

9. Két motorkerékpáros egy időben indult el kirándulni. Egyenlő távolságot tettek meg, és egy időben is érkeztek haza. Az úton mindketten megpihentek. Annyit tudunk, hogy az egyik kétszer annyi ideig volt úton, mint amennyit a másik pihent, a másik pedig háromszor annyit volt úton, mint amennyit az első pihent. Melyik haladt gyorsabban?

(Korgyemskij: Matematikai fejtörők)

Munkavégzéssel kapcsolatos feladatok

1. példa

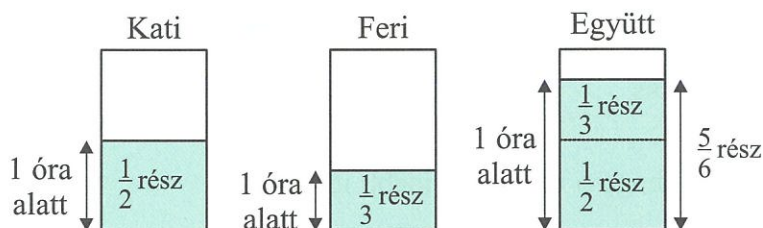
A nyári táborban paprikás krumpli készül. Katit és Ferit bízzák meg a krumpli hámozásával. Kati egyedül 2 óra alatt, Feri egyedül 3 óra alatt készülne el a munkával. Mennyi idő alatt lesznek készen, ha együtt dolgoznak?

Megoldás

Becslés

Biztos, hogy ketten együtt 2 óránál rövidebb idő alatt végeznek.

Készítsünk ábrát!



Megoldás következtetéssel

A teljes mennyiségnek

1 óra alatt Kati $\frac{1}{2}$ részét,

1 óra alatt Feri $\frac{1}{3}$ részét hámozza meg.

1 óra alatt együtt $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ részét hámozzák meg.

1 óra alatt $\frac{5}{6}$ rész készül el.

Hány óra alatt készül el **1 egész rész**, azaz a teljes munka?

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ óra} & & \frac{5}{6} \text{ rész} \\ \downarrow & \cdot \frac{6}{5} & \downarrow \\ ? \text{ óra} & & 1 \text{ rész} \end{array}$$

$$? = \frac{6}{5} \text{ óra} = 1 \text{ óra és } 12 \text{ perc}$$

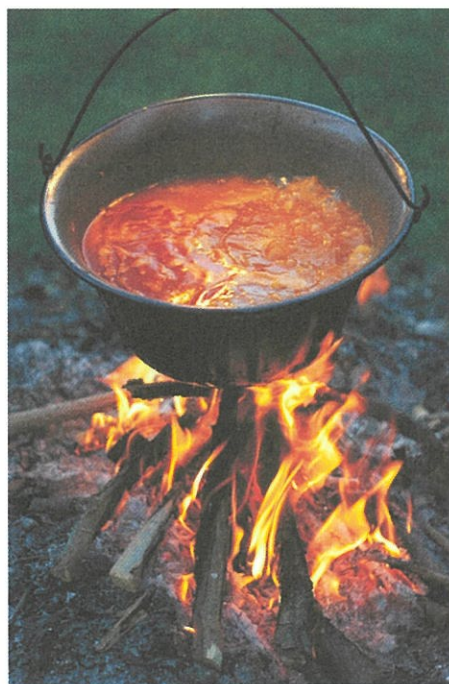
Ellenőrzés

Kati $\frac{6}{5}$ óra alatt $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{10}$ részét végzi el a munkának.

Feri $\frac{6}{5}$ óra alatt $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{15}$ részét végzi el a munkának.

Együtt $\frac{6}{5}$ óra alatt $\frac{6}{10} + \frac{6}{15} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$ részét, azaz az egész munkát elvégzik.

Tehát összesen $\frac{6}{5}$ óra = 1 óra 12 perc kell a munka elvégzésére.



Megoldás egyenlettel

Tegyük fel, hogy ketten együtt x óra alatt lesznek készen a munkával. Vegyük 1 egységnek az elvégzendő munka mennyiségét!

Rendezzük el az adatokat táblázatban!

	Kati	Feri
Hány óra alatt végez?	2	3
1 óra alatt végzett munka:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
x óra alatt végzett munka:	$x \cdot \frac{1}{2}$	$x \cdot \frac{1}{3}$

Együtt x óra alatt végzik el az egész munkát.

$$\begin{aligned}
 x \cdot \frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{3} &= 1 \\
 \frac{x}{2} + \frac{x}{3} &= 1 \\
 \frac{5x}{6} &= 1 \\
 x &= 1 : \frac{5}{6} = \frac{6}{5}
 \end{aligned}$$

2. példa

Egy medencét több csapból is lehet tölteni. Az első csapból 5 óra alatt telik meg a medence, a másodikból 7 óra alatt. Mennyi idő alatt telhet meg a medence, ha mindkét csapot egyszerre nyitjuk ki?

Megoldás

Becslés

Biztos, hogy 5 óránál rövidebb idő alatt.

Megoldás következtetéssel

Az 1. csap 1 óra alatt $\frac{1}{5}$ medencét tölt meg. A 2. csap 1 óra alatt $\frac{1}{7}$ medencét tölt meg, a két csap együtt 1 óra alatt $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{5}{35} + \frac{7}{35} = \frac{12}{35}$ medencét tölt meg. Ez a teljes medencében $1 : \frac{12}{35} = \frac{35}{12}$ -szer van meg. Tehát $\frac{35}{12}$ óra alatt telik meg a medence. Ez 5 perc híján 3 óra.

Megoldás egyenlettel

Legyen x a feltöltéshez szükséges idő, ha mindkét csap nyitva van.

Az 1. csap x óra alatt $\frac{x}{5}$ medencét, a 2. csap x óra alatt $\frac{x}{7}$ medencét.

A két csap együtt x óra alatt a teljes medencét megtölti, ezért

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{5} + \frac{x}{7} &= 1 \\
 7x + 5x &= 35 \\
 12x &= 35 \\
 x &= \frac{35}{12}
 \end{aligned}$$

Ellenőrzés

Az 1. csap $\frac{35}{12}$ ötöd részét: $\frac{7}{12}$ részt tölt meg vízzel.

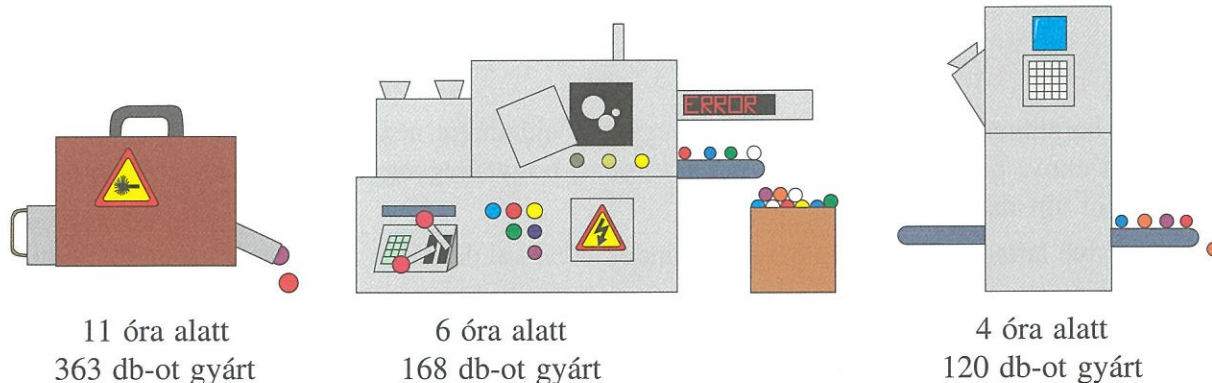
A 2. csap $\frac{35}{12}$ heted részét: $\frac{5}{12}$ részt tölt meg vízzel.

Együtt $\frac{7}{12}$ részt + $\frac{5}{12}$ részt = $\frac{12}{12}$ részt töltenek meg, ami valóban az egész medence.

Tehát a két csap együtt $\frac{35}{12}$ óra, vagyis 2 óra 55 perc alatt tölti meg a medencét.

Feladatok

1. Jancsi 3 óra alatt, Kati 6 óra alatt takarítja ki a lakást. Mennyi idő alatt végeznek a munkával, ha együtt dolgoznak?
2. A mindenízű drazsét gyártó vállalkozás kezdetben egyetlen géppel dolgozott. A termék annyira népszerű lett, hogy hamarosan egy második, modernebb, majd rövid idő múlva egy harmadik, csúcssuper gépet is beindítottak. Mindegyik gépről közlünk egy-egy adatot. Találd ki, hogy melyik gép dolgozott először, melyik a modernebb, és melyik a csúcssuper!



A három gép naponta 13 óra hosszat együtt dolgozik. Egy nap alatt hány szem drazsé készül?

3. Gondos Géza, Ügyes Béla, Beleváló Józsi és Szorgos Ádám jó barátok. Ugyanakkora földet művelnek mind a négyen. Április 12-én is kinn voltak mindannyian a határban.

Gondos Géza 6 órát töltött munkával a földjén, és így a föld $\frac{1}{5}$ -én végezte el a tavaszi talaj-előkészítést. Ügyes Béla 5 órát töltött kinn, és a földje $\frac{1}{4}$ -ével végzett. Beleváló Józsi 4 óra alatt földje $\frac{1}{5}$ -ével készült el, Szorgos Ádám 8 órát dolgozott és a földje $\frac{1}{3}$ -át művelte meg ezalatt.

- a) Melyikük művelte meg 1 óra alatt a legnagyobb földterületet?
- b) Hány óra alatt végeznek az egyes gazdák a földjükkel?
- c) Egy földdarabot a négy ember együtt mennyi idő alatt művelne meg?

4. Két munkás üvegkancsókat fűj. Az első három óra alatt 8 kancsót készít, míg a másik 6 óra alatt végez ugyanennyivel. Hány óra alatt készítenek el 8 kancsót ketten együtt?
5. A medencét az egyik cső 54 perc alatt, a másik 1 óra 48 perc alatt tölti meg. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha mind a két cső nyitva van?
6. Egy lakás parkettázásával az egyik munkás 40 óra alatt, a másik 48 óra alatt, a harmadik 60 óra alatt lenne készen. Hány óra alatt lesznek készen a munkával együtt?
7. Egy tartályba 3 csapon át folyhat a víz. Ha egy-egy csap van nyitva, a tartály 1 óra, 2 óra, illetve 3 óra alatt telik meg. Mi történik, ha mindhárom csapot kinyitjuk?

8. Feri a kertjüket 8 óra alatt tudja felásni, míg a bátyja 6 óra alatt végez ugyanezzel a munkával. Egy alkalommal ketten fogtak az ásáshoz, s két órát dolgoztak együtt, majd Feri egyedül folytatta a munkát, és be is fejezte. Hány órát ásott Feri?



9. Egy tartályba egy kék, egy piros és egy zöld csapon át engedhetünk vizet.

A piros csap egyedül 3 óra alatt tölti meg a tartályt.

A piros és kék csap együtt 2 óra alatt, a három csap együttesen pedig 1 óra alatt tölti meg a tartályt.

Külön-külön hány óra alatt töltik meg ezek a csapok a tartályt?

Százalékszámítással kapcsolatos feladatok

1. példa

Anikó a barátainak, Katinak és Csabának egy-egy ajándékot nézett ki összesen 1200 Ft-ért, de nem volt nála ennyi pénz. A következő héten elment, hogy megvegye a kiszemelt ajándékokat. Éppen 1200 Ft-ot vitt magával.

Meglepődve látta, hogy a Katinak szánt ajándék 20%-kal drágább, a Csabáé viszont 10%-kal olcsóbb lett.

Anikó az új árak mellett is meg tudta venni az ajándékokat. Mennyibe kerülhettek eredetileg a kiválasztott meglepetések?

Megoldás

Kati ajándéka eredetileg	k Ft
Csaba ajándéka eredetileg	$1200 - k$ Ft
Kati ajándékának új ára	$k \cdot 1,2$ Ft
Csaba ajándékának új ára	$(1200 - k) \cdot 0,9$ Ft
A kétféle ajándék ára összesen	$k \cdot 1,2 + (1200 - k) \cdot 0,9$ Ft
Anikó pénze	1200 Ft
A vásárlás feltétele	$k \cdot 1,2 + (1200 - k) \cdot 0,9 \leq 1200$ $1,2k + 1080 - 0,9k \leq 1200$ $0,3k \leq 120$ $k \leq 400$

Kati ajándéka eredetileg legfeljebb 400 Ft volt, ami azt jelenti, hogy Csaba ajándéka legalább 800 Ft-ba került.

2. példa

Az egyik barkácsáruházban egy import padlócsempe árát 20%-kal leszállították. Néhány hónap múlva újabb 30%-os árleszállítással akciót hirdettek a csempeire.

Egy kereskedő ekkor a teljes készletet felvásárolta és elraktározta. Egy év múlva ugyanazt a csempét az eredeti áron értékesítette.

Hány %-kal drágábban árulta a kereskedő a csempét, mint ahogyan megvette?

Megoldás

A termék eredeti ára

A

Az 1. ár 20%-os árleszállítás után az eredeti ár 80%-a:

$$A - A \cdot \frac{20}{100} = A \cdot \frac{80}{100}$$

A 2. ár a 30%-os árleszállítás után az előző ár 70%-a:

$$A \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{70}{100} = A \cdot \frac{56}{100}$$

A 3., végső ár a második ár x százaléka:

$$A \cdot \frac{56}{100} \cdot \frac{x}{100}$$

A 3. ár épp az eredeti árral egyenlő:

$$A \cdot \frac{56}{100} \cdot \frac{x}{100} = A$$

Osszuk el mindkét oldalt A -val:

$$\frac{56}{100} \cdot \frac{x}{100} = 1$$

$$x = 1 : \frac{56}{100} \cdot 100 = \frac{10\,000}{56} \approx 178,5$$

Ellenőrzés

Legyen az eredeti ár

A Ft

Az első új ár ennek 80%-a

$A \cdot 0,8$

A második új ár az első új ár 70%-a

$A \cdot 0,8 \cdot 0,7$

Ennek 178%-a

$A \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot 1,78 \approx A \cdot 1 = A$

Ez azt jelenti, hogy a kereskedő 78%-kal drágábban árulta a csempét, mint ahogyan megvásárolta.

Feladatok

1. Melyik feladatban adták meg a 100%-ot, és melyikben kell azt neked kiszámítanod?

a) Mennyi 225-nek a 15 százaléka?

b) Melyik számnak a 15%-a a 34,15?

c) Hány százaléka 125-nek a 213?

d) Hány százaléka 52 a 130-nak?

e) A 13 hány százaléka a 85-nek?

f) A 22 a 100-nak hány százaléka?

g) A 22-nek hány százaléka a 100?

h) Melyik számnak a 22%-a a 100?

Az a)–e) feladatok mindegyikében jelöld x -szel az ismeretlent! Írj a feladatokról egy-egy egyenletet!

Nem kell megoldanod, elég ha megbecsülöd!

2. Csizmás Kandúr csizmát vásárol szезonvégi kiárusításban, az eredeti árnál 42%-kal olcsóbban. Melyek azok az egyenletek, amelyek megadják, hogy mennyit kell fizetni a csizmaért?

Az eredeti ár 14 000 Ft volt.

a) $14\,000 \cdot \frac{58}{100} = x$

b) $14\,000 - \frac{42}{100} = x$

c) $14\,000 \cdot 0,42 = x$

d) $14\,000 : 100 \cdot 42 = x$

e) $14\,000 - 14\,000 \cdot 0,42 = x$

f) $14\,000 - 14\,000 \cdot 0,58 = x$

- 3.** Hány százalékos volt az árleszállítás, ha 680 Ft helyett 430 Ft-ért vettünk egy labdát?
Válaszd ki azt az egyenletet, amelyben x a kérdésre válaszol!

a) $680 - x \cdot 680 = 430$

b) $680 - \frac{x}{100} \cdot 680 = 430$

c) $680 \cdot \frac{x}{100} = 430$

d) $430 \cdot \frac{x}{100} = 680$

e) $430 : \frac{680}{100} = x$

f) $680 \left(\frac{100 - x}{100} \right) = 430$

g) $x = \frac{430 \cdot 100}{680}$

- 4.** Mennyi volt Nóra fizetése januárban, ha a februári 30%-os fizetésemelés után 169 000 Ft lett?
Válaszd ki azokat az egyenleteket, amelyek megadják Nóra januári fizetését!

a) $169\,000 \cdot \frac{130}{100} = x$

b) $\frac{x \cdot 130}{100} = 169\,000$

c) $169\,000 : 1,3 = x$

d) $x + 0,3x = 169\,000$

e) $x + 1,3x = 169\,000$

f) $x \cdot 1,3 = 169\,000$

g) $x \cdot \frac{30}{100} = 169\,000$

- 5.** Háromnapos gyalogtúránk első napján az út $\frac{2}{5}$ részét, a második napon a hátralévő út felét tettük meg. Az utolsó napon 15 km-t gyalogoltunk.

a) A teljes út hány százalékát tettük meg az első, a második, illetve a harmadik napon?

b) Hány kilométer volt a teljes túra útvonala?

- 6.** A Semmiresejő Bt. háromféle terméket forgalmaz: kütyüt, ketyerét és mütyürt, 100, 200, illetve 300 petákért darabját. Gyereknep előtt minden termék árát 30%-kal felemelték.

Egy hónap múlva minden cikket kiárusítottak 40%-kal olcsóbban. Az eredeti árhoz képest áremelést vagy árleszállítást jelentett ez? Hány százalékos?

- 7.** Egy árucikk árán kétszer változtattak.

Dönts el, hogy ez végül áremelést vagy árcsökkentést eredményezett-e, és hány százalékos!
A füzeteden dolgozz!

Első árváltoztatás	Második árváltoztatás	Ennyi %-kal emelkedett vagy csökkent az eredeti ár
30%-os emelés	10%-os emelés	
50%-os emelés	20%-os emelés	
10%-os csökkentés	10%-os emelés	
40%-os emelés	50%-os csökkentés	
40%-os emelés	30%-os csökkentés	

- 8.** A téli vásár alkalmával egy család kétféle ingből összesen 8 darabot vásárolt. Az egyik fajtaból 40%-os, a másik fajtaból 28%-os volt az árkedvezmény. Az utóbbiból egy ingért 2592 Ft-ot, a másik fajta ing darabjáért 2040 Ft-ot, összesen 19 080 Ft-ot fizettek.

Mennyit takarított meg a család azzal, hogy a téli vásárcor vette meg az ingeket?

Keveréses feladatok

1. példa

Kétféle kávéból 50 kg 3000 Ft egységárú keveréket akarunk készíteni. Az első fajta kilogrammja 2500 Ft, a második fajta 3300 Ft. Hány kilogrammot vegyünk az egyes fajtákból?

Megoldás

Becslés

A keverék egységára közelebb van a 3300 Ft-hoz, mint a 2500-hoz, ez azt jelenti, hogy a 3300 Ft-os kávéból kell többet venni, vagyis ebből több, mint 25 kg-ot kell felhasználnunk a keverék előállításához.

Megoldás egyenlettel

Jelöljük az első fajta kávé mennyiségét x -szel (kilogrammban)! Rendezzük el az adatokat táblázatban!

	Mennyiség [kg]	Egységár [Ft/kg]	Ár [Ft]
I. fajta	x	2500	$2500x$
II. fajta	$50 - x$	3300	$3300(50 - x)$
Keverék	50	3000	$3000 \cdot 50$

A keverék ára megegyezik a két ár összegével: $2500x + 3300(50 - x) = 3000 \cdot 50$

$$25x + 33(50 - x) = 30 \cdot 50$$

$$25x + 1650 - 33x = 1500$$

$$1650 - 8x = 1500$$

$$8x = 150$$

$$x = \frac{150}{8}$$

$$x = 18,75$$

Ellenőrzés

Az olcsóbb kávéból 18,75 kg-ot tettünk a keverékbe, ennek értéke $18,75 \cdot 2500 = 46\,875$ Ft.

A drágább kávéból 31,25 kg-ot tettünk a keverékbe, ennek értéke $31,25 \cdot 3300 = 103\,125$ Ft.

Az együttes tömeg így valóban 50 kg, és az együttes ár valóban 150 000 Ft.

A 2500 Ft-os kávéból 18,75 kg-ot, a másik fajtából 31,25 kg-ot kell vennünk.

2. példa

5 kilogramm 80%-os oldathoz hány kilogramm 50%-os oldatot öntsünk, ha 60%-os oldatra van szükségünk?

Megoldás

Becslés

A keverék töménysége az 50%-hoz van közelebb, tehát az 50%-os oldatból 5 kilogrammnál többet kell venni.

Megoldás egyenlettel

x -szel jelöljük az 50%-os oldat tömegét. Az adatokat ismét foglaljuk táblázatba!

Megoldás

	Tömeg [kg]	Töménység [tömegszázalék]	Oldott anyag tömege [kg]
I. fajta	5	80	$5 \cdot 0,80$
II. fajta	x	50	$x \cdot 0,50$
Keverék	$5 + x$	60	$(5 + x) \cdot 0,60$

A keverékben annyi oldott anyag van, amennyi a két összetevőben együtt. Ennek alapján írhatjuk fel az egyenletet:

$$5 \cdot 0,8 + x \cdot 0,5 = (5 + x) \cdot 0,6$$

$$4 + 0,5x = 3 + 0,6x$$

$$1 = 0,1x$$

$$x = 10$$

Ellenőrzés

5 kg 80%-os oldatban 4 kg oldott anyag van.

10 kg 50%-os oldatban 5 kg az oldott anyag.

Ha ezeket összeöntjük, 15 kg oldatot kapunk, amiben 9 kg oldott anyag van. $15 \cdot 0,6 = 9$, így az oldat 60%-os.

Az 50%-os oldatból 10 kilogrammot kell vennünk.

Feladatok

- Kétféle kávéből 240 kg-ot kevernek össze: a jobb minőségűből 2330 Ft 1 kg ára, a másik fajtából 1270 Ft. A keveréket $1800 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ -os áron akarják eladni. Hány kilogramm kávé használjanak fel a keverékhez az egyik, és mennyit a másik fajtából?
- Mennyi vizet kell a 320 gramm 10%-os rézgálicoldathoz tölteni, hogy a keverék 4,5%-os legyen?
- 110 gramm 80%-os alkoholhoz 90 gramm vizet adunk. Hány százalékos alkoholt kapunk?
- 220 gramm 12%-os cukoroldathoz 80 gramm vizet öntünk. Hány százalékos oldatot kapunk?
- Fél kilogramm 70%-os gyümölcszörpöt vásároltunk.
 - Mennyi valódi gyümölcslét tartalmaz ez?
 - Felhígítottuk vízzel úgy, hogy 20%-os töménységű legyen. Mennyi vizet töltöttünk hozzá?
- Hány kilogramm vizet kell elpárologtatni ahhoz, hogy 8 kg 30% sót tartalmazó oldatból 50%-os oldatot kapjunk?
- 100 gramm 15%-os töménységű oldathoz 25 gramm vizet öntünk. Hány százalékos oldatot kapunk?
- Ugyanannak a savnak 8 liter 45%-os és 4 liter 60%-os oldatát összekeverjük, hány százalékos oldatot kapunk?

Tudáspróba

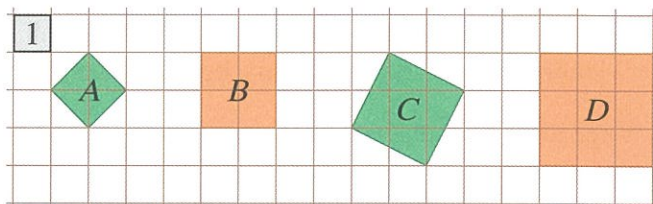
- 3 kg almát x Ft-ért vásárolunk. A körte kilója 20 Ft-tal drágább, mint az almáé.
Írj képletet, ami megadja,
 - mennyibe kerül 10 kg alma,
 - mennyibe kerül 10 kg körte,
 - mennyit kell fizetni, ha 12 kg almát és 9 kg körtét veszünk!
 - 6 kg körtét és valamennyi almát vásároltunk. Összesen 1200 Ft-ot fizettünk. Írj képletet, ami megmondja azt, hogy hány kg almát vettünk!
- Végezd el a lehetséges összevonásokat!
 - $a + a^2 - 5,5a$
 - $ab^2 - 2ab + 5,1ab^2 + a^2b$
 - $\frac{1}{2}x - \frac{5}{3}y + \frac{2x}{3} + \frac{y}{6} + 2$
- Ahol szükséges, bontsd fel a zárójeleket, és végezd el az összevonásokat!
 - $5(2a - 3b) - (8a - b)$
 - $3x(x - y) - 2xy + (xy - y^2)$
 - $\frac{2x}{3} + \frac{x - 2}{2} + \frac{3x + 1}{6}$
- Oldd meg az egyenleteket!
 - $3(x - 4) - (5 - 2x) = 5(2x - 1) - 27$
 - $-2x + \frac{x - 5}{4} = x + \frac{3}{2}$
 - $3x - \frac{3x - 9}{4} = 9$
- Állítsd növekedő sorrendbe az alábbi értékeket!
 $A = 5^2 \cdot 2^7$ $B = 2^2 \cdot 5^3$ $C = (2^2 \cdot 5)^3$ $D = 10^5$ $E = \frac{10^8}{10^2}$
- A nyári táborban 17 faházikó állt. Mindegyik 4 vagy 6 ágyas volt. Összesen 86 gyereket tudtak a faházakban elhelyezni. Hány ház volt 4 ágyas, és hányban volt 6 fekvőhely?
- Írd fel a szorzatokat összeg alakban, az összegeket pedig szorzat alakban!
 - $3x + 21$
 - $a^2 - ab$
 - $15ab + 9b^2$
 - $2y(3x + 3y)$
 - $6xy - 6y^2 + y$
 - $2x(3xy - y^2 + 5)$
- Egy áruházban egy kiárúsítás alkalmával minden ruházati cikk árát 50%-kal leszállították. Két hét elteltével az árakat 50%-kal felemelték.
 - Hogyan változott a hátizsák ára, ami eredetileg 5200 Ft-ba került?
 - A kétszeres árváltoztatás emelést vagy csökkentést jelent az eredeti árhoz képest? Hány százalékkal változott az eredeti ár?
- Egy külföldi gyár Magyarországról műszereket rendelt. Ezek elkészítését az egyik gyár 4 hónapra, a másik 6 hónapra vállalta. A megrendelő kérésére a két gyár együttesen készítette el a műszereket. Hány hónap múlva készültek el így a munkával?

Négyzetgyök, Pitagorasz-tétel

A négyzetgyök fogalma

1. példa

Határozzuk meg a négyzetek területét! A területmérés egysége: $\boxed{1}$. A területekből 1 tizedesjegy pontossággal határozzuk meg a négyzetek oldalának hosszát!



Megoldás

A **narancssárga négyzetek** területei **egész számok négyzetei**, azaz **négyzetszámok**, ezért az ábrán is le tudjuk olvasni az oldalaik hosszát:

$t_B = 2^2 = 4$ területegység, az oldal hossza: 2 hosszúságegység.

$t_D = 3^2 = 9$ területegység, az oldal hossza: 3 hosszúságegység.

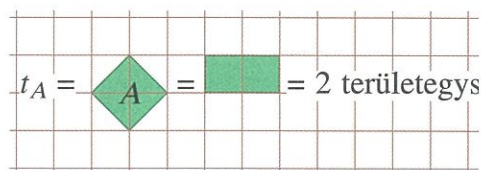
A négyzet területét az oldalából **négyzetre emeléssel** tudjuk kiszámítani. A négyzet oldalát a területtől egy **új művelettel, négyzetgyökvonással** tudjuk meghatározni. Például ebben a feladatban: a számot keressük, amelyet négyzetre emelve 9-et kapunk. A keresett szám a 9 négyzetgyöke, a 3-mal egyenlő.

A **zöld négyzetek** területe ugyan egész szám, de az oldalaik hossza nem az. Így mérésel vagy becsléssel tudjuk csak megadni azokat.

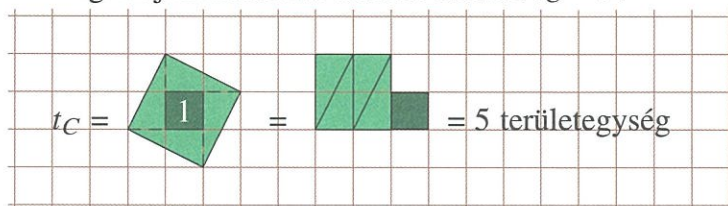
Az A négyzet területét meg tudjuk határozni átdarabolással: $t_A = 2$.

Az oldal hossza 1 tizedesjegy pontossággal 1,4 egység, mert $1,4^2 = 1,96 \approx 2$.

A 2 egység területű négyzet oldalának a hosszát négyzetgyök 2-nek nevezzük, és így jelöljük: $\sqrt{2}$.



A C négyzet területét is meg tudjuk határozni átdarabolással: $t_C = 5$.



Az oldal hossza 1 tizedesjegy pontossággal (tizedekre kerekítve) 2,2 egység, mert $2,2^2 = 4,84 \approx 5$.

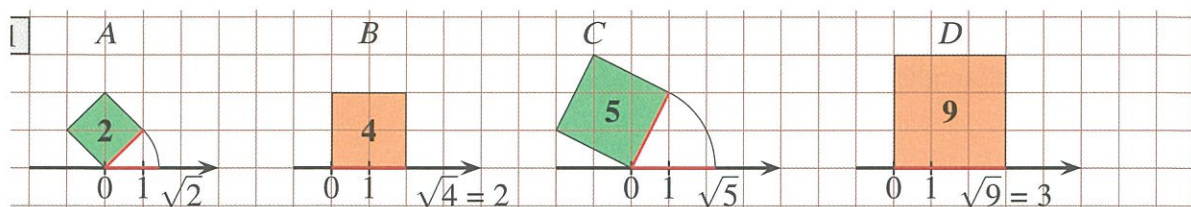
Az 5 egység területű négyzet oldalának hosszát négyzetgyök 5-nek nevezzük, és így jelöljük: $\sqrt{5}$.

2. példa

Jelöljük meg a $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ és a $\sqrt{9}$ számok helyét a számegyenesen!

[egoldás

2, 4, 5, illetve 9 egység területű négyzetek segítségével jelölhetjük meg a kért számok helyét számegyenesen, az ábrán látható módon:



számegyenesről is leolvasható, hogy $\sqrt{2} \approx 1,4$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5} \approx 2,2$, $\sqrt{9} = 3$.

példa

djuk meg a $\sqrt{2}$ -t három tizedesjegy pontossággal, közelítő értékek segítségével!

egoldás

$$\begin{array}{lll} \sqrt{2} \approx 1,4, & \text{mert} & 1,4^2(= 1,96) < 2 < 1,5^2(= 2,25) \\ \sqrt{2} \approx 1,41, & \text{mert} & 1,41^2(= 1,988) < 2 < 1,42^2(= 2,016) \\ \sqrt{2} \approx 1,414, & \text{mert} & 1,414^2(= 1,999\ 396) < 2 < 1,415^2(= 2,002\ 225) \end{array}$$

két közelítő érték közül mindig azt választjuk, amelyiknek a négyzete még éppen kisebb 2-nél. Ezt az eljárást folytatva egyre közelebb jutunk a 2-höz.

zsebszámológép kijelzőjén az első 11 tizedesjegyet láthatjuk. Számítógép gíttségével nagyon sok tizedesjegyet meg tudjuk határozni.



$\sqrt{2}$ a szám, amelynek négyzete 2, azaz a $\sqrt{2}$, sem nem egész szám, sem nem törtszám. A tizedes alakja végtelen nem szakaszos, azaz nem racionális szám. A végtelen nem szakaszos tizedeseket irracionális számoknak nevezzük. Számításainkban a $\sqrt{2}$ -nek mindig valamilyen közelítő értékével dolgozunk.

Mezopotámia régi nagyságáról a XIX. század második felében megindult, és a mai napig is tartó régészeti ásatások tanúskodnak. A felszínre hozott leletek között van több tízezer ékírással szöveget tartalmazó égetett agyagtábla. A legrégebbi táblák Kr. e. 2100 tájáról azt tanúsítják, hogy az itt élő nép igen ügyesen számolt. Tíz-es számrendszeren alapuló hatvanas számrendszert használtak, és már a helyi érték fogalmát is ismerték. A számolás megkönnyítésére szorzótáblákat használtak. Voltak négyzet- és köb-, valamint **négyzetgyöktáblázataik**. Az ókorban Babilon több, mint egy évezredig Mezopotámia tudományos központja volt. A babiloni matematika nagy hatást gyakorolt a hindu, a görög és a későbbi arab matematikára.

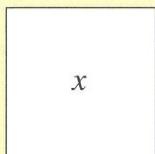
Ezen a babiloni agyagtáblán egy négyzetet látunk. A **négyzet át-
óján lévő felirat a 2 négyzetgyökét ábrázolja** négy 60-as szám-
rendszerű számjeggyel.

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1,414\,212\,2$$

Az első öt tizedesjegye megegyezik a számológép kijelzőjén látható értékkel!



(Sain Márton: Nincs királyi út! Gondolat Könyvkiadó, 1986)



Jelöljük x -szel a négyzet területét! Az x szám négyzetgyökén az x egység területű négyzet oldalának hosszát értjük, ezt $\sqrt{x}$ -szel jelöljük. Más szóval: $\sqrt{x}$ azt a nemnegatív számot jelenti, amelynek a négyzete x .

Ez azt is jelenti, hogy $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x$.

Megállapodás szerint $\sqrt{0} = 0$.

4. példa

Határozzuk meg az alábbi számok négyzetgyökét!

0 1 16 25 $\frac{1}{9}$ $\frac{4}{25}$ 1,44 0,01 -4 $(-5)^2$ -4^2

Megoldás

$$\sqrt{0} = 0, \text{ mert } 0 \cdot 0 = 0^2 = 0.$$

$$\sqrt{16} = 4, \text{ mert } 4 \cdot 4 = 4^2 = 16.$$

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}, \text{ mert } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

$$\sqrt{1,44} = 1,2, \text{ mert } 1,2 \cdot 1,2 = 1,2^2 = 1,44.$$

A $\sqrt{-4}$ -et nem értelmeztük. Hasonlóképpen semmilyen negatív számét sem.

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5, \text{ mert } 5 \cdot 5 = 25.$$

$$\sqrt{1} = 1, \text{ mert } 1 \cdot 1 = 1^2 = 1.$$

$$\sqrt{25} = 5, \text{ mert } 5 \cdot 5 = 5^2 = 25.$$

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}, \text{ mert } \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}.$$

$$\sqrt{0,01} = 0,1, \text{ mert } 0,1 \cdot 0,1 = 0,1^2 = 0,01.$$

$$\sqrt{-4^2} = \sqrt{-16} \text{-ot nem értelmeztük.}$$

5. példa

Oldjuk meg az egyenleteket!

a) $x^2 = 0$ b) $x^2 = 4$ c) $x^2 - 36 = 0$ d) $x^2 - 5 = 0$ e) $x^2 + 4 = 0$

Megoldás

a) Egy megoldása van, az $x = 0$, mert $0 \cdot 0 = 0$. Minden 0-tól különböző szám négyzete viszo pozitív.

b) Két olyan szám van, amelynek a négyzete 4, a $(+2)$ és a (-2) . Ezt úgy is szoktuk mondani, hogy az egyenletnek két gyöke van: $x_1 = +2$, $x_2 = -2$. Több nem lehet, mert a 2-nél nagyobb pozitív számok négyzete nagyobb, a kisebbeké kisebb 4-nél. A (-2) -nél nagyobb negatív számok négyze 4-nél kisebb, a (-2) -nél kisebbeké 4-nél nagyobb.

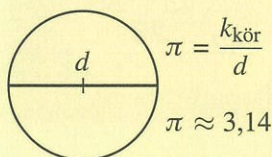
c) $x^2 = 36$, $x_1 = +6$, $x_2 = -6$

d) $x^2 = 5$, $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$

e) $x^2 = -4$, nincs gyöke az egyenletnek, mert nincs olyan szám, amelynek a négyzete negatív.

A $\sqrt{5}$ is irracionális szám, nem írható fel két egész szám hányadosaként. Ennek bizonyítását későbbi tanulmányaitok során fogtok találkozni.

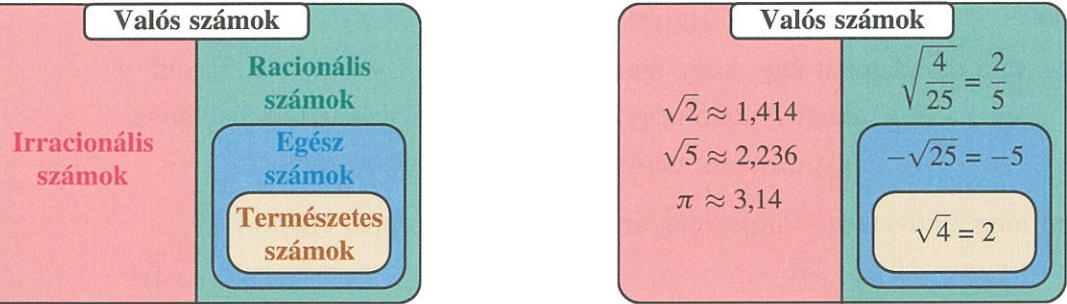
A $\sqrt{5}$ tizedes tört alakja is végtelen, nem szakaszos: $\sqrt{5} \approx 2,236$.



Van olyan szám, amely pontosan megadja, hogy a kör kerülete hány-szorosa a kör átmérőjének. Ezt a számot π -vel jelölik, értéke $\approx 3,14$. A π nem írható fel két egész szám hányadosaként, tizedesjegyeiben nincs ismétlődés, ez a szám is végtelen, nem szakaszos tizedes tört.

A π is irracionális szám.

racionális számok és az irracionális számok együtt alkotják a valós számok halmazát.
 példákban szereplő számok közül néhányat beírtunk az eddig megismert számhalmazokba:

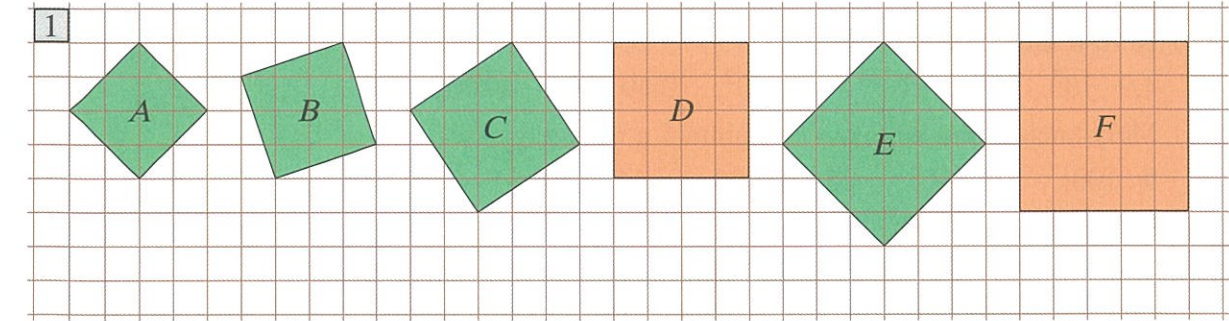


feladatok

1. Sorold fel a 100-nál kisebb négyzetszámokat!
2. Melyik állítás hamis?
 - a) Ha egy természetes szám utolsó jegye 9, akkor a szám négyzete 1-re végződik.
 - b) Van olyan négyzetszám, amelynek az utolsó jegye 8.
 - c) Nincs olyan négyzetszám, amelynek az utolsó jegye 2.
 - d) Ha egy természetes szám pontosan négy nullára végződik, akkor négyzetszám.
3. a) Természetes számok néhány első jegyét letakartuk. Melyik lehet ezek közül négyzetszám?

3,
 4,
 10,
 600,
 21,
 5 000,
 0 000
- b) Prímtényezői alakban adtuk meg a számokat. Melyik nem négyzetszám?

$2^4 \cdot 5^4,$
 $2^2 \cdot 3^2,$
 $5^4 \cdot 7^4,$
 $2^2 \cdot 3^6,$
 $2^8,$
 $2 \cdot 3^4 \cdot 5^2,$
 $(2 \cdot 5)^4 \cdot 3^2$
4. a) Határozd meg a négyzetek területét! A területmérés egysége: 1.
 b) A területükből 1 tizedesjegy pontossággal (tizedekre kerekítve) határozd meg a négyzetek oldalainak hosszát! Használd a hátsó belső borítón található négyzettáblázatot!
 c) Milyen szabály szerint színezhettük a négyzeteket?
 d) Számegyenesen jelöld a négyzetek oldalainak hosszát!



5. Melyik az a szám vagy számok, amelyek négyzete

A) 64

B) 144

C) 625

D) 3^4

E) 0,01

F) 1,44

G) 6,25

H) 0,0001?

Az eredményedet számológéppel ellenőrizd!

6. a) Határozd meg a következő kifejezések értékét! Számológéppel ellenőrizz!

- A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{100}$ C) $\sqrt{1000}$
D) $\sqrt{10\,000}$ E) $\sqrt{100\,000}$ F) $\sqrt{1\,000\,000}$

b) Egészítsd ki a mondatokat úgy, hogy igazak legyenek az így kapott állítások!

Ha, akkor a szám négyzetgyöke 10-nek valamelyik hatványa.

Ha, akkor a szám négyzetgyöke nem egész szám.

7. a) Határozd meg a következő kifejezések értékét! Számológéppel ellenőrizz!

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2^2}$ C) $(\sqrt{4})^2$ D) $\sqrt{(-4)^2}$
E) $\sqrt{-4^2}$ F) $\sqrt{5}$ G) $(\sqrt{5})^2$ H) $\sqrt{0}$

b) Melyik kifejezés nincs értelmezve? Add meg a betűjelét!

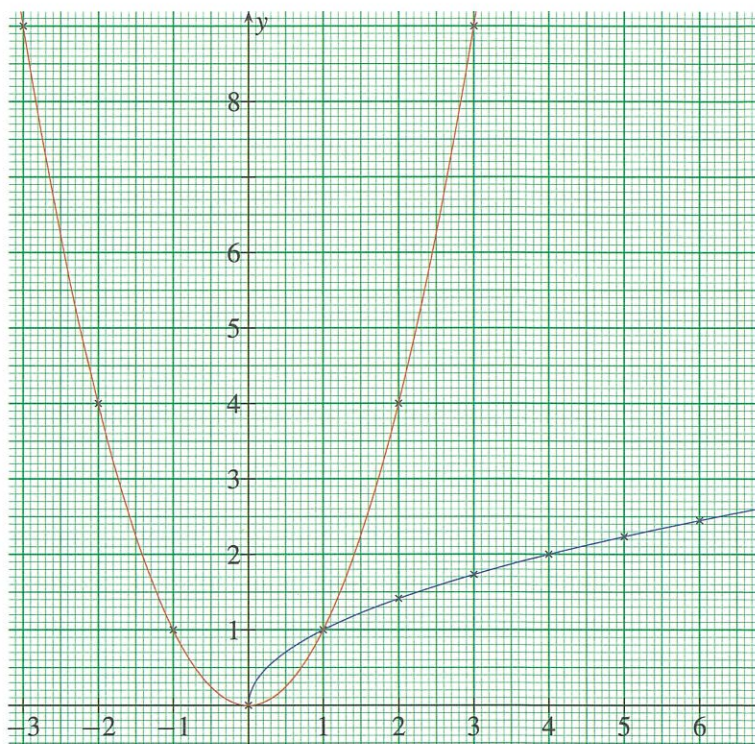
8. Milliméterpapíron pirossal ábrázoltuk az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját, ugyanebben a koordináta-rendszerben kézzel ábrázoluk az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonját.

Olvass a grafikonokról! A kapott értékeket vedd össze a padtársad eredményeivel!

Zsebszámológéppel ellenőrizz!

- a) $0,7^2$, $1,4^2$, $2,1^2$,
 $2,8^2$, $(-2,3)^2$, $(-1,7)^2$,
 $(-0,6)^2$

- b) $\sqrt{0,5}$, $\sqrt{0,9}$, $\sqrt{1,6}$,
 $\sqrt{2,4}$, $\sqrt{3,2}$, $\sqrt{4,5}$,
 $\sqrt{6,7}$



9. a) Keresd meg az egyenlőket!

$4,9 \cdot 10^3$, $4900 : 10^2$, $49 \cdot 10^2$, $0,49 \cdot 10^2$, $49\,000 : 10^3$

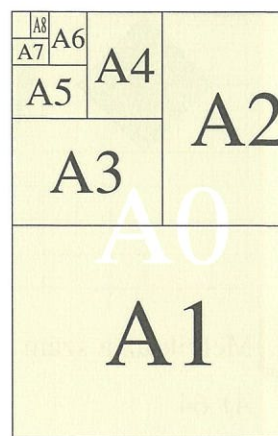
b) Melyiknek tudod könnyen kiszámítani a négyzetgyökét?

$9 \cdot 100$, $16 \cdot 10$, $25 \cdot 10\,000$, $64 \cdot 1000$, $2,25 \cdot 10^2$,
 $81 : 10^2$, $36 : 10^3$, $6,25 : 10^4$, $81 : 10^5$, $1,44 : 10^6$

@ Ma a nemzetközi szabvány szerinti papírméreteket használják szinte minden országban. Az A0-s ívet az ábrán látható módon megfelelően kapjuk az A1-es, ezt felezve az A2-es stb. Mekkora az így kapott ívek rövidebb és hosszabb oldalának aránya?

Tippelj, majd nézz utána!

- A) 1 : 2 B) 1 : 1,5 C) $1 : \sqrt{2}$ D) 1 : 1,2



A0-s ív

1. a) Számológéppel határozd meg a következő kifejezések értékét!

- A) $\sqrt{2,56}$ B) $\sqrt{3,349}$ C) $\sqrt{9,303}$ D) $\sqrt{12,67}$ E) $\sqrt{82,63}$
 F) $\sqrt{361}$ G) $\sqrt{28\,900}$ H) $\sqrt{0,1050}$ I) $\sqrt{942,5}$ J) $\sqrt{0,0121}$

b) Melyik állítás igaz?

- A) Egyetlen olyan racionális szám van, amelynek a négyzetgyöke önmaga.
 B) Minden 1-nél nagyobb racionális szám négyzetgyöke kisebb a számnál.
 C) Van olyan racionális szám, amelynek a négyzetgyöke nagyobb a számnál.

2. Mennyi a négyzet területe, ha az oldala

- a) 1,45 m, b) 14,5 m, c) 0,145 m, d) 0,0145 m?

3. Mennyi a négyzet oldala, ha a területe

- a) 225 cm^2 , b) $22,5\text{ cm}^2$, c) $2,25\text{ cm}^2$, d) $0,225\text{ cm}^2$?

4. Mennyi a kocka felszíne, ha az éle

- a) 580 dm, b) 58 dm, c) 5,8 dm, d) 0,58 dm?

5. Mekkora a kocka éle, ha a felszíne

- a) 150 cm^2 , b) 1500 cm^2 , c) $15\,000\text{ cm}^2$, d) $1,5\text{ cm}^2$?

6. Oldd meg az egyenleteket!

- a) $x^2 = 16$ b) $x^2 - 12 = 24$ c) $(x - 2)^2 = 0$ d) $(x - 3)^2 = 9$

7. a) Milyen földrészen és milyen folyó partján épült Babilon?

b) Melyik ország területén fekszik napjainkban?

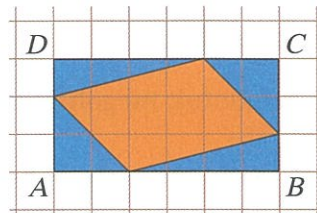
Hosszúság és terület meghatározása rácson

példa

1. $ABCD$ téglalapnak mekkora része a sárga négyszög?

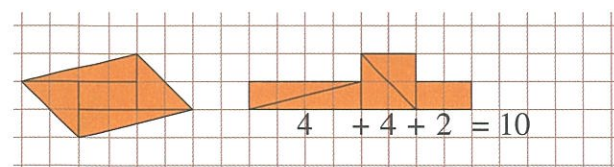
megoldás

A feladat megoldására többféle lehetőség kínálkozik, ezek közül mutatunk meg kettőt.



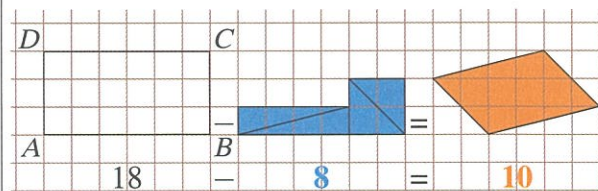
1. megoldás

A darabolással meghatározzuk a sárga paralelogramma területét:



2. megoldás

Az $ABCD$ téglalap területéből kivonva a **kék háromszögek** területét, megkapjuk a **sárga paralelogramma** területét:



mindkét úton ahhoz jutottunk, hogy a sárga négyszög területe $\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ része a téglalapénak.

2. példa

Ezeket a fénycsőből készült betűket utcai reklámokhoz, feliratokhoz használják. Melyik betűhöz használtak hosszabb csövet? Hogyan lehet megállapítani, ha nincs se vonalzónk, se körzőnk?

Megoldás

Dobjuk el a biztosan egyenlőket, és a maradék piros törött szakasz és a kék szakasz hosszát hasonlítsuk össze!

Ezek összehasonlítását kétféleképpen is megtehetjük.

Egyik lehetőség:

Az M-ből megmaradt törött szakaszt „kiegyenesítjük”, majd a piros és a kék szakaszra egy-egy négyzetet állítunk.

Határozzuk meg a négyzetek területét! **Az a szakasz lesz hosszabb, amelyre állított négyzet területe nagyobb.**

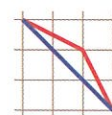
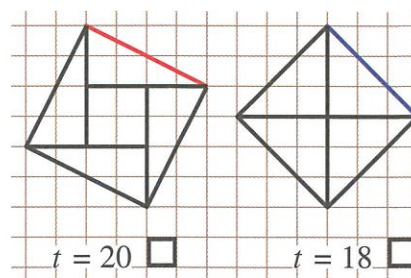
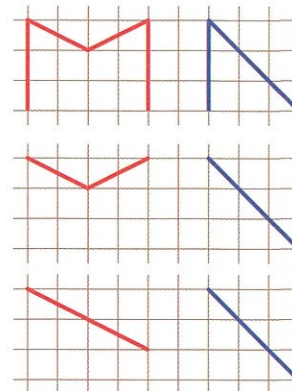
Az M betű maradékából kapott piros szakaszra állított négyzet területe a nagyobb, ezért a piros szakasz a hosszabb.

Ezzel beláttuk, hogy az M betű elkészítéséhez használtak fel több neoncsövet.

Másik lehetőség:

Helyezzük át a négyzethálón az M-ből megmaradt két piros szakaszt az ábrán látható módon! Egy egyenlő szárú háromszöget kapunk, amelynek szárai a piros szakaszok.

A piros törött vonal hosszabb, mint a kék szakasz.

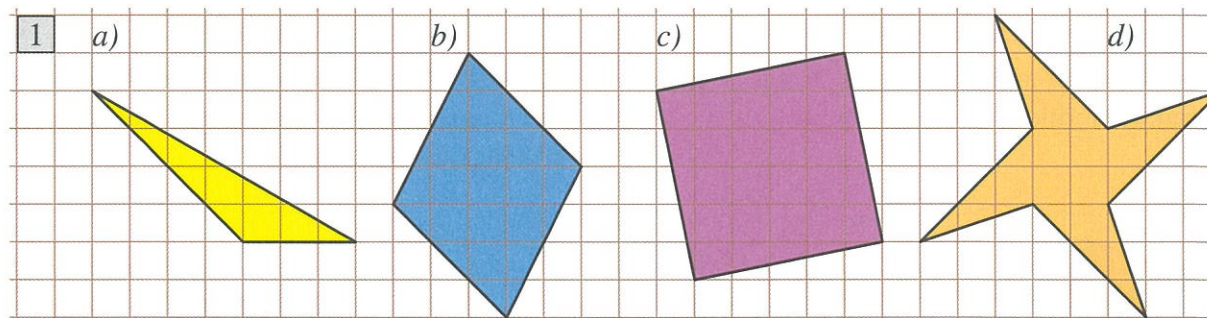


Feladatok

E feladatok megoldásához ne használj vonalzót mérésre!

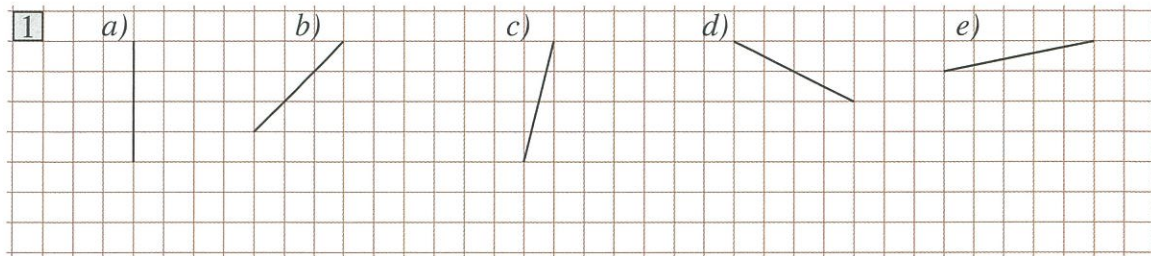
1. Mekkora a rácssokszögek területe? A területmérés egysége 1.

(A rácssokszögek csúcsai a négyzetrács pontjai.)

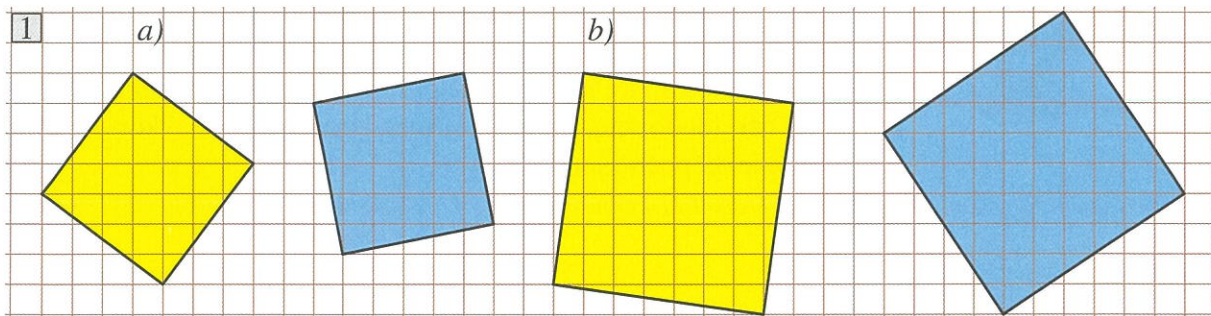


2. A megadott szakaszok négyzetek oldalai. Mekkora a négyzetek területe?

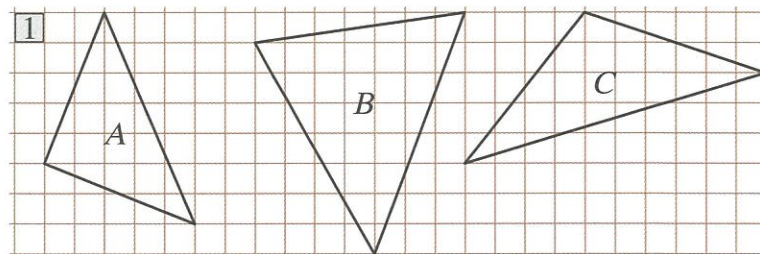
A területmérés egysége 1. Melyik négyzet oldala a legnagyobb?



3. A sárga vagy a kék négyzet oldala a hosszabb?

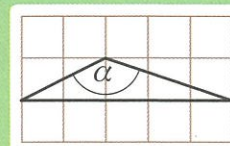


4. Melyik háromszög nem tükrös?

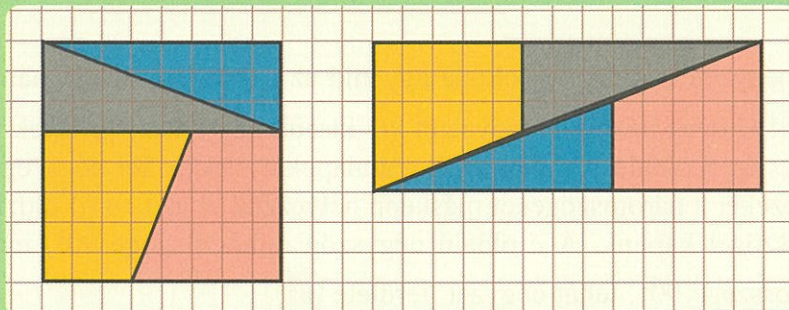


5. Hány fokal a jobb oldali ábrán látható rácsháromszög α szöge?

6. Egy hebehurgya, de agyafúrt inasnak egy 13×5 -ös deszkát kellett volna lefűrészelnie egy drága fából. Ehelyett egy négyzet alakú deszkát vágott le. Rájött a tévedésére, s a négyzet alakú deszkát az ábrán látható módon szétfűrészelte, és a kért téglalap alakú deszkává ragasztotta össze a rajzon látható módon.

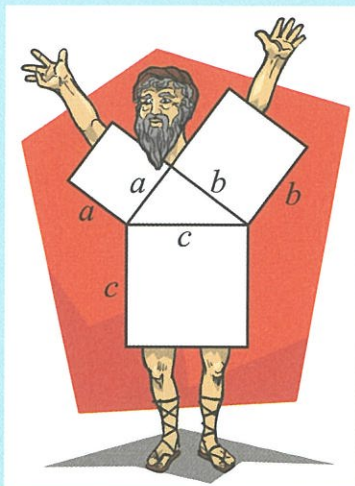


Az asztalosmester gyakorlott szeme azonban hamar észrevette a turpisságot. Mi a hiba?



(J. I. Ignatyev: A találékonyság birodalmában. Tankönyvkiadó, 1982)

Pitagorasz-tétel



Pitagoraszról kevés dolgot tudunk biztosan. Valószínűleg Kr. e. 580–500 körül élt, az égei-tengeri Szamosz szigetéről származhatott. Azt tartják róla, hogy elsősorban vallásalapító volt, család mellékesen foglalkozott matematikával. Tanai, tudományos eredményei elválaszthatatlanul összekeveredtek tanítványai, a pitagoreusok munkáival. Annyi bizonyos, hogy nem ő fedezte fel a róla elnevezett tételt, de valószínű, hogy a sok bizonyítás közül az egyik tőle származik. A görög történetírók szerint a tétel bizonyítása akkora öröm volt számára, hogy 100 ökröt áldozott az isteneknek. Egy német költő azt írja tréfásan az egyik szonettjében, hogy azóta félnek az „ökrök” minden új felfedezéstől. A XX. században sokan a Pitagorasz-tétel rajzát sugározták volna a Mars felé, azt gondolván, ha ott értelmes lények élnek, akkor ezt a tételt mindenképpen ismerniük kell.

Korabeli címerrajzokon, mozaikokon szerepelt az emberi figurává kiegészített rajz

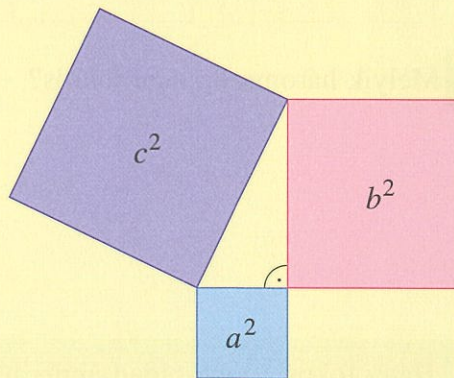
Tétel

Bármely derékszögű háromszög átfogójára emelt négyzet területe egyenlő a befogóra emelt négyzetek területének összegével.

Az ábra szerinti jelölésekkel (c az átfogó, a és b a két befogó):

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Másképpen megfogalmazva: ha egy háromszög derékszögű, akkor a két rövidebb oldalára (befogójára) emelt négyzetek területének összege egyenlő a leghosszabb oldalára (átfogójára) emelt négyzet területével.



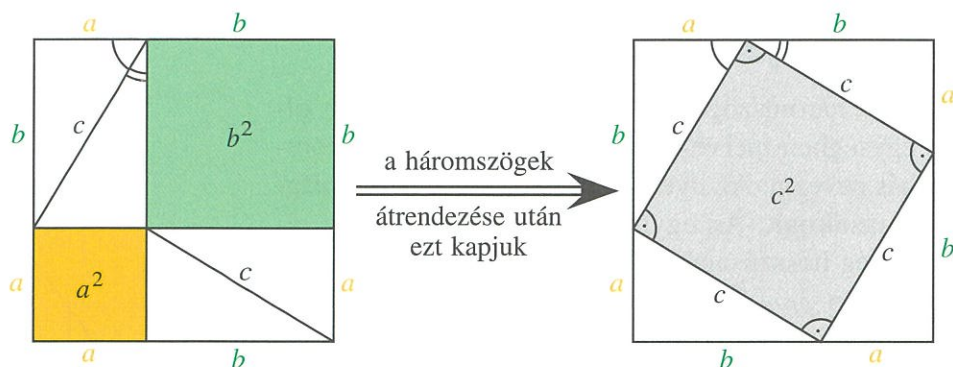
A Pitagorasz-tétel bizonyítása (Kiegészítő tananyag)

A Pitagorasz-tétel sokféle bizonyítása közül könyvünkben a hindu bizonyítás szerepel.

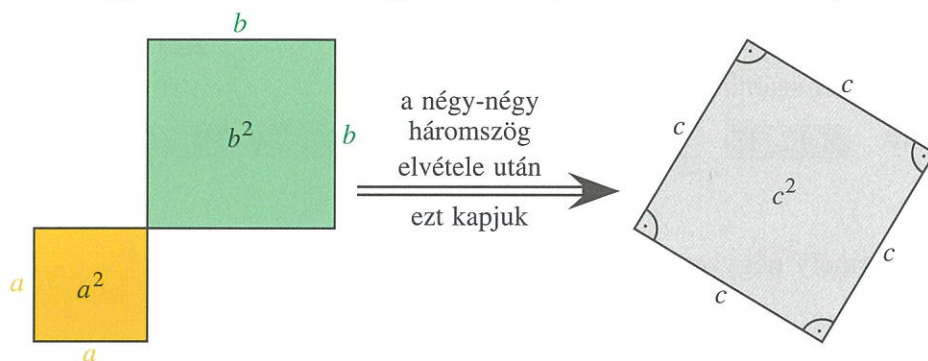
Bizonyítás



Szerkesszünk két négyzetet, amelynek oldala egyenlő az adott derékszögű háromszög a és b befogójának összegével! Osszuk az egyik négyzetet két kisebb négyzetre, amelyek területei a^2 és b^2 és két egybevágó a és b oldalú téglalapra! A téglalapokat osszuk fel négy egybevágó derékszögű háromszögre! Ha ezeket a háromszögeket másképp helyezzük el az $(a+b)$ oldalú négyzetben, akkor egy c oldalú négysszöget kapunk. A c oldalú négysszög minden szöge 90° , mert a szögeit 180° kiegészítő szögek összege 90° , tehát négyzet, területe c^2 .



Az $(a + b)$ oldalú négyzetek területét a négy háromszög területével csökkentjük.



Az első négyzetből $a^2 + b^2$ marad.

A második négyzetből c^2 marad.

A maradék területek egyenlők, hiszen az egyenlő területű négyzeteket egyenlő területekkel csökkentettük.

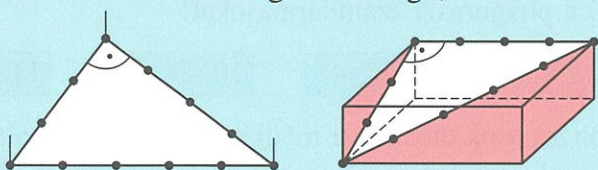
Így azt kapjuk, hogy $a^2 + b^2 = c^2$.

A Pitagorasz-tétel megfordítása is igaz.

A tétel megfordítása:

Ha egy háromszög a, b, c oldalai megfelelnek a Pitagorasz-féle feltételnek: $c^2 = a^2 + b^2$, akkor a háromszög derékszögű. A derékszög a c oldallal, a háromszög legnagyobb oldalával szemközi szög.

Az ábrán látható háromszög derékszögű, mert $5^2 = 3^2 + 4^2$.



Sokan azt feltételezik, hogy az ókori Egyiptomban ezt a háromszöget használták fel a derékszög kitűzésére úgy, hogy egy zárt zsinórt 12 csomóval 12 egyenlő részre osztottak, és ezt feszítették ki három cövek közé az ábrán látható módon.

A régészek éppen ezeket az arányokat fedezték fel a Chefren-piramis faragott köveinek és a baalbeki Nap-templom királysobájának méreteiben.



Baalbek, templomterület (Libanon)

Pitagorasz-háromszögek és számhármaskok

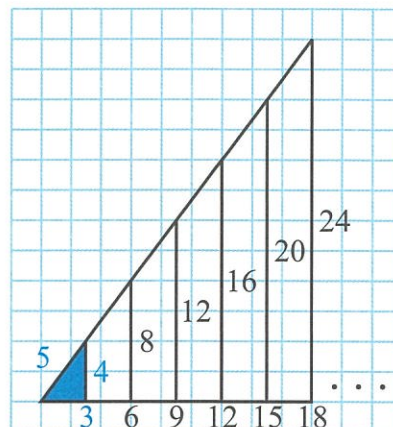
Azokat a derékszögű háromszögeket, amelyeknek mindhárom oldala valamilyen egységben mérve egész szám, pitagorasz-háromszögeknek is szokás nevezni. Az ilyen számhármaskokat pedig **pitagorasz-háromszögeknek**. Az egyik pitagorasz-háromszög oldalai: 3, 4 és 5 egység hosszúságúak.

Ha ezt a háromszöget 2-szeresére, 3-szorosára, 4-szeresére ... nagyítjuk, újabb számhármaskokhoz jutunk:

<i>a</i>	3	6	9	12	15	18	...
<i>b</i>	4	8	12	16	20	24	
<i>c</i>	5	10	15	20	25	30	

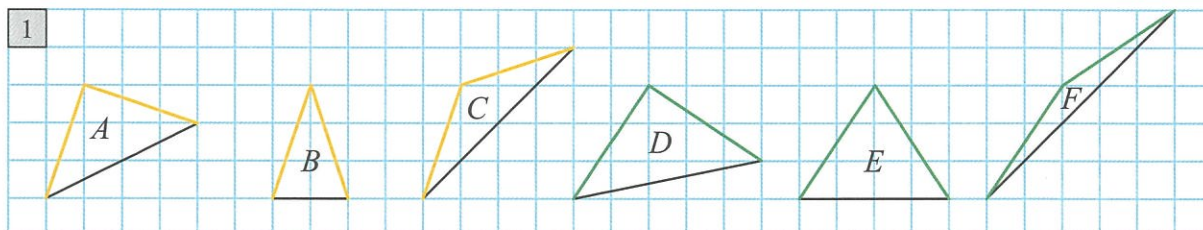
Végtelen sok pitagorasz-háromszög van.

Ezek közül néhány: 5, 12, 13 7, 24, 25 8, 15, 17 20, 21, 29 95, 168, 193



Feladatok

1. Igaz-e, hogy bármely négyzet átdarabolható két egybevágó négyszetté?
2. Egy négyzet alakú halastó területét úgy szeretnék megkétszerezni, hogy négyzet alakú maradjon, és a sarkain álló nyárfákat ne kelljen kivágni. Hogyan lehet ezt megvalósítani?
3. Igaz-e minden egyenlő szárú háromszögre, hogy az alapra emelt négyzet területe egyenlő a két szárra emelt négyzet területeinek összegével? Az alábbi háromszögeken vizsgálódj!



4. Az alábbi számhármaskok közül válaszd ki a pitagorasz-háromszögeket!

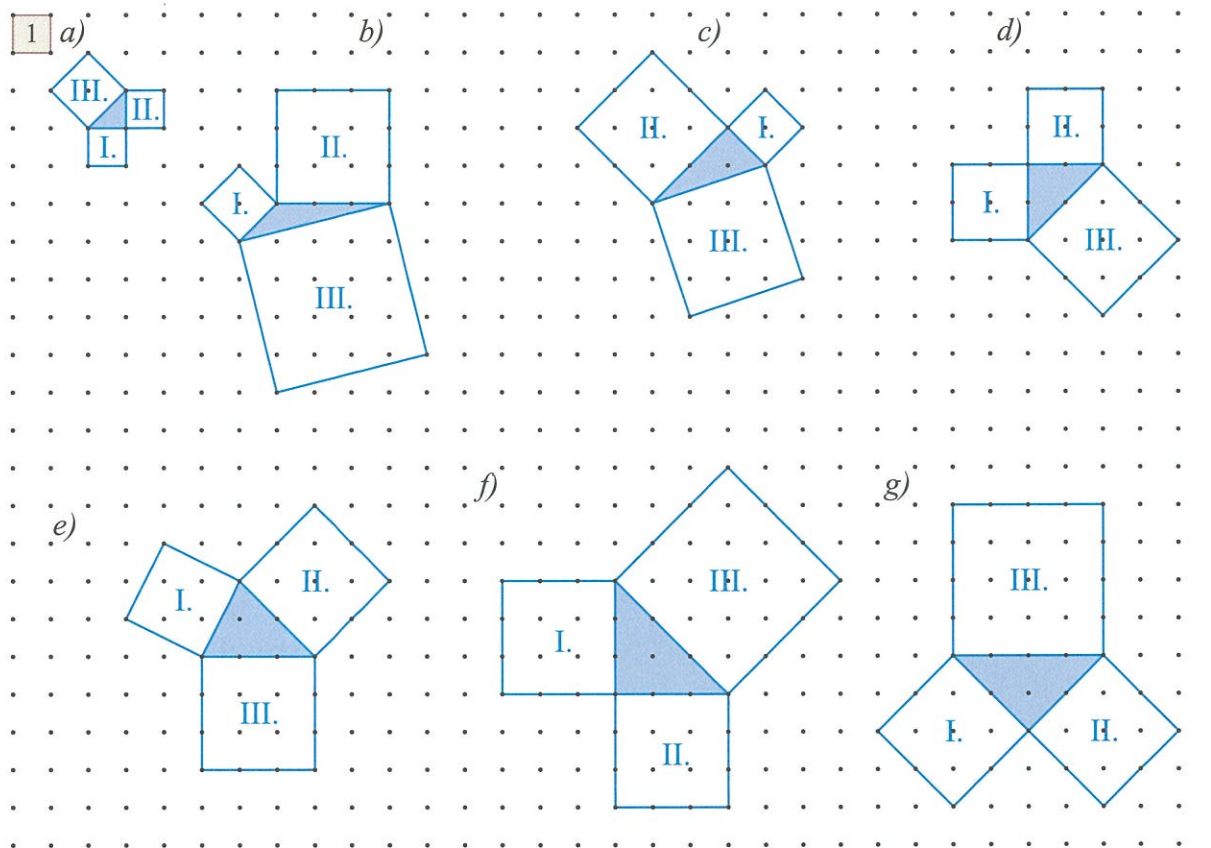
3, 4, 5 5, 13, 14 6, 8, 10 7, 23, 25 9, 40, 41 10, 24, 26 11, 60, 62

@ Pitagorasz és tanítványai pitagorasz-háromszögek előállításának módját találták ki. Az alábbi ábrán látható felső és alsó számsor segítségével végtelen sok pitagorasz-háromszöget lehet előállítani. Fejtsd meg az eljárás titkát!

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	...
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	...

5. Mennyi a háromszögek oldalaira rajzolt négyzetek területe?

Mely háromszögekre igaz, hogy a leghosszabb oldalukra állított négyzet területe egyenlő a másik két oldalukra állított négyzetek területeinek összegével?



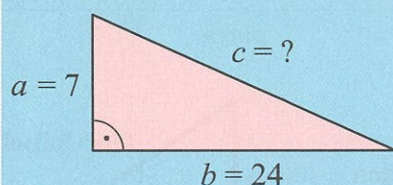
A Pitagorasz-tétel alkalmazása

1. példa

A tétel alapján a derékszögű háromszög bármely két oldalából kiszámítható a harmadik.

Például:

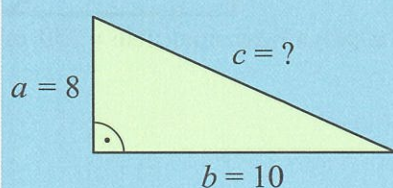
a) Az átfogót számítjuk ki:



$$c^2 = a^2 + b^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$$

$$c = \sqrt{625} = 25$$

A keresett átfogó hossza 25.

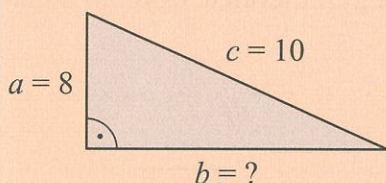


$$c^2 = a^2 + b^2 = 8^2 + 10^2 = 64 + 100 = 164$$

$$c = \sqrt{164} = \sqrt{1,64 \cdot 100} = \sqrt{1,64} \cdot \sqrt{100} \approx 1,28 \cdot 10 = 12,8$$

A keresett átfogó hossza megközelítőleg 12,8.

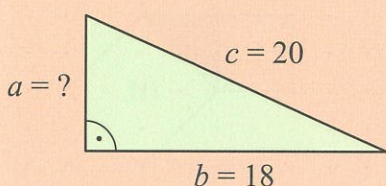
b) Az egyik befogót számítjuk ki:



$$b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

$$b = \sqrt{36} = 6$$

A keresett befogó hossza 6.



$$a^2 = c^2 - b^2 = 20^2 - 18^2 = 400 - 324 = 76$$

$$a = \sqrt{76} \approx 8,72$$

A keresett befogó hossza megközelítőleg 8,72.

2. példa



A 2000-ben épült Megyeri-híd teljes hossza 1861,5 m. A híd öt híd együttese. Ezek közül a Nagy-Duna-ág feletti ferdekábeles acélhíd látható a fotón. A ferdekábeleket tartó, belül üreges vasbeton oszlopok, más szóval **pilonok**, 100 méter magasak. A két leghosszabb **ferdekábel** rögzítési helyének távolsága, más szóval a **pálya** ezen szakaszának hossza 300 m. Hány méter a leghosszabb, kék színnel jeölt ferdekábel?

Megoldás

A megoldáshoz elegendő az ábrán látható egyenlő szárú háromszögnek a felét lerajzolni. Pitagorasz tételével tudjuk kiszámítani a ferdekábel hosszát, ami az ábrán látható derékszögű háromszög átfogója. Jelöljük a ferdekábel hosszát f betűvel!

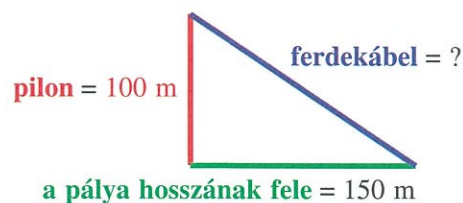
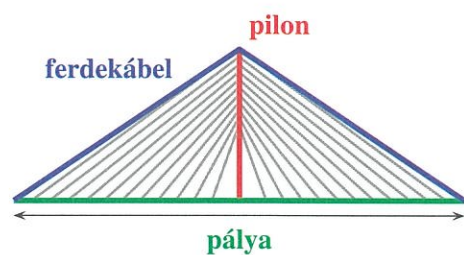
Pitagorasz tétele szerint:

$$f^2 = 100^2 + 150^2$$

$$f^2 = 10\,000 + 22\,500 = 32\,500$$

$$f = \sqrt{32\,500} \approx 180,3$$

A ferdekábel hossza egészekre kerekítve 180 m.



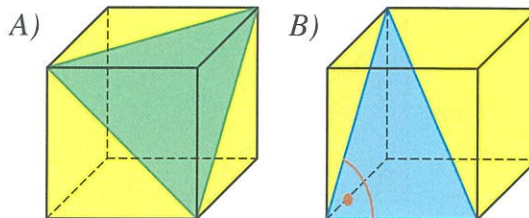
A kocka testátlójának meghatározása (Kiegészítő tananyag)

1. példa

A Pitagorasz-tételt térbeli problémák megoldásánál is alkalmazhatjuk.

Egy 3 cm élű kockába kétféle háromszöget helyeztünk:

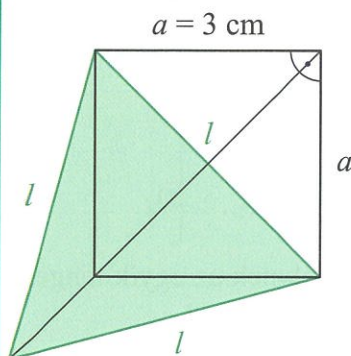
- Szerkesszük meg a háromszögeket!
- Méréssel és számítással is határozzuk meg a háromszögek ismeretlen oldalait!



Megoldás

A) A lapátló meghatározása

Szerkesztéssel:



A megszerkesztett szabályos háromszög oldala a kocka lapátlója.

A lapátló hossza körülbelül 4,2 cm.

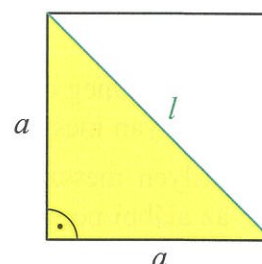
Számítással:

A sárga színű egyenlő szárú derékszögű háromszögből ki tudjuk számítani a lapátló hosszát Pitagorasz-tétellel.

$$l^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$l = \sqrt{2a^2}$$

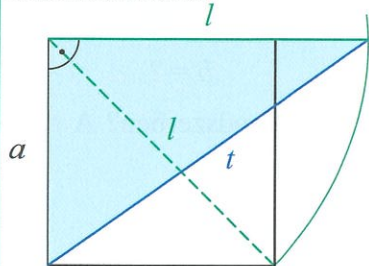
$$l = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2 \cdot 9} = \sqrt{18} \approx 4,24$$



A lapátló hossza milliméteres pontossággal 4,2 cm.

B) A testátló meghatározása

Szerkesztéssel:



A megszerkesztett derékszögű háromszög átfogója a kocka testátlója.

A testátló hossza körülbelül 5,2 cm.

Számítással:

A kék derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével ki tudjuk számítani a testátlót, ami a háromszög átfogója.

$$t^2 = l^2 + a^2$$

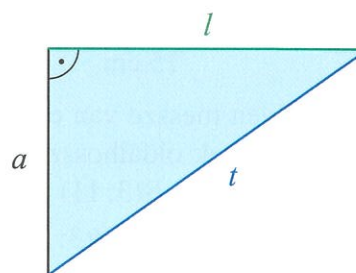
⇓

$$t^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

$$t = \sqrt{3a^2}$$

$$t = \sqrt{3 \cdot 3^2} = \sqrt{3 \cdot 9} = \sqrt{27} \approx 5,19$$

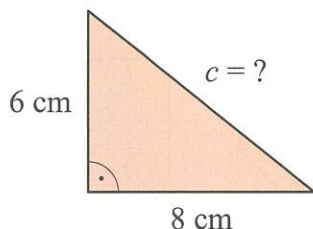
A testátló hossza milliméterre kerekítve 5,2 cm.



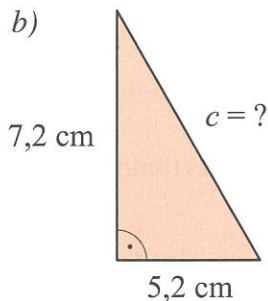
Feladatok

1. Számítsd ki az átfogók hosszúságát!

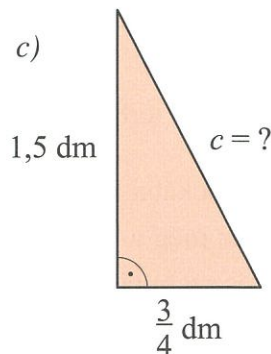
a)



b)



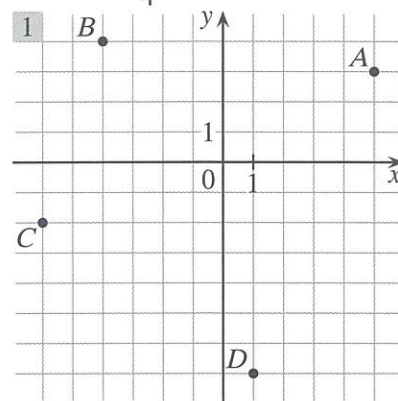
c)



2. a) Becsüld meg, hogy melyik pont van legtávolabb az origótól! Méréssel ellenőrizd!

b) Pitagorasz tételével határozd meg az adott pontok távolságát az origótól 1 tizedesjegy pontossággal! A rácsnégyzetek oldalhossza legyen az egység! Így is ellenőrizd a becslésedet!

c) Add meg olyan rácspontok koordinátáit, amelyek pontosan olyan messze vannak az origótól, mint a C pont!

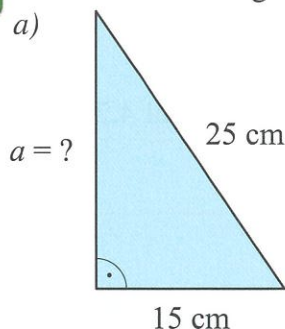


3. Milyen messze vannak a koordináta-rendszer kezdőpontjától az alábbi pontok? $A(3; 4)$, $B(-5; 12)$, $C(-6; -8)$, $D(12; -5)$

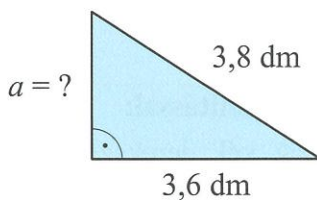
4. Milyen messze van a koordináta-rendszer kezdőpontjától az a pont, amelynek az egyik tengelytől való távolsága 3, a másiktól pedig 4 hosszúságegység? Hány ilyen pont van?

5. Számítsd ki a befogók hosszúságát!

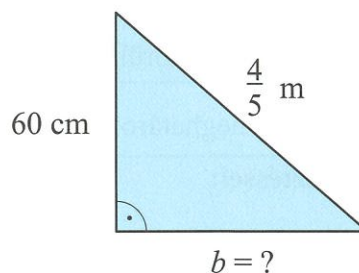
a)



b)



c)



6. Milyen messze van egymástól az A és a B pont a derékszögű koordináta-rendszerben? A rácsnégyzetek oldalhossza legyen az egység!

a) $A(3; 6)$, $B(3; 11)$

b) $A(4; 9)$, $B(11; 9)$

c) $A(2; 1)$, $B(6; 4)$

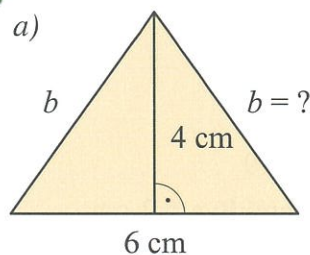
d) $A(-1; -1)$, $B(3; 2)$

e) $A(-3; -2)$, $B(9; 3)$

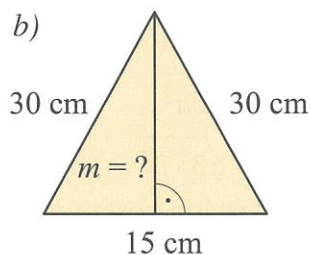
f) $A(-5; -2)$, $B(1; 4)$

7. Számítsd ki a tükrös háromszögek kért hosszúságait!

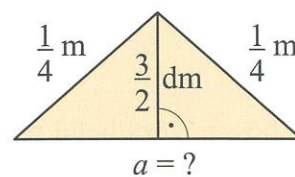
a)



b)



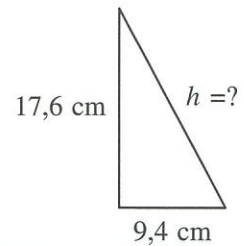
c)



8.

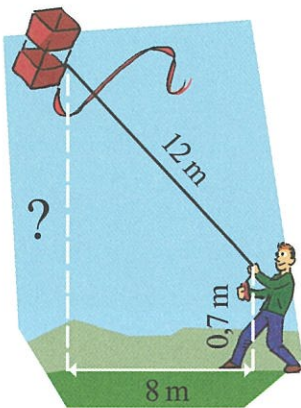


Milyen hosszú egy méreteiben ehhez hasonló csúszda víz feletti része?
A rajzról leolvashatod a számításhoz szükséges méreteket.



9.

Milyen magasan repül a sárkány, ha 12 m hosszú a zsineg?



10.

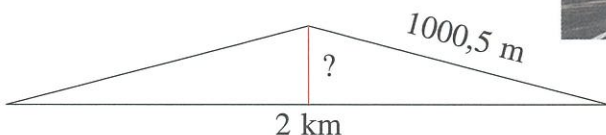
Milyen hosszú a ház homlokzatán látható deszka, ha a tető 45° -os szöget zár be a vízszintessel?



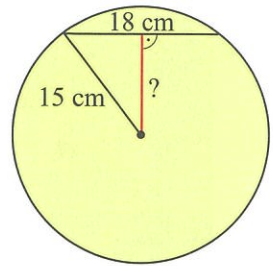
11.

Az Andrássy úton kifeszítünk egy 2 km hosszúságú kötelet. Majd a kötel hosszát 1 m-rel növeljük. Az út közepén olyan magasra emeljük ezt a kötelet, amennyire csak lehet. Átfér-e a kifeszített kötel alatt

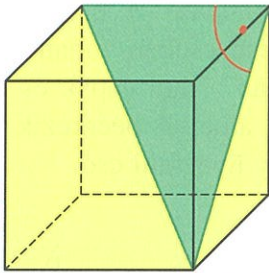
- A) egy egér, B) egy kutya,
C) egy ember, D) egy zsiráf?
Becsülj! Számolj!



12. Egy 15 cm sugarú körbe egy 18 cm-es húst rajzolunk! Milyen távolságra van ez a húr a kör középpontjától?



13.

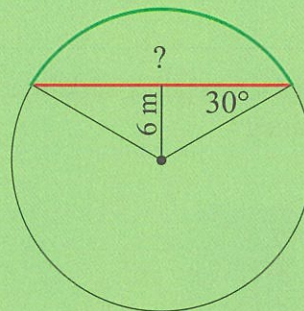


Mekkora a területe az 1 dm élű kockába helyezett derékszögű háromszögnek?

14. Mekkora a velencei Rialto hídhoz hasonló híd két lábának távolsága, amelynek adatait a vázlatrajzon megadtuk?

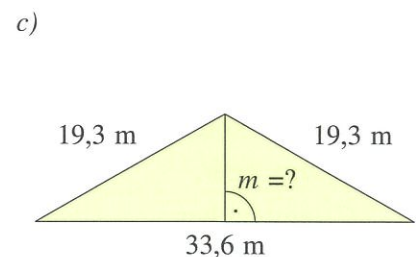
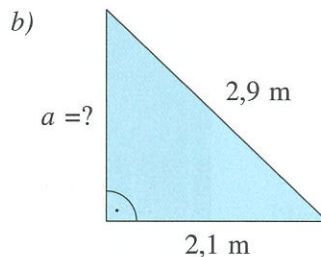
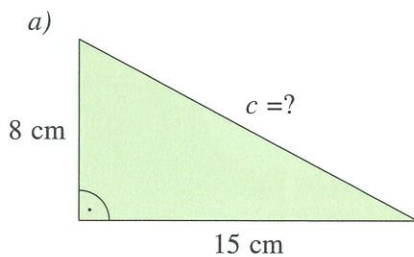


Rialto híd (Velence, Olaszország)



Tudáspróba

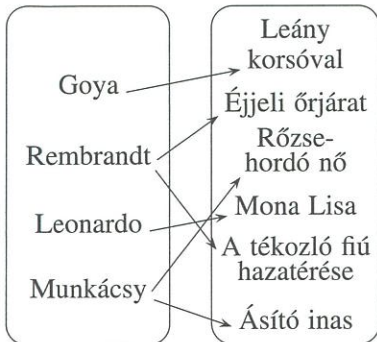
1. Számítsd ki a kért hosszúságokat!



- Számítsd ki az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóját, ha befogói 8 cm hosszúak!
- Mekkora a területe annak az egyenlő szárú háromszögnek, amelynek alapja 10 cm, szárai 13 cm hosszúak?
- Milyen messze van az origótól a $P(-2; 10)$ pont?
- Egy 3,4 m hosszú létrát úgy támasztanak a falhoz, hogy a létra alja 1,6 m-re van a faltól. Milyen magasan van a létra teteje?

Hozzárendelés, függvény

Hozzárendelések, függvények



Munkácsy Mihály:
Ásító inas



Leonardo da Vinci:
Mona Lisa



Rembrandt van Rijn:
Éjjeli őrjárat



Munkácsy Mihály:
Rőzsehordó nő



Goya:
Leány korszóval

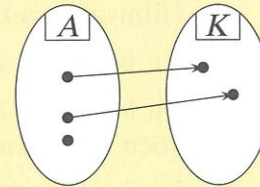
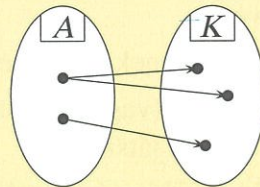
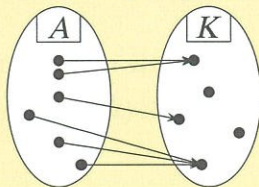
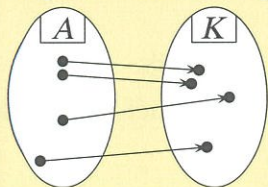
Az első megfeleltetésnél híres festőkhöz rendeltük hozzá képeik címét. Itt a kiindulási halmaz, az ún. alaphalmaz elemei között vannak olyanok, amelyeknek több elemet is megfeleltettünk. Ez a hozzárendelés nem egyértelmű.

A második megfeleltetésnél a képek címeihez egyértelműen hozzárendeltük a festők nevét.

A harmadik megfeleltetésnél a festőkhöz egyértelműen hozzárendeltük az általuk festett képeket. Itt a képhalmaznak van olyan eleme, amely nem szerepel a megfeleltetésben.

Függvénynek nevezzük az egyértelmű hozzárendelést két nem üres halmaz között, vagyis az egyik halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a másik halmaz pontosan egy elemét.

A kiinduló halmazt **alaphalmaznak** nevezzük, és általában A -val jelöljük. A másik halmazt **képhalmaznak** hívjuk, és K -val jelöljük.



Ezek a hozzárendelések függvények.

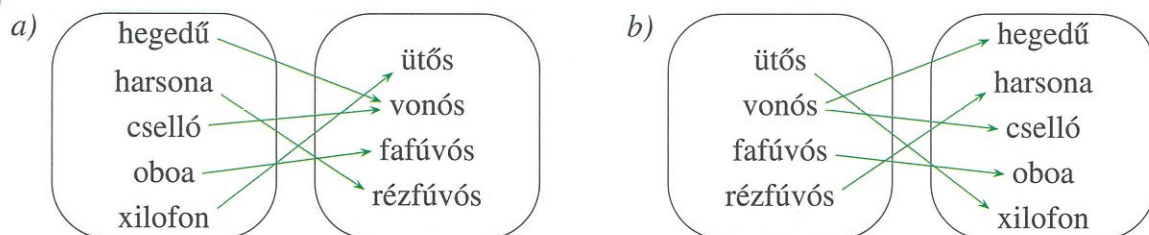
Ezek a hozzárendelések nem függvények.

Descartes (1596–1650, francia tudós, a nevét dékátrnak olvassuk ki) volt, aki a függvényeket megfeleltetésként értelmezte. Ettől az időtől kezdve vált fontossá ez a matematikai fogalom. A *függvény* szót először Leibniz (1646–1716) német matematikus és filozófus használta. Ő különösen szerette a matematikai jeleket, tőle származik az egyenlő ($=$), a szorzás ($\cdot$), a hasonlóság ($\sim$) és az egybevágóság ($\cong$) jelölése is. A magyar nyelvbe a függvény szót Győry Sándor (1795–1870) vezette be. Ő 1832-től a Magyar Tudományos Akadémia tagja volt, és jelentős szerepe volt a magyar matematikai szaknyelv kialakításában. Tőle származnak még a kitevő, a szorzat, az arány szavaink is.

A függvényekkel a modern matematika (a XIX. század közepétől) nagyon sokat foglalkozik. A természeti jelenségek leírásának nélkülözhetetlen segédeszközzé vált.

Feladatok

1. Melyik megfeleltetés határoz meg függvényt?



2. a) Melyik foglalkozáshoz melyik tárgy tartozhat?

$A = \{\text{fazekas; bogárnár; szűcs; kalmár; kádár; kovács; varga; vágár}\}$

$K = \{\text{kocsikerék; csizma; szén; ködmön; kereskedés; hordó; lópatkó; korsó}\}$

b) Függvényt határoz-e meg ez a megfeleltetés?

3. A következő megfeleltetések közül válaszd ki a függvényeket! Emeld ki azokat, amelyek mindkét irányban egyértelműek, azaz mindkét irányban függvények!

a) $A = \{\text{osztályotok tanulói}\}$

$K = \{\text{osztályotok tanulói}\}$

Minden tanulóhoz a tornasorban a jobb oldali szomszédját rendeljük hozzá.

Minden tanulóhoz, ha kettesével sorakoznak, a párját rendeljük hozzá.

b) $A = \{\text{14 év feletti magyar emberek}\}$

Az emberekhez a személyazonossági igazolványukban található, betűkből és számokból álló kifejezést rendeljük, például: AP 238435, illetve a születési dátumát, például: 1990. 02. 06.

c) $A = \{\text{filmszínészek nevei}\}$

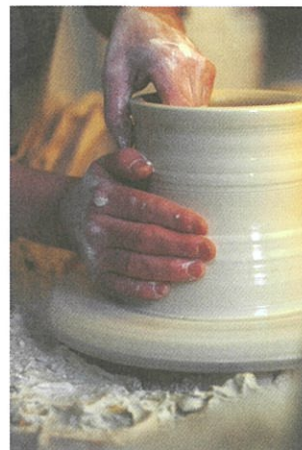
Minden filmszínészhez a nevének kezdőbetűiből képzett monogramot rendeljük.

Minden filmszínészhez annak (vagy azoknak) a filmnek (vagy filmeknek) a címét rendeljük, amelyben (vagy amelyekben) játszott.

d) $A = \{\text{racionális számokból álló számpárok}\}$

A számpárokhoz a koordináta-rendszer egy-egy pontját rendeljük.

A számpárokhoz a két szám számtani közepét rendeljük.

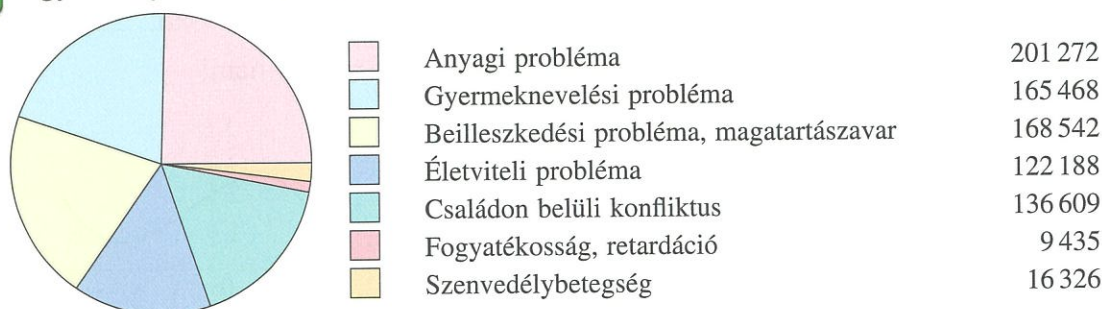


e) $A = \{a \text{ sík pontjai}\}$

A sík minden pontjához a tőle 1 cm-re lévő pontokat rendeljük.

A sík minden pontjához azt az 1 cm sugarú kört rendeljük, amelynek az adott pont a középpontja.

4. A gyermekjóléti szolgálatnál kezelt problémák száma a kezelt probléma típusa szerint 2011-ben:

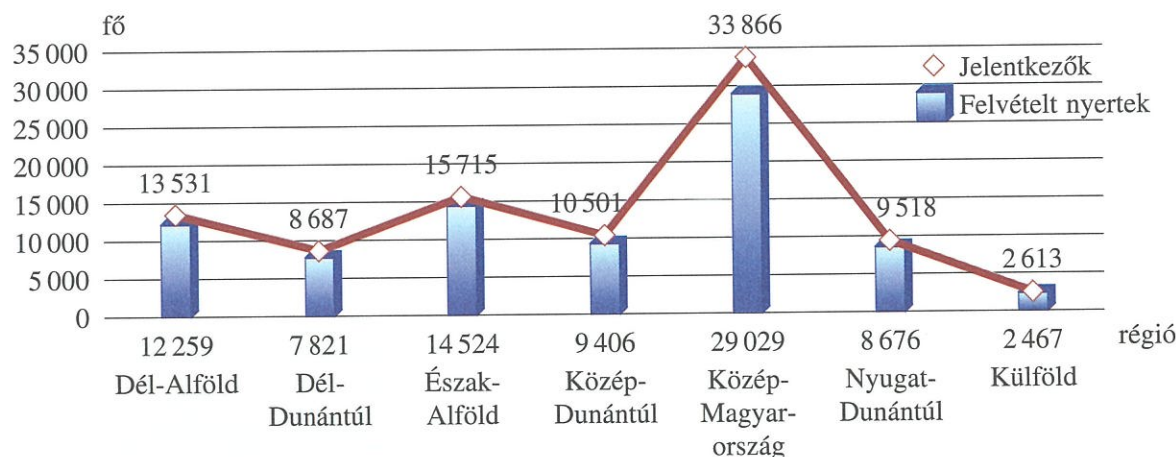


(Szociális statisztikai évkönyv 2012. 45. old. 4.16. tábla)

a) A gyermekjóléti szolgálatnál 2011-ben készült adatokat ábrázolja a kördiagram. Adj meg egy alaphalmazt, egy képhalmazt, és írd le a hozzárendelési utasítást a két halmaz elemei között!

b) Függvényt határoz-e meg a megfeleltetésed? Ha igen, miért? Ha nem, akkor miért nem?

5. A 2015 szeptemberében induló felsőoktatási képzésre jelentkezők régiók szerinti megoszlása:



(a felvi.hu statisztikája alapján)

Az ábrán látható oszlop-, illetve vonaldiagram alapján állapítsd meg a hozzárendelések alaphalmazát, képhalmazát, és írd le a hozzárendelési utasítást is!

6. Minden számhoz rendeld hozzá

a) az ellentettjét,

b) a reciprokát!

$\frac{2}{3}$ -4 $1 + \frac{3}{5}$ $\frac{4^2}{5}$ $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ 0 x

7. n oldalú konvex sokszögekhez ($3 \leq n \leq 10$) rendeld hozzá

a) belső szögeinek összegét,

b) külső szögeinek összegét!

8. Keresd a párját! A szakaszokat két végpontjukkal adtuk meg. Melyik hossz tartozik hozzájuk, ha rácsegységben számolunk?

A) $A(-3; 2)$ $B(5; 2)$

B) $A(-2; -2)$ $B(-2; -5)$

C) $A(0; 1)$ $B(3; 5)$

D) $A(-1; -2)$ $B(2; 7)$

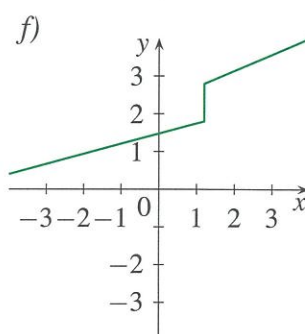
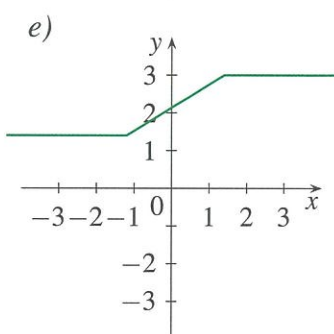
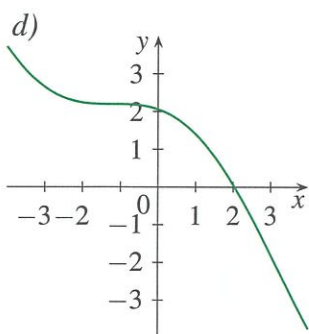
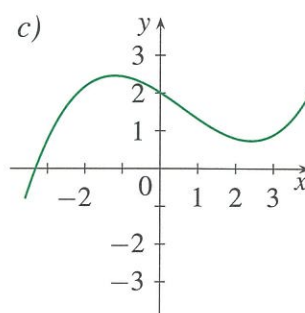
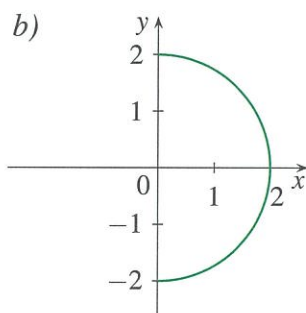
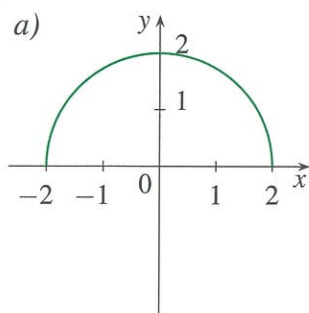
a) 3

b) 5

c) 8

d) $\sqrt{90} \approx 9,49$

9. Döntsd el, hogy melyik grafikon lehet függvény grafikonja, és melyik nem!



Lineáris függvény

1. példa

Ebben a példában három hozzárendelést tanulmányozunk.

a) A lovak számához hozzárendeljük a lábaik számát.

b) A négyzet oldalának hosszához hozzárendeljük a négyzet területét (azonos hosszúságegységben).

c) A számokhoz hozzárendeljük a szám négyszeresét.

Mindegyik függvényhez értéktáblázatot készítünk, majd meg-
rajzoljuk a hozzárendelés grafikonját.



Megoldás

a)

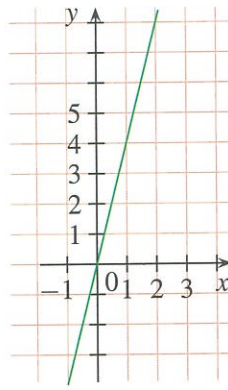
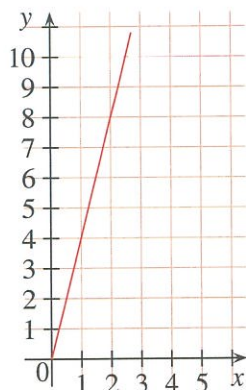
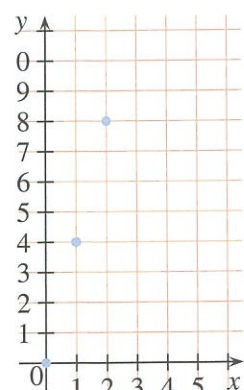
Lovak	0	1	2	3	4	5
Lábak	0	4	8	12	16	20

b)

Oldal	$\frac{1}{2}$	1	2	3,5	4	5
Kerület	2	4	8	14	16	20

c)

Szám	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2,75	4
Négyszeres	-2	0	2	4	11	16



Ha a lovak számát, a négyzet oldalának hosszát és a kiindulási számot x -szel jelöljük, akkor mindhárom hozzárendelést az $f(x) = 4 \cdot x$ függvény írja le, de az alaphalmazok különbözősége miatt a függvények és grafikonjaik is különbözőek:

$A = \{\text{természetes számok}\}$ grafikon: pontokból áll, amelyek egy origón áthaladó egyenesen vannak

$B = \{\text{pozitív számok}\}$ grafikon: félegyenes

$C = \{\text{tetszőleges szám}\}$ grafikon: egyenes

Mindhárom grafikonnál olyan $P(x; y)$ koordinátájú pontokat ábrázoltunk, ahol $y = 4x$ volt.

Az $f(x)$ jelölés arra utal, hogy adott x értékhez mit rendel hozzá az f -fel jelölt függvény. Ha például $f(x) = 4 \cdot x$, akkor $f(3) = 4 \cdot 3 = 12$. Kiolvasása: f függvény helyettesítési értéke az $x = 3$ helyen 12. Röviden: „ f 3 egyenlő 12”.

2. példa

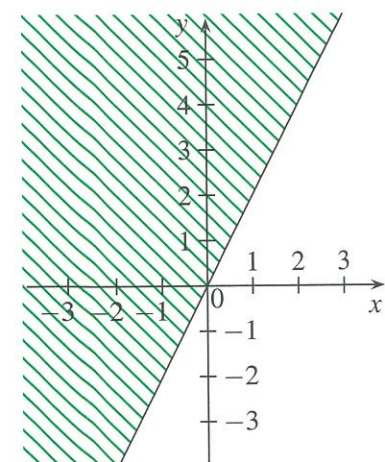
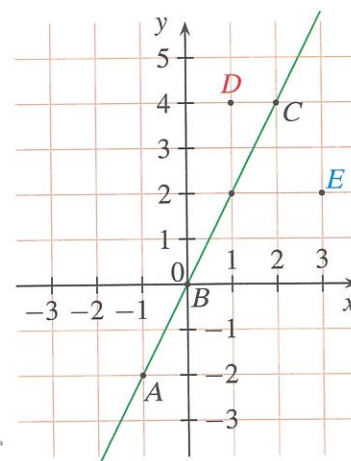
Rendeljük hozzá a számokhoz a kétszeresüket!

Megoldás

Ezt a hozzárendelést leírhatjuk a következő jelöléssel is: $f(x) = 2 \cdot x$.

Elkészítjük a hozzárendelésnek megfelelő grafikont is.

Ha a feladatnak megfelelő pontokat koordináta-rendszerben akarjuk ábrázolni, akkor olyan $P(x; y)$ koordinátájú pontokat jelölünk ki a koordináta-rendszerben, ahol az x koordinátához hozzárendeljük az y koordinátát úgy, hogy $y = 2x$.



Például: $A(-1; -2)$, $B(0; 0)$, $C(2; 4)$ pontokra igaz az $y = 2x$ összefüggés, ezért ezek a pontok a grafikonon vannak.

Az $y = 2x$ összefüggés egy függvényt határoz meg: $f(x) = 2x$.

A $D(1; 4)$ pont a grafikon „felett” van, hiszen $4 > 2 \cdot 1$ ($y > 2x$ összefüggés áll fenn).

Az $E(3; 2)$ pont a grafikon „alatt” van, mert $2 < 2 \cdot 3$ ($y < 2x$ összefüggés teljesül).

Az $y > 2x$ összefüggés a grafikon „felett” lévő pontok koordinátáira igaz.

3. példa

Készítsük el az $f(x) = 2 - x$ lineáris függvény grafikonját!

- a) Adjunk meg legalább 4 olyan pontot a koordinátaival, amelyek a grafikonhoz tartoznak!
 b) Pótoljuk az adott pontok koordinátáit úgy, hogy azok rajta legyenek az $f(x)$ függvény grafikonján! $A(0; \square)$ $B(\frac{1}{3}; \square)$ $C(\square; 4)$ $D(\square; \frac{4}{5})$

Megoldás

Két pont meghatározásával már tudjuk ábrázolni az egyenest.

- a) A pontok x koordinátaíhoz kiszámoljuk az $y = 2 - x$ koordinátáit.

A megoldást célszerű táblázatba foglalni:

x	-2	-1	1	5
$2 - x$	4	3	1	-3

A pontok:

$P(-2; 4)$, $Q(-1; 3)$, $R(1; 1)$, $S(5; -3)$.

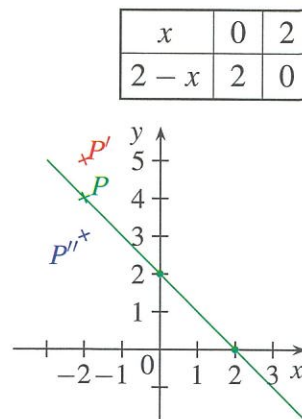
Ha például a $P(-2; 4)$ pont helyett a $P'(-2; 5)$ pontot vizsgáljuk, akkor az a grafikon fölött, míg a $P''(-2; 3)$ pont a grafikon alatt helyezkedik el.

- b) A grafikonon levő pontok koordinátáit x -szel és y -nal jelölve az $y = 2 - x$ egyenlet jellemzi azokat. Innen ha például $x = 0$, akkor $y = 2 - 0 = 2$, tehát $A(0; 2)$;

ha $x = \frac{1}{3}$, akkor $y = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$, tehát $B(\frac{1}{3}; \frac{5}{3})$;

ha $y = 4$, akkor $4 = 2 - x$, innen $x = -2$, tehát $C(-2; 4)$;

ha $y = \frac{4}{5}$, akkor $\frac{4}{5} = 2 - x$; $\frac{4}{5} - 2 = -x$; $-\frac{6}{5} = -x$; $x = \frac{6}{5}$, tehát $D(\frac{6}{5}; \frac{4}{5})$.



4. példa

Rajzoljuk föl a következő függvények grafikonjait, ha az A alaphalmazba az összes eddig tanult szám tartozik!

a) $f(x) = 3$

b) $g(x) = -3x$

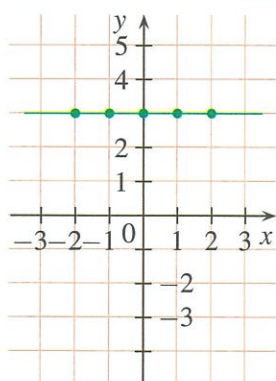
c) $h(x) = 2x - 1$

Megoldás

A grafikonok elkészítéséhez értéktáblázatot készítünk a (-2) és 2 közötti egész számokra.

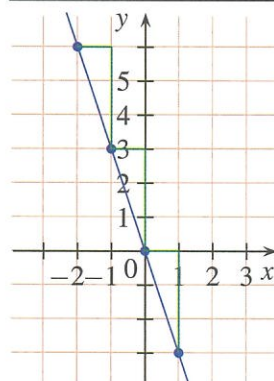
a) $f(x) = 3$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	3	3	3	3



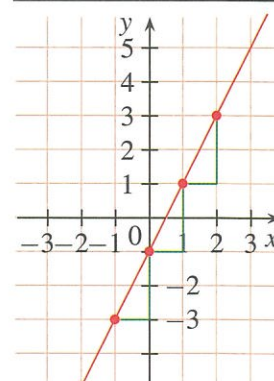
b) $g(x) = -3x$

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	6	3	0	-3	-6



c) $h(x) = 2x - 1$

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	-5	-3	-1	1	3



Tapasztalatunk szerint a függvények grafikonja az *a)*, *b)* és *c)* esetben egyenes.

Azokat a függvényeket, amelyeknek a grafikonja egyenes, **lineáris függvényeknek** nevezzük.

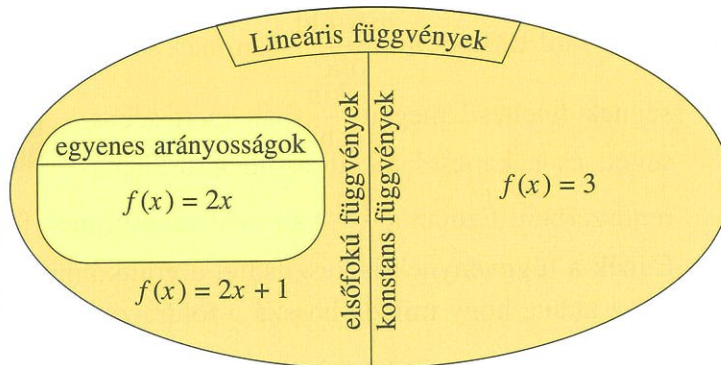
Ha a hozzárendelés $f(x) = \text{„szám”}$ típusú, akkor az egyenes párhuzamos az x tengellyel.

Ha a hozzárendelés $f(x) = ax + b$ típusú (ahol a és b számok, és $a \neq 0$), akkor a függvényt **elsőfokú függvénynek** hívjuk. Mivel a grafikonja egyenes, ezért elegendő két pontját meghatározni az ábrázoláshoz.

Ennek alapján elkészíthető a lineáris függvények halmazábrája (Venn-diagramja), amelynek minden részébe csak egy-egy megfeleltetést írtunk be.

Megállapodás: Ha az A alaphalmazt külön nem adják meg, akkor

$A = \{\text{az összes eddig tanult szám}\}$.

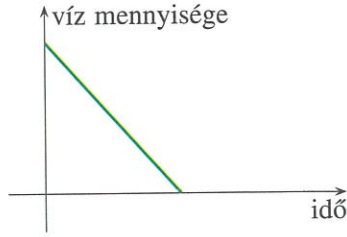
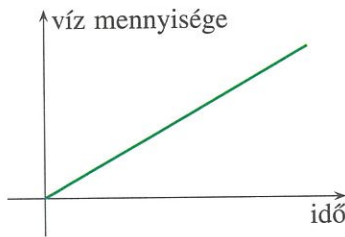
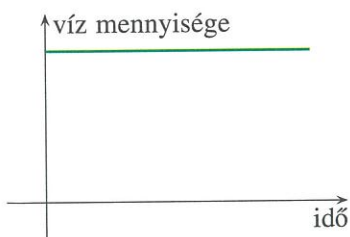


Feladatok

1 Keresd a párját!

- a) Az automata mosógép vizet szivattyúz. b) A gép mos.

- c) Kiszivattyúzza az elhasznált vizet.



2. Egy pécsi iskola egyik hatodik osztálya kirándulást tett a Mecsekben. Az első napi cél egy turistaház volt. Az osztály hétfő reggel 9 órakor indult. A diákok hétfői haladását mutatja a következő grafikon.

- a) Összesen hány km utat tett meg az osztály hétfőn?

(A) 6 km-t (B) 9 km-t (C) 13 km-t (D) 14 km-t

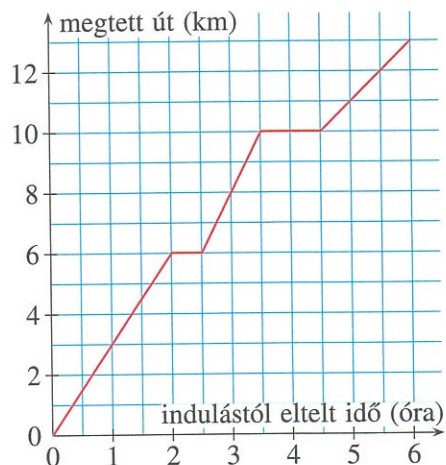
- b) A hétfői túra alatt összesen hány óra pihenőt tartott az osztály?

(A) Nem tartottak pihenőt. (B) 1,5 óra pihenőt tartottak.

(C) 3 óra pihenőt tartottak. (D) 4 óra pihenőt tartottak.

- c) Lineáris függvényt határoz-e meg a grafikon?

- d) Add meg, hogy melyik időintervallumban haladtak a leggyorsabban a gyerekek! Mekkora volt ekkor a sebességük?



(Kompetenciamérés, 2011)

3. Az angol autók sebességmérő órája kétféle mértékegységben mért sebességet mutat. Az Angliában használatos $25 \frac{\text{mér föld}}{\text{óra}}$ megfelelője $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Add meg hozzárendelési szabállyal a két sebesség közötti összefüggést, ha $1 \text{ mér föld} \approx \approx 1,6 \text{ km}$! Először a $\frac{\text{mér föld}}{\text{óra}}$ -ban mért sebességnek feleltess meg a $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban mért sebességet, és a kapcsolatot ábrázold koordináta-

rendszerben! Ezután a $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban mért sebességnek feleltess meg a $\frac{\text{mér föld}}{\text{óra}}$ -ban mért sebességet!

Ennek a függvénynek is készítsd el a grafikonját!



- @ Nézz utána, hogy milyen hosszú a földrajzi mér föld és a tengeri mér föld!

4. Juci a vasárnapi kosárlabda-mérkőzésen 23 pontot dobott. Ezt részben az 1 pontos büntetődobásból, részben a 2 pontos kosarakból gyűjtötte össze. Mennyit dobhatott az egyes kosárfajtákból? Ha x -szel jelölöd a 2 pontos kosarak számát, hogyan függ az x -től a büntető kosárdobások száma? Készíts grafikont erről a függvényről!

5. Számold ki az $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ függvény helyettesítési értékét, ha

- a) $x = 6$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = -261$ d) $x = 0$

6. Számold ki a $g(x) = 0,2x + 8$ függvény helyettesítési értékét, ha

- a) $x = -5$ b) $x = \frac{3}{5}$ c) $x = -104$ d) $x = 0$

7. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

- a) $f(x) = x + 2$ b) $g(x) = 2x + 1$ c) $h(x) = \frac{1}{2}x + 2$ d) $k(x) = 2x$

8. Ábrázold az $f(x) = 3x - 4$ függvény grafikonját!

Határozd meg az $A(-6; \square)$, $B(2; \square)$, $C(\square; 1)$ és $D(\square; -1)$ pontok hiányzó jelzőszámait úgy, hogy a pontok

- a) a grafikonon, b) a grafikon alatt, c) a grafikon fölött legyenek!

9. Ábrázold az $f(x) = 4x - 3$ függvény grafikonját! Döntsd el, hogy az adott pontok közül melyik van a grafikonon, melyik van fölötte, és melyik alatta!

$A(0; 0)$, $B(0; -3)$, $C(0; 2)$, $D(1; 1)$, $E(1; 2)$, $F(2; 2)$, $G(2; 5)$, $H(100; 397)$

10. Ábrázold az $f(x) = -2x + 4$ függvény grafikonját! Döntsd el, hogy az adott pontok közül melyik van a grafikonon, melyik van fölötte, és melyik alatta!

$A(0; 0)$, $B(-2; 0)$, $C(-1; 6)$, $D(1; 3)$, $E(2; 0)$, $F(5; 7)$, $G(6; -6)$, $H(100; -198)$

11. Add meg az $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$ utasítással megadott függvény értelmezési tartományát, majd ábrázold a függvény grafikonját! Mely számok alkotják a függvény értékkészletét?

12. Add meg az $f(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(x-2)(x-6)}$ utasítással megadott függvény értelmezési tartományát, majd ábrázold a függvény grafikonját! Mely számok alkotják a függvény értékkészletét?

A lineáris függvény grafikonjának jellemző tulajdonságai

1. példa

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

a) $f(x) = 2x$

b) $g(x) = 2x + 1$

c) $h(x) = 2x - 3$

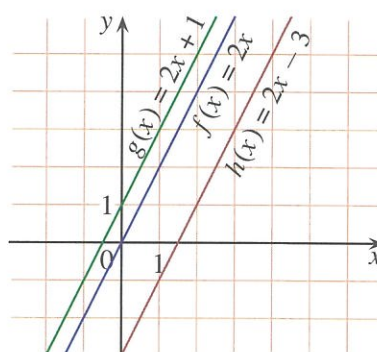
Megoldás

Mindegyik függvény hozzárendelési szabálya lineáris függvényt határoz meg, ezért a grafikonok egyenesek lesznek. Így elegendő két-két pontot meghatároznunk a grafikonokon.

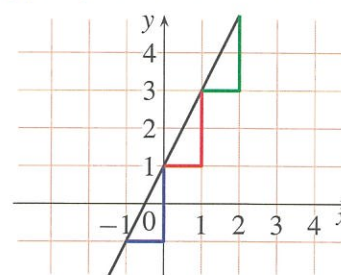
x	0	2
$2x$	0	4

x	0	2
$2x + 1$	1	5

x	0	2
$2x - 3$	-3	1



Észrevehetjük, hogy az egyenesek párhuzamosak. A hozzárendelési utasításban az x -es tag szorzótényezője mindig 2. Bárhol lépünk egyet jobbra vízszintesen, a függvény grafikonja mindig 2-t emelkedik. Ezt a 2-es számot hívjuk a fenti lineáris függvények **meredekségének**. A $g(x) = 2x + 1$ függvény grafikonjának egy kis részét kinagyítottuk, ott szemléltetjük mindezt. Ezt már tanultuk korábban az $f(x) = 2x$ egyenes arányosság kapcsán is.



2. példa

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

a) $f(x) = x + 3$

b) $g(x) = 2x + 3$

c) $h(x) = 3$

Megoldás

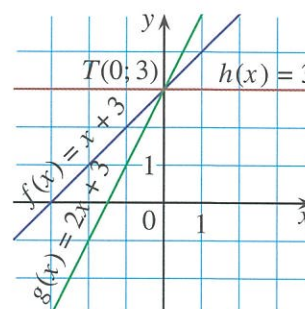
Mindegyik függvény hozzárendelési szabálya lineáris függvényt határoz meg, ezért a grafikonok egyenesek lesznek. Így elegendő két-két pontot meghatároznunk a grafikonokon.

x	0	2
$x + 3$	3	5

x	0	2
$2x + 3$	3	7

x	0	2
3	3	3

Észrevehetjük, hogy mindhárom egyenes áthalad a $T(0; 3)$ ponton, azaz az egyenesek ugyanabban a pontban metszik az y koordinátatengelyt.



Feladatok

1. Melyik hozzárendelés melyik grafikonhoz tartozik?

$$f(x) = 2x + 5$$

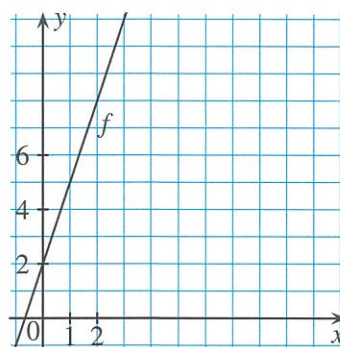
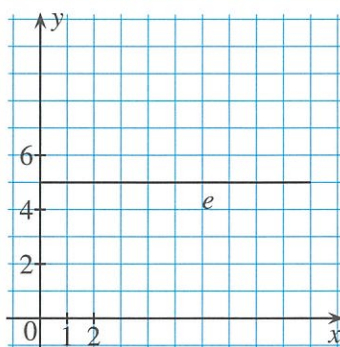
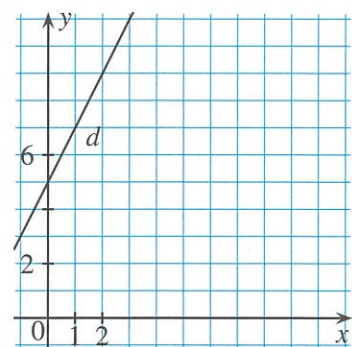
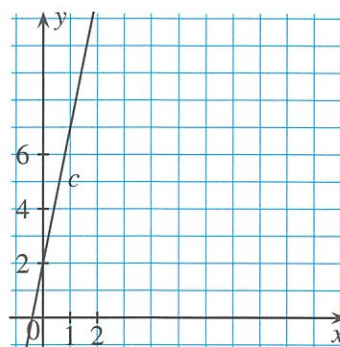
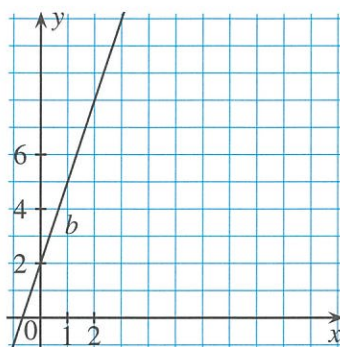
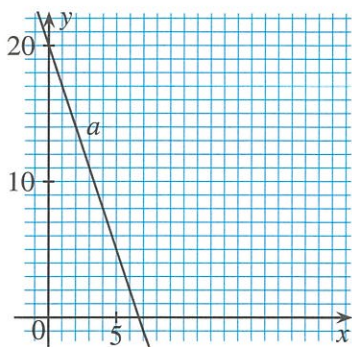
$$j(x) = 5$$

$$g(x) = 20 - 3x$$

$$k(x) = 5x + 2$$

$$h(x) = 3x + 2$$

$$l(x) = 2 + 3x$$



2. Melyik hozzárendelési szabály melyik grafikonhoz tartozik?

$$a(x) = 3x - 1$$

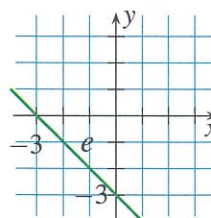
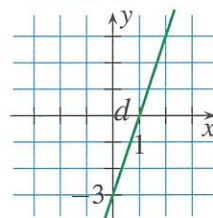
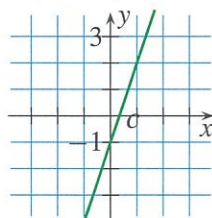
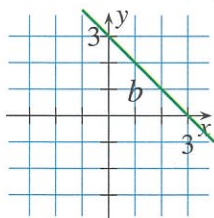
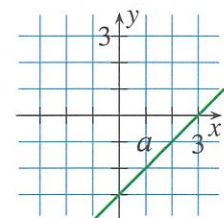
$$d(x) = -x + 3$$

$$b(x) = x - 3$$

$$e(x) = 3(x - 1)$$

$$c(x) = 3 - x$$

$$f(x) = -3 + 3x$$



3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

$$a) a(x) = x - 2$$

$$b) b(x) = x$$

$$c) c(x) = -2$$

Mit mondhatunk a három grafikonról? Melyik lesz egyenes arányosságot leíró grafikon?

4. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

$$a) a(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

$$b) b(x) = \frac{1}{2}x - 3$$

$$c) c(x) = \frac{1}{2}x$$

Mit mondhatunk a három grafikonról? Melyik lesz egyenes arányosságot leíró grafikon?

5. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

$$a) a(x) = 1,5x + 3$$

$$b) b(x) = 1,5x - 2$$

$$c) c(x) = 1,5x$$

Mit mondhatunk a három grafikonról? Melyik lesz egyenes arányosságot leíró grafikon?

6. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

a) $a(x) = -x + 3$

b) $b(x) = x + 3$

c) $c(x) = 3 - x$

Milyen közös tulajdonsága van a három grafikonnak? Észrevettél-e még valamit?

7. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

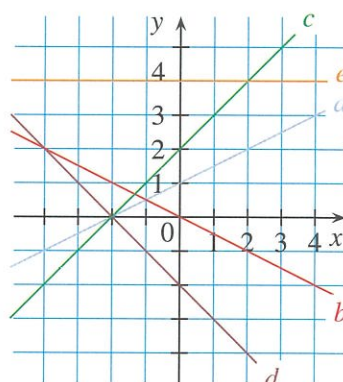
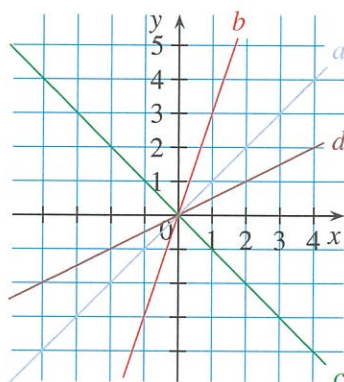
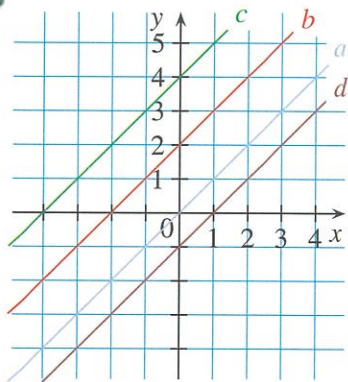
a) $a(x) = \frac{1}{6}x$

b) $b(x) = \frac{1}{3}x$

c) $c(x) = \frac{1}{2}x$

Melyik a legmeredekebb grafikon? Van-e közös pontja a három grafikonnak? Melyik lesz egyenes arányosságot leíró grafikon?

8. Keress szabályt a grafikonokhoz!



9. Készítsd el a lineáris függvény grafikonját, és add meg a hozzárendelési utasítást!

a) A függvény áthalad az $A(0; 2)$ ponton, és 1-et jobbra lépve 3-at emelkedik.

b) A függvény áthalad az $A(0; 2)$ ponton, és 1-et jobbra lépve 3-at süllyed.

c) A függvény áthalad az $A(2; 1)$ ponton, és 1-et jobbra lépve 2-t emelkedik.

d) A függvény áthalad az $A(2; 1)$ ponton, és 1-et jobbra lépve 2-t süllyed.

10. Gondoltam egy egyenesre. Mi lehet a hozzárendelési szabály, ha ez az egyenes áthalad a megadott pontokon?

a)

x	0	1
$f(x) = ?$	-2	-1

b)

x	3	4
$g(x) = ?$	1	3

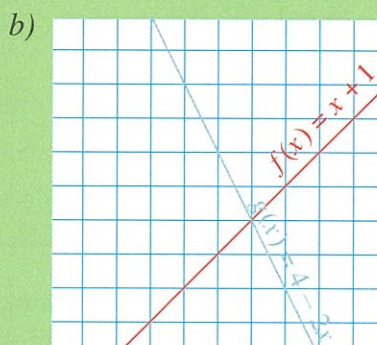
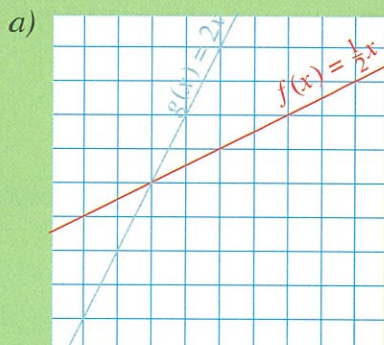
c)

x	-4	-6
$h(x) = ?$	11	13

d)

x	-2	2
$i(x) = ?$	-5	3

11. Rajzold le a koordináta-rendszer hiányzó tengelyeit!



12. Ábrázold az $f(x) = (2x - 3) - (x + 1)$ utasítással megadott függvény grafikonját!

13. Ábrázold az $f(x) = \frac{2x - 6}{x - 3}$ utasítással megadott függvény grafikonját!

A függvény értelmezési tartománya, értékkészlete

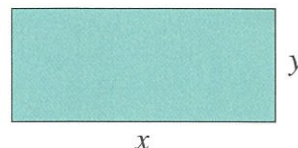
1. példa

- a) Egy téglalap kerülete 12 hosszúságegység. Egyik oldalának hosszát változtatva, hogyan változik a másik oldalának hossza, ha a téglalap kerülete továbbra is 12 hosszúságegység?
- b) Készítsük el az $f(x) = 6 - x$ lineáris függvény grafikonját!
- c) Keressünk olyan egész számokat, amelyeknek az összege 6!

Megoldás

a) Jelöljük a téglalap oldalainak hosszát x -szel és y -nal.

A $K = 2(x + y)$ összefüggés miatt $12 = 2(x + y)$, innen $y = 6 - x$, azaz a téglalap egyik oldalának változásától függ a másik oldal hossza. Ezt a függvénykapcsolatot az $f(x) = 6 - x$ lineáris függvény írja le, ahol $0 < x < 6$ és $0 < f(x) < 6$.

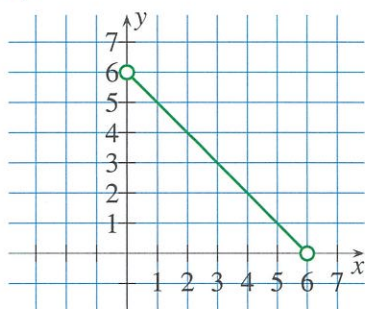


c) Az egész számokat x -szel és y -nal jelölve: $x + y = 6$. Innen $y = 6 - x$, azaz az egyik számtól függ a másik szám, az $f(x) = 6 - x$ hozzárendelési utasítás szerint. Itt x csak egész szám lehet.

Mindhárom hozzárendelési utasítás azonos, ezért elég egy közös érték-táblázatot készíteni.

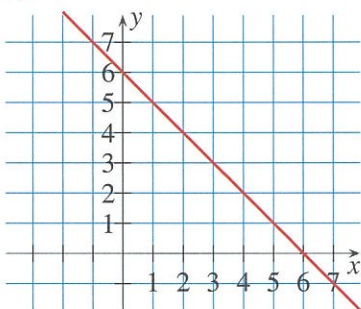
x	2	4
$f(x) = 6 - x$	4	2

a)



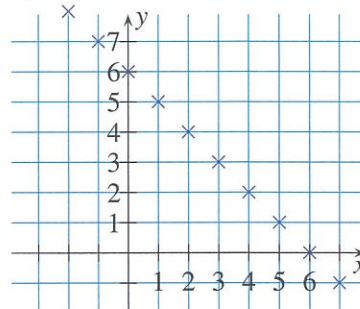
A grafikon: egy nyílt szakasz,
alaphalmaz: $0 < x < 6$,
képhalmaz: $0 < y < 6$.

b)



A grafikon: egyenes,
alaphalmaz: az összes szám,
képhalmaz: az összes szám.

c)



A grafikon: egy egyenesen elhelyezkedő pontok,
alaphalmaz: egész számok halmaza,
képhalmaz: egész számok halmaza.

Az A alaphalmaz elemei alkotják a függvény értelmezési tartományát, ezt ebben a könyvben ÉT-vel jelöljük.

Ha az A alaphalmazról nem teszünk külön említést, és az számhalmaz, akkor

$$A = \{\text{az összes eddig tanult szám}\}.$$

Az értelmezési tartomány elemeihez hozzárendelt értékek halmazát a függvény **értékkészletének** hívjuk. Ez a K képhalmaz részhalmaza. Jelölése: ÉK.

Az a) feladatban

ÉT olyan x számokból áll, amelyekre $0 < x < 6$,
ÉK olyan y számokból áll, amelyekre $0 < y < 6$.

A b) feladatban

ÉT = {az összes eddig tanult szám},
ÉK = {az összes eddig tanult szám}.

A c) feladatban

ÉT = {egész számok}, ÉK = {egész számok}.

2. példa

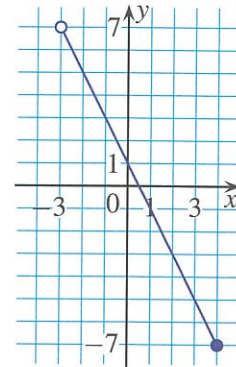
Készítsük el az $f(x) = -2x + 1$ függvény grafikonját, ha $\text{ÉT} = \{-3 < x \leq 4\}$. Adjuk meg a függvény értékkészletét is!

Megoldás

A függvény grafikonja egy egyenes lesz, ezért elegendő két pontját meghatározunk. Célszerű az értelmezési tartomány két „végpontjában” kiszámolni a függvény helyettesítési értékét, mert az fogja megadni az értékkészletet is.

$$f(-3) = -2 \cdot (-3) + 1 = 7 \quad f(4) = -2 \cdot 4 + 1 = -7$$

$$\text{ÉK: } \{-7 \leq y < 7\}$$



Feladatok

1. Készítsd el az $f(x) = 3x - 2$ függvény grafikonját, és add meg a függvény értékkészletét is, ha az értelmezési tartomány

a) $\text{ÉT} = \{-2 \leq x \leq 2\}$,

b) $\text{ÉT} = \{\text{természetes számok}\}$.

2. Készítsd el az $f(x) = -3x + 2$ függvény grafikonját, és add meg a függvény értékkészletét is, ha az értelmezési tartomány

a) $\text{ÉT} = \{-2 \leq x \leq 2\}$,

b) $\text{ÉT} = \{\text{természetes számok}\}$.

3. Készítsd el az $f(x) = x + 2$ függvény grafikonját, és add meg a függvény értékkészletét is, ha az értelmezési tartomány

a) $\text{ÉT} = \{-5 \leq x \leq 4\}$,

b) $\text{ÉT} = \{\text{egész számok}\}$.

4. Keress két olyan

a) egész számot,

b) tetszőleges számot, amelyek különbsége 5.

Írd fel a számpárok között fennálló kapcsolatot leíró hozzárendelési utasítást!

Készítsd el a kapott függvény grafikonját, és add meg a függvény értékkészletét is!

5. Rajzold meg a következő három függvény grafikonját!

$f(x) = 2,5x + 5$ $\text{ÉT} = \{-2 \leq x \leq 0\}$,

$g(x) = 5 - 2,5x$ $\text{ÉT} = \{0 < x \leq 2\}$,

$h(x) = 2$ $\text{ÉT} = \{-1,2; 1,2\}$.

Milyen alakzatot kaptál?

Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

Az egyenletek és egyenlőtlenségek megoldására nagyon sokféle módszer van.

Eddig lebontogatással és mérlegelvvel oldottuk meg az ilyen feladatokat. Most egy másik módszert is megismerünk.

1. példa

„Számfogócska” segítségével oldjuk meg a $2x + 3 = \frac{1}{2}x - 3$ egyenletet, illetve a $2x + 3 < \frac{1}{2}x - 3$ egyenlőtlenséget!

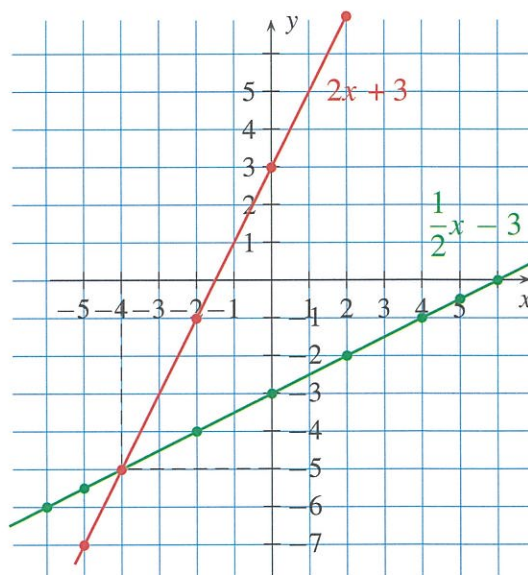
Megoldás

Az x -nek értéket adunk, és kiszámoljuk az egyes kifejezések értékeit. A játékhoz jegyzőkönyvet készítünk, és koordináta-rendszerben követjük a fogócskát.

Jegyzőkönyv:

Grafikon:

x	$2x + 3$		$\frac{1}{2}x - 3$
6	15	$15 >$	0
5	13	$13 \frac{1}{2} >$	$-\frac{1}{2}$
4	11	$12 >$	-1
2	7	$9 >$	-2
0	3	$6 >$	-3
-2	-1	$3 >$	-4
-4	-5	=	-5
-5	-7	$< \frac{3}{2}$	$-\frac{11}{2}$
-6	-9	< 3	-6



A $2x + 3 = \frac{1}{2}x - 3$ egyenlet megoldása:
 $x = -4$

A grafikonról azt látjuk, hogy az egyenlet két oldalán álló kifejezéseknek egy-egy lineáris függvény felel meg, amelyek grafikonjai éppen az $x = -4$ értéknél metszik egymást.

A grafikonról azt is leolvashatjuk, hogy ennek az egyenletnek nem lehet több megoldása, hiszen két egyenesnek legfeljebb 1 metszéspontja van. A $2x + 3 < \frac{1}{2}x - 3$ egyenlőtlenség megoldása $x < -4$, hiszen ekkor a piros kifejezéshez tartozó helyettesítési értékek kisebbek a zöld kifejezéshez tartozó helyettesítési értékeknél.

Ez a grafikonon úgy látszik, hogy az $x < -4$ értékekre a piros grafikon a zöld grafikon alatt van

Például: $x = -5$ értéknél $-7 < -\frac{11}{2}$. Ezt a feladatot algebrai úton is meg tudjuk oldani:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= \frac{1}{2}x - 3 & / + 3 \\ 2x + 6 &= \frac{1}{2}x & / \cdot 2 \\ 4x + 12 &= x & / - x \\ 3x + 12 &= 0, & \text{innen } x = -4 \end{aligned}$$

2. példa

Eszti reggel 8-kor indul el biciklivel az 56 km-re levő faluban élő nagymamájához. Óránként átlagosan 16 km-t halad, míg bátyja, Zoli egy órával később indul, mondván, hogy úgyis utoléri Esztit, hiszen ő 24 km-t tud óránként megtenni.

Mikor éri utol Zoli a húgát, és ekkor hány km-re vannak a nagymamájuktól?

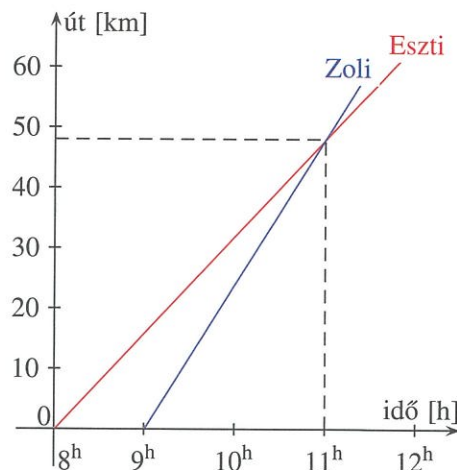


Megoldás

A feladatot grafikusán oldjuk meg.

Az eltelt időt Eszter indulásától mérjük órákban. Így a kislány által megtett utat az $e(x) = 16x$ lineáris függvény írja le. Zoli 1 órával később indult, és szintén egyenletes sebességgel halad, ezért az út-idő grafikonon egyenes lesz. Egy óra múlva a 24-es km-kőnél lesz, ezért az ő mozgását az $z(x) = 24(x - 1)$ függvény írja le, amelyet a zárójel felbontásával $z(x) = 24x - 24$ alakba írhatunk. Célszerű az időtengelyt a 8 órával indítani.

A grafikonról leolvasható, hogy 11 órakor éri utol Zoli Esztit, és ekkor a 48-as km-kőnél vannak, azaz még 8 km-t kell mindkettőjüknek megtenniük a nagymama falujáig.



Feladatok

1. Olvasd le a grafikonról a feladatok megoldásait, és jelöld őket a számegyenesen! A füzetedben dolgozz! Ellenőrizz behelyettesítéssel!

a) $x - 4 = 2 - 2x$ (Pirossal színezz!)

b) $x - 4 > 2 - 2x$ (Kékkel színezz!)

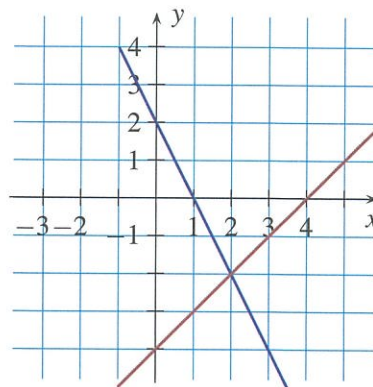
c) $x - 4 \leq 2 - 2x$ (Zölddel színezz!)

2. Oldd meg grafikusán a következő feladatokat!

a) $3x - 1 < x + 3$ b) $\frac{1}{3}x - 2 \geq x - 6$ c) $x - 9 < x - 7$

3. Oldd meg grafikusán a következő feladatokat!

a) $4x - 2 \leq x + 4$ b) $\frac{x+2}{2} < -2x + 11$ c) $2x - 4 < x - 4$



4. a) Melyik lehet az a két szám, amelyek összege 4? Az egyik szám függvényében írd fel a másik számot, és a kapott függvényt ábrázold koordináta-rendszerben!
b) Melyik lehet az a két szám, amelyek összege 4 és különbségük 1? A feladatot grafikusar oldd meg!
5. Melyik az a két szám, amelyek összege -6 és különbsége 2?
6.  Az agár meglátja a tőle 100 m-re levő nyulat, és $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel üldözőbe veszi. A nyúl azonnal menekülni kezd, de csak 15 m-t képes megtenni egy másodperc alatt. Mennyi ideig tart az üldözés? Oldd meg a feladatot grafikusan! 
7. Pista és Zoli két, egymástól 85 km-re levő faluban nyaralnak. Elhatározzák, hogy hétfőn regge 6-kor kerékpárral elindulnak egymás felé, és útközben találkoznak. Pista óránként 14 km-t tesz meg. Zoli elaludt, és csak fél nyolckor indult, de ő óránként 18 km-t tekert. Mikor és hol találkoznak, és melyik fiú tesz meg hosszabb utat a találkozásig? Oldd meg a feladatot grafikusan!
8. Lindáék családja egy DVD-kölcsönzőbe szeretne beiratkozni. Az egyik kölcsönzőben 1000 Ft az éves tagdíj, és a kölcsönzés díja 400 Ft lemezenként, míg a másikban 2000 Ft az éves tagdíj, de lemezenként csak 350 Ft-ot kell fizetni. Hány lemez kölcsönzésekor kell azonos díjat fizetni a két klubban? Hány lemez kölcsönzésekor célszerűbb az első, illetve a második DVD-kölcsönzőbe beiratkozni?
9. Hány perc alatt szerzi meg a cápa a tőle 200 m-re levő áldozatát, a tonhalat, ha az észreveszi a cápát, és elkezd elúszni előle? A tonhal óránként 18 km-t, míg a cápa 36 km-t tesz meg.
10. Mennyi idő múlva éri utol a rendőrautó a bankrablót, ha az $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel menekül, és a rendőrök a rablást követő 10. percben kezdték el üldözni $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességű, szirénázó rendőrautójukkal?

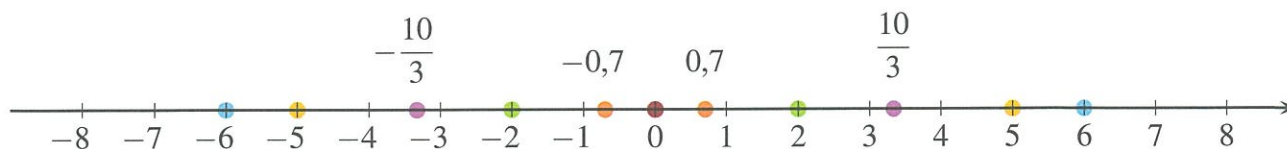


A függvény fontos tulajdonsága, néhány nemlineáris függvény



A számok abszolút értéke

A számegyenesen megjelöltünk néhány számot és azok ellentettjét is:



Ha a számegyeneset a 0 pontnál félbehajtanánk, akkor az azonos színnel jelölt pontok (azaz a számokat és azok ellentettjeit ábrázoló pontok) éppen fednék egymást.

Egy számnak a számegyenesen a 0 ponttól való távolságát a szám abszolút értékének nevezzük. Pozitív szám és a 0 abszolút értéke: maga az eredeti szám. Negatív szám abszolút értéke: a szám ellentettje (ez egy pozitív szám).

Jelölése: $| \cdot |$

Például: +6 abszolút értéke 6, melyet így jelölünk: $|+6| = 6$
 $-\frac{10}{3}$ abszolút értéke $\frac{10}{3}$, melyet így jelölünk: $|\frac{-10}{3}| = \frac{10}{3}$
 0 abszolút értéke 0, melyet így jelölünk: $|0| = 0$

Abszolútérték-függvény

1. példa

Minden számhoz rendeljük hozzá az abszolút értékét!

Megoldás

Ha a számokat x -szel jelöljük, akkor a hozzárendelés matematikai leírása: $f(x) = |x|$.

Néhány x értékkel táblázatot készítünk:

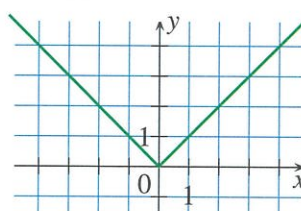
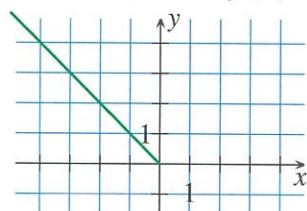
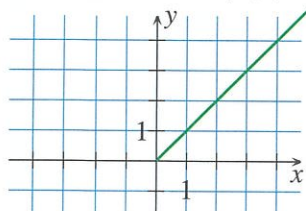
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x $	3	2	1	0	1	2	3

Észrevehetjük, hogy az $f(x) = |x|$ függvény két részre bontható:

Ha $x \geq 0$, akkor $f(x) = x$.

Ha $x < 0$, akkor $f(x) = -x$.

Tehát:



Az abszolútérték-függvény nem lineáris függvény, hiszen grafikonja nem egyenes.

$\mathbb{E}T = \{\text{az összes tanult szám}\}$, $\mathbb{E}K = \{\text{nemnegatív számok}\}$. A grafikonnak a $(0;0)$ pontban töréspontja van.

A függvény fontos tulajdonsága:

Ha $x \leq 0$, akkor a függvény **csökkenő**, azaz nagyobb x értékhez kisebb függvényérték tartozik;

Ha $x \geq 0$, akkor a függvény **növekvő**, azaz nagyobb x értékhez nagyobb függvényérték tartozik.

Másodfokú függvény

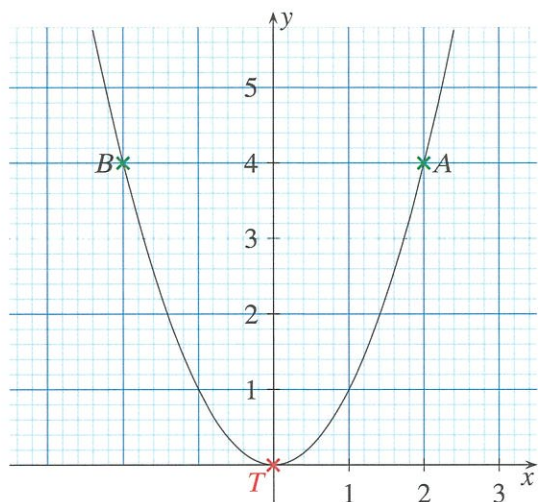
1. példa

Minden számhoz rendeljük hozzá a négyzetét!

Megoldás

Ha a számokat x -szel jelöljük, akkor a hozzárendelési szabály: $f(x) = x^2$. Célszerű értéktáblázatot készíteni:

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x) = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9



Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját **parabolának** nevezzük, értelmezési tartománya:

$\text{ÉT} = \{\text{az összes tanult szám}\}$.

Minden szám négyzete nemnegatív szám, és minden nemnegatív szám szerepel a hozzárendelésben.

A másodfokú függvény értékkészlete:

$\text{ÉK} = \{\text{nemnegatív számok}\}$.

Mivel az azonos abszolút értékű számok négyzete egyenlő, a grafikon szimmetrikus az y tengelyre. [Például, $A(2;4)$ tükörképe $B(-2;4)$.]

A parabola szimmetriatengelyén levő pontját **tengelypontnak** nevezzük: $T(0;0)$.

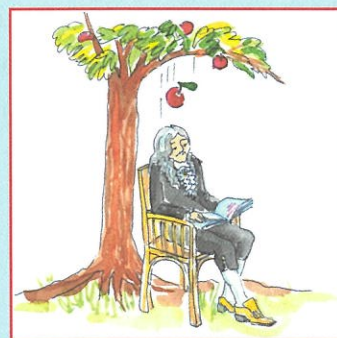
A függvény fontos tulajdonsága:

ha $x \leq 0$, akkor a függvény **csökkenő**, azaz nagyobb x értékhez kisebb függvényérték tartozik;

ha $x \geq 0$, akkor a függvény **növekvő**, azaz nagyobb x értékhez nagyobb függvényérték tartozik.

A híres, bár nem bizonyított történet szerint Isaac Newton [ejtsd: ájszek nyúton] (1642–1727, angol tudós) akkor kezdett a tömegvonzásról elmélkedni, amikor észrevette, hogy egy alma leesett a fáról. Azon is elgondolkodott, hogy akkor vajon miért nem esik le a Hold is.

Galilei olasz tudós (1600 körül) fedezte fel azt a nevezetes tényt, hogy amennyiben az esés zavartalan, akkor minden tárgy ugyanakkora gyorsulással esik.



Törfüggvény

3. példa

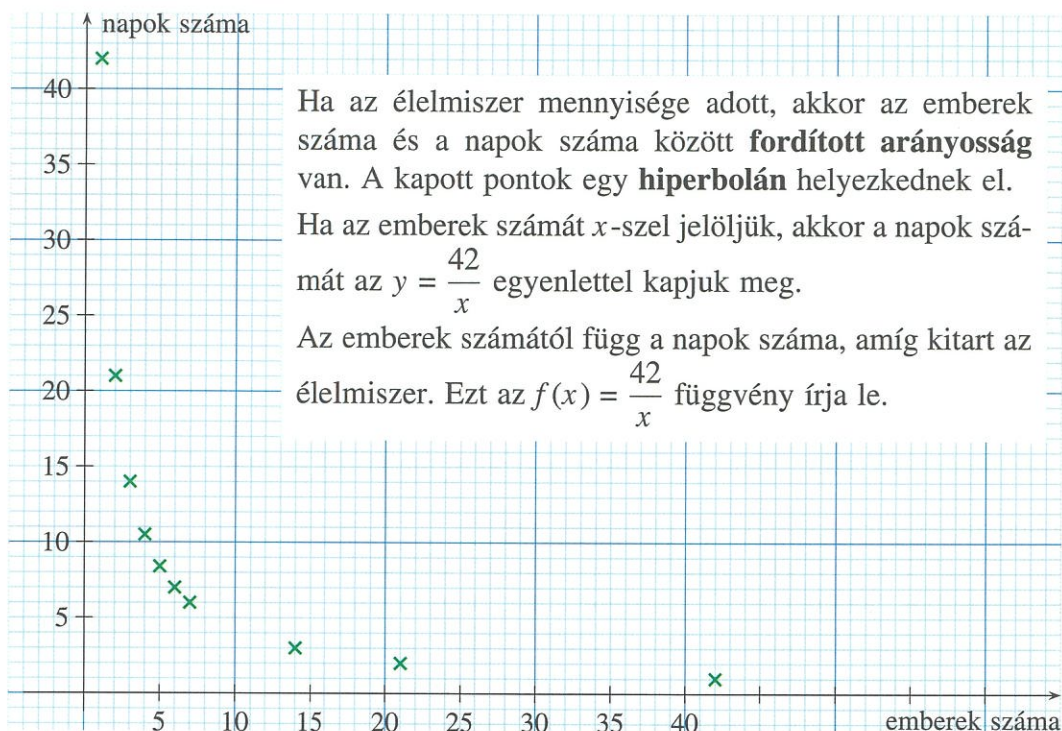
Egy háromtagú hegymászó expedíció összekészített élelmiszer-mennyisége két hétre elég. Hány napig tart ki ugyanez az élelmiszer-mennyiség, ha más létszámú csoport indul útnak?



Megoldás

Készítsünk értéktáblázatot néhány értékre, és ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat!

Emberek száma	1	2	3	4	5	6	7	14	21	42
Napok száma	42	21	14	10,5	8,4	7	6	3	2	1



ÉT = {1; 2; 3; ...; 41; 42}. ÉK = {1; 2; 3; ...; 8; 4; 10; 5; ...; 42}.

Az ÉT-ban csak pozitív egészek, míg az ÉK-ben törtszámok is vannak.

Feladatok

1. Keresd a párját! Melyik pont melyik függvény grafikonján van rajta?

A) $a(x) = x^2$

B) $b(x) = 2x$

C) $c(x) = x + 2$

$P(-1; 1)$

$Q(2; 4)$

$R(7; 9)$

$S(-4; -8)$

$T(-4; 16)$

2. Ha egy követ $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel felfelé hajítunk, akkor annak a mozgását az ábrán látható út-idő grafikonnal szemléltethetjük. A mozgást leíró függvény: $f(t) = 30t - 5t^2$, ahol t az eltelt időt jelenti másodpercben mérve.

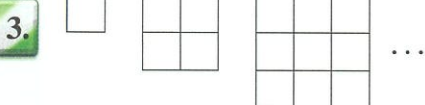
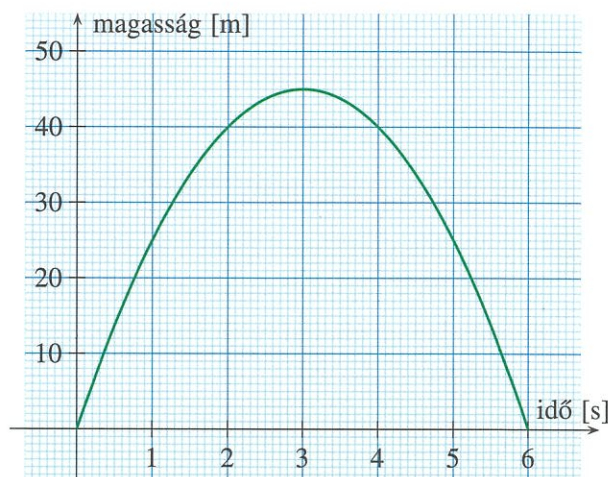
a) Mi a görbe neve?

b) Milyen maximális magasságot ért el a kő?

c) Mikor volt a kő 40 m magasan?

d) Milyen hosszú ideig volt a kő 40 m fölött?

e) Mikor esett vissza a földre?



Hány kis négyzetet látsz az ábrán? Ábrázold grafikusán az összetartozó értékeket! Lehetséges-e, hogy 256 vagy 1000 kis négyzet legyen valamelyik ábrán?

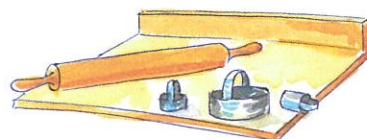
4. Az ejtőernyő a repülőgépből való kiugrás után 5 másodperccel nyílik ki. Hány métert zuhan az ugró ez idő alatt? (A megtett út és az eltelt idő közötti összefüggést az $s = 5t^2$ képlettel lehet számolni.)



5. A szabadon eső testek által megtett utat a Földön az $s = 5t^2$ képlettel, míg a Holdon az $s = 0,8t^2$ képlettel lehet kiszámítani. Közös koordináta-rendszerben ábrázold a két helyen érvényes út-idő grafikonokat! Olvasd le a grafikonokról, hogy 2, 3, 4, 5 másodperc elteltével mennyivel tesz meg hosszabb utat a Föld felé zuhanó test! A leolvasott értékeket számolással is ellenőrizd!

Mennyi idő alatt ér a Földre, illetve a Holdra egy 30 m magasról leejtett kő?

6. Pogácsaszagató-készletünk legkisebb tagjának sugara 1 cm, és mindegyik szagató 0,5 cm-rel nagyobb sugarú az előzőnél. A készlet 4 darabos. Készíts értéktáblázatot arról, hogy a különböző sugarú szagatók mekkora alapterületű tésztát vágnak ki! Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat! Milyen függvényt lehet felírni a sugár és a terület között?



7. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

Add meg a függvények értékkészletét is!

Hol csökkenőek és hol növekvőek a függvények?

a) $f(x) = |-x|$

b) $g(x) = -|x|$

8. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonjait!

Add meg a függvények értékkészletét is!

Hol csökkenőek és hol növekvőek a függvények?

a) $f(x) = |x|$

b) $g(x) = |x| - 2$

9. Készítsd el az

a) $a(x) = \frac{3}{x} \quad x \neq 0,$

b) $b(x) = -\frac{3}{x} \quad x \neq 0$

függvények grafikonjait! Milyen kapcsolat van a két grafikon között?

10. Egy téglalap területe 12 cm^2 . Egyik oldalának hosszát változtatva hogyan változik a másik oldal hossza, ha a téglalap területe változatlanul 12 cm^2 ?

Készítsd el az általad felírt függvény grafikonját, és add meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét is!

- ★ 11. Hol vannak a síkon azok a $P(x; y)$ koordinátájú pontok, amelyekre igaz, hogy

a) $y = \frac{1}{x},$

b) $x \cdot y = 1,$

c) $x \cdot y = 0?$

12. Mekkora a kerülete és a területe annak a háromszögnek, amelyet az $f(x) = 2 - |x|$ függvény grafikonja és az x tengely határol?

13.



A folyóparton sportpálya céljára téglalap alakú telket akarunk elkeríteni 400 m hosszú kerítéssel. (A vízparti részhez nem kell kerítés.)

Mekkorának válasszuk a téglalap oldalait, ha azt akarjuk, hogy a sportpálya területe a lehető legnagyobb legyen?

A számtani sorozat

A mindennapi életben gyakran van szükség arra, hogy sorba rendezzük a dolgokat.

- Az orvosi rendelőben a betegek érkezési sorrendjüknek megfelelő sorszámot kapnak.
- Egy osztály tanulóit névsor szerint írják a naplóba.
- A testnevelésórán „tornasorba” kell állni.
- A szótárban a szavakat az ábécé rendje szerint találjuk.
- A bolygókat a Naptól való távolságuk sorrendjében szoktuk felsorolni.

A sorba rendezés lényege, hogy egy adott halmaz elemeinek rendre sorszámot adunk így: első, második, harmadik...

Így egy speciális függvényt határozunk meg, hiszen a pozitív egész számokhoz egyértelműen rendeljük hozzá a vizsgált halmaz elemeit. Az így meghatározott függvényeket sorozatoknak nevezzük.

Például a bolygók Naptól való távolsága szerint a következő a sorrend:

az első bolygó:	a Merkúr	közepes távolság	58	millió km
a második:	a Vénusz	"	108	"
a harmadik:	a Föld	"	149,6	"
a negyedik:	a Mars	"	228	"
az ötödik:	a Jupiter	"	778	"
a hatodik:	a Szaturnusz	"	1428	"
a hetedik:	az Uránusz	"	2872	"
a nyolcadik:	a Neptunusz	"	4498	"

Sorozatoknál a sorszámnevek kiírása helyett bevezették a következő jelölést: $a_1, a_2, a_3 \dots$. Kiolvasható: a sorozat első eleme, a sorozat második eleme, harmadik eleme vagy a sorozat első tagja, második tagja, harmadik tagja...

A bolygós példára alkalmazva például: $a_3 = \text{Föld}$. A bolygó neve után meg tudjuk mondani, hogy az hányadik tagja a sorozatnak. Például a Jupiter az ötödik elem, jelöléssel: Jupiter = a_5 .

1. példa

a) Soroljuk fel nagyság szerint a pozitív páros számokat!

b) Megadjuk egy sorozat első néhány elemét: $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7$. Mi lehet a sorozat képzési szabálya?

Megoldás

a) Pozitív páros számok halmaza = $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

A sorozatra tanult új jelölést használva:

Az első pozitív páros szám:

$$a_1 = 2 (= 2 \cdot 1)$$

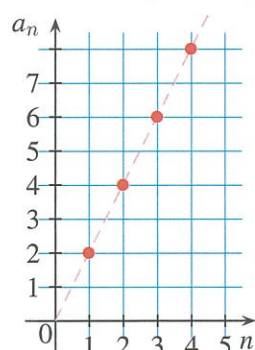
A második pozitív páros szám:

$$a_2 = 4 (= 2 \cdot 2)$$

A harmadik pozitív páros szám:

$$a_3 = 6 (= 2 \cdot 3)$$

Észrevehetjük, hogy az n -edik pozitív páros szám: $a_n = 2 \cdot n$.



A függvényeknél használatos jelöléssel is leírhatjuk a feladatot: a sorszámhoz hozzárendeljük a megfelelő páros számot.

$$a(1) = 2, \quad a(2) = 4, \quad a(3) = 6, \quad \dots, \quad a(n) = 2 \cdot n.$$

Elkészítjük a páros számok sorozatának grafikonját (a tengelyekre a sorozat elemének sorszámát, illetve az elemek értékét szoktuk felírni).

A grafikon pontokból áll, hiszen n csak pozitív egész szám lehet. A grafikon pontjai az $f(x) = 2x$ lineáris függvény grafikonján vannak. A sorozat elemének még egy fontos tulajdonságát ismerjük: a szomszédos elemek különbsége 2, vagyis $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 2$.

b) A kérdésre többféle megoldás is adható, hiszen

- lehet, hogy a páratlan prímszámok sorozatáról van szó, ekkor $a_4 = 11$, $a_5 = 13$, $a_6 = 17 \dots$
- lehet, hogy az egynél nagyobb páratlan számok sorozatának első három elemét adtuk meg, ekkor $a_4 = 9$, $a_5 = 11$, $a_6 = 13 \dots$
- lehet, hogy egy olyan sorozatot adtunk meg, melynek első eleme a 3 és minden további eleme 2-vel több az előzőnél, ekkor az előzőleg meghatározott sorozatot kapjuk csak más utasítással: $a_4 = 9$, $a_5 = 11$, $a_6 = 13 \dots$
- lehet, hogy $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 13$, $a_5 = 15$, $a_6 = 17$, $a_7 = 23$, $a_8 = 25$, $a_9 = 27 \dots$

Tanulság:

Egy sorozat első néhány elemének ismerete nem határozza meg egyértelműen a sorozatot. Egy sorozatot csak akkor tekintünk ismertnek, ha megadjuk annak képzési szabályát is.

2. példa

Az iskolai szavalóversenyre berendezték a tornatermet. Az első sorba 10 széket tettek, a következőbe 14-et, és minden további sorba 4-gyel többet, mint az előző sorba. Összesen 6 sor szék fért el.

Hány szék került az utolsó sorba?

Összesen hány vendég nézhette ülve az előadást?

Megoldás

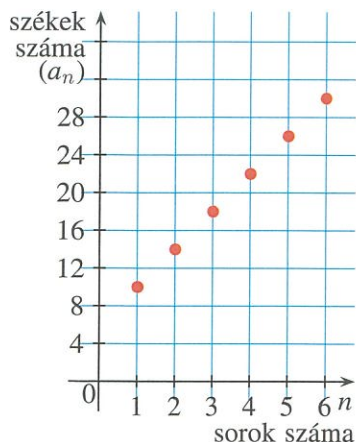
Sorok száma	1	2	3	4	5	6
Székek száma	10	14	18	22	26	30

Összesen: $10 + 14 + 18 + 22 + 26 + 30 = 120$

Tehát a hatodik sorban 30 szék volt, és összesen 120 ülőhely volt a tornateremben.

Lerajzoljuk a székek számának megfelelő sorozathoz tartozó grafikon:





$$\begin{aligned} a_1 &= 10 \\ a_2 &= 14 \\ a_3 &= 18 \\ a_4 &= 22 \\ a_5 &= 26 \\ a_6 &= 30 \end{aligned}$$

Ebben a sorozatban minden elem 4-gyel több az előző elemnél, azaz a **szomszédos elemek különbsége 4**.

Ha közvetlenül szeretnénk volna meghatározni a hatodik sorba férő székek számát, így is eljárhattunk volna: $a_6 = 10 + 4 \cdot 5 = 10 + 20 = 30$.

Az első példában a szomszédos elemek különbsége 2 volt, itt pedig 4. Az ilyen képzési szabállyal előállítható sorozatok külön nevet is kaptak a matematikában.

Számtani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot, amelyben a második tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagjához egy – a sorozatra jellemző – számot hozzáadunk.

Megadjuk az első elemet a_1 -et, és az állandó számot, d -t (a latin eredetű differencia = különbség szó kezdőbetűjéből).

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

$$\vdots$$

$$\text{Például: } a_2 = 10 + 4 = 14$$

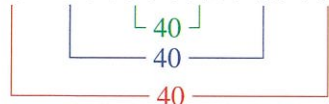
$$a_3 = 14 + 4 = 10 + 2 \cdot 4 = 18$$

$$a_4 = 18 + 4 = 10 + 3 \cdot 4 = 22$$

$$\vdots$$

Hogyan lehet ügyesen összeadni a számtani sorozat első néhány elemét?

$$10 + 14 + 18 + 22 + 26 + 30$$



Párosítva az összeadandókat 3 párt kapunk, melyek összege egyaránt 40, így

$$10 + 14 + 18 + 22 + 26 + 30 = 3 \cdot 40 = 120.$$

Babilóniában Kr. e. VI–III. században már ismertek eljárást a számtani sorozat elemeinek összegzésére. A hinduk az V–XII. században, a kínaiak pedig a VI–IX. században jöttek rá az összegzési képletre.

A képen a világ egyik legszebb és legjobb állapotban megmaradt görög színháza látható. Kr. e. a III. században kezdték építeni, és Kr. e. a II. században lett kész. A nézőterét 2 szektorra osztották fel. Az elsőben 34 sor van, és 12 részre van felosztva, míg a felső szektorban 22 rész található, és minden részben 21 sor van. Összesen 12 300 ember fér el a tökéletes akusztikájú nézőtéren.

(Epidaurus, Görögország)

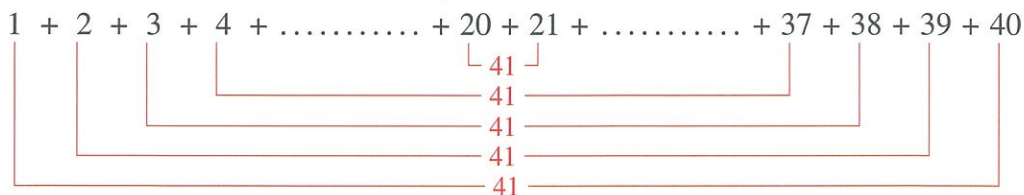
3. példa

Adjuk össze a számokat 1-től 40-ig!

Megoldás

Az $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 40$ összeg kiszámítása nem nehéz, de meglehetősen unalmas feladat.

Célszerű csoportosítással egyszerűbben elvégezhető az összeadás:



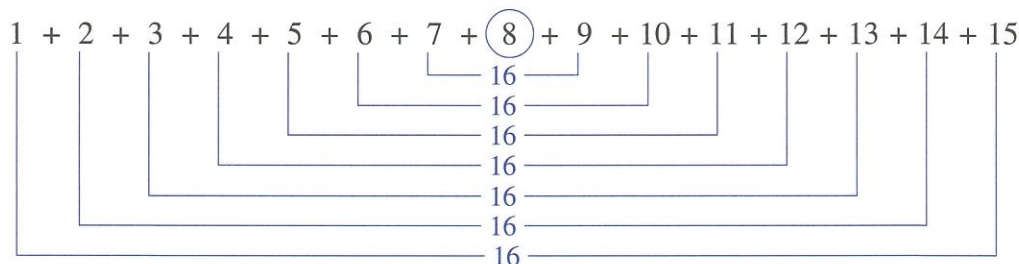
A második elem 1-gyel több az elsőnél, míg az utolsó előtti 1-gyel kevesebb a 40-nél.

A harmadik elem 2-vel több az elsőnél, míg hátulról a harmadik 2-vel kevesebb a 40-nél. Ezért minden pár értéke azonos: 41.

Összesen 20 pár van, ezért az összeg: $20 \cdot 41 = 820$.

$$\text{Összegként: } \frac{40}{2} \cdot (a_1 + a_{40}) \text{ eredményre jutottunk.}$$

Ha az összeadandók száma páratlan, akkor is elvégezhető hasonló módszerrel az összeadás.



Minden pár számtani közepe éppen a középső elem: $\frac{1 + 15}{2} = \frac{2 + 14}{2} = \dots = 8$

Így az összeg: $15 \cdot \frac{1 + 15}{2} = 15 \cdot 8 = 120$.

Az előző példát a „matematikusok fejedelme”, Gauss (1777–1855), német matematikus, fizikus és csillagász 6 éves korában oldotta meg.

A gyermek Gauss tanítója már korán észrevette tanítványa kivételes tehetségét. Az akkori idők megszokott módján a tanító egyszerre több osztállyal foglalkozott. Ugyanabban a teremben együtt volt mind a négy osztály. Míg a tanító az egyik évfolyamot irányította, addig a többinek valamilyen önálló munkát adott. Egy ilyen alkalommal a kis Gauss osztálya azt a feladatot kapta, hogy adják össze a természetes számokat 1-től 40-ig. Alig tűzte ki a tanító a feladatot, a kis Gauss már vitte is ki a palatábláját a katedra asztalára, és szász tájszólással mutatta az eredményt: „Da ligget es” (itt fekszik). A tanító már-már megfenyítette volna, amikor a szeme a palatáblán megakadt a helyes eredményen (820). „Hogy kaptad meg az eredményt?” – kérdezte. A kisfiú mint magától értetődő felelte: 40 meg 1 az 41, 39 meg 2 az 41. Húsz ilyen pár van, tehát az eredmény 20-szor 41, azaz 820. A tanító nem sajnálta a fáradságot. A rendkívüli gyermekről jelentést tett előjáróinak, és a fiú híre csakhamar eljutott a braunschweigi herceghez. A herceg is segítőkész volt. Kezébe vette a csodagyermek neveltetését.

Így került a szegény fiúcska gimnáziumba és azután a göttingeni egyetemre.

(Sain Márton: Matematikatörténeti ABC. Nemzeti Tankönyvkiadó, 1993)

4. példa

Írjuk fel a számtani sorozatok első hat elemét, és készítsük el a hozzájuk tartozó grafikonokat!

a) $-2; -0,5; 1 \dots$

b) $a_n = 3$

c) $a_1 = 3; d = -2$

d) $a_1 = \frac{1}{3}; a_2 = \frac{1}{4}$

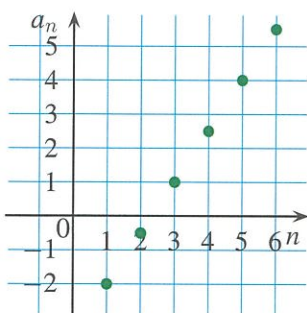
Megoldás

a) A számtani sorozat differenciáját megkapjuk, ha bármelyik elemből kivonjuk az öt megelőző elemet.

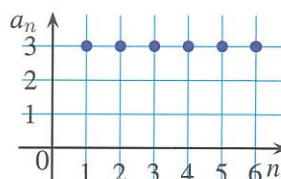
$$d = a_2 - a_1 = -0,5 - (-2) = 1,5.$$

Az elemek: $-2; -0,5; 1; 2,5; 4; 5,5$.

Egy növekvő számtani sorozatot kaptunk.



b) A sorozat minden eleme 3.



c) $a_1 = 3; d = -2$

$$a_2 = a_1 + d = 3 - 2 = 1$$

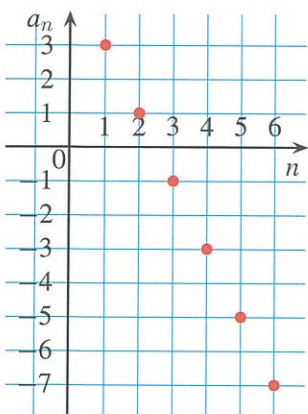
$$a_3 = a_2 + d = 1 - 2 = -1$$

$$a_4 = a_3 + d = -1 - 2 = -3$$

$$a_5 = a_4 + d = -3 - 2 = -5$$

$$a_6 = a_5 + d = -5 - 2 = -7$$

A számtani sorozat csökkenő.



d) $a_1 = \frac{1}{3}; a_2 = \frac{1}{4}$.

Így a sorozat differenciája:

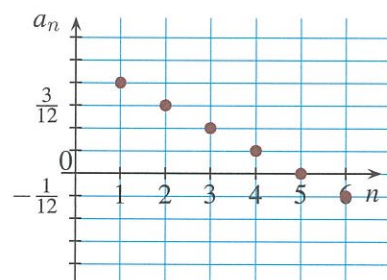
$$d = a_2 - a_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}.$$

Célszerű minden törtet 12-edekben felírni.

$$a_1 = \frac{4}{12}; a_2 = \frac{3}{12}; a_3 = a_2 + d = \frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12};$$

$$a_4 = \frac{1}{12}; a_5 = 0; a_6 = -\frac{1}{12}.$$

Csökkenő számtani sorozatot kaptunk.



5. példa

Ábrázoljuk grafikonon a sorozatok első öt elemét!

Melyik hozzárendeléssel adtunk meg számtani sorozatot?

a) $a_n = 2n$

b) $b_n = n + 2$

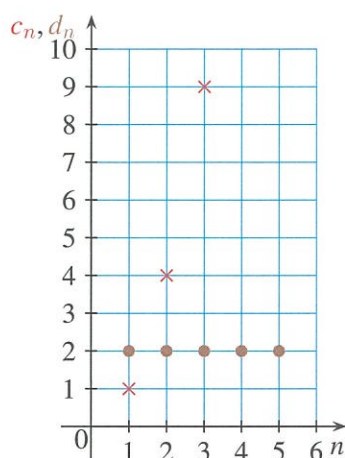
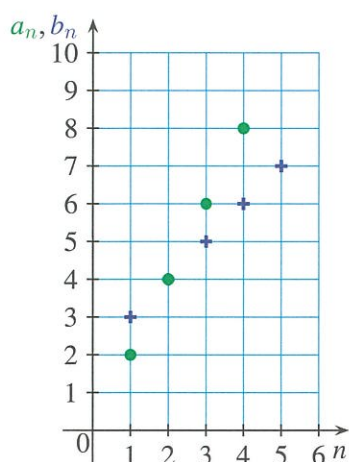
c) $c_n = n^2$

d) $d_n = 2$

Megoldás

A hozzárendelési utasítás alapján kiszámoljuk az egyes sorozatok első öt elemét:

n	1	2	3	4	5	Számtani sorozat-e?
a_n	2	4	6	8	10	igen; $a_1 = 2, d = 2$
b_n	3	4	5	6	7	igen; $a_1 = 3, d = 1$
c_n	1	4	9	16	25	nem;
d_n	2	2	2	2	2	igen; $a_1 = 2, d = 0$

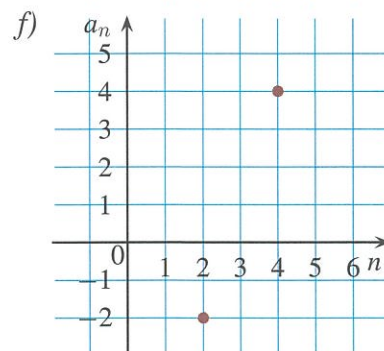
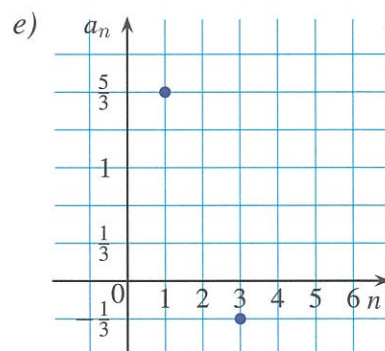
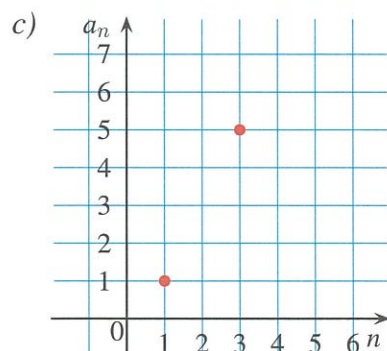
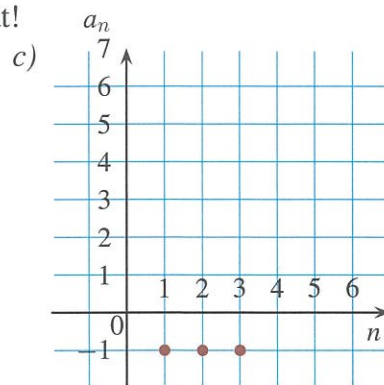
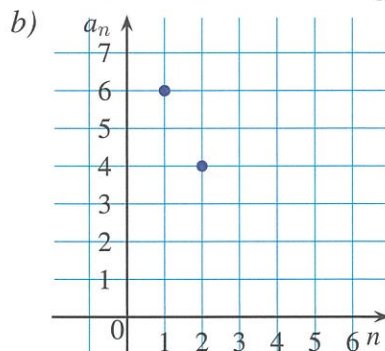
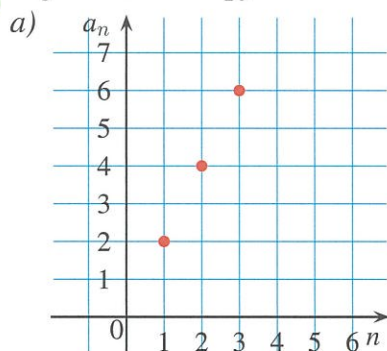


Észrevehetjük, hogy a sorozatokat ábrázoló grafikonok pontokból állnak, és az a_n sorozat elemei az $a(x) = 2x$, a b_n sorozat elemei a $b(x) = x + 2$, a d_n sorozat elemei a $d(x) = 2$ lineáris függvények grafikonjain vannak. Ezek határoznak meg számtani sorozatot.

Feladatok

1. Írd fel a számtani sorozat első hat tagját, és készítsd el a hozzájuk tartozó grafikonokat, ha
- a) első eleme -3 és a különbsége $0,5$, b) első eleme 4 és a második eleme -1 ,
- c) $a_1 = \frac{1}{2}$ és $d = 2$, d) $a_1 = 0,7$ és $a_2 = 1,2$, e) $a_4 = \frac{1}{2}$ és $a_5 = \frac{1}{4}$,
- f) első eleme -2 és harmadik eleme 5 , g) tizedik eleme 5 és a különbsége 0 !

2. A grafikonok alapján írd le a számtani sorozatok első hat tagját!



3. Ábrázold grafikonon a sorozatok első öt elemét, és add is meg azok értékeit!

a) $a(n) = 2n + 3$

b) $b(n) = -n + 4$

c) $c(n) = -2$

4. Ábrázold grafikonon a sorozatok első öt elemét! Melyik hozzárendeléssel adtunk meg számtani sorozatot?

a) $a(n) = 3 + 2n$

b) $b(n) = 3 + n^2$

c) $c(n) = 3^2 + n$

19. Számítsd ki azoknak a

a) legfeljebb kétjegyű,

b) legfeljebb háromjegyű

számoknak az összegét, amelyek 5-tel osztva 2-t adnak maradékul!

20. Mekkora a háromszög szögei, ha azok számtani sorozatot alkotnak, és

a) a legkisebb szög 45° ,

b) a legnagyobb szög 82° ,

c) a legnagyobb és a legkisebb szög különbsége 120° ,

d) a legnagyobb és a legkisebb szög összege 120° ,

e) a legnagyobb és a legkisebb szög összege 100° ?

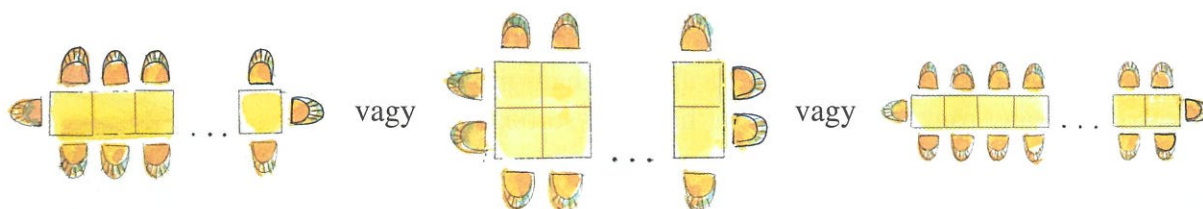
21. Képezd a pozitív egész számok 5-tel való osztási maradékát!

Hány különböző eleme van ennek a sorozatnak?

Készítsd el a sorozathoz tartozó grafikont!

Határozd meg a következő értékeket: a_7 , a_{1526} , $a_{n+5} - a_n$!

22. Egy vendéglő tulajdonosának négyzet, illetve téglalap alakú asztalai vannak. Nagyobb rendezvényekhez az asztalokat és a székeket az ábrákon láthatóan szokta elrendezni:



a) Az egyes elrendezéseknél hány vendéget tud leültetni 8 asztal mellé?

b) Az egyes elrendezéseknél hány vendéget tud leültetni 20 asztal mellé?

c) Keress képletet arra, hogy n asztal mellé hány vendéget lehet leültetni!

A megtalált összefüggést ellenőrizd $n = 8$ -ra és $n = 20$ -ra!



23. Mutasd meg, hogy a $2001 + 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 2000)$ szám értéke négyzetszám!

24. Lehet-e

a) 14 b) 15

egymást követő egész szám összege prímszám?

25. Egy szultánnak 143 felesége volt. 1000 napon keresztül adót szedett. Az első napon 144 aranyat, a többi napokon pedig mindig egy arannyal többet, mint az azt megelőző napon. Az így beszedett adót egyenlően akarta szétosztani a feleségei között. Meg tudta-e tenni?

(Bergengóc példatár 1. Typotex Kiadó, 2006)

26. Hány olyan négyszög van, amelynek szögei pozitív egész számokból álló számtani sorozatot alkotnak?

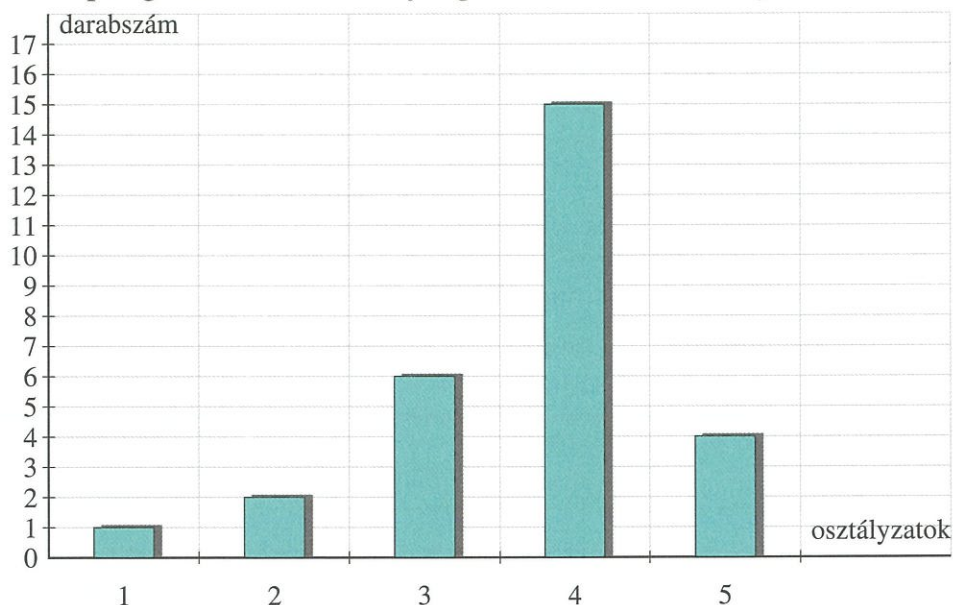


27. TOTÓ

		1	2	x
1.	Minden emberhez hozzárendeljük a születési dátumát	ez függvény	ez nem függvény	csak a gyerekek esetében függvény
2.	A háziállattal rendelkező családokhoz hozzárendeljük az állataikat	ez függvény	ez nem függvény	csak a kutyák esetében függvény
3.	Minden háziállathoz hozzárendeljük azt a családot, aki az állatot tartja	ez függvény	ez nem függvény	csak a kutyák esetében függvény
4.	Az $f(x)=3x-5$ és a $g(x)=7+3x$ lineáris függvények grafikonjai közül	az első a meredekebb	a második a meredekebb	egyforma a meredekségük
5.	A lineáris függvény grafikonja egyenes	minden esetben	soha	csak speciális esetben
6.	Minden lineáris függvény grafikonja metszi az x tengelyt	minden esetben	soha	csak speciális esetben
7.	Az $f(x) = 2x+2$ és a $g(x) = -\frac{1}{2}x+3$ lineáris függvények grafikonjai	párhuzamosak	merőlegesek	derékszögtől különböző szöget zárnak be egymással
8.	Az $A(9; 45)$ pont az $f(x) = 3x + 28$ függvény	grafikonján van	grafikonja alatt van	grafikonja felett van
9.	Az $a_n = 4n + 2$ képlet számtani sorozatot határoz meg, amelyre	$a_1 = 2, d = 4$	$a_1 = 6, d = 4$	$a_1 = 4, d = 2$
10.	Az $f(x) = 5x - 1$ lineáris függvény által meghatározott számtani sorozat 10. eleme	51	49	nem határoz meg számtani sorozatot
11.	Ha két számtani sorozat megfelelő tagjait összeszorozzuk, akkor az új sorozat	biztosan számtani sorozat lesz	soha nem lesz számtani sorozat	speciális sorozatok esetén lehet számtani sorozat
12.	Egy számtani sorozat legkisebb eleme -8 , egy másik eleme 16 . Ekkor a középső elem	nem határozható meg	8	4
13.	Ha a számtani sorozat differenciája pozitív, akkor a sorozat	növekvő	csak akkor növekvő, ha az első elem is pozitív	bármilyen lehet a sorozat növekedési szempontból
13+1.	Szerintem a válaszaim közül	legalább 12 jó	legalább 10 jó	kevés jó, ezért még tanulnom kell

Tudáspróba

1. Az oszlopdiagramon a 8. c osztály legutóbbi matematikadolgozatainak eredményét láthatod.



- a) Adj meg egy hozzárendelési utasítást a grafikon alapján!
 b) Mi az általad megadott függvény értelmezési tartománya, és mi az értékkészlete?
 c) Mennyi volt az osztály matematikadolgozat-eredményének az átlaga?
2. a) Készítsd el az $f(x) = 2x - 3$ lineáris függvény grafikonját!
 b) Határozd meg a pontok hiányzó jelzőszámait úgy, hogy azok a grafikonon legyenek!

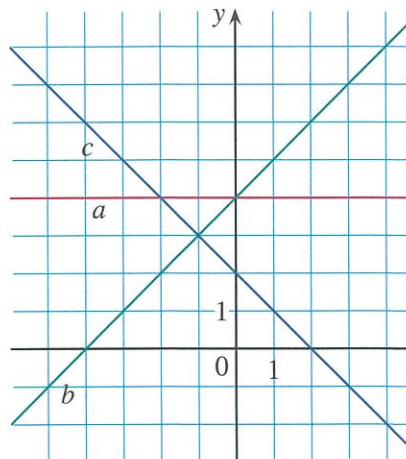
$$A(3; \square), \quad B(-4; \square), \quad C\left(\frac{2}{3}; \square\right), \quad D(\square; 7), \quad E\left(\square; \frac{1}{5}\right)$$

3. Add meg az ábrán látható grafikonokhoz tartozó lineáris függvények hozzárendelési utasítását!

4. Készítsd el az $f(x) = 0,5x + 2$ függvény grafikonját, és add meg az értékkészletét, ha az értelmezési tartomány $ÉT = \{-4 \leq x \leq 6\}$!

5. Egy számtani sorozat első eleme (-6) , a harmadik eleme 2.

- a) Mennyi a sorozat differenciája?
 b) Add meg a sorozat első hat elemét!
 c) Ábrázold grafikonon a sorozat első hat elemét!



6. Egy öt polcból álló könyvszekrény alsó polcán 31 könyv van, míg a legfelsőn már csak egy. Minden polcra 6-tal kevesebb könyvet tettek, mint az alatta lévőre.

- a) Hány polcból áll a könyvszekrény?
 b) Hány könyvet helyeztek el rajta?