nak 3-szoros nagyítása b .

D: f -nek 3-szoros nagyítása g .

F: h -nak 2-szeres nagyítása n .

H: h kicsinyítése e -nek.

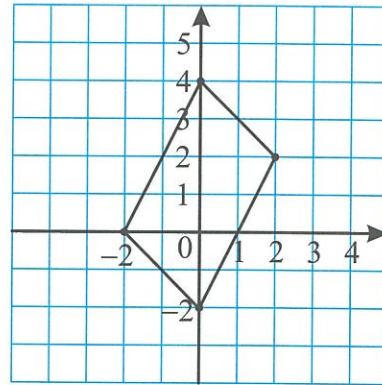
J: Egyik sem hasonló k -hoz.

4. Rajzold meg ezt a paralelogrammát!

Készítsd el a paralelogramma képét a következő szabályok szerint! Minden szabályhoz készíts új ábrát!

Válaszd ki azokat az eseteket, amelyekben a képalakzat hasonló az eredetihez!

- a) $(x; y) \mapsto (2x; 2y)$ b) $(x; y) \mapsto \left(-\frac{1}{2}x; -\frac{1}{2}y\right)$
 c) $(x; y) \mapsto (x + 2; y)$ d) $(x; y) \mapsto (x - 1; y + 3)$
 e) $(x; y) \mapsto (2x + 3; 2y + 3)$ f) $(x; y) \mapsto (|x|; |y|)$



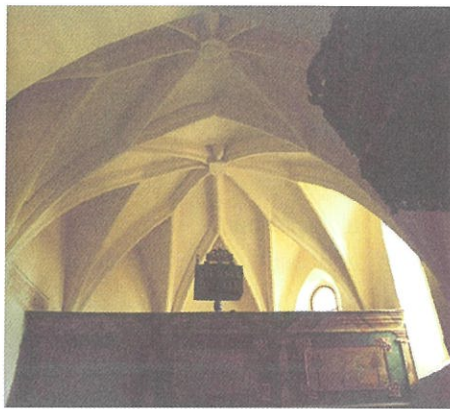
5. A koordináta-rendszerben egy házikó pontjait adtuk meg jelzőszámaikkal: $A(2; 6)$, $B(4; 6)$, $C(4; 8)$, $D(3; 9)$, $E(2; 8)$. Adj meg szabályokat, amelyek a házikót a fejezet elején levő a)–d) transzformációk szerint változtatják meg!

6. Mekkora a valóságban?

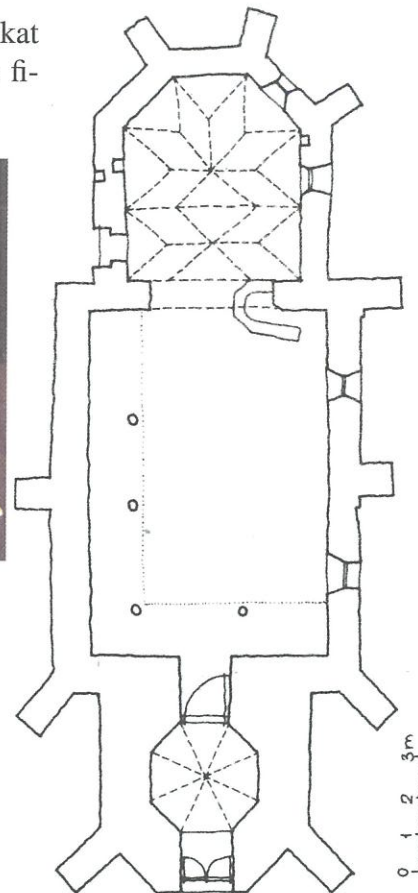
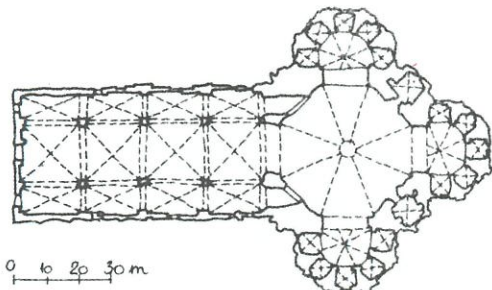
A firenzei dómról és a vámosoroszi templomról készült fotókat látod. Az alaprajz mellett megadtuk azok léptékét is. Melyik a firenzei dóm alaprajza? Miért?



Firenzei dóm (Olaszország)



Vámosoroszi templom



Írd mindkét rajz mellé a kicsinyítés arányát!

Becsüld meg, milyen hosszú a firenzei dóm és a vámosoroszi templom! Mérd meg, hogy mekkora a rajzon, és számítsd ki, hogy mekkora a valóságban

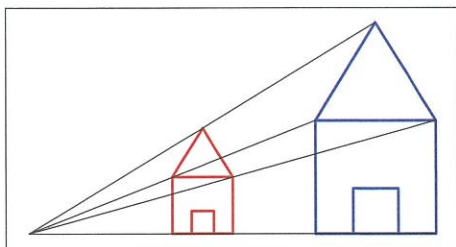
- a) a dóm hossza és legnagyobb szélessége,
 b) a templom hossza és legnagyobb szélessége!

A középpontos hasonlóság képekben



Pontszerű fényforrásból (pici lámpából) indul fénysugárral a kezünk felnagyított árnyékát látjuk a vetítővászonon. Az aránytartó transzformációk a hasonlóságok – sokfélék lehetnek. Egyik fontos fajtájuk, amikor az alakzatokat egy pontból arányosan nagyítjuk vagy kicsinyítjük.

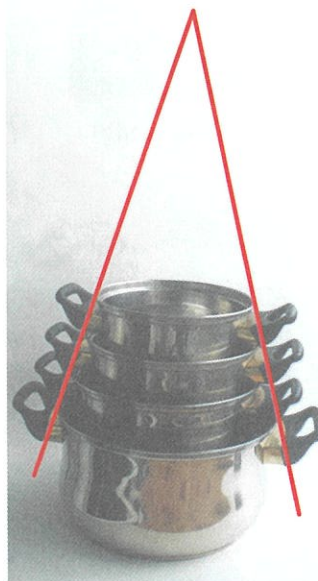
Bizonyára mindenki látott már diavetítést. Ilyenkor egy kicsi, erős fényforrásból kiinduló sugarak kinagyítják a dián lévő képet. Minél messzebb tesszük a diavetítőt a vetítővászontól, annál nagyobb képet láthatunk a vásznon. A kivetített kép nem torzkép, hanem az eredeti kép nagyítása.



A piros házikó kétszeres nagyítása a kék ház. A kék házat felére kicsinyítve kapjuk a pirosat.

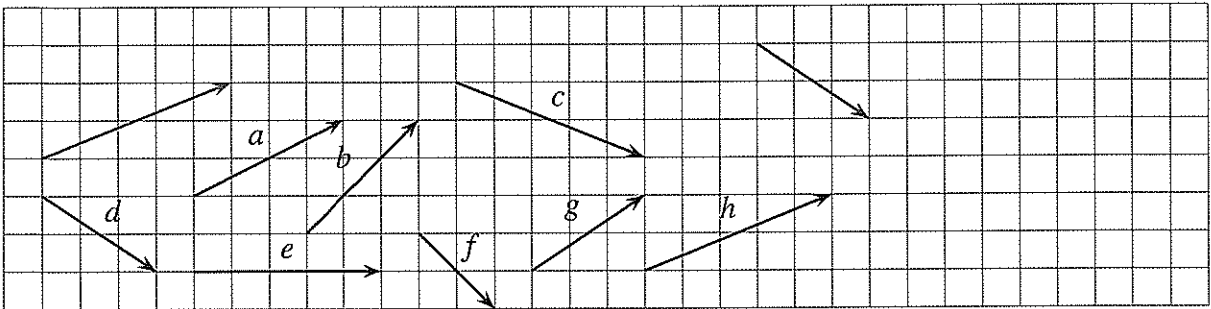


A matrjoska babák mind hasonlóak egymáshoz. A lábosok egymás kicsinyített, illetve nagyított másai.

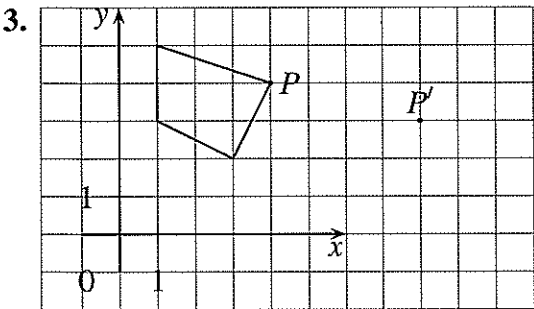
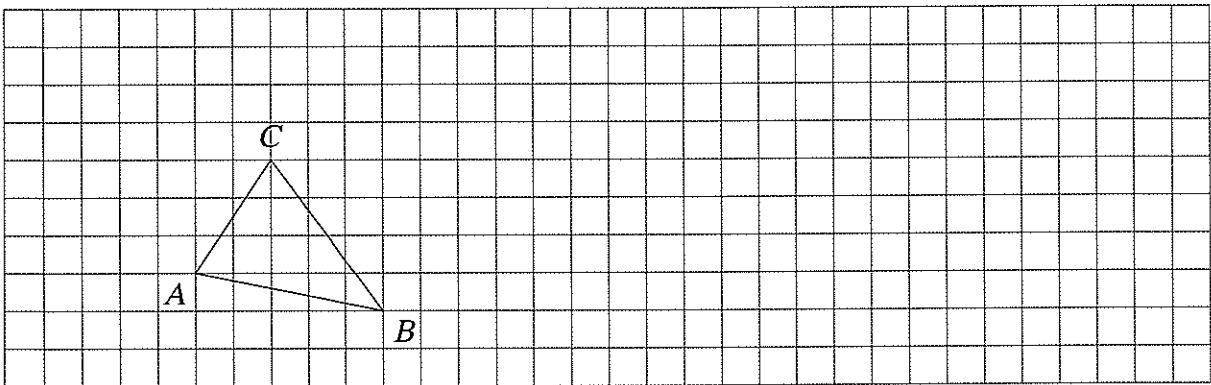


Tudáspróba

1. Melyik vektor egyenlő a piros, melyik a kék vektorral?

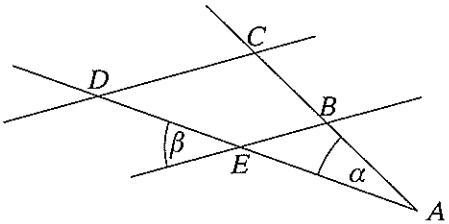


2. Told el a háromszöget az előző feladatban megadott a , illetve c vektorral!



Egy eltolás a P pontot a P' pontba vitte át. Rajzold meg a négyszög eltolt képét, és add meg a kép csúcsainak koordinátáit!
Add meg az eltolás vektorát!

4. Az α szög szárait egy párhuzamos egyenespár metszi. Jelöld kékkel a β -val egyállású szöget! Jelöld feketével a β -val fordított állású szögeket! Határozd meg a BED szögét és az ABE szögét, ha $\beta = 40^\circ$ és $\alpha = 25^\circ$!



5. Adott az ABC háromszög és rajta kívül egy O' pont. Az O' pont az ABC háromszög köré írt köré középpontjának eltolással kapott képe. Szerkeszd meg a háromszög eltolt képét!

Összefoglaló fejezet

Középiskolába készülünk

Számok

1. 6948

- Írd le betűkkel!
- Kerekítsd egyesekre, tízesekre, százásokra és ezresekre!
- Írd le a legnagyobb helyi értéken lévő számjegy ellen-tettjét!
- Írd le a legkisebb alaki értékű számjegy reciprokát!
- Melyik számnál kevesebb 1355-tel?
- Melyik számnak a 12-szerese?
- Osztható-e 9-cel, 18-cal, 36-tal, 72-vel?



2. Helyezd el a számoknak megfelelő betűket a számegyenesre! Olvasd ki, hogy mit kaptál!

$$U = 25\%$$

$$T = 3\frac{1}{4} + \frac{1}{7}$$

$$N = 1,2\text{-nek a reciproka}$$

$$Á = \left| -\frac{2}{3} : \frac{4}{15} \right|$$

$$K = 3\text{-nak a } \frac{2}{5} \text{ része}$$

$$Ó = (-0,2)^2$$

$$J = -0,2^2$$

$$M = \frac{1}{33} \cdot \frac{11}{5}$$

3. Hasonlítsd össze! Tedd ki a $<$, $>$ vagy $=$ jelet!

$$a) 2 \text{ és } 3 \text{ aránya } \boxed{} \frac{26}{39}$$

$$b) 12\text{-nek a } \frac{3}{4} \text{ része } \boxed{} 0,75\text{-nak a } 12\text{-szeres}$$

$$c) \frac{3}{7} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{14}{5} \boxed{} 2\frac{1}{3} : \frac{7}{6}$$

$$d) \left(\frac{2}{5}\right)^2 \boxed{} 2 \cdot \frac{2}{5}$$

$$e) \frac{3}{8}\text{-nak a } 20\%\text{-a } \boxed{} \frac{3}{8}\text{-nak az } \frac{1}{4} \text{ része} \quad f) -1\frac{3}{7} \text{ reciproka } \boxed{} \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$$

4. „Többet észszel, mint erővel!”

$$a) \frac{13}{24} \cdot \frac{12}{65}$$

$$b) 3\frac{1}{2} : \frac{49}{4} \cdot \frac{7}{8}$$

$$c) \frac{2}{3} : 17 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{14} \cdot 17$$

$$d) (-8) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{11}{19} \cdot 0 \cdot \frac{5}{7}$$

$$e) 3\frac{2}{5} : \frac{34}{35} - \frac{35}{34} \cdot \frac{17}{5}$$

$$f) 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

5. Keresd meg az egyenlőket!

$$\boxed{A} \quad 2^4 \cdot 7^4$$

$$\boxed{B} \quad (-1)^5 + 1^5$$

$$\boxed{C} \quad 6,28 \cdot 10^2$$

$$\boxed{D} \quad 10^3 - 372$$

$$\boxed{E} \quad (2 \cdot 7)^4$$

$$\boxed{F} \quad 2^4 + 7^4$$

$$\boxed{G} \quad 0,1^4 - 0,0001$$

$$\boxed{H} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^6$$

$$\boxed{I} \quad \frac{4^3}{9}$$

$$\boxed{J} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^3$$

$$\boxed{K} \quad -\left(\frac{2}{3}\right)^6$$

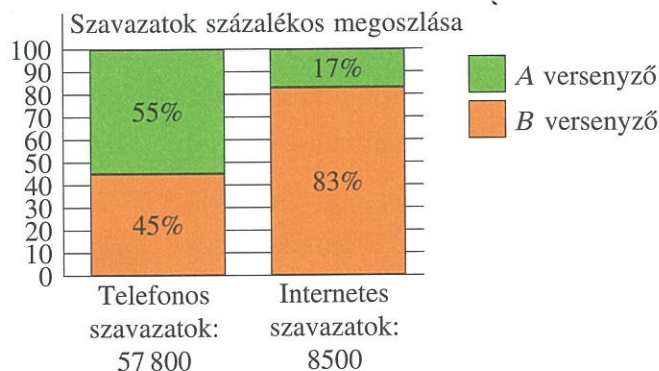
6. Végezd el a műveleteket! Minden eredménynek egy-egy betű felel meg. Ha jól számoltál, akkor egy közmondás első részét kapod, amelyet bizonyára be tudsz fejezni.

$(-60) \cdot (-3) : 20 \cdot 2$	$(-60) \cdot (-3) : (20 : 2)$	$3\frac{3}{4} \cdot 4\frac{4}{5}$
180 felének az ellentettje	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{(-2)^2}{9}$	$\frac{7}{3} : 2\frac{5}{8}$
$-328 + 476 : 2$	$\frac{3}{7} + \frac{5}{4}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{18}{16}$
$(-328 + 476) : 2$	$\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right)$	$(0,03)^2$
$\frac{1}{3} + \frac{4}{5} : \left(-\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{7}{4} - \frac{3}{5}\right)$ ellentettje	$-4\frac{1}{5} + 2,5$
$\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2^2}{9}$	$\frac{14}{3} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{9}{5}$	30-nak a $\frac{3}{5}$ része
$3\frac{5}{8}$ reciproka		
$-\frac{10}{17}$ reciproka		

$$A = 18 \quad \acute{A} = \frac{8}{29} \quad D = -90 \quad G = -\frac{13}{15} \quad I = 74 \quad J = 0 \quad K = \frac{8}{9}$$

$$O = 1\frac{19}{28} \quad \acute{O} = 12 \quad R = -\frac{17}{10} \quad S = -1\frac{3}{20} \quad T = 0,0009 \quad \acute{U} = 2$$

7. Egy tehetségkutató verseny döntőjében a nézők telefonon és az interneten is szavazhatnak a szerintük legjobb műsor-számra. Az a versenyző nyeri a döntőt, aki a legtöbb szavazatot kapja. Az ábrán a telefonos és az internetes szavazatok száma és százalékos megoszlása látható. Az ábra alapján ki nyerte a döntőt? Válaszodat számítással indokold!



(Kompetenciamérés, 2013)

8. Egy autógyár egyik üzemében előre legyártott alkatrészekből szerelik össze a kész autókat. A gyár napi 14 órát üzemel, és percenként legördül egy új kocsi a szalagról. Melyik művelet-sorral lehet kiszámítani, hogy hány nap alatt teljesítenek egy 6000 db autóra leadott rendelést?

(A) $6000 : (60 \cdot 14)$ (B) $6000 : 14 \cdot 60$ (C) $6000 : 14$ (D) $6000 : (24 - 14)$

(Kompetenciamérés, 2014)

9. Írd le matematikai jelekkel, és számítsd ki

- a) (-820) és 450 összegének az abszolút értékét,
- b) (-820) és 450 abszolút értékeinek összegét,
- c) $270 \frac{5}{9}$ részének a felét,
- d) $\frac{3}{4}$ és $\frac{4}{5}$ különbségének a reciprokát,
- e) 20 -nak a 120% -át,
- f) 120 -nak a 20% -át,
- g) $0,14\%$ -nak a tizedes tört és a tört értékét,
- h) három és négy arányát!

10. Határozd meg x , y , z értékét, ha

$$x = \frac{11}{7} : \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{7} \right), \quad y = -3 - (5 - 11), \quad z = \text{a legnagyobb egyjegyű prímszám}$$

Számítsd ki a három szám átlagát!

11. Határozd meg az a , b és c értékét, ha

$a = 12$ és 18 legkisebb közös többszöröse, $b = \text{a legnagyobb kétjegyű négyzetszám}$,
 $c = \text{a legkisebb kétjegyű prímszám háromszorosa!}$

Válaszd ki az alábbiak közül az igaz állításokat!

A: A három szám legnagyobb közös osztója a 9 .

B: Az $\frac{a+c}{b}$ tört értéke $\frac{4}{27}$ -del kisebb az 1 -nél.

C: $11 < \frac{2b-a}{\frac{c}{3}} < 12$.

D: Az $\frac{a}{b}$ tört reciproka $2,5$.

12. Egy műszaki áruház raktárában 120 darab televízió van. A készlet 15% -a 36 cm képátlójú készülék, 48 darab 72 cm képátlójú, a többi 55 cm képátlójú.

- a) A legkisebb képátlójú készülékből hány darab van a raktárban?
- b) Az 55 cm képátlójú készülékből hány darab van a raktárban?
- c) Hány százalékkal változik a teljes raktárkészlet, ha 21 készüléket eladnak?

13. Egy iskola 375 diákja és 25 tanára megkérdezésével felmérték, hogy három lehetőség közül ki melyik ételt választaná legszívesebben az iskolai menzán. A felmérés eredménye egy hiányosan kitöltött táblázatban található meg.

	Alsósok	Felsősök	Tanárok	Összesen
Rántott csirke krumplival	78		17	220
Főzelék feltéttel		31		70
Túrós tészta	65	43	2	

Számold ki a táblázatból hiányzó számokat, majd dönts el, hogy melyik állítás igaz és melyik hamis!

- a) A megkérdezettek több mint 20% -a választotta a főzeléket feltéttel.
- b) Az alsósoknak megközelítőleg 37% -a a túrós tésztát kedveli a legjobban.
- c) A főzeléket feltéttel a tanárok választották a legnagyobb arányban.
- d) A felsősök több mint negyed része a túrós tésztát kedveli a legjobban.

14. Egy cég vezetése az éves jutalomlapot legeredményesebb dolgozói között akarta szétosztani. A javaslat szerint Andrea, Béla, Csaba és Dénes kapott volna jutalmat, az egyes jutalmak aránya az előbbi sorrendnek megfelelően $1 : 2 : 3 : 4$.

Közben kiderült, hogy akinek a teljes jutalomlap ötödét szánták, súlyos hibát követett el. A vezetés úgy döntött, hogy a 16 000 forintot is szétosztják a másik három dolgozó között úgy, hogy az ő jutalmaik aránya ne változzon.

- Hány forint a jutalomlap?
- Név szerint ki nem kap jutalmat a négy dolgozó közül?
- A kiosztott jutalmak közül mennyi volt a legkevesebb?
- Mennyi volt a legnagyobb kiosztott jutalom?

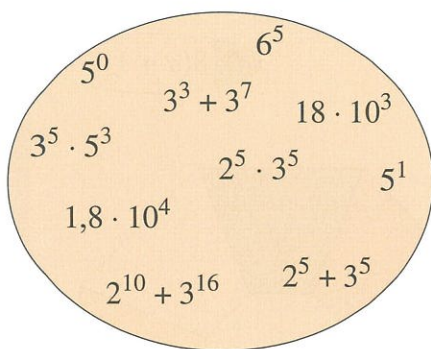
5. A festékküzetben színskála alapján keverik a festékeket. Egy alkalommal 40% fehér, 25% kék és 35% sárga festékből zöld színű festéket állítottak elő.

- Hány liter kék festék szükséges 16 liter zöld festék elkészítéséhez?
- Hány liter zöld festék keverhető 8 liter fehér festék felhasználásával?

Egy másik alkalommal a fehér, a kék és a sárga festéket $9 : 6 : 5$ arányban keverték.

- Hány százalék kék festéket tartalmaz ez a keverék?
- Hány liter sárga festék van 32 liter ilyen arányú keverékben?

6. Válassz az alábbi halmaz elemei közül!



- Páros szám.
- Öttel osztható szám.
- Prímszám.
- Se nem prímszám, se nem összetett szám.
- Normálalakban felírt szám.
- Két egymással egyenlő szám.
- A 18 pontosan 1000-szer van meg benne.
- Osztható 3^3 -al.

7. Hány darab háromjegyű számot tudsz készíteni a $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{9}$ számkártyákból?

Mennyi a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kirakott háromjegyű szám osztható lesz

- 2-vel,
- 3-mal,
- 8-cal,
- 4-gyel,
- 9-cel,
- 12-vel?

8. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek kétszerese négyzetszám, háromszorosa pedig köbszám?

9. Adott két természetes szám: $k = 495$, $m = 1275$. Készítsd el k és m prímtényező felbontását! Mit kapunk eredményül, ha a k számot elosztjuk k és m legnagyobb közös osztójával?

20. Az autóbusz-végállomásról a 7-es buszokat 5 percenként, a 15-ös buszokat 6 percenként, míg a gyors járatú 173E-t csak 11 percenként indítják. Reggel 5-kor egyszerre indul a fenti három budapesti járat. Válaszd ki a felsoroltak közül a helyes választ vagy válaszokat!

a) A 7-es és 15-ös buszokra vonatkozó kérdések:

- A) Minden egész órában egyszerre indítják őket.
- B) A nap folyamán legalább 50-szer indulnak együtt.
- C) Pontosan 48-szor indulnak együtt.
- D) Minden órában háromszor van közös indulásuk.

b) Mindhárom járatra vonatkozó kérdések:

- A) Legközelebb 220 perc múlva indul egyszerre a három járat.
- B) A nap folyamán kétszer indulnak egyszerre.
- C) A nap folyamán 4-szer indulnak egyszerre.
- D) Legközelebb 5,5 óra múlva indulnak egyszerre.



Algebra

1. Keresd a párját!

A) $8a - 7a + 12a + 3a$

B) $8a - (7a + 12a + 3a)$

C) $8a - (7a - 12a) + 3a$

D) $8 - 7a + 12a + 3a$

E) $8a - 7 + 12a + 3a$

F) $12a - (7a - 3a) + 8$

a) $16a$

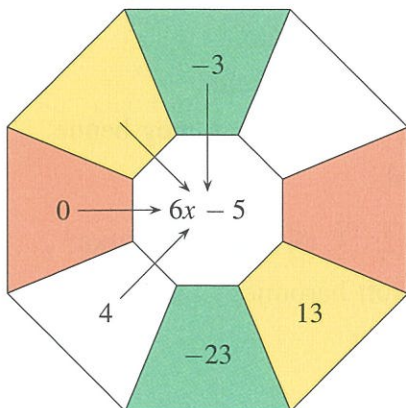
b) $23a - 7$

c) $-14a$

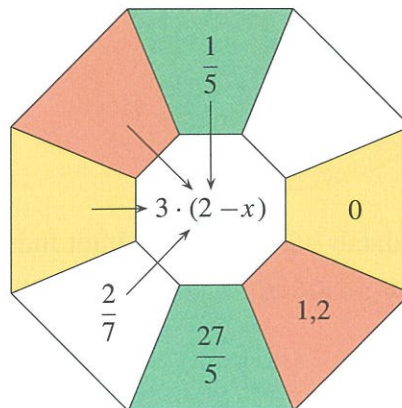
d) $8(a + 1)$

2. Milyen számok kerülnek az üresen hagyott helyekre?

a)



b)



3. Mennyi az $[a - (b - c)] - [(a - b) - c]$ kifejezés értéke, ha $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{3}$ és $c = \frac{1}{6}$?

A megadott 5 válasz közül pontosan egy helyes. Válaszd ki a betűjelét!

A: $-\frac{2}{3}$

B: 0

C: $-\frac{1}{3}$

D: $\frac{1}{3}$

E: $\frac{1}{2}$

4. Írd le algebrai kifejezésekkel a mondatokat!

- a) Egy családban a férj 8 évvel idősebb a feleségénél. Ha a férj életkora f , akkor mennyi a feleségé, és mennyi kettőjük életkorának az összege?
- b) Öt szomszédos egész szám közül a középső k . Írd le a másik négy egészet is, és írd fel az összegüket!
- c) Két szám különbsége 4. A kisebbet k -val jelöljük. Írd fel a nagyobb számot és a két szám számtani közepét!
- d) Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 14. A tízesek helyén t áll. Mi áll az egyesek helyén? Milyen értéket vehet fel a t ?

5. a) Számold ki a következő kifejezések helyettesítési értékét!

A) $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$ esetén $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y^2$

B) $a = -2$, $b = 6$ esetén $\left| 3a + \frac{1}{2}b \right|$

C) $a = 5$, $b = -2$ esetén $0,5a - (2b)^2$

b) Írd le csökkenő sorrendben a kiszámolt helyettesítési értékeket!

6. Az 1, 2, 3, 4, 5 számok közül melyikre kapsz az alábbi három állítás mindegyikére igaz, pontosan egy hamis, pontosan két hamis vagy csak hamis választ?

a) x egész szám

b) $x + \frac{1}{x}$ egész szám

c) $x^2 - 3x$ negatív egész szám

7. Melyik nem ugyanakkora részét adja a p -nek, mint az A ? **A)** p -nek a 125%-a

a) p -nek az $\frac{5}{4}$ része

b) $\frac{5p}{4}$

c) $\frac{4p}{5}$

d) $p : \frac{4}{5}$

e) $\frac{p \cdot 125}{100}$

f) $p + \frac{1}{4}$

g) $2p - \frac{3}{4}p$

h) $\frac{p \cdot 100}{125}$

8. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $7x - 9 + 4x = 3x - 3 + 12 + 9x$

b) $\frac{x}{4} + \frac{2x}{3} - 5 = \frac{x}{3} - \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$

c) $\frac{3x - 4}{5} + 8 = 12$

d) $3x - 7(x - 1) = 7 - 4x$

e) $8 - \frac{3x - 4}{5} = 12$

f) $\frac{1}{3}(x - 6) - 2(x + 5) = 6(x - 2)$

9. a) Oldd meg az egyenletet az egész számok halmazán!

$$\frac{10 - (x - 6)}{3} = 2 - \frac{x - 6}{2}$$

b) Oldd meg az alábbi egyenletet a racionális számok halmazán!

$$\frac{3x + 1}{14} - \frac{x - 5}{6} = \frac{2x - 11}{7} + \frac{x}{21}$$

10. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $3(8x - 4) - (3 - 2x) = 5(3x - 4) - 2(x + 3)$

b) $\frac{3x-1}{5} - \frac{2-7x}{3} = 5 - \frac{4x-9}{15}$

c) $\frac{x+1}{4} + \frac{3-2x}{2} = \frac{1}{4} - \frac{x-2}{3}$

11. Az alábbi négy egyenletet [a), b), c) és d)] megoldottuk a valós számok halmazán. Azt tapasztaltuk, hogy pontosan két egyenletnek azonos a megoldáshalmaza. Melyik ez a két egyenlet?

a) $3x - 5 = 7 - 3x$

b) $2 - \left\{ 2 - [2x - (x - 2)] + \frac{x}{2} \right\} = \frac{x}{2}$

c) $\frac{1}{x} = \frac{3}{x} + 1$

d) $\frac{x+1}{3} - \frac{4-3x}{2} = x$

A: a) és b)

B: a) és c)

C: a) és d)

D: b) és c)

E: b) és d)

12. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $5x + 3 \geq 4x - 8$

b) $8(x - 2) + 4 < 3x - 9$

c) $\frac{x+3}{4} - 2 < 3(4 - x)$

d) $\frac{x}{3} - 2 \cdot \frac{x+1}{5} \geq 4$

13. a) Oldd meg a következő egyenlőtlenséget a negatív valós számok halmazán!

$$3x - 2(3x - 5) \leq 3(x + 5) - 2(2x - 1)$$

b) Mely egész számok teszik igazzá az egyenlőtlenséget?

14. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenséget, és megoldásod szemléltesd a számegyenesen!

$$\frac{x+2}{5} \geq \frac{4}{3} - \frac{5-x}{6}$$

15. Az öttusaversenyek első száma a vívás. Minden versenyző mindenkivel egy mérkőzést vív, és 25 győzelem 1000 pontot ér. Ahánnyal több győzelmet ér el ennél egy versenyző, annyszor 2 ponttal nő, ahánnyal kevesebbet, annyszor 24 ponttal csökken az 1000 pont.

Hány mérkőzést nyert meg az a sportoló, aki 880 pontot szerzett? Úgy dolgozz, hogy számításaid nyomon követhetők legyenek!

(Kompetenciamérés, 2011)

16. Euler (1707–1783) svájci matematikus feladata:

Egy apa 1600 koronát hagyott három fiára. A végrendeletében meghagyta, hogy a legidősebb fiú jussa 200 koronával több legyen a középsőénél, a középsőé pedig 100 koronával több, mint a legkisebbé. Számítsd ki a fiúk örökségét!

17. Az egyetemen az egyik tantárgyból akkor lehet ötöst kapni, ha a tesztek összesített eredménye eléri a maximális pontok 85%-át. Zsófinak eddig 92 pontja van, és még egy 50 pontos teszt megírása van hátra.

Legalább hány pontot kell elérnie Zsófinak az utolsó teszten, hogy meglegyen az ötöse, ha az év végére megszerezhető pontok maximális száma 160? Válaszd ki a helyes válasz betűjelét!

(A) 50

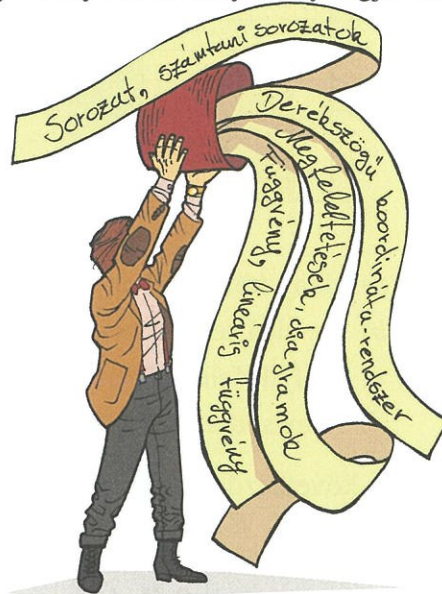
(B) 44

(C) 42

(D) Már biztosan nem kaphat ötöst.

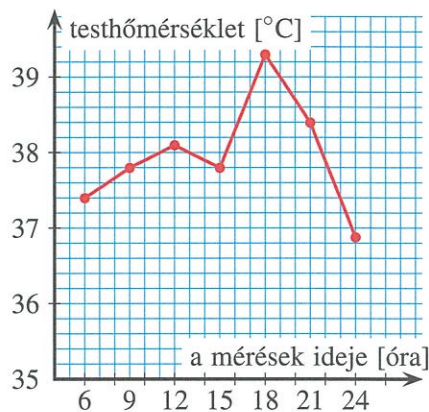
(Kompetenciamérés, 2011)

18. Tíz egymást követő páros szám összege 50.
- Az összeadott számok közül melyik a legkisebb?
 - Az összeadott számok közül melyik a legnagyobb?
 - Mennyi a két említett szám számtani közepe?
19. Egy néptáncegyüttesben háromszor annyi a fiú, mint a lány. Egy előadáson közülük nyolc pár lép fel. A fel nem lépők között ötször annyi a fiú, mint a lány. Hány fiú és hány leány tagja van az együttesnek?
20. Egy ruha árának ötöde a kereskedő haszna. Ha megemelné az árat 2000 Ft-tal, akkor már az ár harmada lenne a haszna. Mennyi a ruha ára?

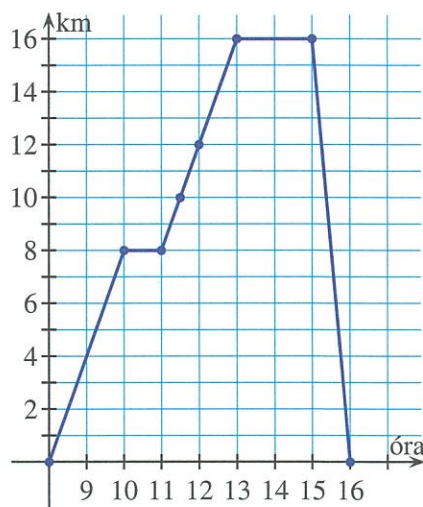


Függvények, sorozatok

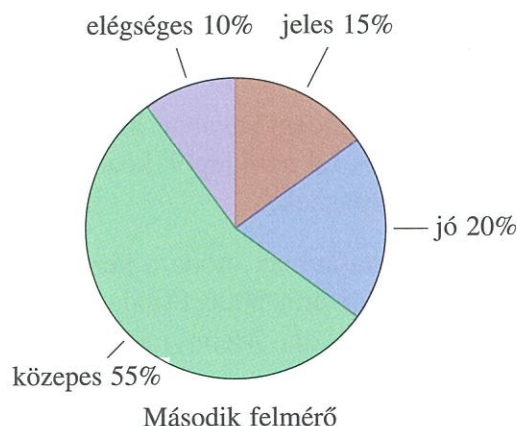
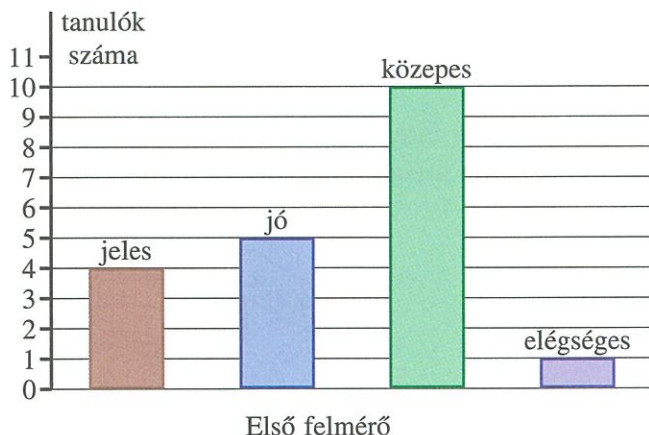
1. Pisti tüdőgyulladást kapott, és kórházba került. A lázát reggel hat órától éjfélig három óránként mérték, és az alábbi lázlapon ábrázolták. Válaszolj a grafikon alapján az alábbi kérdésekre:
- Pistinek mekkora volt a legmagasabb láza? (A választ egy tizedesjegy pontossággal add meg!)
 - Melyik mérési időpontokban volt legalább $38,1^{\circ}\text{C}$ Pisti láza? (Minden ilyen időpontot sorolj fel!)
 - Hány $^{\circ}\text{C}$ volt a legkisebb eltérés két egymást követő mérés között? (A választ egy tizedesjegy pontossággal add meg!)
 - Melyik két egymást követő mérés között változott Pisti láza $0,9^{\circ}\text{C}$ -ot?



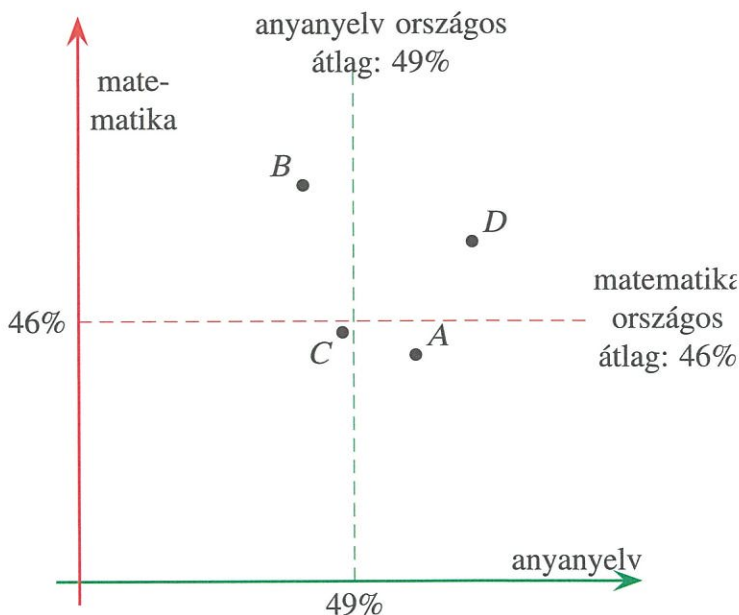
2. Egy nyolcadikos osztály egynapos kirándulásáról készült a grafikon, melynek alapján válaszolj az alábbi kérdésekre!
- Hány órakor indultak a gyerekek?
 - Hány óráig volt a kirándulás, és hány km-t tettek meg a gyerekek?
 - Összesen hány órát tartottak pihenőt, és összesen mennyi ideig pihentek?
 - Mennyi idő alatt érték vissza a kirándulás végpontjától a kiindulási helyükre? Vajon miért érték olyan gyorsan vissza?



3. A 8. osztályosok két felmérőt írtak, mindkettőt 20 tanuló írta meg. Az eredményeket az alábbi diagramok mutatják.



- Hány közepes volt a második felmérésben?
 - Az első felmérésben hány százalék volt a jó osztályzatú?
 - Melyik felmérésben volt több jeles?
 - A második felmérésben hányval volt több közepes osztályzat, mint jeles?
4. A következő diagramon négy iskola (A, B, C, D) nyolcadik osztályainak felvételi eredményei láthatók matematikából és anyanyelv-ből. A diagram adatai alapján dönts el, melyik igaz, illetve melyik hamis a következő állítások közül!

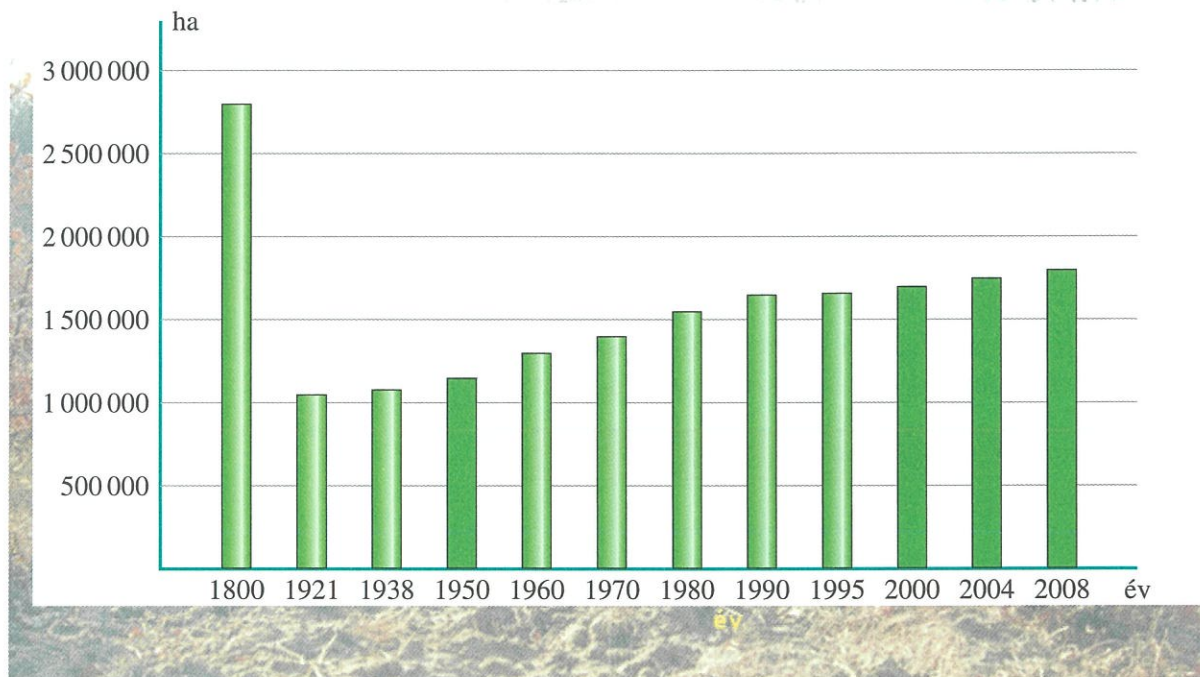


- Az A iskola mindkét tantárgyból az országos átlag alatt teljesített.
- A B iskola jobb eredményt ért el anyanyelvből, mint a D iskola.
- A C iskola eredménye mindkét tantárgyból az országos átlag közelében volt.
- A D iskola mindkét tantárgyból jobb eredményt ért el, mint a többi iskola.

(Kompetenciamérés, 2014)

5. Az erdők fontosságával mindnyájan tisztában vagyunk. Olvass le minél több információt az Erdészeti Igazgatóság által készített oszlopdiagramról! Válaszolj az alábbi kérdésekre is!

Erdőterület változása 1800–2008



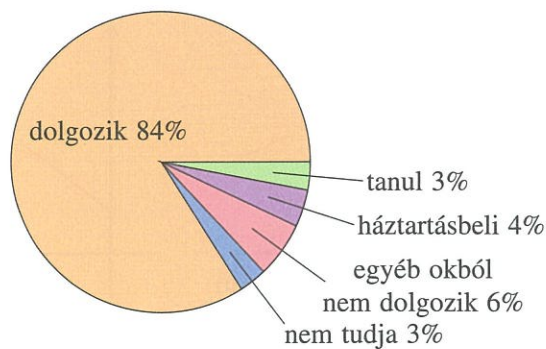
- Mit mondhatunk az erdőterület változásáról 1800 és 1921 között? Körülbelül hány százalékos a csökkenés mértéke?
- Mit mondhatunk az elmúlt 70 év vonatkozásában?
- A 2008-ban készült felméréskor az erdő területe az ország területének 20,3%-a volt, ezt 27%-ra szeretnék növelni. Hány ha-os lesz a növekedés?

(www.nebih.gov)

6. A Központi Statisztikai Hivatal (KSH) adatai alapján készült ez a kördiagram a 2014-ben hazánkból külföldre távozó 31 500 emberről.

- Adj meg egy alaphalmazt és egy képhalmazt, és írd meg a hozzárendelési utasítást a két halmaz elemei között!
- Függvényt határoz-e meg az utasításod, ha igen miért, ha nem, akkor miért nem?
- Cseréld meg a két halmaz szerepét, és válaszolj úgy is a b) kérdésre!
- A kivándorolt emberek közül hányan dolgoznak?
- Hányan tanulnak a kivándorlók közül?

A kivándorló magyarok megoszlása fő tevékenységük szerint (2014)



(KSH)

7. Minden számhoz rendeld hozzá a) az ellentettjét

–7 0 1,2 $2 + \frac{1}{3}$

- b) a négyzetét!

$-\left(3 - \frac{2}{5}\right)$ $\left(\frac{1}{4}\right)^2$

8. A derékszögű háromszög két befogójának hosszához rendeld hozzá az átfogó hosszát! Megfordítható-e ez a hozzárendelési utasítás?

a) $a = 3$ cm és $b = 4$ cm

b) $a = 5$ cm és $b = 5$ cm

c) $a = 2,3$ m és $b = 3,4$ cm

9. Ábrázold koordináta-rendszerben az $A(1; -3)$, $B(5; 2)$ és a $C(1; 2)$ pontokat, és kösd össze azokat!

a) A pontokat tükrözd az y tengelyre – pirossal rajzolj!

b) Az a) feladatban kapott pontokhoz rendeld hozzá azoknak az x tengelyre tükrözött képét – kékkel rajzolj!

c) Tetszőleges $P(x; y)$ ponttal hajtsd végre a két transzformációt! Van-e helyben maradó pont az egyes transzformációknál?

Töltsd ki a táblázatot a füzetedben! Tudsz-e mondani olyan hozzárendelési utasítást, amely az eredeti pontokhoz a kék színűeket rendeli hozzá?

Eredeti	$A(1; -3)$	$B(5; 2)$	$C(1; 2)$	$P(x; y)$
a)	$A(;)$	$B(;)$	$C(;)$	$P(;)$
b)	$A(;)$	$B(;)$	$C(;)$	$P(;)$

10. Édesanya rakott krumplit főz ebédre. A krumpli főzésének melyik szakaszát látod az egyes grafikonokon?

a) Feltette a krumplit főni.

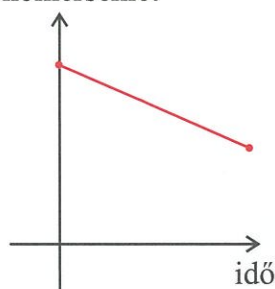
b) Egyenletesen forr a víz.

c) Vízcsap alá teszi a főtt krumplit, hogy hűljön.

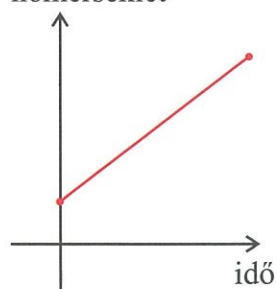
d) Elkezdte hámozni.



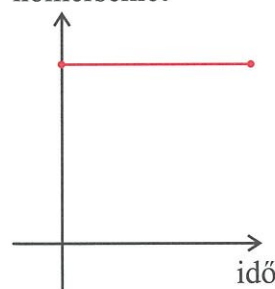
hőmérséklet



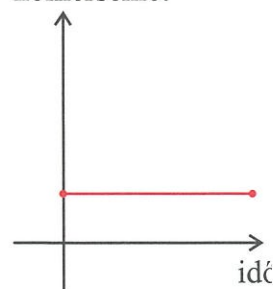
hőmérséklet



hőmérséklet



hőmérséklet



11. Számold ki az adott $f(x) = 1,2x - 3$ lineáris függvény helyettesítési értékét, ha

a) $x = 0$,

b) $x = 5$,

c) $x = -3$,

d) $x = \frac{5}{6}$!

12. Számold ki az adott $g(x) = \frac{4}{5}x + 2$ lineáris függvény helyettesítési értékét, ha

a) $x = 0$,

b) $x = 10$,

c) $x = -2,4$,

d) $x = 1\frac{2}{3}$!

13. Keresd a párját!

a) $x \mapsto 4x + 3$

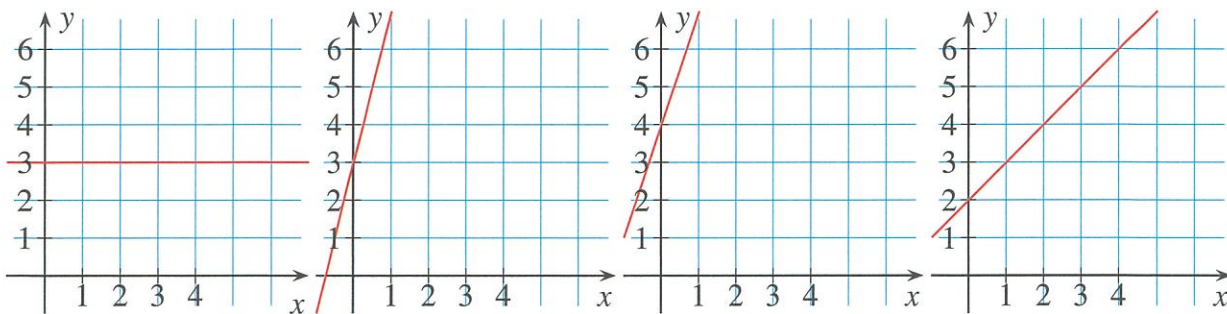
b) $x \mapsto 3x + 4$

c) $x \mapsto 3$

d) $x \mapsto 4 + 3x$

e) $x \mapsto 2 + x + 2 + 2x$

f) $x \mapsto 4 - 3x$



14. Ábrázold az $x \mapsto 2x - 3$ függvény grafikonját!

Határozd meg az $A(1; \square)$, $B(-4; \square)$, $C(12; \square)$, $D(\square; -3)$, $E(\square; 5)$, $F(\square; 101)$ pontok hiányzó jelzőszámait úgy, hogy a pontok

- a) a grafikonon legyenek, b) a grafikon felett legyenek, c) a grafikon alatt legyenek!

15. Melyik a kakukktojás? Azaz az alábbi egyenesek egyenletei közül egy nem párhuzamos a többivel, készítsd el annak a grafikonját!

a) $x - 2y = 0$

b) $5x = 10y + 7$

c) $-3x + 18 + 6y = 0$

d) $y = 2x - 5$

e) $3y = 1, 5x - 2$

f) $-4y = 6 - 2x$



16. Képezd a pozitív egész számok 9-cel való osztási maradékait!

a) Sorold fel a sorozat első 12 elemét!

b) Hány különböző eleme van ennek a sorozatnak?

c) Add meg a sorozat következő elemeit: a_{15} , a_{32} , a_{2015} !

17. Írd fel a számtani sorozatok első öt elemét, és készítsd el a hozzájuk tartozó grafikonokat!

a) $-4, -1, 2, \dots$

b) $a_1 = 7, d = -2$

c) $c_n = -3$

d) $a_1 = 3, a_2 = \frac{7}{3}$

18. Mennyi a számtani sorozat első nyolc elemének az összege, ha

a) első eleme (-5) és differenciája 2,

b) első eleme 4 és harmadik eleme 12,

c) első három elemének számtani közepe 21 és a negyedik eleme 7,

d) az ötödik és a második elemének különbsége (-9) és ugyanezen elemek összege (-14) ?

19. Egy számtani sorozat első eleme (-4) , a hatodik eleme pedig 26.

a) Mennyi a sorozat differenciája?

b) Hányadik eleme ennek a sorozatnak a 98?

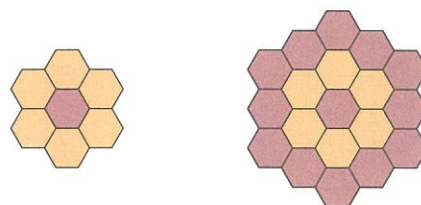
c) Eleme-e a sorozatnak a 604?

20. Zsolti ímmel-ámmal elkezdte olvasni a kötelező olvasmányt. Első nap 12 oldalon rágta át magát. Mivel nagyon érdekesnek találta, minden nap 3 oldallal növelte az előző napi adagját. Hány nap alatt olvasta el a 441 oldalas könyvet?



21. Kati anyukája horgolt hatszögekből hatszög formájú terítőt készít. A hatszögek összeállításának első két lépését mutatja az ábra.

Kati észrevette, hogy a külső hatszögek száma mindig 6-tal több, mint az előző lépésben. A terítő a 10. lépésben készült el. Összesen hány hatszögből készült a terítő?



1. lépés

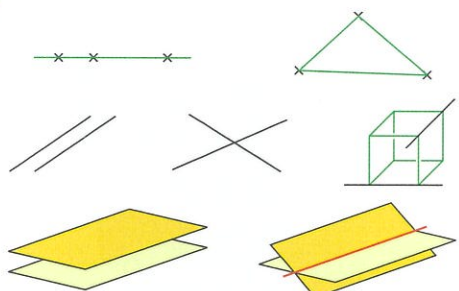
2. lépés

(Kompetenciamérés, 2015)

Alakzatok



A **pont**, az **egyenes**, a **sík**, a **tér** és az **illeszkedés** alapfogalmak a geometriában.



Három pont vagy egy egyenesen van, vagy háromszöget alkot.

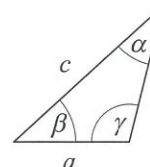
Két egyenes párhuzamos, metsző vagy kitérő lehet.

Két sík vagy párhuzamos, vagy egy egyenesben metszi egymást.

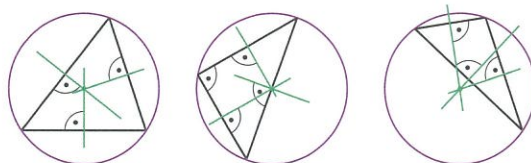
A **háromszög** konvex alakzat. Bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalánál. Egy háromszögben hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van.

A háromszög egyértelműen megszerkeszthető, ha adott

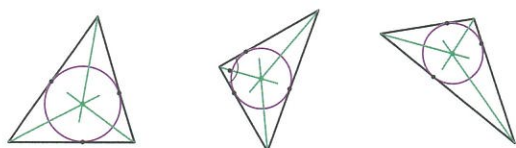
- három oldala ($a \leq b \leq c$) és $a + b > c$
- két oldala és azok közrezárt szöge (a, b, γ) és $0^\circ < \gamma < 180^\circ$
- két oldala és a nem rövidebb oldallal szemközti szöge ($a \leq b, \beta$)
- egy oldala és két szöge (a, β, γ vagy a, α, β vagy a, α, γ)



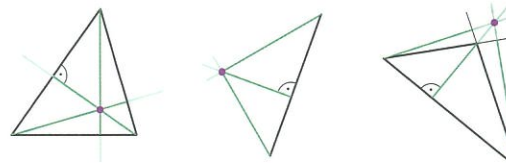
A **háromszögek nevezetes vonalai és körei:**



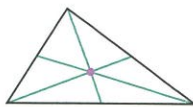
oldalfelező merőlegesek és a háromszög köré írt kör



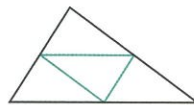
szögfelezők és a háromszög beírt köre



magasságok és magasságpont



súlyvonalak és súlypont



középvonalak

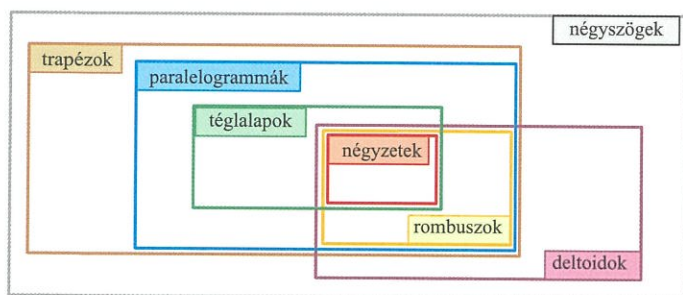
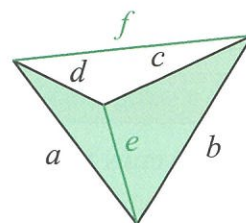
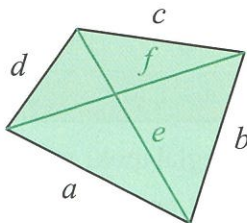
A háromszög belső szögeinek összege 180° , külső szögeinek összege 360° .

Bármely két belső szögének összege egyenlő a harmadik csúcsnál levő külső szögével.

A **négyszög** lehet konvex vagy konkáv alakzat.

Bármely három oldalának összege nagyobb a negyedik oldalánál.

A konvex négyszög átlóinak pontjai a négyszögön belül helyezkednek el. A konvex négyszög belső szögeinek összege 360° , külső szögeinek összege is 360° .



Trapéz: van két párhuzamos oldala.

Paralelogramma: szemközti oldalai párhuzamosak.

Téglalap: minden szöge derékszög.

Deltoid: két-két szomszédos oldala egyenlő.

Rombusz: minden oldala egyenlő.

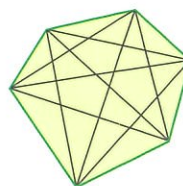
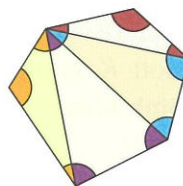
Négyzet: szögei és oldalai egyenlők.

Az n oldalú konvex sokszög belső szögei 180° -nál kisebbek.

Egy csúcsból induló átlókkal $n - 2$ háromszögre bontható.

Egy konvex sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180^\circ$, külső szögeinek összege 360° .

Egy csúcsából $(n - 3)$ átló húzható, átlóinak száma $\frac{n(n - 3)}{2}$.



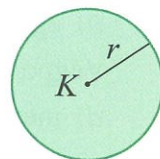
Például konvex hatszög esetén:
a belső szögek összege 720° ,
az átlók száma 9.

A **körvonal** adott K ponttól adott $r \neq 0$ távolságra levő pontok halmaza a síkban.

A **körlap** adott K ponttól legfeljebb r távolságra levő pontok halmaza a síkban.

K pont a kör középpontja, r a sugara.

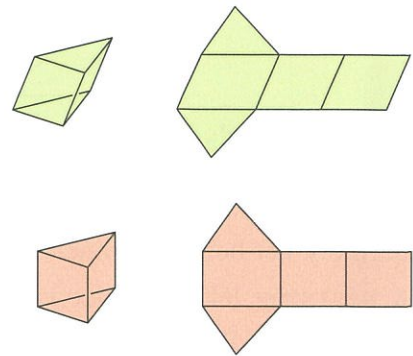
A **körvonal** és **körlap** részei például:



A **hasáb** két alaplappja két egybevágó sokszög, amelyek egymással párhuzamos síkban vannak, az alaplappok megfelelő oldalai is párhuzamosak.

A hasáb oldallapjai paralelogrammák.

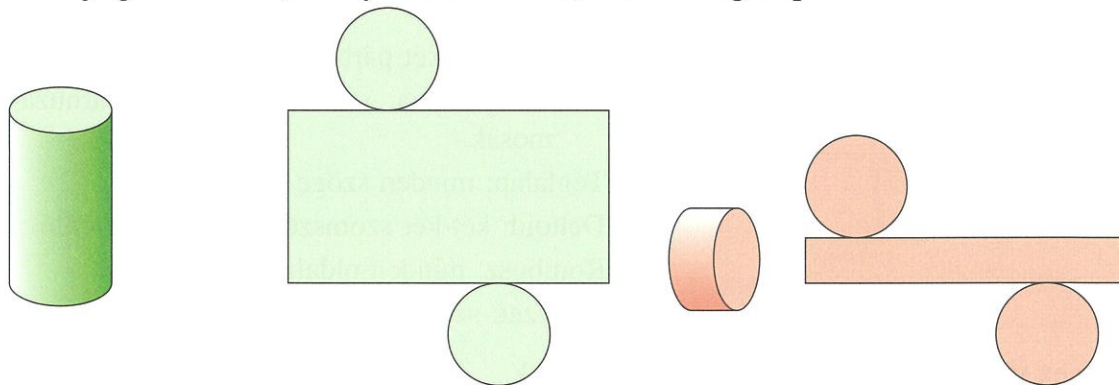
A hasáb jellemzői	Lapok száma	Csúcsok száma	Élek száma
A háromszög alapú hasáb	5	6	9
A négyszög alapú hasáb	6	8	12
Az n -szög alapú hasáb	$n + 2$	$2n$	$3n$



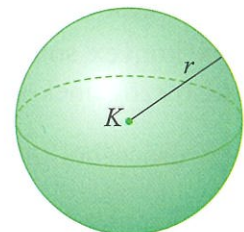
Az **egyenés hasáb** oldallapjai téglalapok, mivel merőlegesek az alaplappokra.

A **forgáshenger** két alaplappja két egybevágó körlap.

Palástja görbe felület, amely síkba teríthető; kiterítve téglalap.



A **gömb** felületét adott K ponttól adott $r \neq 0$ távolságra levő pontok alkotják a térben. K pont a gömb középpontja, r a sugara.

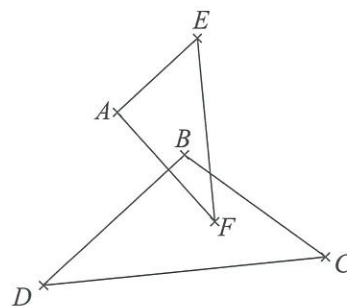


1. Adj meg

- háromszöget alkotó ponthármasokat,
- egy egyenesre illeszkedő ponthármasokat!

Végpontjaikkal megnevezve adj meg

- metsző szakaszpárokat,
- merőleges szakaszpárokat,
- párhuzamos szakaszpárokat!



2. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az $A(-2; 0)$, $B(5; -1)$, $C(10; 10)$, $D(-4; 11)$, $E(2; 3)$, $F(-3; -7)$, $G(1; -4)$, $H(3; 10)$ pontokat! Ezek közül válogass!

- Adj meg három egy egyenesre illeszkedő pontot!
- Adj meg párhuzamos egyenesekre illeszkedő pontokat!
- Adj meg merőleges egyenesekre illeszkedő pontokat!
- Adj meg derékszögű háromszög csúcsait alkotó pontokat!
- Adj meg trapézt, paralelogrammát, téglalapot!

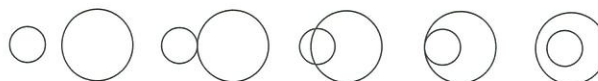
3. Egy egyenes egy körhöz képest lehet külső egyenes, érintő vagy szelő.

Adott egy 7 cm sugarú kör. Határozd meg, hogy a középpontjától milyen távolságra lehet egy

- a) külső egyenes, b) érintő egyenes, c) szelő egyenes!



4. Két különböző sugarú kör kölcsönös helyzete ötféle lehet.



Add meg a 2 cm és a 3 cm sugarú kör kölcsönös helyzetét, ha középpontjaik távolsága

- a) 6 cm, b) 5 mm, c) 5 cm, d) 7 cm, e) 1 cm, f) 0, g) 4 cm!

5. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A: Ha két háromszög szögei és legrövidebb oldala egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.

B: Ha két háromszög két oldala és a hosszabbikhoz tartozó magassága egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.

C: Ha két háromszög egybevágó, akkor szögeik és egy oldaluk egyenlő.

Igaz-e az állítások megfordítása?

6. Döntsd el, hogy igaz vagy hamis állítások-e az alábbiak!

A: Van olyan négyzet, ami rombusz is.

B: Minden körszelet konvex alakzat.

C: A tízoldalú konvex sokszög átlóinak száma tízszerese az egy csúcsból induló átlók számának.

7. Hány fokos szöget zár be két metsző egyenes, ha az általuk meghatározott négy szög közül

- a) két szög összege 130° ,
b) három szög összege 237° ,
c) az egyik szög háromszor akkora, mint a másik?

8. Hány olyan különböző háromszög van, amelynek két oldala 21 cm és 27 cm, a harmadik oldala pedig centiméterben mérve hárommal osztható egész szám?

9. Egy háromszög egyik szöge a másinak kétszerese, a harmadik szöge a másodikonál 20° -kal nagyobb. Hány fokosak a háromszög szögei?

10. Mekkora lehet egy háromszög legnagyobb szögének legkisebb értéke?

11. Egy háromszög egyik csúcsánál levő belső szöge $\frac{1}{3}$ derékszög. A másik két csúcsánál levő külső szögek aránya 5 : 9.

Számítsd ki a háromszög szögeinek nagyságát!

12. Az ABC háromszögben a B csúcsnál levő külső szög háromszor akkora, mint az A csúcsnál levő belső szög. Ugyanakkor a B csúcsnál levő külső szög 40° -kal nagyobb, mint a C csúcsnál levő belső szög. Mekkora a háromszög belső szögei?

13. Egy derékszögű háromszögnek van egy 32° -os szöge.

Hány fokos szögekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság a derékszöveget?

14. Egy konvex négyszög két szemközti szögét az átlója 30° -os és 80° -os, illetve 60° -os és 100° -os szögekre bontja. Határozd meg a négyszög belső és külső szögeinek nagyságát!

15. Egy konvex négyszög belső szögeinek aránya $3 : 4 : 5 : 6$. Mekkora a belső és a külső szögei?

16. Keresd meg, hogy az $a, b, c, \dots$ tulajdonság mely halmazokat határozza meg!

a : A négyszögnek van két párhuzamos oldala.

$A = \{\text{négyszögek}\}$

b : A négyszög 2-2 szomszédos oldala egyenlő.

$B = \{\text{téglalapok}\}$

c : A négyszög oldalai egyenlők.

$C = \{\text{rombuszok}\}$

d : A négyszög szögei egyenlők.

$D = \{\text{deltoidok}\}$

e : A négyszög szemközti oldalai egyenlők.

$E = \{\text{paralelogrammák}\}$

f : A négyszög oldalai és szögei egyenlők.

$F = \{\text{trapézok}\}$

g : A négyszög két-két szemközti oldala párhuzamos.

$G = \{\text{húrtapézok}\}$

h : A négyszög egyik átlója merőlegesen felezi a másik átlóját.

i : A négyszögnek van a csúcsokon át nem menő szimmetriatengelye.

17. Adj meg a lehető legkevesebb számú különböző fajta négyszögekből álló halmazt a feltételeknek megfelelően!

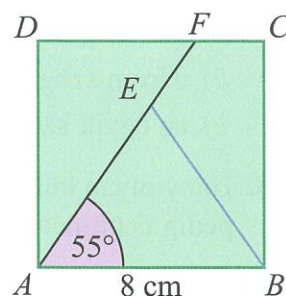
a) Az elemek között pontosan egy négyzet van,
az elemek kétharmad része téglalap,
az elemek között van három paralelogramma.

b) A halmaznak legalább két eleme van,
az elemek mindegyikének van párhuzamos oldalpárja,
az elemek tengelyesen szimmetrikusak.

18. Az $ABCD$ négyzetet az AF és az EB szakasz az ábra szerint három részre bontja. Az EAB szög 55° , az EB szakasz pedig a négyzet B csúcsánál levő szögét $2 : 7$ arányban osztja.

a) Mekkora lehetnek az $EBCF$ négyszög szögei?

b) Igaz-e, hogy az A, E és C pont a B -től egyenlő távolságra van?

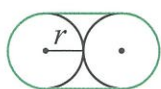


19. Egy kör középpontja O , a körvonal pontjai A, B, C .

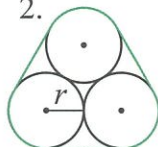
Határozd meg az ABC háromszög szögeit, ha az AOB szög 120° és a BOC szög 150° !

20. Az ábrán összekötözött csövek keresztmetszetét látjuk. Egy-egy cső sugara r , területe K .

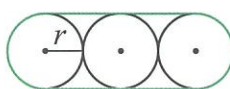
1.



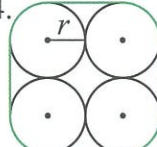
2.



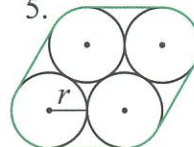
3.



4.



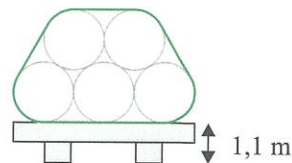
5.



a) Milyen hosszú pánt szükséges a csövek átkötéséhez az egyes esetekben?

b) Fejezd ki az átkötéshez szükséges pánt hosszát, ha n darab cső egy rétegben helyezkedik el!

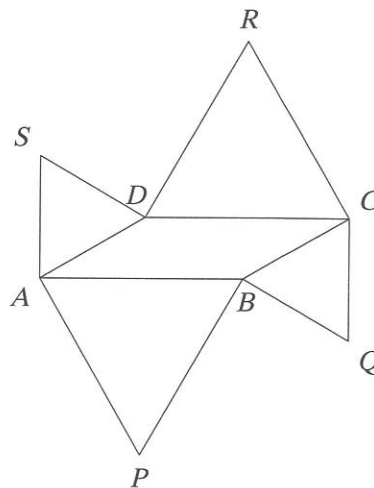
21. A teherautó 1,1 méter magasan levő platójára 125 centiméter átmérőjű csöveket raknak úgy, ahogyan a keresztmetszeti ábrán látható. Egy-egy csövet körülbelül 393 cm hosszú szalag ér át. Határozd meg, milyen hosszú rögzítő szalag kell a csövek átkötéséhez!



22. Egy 12 elemű halmaz csak háromszögeket és négyszögeket tartalmaz. Ezen sokszögeknek összesen 41 csúcsa van. Az elemek hány százaléka háromszög?

23. Igaz-e az állítás? Válaszodat indokold!

- A: Egy trapéz egyik szárának végpontjaiból induló belső szögfelezők merőlegesek egymásra.
B: Ha egy húrtrapézba kör írható, akkor a szárának és a középvonalának hossza egyenlő.
C: Ha egy paralelogramma oldalaira kifelé szabályos háromszögeket szerkesztünk az ábra szerint, akkor a keletkező új csúcsok is paralelogrammát határoznak meg.



24. Egy egyenes hasáb alaplappja 4 cm oldalú szabályos hatszög, magassága 7 cm.

- a) Határozd meg a test lapjainak, éleinek és csúcsainak számát!
b) Ábrázold a hasáb lapjait! 1 : 2 arányú kicsinyítéssel szerkessz!
c) Számítsd ki a hasáb palástjának valódi méreteit!
d) Igaz-e, hogy ennek a testnek éppen annyi lapátlója van, mint ahány testátlója?

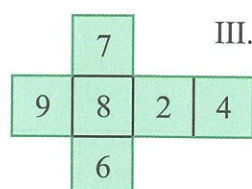
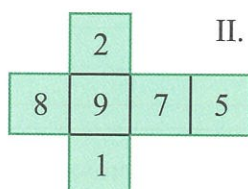
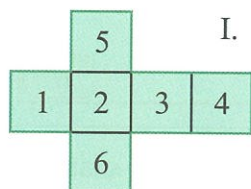


25. Egy négyzetes oszlop alakú csomagot az ábrán látható módon átkötöttek. Ehhez 210 cm szalagot használnak, amiből 10 cm kellett a csomózáshoz. A test magassága háromszor akkora, mint az alapéle. Hány centiméter az oszlop egy csúcsában összefutó három éle hosszának az összege?

26. Két testet valamelyik teljes lapjukkal összeragasztva egybeépítettünk. Az egyik test egy négyzetes oszlop. Ennek a négyzet alapú egyenes hasábnak az alaplappja 5 cm oldalú négyzet, a magassága 4 cm. A másik test egy derékszögű háromszög alapú egyenes hasáb, amelynek alaplappélei 3 cm, 4 cm és 5 cm, magassága 5 cm.

- a) Rajzold le négyzethálós lapra a két test hálóját!
b) Színezd be a testhálókon az összeragasztott lapokat!
c) Nevezd meg, milyen testet kaphattunk!

27. A három hálózathoz elkészítjük a három kockát, majd egymás tetejére rakva négyzetes oszlopot állítunk össze. Az oszlop négy oldalán felülről lefelé olvasva a számokat négy darab háromjegyű számot kapunk, majd a négy darab háromjegyű számot összeadjuk. Milyen sorrendben, hogyan helyezzük egymásra a három kockát úgy, hogy az előbbi összeg a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez az összeg?

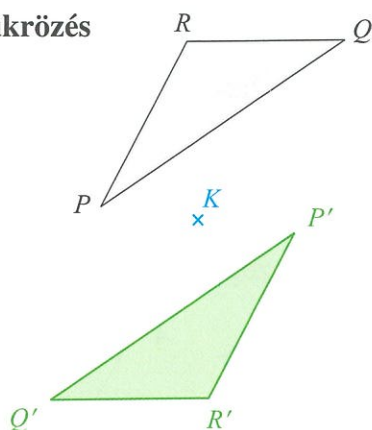


Geometriai transzformációk, szimmetriák

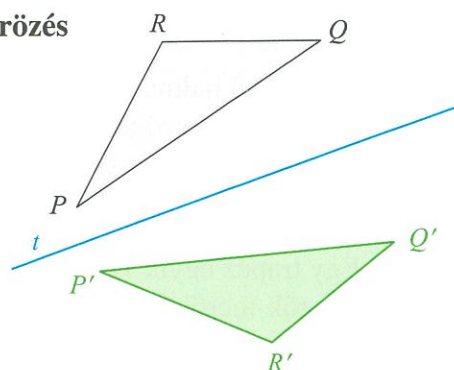


Egybevágósági transzformációk a síkban:

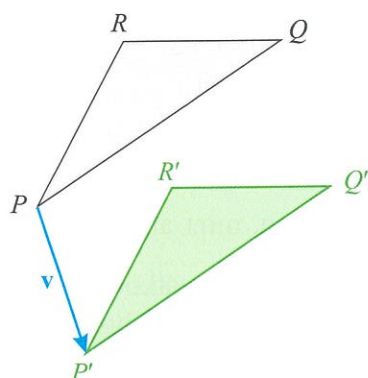
középpontos tükrözés
 K pontra:



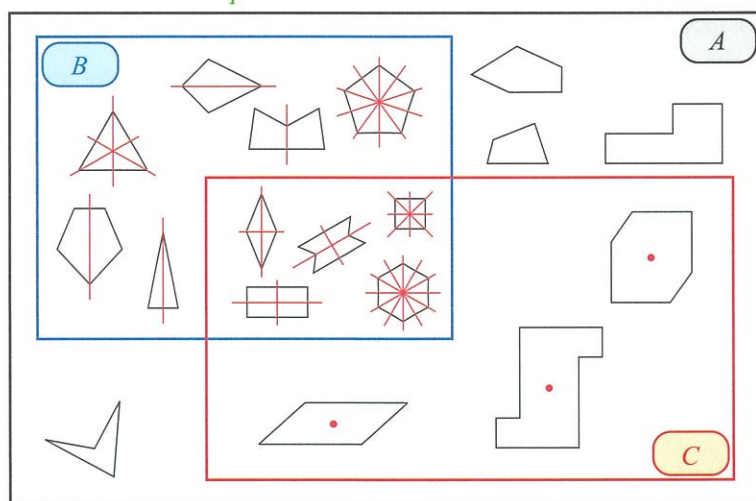
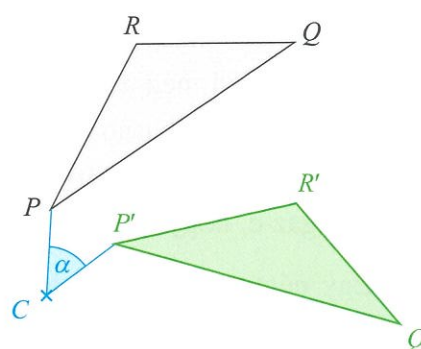
tengelyes tükrözés
 t egyenesre:



eltolás $\vec{PP'}$ vektorral (v):



pont körüli elforgatás α szöggel C pont körül:



A : sokszögek

B : tengelyesen szimmetrikus sokszögek

C : középpontosan szimmetrikus sokszögek

Tengelyesen szimmetrikus háromszögek az **egyenlő szárú háromszögek**.

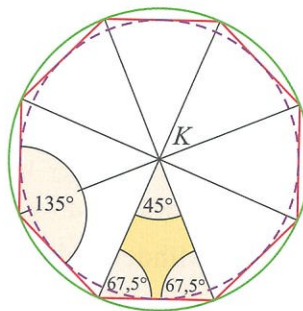
Az **egyenlő oldalú háromszögnek** három szimmetriatengelye van.

Minden középpontosan szimmetrikus négyszög **paralelogramma**.

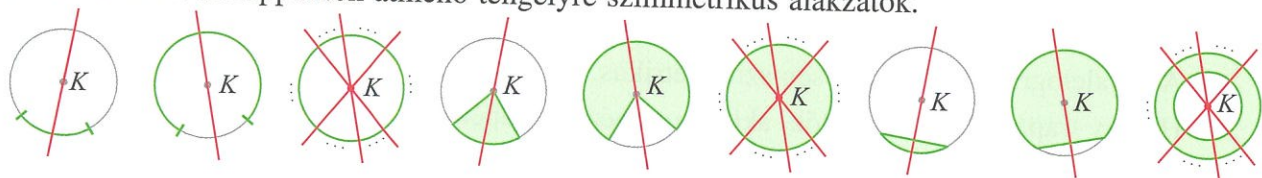
A tengelyesen szimmetrikus négyszög **húrtrapéz**, ha a tengely oldalfelező pontokon megy át, illetve **deltoid**, ha a tengely csúcspontokra illeszkedik.

A **szabályos sokszög** oldalainak hossza egyenlő és belső szögeinek nagysága is egyenlő. Konvex alakzat, van beírható és van köré írható köre. A szabályos sokszögnek annyi szimmetriatengelye van, ahány oldalú a sokszög.

A csúcsok száma	3	4	5	6	8	n
Középponti szögei	120°	90°	72°	60°	45°	$\frac{360^\circ}{n}$
Belső szögei	60°	90°	108°	120°	135°	$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$
Középpontosan szimmetrikus	nem	igen	nem	igen	igen	igen, ha n páros nem, ha n páratlan
Tengelyesen szimmetrikus	igen	igen	igen	igen	igen	igen



A **kör részei** a középponton átmenő tengelyre szimmetrikus alakzatok.

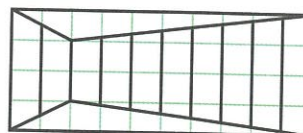


A körvonal, a körlap és a körgyűrű középpontosan szimmetrikus a kör középpontjára.

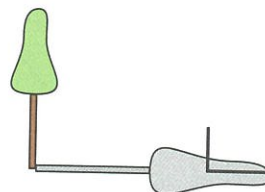
1. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az $A(-3; 2)$, $B(5; -4)$, $C(8; 0)$, $D(0; 6)$ pontokat!
 - a) Ábrázold az $ABCD$ négyszög szimmetriatengelyeit!
 - b) Tükrözd a négyszöget az y tengelyre!
 - c) Határozd meg, milyen sokszöget alkot a négyszögnek és képének a közös része!

2. a) Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az $A(-5; 4)$, $B(-2; 1)$, $C(1; 4)$, $D(-2; 7)$ pontokat, majd tükrözd azokat az y tengelyre!
 - b) Az eredeti négy pont és a négy tükörképpont közül adj meg olyan pontokat, amelyek szimmetrikus sokszög csúcsai lehetnek!

3. A képen egy kaput ábrázoltunk, ahogy az utca felől látszik. Rajzold le a kaput a kert felől nézve!



4. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az $A(-5; 4)$, $B(-2; 1)$, $C(1; 4)$, $D(-2; 7)$ pontokat!
 - a) A $(-1; 0)$ pontból nagyítsd kétszeresére az $ABCD$ négyszöget!
 - b) A nagyított képet tükrözd a $(-1; 0)$ pontra!
 - c) Egybevágó-e a második transzformációval kapott kép az eredeti $ABCD$ négyszöggel?



5. Milyen magas az a fa, amelynek 32 m hosszú az árnyéka akkor, amikor egy 1,5 m magas oszlop árnyéka 2 m?
6. Egy konvex sokszög belső szögeinek összege 1260° . Hány oldalú a sokszög?
7. Számítsd ki egy szabályos nyolcszög központi szögét, belső szögét, átlóinak számát!

8. Igaz vagy hamis állítások-e az alábbiak?

A: Ha egy paralelogramma egyik szöge derékszög, akkor az négyzet.

B: Van tengelyesen szimmetrikus konkáv négyszög.

C: Ha egy négyszögnek van szimmetriatengelye, akkor van két egyenlő szöge.

D: Ha két háromszög egyik oldalának hossza és szögeik páronként egyenlők, akkor a két háromszög egybevágó.

8. Döntsd el, hogy igaz vagy hamis állítások-e az alábbiak!

A: A rombusz két szabályos háromszögből áll.

B: Minden deltoid tengelyesen szimmetrikus.

C: A paralelogramma átlói felezik a paralelogramma belső szögeit.

D: A paralelogramma átlói felezik egymást.

E: Van olyan paralelogramma, ami deltoid.

F: Van olyan deltoid, aminek az átlói egyenlő hosszúak.

G: A paralelogramma tengelyesen szimmetrikus.

H: Ha egy trapéz szárai egyenlők, akkor a trapéz húrtrapéz.

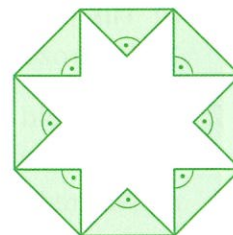
10. Egy szabályos sokszög külső és belső szögeinek összege 1260° .

a) Hány oldalú a sokszög?

b) Megrajzolható-e egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül a sokszög összes oldala és átlója úgy, hogy semelyik szakaszt sem rajzoljuk meg kétszer?

11. Egy szabályos nyolcszögből levágtuk a zöld színnel jelölt derékszögű háromszögeket, így egyenlő oldalú konkáv tizenhatszöget kaptunk.

Határozd meg azoknak a háromszögeknek a szögeit, amelyekre a szimmetriatengelyei bontják a tizenhatszöget!

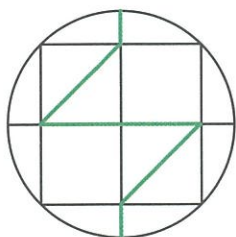


12. a) Egy szabályos hatszög egyik átlója 7 cm^2 területű háromszöget metsz le a hatszögből. Hány dm^2 a hatszög területe?

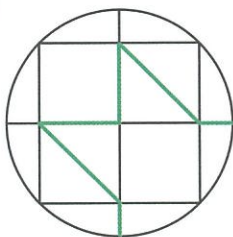
b) Egy szabályos sokszög szomszédos csúcsai A , B és C , szimmetria-középpontja O . Az AOC háromszögben az egyik szög 30° -kal nagyobb a másiknál. Hány oldalú a sokszög? Igaz-e, hogy háromszor annyi átlója van, mint oldala?

13. A kör sugara 82 m. Mekkora a színessel jelölt útvonalak hossza?

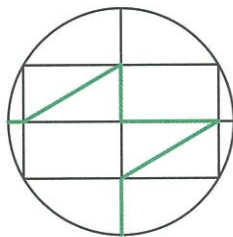
a)



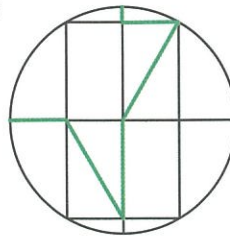
b)



c)



d)



14. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogója 13 cm, BC befogója 5 cm hosszú. Az A csúcsát tükrözzük a C csúcsra, C -t a B -re, végül B -t az A -ra, a tükörképeket rendre C_1 , B_1 , A_1 jelöli.

a) Számítsd ki az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek területének arányát!

b) Számítsd ki az ABC háromszög kerületét és területét!

Mennyiségek a geometriai számításokban

A táblázatokban egy-egy átváltás és művelet áttekintése szerepel a megadott mennyiségek körében.

A hosszúság, a távolság, a terület és az eltolás egységei

Mértékegység	... km				m			dm	cm	mm	μm	
Váltószám 10					hm	dkm	m					
20,035 km = 20 km 35 m			2	0	0	3	5					
81 m + 49 dm + 7,5 mm =						8	1	0	0	0	0	
= 85 907,5 mm					+		4	9	0	0	0	
										7	5	
						8	5	9	0	7	5	

A terület egységei

Mértékegység	... km ²				m ²			dm ²		cm ²		mm ²	
Váltószám 100					ha	a	m ²						
6,457 m ² = 645,7 dm ² =								6	4	5	7	0	
= 64 570 cm ² =													
= 6 m ² 45 dm ² 70 cm ²													
12 m ² - 2,306 dm ² =							1	2	0	0	0	0	0
= 11,97 694 m ² =							-			2	3	0	6
= 11 976 940 mm ²								1	1	9	7	6	9
												4	0

A térfogat és az űrmérték egységei

Mértékegység	... km ³				m ³				dm ³			cm ³			mm ³	
Váltószám 1000																
Mértékegység									hl	dkl	l	dl	cl	ml		
Váltószám 10																
$2\frac{3}{4}$ m ³ = 2,75 m ³ = 2750 dm ³									2	7	5	0				
47 dl = 4700 cm ³											4	7	0	0		

A szög és az elfordulás egységei

Mértékegység	° (fok)	' (szögperc)	" (szögmásodperc)
Váltószám 60	1° = 60' = 3600"	1' = 60"	
0,9° = 54' = 3240"	0,9	0,9 · 60	0,9 · 3600
25 404" = 423' + 24" =		423' = 7 · 60' + 3'	25 404 = 423 · 60" + 24"
= 7° + 3' + 24" = 7° 3' 24"			

- Váltsd át a mennyiségeket a megadott mértékegységekbe!
 - Add meg dm-ben: 7 m; 31 m 2 dm; 85 cm; 5 km 67 m; 8763 mm!
 - Add meg dm^2 -ben: 17 m^2 ; 4600 cm^2 ; 2 m^2 34 dm^2 ; 34 m^2 2 dm^2 ; 406 cm^2 !
 - Add meg dm^3 -ben: 6 m^3 ; 41 l; 55 m^3 55 dm^3 ; $50\,000 \text{ cm}^3$; 27 hl; 48 dl!
 - Add meg szögpercben: 54° ; $3,6^\circ$; $43^\circ 42'$; $18''$; $\left(\frac{2}{3}\right)^\circ$!
- Váltsd át a mennyiségeket a megadott mértékegységekbe!
 - Add meg cm-ben: 630 mm; 319 dm; 2 m 7 dm 6 cm; 4,1 dm; 3 dm 9 mm!
 - Add meg cm^2 -ben: 321 dm^2 ; $67\,000 \text{ mm}^2$; 5 dm^2 20 cm^2 ; 203 dm^2 9 cm^2 ; 640 mm^2 !
 - Add meg cm^3 -ben: 35 dm^3 ; 4 dl; 73 dm^3 612 cm^3 ; 40 000 ml; 28,13 dm^3 ; 84 dl!
 - Add meg egész mérőszámokkal (fok, perc, másodpercben): $3,7^\circ$; $34,5'$; $\left(\frac{3}{5}\right)'$; $0,03^\circ$; $0,41^\circ$!
- Döntsd el, hogy az A vagy a B mennyiség a nagyobb-e, és számítsd ki a különbségüket!

a) $A: 73 \text{ m}$	$B: 6010 \text{ dm}$	b) $A: 45 \text{ m}^2$	$B: 450 \text{ dm}^2$
c) $A: 357 \text{ dm}^3$	$B: 37 \text{ l}$	d) $A: 74'$	$B: 7^\circ 4'$
- Döntsd el, hogy az A vagy a B mennyiség a nagyobb-e, és számítsd ki a különbségüket!

a) $A: 46 \text{ mm}$	$B: 5 \text{ cm}$	b) $A: 540 \text{ dm}^2$	$B: 54 \text{ m}^2$
c) $A: 4 \text{ m}^3$	$B: 500 \text{ l}$	d) $A: 4,2^\circ$	$B: 250'$
- Döntsd el, hogy az alábbi szögek melyik csoportba tartoznak! (A szögfajták: nullszög, hegyesszög, derékszög, tompaszög, egyenesszög, homorúszög, teljesszög.)
 - $\alpha = 30,5^\circ + 3870'$
 - $\beta = \text{két derékszögnél } 103^\circ\text{-kal kisebb}$
 - $\gamma = 7200^\circ$ huszada
 - $\delta = \text{egy szabályos hatszög két belső szögének összege}$
 - $\varepsilon = \text{egy konvex négyszög külső szögeinek összegénél a belső szögeinek összegével kevesebb}$
- Végezd el a kijelölt műveleteket a megadott mennyiségekkel!

a) $870 \text{ m} + 37 \text{ cm}$	b) $3 \text{ m}^2 + 2 \text{ dm}^2$	c) $7 \text{ cm}^3 + 3 \text{ l}$	d) $5,4^\circ + 6'$
------------------------------------	-------------------------------------	-----------------------------------	---------------------
- Végezd el a kijelölt műveleteket a megadott mennyiségekkel!

a) $87 \text{ dm} - 16 \text{ cm}$	b) $7 \text{ m}^2 - 3 \text{ dm}^2$	c) $9 \text{ dm}^3 - 3 \text{ dl}$	d) $5,4^\circ - 6'$
------------------------------------	-------------------------------------	------------------------------------	---------------------
- Számítsd ki a betűvel jelölt mérőszámok értékét!

a) $28 \text{ dm} + a \text{ dm} = 8 \text{ m}$	b) $27 \text{ m}^2 - b \text{ dm}^2 = 7 \text{ m}^2$
c) $1,07 \text{ l} - c \text{ dl} = 1 \text{ l}$	d) $d^\circ e' - 54' = 2^\circ 24'$
- Számítsd ki a betűvel jelölt mérőszámok értékét!

a) $280 \text{ m} + a \text{ m} = 18 \text{ km}$	b) $b \text{ dm}^2 - 3 \text{ m}^2 = 7,6 \text{ m}^2$
c) $1,07 \text{ dm}^3 + c \text{ cm}^3 = 2 \text{ dm}^3$	d) $5,2^\circ - d' = 3,7^\circ$

10. Melyik hibás?

A: $280\,000\text{ m} = 28\text{ km}$

C: $634\text{ dm}^2 = 6,34\text{ m}^2$

E: $2645\text{ l} = 2,645\text{ m}^3$

B: $24\text{ cm}^2 = 2400\text{ mm}^2$

D: $3\text{ m}^3\ 71\text{ dm}^3 \approx 3,1\text{ millió cm}^3$

F: Az A, B, C, D, E mindegyike helyes.

11. Melyik nagyobb?

a) $10\text{ km } 5\text{-a}$ vagy $3\,000\,000\text{ mm } \frac{1}{6}$ része, b) $3,5 \cdot 10^4\text{ cm}$ vagy $3,5\text{ km}$,

c) 88 dm másfélszerese vagy $10\text{ m } \frac{4}{3}$ -szorosa?

Geometria szerkesztési feladatok

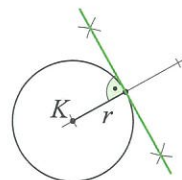
Szerkesztési feladatokban az eukleidészi szerkesztési lépéseket alkalmazzuk, alapszerkesztésnek tekintjük a szakasmásolást és szögmásolást, a szakaszelezést és szögfelezést, adott egyenesre merőleges állítását és adott egyenessel párhuzamos szerkesztését, valamint egy kört a kör adott pontjában érintő egyenes megszerkesztését. Megismertük néhány **távolsággal jellemezhető ponthalmaz** megadását:

adott alakzat	adott távolságra levő pontok a síkon	két adott alakzat	egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkon
pont	 kör	2 pont	 szakaszelező merőleges
egyenes	 két párhuzamos egyenes	2 metsző egyenes	 két szögfelező
szakasz	 zárt vonal	2 párhuzamos egyenes	 középpárhuzamos
kör	 egy vagy két kör		

A sokszögek szerkesztése visszavezethető a háromszögek szerkesztésére.

A kör érintőjének szerkesztése az érintési ponthoz tartozó sugárra merőleges egyenes szerkesztését jelenti.

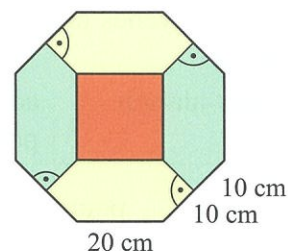
Transzformációval szerkeszthetünk, ha az alakzatok szimmetriatulajdonságait használjuk ki.



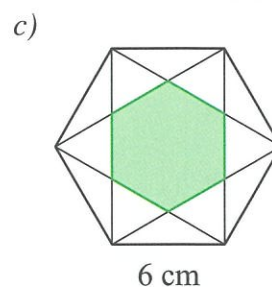
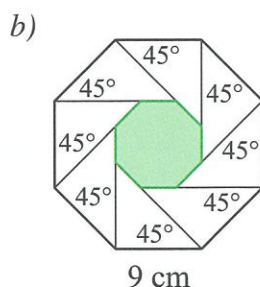
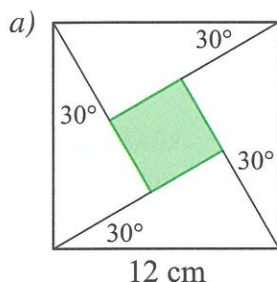
- Adott egy AB szakasz, hossza 5 cm . Szerkeszd meg azokat a pontokat, amelyek az A ponthoz közelebb vannak, mint B -hez, ugyanakkor a szakasztól legfeljebb $1,5\text{ cm}$ -re helyezkednek el!
- Adott egy K középpontú, 4 cm sugarú körlap és a kör AB átmérője. Szerkeszd meg a körlap azon pontjait, amelyek A -tól és B -től egyenlő távolságra, a K -tól pedig legalább 2 cm -re vannak!
- a) Hányféle négyszög szerkeszthető két 3 cm -es és két 4 cm -es szakaszból?
b) Szerkessz olyan négyszöget, amelynek két 3 cm -es, két 4 cm -es oldala van, s az egyik szöge 45° !
- Legyen egy $ABCD$ négyzet oldala 7 cm , BC oldalának felezőpontja F !
a) Szerkeszd meg a négyzetet, majd tükrözd az AF egyenesre!
b) Számítsd ki az eredeti és a tükörkép-négyzet közös részének területét!

5. Határozd meg, szögeik szerint milyen típusúak a háromszögek, ha oldalai hossza 56 mm, 90 mm, 106 mm vagy 3 cm, 5 cm, 7 cm, illetve 4,4 cm, 5,5 cm, 6,8 cm! Szerkeszd meg
 - a) a hegyesszögű háromszög köré írható kört;
 - b) a tompaszögű háromszög magasságait és magasságpontját;
 - c) a derékszögű háromszög beírt körét!
6. Egy húrtrapézból a 7 cm hosszú átlója olyan háromszöget vág le, amelynek az oldalai 3 cm, 5 cm és 7 cm hosszúak. Szerkeszd meg a négyszöget!
7. Az $ABCD$ deltoid átlói 8 cm és 4 cm hosszúak. A rövidebb átló 1 : 3 arányban osztja a hosszabb átlót.
 - a) Szerkeszd meg a deltoidot, majd tükrözd az átlók metszéspontjára!
 - b) Milyen alakzat az eredeti deltoid és a tükörkép egyesítése, illetve milyen alakzat az eredeti deltoid és a tükörkép közös része? Az $ABCD$ deltoid területének hányszorosa az egyesítés, illetve a közös rész területe?
 - c) Számítsd ki mm pontossággal az $ABCD$ deltoid kerületét!

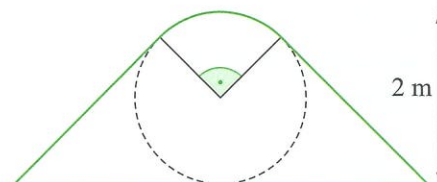
8. A budai várban feltárt majolikacsempék egyikének mintázatát mutatja az ábra. Alakja szabályos nyolcszög. Számítsd ki a sokszög belső szögeit! Szerkeszd meg az ábrát negyedére kicsinyítve!



9. Szerkeszd meg a szabályos sokszöget, majd a színessel jelölt belső sokszöget! Becsüld meg, hány százaléka a színessel jelölt rész területe az eredeti alakzat területének!



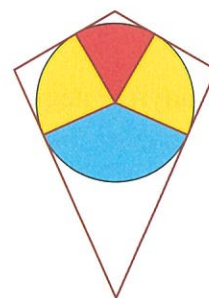
10. Egy bejárat fölé bevilágító ablakot készítenek, mely három szakaszból és egy körívből áll. Teteje a körív, ferde oldalai és az alja ugyanannak a körnek az érintői, magassága 2 méter. Az alakzat tengelyesen szimmetrikus.



- a) Szerkeszd meg az ábrát, ha a teteje félkör, harmadkörhöz tartozó ív, illetve negyedkör íve! Az ábrán 1 méternek 2 cm feleljen meg!
- b) Melyik esetben elég az ablak egy 4,5 méter széles bejárat áthidalásához?

11. Egy színes ólomüveg ablak tervrajza hiányos. A szimmetrikus rajz egyik felén az a két pont látható, ahol a deltoid oldalait a körhöz forrasztják.

Szerkeszd meg a teljes ábrát, ha adott a szimmetriatengely és a két érintési pont!



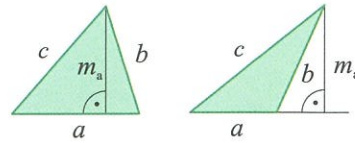
vázlatrajz

tervrajz

Geometriai számítási feladatok

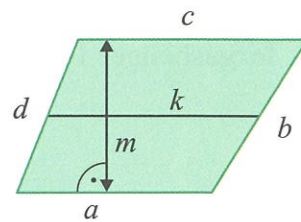
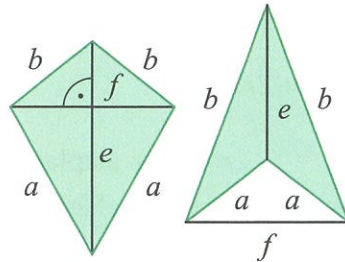
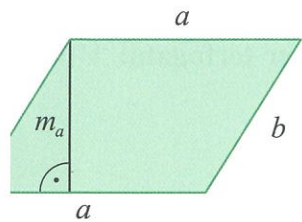
Háromszög kerülete: $K = a + b + c$

Háromszög területe: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$



Négyszög kerülete egyenlő a négy oldalának összegével. $K = a + b + c + d$

Négyszög területe kiszámítható téglalappá kiegészítve vagy átdarabolva, illetve két háromszög területének összegeként is. *Például:*



$K_{\text{párhuzogramma}} = 2(a + b)$

$K_{\text{deltoid}} = 2(a + b)$

$K_{\text{trapéz}} = a + b + c + d$

$T_{\text{párhuzogramma}} = a \cdot m_a$

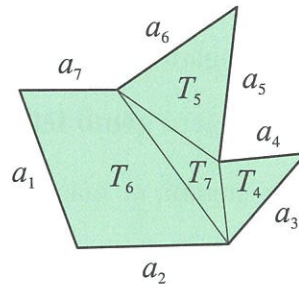
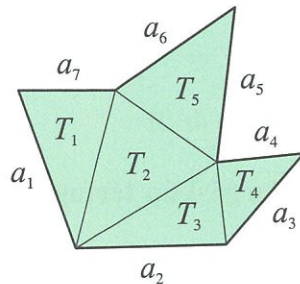
$T_{\text{deltoid}} = \frac{e \cdot f}{2}$

$T_{\text{trapéz}} = \frac{(a + c) \cdot m}{2} = k \cdot m$

Négyszög kerülete egyenlő oldalai hosszának összegével.

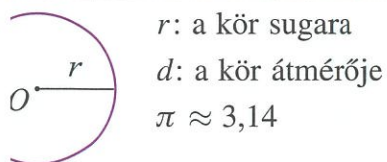
Négyszög területe kiszámítható úgy, hogy olyan háromszögekre daraboljuk, amelyeknek területe ismert. *Például:*

$K = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$



$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$ vagy $T = T_4 + T_5 + T_6 + T_7$

Kör kerülete: $K = 2r\pi = d\pi$

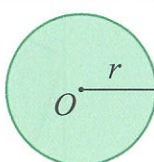


r : a kör sugara

d : a kör átmérője

$\pi \approx 3,14$

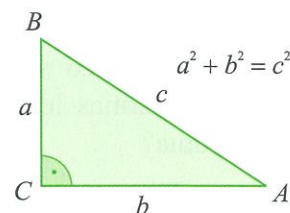
A kör területe: $T = r^2\pi$



r : a kör sugara

$\pi \approx 3,14$

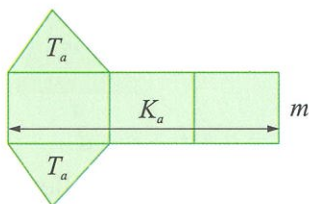
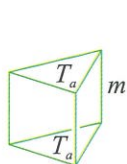
Derékszögű háromszögre érvényes a **Pitagorasz-tétel**: a derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.



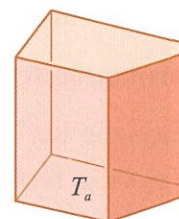


Az egyenes hasáb felszíne: $A = 2T_a + K_a \cdot m$

A hasáb térfogata: $V = T_a \cdot m$

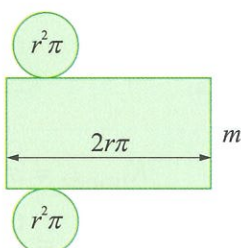
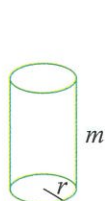


T_a : az alaplapp terület
 K_a : az alaplapp kerülete
 m : a hasáb magassága,
 az egyenes hasáb oldaléle

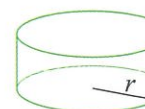


A forgáshenger felszíne: $A = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi m$

A forgáshenger térfogata: $V = r^2\pi \cdot m$



$r^2\pi$: az alaplapp terület
 $2r\pi$: az alaplapp kerülete
 m : a henger magassága
 r : a henger sugara

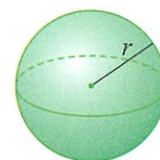


Számítási feladatokban további összefüggéseket alkalmazhatunk:

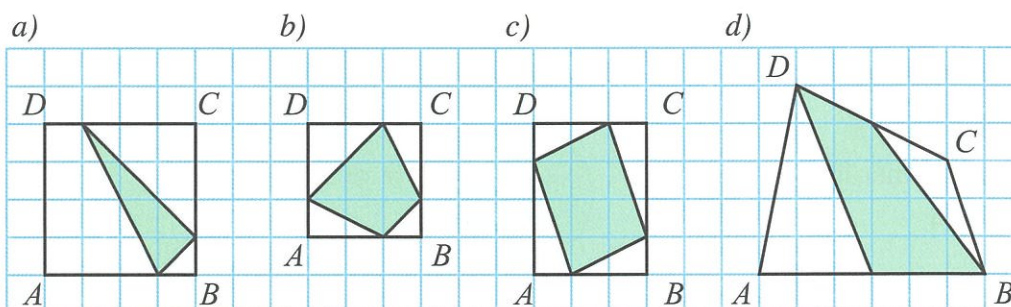
az r sugarú **gömb térfogata**: $V = \frac{4r^3\pi}{3}$

az r sugarú **gömb felszíne**: $A = 4r^2\pi$

az r sugarú, m magasságú **forgáskúp térfogata**: $V = \frac{r^2\pi \cdot m}{3}$



1. Számítsd ki a színessel jelölt sokszög és az $ABCD$ négyszög területének arányát!



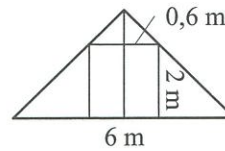
2. A következő számhármások szakaszok hosszát adják meg azonos egységgel mérve. Mely számhármas lehet hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű háromszög oldalainak mérszáma?

a) A: 8, 15, 16 B: 13, 84, 85 b) G: 24, 48, 73 H: 16, 63, 65
 C: 7, 8, 15 D: 9, 40, 43 I: 7, 20, 25 J: 65, 72, 97
 E: 15, 15, 28 F: 11, 60, 60 K: 33, 56, 65 L: 13, 13, 20

A 80 cm széles, 190 cm magas kamraajtót az alsó és felső szélétől 10 cm-re keresztben és átlósan is megerősítették. Hány méter lécz kellett a Z alakú merevítéshez?



Milyen magas sátoertő alatt fér el az ábrán látható módon egy 120×200 -as szekrény, ha a földem 6 m széles?



a) Mekkora területű háromszöget alkotnak a derékszögű koordináta-rendszerben a $P(-1; 1)$, $Q(7; -5)$, $R(7; 7)$ pontok? Hány egység a háromszög kerülete?

b) Mekkora az ABC háromszög területe, ha csúcsai az $A(-3; 8)$, $B(2; -4)$, $C(2; 0)$ pontok?

Egy háromszög szögeinek nagysága 30° , 45° és 105° , legrövidebb magassága 4 cm hosszú. Számítsd ki a háromszög területét!

Egy derékszögű háromszög kerülete 180 cm, befogóinak aránya $12 : 5$. Számítsd ki a háromszög területét!

Döntsd el, hogy igazak-e az állítások!

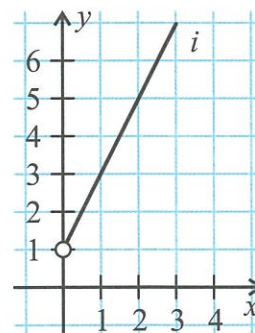
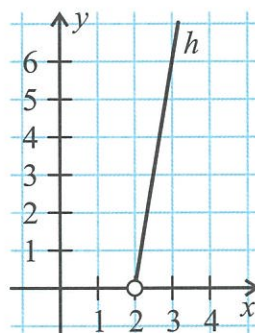
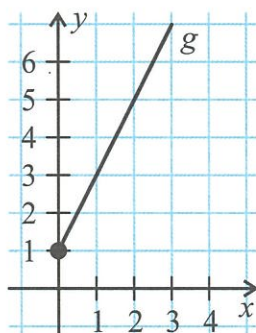
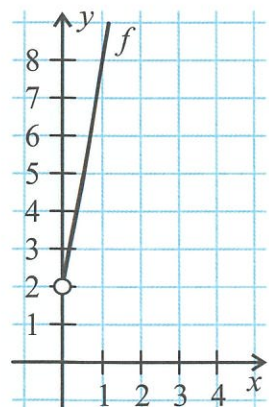
A: Nincs olyan négyzet, aminek a területe 2 cm^2 .

B: Amelyik téglalap négyzetméterben mért területének mérőszáma nagyobb, annak a méterben mért kerülete is nagyobb.

C: Ha két háromszög területe egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.

Egy paralelogrammát az egyik átlója két derékszögű háromszögre bontja. Számítsd ki a paralelogramma területét, ha oldalai 220 és 221 cm hosszúak!

Négy függvény grafikonját ábrázoltuk. Melyik függvény adja meg helyesen az $ABCD$ paralelogramma kerületét az AB oldal függvényében, ha a paralelogramma BC oldala 1 egységgel hosszabb, mint az AB oldal hosszának kétszerese?



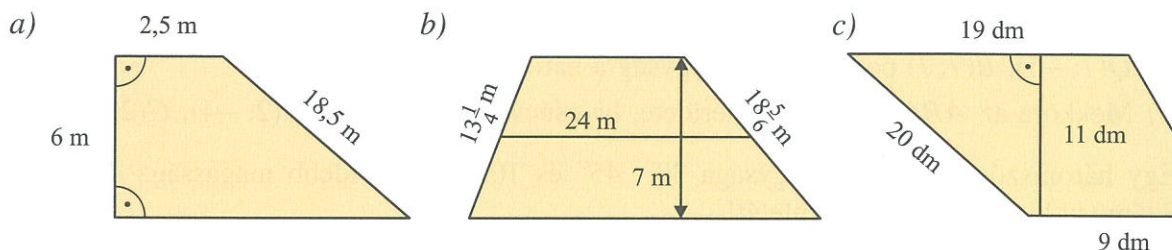
Egy rombusz kerülete 36 cm, az egyik átlója két 28 cm területű háromszögre bontja. Számítsd ki a rombusz területét!

Számítsd ki egy 20 cm kerületű, 45° -os szögű rombusz területét és átlóinak hosszát!

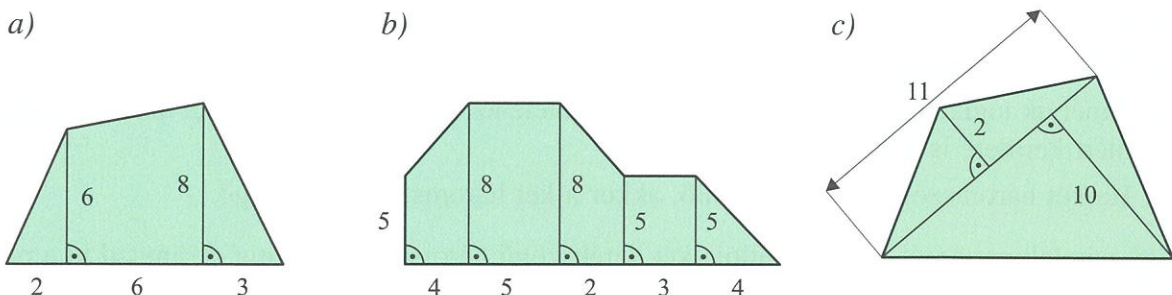
13. Számítsd ki a húrtrapéz területét, ha

- alapjai 28 cm és 13 cm, szárjai 23 cm hosszúak;
- három oldala 6 cm, a negyedik oldala pedig 8 cm;
- alapjai 6 cm és 16 cm hosszúak, és kör írható bele;
- alapjai 10 cm és 18 cm hosszúak, kerülete 38 cm!

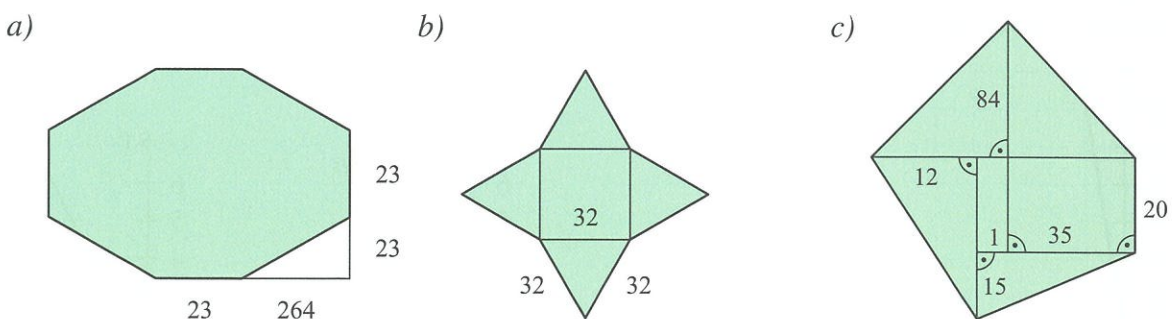
14. Számítsd ki a trapézok kerületét és területét!



15. Az ábrán szereplő adatok segítségével számítsd ki a sokszög területét! Az adatokat méte mértük.

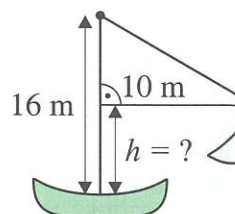


16. Számítsd ki a sokszög kerületét és területét, ha az adatok cm-ben értendők! A vázlatrajz szakaszhosszak nem arányosak.



17. A „Kalózhajó” nevű szerkezet 16 m hosszú rúdon lengett a Vidámparkban.

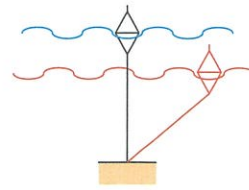
Hány métert emelkedett, mialatt a rúd vége tíz méterre eltávolodott a kiinduló helyzettől?



18. Az ABC háromszög kerülete 102 m. Az AB oldal hossza az AC oldal hosszának $\frac{3}{5}$ része, a BC oldal pedig az AC -nek $\frac{4}{5}$ része.

Hegyszögű, derékszögű vagy tompaszögű-e a háromszög? Hány cm^2 a háromszög területe?

A folyómederhez 7 m hosszú lánccal rögzítettek egy bóját. Mennyivel csökkent a víz szintje, ha a bóját 4 m-rel odébb sodorta a víz, bár a rögzítése nem változott?



Egy húrtrapéz alapjainak aránya 1 : 2. Szárának hossza az alapok hosszának számtani közepével egyenlő, kerülete 4,2 m.

- a) Mekkora a rövidebb alap? b) Mekkora a trapéz területe?

Egy deltoid átlói 24 cm és 40 cm hosszúak. A rövidebb átló a hosszabbat annak nyolcadolópontjában metszi. Számítsd ki a deltoid kerületét és területét!

- a) Mekkora területen találhatók azok a pontok, amelyek egy adott ponttól legfeljebb 2 cm távolságra vannak?
b) Mekkora területen találhatók azok a pontok, amelyek egy adott 3 cm-es szakasztól legfeljebb 2 cm távolságra vannak?

A toronyóra nagymutatója 80 cm hosszú. Mekkora területet söpör

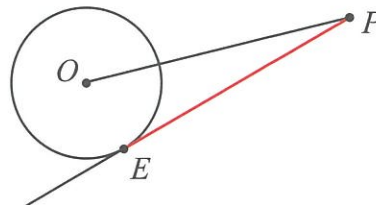
- a) negyedóra alatt, b) 25 perc alatt, c) két és fél óra alatt?

A toronyóra kismutatója 65 cm hosszú. Mekkora ívet jár be a mutató végpontja

- a) 6 óra alatt, b) 18 óra alatt, c) 2 óra alatt, d) fél óra alatt?

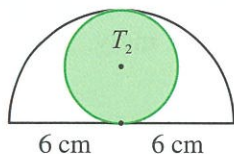
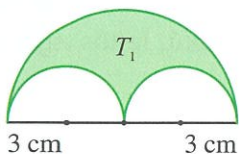
a) Számítsd ki a PE érintőszakasz hosszát, ha a P pont 265 mm-re van a 23 mm sugarú kör középpontjától!

b) Mekkora a kör sugara, ha a középpontjától 41 cm-re levő pontból 9 cm-es érintőszakasz húzható a körhöz?



Számítsd ki a 8 cm sugarú körbe írt szabályos sokszög kerületét és területét, ha a sokszög

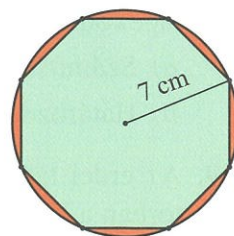
- a) négyoldalú, b) hatoldalú!



A színessel jelölt területek közül melyik a nagyobb?

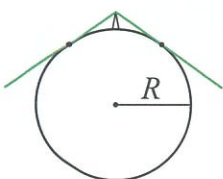
Egy 7 cm sugarú körből kivágjuk a lehető legnagyobb szabályos nyolcszöget.

A kör területének hány százaléka a leeső körszeletek területe?

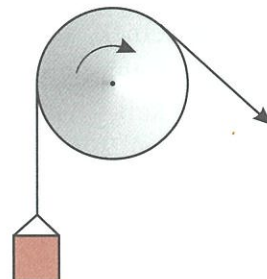


Milyen magasra emelkedik fel a teher, ha a másfél méter átmérőjű kerék elfordulása

- a) 120° , b) 225° , c) 540° , d) 2880° ?

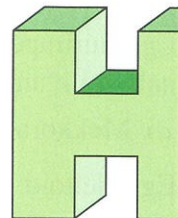


Milyen messzire láthatunk el egyenletes terepen 30 m magasságból, ha a Föld sugara körülbelül 6370 km?



31. Egy téglatest alakú ruhagyűjtő konténer szélessége 110 cm, mélysége 55 cm, magassága pedig 165 cm. Számítsd ki, hány köbméter ruha fér a konténerbe!

32. A „térbeli H betű” hét egybevágó, 4 cm élű kockából elkészíthető. Számítsd ki, mekkora a test felszíne és térfogata!

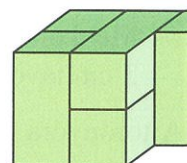
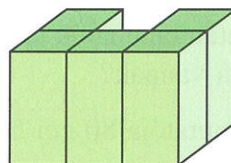


33. Egy négyzetes oszlop magasságát felére csökkentve 27 cm^3 térfogatú kockát kapunk.

- Milyen magas az oszlop?
- Hány cm^2 az oszlop felszíne?
- Hány liter a négyzetes oszlop térfogata?

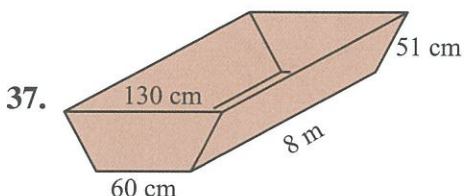
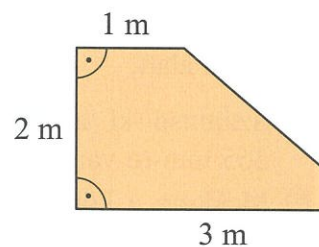
34. Öt darab egybevágó négyzetalapú egyenes hasáb alkotja az ábrán látható testeket. Egy-egy hasáb alapéle 6 cm, magassága ennek kétszerese.

Határozd meg a testek térfogatát és felszínét! A térfogatot literben, a felszínt mm^2 egységben add meg!



35. Mekkora a rombusz alapú egyenes hasáb felszíne, ha a rombusz átlói 6 cm és 8 cm, a hasáb magassága 10 cm?

36. Egy egyenes hasáb alapja az ábrán látható derékszögű trapéz. Hány liter a térfogata a 2,3 m magasságú hasábnak?



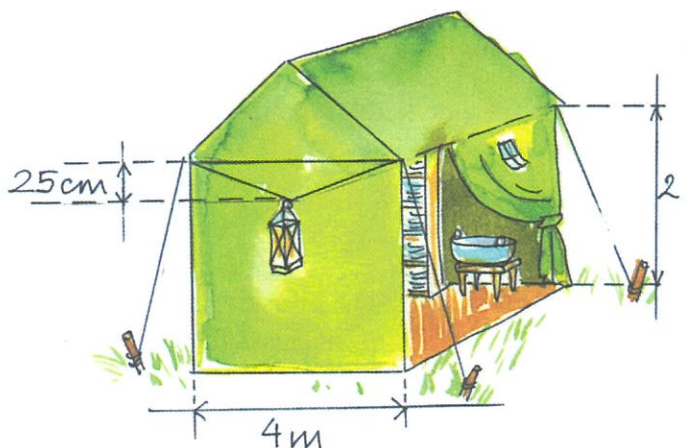
37. Hány m^3 földet kell kiásni egy húrtrapéz keresztmetsz egyenes árok készítésekor?

38. Egy 18 méter hosszú, 10 méter széles víztükrű medence alja egyenletesen lejt. Az egyik végén 60 centiméter mélységű, a másik végén 250 centiméter mély. A téglalap alakú, lejtős alját a lapokból készült mozaikminta alkotja.

- Számítsd ki, hogy hány köbméter víz van a színültig töltött medencében!
- Határozd meg, hogy hány négyzetméternyi mozaiklap szükséges a minta elkészítéséhez

39. Az erdei táborban, a mosogatósátorban a képen látható módon rögzítettek egy viharlámpát. Ha azt szeretnék, hogy a lámpa 10 cm-rel magasabbra kerüljön, mennyivel kell rövidebbre venni a 8,4 m hosszú függesző kötél hosszát? Becsülj! Számold!

- (A) 0,5 m (B) 28 cm (C) 2 cm



Egy téglatest egyik lapjának területe 160 cm^2 , e téglalap szomszédos oldalai hosszának aránya $5 : 8$. A téglatest harmadik éle a rövidebb él 60%-a.

Mekkora a téglatest felszíne?

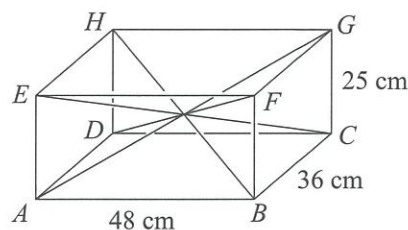
Add meg egy téglatest és egy egyenes körhenger méreteit úgy, hogy térfogata egyenlő legyen az adottakkal!

50 mm^3 :	a méh mézgyomra
8 m^3 :	egy közepes olajtartály térfogata
60 m^3 :	lakószoba
200 m^3 :	osztályterem
2205 m^3 :	a vár lakótornya Nagyvázsonyban
$40\,000 \text{ m}^3$:	a tihanyi Belső-tó térfogata
$240\,000 \text{ m}^3$:	az Országház fűthető része
2 km^3 :	a Balaton vizének térfogata

Egy téglatest éleinek hossza 48 cm , 36 cm és 25 cm . Drótból elkészült a téglatest élváz, és a testátlóit is a csúcsokba hegesztették az ábra szerint.

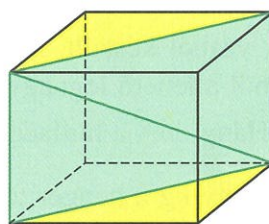
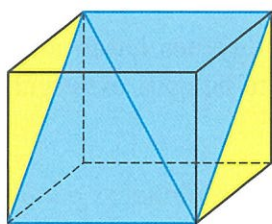
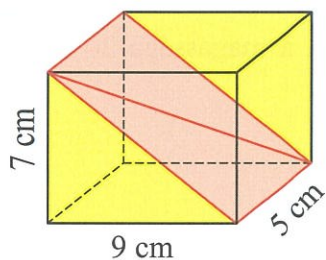
Határozd meg a legrövidebb út hosszát két legtávolabbi csúcs között, ha

- az útvonal csak éleken halad,
- az útvonal átlón is haladhat!



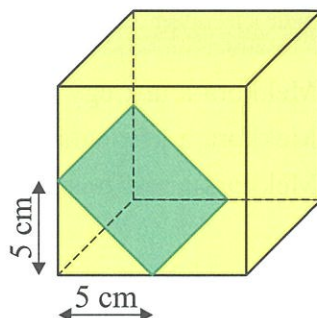
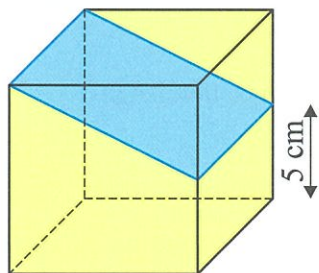
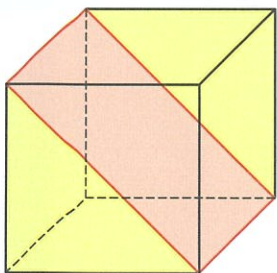
Egy téglatest élei 5 cm , 7 cm és 9 cm hosszúak.

- Mekkora a területe a téglatestbe helyezett téglalapoknak?
- Melyik téglalap átlója a leghosszabb? Számítsd ki az átlók hosszát!

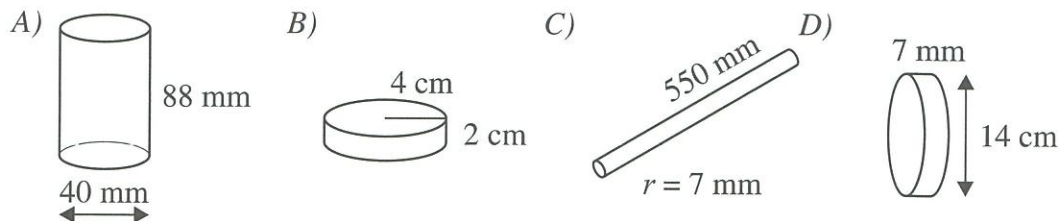


Az 1 méter magas egyenes hasáb alaplapja egyenlő szárú háromszög. A háromszög alapjának hossza 12 deciméter , az alaphoz tartozó magassága 7 deciméter . Számítsd ki, hány liter a hasáb térfogata!

Mekkora a területe az 1 dm élű kockába helyezett síklapoknak?



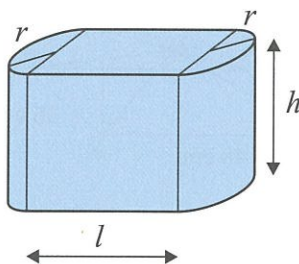
46. a) Rendezd térfogat szerint növekvő sorrendbe a hengereket!
b) Rendezd felszín szerint csökkenő sorrendbe a hengereket!



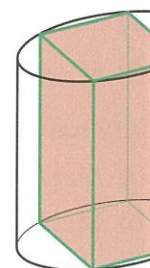
47. a) Hány m^3 víz fér egy 1,2 m átmérőjű, 6 m magas henger alakú csatornába?
b) Hány liter víz fér egy 12 m hosszú, 11 cm sugarú félhenger alakú csatornába?



48. Milyen magas a 25 literes tank, ha az ábrán jelölt adatok: $r = 12$ cm, $l = 30$ cm?



49. Milyen átmérőjű „gömbfát” kell venni, ha a kivágandó gerenda metszete egy $35 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ oldalú téglalap?
A forgáshenger alakú fát a szakemberek gömbfának is nevezik.



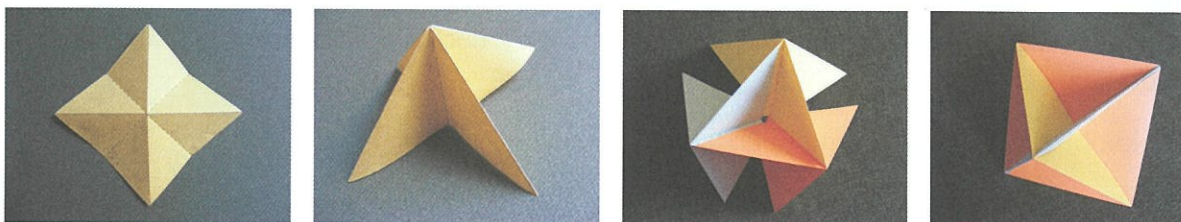
50. Egy vasból készült, négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm, a magassága 20 cm. Ebből a lehető legnagyobb térfogatú hengert esztergálják.

a) Hány dm^3 a hulladék?

b) Hány kg a henger tömege, ha a vas sűrűsége $\rho = 7,6 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$?



51. A kristályoktaéder hat darab 15 cm oldalú négyzetből készülhet.



- a) Mekkora a test egy éle?
b) Mekkora a két legtávolabbi csúcsának távolsága?
c) Mekkora a test felszíne?

Tartalom

NDOLKODJUNK EGYÜTT!.....	4
Logikai feladatok.....	4
Logika, halmazok.....	6
Skatulyaelv.....	9
Hányféleképpen?.....	10
Átélékok, híres fejtörők.....	17
GEBRAI KIFEJEZÉSEK.....	18
Algebrai kifejezések nagyító alatt.....	18
Behelyettesítés.....	18
Műveleti jelek a nagyító alatt.....	19
Összeg, szorzat.....	19
Egytagú és többtagú algebrai kifejezések.....	22
azonosságok.....	24
Összeg, különbség kivonása.....	25
Törtvonalas kifejezések átalakítása.....	26
Számoljunk hatványokkal!.....	29
azonos kitevőjű hatványok szorzása, osztása (Kiegészítő tananyag).....	31
0 hatványaival számolunk.....	35
Minden kifejezésnek sok neve van.....	37
Szorzatból összeg.....	38
Összegeből szorzat – kiemelés.....	40
Törteket egyszerűsítünk.....	41
Szöveges feladatok megoldása egyenlettel vagy anélkül.....	45
Mozgásos feladatok.....	51
Munkavégzéssel kapcsolatos feladatok.....	55
Százalékszámítással kapcsolatos feladatok.....	58
Levegéses feladatok.....	61
Órádspróba.....	63
NYZETGYÖK, PITAGORASZ-TÉTEL.....	64
A négyzetgyök fogalma.....	64
Hosszúság és terület meghatározása rácson.....	69
Pitagorasz-tétel.....	72
Pitagorasz-tétel bizonyítása (Kiegészítő tananyag).....	72
Pitagorasz-tétel alkalmazása.....	74
Pitagorasz-tétel alkalmazása.....	75
A kocka testátlójának meghatározása (Kiegészítő tananyag).....	77
	221

Tudáspróba	
HOZZÁRENDELÉS, FÜGGVÉNY	
Hozzárendelések, függvények	
Lineáris függvény	
A lineáris függvény grafikonjának jellemző tulajdonságai	
A függvény értelmezési tartománya, értékkészlete	
Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása	
A függvény fontos tulajdonsága, néhány nemlineáris függvény	
Abszolútérték-függvény	
Másodfokú függvény	
Törtfüggvény	
A számtani sorozat	
Tudáspróba	
TÉRGEOMETRIA	
A gúla	
A gúla hálója	
A gúla felszíne (Kiegészítő tananyag)	
Hasábok és gúlák	
A gúla térfogata (Kiegészítő tananyag)	
A kúp	
A kúp felszíne és térfogata (Kiegészítő tananyag)	
A gömb	
A gömb felszíne és térfogata (Kiegészítő tananyag)	
Tudáspróba	
STATISZTIKA	
Alapfogalmak, elnevezések	
Diagramok	
Középértékek	
VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS	
A relatív gyakoriság és a valószínűség	
Elemi és összetett események (Kiegészítő tananyag)	
Valószínűségi játékok (Kiegészítő tananyag)	
Tudáspróba	
GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK	
Eltolás	
Vektorok	
Az eltolás tulajdonságai	
Egyenes, félegyenes, szakasz és szög képe	

árhuzamos szárú szögek.....	171
z eltolt kép szerkesztése.....	175
gybevágósági transzformációk összefoglalása.....	177
Szimmetria.....	179
em egybevágósági transzformációk.....	182
Változik a szabály, változik a kép.....	182
középpontos hasonlóság képekben.....	186
udáspróba.....	187
ZEFOGLALÓ FEJEZET.....	188
őzépiskolába készülünk.....	188
Számok.....	188
Algebra.....	192
Függvények, sorozatok.....	195
Alakzatok.....	200
Geometriai transzformációk, szimmetriák.....	206
Mennyiségek a geometriai számításokban.....	209
Geometriai szerkesztési feladatok.....	211
Geometriai számtási feladatok.....	213
..LÉKLET.....	224

A 2, 3, ..., 9 első 13 hatványa

k^n

$\begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix}$	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	9	16	25	36	49	64	81
3	8	27	64	125	216	343	512	729
4	16	81	256	625	1 296	2 401	4 096	6 561
5	32	243	1 024	3 125	7 776	16 807	32 768	59 049
6	64	729	4 096	15 625	46 656	117 649	262 144	531 441
7	128	2 187	16 384	78 125	279 936	823 543	2 097 152	4 782 969
8	256	6 561	65 536	390 625	1 679 616	5 764 801	16 777 216	43 046 721
9	512	19 683	262 144	1 953 125	10 077 696	40 353 607	134 217 728	387 420 489
10	1024	59 049	1 048 576	9 765 625	60 466 176	282 475 249	1 073 741 824	3 486 784 401
11	2048	177 147	4 194 304	48 828 125	362 797 056	1 977 326 743	8 589 934 592	31 381 059 609
12	4096	531 441	16 777 216	244 140 625	2 176 782 336	13 841 287 201	68 719 476 736	282 429 536 481
13	8192	1 594 323	67 108 864	1 220 703 125	13 060 694 016	96 889 010 407	549 755 813 888	2 541 865 828 329