

Előszó

Ne vágd el azt, amit kibogozhatsz!
(Joubert, XIX. századi filozófus)

Kedves Gyerekek!

Ezt a könyvet és a hozzá tartozó feladatgyűjteményt Nektek írtuk. Szeretnénk, ha gondolkodva használnátok, és magatok fedeznétek fel a matematika újabb és újabb rejtelseit a kitűzött feladatok megoldásán keresztül. Természetesen egy felfedezőnek is el kell sajátítania bizonyos ismereteket, ezeket így jelöltük: **TUDNI KELL!**

A tankönyvben a következő jelölésekkel fogtok még találkozni:

Most még nem tanulhatunk meg mindent, a jövőben szóba kerülő ismeretekre utal.

Amit korábban tanultatok, és már tudnotok kellene.

Így jelöltük azokat a feladatokat, amelyeket elkészíthettek, kivághattok, modellezhettek.

A matematika történetéről is olvashattok a könyvben.

Minden tananyagot egy-egy feladatsor követ. A feladatok sorszámát megkülönböztető jellel láttuk el.

1. Az új ismeretek elsajátítását, megértését igénylő alapeladat, ezt meg kell tudnotok oldani a továbbhaladáshoz.

2. Az új ismeret alkalmazását, tudásotok rögzítését, elmélyítését segítő feladat.

3. Többféle ismeret és képesség alkalmazását igénylő feladat.

4. Fejtörők, versenyfeladatok azoknak, akik további érdekes feladatokat szeretnének megoldani.

Internettel támogatott feladatok.

A tankönyvben található **Kiegészítő tananyagokat** a matematikát magasabb óraszámban tanuló csoportoknak írtuk.

A hozzájuk kapcsolódó feladatokat is a fentebb leírt szintekbe soroltuk, de más színnel jelöltük, például: **25.**

A fentiekén kívül, ha egy-egy részfeladat nehezebb, gondolkodtatóbb a többinél, így jelöljük: **123.**

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a „pótold” típusú feladatoknál a füzetetekbe dolgozzatok!

A tankönyvben szereplő megoldott bevezető **példák** segítséget nyújtanak a tananyag megértéséhez, és a tankönyvi feladatok megoldásához is ötleteket adnak.

Ha szabadidőtökben is szívesen foglalkoztok matematikafeladatokkal, akkor figyelmetekbe ajánljuk az alábbi kiadványokat:

Abacus Matematikai Lapok 10–14 éveseknek (a Bolyai János Matematikai Társulat és a Matematikában Tehetséges Gyermekekért Alapítvány folyóirata)

Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny (Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány)

Róka Sándor: *Egypercesek – Feladatok matematikából* (Tóth Könyvkereskedés)

Imreczené–Reiman–Urbán: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft.)

Eredményes tanulást kívánunk: a szerzők és a kiadó

Gondolkodjunk együtt!

Logikai feladatok

Példa



Győző, Piroska, Lajos és Zoli közül valaki elrontotta kisöccsük karácsonyra kapott távirányítós autóját. Édesapjuk megpróbálta kideríteni az igazságot. A gyerekek ezeket mondták:

Győző: Lajos volt.

Piroska: Én hozzá se nyúltam az autóhoz.

Lajos: Zoli volt.

Zoli: Lajos hazudik.

Ki rontotta el az autót, ha a négy gyerek közül egy hazudott, a másik három pedig igazat mondott?

Megoldás

Győző és Lajos nem mondhattak egyszerre igazat, hiszen egymásnak ellentmond az állításuk. Ugyan-
ez igaz Lajos és Zoli állítására is. Ezért Lajos hazudott, a többiek igazat mondtak.

Lajos rontotta el az autót.

Feladatok

1. Julinak, Marinak, Norbinak és Ferinek is van egy-egy állatkája: egy cica, egy kutya, egy aranyhal és egy kanári.

Mari állata szőrös, Ferié pedig négylábú. Norbi madarat tart. Juli és Mari nem tart cicát.

Az alábbi állítások közül melyik nem igaz?

A) Ferié a kutya.

B) Norbié a kanári.

C) Julié az aranyhal.

D) Ferié a cica.

E) Marié a kutya.

2. Egy családi nyaraláson a gyerekek ugyanazzal a bankkártyával vásárolhattak. Az ötödik napon édesapjuk érdeklődött, hogy mennyi pénz van még a bankkártyán. A gyerekek ezeket a válaszokat adták:

Andris: Még legalább 5000 Ft.

Bea: Úgy emlékszem, hogy 5000 Ft-nál kevesebb van már rajta.

Csilla: Én csak azt tudom, hogy van még rajta pénz.

Hány forint van a bankkártyán, ha csak az egyik gyerek állítása igaz?

3. Négy testvér közül az egyik édesapjuk laptopján játszott, és véletlenül ráborította az üdítőitalát a gépre. Édesanyjuk megpróbálta kideríteni, melyik fiú tette. A gyerekek ezeket a válaszokat adták:

András: Nem én voltam.

Béla: Én sem.

Csaba: Dani borította rá.

Dani: Béla volt.

Kiderült, hogy az egyikük füllentett, a többiek igazat mondtak. Ki volt a tettes?

4. Öt gyerek a következőt állítja egymásról:
 András: A fiútestvérem focizik.
 Bea: Pontosan két fiútestvérem van.
 Csaba: Csak lánytestvérem van.
 Dóra: A fiútestvérem szereti az informatikát.
 Endre: A lánytestvérem a városi kórusban énekel.
 Ki lehet Csaba testvére, ha mindenki igazat mond?

5. Egy nemzetközi futóverseny előtt öt női versenyző így nyilatkozott az újságíróknak:
 Anna: Az első három között leszek.
 Barbara: Én nyerek.
 Cecília: Legyőzöm Annát.
 Daniella: Nem tudom Barbarát legyőzni.
 Edit: Cecília vagy Daniella fog nyerni.
 Hogyan alakult a sorrend, ha a verseny végére egyiküknek sem lett igaza?

@ Európában az egyik legnépszerűbb futóverseny a párizsi Schneider maraton. A 2015-ös évben a férfiak versenyében három kenyai és két etióp versenyző végzett az első öt helyen. Wilson Chebet (ejtsd: Vilszon Csebet) kenyai versenyző ért először célba. Tippeld meg, majd nézz utána az interneten, hogy mennyi idő alatt futotta le a 42,195 km-es maratoni távot!



- A) 4:05:27 B) 3:05:27
 C) 2:05:27 D) 1:05:27

6. Feri, Gyula, Jancsi és Karcsi meglátogatták egy barátjukat. A négy fiú családi neve valamilyen sorrendben: Kiss, Nagy, Szabó és Molnár. Elsőnek Molnár érkezett, másodiknak Jancsi, ezután Kiss és végül Gyula.

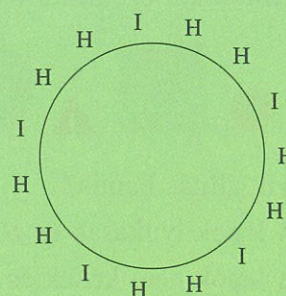
Mindenki hozott egy ajándékot: Molnár bűvös kockát, Feri golyóstollat, Gyula csokit, Szabó pedig könyvet.

Mi a négy fiú teljes neve?

(Imrecze Zoltánné, Reiman István, Urbán János: Fejtörő feladatok felsősöknek, Pannon-Literatúra Kft., 2014)

7. Tizenöt fős társaság ül egy kerek asztalnál, és mindenki azt állítja, hogy mindkét szomszédja hazudós. Azt is tudjuk, hogy a hazudósok mindig hazudnak, az igazmondók mindig igazat mondanak. A társaság minden tagja tudja mindkét szomszédjáról, hogy igazmondó vagy hazudós.

Legalább hány igazmondó ül az asztal körül?





8. Seholsincs-szigeten kétféle ember él: igazmondók, akik mindig igazat mondanak, és hazudósok, akik mindig hazudnak. Egy alkalommal meglátogattam ezt a szigetet. A tengerparton álldogált két szigetlakó: Alfa és Béta. „Te igazmondó vagy?” – kérdeztem Alfát.

Alfa válaszát sajnos nem értettem az erős tengerzúgás miatt. Megkérdeztem Bétát, hogy mit válaszolt Alfa. Ő így válaszolt: Alfa azt mondta, hogy ő hazudós.

Mi lehet Alfa, illetve Béta?

Logika, halmazok



Az **és** kötőszót a hétköznapi szóhasználatban és a matematikában ugyanúgy használjuk. Nézzünk erre példákat!

Éber Bence csak akkor tud elaludni, ha teljes sötétség és síri csend van a szobájában.

15-tel csak akkor oszthatók a számok, ha 3-mal és 5-tel oszthatók.

Az ilyen összetett állítások csak akkor igazak, amikor a bennük szereplő két állítás mindegyike igaz.

A **vagy** kötőszó sokféle értelemben használatos a magyar nyelvben. Ezek közül kettőre nézzünk példát!

Kacér Vica vasárnap 9-kor vagy Deltás Bécivel megy evezni, vagy Sebes Gyuszival motorozik.

Ebben a mondatban a „vagy-vagy” kötőszó helyett a „legfeljebb az egyik”, illetve a „pontosan az egyik” kifejezés írható, mivel Vica egyszerre, ugyanabban az időben nem lehet két különböző helyen.

Két szám szorzata nulla, ha az egyik vagy a másik tényező nulla.

Ebben a mondatban a „vagy” kötőszó helyett a „legalább az egyik (a kettő közül)” kifejezés írható. Megállapodhatunk abban, hogy az egyszer írt, illetve mondott „vagy” kötőszót – a hétköznapi használattól eltérően – a matematikában a „legalább az egyik (a kettő közül)” kifejezés helyett használjuk.

Az ilyen összetett állítás csak akkor hamis, amikor a két állítás mindegyike hamis.

1. példa

Az állításokat ezekről a logikai lapokról írtuk.



Melyik állítás hamis?

- a) A lapok lyukasak és zöldek.
- b) A lapok nem kékek és nem sárgák.
- c) A lapok lyukasak vagy zöldek.
- d) A lapok lyukasak vagy nagyok.

Megoldás

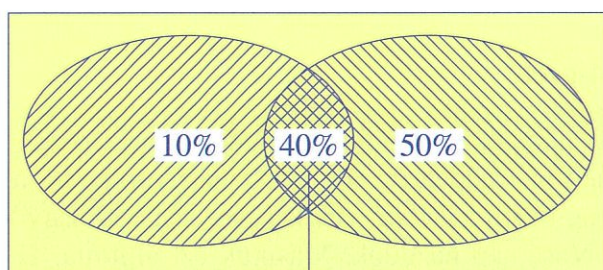
- a) Hamis, mert van olyan lap, amelyikre nem teljesül egyszerre mindkét tulajdonság. *Például:* nagy zöld négyzet.
- b) Igaz, mert mindkét tulajdonság igaz a lapokra.
- c) Igaz, mert minden lapra legalább az egyik tulajdonság igaz.
- d) Hamis, mert van olyan lap, amelyikre egyik tulajdonság sem igaz. *Például:* kicsi zöld háromszög.

2. példa

Egy osztály fele németül tanul, 90%-a angolul. 16 gyerek mindkét nyelvet tanulja. Hányan járnak az osztályba, ha mindenki tanul legalább egy nyelvet?

Megoldás

Az osztály felének és a 90%-ának az összege 140%. Ez 40%-kal több, mint a 100%. A 40%-nyi többlet abból adódik, hogy a mindkét nyelvet tanuló gyerekeket kétszer számoltuk. Ők 16-an vannak. Ha az osztály tanulóinak 40%-a 16 gyerek, akkor 10%-a 4 fő, 100%-a 40 fő. 40 tanuló jár az osztályba. Ellenőrizzünk! 20-an tanulnak németül, 36-an angolul: $20 + 36 - 16 = 40$. Jól oldottuk meg a feladatot!



40% → 16 fő
10% → 4 fő
100% → 40 fő

-  50% németül tanul
-  90% angolul tanul
-  40% németül és angolul tanul

Feladatok

1. Kanada kétnyelvű ország. Az emberek 86%-a beszél angolul, 32%-a pedig franciául.

Az emberek hány százaléka beszéli mindkét hivatalos nyelvet, ha legalább az egyiket minden lakos beszéli?

(<https://hu.wikipedia.org/wiki/Kanada>)

2. Egy osztályban 40 tanuló van. 14 tanuló kézilabdázik, 36 kosárlabdázik. Minden tanuló legalább az egyik sportágat űzi. Az osztály hány százalékát teszik ki azok a tanulók, akik csak kézilabdáznak?

3. Az iskolának foci- és kosárlabdacsapata van. Az egyik osztályban 7 fiú jár az iskolai foci-meccsekre, 10 jár a kosárlabdameccsekre, 3 mind a két sportág meccseit látogatja, de 4 fiú egyáltalán nem jár meccsekre. Hány fiú jár az osztályba?



4. Egy nyolcadikos osztály 35 tanulója között 20 lány van, és 12 olyan gyerek, aki tud keringőzni. Az osztályba járó fiúk közül 7 tud keringőzni. Hány olyan lány van, aki tud keringőzni? Hány fiú nem tud keringőzni?

5. Egy versenyen az iskola tanulóinak 20%-a indult. Az indulók két feladatot kaptak.

Az elsőt a versenyzők 60%-a, a másodikat 65%-a oldotta meg. Minden induló legalább egy feladatot megoldott. Csak a másodikat 80-an oldották meg. Hányan járnak az iskolába?

(Varga Tamás Matematikaverseny, 7. osztály)

6. Hány olyan kétjegyű szám van, amelyben az egyik számjegy nagyobb, mint a másik?

7. A 40-nél nagyobb, de 60-nál kisebb számok közül hány olyan van, amelyik 3-mal vagy 4-gyel osztható?

8. Hány olyan kétjegyű szám van, amely

- a) osztható 3-mal és 4-gyel,
- b) osztható 3-mal vagy 4-gyel,
- c) nem osztható sem 3-mal, sem 4-gyel?



9. Nóra és Sári ikertestvérek, külsejük alapján nem tudják őket megkülönböztetni. Az a különös szokásuk, hogy egyikük minden hétfőn, kedden és szerdán, a másikuk pedig minden csütörtökön, pénteken és szombaton hazudik, s a hét többi napján igazat mond. Egyik nap egyikük ezt állította: Szombaton hazudok. Vasárnap hazudok. Másikuk ezt állította: Holnap hazudni fogok. Melyik napon állították ezt?

(Zrínyi Ilona Matematikaverseny, 1992. 6. és 7. osztályosok versenye, megyei döntő.)

10. Egy verseny után Pista örömmel újságolta barátainak, hogy megoldotta a feladatokat.

Az egyik feladat így szólt: Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben van 3-as számjegy? Pista megoldása:

A 3-as számjegy lehet bármelyik helyen.

Ha az első helyen van: $3\boxed{}\boxed{}$, a másik két helyre 10–10 számjegy kerülhet, tehát ilyen számból $10 \cdot 10 = 100$ van.

Ha a második vagy a harmadik helyen van a 3-as számjegy: $\boxed{}3\boxed{}$ vagy $\boxed{}\boxed{}3$, akkor az első helyre 0 nem kerülhet, ezért $2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$ ilyen szám van. Tehát az összes megoldás: $100 + 180 = 280$.

Sajnos Pista erre a megoldásra nem kapott pontot.

Magyarázd meg, hol hibázott, és add meg a helyes választ!

11. Egy versenyen két feladatot kellett megoldani. Hatan voltak, akik mindkét feladatot megoldották, és hatan, akik az egyiket sem tudták megcsinálni. A legalább egy feladatot megoldók 75%-a oldotta meg az elsőt, 50%-a a másodikat. Hányan vettek részt a versenyen, és hányan voltak, akik az első feladatot megoldották, de a másodikat nem?

Skatulyaelv

1. példa

Egy kotlós alatt tyúk- és kacsatojások vannak. Ha tyúktojást akarok kivenni a kotlós alól, akkor legkevesebb ötöt, ha kacsatojást, hatot kell kivennem. Hány tojáson ül a kotlós?



Megoldás

Mivel legrosszabb esetben 5 tojást kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen azok között tyúktojás, ezért kacsatojásból 4 van. Hasonló okok miatt tyúktojásból 5 van. A kotlós tehát 9 tojáson ül.

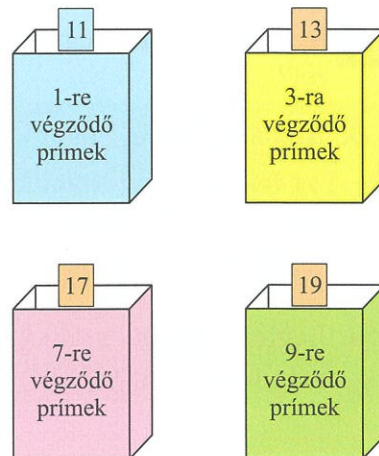
2. példa

Igaz-e, hogy öt, legalább kétjegyű prímszám közül kiválasztható kettő olyan, amelyek különbsége osztható 10-zel?

Megoldás

A 10-nél nagyobb prímek utolsó jegye csak 1, 3, 7, illetve 9 lehet. Képzeltben készítsünk négy skatulyát! Az egyikbe azokat a prímeket rakjuk, amelyek 1-re végződnek, a másodikba a 3 végűeket, a harmadikba a 7-re végződőket és a negyedikbe a 9 végűeket.

Mivel csak négy skatulya van és öt prím, így lesz legalább egy olyan skatulya, amelyikben két prím van. E kettő különbsége 0-ra végződő szám lesz, tehát osztható 10-zel.



Az ilyen gondolkodási módszert nevezzük skatulyaelvnek.

Feladatok

1. A 24 fős osztályunkban az a szokás, hogy a hónap elején felköszöntjük az összes olyan gyereket, aki abban a hónapban született.
 - a) Biztosan lesz-e olyan hónap, amikor legalább 2 gyereket köszöntünk fel?
 - b) Lehet-e olyan hónap, hogy nincs kit felköszönteni?
2. Egy zacskóban 10 zselés és 10 mogyorós draszté van, szemre egyformáknak látszanak. Legkevesebb hány darabot kell kivennie Áronnak, hogy biztosan legyen köztük egy mogyorós és egy zselés is?
3. Egy borosgazda pincéjében 13 palack édes, 9 palack félédes és 5 palack száraz tokaji bor van. A feleség, aki nem tud különbséget tenni a palackok között, legalább hányat vigyen fel a vendégeknek, ha azok azt szeretnék, hogy biztosan legyen köztük
 - a) édes,
 - b) három palack édes,
 - c) mindegyik fajtából legalább egy palack,
 - d) az összes száraz,
 - e) édes és félédes,
 - f) valamelyik fajtából három palack?

4. Egy fedett kosárban 10 barna, 15 szürke és 20 fehér galamb van. Egyesével engedjük ki őket. Legalább hány galambnak kell kirepülnie, hogy biztosan legyen köztük
- a) barna vagy fehér, b) barna és fehér, c) legalább 12 egyforma színű?
5. Egy meglehetősen rendetlen műlovárnő az öltözőszekrényének fiókjában tartja kesztyűit igen nagy összevisszaságban: 3 pár sárgát, 3 pár kéket és 3 pár pirosat. Előadás előtt kialszik a villany az öltözőjében. Legalább hány darab kesztyűt kell találmra kivennie ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy pár ugyanolyan színű, ha a jobbos és balos kesztyű nem egyforma?
6. Egy tálon meggyes, lekváros és túrós bukta illatozik. Legkevesebb 6-ot kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük meggyes. Legkevesebb 7-et kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük lekváros, és 8-at, hogy biztosan legyen köztük túrós. Hány bukta van a tálon?
7. Felírtunk a táblára hét különböző négyzetszámot. Igaz-e, hogy van közöttük két olyan, amelyik ugyanolyan számjegyre végződik?
8. Igaz-e, hogy hét négyzetszám között mindig van kettő olyan, amelyek különbsége osztható 10-zel?
- ★ 9. Bizonyítsuk be, hogy
- a) három egész szám között mindig van kettő, amelyek összege osztható 2-vel,
- b) öt egész szám között mindig van három, amelyek összege osztható 3-mal,
- c) hét egész szám között mindig van négy, amelyek összege osztható 4-gyel!
10. Legfeljebb hány számot lehet kiválasztani az 1, 2, 3, ..., 25 számok közül úgy, hogy semelyik kettőnek az összege ne legyen osztható 3-mal?



Hányféleképpen?

1. példa

Az idei farsangon öt tánciskolás fiú a görögök néptáncát, a szirtakit mutatta be. A táncot hol egy sort alkotva, hol körben összekapaszkodva járták. Az előadás nagy sikert aratott. Az öltözőben a táncosok kézfogással búcsúztak el egymástól.

- a) Hány különböző sorrendben kerülhettek egymás mellé a fiúk, ha egy sort alkottak?
- b) Hogyan változik a lehetőségek száma, ha körben táncoltak? A körtáncnál különböző esetnek számít, ha legalább egy táncos fiúnak legalább az egyik oldalán más táncos áll.
- c) Hány kézfogást jelent, ha mindenki mindenkivel kezét fogott?



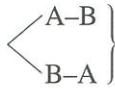
Megoldás

a) A táncosokat jelöljük az ábécé betűivel! Nézzük meg, mi történne, ha kevesebb táncos lenne!

Ha **egy táncos** van, akkor **1-féle** sorrend lehetséges:

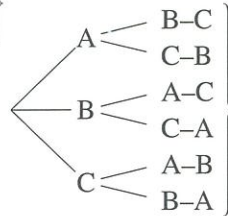
1 lehetőség.

Ha **két táncos** van, akkor **2 · 1-féle**:



2 lehetőség.

Ha **három táncos** van, akkor **3 · (2 · 1)-féle**:



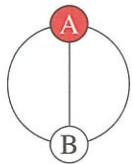
6 lehetőség.

Ha **négy táncos** van, akkor folytathatnánk a fadiagram felrajzolását, és 24 ágat kapnánk. Szorzással felírva **4 · (3 · 2 · 1) = 24** a lehetőségek száma.

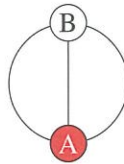
Ha **öt táncos** van, akkor **5 · (4 · 3 · 2 · 1) = 5 · 24 = 120-féle** lehetőség adódik.

b) Ha körben táncolnak, akkor azt kell meggondolnunk, hogy melyek azok a sorrendek, amelyeket nem lehet megkülönböztetni.

Két fiú táncol:

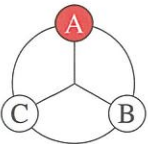


Ha a táncosok éppen egy fél-környit fordulnak, akkor ezt kapjuk.

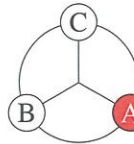


Ebben az esetben is ugyanabban a sorrendben állnak. A két eset között nem teszünk különbséget.

Három fiú táncol:

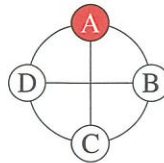


Ha a táncosok harmadfordulatokkal fordulnak el, akkor ezeket az állásokat kapjuk.

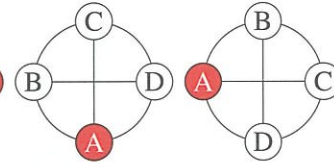
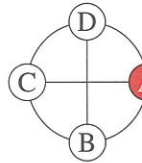


E három eset között nem teszünk különbséget.

Négy fiú táncol:

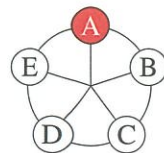


Ha a táncosok negyedfordulatokkal mozduknak el, akkor ezeket az állásokat kapjuk.

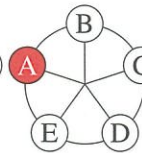
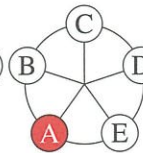
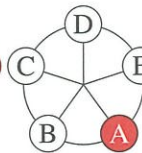
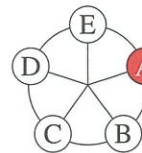


A négy állás között nem teszünk különbséget.

Öt fiú táncol:



Ha ötödfordulatokkal mozduknak el, akkor ezeket az állásokat kapjuk.



Az öt állás között nem teszünk különbséget.

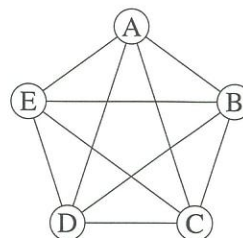
Ha az öt fiú körben táncol, akkor az egy sorban táncolásnál kapott 120 lehetőségből 5-5 egymástól nem megkülönböztethető. Ezért $120 : 5 = 24$ -féleképpen táncolhatnak.

Rövidebb megoldás

Kiválasztunk egy táncost, és megnézzük, hogy a többiek hány különböző módon állhatnak be a körbe. Öt táncos esetén ez $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetőség.

c) Mind az öt fiú 4 társával fog kezét, ez összesen $5 \cdot 4 = 20$ eset. Mivel minden kézfogásnak két résztvevője van, és a kézfogást mindkettőjükénél beleszámítottuk, ezért a 20-at még el kell osztani 2-vel.

A rajzon minden összekötés egy kézfogást jelent. Arról is leolvasható, hogy összesen 10-szer fogtak kezét a fiúk.



Arra a szorzatra, amelyben 1-től n -ig összeszorozzuk a természetes számokat, külön jelölést vezettek be a matematikusok: $n!$ (olvasd: n faktoriális).

Például: $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ stb.

Megállapodás szerint: $0! = 1$, és $1! = 1$.

A nagyobb számok faktoriálisát a zsebszámológép $!$ gombjával is meghatározhatod.

Az ábráról leolvasható, hogy az esetek száma így alakul:

Táncosok száma	A különböző sorrendek száma, ha egymás mellett állnak	A különböző sorrendek száma, ha kört alkotva állnak
2	$2 \cdot 1 = 2 = 2!$	$\frac{2 \cdot 1}{2} = 1 = 1!$
3	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = 3!$	$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3} = 2 = 2!$
4	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 = 4!$	$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 6 = 3!$
5	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 = 5!$	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 24 = 4!$
$\vdots$		
n	$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$	$\frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{n} = (n - 1)!$

2. példa



Öt újonc közül hármat tud magával vinni az edző a tanulócsónakkal.

Hány különböző lehetőség van erre, ha

- az ülésrend számít,
- az ülésrend nem számít?

Az oktató minden esetben az első helyen ül.

Megoldás

a) Az első helyre még mind az öt gyereket választhatja az edző. A második helyre már csak a megmaradó négy gyerekből válogathat, a harmadikra pedig már csak három közül. Ez összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ eset.

b) Ha az ülésrend nem számít, akkor nem teszünk különbséget az alábbi hat eset között. ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA . (A csónakba beszálló gyerekeket az ábécé betűivel jelöljük.)

Ugyanez a helyzet, akármelyik három gyereket választja ki az edző. A 60-at el kell osztani 6-tal, mert ugyanaz a három gyerek 6-féle sorrendben tud beülni az oktató mögé. Ha az ülésrend nem számít, akkor $\frac{60}{6} = 10$ különböző módon ülhetnek be a gyerekek a csónakba.

3. példa

Hány különböző útvonalon juthatunk el A városból E városba, ha csak E felé haladhatunk?



Megoldás

a) A városból B városba 3-féle úton juthatunk el. Innen C-be 2 különböző úton érkezhetünk. Ezért A-ból C-be $3 \cdot 2 = 6$ -féleképpen juthatunk el. Hasonló okoskodással határozhatjuk meg, hogy D városba $6 \cdot 4 = 24$ -féle útvonalon juthatunk, amely $3 \cdot 2 \cdot 4$. D-ből E-be 3 út vezet, ezért A-ból E-be $24 \cdot 3 = 72$ -féle útvonalon juthatunk el, amely $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$.

b) A b) feladatban az összes olyan útvonalon eljuthatunk A-ból E-be, mint az a) feladatban. Ezekről az utaktól teljesen független útvonalakon haladunk, ha a piros úton indulunk el. A-ból D-be 1 út vezet, innen E-be pedig 3, ezért A-ból E-be 3-féle útvonalon juthatunk.

Az összes útvonalak száma így $72 + 3 = 75$, amely $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3$.

4. példa

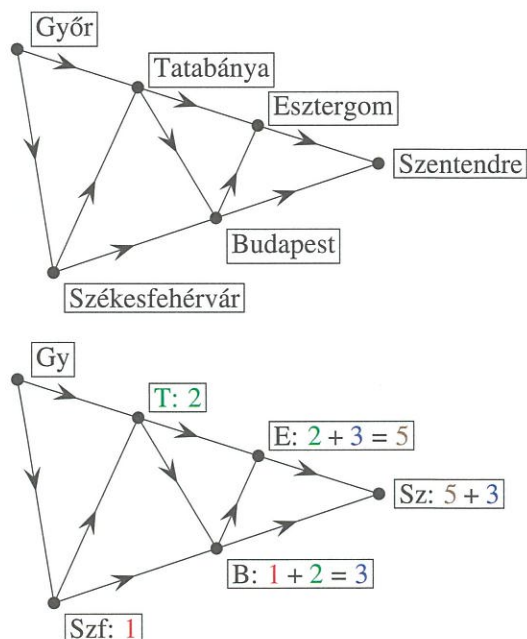
Sportkörünk kerékpártúrája Győrből indult, és Szentendrén fejeződött be. Minden csapatunk más-más útvonalon jutott el a célállomásra. A térképen látható nyilak mutatják, hogy milyen irányban haladtak a csapatok.

Hány csapat vett részt a kerékpártúrán?

Megoldás

Minden pontba beírtuk, hogy oda hányféle útvonalon juthatunk el.

Tatabányára Győrből és Székesfehérvárról is eljuthatunk. Budapestre Székesfehérvárról egyféle útvonalon, Tatabányáról az előző 2-féle útvonalon juthatunk el, ezért összesen $2 + 1 = 3$ -féleképpen.



Esztergomba Tatabányáról 2-féle útvonalon, Budapestről 3-féle útvonalon érkezhünk, ezért összesen $2 + 3 = 5$ -féleképpen.

Szentendrre Budapestről 3-féle, Esztergomból 5-féle útvonalon érkezhünk, ezért összesen $3 + 5 = 8$ -féle útvonalon érkezhünk.

Az idei kerékpártúrán 8 csapat vett részt.

Feladatok

1. A mi iskolánkban belső használatra ilyen telefonkészülékeket gyártottak. Hány különböző legfeljebb négyjegyű telefonszám hívható, ha

- a számjegyek nem ismétlődhetnek,
- a számjegyek ismétlődhetnek?



2. a) Hányféle gyöngysor fűzhető ezekből a gyöngyökből?



b)

Hányféle lesz a gyöngysorok száma, ha körbefuthatnak a szálon a gyöngyszemek?



3. Magyarországon a gépjárműveken jelenleg 6 karakter hosszúságú forgalmi rendszámok vannak használatban. Ezek sorozatszám esetén három betű, három szám felosztásban követik egymást, fehér alapon fekete karakterekkel.



Magyar EU-s rendszám 2004. május 1-jétől

Milyen autórendszámból lehet több Magyarországon?

Az olyanból, amelynek mind a három számjegye különböző, vagy az olyanból, amelynek számjegyei között vannak egyenlők is?



Egyes rendszámsorozatokot cégek, intézmények megvásároltak, hogy járműveiket ezzel is megkülönböztessék. Például a BPO-123 és a BPI-123 a BKV Zrt. autóbuszainak rendszáma. (A cég szokása szerint I = 1; O = 0. Tehát például a BPI-809-es forgalmi rendszámú busznak az azonosítója 18-09, és például a BPO-001-nek 00-01.) Milyen a Magyar Televízió Zrt. rendszáma?

4. Gyermekkorunkban azt játszottuk, hogy a „Szép az icipici női cipő, női cipő. Benne takarosan lépked a nő, a nő...” együgyű szövegű dalocskát énekeltük ugyanolyan magánhangzókkal. Például csupa ú-val: „Szúp uz ucupucu núu cupú...”

A C□P□ „szó” hiányzó magánhangzói helyére a magyar abc magánhangzóit beírva hány különböző „szót” kapunk? Ezek közül hány lesz értelmes?

5. Ismert magyar költők híres sorait adtuk meg magánhangzókkal, illetve mássalhangzókkal nélkül. Melyik esetben könnyebb kitalálni a verssorokat? (A kettős mássalhangzókat is egy □-tel jelöljük.)

- T□LPR□ M□GY□R, H□□ H□Z□
- T□Z□S□N S□T L□□ NY□R□ N□P S□G□R□
- Ú□ A□ É□I □O□Á□, □E□I□E□ A □A□□A□
- É□ □Í□□A□ A □Ö□□□E□ A □E□□I □I□Á□O□

6. A nyári hegymászó táborban húsz fiú vett részt. A tábor végén mindenki címet cserélt a többiekkel. Az állomáson mindenki kézfogással búcsúzott el a többiektől. Összesen hány címet írtak le a fiúk? Összesen hányszor fogtak kezét?

7. Az iskolánk kosárlabdacsapatának lányai a meccsek végén pacsit adnak egymásnak. Hány játékos vett részt a mi iskolánkból azon a mérkőzésen, ahol 105 pacsit csattant?

8. Egy szabályos hatszög egyik csúcsát pirosra, a többit kék színűre színeztük. A hatszög csúcsai közül hármat kiválasztva háromszöget kaptunk. Melyik fajta háromszögből van több: amelyiknek van piros csúcsa, vagy amelyiknek nincs?

9. Az ötödikesek olyan lottóval játszottak, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5 számokból két számra kell tippelni.

a) Hány szelvényt kell ahhoz kitölteniük, hogy biztosan legyen telitalálatuk (azaz 2 találatuk) ezen a lottón?

b) Hány szelvényt kitöltése esetén lesz biztosan 1 találatuk?

10. Régen az autóbuszjegyeket úgy érvényesítették az utasok, hogy egy készülékbe belehelyezték, és az néhány számot kilyukasztott a jegyen.

a) Egy ilyen autóbuszjegyen hányféleképpen lehet 2 lyukat lyukasztani?

b) Egy ilyen autóbuszjegyen 2 vagy 7 lyuk lyukasztásával lehet többféle lyukasztást elérni?



11. Hány különböző útvonalon juthatunk el A városból E városba, ha csak kelet felé haladhatunk?



12. Hányféleképpen olvasható le az ábráról az ODA, BUDA, illetve a BUDAPEST szó?

Csak az összekötő vonalak mentén, jobbra vagy lefelé szabad haladni.

a) $\begin{matrix} O-D-A \\ | \\ D-A \\ | \\ A \end{matrix}$

b) $\begin{matrix} B-U-D-A \\ | \\ U-D-A \\ | \\ D-A \\ | \\ A \end{matrix}$

c) $\begin{matrix} O-D \\ | \\ D-A \end{matrix}$

d) $\begin{matrix} B-U \\ | \\ U-D \\ | \\ D-A \end{matrix}$

e) $\begin{matrix} B-U-D-A-P-E-S-T \\ | \\ U-D-A-P-E-S-T \\ | \\ D-A-P-E-S-T \\ | \\ A-P-E-S-T \\ | \\ P-E-S-T \\ | \\ E-S-T \\ | \\ S-T \\ | \\ T \end{matrix}$

f) $\begin{matrix} B-U-D-A \\ | \\ U-D-A-P \\ | \\ D-A-P-E \\ | \\ A-P-E-S \\ | \\ P-E-S-T \end{matrix}$

13. Melyek azok a feladatok az alábbiak közül, amelyek mögött ugyanaz a matematikai probléma rejlik?

a) Egy fogadáson hat diplomata találkozott. Mindegyik mindegyikkel kezét fogott. Hány kéz-fogás történt?

b) Hat számkártyánk van: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hány kétjegyű számot lehet ezekből kirakni?

c) Hat számkártyánk van: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hány hatjegyű számot lehet ezekből kirakni?

d) Elfelejtettem egy szentendrei telefonszámot. Csak arra emlékszem, hogy 4-nél kisebb számjegy nem fordult elő benne. Hány telefonszám jöhet szóba? (A szentendrei telefonszámok hatjegyűek.)

e) Karácsonykor egy kisváros főterén hat ugyanolyan faházikót állítottak fel. A bölcs polgármester sorsolással döntötte el, hogy melyik házikóban ki árulhasson. Hatan pályáztak a házakra: a halas, a könyvárus, a bábos, a fazekas, a pecsenyesütő és a kürtőskalácsos.

Hányféleképpen lehet a 6 faházat a hat árus között kisorsolni?

f) Egy nagy fa törzséből hat nagyon vastag ág nő ki, mindegyikből hat vastag ág, ezek mindegyikéből hat vékony ág, ezek mindegyikéből hat görbe ág, ezek mindegyikéből hat göcsörtös ág. Ezek mindegyikén hat szép sárga virág van. Hány virág van a fán?



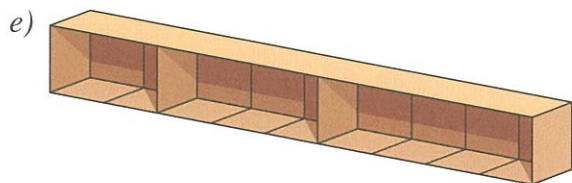
14. Melyek azok a feladatok az alábbiak közül, amelyek mögött ugyanaz a matematikai probléma rejlik?

a) Egy körön megjelölünk 77 pontot. Hány olyan szakasz húzható, amelynek végpontjai csak megjelölt pontok lehetnek?

b) Egy szabályos 77-szögnek hány átlója van?

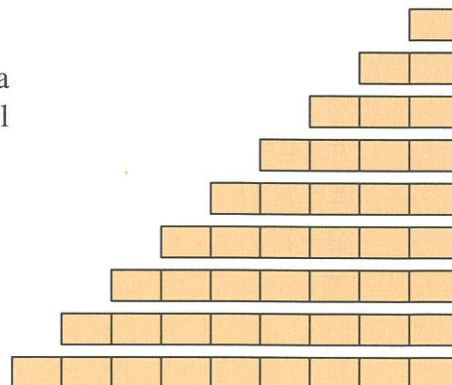
c) Összeadjuk a természetes számokat 1-től 77-ig. Mennyi az összeg?

d) Összeadjuk a természetes számokat 1-től 76-ig. Mennyi az összeg?

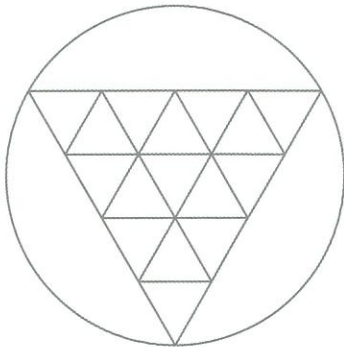


Egy szekrény sor polcaira nyolc helyen lehet választófalat rakni. Az egyik polcon két választófalat akarunk elhelyezni. Hányféle lehetőségünk van?

f) Ilyen léceink vannak, mindegyikből 10 darab. Közülük a leghosszabb léceket hányféleképpen lehet három darabból összeragasztani?



Játékok, híres fejtörők



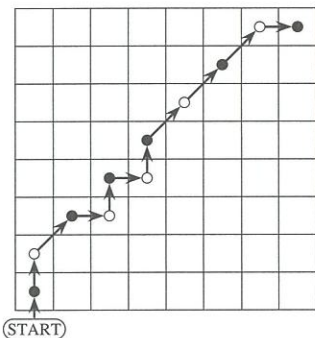
1. Két rejtvényt tartalmaz ez a rajz, amelyet időszámításunk előtt 1500 évvel egy Ahmed nevű egyiptomi pap eszelt ki.

- Hogyan lehet egy vonallal megrajzolni anélkül, hogy a rajz bármelyik kis részén kétszer haladnánk át?
- Hány háromszög van az ábrán?
- Te is találj ki a rajzhoz kapcsolódó feladatokat!

- ## 2. Mit nevezünk stratégiai játéknak, nyerő stratégiának?

Az ilyen típusú játékokban a játékosok megadott szabály szerint, felváltva lépnek. A kezdeti feltételek már meghatározzák, hogy az első vagy a második játékos van nyerő helyzetben, a véletlennek ebben nincs szerepe. Előre kidolgozható az úgynevezett **nyerő stratégia**, ami a következőket jelenti:

- jól döntünk arról, hogy elsőek legyünk, vagy átengedjük a kezdés jogát játékosársunknak,
- úgy tervezzük meg lépéseinket, hogy ellenfelünk bármilyen lépéssorozata esetén nyerhessünk.



Társaddal játszhatod a következő, *Irány a másik sarok* nevű stratégiai játékot.

Egy nyolcszor nyolcas négyzeten, például egy sakktáblán helyeztél el a bal alsó sarokban egy figurát, például egy gyalogot! Ezzel léphettek felváltva, egyszerre egy négyzettel arrébb: jobbra, vagy fölfelé, vagy rézsútosan jobbra, fölfelé. Az nyer, aki a jobb felső sarokba viszi a figurát. Üres karikával az első játékos húzását, tele karikával a második játékos húzását jelöltük. Ezen a rajzon az első játékos kezdett, és a második játékos nyert.

Kinek van nyerő stratégiája?

3. a) Társaddal játszhatod a következő, *Nyolcból négyet* nevű játékot.

Egyikőtök felír egy négyjegyű számot, a másiknak ezt kell majd kitalálnia. A négyjegyű számban csak az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számjegyek fordulhatnak elő, de egy számjegy legfeljebb csak egyszer szerepelhet.

Aki ki akarja találni a számot, szintén ilyen típusú négyjegyű számot kérdez, partnere megmondja, hogy hány számot talált el, és hogy közülük hány van a saját helyén. Legyen például a gondolt szám 3472! Legyen az első kérdés 2785! A válasz 2/0, mert két számot, a 2-t és a 7-et eltalálta, de ebből egyik sincs a helyén. A következő tipp: 2475. Erre a válasz 3/2, mert három számot eltalált, a 2-est, a 4-est és a 7-est, és ezek közül kettő, a 4-es és a 7-es a helyén van. A cél: minél kevesebb találgatással kitalálni a gondolt számot.

- b) Nyolcból négyet játékokról készültek az alábbi feljegyzések. Próbáld meg kitalálni, hogy mi lehetett a gondolt szám a két esetben!

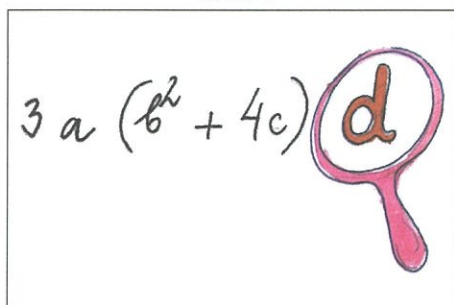
1. játék	2. játék
7652 2/0	2816 2/2
8721 2/0	5817 3/2
4237 2/2	5876 2/0
4587 0/0	

Algebrai kifejezések

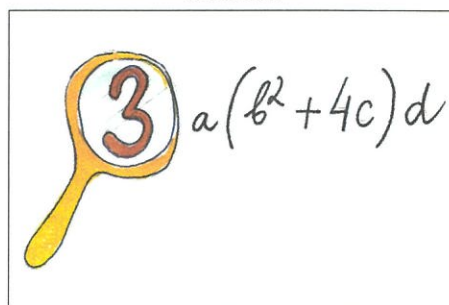
Algebrai kifejezések nagyító alatt

Mi minden lehet egy algebrai kifejezésben?

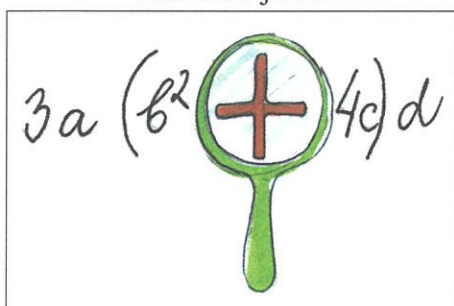
betűk



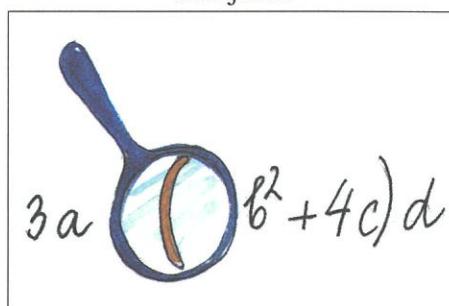
számok



műveleti jelek



zárójelek



Vannak benne láthatatlan szorzásjelek is.

Két betű közé

szám és betű közé

szám és zárójel közé

betű és zárójel közé

nem mindig írjuk ki a szorzásjelet.

Ilyenkor az egymás mellé írás szorzást jelent.

Két szám közé mindig ki kell írni a szorzásjelet, hiszen különben a 213 jelenthetne $2 \cdot 13$ -at, $21 \cdot 3$ -at és $2 \cdot 1 \cdot 3$ -at is.

A nagyítóval megvizsgált kifejezésben is vannak **láthatatlan szorzásjelek**. Pirossal bejelöltük őket.

$$3 \cdot a \cdot (b^2 + 4 \cdot c) \cdot d$$

Behelyettesítés

Az algebrai kifejezésekben mindegyik betű valamilyen számot takar.

Ha az algebrai kifejezésbe a betűk helyére **behelyettesítjük** a számértékeket és elvégezzük a kijelölt műveleteket, akkor megkapjuk a kifejezés **helyettesítési értékét**.

1. példa

Adjuk meg a $3 \cdot a \cdot (b^2 + 4 \cdot c)$ algebrai kifejezés helyettesítési értékét, ha $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$ és $c = -0,4$.

Megoldás

$3a \cdot (b^2 + 4c)$ helyettesítési értéke:

$$3 \cdot (-1) \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 4 \cdot (-0,4) \right] = (-3) \cdot \left(\frac{1}{4} - 1,6 \right) = (-3) \cdot (0,25 - 1,6) = (-3) \cdot (-1,35) = 4,05$$

Műveleti jelek a nagyító alatt

Mi csak olyan kifejezésekkel foglalkozunk, amelyeket – ha akarjuk, – fel tudjuk írni a négy alapművelet segítségével is. *Például:*

$$3ab^2 = 3 \cdot a \cdot b \cdot b \quad \text{vagy} \quad (a+2)^2 = (a+2) \cdot (a+2) \quad \text{vagy} \quad \frac{3x}{y^3} = \frac{3x}{y \cdot y \cdot y} = 3 \cdot x : (y \cdot y \cdot y)$$

Összeg, szorzat

Az algebrai kifejezések között lehetnek összegek vagy szorzatok.

Egy összetett műveletsort összegnek, szorzatnak vagy hatványnak nevezünk, aszerint, hogy mi az utolsó művelet, amit el kell végeznünk.

2. példa

Válasszuk ki, hogy a következő kifejezések közül melyik összeg, melyik szorzat!

$a^2 + 5 \cdot a \cdot b$	$3 \cdot a : 5$	a^2	b
$\frac{12}{5}$	$2 \cdot a + 5 \cdot a$	$a \cdot c - b$	$3 \cdot a \cdot (b - 2)$

Megoldás

Összeg: $a^2 + 5 \cdot a \cdot b$, $2 \cdot a + 5 \cdot a$, $a \cdot c - b$

Szorzat: $3 \cdot a : 5 = \frac{3}{5} \cdot a$, $3 \cdot a \cdot (b - 2)$

Az a^2 hatvány, amit szorzat alakban is felírhatunk: $a \cdot a$.

A b és a $\frac{12}{5}$ sem nem összeg, sem nem szorzat.

Feladatok

1. Írd le a műveletsorokat úgy, hogy tedd ki pirossal a láthatatlan szorzásjeleket!

a) $3(a + 2b)$	b) $4a + 8ab$	c) $\frac{3e}{4fg}$	d) $(a + 5x)x$
----------------	---------------	---------------------	----------------

2. Számítsd ki a kifejezések helyettesítési értékét, ha $x = 5$! Írd fel a helyettesítési értékeket növekvő sorrendben!

a) $6x - 2$	b) $\frac{12x - 4}{2}$	c) $2 \cdot (x - 4)^2$
d) $3 \cdot (x - 35) + 27$	e) $0,5 \cdot (5x + 7x)$	f) $3 \cdot (x - 3,28)(x + 5)(x - 5)$

3. Számítsd ki a kifejezés helyettesítési értékét x megadott értékeinél!

- a) $8 - 3x$ $x = 2$, $x = \frac{4}{3}$ b) $\frac{3x + 15}{5 - x}$ $x = -4$, $x = 0,1$
 c) $(x - 5) \cdot (x + 6)$ $x = -10$, $x = -106$

4. A változó milyen értékénél lesz a kifejezés értéke nulla?

- a) $5x + 5$ b) $7x - 3x$ c) $6 - 3x$ d) $\frac{3}{4}x - 3$

5. A következő kifejezések értékét vizsgáljuk:

I. $5a + 3(a + 2)$ II. $\frac{(5b + 7) \cdot 2}{3}$ III. $\frac{x - 100x}{5}$

A) Írj a változó helyére olyan számot, hogy a kifejezés értéke

- a) nagyobb legyen 100-nál, b) kisebb legyen 0-nál, **c) kisebb legyen -100 -nál!**

Becsülj bátran!

B) Határozd meg azoknak az egész számoknak a halmazát, amelyek esetén teljesül az a) vagy a b) vagy a c) feltétel!

6. Írd fel az algebra nyelvén! A kapott kifejezésről dönts el, hogy melyik összeg, melyik szorzat!

- a) a és b összegének a 3-szorosa. b) a háromszorosának és b -nek az összege.
 c) a és b szorzatának a hatszorosa. d) a és b különbségének a $\frac{2}{5}$ -szerese.
 e) a és b összegének a $\frac{2}{5}$ -öd része. f) a $\frac{2}{5}$ -öd részének és b -nek a szorzata.
 g) a és b szorzatának a $\frac{2}{5}$ -öd része.
 h) a háromszorosának és b háromszorosának az összege.
 i) a háromszorosának és b kétszeresének a szorzata.
 j) a kétszeresének és b háromszorosának a szorzata.

7. Írd fel az algebra nyelvén!

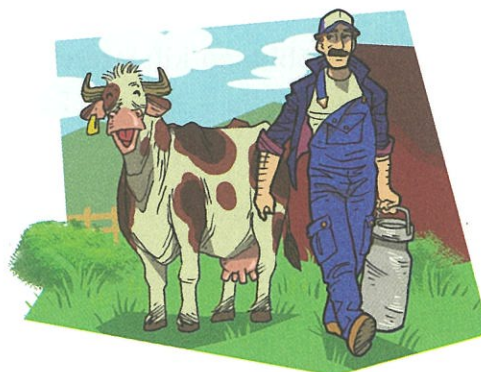
Európa lakosainak számát jelöljük e -vel, területét t -vel! A 2015-ös adatok szerint Ázsiának megközelítőleg ötször annyi lakosa és közel négyszer akkora területe volt, mint Európának.

- a) Hány lakosa volt Ázsiának?
 b) Mennyivel több lakosa volt Ázsiának, mint Európának?
 c) Mekkora Ázsia területe?
 d) Mekkora Európa népsűrűsége?
 e) Mekkora Ázsia népsűrűsége?
 f) Melyik földrésznek nagyobb a népsűrűsége?



8. Riska tehén c liter tejet ad naponta. A tej $\frac{2}{5}$ részéből túrórt csináltak, a többit eladták. Írj képletet, amely megadja a következőket!

- Hány liter tejet értékesítettek naponta?
- Hány forint bevételük volt naponta, ha 1 liter tej ára b forint?
- Hány kg túrórt csinált a gazda, ha 1 liter tejből $\frac{1}{4}$ kg túró készült?
- Hány forintot kapott a gazda a túróért, ha a túró kilója d forintba került?



9. Minden kérdésre egy képlettel válaszolj! Milyen értékeket vehetnek fel a képletben szereplő betűk?

- Egyik zsebemben valahány dió van. A másikban ennek a kétszeresénél öttel több. Mennyi dió van a két zsebemben együttvéve?
- Februárban háromszor annyi ötöst kaptam, mint januárban. Márciusban feleannyit, mint januárban és februárban összesen. Áprilisban háromszor annyi, mint márciusban. Hány ötöst kaptam az év első négy hónapjában?
- A téglalap egyik oldala a , a másik oldala ennek a $\frac{2}{3}$ része. Mennyi a téglalap kerülete? Mennyi a téglalap területe?

10. Színezd a számegyenest!

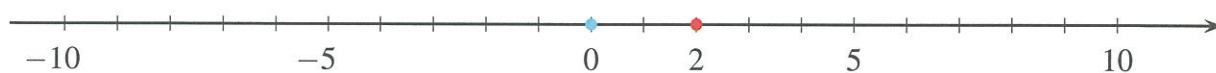
Válassz egy számot! Helyettesítsd be a $7x - 7$ kifejezésbe! Legyen a szám helye a számegyenesen

 , ha a helyettesítési érték **pozitív!**

 , ha a helyettesítési érték **negatív!**

 , ha a helyettesítési érték **0!**

A számegyenesen néhány pontot megjelöltünk, néhányat ki is színeztünk. Színezd a többi pontot is! *Például:* ha $x = 2$, akkor a helyettesítési érték $7 \cdot 2 - 7 = 7$, ez pozitív szám, tehát a 2 piros.



Milyen színű az $x = -9$, $x = 1$, $x = -2$, $x = 8$, $x = \frac{8}{5}$, $x = -1000$?

11. Színezz ki egy-egy számegyenest az alábbi kifejezésekhez! Aszerint színezd a pontokat pirosra, kékre vagy feketére, hogy a hozzájuk tartozó helyettesítési érték pozitív, negatív vagy 0! Annál a számnál, amelyre a kifejezésnek nincs értelme, lyukaszd ki a számegyenest (rajzolj egy üres karikát)!

a) $2x - 11,3 + 7x + 1,3$

b) $(x - 2)(x + 10)$

c) $3(x - 2)$

d) $\frac{2}{x}$

e) $\frac{5}{x+1}$

f) $3x - 3000$

g) $\frac{x-2}{x+10}$

h) $\frac{-2}{x+1}$

i) $(500 - x)(500 + x)$

Egytagú és többtagú algebrai kifejezések

Az összegek **többtagú kifejezések**, amelyek **egytagú kifejezésekből** épülnek fel.

Például: $a + ab + 2a + 3ab + 5$ Ez egy öttagú kifejezés.

$a, ab, 2a, 3ab, 5$ Ezek egytagú kifejezések.

Az egytagú kifejezés egy szám vagy egy betű, vagy egy szám és betűk szorzata.



Az egytagú kifejezések számszorói az **együtthatók**.

Például: az $5a$ kifejezésben 5 az együttható,

az xy kifejezésben $xy = 1 \cdot xy$ tehát 1 az együttható,

$a - \frac{x}{3}$ kifejezésben $-\frac{x}{3} = -\frac{1}{3} \cdot x$, tehát $-\frac{1}{3}$ az együttható.

Az egytagú kifejezések között vannak olyanok, amelyek tovább bonthatók egyszerűbbek összegére.

$$2a = a + a$$

$2a$ szétszedhető 2 darab a -ra, az a azonban nem bontható tovább egyszerűbb részekre.

$$3ab = ab + ab + ab$$

$3ab$ -t szét lehet szedni 3 darab ab összegére, az ab -t azonban már nem lehet egyszerűbb tagok összegére bontani.

$$a \text{ és } 2a$$

egyneműek, ezek összeadhatók, vagyis **összevonhatók**.

$$a + 2a = 3a$$

$$ab \text{ és } 3ab$$

egyneműek, ezek is **összevonhatók**.

$$ab + 3ab = 4ab$$

$$a \text{ és } ab$$

nem egyneműek, nem vonhatók össze.

Az **egynemű** kifejezésekben a **számszorzó**, vagyis az **együttható** különbözhet, de a **változókat** tartalmazó résznek meg kell egyeznie.

Az olyan egytagú algebrai kifejezéseket, amelyek csak az együtthatójukban különböznek, **egynemű kifejezéseknek** nevezzük. Az egynemű kifejezéseket összeadhatjuk egymással, kivonhatjuk egymásból, röviden **összevonhatjuk** őket.

Példa

$$5x^2y - 10xy - x^2 + \frac{1}{2}xy + 3x^2y + x^2$$

Válasszuk ki, és jelöljük egyformán az egynemű tagokat, majd végezzük el a lehetséges összevonásokat!

Megoldás

$$5x^2y - 10xy - x^2 + \frac{1}{2}xy + 3x^2y + x^2 = 5x^2y + 3x^2y - 10xy + \frac{1}{2}xy - x^2 + x^2 = 8x^2y - 9,5xy$$

Feladatok

1. Írd le az alábbi kifejezések mindegyikének együtthatóját!

a) $2a$

b) $\frac{1}{2}b$

c) $\frac{c}{5}$

d) $-d$

e) e^2f

f) $\frac{ef}{2}$

g) g^2

h) $5h^2$

i) $\frac{2i}{3}$

j) $0,2j$

k) $\frac{0,2k}{2}$

l) $-\frac{4}{3}l^2$

2. Írd le az alábbi kifejezések mindegyikének együtthatóját! Válaszd ki az egynemű kifejezéseket!

a) $-2,5xy$ b) $\frac{-10xy}{4}$ c) $x^2y \cdot \frac{3}{4}$ d) $3x \cdot 4y$
 e) $\frac{yx^2}{2}$ f) $\frac{5x \cdot 2y}{3}$ g) $2x \cdot 3xy$ h) $-x^2y^2$

3. Építs egynemű kifejezéseket!

Minden feladatban egynemű kifejezéseket adtunk meg többféle alakban. A kifejezések egy részét letakartuk egy színes folttal. Mi állhat a folt alatt?

a) $3x^2y^2$, $5xy$, $2x$ $\cdot y^2$, $\cdot x^2y$ b) $-10xy$, $5x$, $\cdot 3,7$, $\frac{\text{ }}{5} \cdot y$
 c) $5x^2 \cdot y$, $\frac{1}{2}$ y , $3x^2y^3$, $-\frac{1}{5}x$

4. Végezd el a lehetséges összevonásokat! Mindegyik esetben állapítsd meg, hány tagú volt az eredeti kifejezés, és hány tagú lett az összevonás után!

a) $5x + 3 - 2x - 5$ b) $2a - b + 1 - 11a + 3$
 c) $2x^2 + 3x - 5x + x^2$ d) $-9a + 7bc - 18b - 21a - 9bc + 3b$
 e) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}y^2 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{2}{3}y^2 + \frac{y^2}{3} + 3$ f) $k - k^2 - \frac{1}{2}k^2 - 4k$

5. Az egyenlőségek közül melyik igaz a változók minden értékére?

a) $3x - 8x = -5x$ b) $5x^2 - 5x = 0$ c) $8xy - 5x = 3y$
 d) $\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}x = x$ e) $x^2y + 2x^2y = 3x^2y$ f) $2y \cdot y + 2x - 2y^2 = 2x$

6. Pótold a hiányzó tagot!

a) $5x + \text{ } = -2x$ b) $3ab - \text{ } = 5ab$ c) $5y + \text{ } - 2z = 3y - 2z$
 d) $6b - \text{ } + \frac{1}{2}b = 4b$ e) $2a^2b + \text{ } = 8a^2b$ f) $-5x^3 + y^2 + \text{ } = -5x^3$

7. TOTÓ

A és B kifejezésekben egy-egy részletet letakartunk, ezért nem mindig lehet biztosan eldönteni, hogy a két kifejezés egynemű-e vagy sem. A füzetedbe dolgozz!

Írj a totóba 1-est, ha abban a sorban A és B **biztosan egyneműek**,

2-est, ha abban a sorban A és B **biztosan nem egyneműek**,

x-et, ha abban a sorban A és B **lehet, hogy egynemű, de nem biztos!**

	A	B	Tipp
1.	$2ab$	$-\frac{b}{3} \cdot a$	
2.	$a^{\text{ }}$	$5a^3$	

3.	abc	$-2a^2b^2c^2$	
4.	$3x^2y^2$	$xy \cdot \square$	
5.	$ab \cdot \square$	$bc \cdot \square$	
6.	$2x^2$	$x^{\square} \cdot y$	
7.	$6c^2d^3$	$2,5c^{\square}d$	
8.	$3y^3$	$y \cdot \square \cdot 2$	
9.	a^2b^2	$ab \square$	
10.	$\frac{xy \cdot \square}{2}$	$z \cdot \square \cdot 3$	
11.	$\frac{y}{2} \cdot \square$	$\frac{x}{3}$	
12.	$5a \cdot \square$	$10a^2$	
13.	$5b$	$7b^2 \cdot \square$	
13 + 1.	aba^2	$b \cdot \square$	

Azonosságok



Minden számnak sok neve van.

$$0,19 = \frac{19}{100} = \frac{3 \cdot 6 + 1}{100} = \frac{1}{10} + \frac{9}{100} = \frac{190}{1000} = \dots$$

Ezek a számok mind **egyenlőek**, csak az alakjuk különbözik.

Minden kifejezésnek sok neve van.

$$2a + 6 = a + a + 3 \cdot 2 = 2(a + 3) = \frac{10a}{5} + 6 = 3a + 6 - a = \dots$$

Ezek a kifejezések mind **azonosak**, csak az alakjuk különbözik.

Azokat az egyenleteket, amelyekben a betűk helyére bármilyen megengedett számot írva az egyenlőség igaz marad, **azonosságnak** nevezzük. Nem engedhetők meg azok a számok, amelyekkel az azonosságban szereplő valamelyik művelet nem végezhető el.

Az azonosságok a műveletekről szóló alapigazságok. **Műveleti tulajdonságoknak** is nevezhetjük őket. A műveleteknek azokat a tulajdonságait mutatják meg, amelyek a változók értékétől függetlenül mindig fennállnak.

Ezeket a tulajdonságokat algebrai alakban is és szöveggel is meg lehet fogalmazni.

1. példa

Írjuk fel az algebra nyelvén a következő, szóban megfogalmazott – jól ismert – azonosságokat.

a) Összeadásnál a tagok felcserélhetők.

b) Ha az osztandót (számlálót) és az osztót (nevezőt) is ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk, a hányados (tört) értéke nem változik.

c) Egy összeget úgy vonunk ki, hogy minden tagját kivonjuk.

d) Egy szorzattal úgy osztunk, hogy minden tényezőjével osztunk.

Megoldás

$$a) a + b = b + a$$

$$b) a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c) \quad b \neq 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad c \neq 0$$

$$c) a - (b + c) = a - b - c$$

$$d) a : (b \cdot c) = a : b : c \quad b \neq 0$$

$$c \neq 0$$

Összeg, különbség kivonása

A zárójelek elhagyására vagy a zárójelek betevésére az algebraiban sokszor van szükség. Sokkal többször, mint a számok világában, hiszen a számokkal el tudjuk végezni a zárójelben levő műveleteket, betűkkel azonban nem mindig.

Ezért nagyon jól kell tudni, hogyan lehet egy kifejezésből zárójeleket elhagyni vagy abba új zárójeleket betenni.

Ha a műveletsorban csupa összeadás és kivonás van, és a zárójel előtt „+” jel áll, akkor a zárójelet elhagyhatjuk. Ha a zárójel előtt „-” jel áll, akkor a zárójel elhagyása után a benne levő műveletek ellenkezőjükké változnak. A „+”-ból „-”, a „-”-ból „+” lesz.

2. példa

Írjuk át zárójel nélküli alakba!

$$a) 5 - (x + 2)$$

$$b) a - (b + 2)$$

$$c) (x - 3) - (x + 3)$$

$$d) a + [b - (c - d)]$$

Megoldás

$$a) 5 - (x + 2) = 5 - x - 2 = 3 - x$$

$$b) a - (b + 2) = a - b - 2$$

$$c) (x - 3) - (x + 3) = x - 3 - x - 3 = -6$$

$$d) a + [b - (c - d)] = a + b - (c - d) = a + b - c + d$$

Törtvonalas kifejezések átalakítása

Az, hogy a törtszámokat sokféle alakban fel tudjuk írni, nagyon fontos a számok világában.

Például:

Törtek sorba rendezésekor: $\frac{5}{7} = \frac{20}{28} < \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$

Tizedes tört alakba írásához: $\frac{9}{8} = 1,125$

Törtek összeadásakor: $\frac{1}{2} + \frac{3}{19} = \frac{19}{38} + \frac{6}{38} = \frac{25}{38}$

Százalékszámításnál: $\frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%$

Az algebraiban is elengedhetetlen, hogy egy törtvonalas kifejezést sokféle alakban fel tudjunk írni.

a) $\frac{5x}{9} \cdot 6$

Ebben a kifejezésben **nincsen sem összeadás, sem kivonás**. Ilyenkor nagyon sokféleképpen **változtathatjuk a tényezők sorrendjét, bővíthetjük**, és bizonyos esetekben **egyszerűsíthetjük** is a kifejezést.

$$\frac{5x}{9} \cdot 6 = 5x \cdot \frac{6}{9} = 5x \cdot \frac{2}{3} = \frac{30x}{9} = \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot x = \frac{10}{3} \cdot x = \frac{10x}{3}$$

b) $\frac{5x - 9}{6}$

Ha a **számlálóban van összeadás vagy kivonás**, akkor a kifejezéseket sok esetben érdemes **több tag összegeként** felírni.

$$\frac{5x - 9}{6} = \frac{5x}{6} - \frac{9}{6} = \frac{5x}{6} - \frac{3}{2}$$

c) $5 - \frac{2x + 1}{3}$

Összeggé alakításnál különösen vigyáznunk kell arra, hogy a **törtvonal láthatatlan zárójelet helyettesít**.

Amikor a $\frac{2x + 1}{3}$ törtet összegként írjuk fel, **ki kell tennünk a zárójelet**.

$$5 - \frac{2x + 1}{3} = 5 - \left(\frac{2x}{3} + \frac{1}{3} \right) = 5 - \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} = \frac{15}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2x}{3} = \frac{14}{3} - \frac{2x}{3} = \frac{14 - 2x}{3}$$

d) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{5}{6}$

Sokszor előfordul, hogy érdemes **közös nevezőre** hoznunk a tagokat.

$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3x}{6} + \frac{4x}{6} + \frac{5}{6} = \frac{7x + 5}{6}$$

3. példa

Oldjuk meg az egyenletet! $4(x - 1) = 12 - (1 - x)$

Megoldás

Bontsuk fel a zárójeleket! $4(x - 1) = 12 - (1 - x)$

$$4x - 4 = 12 - 1 + x$$

Összeadjuk a számokat: $4x - 4 = 11 + x$

Mindkét oldalból kivonunk x -et: $3x - 4 = 11$

Mindkét oldalhoz hozzáadunk 4-et: $3x = 15$

Mindkét oldalt osztjuk 3-mal: $x = 5$

Ellenőrzés: **bal oldal:** $4(x - 1) = 4(5 - 1) = 16$; **jobb oldal:** $12 - (1 - 5) = 12 - (-4) = 16$.

Az egyenlet megoldása $x = 5$.

4. példa

Oldjuk meg az egyenletet! $5x + 2 - \frac{2x - 3}{2} = \frac{x}{2} + 7$

Megoldás

Szorozzuk meg mindkét oldalt 2-vel! $2 \cdot 5x + 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{2x - 3}{2} = 2 \cdot \frac{x}{2} + 2 \cdot 7$

Végezzük el a szorzásokat! $10x + 4 - (2x - 3) = x + 14$

Bontsuk fel a zárójelet! $10x + 4 - 2x + 3 = x + 14$

Vonjunk össze! $8x + 7 = x + 14$

Vonjunk ki x -et mindkét oldalból! $8x + 7 - x = x + 14 - x$
 $7x + 7 = 14$

Vonjunk ki 7-et mindkét oldalból! $7x + 7 - 7 = 14 - 7$
 $7x + 7 = 14$

Osszuk el mindkét oldalt 7-tel! $\frac{7x}{7} = \frac{7}{7}$
 $x = 1$

Ellenőrzés: **bal oldal:** $5 \cdot 1 + 2 - \frac{2 \cdot 1 - 3}{2} = 7 - \frac{-1}{2} = 7,5$; **jobb oldal:** $\frac{1}{2} + 7 = 7,5$.

Válasz: Az egyenlet megoldása $x = 1$.

Feladatok

1. Melyik azonos az elsővel?

a) $\frac{14xy}{5}$ $\frac{2}{5} \cdot 7xy$ $3xy \cdot x$ $12xy + 10xy$ $7 \cdot \frac{x}{5} \cdot 2y$

b) $\frac{3x+2}{11}$ $\frac{3x}{11} + 2$ $3x + \frac{2}{11}$ $\frac{3x}{11} + \frac{2}{11}$ $\frac{x+3+2}{11}$ $\frac{3}{11}(x+2)$ $\frac{3}{11}x + 2$

c) $x - \frac{x+2}{2}$ $x - \frac{x}{2} + \frac{2}{2}$ $x - \frac{x}{2} - 1$ $\frac{x}{2} - 1$ $\frac{x}{2} + 1$

d) $\frac{a}{3} + \frac{b}{5}$ $\frac{a+b}{15}$ $\frac{3a}{15} + \frac{5b}{15}$ $\frac{5a}{15} + \frac{3b}{15}$ $5a + \frac{3b}{15}$ $\frac{5a+3b}{15}$

2. Válaszd ki az azonosakat!

$$\frac{1}{2} \cdot ab$$

$$13a \cdot \frac{2b}{26}$$

$$\frac{1}{22} \cdot 4ab$$

$$2a \cdot \frac{11}{44}$$

$$\frac{2a}{6} \cdot 3b$$

$$22a \cdot \frac{b}{11}$$

$$\frac{5}{7} \cdot 14a \cdot \frac{b}{10}$$

$$\frac{ab}{2}$$

$$\frac{a}{6} \cdot 3b$$

$$\frac{6ab}{3}$$

$$\frac{4b}{2} \cdot a$$

$$\frac{2b}{44} \cdot 4a$$

$$26ab \cdot \frac{1}{13}$$

3. Válaszd ki az azonosakat!

$$\frac{5xy}{3}$$

$$\frac{5x+5y}{3}$$

$$5 \cdot \frac{x}{3} \cdot y$$

$$\frac{1}{3}xy \cdot 5$$

$$\frac{5x+y}{3}$$

$$\frac{5 \cdot (x+y)}{3}$$

$$\frac{30xy - 15xy}{9}$$

$$\frac{x+5y}{3}$$

$$10y \cdot \frac{x}{6}$$

$$\frac{5}{3}x + \frac{y}{3}$$

4. Írj a kifejezéssel azonosat zárójelek nélkül, és végezd el az összevonásokat!

a) $a + (2a - b)$

b) $a - (2a - b)$

c) $(a + 3) \cdot 2$

d) $8a^2 - (2a^2 + 3a)$

e) $e \cdot f - (e \cdot f - 3)$

f) $(2x + y) - (2x - y)$

5. Mi van a színes folt alatt?

a) $2x - x + \text{folt} = 18x$

b) $\frac{2x}{3} - \text{folt} + \frac{4x}{3} = \frac{8x}{3}$

c) $\frac{2x+1}{2} - \text{folt} = x$

6. Végezd el az összevonásokat!

a) $\frac{2x}{3} - \frac{x}{3} + \frac{4x}{3}$

b) $\frac{3a}{5} - \frac{a}{5} + \frac{3}{5}$

c) $\frac{2x+1}{2} - \frac{3x}{2}$

d) $\frac{2x+1}{5} + \frac{4+3x}{5}$

e) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{10}$

f) $\frac{5a}{2} - \frac{3a}{4} + 1$

g) $\frac{2x}{3} + \frac{5x+1}{6}$

h) $0,3a - \frac{1}{5}a + 0,25a$

7. Végezd el az összevonásokat!

a) $x - \frac{x+1}{3}$

b) $\frac{2x+1}{3} - (x-1)$

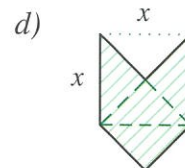
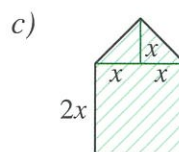
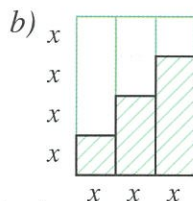
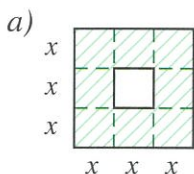
c) $x - \frac{4x+6}{2}$

d) $\frac{2x+3}{4} - \frac{5-3x}{4}$

e) $\frac{3x}{2} - \frac{x-3}{2}$

f) $\frac{x}{3} - \frac{2x+7}{3}$

8. Írd fel a bevonalkázott síkidom területét többféleképpen is!



9. Oldd meg az egyenleteket!

a) $2x - x + 8 = 18$

b) $2x - x - 8 = 18$

c) $2x - (x + 8) = 18$

d) $2x - (x - 8) = 18$

e) $3 - (8 - 2x) = -13$

f) $2x - (x - 3) = 5x + 7$

10. Oldd meg az egyenleteket!

a) $0,1x - (5 - 2,32x) = 6,42x - 9$

b) $3,8x - (2 - 1,2x + 5x) = -2$

c) $3 - (0,25x + 0,5) = 1 - 0,1x$

d) $0,12x - (3 - 0,08x) = -0,3x + 6$

11. Oldd meg az egyenleteket!

a) $\frac{x}{2} = 3 + x$

b) $\frac{7x}{6} = 25 - 3x$

c) $\frac{x}{2} + 1 = x - 4$

d) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 35$

e) $\frac{x+1}{3} + \frac{2x}{9} = \frac{4x}{9} + \frac{2}{3}$

f) $\frac{2x}{5} + \frac{3x}{10} = \frac{x}{2} + 5$

g) $30 - 3x = 33 - \frac{12 \cdot (x+1)}{4}$

h) $2 \cdot (3x + 8) = 2x + 4 \cdot (x + 4)$

12. Oldd meg az egyenleteket!

a) $\frac{5-2x}{3} - (1-3x) = -3$

b) $\frac{3x-5}{4} - (x-2) = 2$

c) $\frac{3x+2-5x}{-2} - (1+2x) = -1$

d) $\frac{5-7x-x}{5} - (2-x) = x$

e) $\frac{5x+3}{7} - (3-x) = 4$

f) $\frac{10x+2x+1}{7} - (x-1) = 0$

13. Oldd meg az egyenleteket, ha az alaphalmaz az egész számok halmaza!

a) $2 - \frac{x-1}{2} = 2x$

b) $2 + \frac{x-1}{2} = 2x$

c) $3 - \frac{x+2}{2} = 5 - x$

d) $3 + \frac{x+2}{2} = 5 - x$

e) $3x - 1 - \frac{1-x}{5} = 0$

f) $\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{6} = 2$

14. Oldd meg az egyenleteket, ha az alaphalmaz a természetes számok halmaza!

a) $\frac{4x-2}{7} + 18 = 5x$

b) $\frac{4x+2}{7} - 18 = 5x$

c) $\frac{4x-2}{7} - 18 = 5x$

15. Adj meg alaphalmazt úgy, hogy az $\frac{5x+3}{4} - \frac{2}{7}x = x+1$ egyenletnek

a) ne legyen megoldása,

b) legyen megoldása!

16. Készíts 3×3 -as bővös négyzetet úgy, hogy a következő számok mindegyikét felhasználod: 23, 29, 35, 43, 49, 55, 63, 69, 75!

(Kalmár László Országos Matematikaverseny, 2015)

Számoljunk hatványokkal!

A csupa azonos tényezőkből álló szorzatot röviden hatvány alakba írhatjuk.

Például: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$

Az 5 a **hatvány alapja**, ez az **ismétlődő szorzótényező**. A 6 a **hatvány kitevője**, ez a **szorzótényezők darabszáma**. Bármely szám első hatványa megegyezik magával a számmal: $a^1 = a$.

1. példa

a) Gyűjtsük csoportokba az azonos alapú hatványokat! Hány csoportot kapunk?

b) Gyűjtsük csoportokba az azonos kitevőjű hatványokat! Hány csoportot kapunk?

5^9 $0,1^3$ 9^1 10^1 9^5 6^3 10^9 6^5 $0,1^9$ 6^2 10^3 5^2

Megoldás

a)

alap 5		alap 9		alap 6			alap 0,1		alap 10		
5^9	5^2	9^1	9^5	6^3	6^5	6^2	$0,1^3$	$0,1^9$	10^1	10^9	10^3

b)

kitevő 3			kitevő 9			kitevő 5		kitevő 1		kitevő 2	
$0,1^3$	6^3	10^3	5^9	10^9	$0,1^9$	9^5	6^5	9^1	10^1	6^2	5^2

2. példa

Számoljuk ki a 224. oldalon található hatványtáblázat segítségével: $64 \cdot 512$!

Megoldás

2 hatványainak táblázatában megtaláljuk mindkét szorzótényezőt.

$$64 = 2^6 \quad 512 = 2^9 \quad 2^6 \cdot 2^9 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{6 \text{ db}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{9 \text{ db}} = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{15 \text{ db}} = 2^{6+9} = 2^{15} = 32\,768$$

A szorzat értékét a hatványtáblázatból közvetlenül kiolvashatjuk.

3. példa

Mutassuk meg, hogy az $a^5 \cdot a^3 = a^8$ összefüggés tetszőleges a szám esetén teljesül!

Megoldás

$$a^3 \cdot a^5 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_{3 \text{ db}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{5 \text{ db}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{8 \text{ db}} = a^{5+3} = a^8$$

Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös alapot a **kitevők összegére** emeljük.

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l}$$



4. példa

A hatványtáblázatból sokféle osztás eredménye is kiolvasható különösebb számolás nélkül.

Végezzük el a $2187 : 81$ osztást!

Megoldás

Az osztandót és az osztót is megtaláljuk a 3 hatványtáblázatában. $2187 = 3^7$, $81 = 3^4$.

$$3^7 : 3^4 = \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{7 \text{ db}} : \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{4 \text{ db}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{(7-4) \text{ db}} = 3^{7-4} = 3^3$$

5. példa

Mutassuk meg, hogy az $a^9 : a^2 = a^7$ összefüggés minden a érték esetén igaz (a ne legyen nulla)!

Megoldás

$$a^9 : a^2 = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{9 \text{ db}} : \underbrace{(a \cdot a)}_{2 \text{ db}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{(9-2) \text{ db}} = a^{9-2} = a^7$$

Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy a **közös alapot** a kitevők különbségére emeljük.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$



Azonos kitevőjű hatványok szorzása, osztása (Kiegészítő tananyag)

6. példa

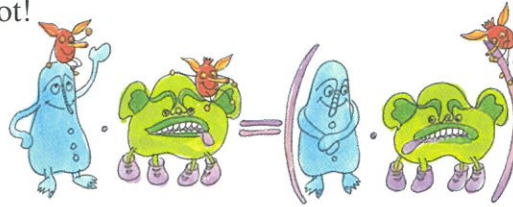
Hatványtáblázat segítségével számítsuk ki a $2^5 \cdot 5^5$ szorzatot!

Megoldás

Gondolkodhatunk így: $2^5 = 32$, $5^5 = 3125$ és a $32 \cdot 3125 = 100\,000$ szorzat a végeredmény.

Gondolkodhatunk így:

$$2^5 \cdot 5^5 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{5 \text{ db}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{5 \text{ db}} = \underbrace{(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)}_{5 \text{ db}} = 10^5 = 100\,000$$



Ha hatványokkal számolunk, sokszor segít a hatványalak szorzatra való átírása. Erre láthattok néhány példát:

7. példa

Számítsuk ki a $4^2 \cdot 5^4$ értékét!

Megoldás

$$4^2 \cdot 5^4 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 10^4 = 10\,000$$

8. példa

Számítsuk ki a $\frac{3^2 \cdot 5^3 \cdot 2^6}{9 \cdot 4}$ értékét!

Megoldás

$$\frac{3^2 \cdot 5^3 \cdot 2^6}{9 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}$$

Ez a tört egyszerűsíthető $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ -vel.

Az egyszerűsítés után ezt kapjuk:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot 2 = 10^3 \cdot 2 = 2000$$

Ha a kifejezésben ismeretlen szorzótényezők vannak, akkor is segít, ha szétírtjuk a hatványokat szorzatalakba.

9. példa

Írjuk egyszerűbb alakba a kifejezést!

$$\frac{a^2 \cdot 3^3}{9 \cdot a}$$

(a nem lehet 0.)

Megoldás

Mivel $a \neq 0$, egyszerűsíthetünk, így a kifejezés sokkal egyszerűbb alakjához jutunk.

$$\frac{a^2 \cdot 3^3}{9 \cdot a} = \frac{a \cdot a \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot a} = 3 \cdot a$$

Feladatok

1. Írd fel hatványalakban!

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

b) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

c) $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

d) $5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

e) $\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4}$

f) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

g) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

h) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

i) $aaabbb$

j) $3xx \cdot 3$

k) $2 \cdot 2a \cdot 2 \cdot 2aaa$

2. Vannak-e köztük egyenlők? Gyűjtsd ki az egyenlőket!

x^3

$\frac{15a^3}{3}$

$2 \cdot 2$

$\left(\frac{1}{5}\right)^3$

$(5a)^3$

$(-2)^2$

$\frac{1}{5^3}$

$-(-2)^2$

$5 \cdot a \cdot a \cdot a$

$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$

$|-2|^2$

$5a^3$

$(-2)^2$

$5^3 \cdot a$

3. $2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Helyezz el zárójelpárokat a műveletsorban! A zárójelben levő szorzatokat írd hatvány alakba!

Például így: $2^8 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 = 2^2 \cdot 2^5 \cdot 2^1$

Keress minél többféle megoldást!

4. Számítsd ki hatványtáblázat és zsebszámológép nélkül!

a) 2^8

b) $2^5 \cdot 4^2$

c) $\frac{6^5}{3^5}$

d) $\frac{5^2 \cdot 2^4}{25}$

e) $\frac{2^6 \cdot 9^2}{4^3}$

5. Zsebszámológép és hatványtáblázat nélkül állapítsd meg, melyik kisebb 1-nél!

a) $\frac{8 \cdot 2^3}{2^6}$

b) $\frac{9 \cdot 3^2}{9^2}$

c) $\frac{3^4 \cdot 3^3}{4^7}$

d) $\frac{2^4 \cdot 3^4}{6^3}$

e) $\frac{27 \cdot 3}{3^4}$

6. Ilyen kártyáink vannak, mindegyikből több.

2 – ez az alap.

3, 4, 5, 7 – ezek kitevőkártyák, ezeket csak kitevőként használhatod.

. – szorzójelkártya.

Rakd ki a 2^{12} -t ezekből a kártyákból úgy, hogy

a) csak a 2 és . kártyákat használhatod,

b) csak a 2, 3 és . kártyákat használhatod,

c) csak a 2, 4 és . kártyákat használhatod,

d) pontosan egyszer használhatod a . kártyát!

7. Rakd ki az 5^7 -t!

Megadjuk, milyen kártyákat használhatsz. Mindegyikből több van, de legalább egyet mindegyik fajtából fel kell használnod!

a) 5 .

b) 5 2 .

c) 5 3 .

d) 5 2 3 .

8. Írd fel hatvány alakban!

a) $6^3 \cdot 6$ $3^2 \cdot 3^7$ $9 \cdot 3^5$ $a^3 a^5$ xx^8 $p^3 p^2$ $z^4 z^3 \cdot z$ $c^{100} c^5$

b) $3^7 : 3^2$ $\frac{6^3}{6}$ $a^5 : a^3$ $x^8 : x$ $p^3 : p^2$ $\frac{p^5}{p}$ $\frac{c^{100}}{c^5}$

c) $2^3 \cdot 5^3$ $\frac{4^6}{2^6}$ $a^3 b^3$ $16b^4$ $x^6 y^6$ $\frac{p^5}{q^5}$ $\frac{m^2}{n^2}$

9. Rakj kártyákat az üres helyekre úgy, hogy igaz legyen az állítás! A megadott kártyákból válogathatsz, de a kék kártyák mindegyikéből csak egy van.

2 , 5 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 .

$2^7 = 2^{\square} \cdot \square^{\square}$

$2^3 = \square^{\square} : \square^{\square}$

$(2 \cdot 5)^5 = \square^{\square} \cdot \square^{\square}$

$(2 \cdot 5)^5 = \square^{\square} \cdot \square^{\square} \cdot \square^{\square}$

10. a , $\cdot$, 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 kártyákból építsd meg az $a^3 \cdot a^5$ -t

- a) a lehető legkevesebb kártya felhasználásával, b) a lehető legtöbb kártya felhasználásával,
c) pontosan 4 db kártyával, d) pontosan 5 db kártyával!

11. Válaszd ki az egyenlőket!

a) 2^{20} b) $2^{10} \cdot 2$ c) $2^{10} \cdot 2^{10}$ d) $2^5 \cdot 2^5 \cdot 2$
e) $2^{18} \cdot 2^2$ f) $2 \cdot 2^{19}$ g) $2^{10} + 2^{10}$ h) 2^{11}

12. Írd le csupa szorzással, majd írd le zárójel nélkül hatvány alakban!

Például: $(3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^8$

a) $(25^3)^2$ b) $(4^2)^2$ c) $(7^2)^3$ d) $(5^3)^5$ e) $(2^4)^3$

13. Ezek a kártyáink vannak, mindegyikből több. a , 2 , 3 , 4 , 5 , $\cdot$, $($, $)$

Rakd ki az $(a^3)^4$ -t a következő feltételek esetén!

- a) Csak ilyen kártyákat használhatsz: a , $\cdot$
b) Csak ezeket a kártyákat használhatod: a , 3 , $\cdot$
c) Csak ezeket használhatod: a , 4 , $\cdot$
d) Csak ezeket használhatod, de a pirosból csak egyet: a , 5 , 2 , $\cdot$
e) Csak ezeket használhatod, de a pirosból csak egyet: a , 2 , 3 , $\cdot$

14. Az alábbi értékek egy kivételével egyenlőek. Keresd meg a kakukktojást!

a) $\frac{(2 \cdot 3^2 \cdot 7^3)^2}{3^2}$ b) $4 \cdot 3^2 \cdot 7^6$ c) $2 \cdot 3^2 \cdot 7^6 + 2 \cdot 3^2 \cdot 7^6$
d) $(2 \cdot 3^2 \cdot 7^6) \cdot (2 \cdot 3^2 \cdot 7^6)$ e) $(2 \cdot 3 \cdot 7^3)^2$

15. Írj a kifejezéssel azonosat, zárójelek nélkül!

a) $a(a^2)^3$ b) $(3^2)^5 : 3^2$ c) $(5 \cdot 2)^3 : 2^2$ d) $(x^2 \cdot y)^3$
 e) $(x^5)^2 : x^3$ f) $x^2 \cdot (y^3)^5 : y^{10} : x$ g) $\left(\frac{x^5}{y}\right)^2$ h) $\left(3^2 \cdot \frac{1}{15}\right)^3$

16. Páros vagy páratlan? A betűk természetes számokat jelentenek: ps, ha páros szám, pt, ha páratlan szám. A füzetedbe dolgozz!

a)

12^3	5^3	$5^2 \cdot 3^2$	10^{11}	11^{10}	$6^3 \cdot 5^7$	$3^5 + 5^3$	$7^2 + 2^7$	$4^{13} - 2^8$

b)

$2^5(5^3 + 3^7)$	$(3 \cdot 5)^8$	$14^3 \cdot 7^3$	$5^6 \cdot 6^3$	$(5a + 3a)^7$	$(10a)^3 : 2^2$	$(2x)^5 : 4^2 + 1$

17. Osztható 3-mal? Válaszolj I vagy N betűkkel! A füzetedbe dolgozz!

3^5	6^2	6^7	5^3	12^4	10^3	$3^6 \cdot 2^2$	$3^6 + 2^2$	$1 + 2^3 + 3$	$10^3 - 1$	$10^7 - 1$

18. Osztható 3-mal? Válaszolj I vagy N betűkkel! A füzetedbe dolgozz!

$5 \cdot 10^7 - 2$	$3^3 \cdot 17^2 - 1$	$(9 \cdot 13)^5 + a \cdot 3$	$12a : 4$	$12a : 3$

19. A betűk pozitív egész számokat jelentenek.

Csoportosítsd a kifejezéseket aszerint, hogy az adott kifejezés **biztosan** négyzetszám-e; **lehet**, hogy négyzetszám, de nem biztosan az; **lehetetlen**, hogy négyzetszám legyen.

$3^3 \cdot 6 \cdot a^4 \cdot 2^3$

$b^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3$

c^5

$2a^2$

$3e^3$

$3a^4$

$2a^2b$

$12a^2b^5$

$k^3 \cdot 5^2 \cdot k^5 \cdot 2^4$

$c^3 \cdot (3b^2c)^3 \cdot 3$

20. Készíts szorzácsoládokat! Három vagy több szám szorzácsoládát alkot, ha közülük valame-lyik a többinek a szorzata. Például $3^2, 3^7, 3^4$ és 3 szorzácsoládát alkotnak, mert $3 \cdot 3^2 \cdot 3^4 = 3^7$.

a) Ezekből az azonos alapú hatványokból válogathatsz: $5^4, 5^2, 5^3, 5^6, 5, 5^7, 5^9$.

b) Ezekből az azonos kitevőjű hatványokból válogathatsz:

$2^5, 8^5, 5^5, 6^5, 3^5, \left(\frac{1}{2}\right)^5, 10^5, \left(\frac{1}{10}\right)^5, 4^5, \left(\frac{1}{5}\right)^5.$

c) Ezekből a hatványokból válogathatsz: $2^3, 9^3, 4^2, 5^2, 5^3, 10^2, 2^2, 3^4, 3^2, 6^5, 3^3, 6^3, 18^7, 15^3, 2^5, 27^2, 10^5$.

10 hatványaival számolunk

Emlékeztető: a 7. évfolyamos tankönyv 29–32. oldalain kiegészítő tananyagként, a „Számok és műveletek” témakörén belül, a hatványozás tananyagban szerepel a számok normálalakban való felírása. Ott találhattok még további feladatokat is.

Írjuk fel a 10-es számrendszer helyi értékeit hatványjelöléssel!

...	10 000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$	...
	10^4	10^3	10^2	10^1	1	$\frac{1}{10^1}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$	

A 10 kitevőinek sorozatát balról jobbra haladva az 1-es kitevő után is folytathatjuk a megkezdett szabály szerint:

... 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, ...

Így értelmezhetjük a pozitív számok 0, illetve negatív egész kitevőjű hatványait is.

$$10^0 = 1 \quad 10^{-1} = \frac{1}{10} \quad 10^{-2} = \frac{1}{100} \quad 10^{-3} = \frac{1}{1000} \quad 10^{-4} = \frac{1}{10\,000} \quad \dots$$

Ezzel a jelöléssel a tízes számrendszer helyiértékei így írhatók:

...	10 000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$	...
	10^4	10^3	10^2	10^1	1	$\frac{1}{10^1}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$	
	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	

A hatványokat így olvassuk:

10^4 :	10 a negyedik	10^3 :	10 a harmadikon
10^2 :	10 a másodikon vagy 10 a négyzet	10^1 :	10 az elsőn
10^0 :	10 a nulladikon		
10^{-1} :	10 a mínusz elsőn (10 a mínusz egyedik)	10^{-2} :	10 a mínusz másodikon
10^{-3} :	10 a mínusz harmadikon	10^{-4} :	10 a mínusz negyedik

Egy számot 10^{-1} -nel szorozni nem más, mint azt a számot $\frac{1}{10}$ -del szorozni, vagyis 10-zel osztani.

$$x \cdot 10^{-1} = x \cdot \frac{1}{10} = \frac{x}{10} = x : 10$$

Ez az összefüggés igaz bármely negatív egész kitevőjű hatvány esetén.

Például: $x \cdot 10^{-2} = x \cdot \frac{1}{10^2} = x : 100$, $x \cdot 10^{-3} = x \cdot \frac{1}{10^3} = x : 1000$.

Ezzel az új jelöléssel minden pozitív számot felírhatunk **egy 1 és 10 közé eső szám**, valamint **10 valamelyik egész kitevőjű hatványának** szorzataként. Ilyenkor a számot **normálalakban** írtuk fel. (Az 1 normálalakja $1 \cdot 10^0$, a 10 normálalakja $1 \cdot 10^1$.)

A szám	A szám normálalakban	A szám	A szám normálalakban	A szám	A szám normálalakban
340	$= 3,4 \cdot 10^2$	3,4	$= 3,4 \cdot 10^0$	0,34	$= 3,4 \cdot 10^{-1}$

1. példa

Írjuk fel a számokat normálalakban!

6700; 0,01; 28 000 000; 0,8; 0,000 06; 27; 0,000 003 2; 4

Megoldás

$$\begin{array}{llll} 6700 = 6,7 \cdot 10^3 & 0,01 = 1 \cdot 10^{-2} & 28\,000\,000 = 2,8 \cdot 10^7 & 0,8 = 8 \cdot 10^{-1} \\ 0,000\,06 = 6 \cdot 10^{-5} & 27 = 2,7 \cdot 10 & 0,000\,003\,2 = 3,2 \cdot 10^{-6} & 4 = 4 \cdot 10^0 \end{array}$$

2. példa

A Nap tömege $1,99 \cdot 10^{30}$ kg. Ez 333 000-szerese a Föld tömegének. Mekkora a Föld tömege?

Megoldás

$$333\,000 = 3,33 \cdot 10^5$$

$$m_{\text{Nap}} = m_{\text{Föld}} \cdot 3,33 \cdot 10^5$$

Innen a Föld tömege:

$$m_{\text{Föld}} = \frac{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{3,33 \cdot 10^5} \approx 0,6 \cdot 10^{25} \text{ kg} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

3. példa

Egy négyzet alakú földterület oldalának hossza 53 200 méter. Számítsuk ki normálalakú számok segítségével, hány hektár a területe! (A hektár jele: ha.)

Megoldás

$$1 \text{ ha} = 10^4 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = \frac{1}{10^4} \text{ ha} = 10^{-4} \text{ ha}$$

A földterület területe:

$$T = 53\,200^2 \text{ m}^2, \text{ normálalakban: } 53\,200 = 5,32 \cdot 10^4.$$

$$T = (5,32 \cdot 10^4)^2 \text{ m}^2 = 5,32 \cdot 5,32 \cdot 10^4 \cdot 10^4 \text{ m}^2 = 28,3024 \cdot 10^8 \text{ m}^2$$

Váltsuk át hektárra!

$$T = 28,3024 \cdot 10^8 \text{ m}^2 = \frac{28,3024 \cdot 10^8}{10^4} \text{ ha} \approx 28,3 \cdot 10^4 \text{ ha} = 2,8 \cdot 10^5 \text{ ha}$$

Feladatok

1. Írd fel a számokat 10 hatványok nélkül!

10^6 10^{-3} $5 \cdot 10^5$ $3 \cdot 10^{-1}$ $52 \cdot 10^{-3}$ $40 \cdot 10^7$ $0,3 \cdot 10^5$

2. Írd a számokat normálalakba!

2036 53 487 000 000 000 3 287 800 000 $\frac{100}{4}$
 $0,000\,000\,001\,3$ 0,000 46 0,001 $\frac{1}{10\,000}$ $\frac{7}{10\,000\,000}$



Gyűjts olyan adatokat a természettudományok köréből, amelyben nagyon nagy vagy nagyon kicsi számokat normálalakban adnak meg!

3. A Nap tömege $1,989 \cdot 10^{30}$ kg. A Jupiter tömege $1,899 \cdot 10^{27}$ kg. Hányszorosa a Nap tömege a Jupiter tömegének?

@ Ki volt az a csillagász, fizikus, matematikus, aki először megbecsülte a Nap tömegét? Melyik században élt?

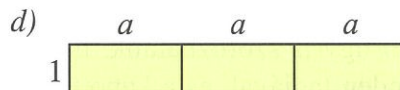
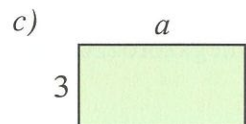
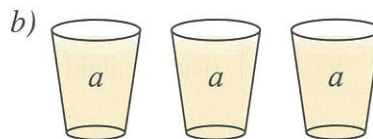
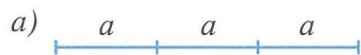
4. Dönts el, hogy igazak-e az állítások! A számok a táblázat 3. oszlopában normálalakban vannak megadva. A füzetedbe dolgozz!

	Állítás	A szám
1.	A szám nagyobb 10-nél.	$\cdot 10^2$
2.	A szám kisebb 1 000 000-nál.	$\cdot 10^5$
3.	A szám kisebb 1-nél.	$\cdot 10^0$
4.	A szám nagyobb 100-nál, de kisebb 10 000-nél.	$\cdot 10^4$
5.	A szám kisebb 100-nál.	$\cdot 10^{-2}$
6.	A szám legalább 1000.	$\cdot 10^3$

Minden kifejezésnek sok neve van

1. példa

Az $a \cdot 3$, vagyis $3a$ kifejezéshez sokféle rajzot készítettünk. Mindegyik esetben állapítsuk meg, mi a jelentése a -nak és az $a \cdot 3$ kifejezésnek!



Megoldás

a) Az a **hosszúság** egy szakasz hossza, $3a$ egy háromszor akkora szakasz **hossza**.

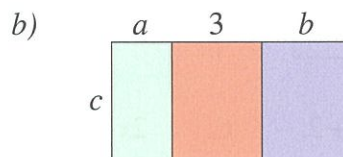
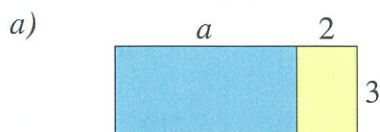
b) Egy pohár **térfogata** a . Három pohár együttes **térfogata** $3a$.

c) Az a és a 3 (egység) is **hosszúságok**, egy téglalap két oldalának a méretei. $3a$ a téglalap **területe**.

d) Az a és az 1 (egység) **hosszúságok**, $3a$ egy téglalap **területe**.

2. példa

Írjuk fel többféleképpen a téglalapok területét!



Megoldás

A téglalapok területe szorzat alakban és összeg alakban is megadható.

$$\begin{aligned} a) \quad T &= (a + 2) \cdot 3 = \\ &= a \cdot 3 + 2 \cdot 3 = \\ &= 3a + 6 \end{aligned}$$

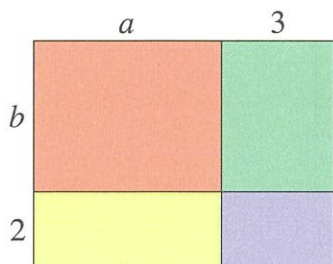
$$\begin{aligned} b) \quad T &= (a + 3 + b)c = \\ &= ac + 3c + bc \end{aligned}$$

Szorzból összeg



A 2. példa a)–b) képeiről azt a jól ismert azonosságot olvashattuk le, hogy összeget tagonként szorozhatunk.

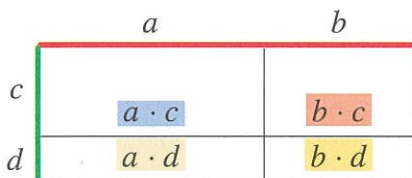
$$(a + b)c = ac + bc$$



Erről az ábráról azt olvashatjuk le, hogyan lehet a szorzatot összeg alakban írni, ha a szorzó is és a szorzandó is összeg.

$$\begin{aligned} T &= (a + 3)(b + 2) = \\ &= (a + 3)b + (a + 3) \cdot 2 = \\ &= a(b + 2) + 3(b + 2) = \\ &= ab + 2a + 3b + 6 \end{aligned}$$

Általánosan:



A téglalap területe

szorzat alakban: $(a + b) \cdot (c + d)$

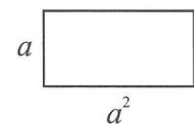
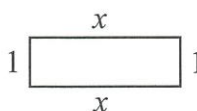
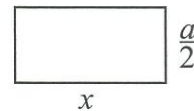
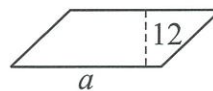
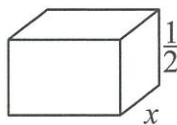
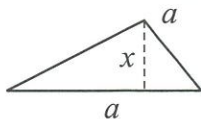
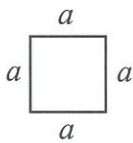
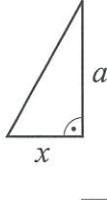
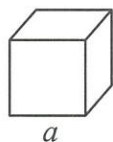
összeg alakban: $a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Összeget összeggel úgy is szorozhatunk, hogy az egyik tényező minden tagját megszorozzuk a másik tényező minden tagjával, és a kapott szorzatokat összeadjuk.

Feladatok

1. Melyik kifejezés melyik rajzhoz tartozhat? Mindegyik esetben állapítsd meg, mi a jelentése az ismeretleneknek!



$4a$, a^2 , $2x + 2$, x , $2x + a$, $\frac{a \cdot x}{2}$, a^3 , $2(a^2 + a)$, $a \cdot 12$, $6a^2$.

2. Párosítsd össze az azonosakat!

I. $5x - 5$ II. $5xy - 25x$ III. $25xy - 5x$ IV. $5y - 25xy$ V. $xy - 5x$ VI. $x - 5xy$

A $5x(5y - 1)$ B $5y(1 - 5x)$ C $5(x - 1)$ D $x(1 - 5y)$ E $5x(y - 5)$ F $x(y - 5)$

3. Oldd meg az egyenleteket!

a) $x(3 - x) + x^2 + 2 = 5$

c) $x \cdot (x - 3) + 6 = x^2 - 7x$

b) $(x - 11)x + 3 = 31 + (3 + x)x$

d) $x \cdot (2x - 5) + 8x = x \cdot (3 + x)$

4. Oldd meg az egyenleteket!

a) $(x + 3)(x - 5) = 0$

c) $x(x + 2)(x - 7) = 0$

b) $x \cdot (x - 1) = 0$

d) $(2x - 3)(5 - x)(x - 1) = 0$

5. Töltsd ki a szorzótáblák üres mezőit!

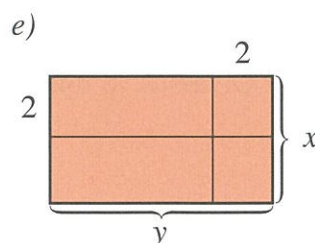
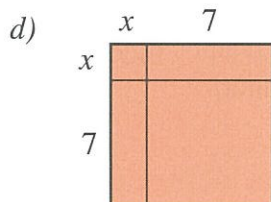
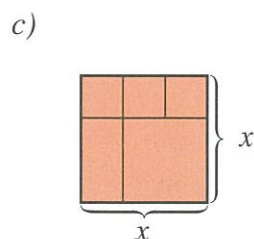
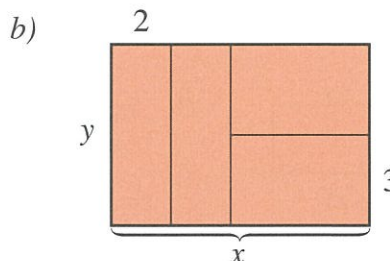
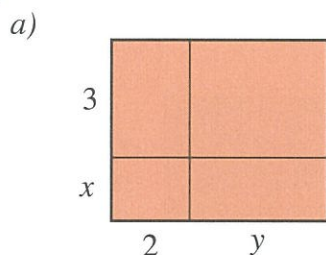
a)

	$a + 2b$	$3a^2b$	$a - b$
3			
$2b$			

b)

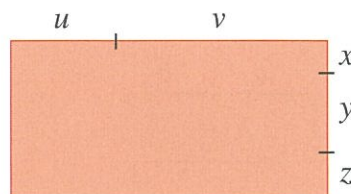
	$a + 2b$	$a^2 + b$	$a - 2$
$\frac{1}{2}b$			
			$a^2 - 2a$

6. Írd fel többféleképpen a téglalapok területét!



7. Írd fel a síkidom területét többféleképpen! Számítsd ki a megadott értékek esetén!

$u = \frac{2}{3}, \quad v = \frac{4}{3}, \quad x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = 0,3.$



8. A következő feladat megoldásakor először készíts rajzot a szorzathoz! A rajz segítségével alakítsd a szorzatot összeggé!

a) $e \cdot (f + g)$

b) $a \cdot (b + 3)$

c) $(a + 3) \cdot (b + 1)$

d) $c \cdot (x + y + z)$

e) $(k + l) \cdot (k + m)$

f) $(x + y) \cdot (x + z)$

g) $(x + 1) \cdot (x + 1)$

h) $(a + b + c) \cdot (d + 3)$



9. A $26 \cdot 93$ egy különleges szorzat. Ha a szorzótényezőkön belül a számjegyeket felcseréljük, akkor a $62 \cdot 39$ szorzatot kapjuk, ami meglepő módon megegyezik az eredetivel.

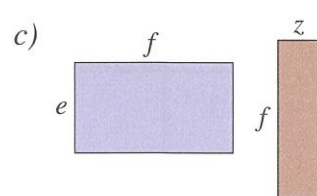
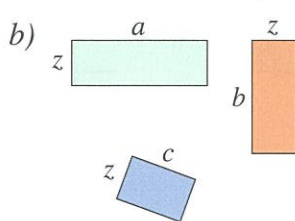
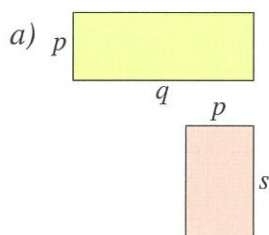
$$26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$$

Keress más ilyen szorzatokat! Próbáld meg megfejteni a „titkát” ennek a furcsa viselkedésnek! Segíthet a „titok” megfejtésében, ha átirod a feladatot az algebra nyelvére, és a szorzatokat összeggé alakítod!

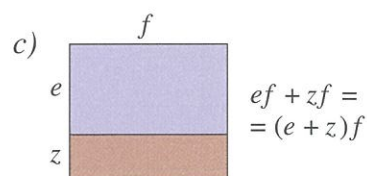
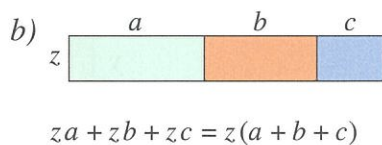
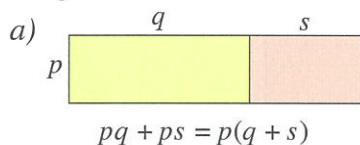
Összegeből szorzat – kiemelés

1. példa

Építsünk a megadott téglalapokból nagyobb téglalapot! Olvassunk le azonosságokat a rajzokról!



Megoldás



2. példa

Készítsünk az összegek minden tagjához téglalapot úgy, hogy össze lehessen illeszteni őket egy nagy téglalappá! Olvassuk le róla a szorzatalakot!

a) $a \cdot 3 + b \cdot 3$

b) $a \cdot 3 + 6$

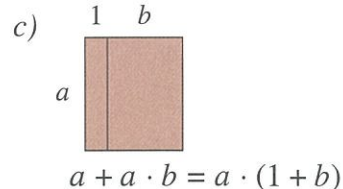
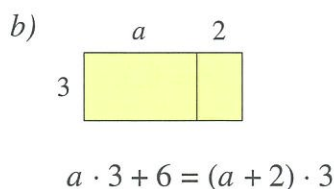
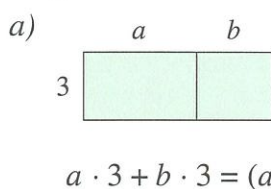
c) $a + a \cdot b$

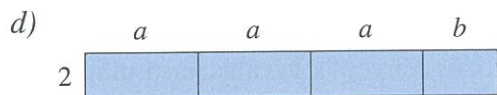
d) $6a + 2b$

e) $a \cdot b + b^2$

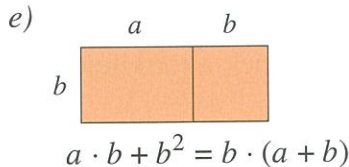
f) $12a + 8b + 20$

Megoldás





$$6a + 2b = 2 \cdot (3a + b)$$



$$a \cdot b + b^2 = b \cdot (a + b)$$



$$12a + 8b + 20 = 4 \cdot (3a + 2b + 5)$$

A 2. példa minden feladatában összeget alakítottunk szorzattá. Ez a beszorzás műveletének a megfordítása. Beszorzáskor egy összeg minden tagját megszorozzuk a zárójel mellett álló szorzóval.

$$\boxed{b} \cdot (a + 2) = \boxed{b} \cdot a + \boxed{b} \cdot 2$$

A műveletet fordítva is végezhetjük, ha egy összeg minden tagjában találunk közös szorzótényezőt. Ezt a tagokból kiemelhetjük egy zárójel elé. Ezt kiemelésnek nevezzük.

$$\boxed{c} \cdot d + 2 \cdot \boxed{c} \cdot e = \boxed{c} \cdot (d + 2 \cdot e)$$

Beszorzáskor

szorzatot összeggé alakítunk.

Kiemeléskor

összeget szorzattá alakítunk.

3. példa

A) Vizsgáljuk egyszerű számpéldákon, hogyan készíthetünk összegből szorzatot! Ilyenkor beszorzással mindig ellenőrizhetjük, helyes-e az átalakítás.

a) $2 \cdot 9 + 4 \cdot 9 + 9 = (2 + 4 + 1) \cdot 9$

b) $2 \cdot 5^2 + 5 + 2 \cdot 5^3 = 2 \cdot 5 \cdot 5 + 5 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 5 + 1 + 2 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 5 = (10 + 1 + 50) \cdot 5$

Betűket tartalmazó kifejezések esetén is hasonlóan járhatunk el.

B) Írd át az összegeket szorzat alakba!

a) $2a + 3ab + a^2$

b) $3x^2 + x$

Megoldás

a) $2a + 3ab + a^2 = 2 \cdot a + 3b \cdot a + a \cdot a = (2 + 3b + a) \cdot a$

b) $3x^2 + x = 3x \cdot x + 1 \cdot x = (3x + 1) \cdot x$

Törtéket egyszerűsítünk

A törték egyszerűsítésekor a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a 0-tól különböző számmal osztjuk el.

4. példa

Egyszerűsítsük a törtéket a közös tényezők segítségével!

a) $\frac{7^2 \cdot 5^3}{2 \cdot 7 \cdot 5^2}$

b) $\frac{12a \cdot 3}{3}$

c) $\frac{x^2}{2xy}$

Megoldás

a) Ha csak szorzatok szerepelnek a törtkifejezésben, akkor a közös tényezők kiválasztása után egyszerűsíthetjük a törtet.

$$\frac{7^2 \cdot 5^3}{2 \cdot 7 \cdot 5^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5}{2}$$

Betűkifejezéseket tartalmazó törtek esetében is hasonlóan járunk el.

b) A $\frac{12a \cdot 3}{3}$ törtet egyszerűsíthetjük 3-mal: a számlálóban szereplő tényezők közül csak az egyiket kell elosztani 3-mal. Így: $\frac{12a \cdot 3}{3} = \frac{4 \cdot 3a \cdot 3}{3} = 4a \cdot 3 = 12a$ vagy $\frac{12a \cdot 3}{3} = 12a \cdot \frac{3}{3} = 12a \cdot 1 = 12a$.

$$c) \frac{x^2}{2xy} = \frac{x \cdot x}{2 \cdot x \cdot y} = \frac{x}{2y}$$

5. példa

Egyszerűsítsük a törteket! Feltételezzük, hogy a szereplő betűk, illetve a nevezők értéke sehol sem 0.

$$a) \frac{3^4 + 3^2 \cdot 5 + 3}{3^2}$$

$$b) \frac{12a + 3}{3}$$

$$c) \frac{12a^3}{3a^2 - 6a}$$

Megoldás

Ha összegek is előfordulnak a számlálóban vagy a nevezőben, akkor egyszerűsítéskor az összeget tagonként kell elosztani, vagy az összeget kiemeléssel szorzattá kell alakítani és utána egyszerűsíteni.

$$a) \frac{3^4 + 3^2 \cdot 5 + 3}{3^2} \text{ egyszerűsítése:}$$

- tagonkénti osztás: $\frac{3^4 + 3^2 \cdot 5 + 3}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 5 + 3}{3 \cdot 3} = \frac{3^3 + 3 \cdot 5 + 1}{3}$

- egyszerűsítés kiemelés után: $\frac{3^4 + 3^2 \cdot 5 + 3}{3^2} = \frac{3(3^3 + 3 \cdot 5 + 1)}{3 \cdot 3} = \frac{3^3 + 3 \cdot 5 + 1}{3}$

Betűkifejezéseket tartalmazó törtek esetében is hasonlóan járunk el.

b) $\frac{12a + 3}{3}$ tört egyszerűsíthető, mert a számlálója és a nevezője is osztható 3-mal. A számláló azért osztható 3-mal, mert mindkét tag 3 többszöröse. Így:

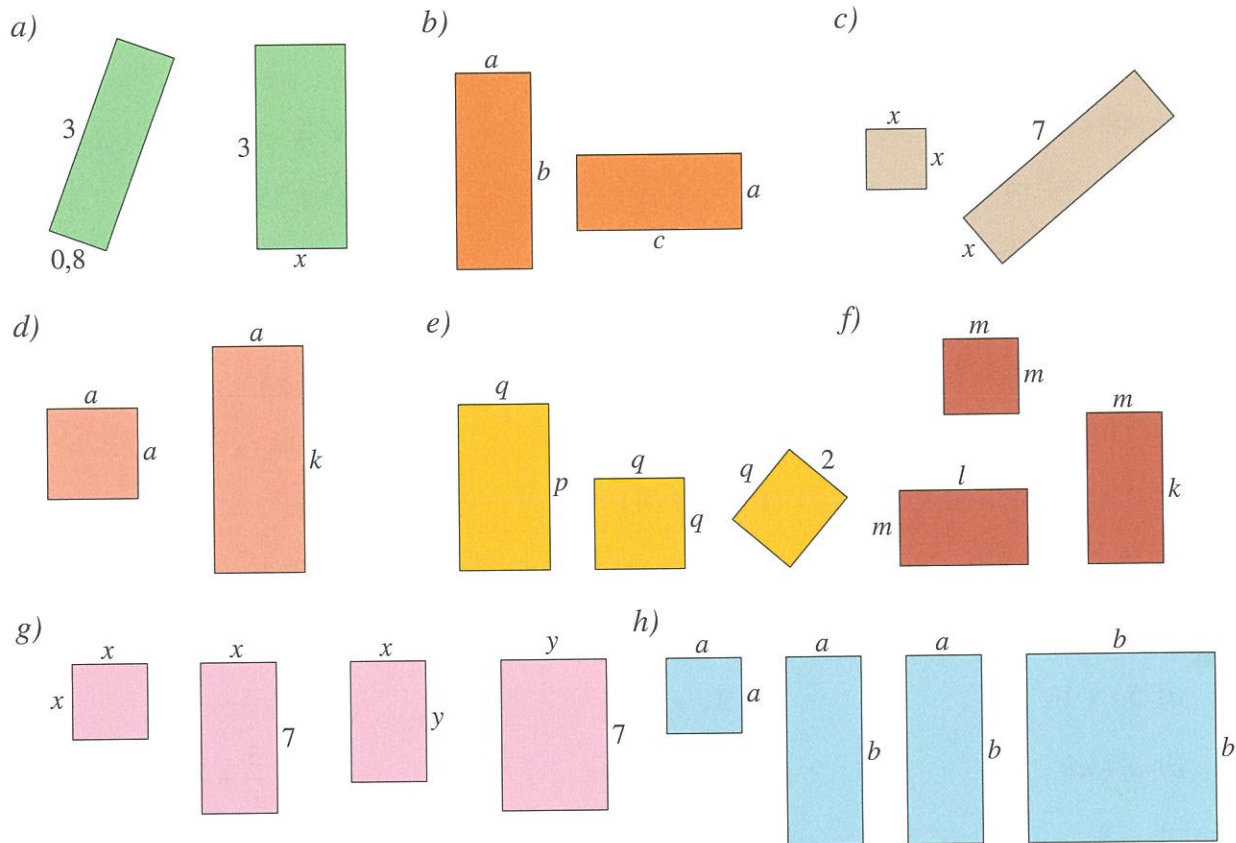
- tagonkénti osztás: $\frac{12a + 3}{3} = \frac{4 \cdot 3a}{3} + \frac{3}{3} = 4a + 1$

- egyszerűsítés kiemelés után: $\frac{12a + 3}{3} = \frac{3 \cdot (4a + 1)}{3} = 4a + 1$

$$c) \frac{12a^2}{3a^2 - 6a} = \frac{4 \cdot 3 \cdot a \cdot a}{3a(a - 2)} = \frac{4a}{a - 2}. \text{ Itt a kiemelést alkalmaztuk.}$$

Feladatok

1. Írd fel az egyforma színű téglalapok területének összegét! Építs belőlük nagyobb téglalapot! Olvass le a nagy téglalapról szorzat alakot!



2. A szorzatok téglalapok területét adják. A téglalapokat több részből raktuk össze. Például az $5 \cdot (5 + 8)$ szorzathoz ez az ábra tartozik:

Készíts ábrákat a szorzatokhoz! Írd fel a téglalap területét összeg alakban is!



- | | | | |
|----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| a) $4 \cdot (5 + 7)$ | $2 \cdot (2 + 6)$ | $5 \cdot (3 + 1)$ | $(2 + 5) \cdot 3$ |
| b) $a \cdot (a + 1)$ | $b \cdot (2 + b)$ | $3 \cdot (3 + b)$ | $2 \cdot (a + b)$ |

3. Készíts téglalapokat az összeg tagjaihoz úgy, hogy egy nagy téglalappá lehessen összeépíteni őket! Olvass le szorzat alakot a nagy téglalapról!

- | | | |
|------------------------|---------------|---------------------|
| a) $3a + 3b$ | b) $7x + 14$ | c) $2a + 10a$ |
| d) $5ab + 3ab$ | e) $ab + a^2$ | f) $xy + x \cdot 3$ |
| g) $5x + 20xy + 25x^2$ | h) $x + xy$ | i) $k^2 + k - kl$ |

- 4.** Keresd közös tényezőket a tagokban! Alakítsd az összeget szorzattá a közös tényező kiemelésével! Dolgozz a példa szerint!

$$\begin{array}{c} 121 \\ \swarrow \searrow \\ 11 \cdot 11 \end{array} + \begin{array}{c} 99 \\ \swarrow \searrow \\ 11 \cdot 9 \end{array} = 11 \cdot (11 + 9)$$

$$\begin{array}{c} ab \\ \swarrow \searrow \\ b \cdot a \end{array} + \begin{array}{c} 3bc \\ \swarrow \searrow \\ b \cdot 3c \end{array} = b \cdot (a + 3c)$$

- a) $48 + 60$
 b) $25 \cdot 7 + 14 \cdot 15$
 c) $600 + 250 \cdot 9$
 d) $126 + 420$
 e) $40 \cdot 28 + 35 \cdot 6 + 21 \cdot 60$
 f) $540 + 1076 + 924$
 g) $2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 11 + 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 41$
 h) $84 + 666 + 34 \cdot 33$

- A) $x \cdot x \cdot y \cdot y + 2 \cdot y \cdot x$
 B) $15ab + 55$
 C) $2 \cdot x \cdot y \cdot y + 8 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$
 D) $a^2b + ab^2$
 E) $8bc + 6ab$
 F) $2xy - 14 \cdot x^2y$
 G) $a^2b - a^2$
 H) $6xy + 2x^2y + 10xy^2$

- 5.** Írd fel az összeget szorzat alakban!

- a) $5a + 10$ b) $2x + x^2$ c) $3x + 5xy$
 d) $a + ab$ e) $x + xy + xz$ f) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x} + \frac{5}{x}$

- 6.** Írd fel az összeget szorzat alakban!

- a) $819 + 765 + 72$ b) $426 + 6060 + 174$ c) $9a + 72b$
 d) $6a^2 - 18a^2b + 12a^2$ e) $3x - 21x^2 - 12xy$ f) $5x^2y + 15x^2 - x^2$

- 7.** Írd fel az összeget szorzat alakban!

- a) $6x - 3$ b) $x^2 - 3x$ c) $4ab - 8b$
 d) $2xy - y$ e) $a + ab - ac$ f) $x^4 - x^3$

- 8.** Egyszerűsítsd a kifejezéseket!

- a) $\frac{5a}{10ab}$ b) $\frac{2a+4}{2}$ c) $\frac{b(a+b)}{3b^2}$ d) $\frac{8a+4a^2}{4a(2+a)}$
 e) $\frac{a+b}{3a+3b}$ f) $\frac{5b^2+b}{2b}$ g) $\frac{5(a-1)}{(5a-5) \cdot 2}$ h) $\frac{a+a^2}{5a(1+a^2)}$

- 9.** Többet ésszel, mint erővel!

Számítsd ki a helyettesítési értékeket, legyen: $a = -1,42$, $b = 3$, $c = -10$!

- a) $\frac{5a}{10ab}$ b) $\frac{2a+6a}{4abc}$ c) $\frac{2ab}{b} - 2a + c$ d) $\left(\frac{3ab}{a} + b\right)c$ e) $\frac{2a+4}{a+2} - c$

10. Készíts láncot a dominókból! Illeszd egymáshoz az azonos kifejezéseket, majd olvasd össze a dominókon lévő betűket! A megfejtés egy Petőfi versben szerepel. Mi a vers címe?

M

$1,5x$	$5x + 3x$
--------	-----------

S

$\frac{10x^2}{2}$	$x^2(1 + 2x)$
-------------------	---------------

O

$8x$	$12x$
------	-------

Z

$x^2 + x$	$5x^2$
-----------	--------

R

$7x + x + 4x$	$x(x + 1)$
---------------	------------

A

$x^2 + 2x^3$	$2x + 6xy$
--------------	------------

Szöveges feladatok megoldása egyenlettel vagy anélkül

Már korábban is sokat foglalkoztunk szöveges feladatok megoldásával. Láttuk, hogy nagyon sokféle módszer van, amellyel a szöveges feladatok megoldhatók. Gyakran egyszerű következtetéssel jutottunk célhoz, máskor rajz segítségével olvastuk le a megoldást, sok esetben pedig egyenletet írtunk fel a szöveg alapján, és azt oldottuk meg.

Amikor egyenlettel oldjuk meg a feladatot, akkor valójában a **szöveget fordítjuk le a matematika nyelvére**. A fordítás a matematika nyelvére nagyon fontos feladat a tudomány, a technika és a gazdaság számos területén. Ez gyakran igen összetett egyenletek, egyenlőtlenségek felállítását és megoldását jelenti. Az egyenlettel való megoldáskor a nagyobb gondot általában ez a fordítás jelenti, vagyis az **egyenlet felállítása**.

A feladat megoldása előtt mindig érdemes **megbecsülni** a várható eredményt. Így a nagyobb tévedések elkerülhetők. Az egyenlet megoldása után a kapott értéket a **szövegbe** kell visszahelyettesítenünk, ezzel ellenőrizzük, hogy a kapott megoldás valóban megfelel-e a feladat feltételeinek.

Olyan általános receptet, amely minden szöveges feladat megoldására alkalmazható, nem tudunk adni. A szöveges feladatok megoldásának módszereit néhány példán mutatjuk be.

Az itt következő feladatok nagyobb része nem igazi gyakorlati probléma, inkább rejtvény, fejtörő, fordítási gyakorlat. Segítség ahhoz is, hogy a fizika- vagy a kémiaórákon előkerülő problémákkal könnyebben boldogulj.

1. példa

Pista kétféle ceruzából 12 darabot vett 400 Ft-ért. A ceruzák mindegyike 17 Ft-ba vagy 45 Ft-ba került. Hány darabot vett Pista az egyik fajta ceruzából, és hányat a másiktól?



Megoldás egyenlettel

Ha a 17 Ft-os ceruzák száma	x ,
akkor a 45 Ft-os ceruzák száma	$12 - x$.
A 17 Ft-os ceruzák ára forintban	$17x$,
a 45 Ft-os ceruzák ára forintban	$45(12 - x)$.
A kétféle ceruza ára összesen forintban	$17x + 45(12 - x)$.
Pista 400 Ft-ot fizetett, így	$17x + 45(12 - x) = 400$ $17x + 540 - 45x = 400$ $140 = 28x$ $5 = x$

Tehát Pista a 17 Ft-os ceruzából 5 darabot, a másiktól pedig 7 darabot vásárolt.

Így valóban $17 \cdot 5 + 45 \cdot 7 = 400$ Ft-ot fizetett.

Megoldás következtetéssel

Ha mind a 12 ceruza 17 forintos lett volna, akkor Pista 204 Ft-ot fizetett volna értük. A 196 Ft többlet abból származik, hogy 45 Ft-os ceruzát is vett. Ha 1 db 17 Ft-ost kicserélünk 45 Ft-osra, akkor 28 Ft-tal többet kell fizetni a ceruzákért.

A 196 Ft többlet $196 : 28 = 7$ darab cserét jelent. Tehát 7 db 45 Ft-os és 5 db 17 Ft-os ceruzát vett Pista, és ezekért valóban 400 Ft-ot fizetett, hiszen $45 \cdot 7 + 17 \cdot 5 = 315 + 85 = 400$.

2. példa

Egy bélyegautomatában összesen 770 forint van 20 forintosokban és 50 forintosokban. Háromszor annyi 20 forintos van benne, mint 50 forintos. Hány darab van az egyes érmékből az automatában?

Megoldás

Ha az 50 forintosok száma	x ,
akkor a 20 forintosok száma	$3x$.
Az 50 forintosok értéke forintban	$50 \cdot x$,
a 20 forintosok értéke forintban	$20 \cdot 3x$.
Az automatában levő pénz értéke forintban	770.
Ez az egyenlet írható fel:	$50x + 20 \cdot 3x = 770$ $110x = 770$ $x = 7$

Ellenőrzés

7 db 50 forintos értéke 350 Ft, 21 db 20 forintos értéke 420 Ft. Ez együtt valóban 770 Ft.

Tehát az 50 forintosok száma 7, a 20 forintosoké 21.

Megoldás következtetéssel

Mivel a 20 forintosok száma 3-szor annyi, mint az 50 forintosoké, úgy képzelhetjük, hogy minden 50 forintos mellé letesszünk 3 darab 20 forintosot. Egy ilyen kupac értéke 110 Ft. A 770 Ft-ból 7 ilyen kupac képezhető. Mindegyikben egy darab 50 forintos van. Az 50 forintosok száma tehát 7, a húszasoké ennek 3-szorosa, vagyis 21.

3. példa

Egy kétjegyű számban 3-szor annyi tízes van, mint egyes. Ha a szám jegyeit felcseréljük, 36-tal kisebb számot kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

Megoldás egyenlettel

Tegyük fel, hogy az egyesek helyén áll	x ,
akkor a tízesek helyén	$3x$.
A kétjegyű szám	$10 \cdot 3x + x$.
A számjegyek felcserélésével kapott szám	$10x + 3x$.
Az eredeti szám 36-tal nagyobb	$10 \cdot 3x + x - 36 = 10x + 3x$ $31x - 36 = 13x$ $18x - 36 = 0$ $x = 2$

Ellenőrzés

A felcseréléssel kapott szám 26, és ez valóban 36-tal kisebb az eredeténél. Tehát a kétjegyű szám 62.

Megoldás egyenlet nélkül

A szóba jöhető lehetőségek száma nagyon kevés, az egyesek helyén csak 1, 2 vagy 3 állhat, ugyanígy csak ezek azok a számjegyek, amelyeknek a háromszorosa is egyjegyű. (A 00-t nem tekintjük kétjegyű számnak.)

A kétjegyű szám így vagy 13 vagy 26 vagy 39, és több lehetőség nincs. Ezek közül csak a 26 jó.

4. példa

Feri most feleannyi éves, mint édesapja volt 6 évvel ezelőtt, amikor Feri éppen harmadannyi éves volt, mint az édesapja most. Hány éves most Feri, és hány éves az édesapja?

Megoldás

Sokszor segít, ha önkényesen adunk egy választ a kérdésre, és kipróbáljuk, hogy jó-e. Áttekinthetőbb a feladat, ha **az adatokat táblázatba foglaljuk**.

Legyen Feri most például **21** éves.

	Ma	6 éve
Feri	21	21 - 6
Apja	21 · 2 + 6	21 · 2

Legyen Feri most **x** éves.

	Ma	6 éve
Feri	x	x - 6
Apja	x · 2 + 6	x · 2

A táblázat rubrikái között további **kapcsolatot keresünk**. A szöveg szerint Feri 6 évvel ezelőtt éppen harmadannyi éves volt, mint most az apja. A kapcsolat alapján **egyenletet írunk fel**.

Ha Feri 21 éves lenne, a feladat állítása nem teljesülne, mert $21 - 6$ nem egyenlő $\frac{21 \cdot 2 + 6}{3}$ -dal.

Ha Feri x éves, akkor a táblázatból a következő egyenletet kapjuk:

$$x - 6 = \frac{x \cdot 2 + 6}{3}$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 3-mal:

$$3(x - 6) = x \cdot 2 + 6$$

A bal oldalon azonos átalakítást végzünk:

$$3x - 18 = 2x + 6$$

Mindkét oldalhoz 18-at adunk:

$$3x = 2x + 24$$

Mindkét oldalból kivonunk $2x$ -et:

$$x = 24$$

Ellenőrzés

	Ma	6 éve
Feri	24	18
Apja	54	48

18 valóban harmada 54-nek, megoldásunk tehát helyes.

Tehát most Feri 24 éves, édesapja pedig 54 éves.

Feladatok

1. Melyik az a szám, amelynek a $\frac{2}{3}$ része 3-mal több, mint 19?

2. Péter gondolt egy számot, hozzáadott 2,1-et, majd az összeg 5-szörösét vette. Eredményül 24,5-et kapott. Melyik számra gondolt Péter?

3. Melyik az a szám, amelynek

- a) $\frac{1}{2}$ része, $\frac{1}{3}$ része és $\frac{1}{4}$ része összesen 65, b) az $\frac{1}{4}$ része 2-vel kisebb az $\frac{1}{3}$ -ánál,
c) az $\frac{1}{4}$ -e 2-vel nagyobb az $\frac{1}{3}$ -ánál, d) az $\frac{1}{4}$ része és az $\frac{1}{3}$ része megegyezik?

4. a) Gondoltam egy számot. Megszoroztam $\frac{7}{8}$ -dal, majd hozzáadtam 1,5-et, és így az eredeti számnál 4-gyel kisebb számot kaptam. Melyik számra gondoltam?

b) – Hány lovad van? – kérdezték a gazdát.

– Ha a lovaim számát megszorozod $\frac{7}{8}$ -dal, és hozzáteszel 1,5-et, akkor a lovaim számánál 4-gyel kevesebbet kapsz – válaszolta a gazda.

Hány lova van a gazdának?

c) Béla új munkahelyre ment. Amikor megkérdezték a kollégái, hogy hány éves, így válaszolt:

– Ha éveim számát megszorozod $\frac{7}{8}$ -dal, és az eredményhez hozzáadsz 1,5-et, akkor a koromnál 4-gyel kisebb számot kapsz.

Hány éves Béla?

5. a) Gondoltam két számra. Az egyik 15-tel nagyobb, mint a másik. Összegük 124. Melyik ez a két szám?

b) Kelekótya Karcsi nyáron vízitúrán volt. Ezt mesélte: A túrán 15-tel több fiú volt, mint lány. Összesen 124-en voltunk. Hány fiú és hány lány vett részt a túrán?

c) Egy pékségben 124 kg lisztet két részre osztottak. Egyik részből kiflit, a másiktól kenyert sütöttek. A kenyérhez 15 kg-mal több lisztet használtak fel. Hány kilogram lisztből sütöttek kiflit?

6. A borítékban két szám van elrejtve. A boríték külsején látod az összegüket és a különbségüket is.

a) Melyik ez a két szám?
b) Készíts te is ilyen rejtvényt a társadnak!



7. Az osztályunkban 30-an vagyunk. Kettővel több a lány, mint a fiú. Hány fiú, hány lány jár az osztályunkba?

8. a) Két borítékban korongok vannak, összesen 98 darab. Ha az egyikből áttennénk 7-et a másikba, ugyanannyi lenne bennük. Hány korong van a borítékokban?
b) Két polcon összesen 98 könyvünk van. Ha az egyik polcra 7 darabot áttennénk a másikra, akkor a két polcon ugyanannyi lenne a könyvek száma. Hány könyv van külön-külön a két polcon?

Hány könyv lenne külön-külön a két polcon, ha összesen 97 könyvünk volna a 98 helyett?

9. Az illatszerbolt három láda szappant kapott, összesen 414 darabot. Sárga szappan 20 darabbal, fehér szappan 34 darabbal volt több, mint rózsaszín. Hány darab szappan volt az egyes fajtákból?

10. Egy 2 m 60 cm-es szövetből szoknyát és blúzt varrnak. A blúzhoz 40 cm-rel több anyag kell, mint a szoknyához. Mennyi anyagra van szükség a blúzhoz, mennyire a szoknyához?

11. Három könyvespolcon összesen 720 könyv van. Ha a harmadik polcra 35 darabot áttennénk az elsőre, akkor mindhárom polcon ugyanannyi könyv lenne. Hány könyv van az egyes polcokon?

12. Az osztály kirándulni ment. Tíz perc híján 3 óráig tartott a kirándulás, 50 perccel többet mentek gyalog, mint villamossal, más járműre nem szálltak. Mennyi ideig gyalogoltak?

13. Amikor én 5 éves voltam, a bátyám 9 éves volt. Most összesen 36 évesek vagyunk. Hány éves vagyok most?

14. Két szám összege 2, az egyik szám 1-gyel nagyobb a másikonál. Melyik ez a két szám?

15. A szörppel telt üveg 520 forintba kerül. A szörp 500 forinttal ér többet, mint az üveg. Hány forint az üres üveg?

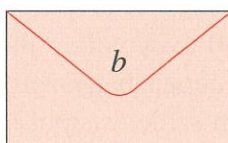
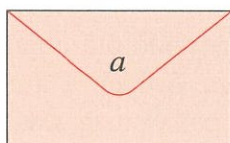
16. Szerkeszd meg a téglalapot, ha kerülete 23 cm, és egyik oldala 1,5 cm-rel hosszabb a másikonál!

17. Gergőnek és Zsuzsinak összesen 1370 Ft-ja van. Ha Zsuzsi kapna még 230 Ft-ot, akkor mindkettőnek ugyanannyi pénze lenne. Hány forintja van Gergőnek, hány forintja van Zsuzsinak?

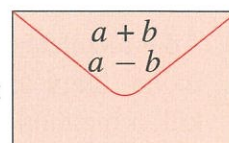
18. Az előző feladatok között több olyan is van, amelyben két szám összegét és különbségét árulja el a szöveg, és ezek ismeretében lehet a kérdést megválaszolni. Mintha 2 borítékban elrejténénk egy-egy számot, és elárulnánk az összegüket és a különbségüket is.

Keresd meg, melyek ezek a feladatok!

Amit nem ismerünk:



amit ismerünk:



19. Viola és anyukája a mai napon együtt ünnepelték a születésnapjukat. Az anya éppen 31-szer annyi idős, mint Viola. Két év múlva ugyanezen a napon az anya kora 11-szerese lesz Violának. Viola hányadik születésnapján lesz az anya 3-szor annyi idős, mint a lánya?

20. Bence 4 éves volt, amikor Máté született. Hány éves korukban lesznek ketten együttvéve 50 évesek?

21. Egy 35 éves apának 10 és 6 évesek a fiai. Hány év múlva lesz a fiúk életkora együtt
a) ugyanannyi, mint az apjuké, b) feleannyi, mint az apjuké?

22. Viola, Boglárka és Kata együtt 24 évesek. Azt is eláruljuk, hogy egyenlő időnként születtek.
a) Hány évesek lehetnek a gyerekek?
b) Találd ki, hogy a három lány közül a középső lány óvodás, alsó tagozatos, felső tagozatos vagy gimnazista!
c) Lehet-e a legidősebb gyerek óvodás, alsó tagozatos, felső tagozatos vagy gimnazista?

23. A szövegek és a képletek is kétjegyű egész számokról szólnak. A kártyákon a szám számjegyei állnak. A képletek egy-egy kétjegyű szám értékét adják meg. Az a egyjegyű egész számot jelent ezekben a képletekben. Párosítsd össze az összetartozó szövegeket és képleteket!

tízesek egyesek

- | | | | | |
|---|---|-----|-----|---------------------------|
| a) A szám első jegye a , a második jegye 2. | <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="background-color: #f9e79f;">a</td><td style="background-color: #9fc2e7;">2</td></tr></table> | a | 2 | A) $10a + a + 2$ |
| a | 2 | | | |
| b) A szám első jegye a , a második 2-vel több. | <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="background-color: #f9e79f;">a</td><td style="background-color: #9fc2e7;"></td></tr></table> | a | | B) $10a + 2$ |
| a | | | | |
| c) A szám második jegye kétszer akkora, mint az első. | <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="background-color: #f9e79f;">a</td><td style="background-color: #9fc2e7;"></td></tr></table> | a | | C) $10a + 2a$ |
| a | | | | |
| d) A számban 2-vel több tízes van, mint egyes. | <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="background-color: #f9e79f;"></td><td style="background-color: #9fc2e7;">a</td></tr></table> | | a | D) $10 \cdot 2 + a$ |
| | a | | | |
| e) A számban kétszer annyi tízes van, mint egyes. | <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="background-color: #f9e79f;"></td><td style="background-color: #9fc2e7;">a</td></tr></table> | | a | E) $10 \cdot (a + 2) + a$ |
| | a | | | |
| f) A szám első jegye 2, a második jegye a . | <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="background-color: #f9e79f;"></td><td style="background-color: #9fc2e7;"></td></tr></table> | | | F) $10 \cdot 2a + a$ |
| | | | | |

24. Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 12. Ha a jegyeit felcseréljük, 18-cal nagyobb számot kapunk. Melyik az eredeti szám?

25. Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 10. Ha a számjegyeket felcseréljük, az új szám kétszerese az eredeti számnál 1-gyel nagyobb lesz. Melyik ez a szám?

26. Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 9. Ha a számjegyeket felcseréljük, az új szám az eredeti háromszorosánál 27-tel nagyobb lesz. Melyik ez a szám?

27. Egy kétjegyű szám egyik jegye kettővel kisebb, mint a másik. Ha a jegyeit felcseréljük, a kétszeresénél 6-tal kisebb számot kapunk. Melyik az eredeti kétjegyű szám?

28. Egy kétjegyű szám egyik jegye kétszer akkora, mint a másik. Ha a számból kivonjuk a jegyei felcserélésével keletkezett számot, 27-et kapunk. Melyik az eredeti szám?

29. Egy kétjegyű szám egyik jegye 3-szor akkora, mint a másik. Ha a jegyeket felcseréljük, az új szám az eredeti kétszeresénél 15-tel nagyobb lesz. Melyik ez a szám?

★ 30. Ádám születésekor édesanyja 30 éves volt. Ádám egy idő óta minden születésnapján kiszámolja, hogy anyukája életkora éppen hányszorosa az övének. Ha ez egész szám, akkor ezt külön megünnepelik. Hány ilyen születésnapot ünnepelhet meg Ádám?

Mozgásos feladatok

A mozgásos feladatokban a megtett út, az eltelt idő és a sebesség között keresünk kapcsolatot. Egyenletes mozgásról olyankor beszélünk, ha egyenlő időközönként egyenlő utat tesz meg a mozgó test. Ilyenkor a sebesség állandó, és a mozgás adatai között fennáll, hogy az eltelt idő és a sebesség szorzata megadja a megtett utat.

$$s = v \cdot t$$

1. példa

Veronika és Judit kerékpárral Kemencéről Szobra mentek. Veronika átlagosan 15 km-t, Judit átlagosan 12 km-t tett meg egy óra alatt. Judit $\frac{1}{2}$ órával előbb indult, így épp egyszerre értek be Szobra. Hány km-t bicikliztek Kemencétől Szobig?

Megoldás egyenlettel

A jobb áttekinthetőség kedvéért az adatokat táblázatba foglaljuk. Judit menetidejét jelöljük x -szel!

	Sebesség $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$	Idő [h]	Út [km]
Judit	12	x	$12x$
Veronika	15	$x - 0,5$	$15(x - 0,5)$

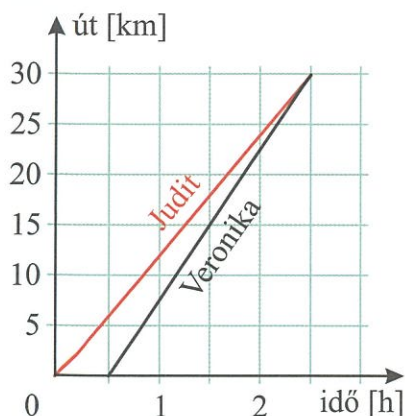
Mindketten ugyanakkora utat tettek meg:

$$\begin{aligned} 12x &= 15(x - 0,5) \\ 4x &= 5(x - 0,5) \\ 4x &= 5x - 2,5 \\ x &= 2,5 \end{aligned}$$

Ellenőrzés

Veronika félórával rövidebb ideig, vagyis 2 óráig kerékpározott, ezalatt $(15 \cdot 2 =)$ 30 km-t tett meg. Tehát Judit 2,5 óra hosszat kerékpározott, ezalatt $(12 \cdot 2,5 =)$ 30 km utat tett meg. Szob és Kemence távolsága 30 km.

Grafikus megoldás



Pirossal rajzoltuk Judit mozgásgrafikonját, feketével Veronikáét. A grafikonról leolvasható Kemence és Szob távolsága, a 30 km, és az is, hogy Veronika 2 órát, Judit 2,5 órát haladt, míg Kemencéről Szobra ért.

Megoldás következtetéssel

Fél óra alatt Judit 6 km-t tett meg, tehát Veronika indulásakor Juditnak 6 km előnye volt. Mivel óránként 3 km-rel csökken Judit előnye, ezért a 6 km előny 2 óra alatt fogy el.

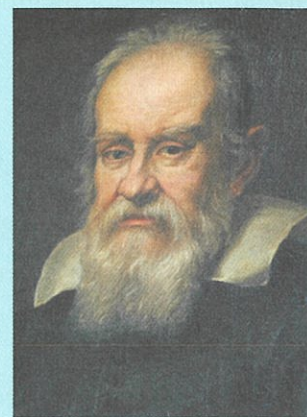
Veronika tehát 2 órát kerékpározott, és ezalatt $2 \cdot 15 = 30$ km-t tett meg. A két helység távolsága 30 km.

Galileo Galilei 1628-ban javasolta, és később elvégezte a következő kísérletet, amellyel a fény sebességét próbálta mérni:

„Két ember áll két hegycsúcson. Mindkettőnél eltakart fényű lámpa van. Amikor az egyik ember kitakarja a lámpáját, akkor abban a pillanatban, amint ezt észreveszi, a másik embernek is ki kell takarnia a lámpáját.”

Egy harmadik ember áll az első mellett, és méri, hogy mennyi idő telik el az első és második lámpa felvillanása között.

Ismételt kísérletek sem vezettek eredményre, csak annyit tudtak megállapítani, hogy a fény legalább 10-szer gyorsabb a hangnál.



2. példa

Tegyük fel, hogy Galilei kísérletében minden tökéletesen sikerült. A két lámpás ember 2 km-re áll egymástól, és egy harmadik az első mellett állva nagyon pontosan tudja mérni az időt.

Mi már tudjuk, hogy a fény sebessége jó közelítéssel $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, ennek ismeretében számítsuk ki, mekkora időkülönbséget kellett volna a harmadik embernek észlelnie.

Megoldás

Az 1. felvillanás fénye a 2. megfigyelőig 2 km-t tett meg, ehhez $\frac{2}{300\,000}$ s idő szükséges. Ideális esetben rögtön felvillant volna a 2. lámpa, amelynek a fénye újra megtette ugyanazt a 2 km-t a megfigyelőig, ez újabb $\frac{2}{300\,000}$ s időt vett igénybe.

Ez összesen $\frac{4}{300\,000}$ s = $\frac{1}{75\,000}$ s = 0,000 013 s lett volna.

Azaz körülbelül a másodperc százvezred részével megegyező időtartamot kellett volna mérni, ami természetesen lehetetlen volt.

3. példa

Feriék kirándulni mentek. 3 óra alatt jutottak fel a kilátóhoz. Lefelé gyorsabban jöttek, sebességük $0,7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val nagyobb volt, mint fölfelé, így 2,5 óra alatt értek le.

Milyen messze volt Feriék indulási helyétől a kilátó, és milyen sebességgel haladtak fölfelé, illetve lefelé menet?

Megoldás egyenlettel

Az adatokat ismét táblázatba foglaljuk. Azt a sebességet jelöljük x -szel, amellyel fölfelé haladtak.

	Sebesség $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$	Idő [h]	Út [km]
Fölfelé	x	3	$3x$
Lefelé	$x + 0,7$	2,5	$2,5(x + 0,7)$

Az odafelé, illetve a visszafelé megtett utak megegyeznek egymással, ennek alapján írhatjuk fel az egyenletet:

$$\begin{aligned}
 3x &= 2,5(x + 0,7) \\
 3x &= 2,5x + 2,5 \cdot 0,7 \\
 0,5x &= 2,5 \cdot 0,7 \\
 x &= \frac{2,5 \cdot 0,7}{0,5} = 5 \cdot 0,7 \\
 x &= 3,5
 \end{aligned}$$

Ellenőrzés

Felfelé ($3,5 \cdot 3 =$) 10,5 km utat tettek meg. Visszafelé ($3,5 + 0,7 =$) $4,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel mentek, útjuk ekkor is ($4,2 \cdot 2,5 =$) 10,5 km.

Tehát felfelé $3,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladtak, lefelé ($3,5 + 0,7 =$) $4,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. A kilátó 10,5 km-re volt az indulási helytől.

Feladatok

1. Az adatok egy-egy állat, illetve az ember csúcsteljesítményeiről szólnak. Futóversenyen vagy menekülés közben mért adatokat találsz a táblázatban. Írd a füzetedbe a hiányzó adatokat!

	Zsiráf	Kerti csiga	Házi sertés	Oroszlán	Kenguru	Egér	Zebra	Mókus
Távolság	102 km	2 m	3 km	60 km		2160 m	8 km	5 km
Idő [perc]		3		45	5	10		15
Sebesség $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$	51		18		48		64	

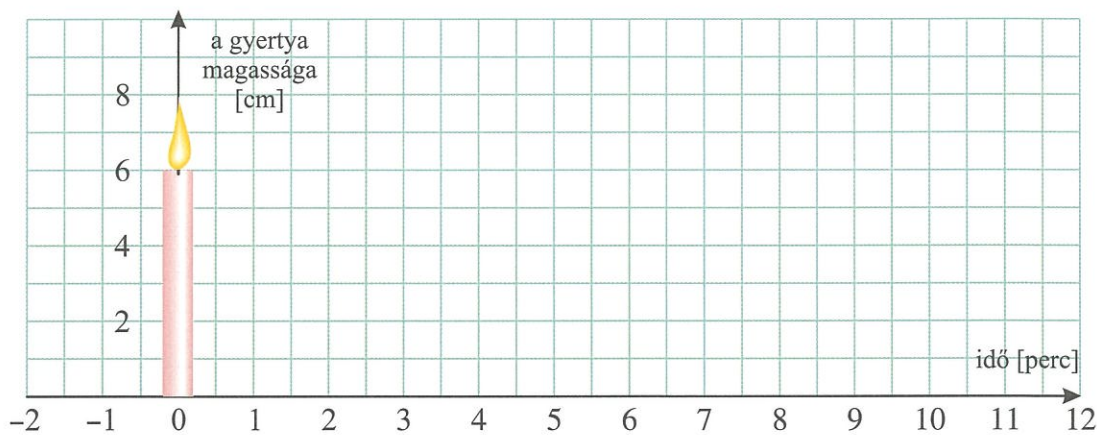
Fajta	Sólyom	Elefánt	Ember	Nyúl	Csirke	Óriás teknős
Távolság		10 km	25 m	7 km		90 m
Idő	34 perc	$\frac{1}{4}$ óra	2 s	7,5 perc	20 perc	
Sebesség $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$	280				13,5	0,27

Állítsd sorba az élőlényeket sebességük szerint!

Látsz-e összefüggést az állatok sebessége és mérete között?

2. Kati és Éva 800 méterre laknak egymástól. Kati átlagosan 45 métert, Éva 55 métert tesz meg percenként. Hány perc múlva találkoznak, ha egyszerre indulnak el egymás felé?

3. Két, egymástól 14 km távolságra fekvő faluból egy időben indul el egymással szemben két gyerek, az egyik gyalog $4,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másik kerékpáron $16,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt. Az indulásuk után hány perc múlva találkoztak, és ekkor mekkora távolságra voltak a két falutól?
4. Egy faluból két gyalogos ment a városba. Az egyik egy órával előbb indult, és egy órával később érkezett a városba, mint a másik. Az első óránként 4 km-t, a másik pedig óránként 6 km-t haladt. Milyen messze van a falu a várostól?
5. Egy állomásról egymás után két óra különbséggel két vonat indul. Az első óránként 48, a második óránként 60 km-t halad. Hány óra múlva éri utol a második vonat az elsőt?
6. A Sopron és Tatabánya közötti utat $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 20 perccel több idő alatt lehet megtenni, mint $84 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Milyen hosszú a két város közötti út?
7. Egy fél cm átmérőjű gyertya égését figyeltük. A megfigyelést akkor kezdtük, amikor egy 6 cm-es darab volt a gyertyából. A gyertya egyenletesen, 12 perc alatt égett le. Percenként hány milliméterrel lett rövidebb?



Készíts a füzetedben rajzot a gyertya hosszának változásáról!

- a) Mikorra lett feleakkora a gyertya, mint a megfigyelés kezdetén (0 perckor) volt?
- b) Mikorra lett a gyertyacsonk 2 cm-es?
- c) 1 perc alatt hány cm ég le a gyertyából?
- d) Hány perc alatt csökken a gyertya magassága 1 cm-t?
- e) Milyen magas volt a gyertya a megfigyelés előtt 5 perccel?
- f) Mekkora lehetett eredetileg a gyertya, ha a megfigyelés előtt 10 perccel gyújtottuk meg?

8. Két gyertyánk van. Ha meggyújtjuk őket, egyenletes sebességgel fogynak.

Az egyik 15 cm hosszú és $2\frac{1}{2}$ óra alatt ég le.

A másik 25 cm hosszú és 50 perc alatt ég le.

- a) Mikor lesznek egyenlő hosszúak, ha egyszerre gyújtjuk meg a két gyertyát?
- b) Mikor lesznek egyenlő hosszúak, ha a hosszabb gyertyát 1 órával később gyújtjuk meg?
- c) Mikor gyújtjuk meg a hosszabb gyertyát, ha azt akarjuk, hogy egyszerre égjenek le?