

gondolkodni jó!



GONDOLKODNI JÓ!

MATEMATIKA 8.

HAJDU SÁNDOR
CZEGLÉDY ISTVÁN
CZEGLÉDY ISTVÁNNÉ
NOVÁK LÁSZLÓNÉ
SÜMEGI LÁSZLÓNÉ
SZALONTAI TIBOR
ZANKÓ ISTVÁNNÉ

OFI



A kiadvány 2019. 02. 15-én tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/120-11/2019. számú határozattal.

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet
2. melléklet: Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyamára – 2.2.03. (Matematika),
2.3.1.2. (Emelt matematika – B variáció),
4. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyama számára – 4.2.04. (Matematika),
5. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 5–12. évfolyama számára – 5.2.04. (Matematika)
megnevezésű kerettantervek előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
GYÖRFI LÁSZLÓNÉ, KEMPFNER ZSÓFIA

Alkotószerkesztő: DR. HAJDU SÁNDOR főiskolai docens

Az előző kiadásokat bíralták:
ELŐD ISTVÁNNÉ ny. felelős szerkesztő
DR. HETYEI GÁBOR tanszékvezető főiskolai tanár
KANÁSZ LÁSZLÓ ny. vezetőtanár, okl. villamosmérnök
KÖVES GABRIELLA főiskolai adjunktus
DR. MAROSVÁRI MIKLÓSNÉ vezetőtanár

Az átdolgozott kiadást bírálta: TÜSKÉS GABRIELLA matematika szaktárgyi szakértő

Felelős szerkesztő: BOSZNAI GÁBOR

Szerkesztő: CSÍK ZOLTÁN

Borítóterv és tipográfia: H-MOLL GRAFIKA

Fotó és grafika: ANN LUNDIN

© dr. Czeglédy István, dr. Czeglédy Istvánné, dr. Hajdu Sándor, Novák Lászlóné, dr. Sümegi Lászlóné,
dr. Szalontai Tibor, Zankó Istvánné, Eszterházy Károly Egyetem, 2019

ISBN 978-963-19-8148-3 (ISBN 978-963-16-4580-4)

Eszterházy Károly Egyetem • 3300 Eger, Eszterházy tér 1.
Tel.: (+36-1) 460-1873 • Fax: (+36-1) 460-1822 • E-mail: kiado@ofi.hu

Kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor • Raktári szám: NT-4319-0/UJ
Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos • Műszaki szerkesztő: Knausz Valéria
Terjedelem: 40,17 (A/5) ív • Tömeg: 650 gramm • 6. átdolgozott kiadás, 2019
Nyomdai előkészítés: WeeP Bt.

Nyomta
Felelős vezető:

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ	7
1. GONDOLKOZZ ÉS SZÁMOLJ!	9
Mit tanultunk a halmazokról?	9
A halmazokról tanultak kiegészítése	12
A természetes számok	16
Használd a számológépet!	17
Hatványozás	20
A hatványozás értelmezése	20
Számolás hatványokkal	21
A számok négyzete	24
A számok normálalakja	25
A normálalakról tanultak kiegészítése	27
Osztó, többszörös	29
Egész számok	34
A természetes számkör bővítése	34
Műveletek egész számokkal	36
Racionális és irracionális számok	40
Törtek értelmezése, műveletek törtekkel	40
Racionális számok értelmezése, tizedestört alakja	42
Vegyes gyakorlófeladatok	46
A számok négyzetgyöke	48
Arány, arányosság, százalékszámítás	52
Hányféleképpen?	58
Valószínűségi kísérletek és számítások	64
Statisztikai számítások	68
Az adatok gyűjtése, rendszerezése, elemzése	68
Két változó véletlen kapcsolata	72
Fejtörő feladatok!	74
A számrendszerekről tanultak kiegészítése	77
Tudáspróba	79
2. TESTEK, FELÜLETEK, SÍKIDOMOK	81
Tételek	81
Tételek kölcsönös helyzete, távolsága	81
Szögek értelmezése síkban és térben	83
Adott tulajdonságú pontthalmazok	87
Síkídomok, sokszögek	92

Háromszögek	93
A korábban tanultak áttekintése	93
A háromszög nevezetes vonalai, pontjai	97
Pitagorasz tétele	103
A Pitagorasz-tétel alkalmazása	107
Érdekességek a Pitagorasz-tétel történetéből	111
Négyszögek	113
A sokszögek területe	116
A kör kerülete, területe	121
A testekről tanultak áttekintése, kiegészítése	123
Sokszöglapokkal határolt testek	123
Az egyenes hasáb	124
Egyenes körhenger	127
Henger (olvasmány)	129
Ismerkedés a gúlával	131
A gúla hálójá, felszíne	133
A gúla térfogata	135
A kúp	137
A gömb	142
Felvételi vizsgára felkészítő feladatok	145
Tudáspróba	150
3. ALGEBRA	151
Algebrai kifejezések	151
Nevezetes azonosságok	156
Feladatok középiskolába készülőknek	159
Egyenlet, azonosság, egyenlőtlenség, azonos egyenlőtlenség	160
Egyenletek, egyenlőtlenségek algebrai megoldása	163
Mérlegelv	163
Szöveges feladatok megoldása egyenlettel	167
Szöveges feladatok megoldása egyenlőtlenséggel	171
A szöveges feladatokról tanultak kiegészítése	173
A helyiértékes írásmóddal kapcsolatos feladatok	173
Geometriai számításokkal kapcsolatos feladatok	175
Fizikai számításokkal kapcsolatos feladatok	177
Keveréses feladatok	182
Együttes munkavégzéssel kapcsolatos feladatok	185
Fejtörő feladatok	187
Tudáspróba	188
4. GEOMETRIAI TRANSZFOMÁCIÓK	189
Az egybevágóságról tanultak kiegészítése	189
Pont-pont függvények	189
Az egybevágóság értelmezése	190
A háromszögek egybevágóságának alapesetei	191

Tengelyes tükrözés, tengelyes szimmetria	192
Középpontos tükrözés, középpontos szimmetria	193
Eltolás	195
Thalész tétele	198
Egybevágósági transzformációk alkalmazása	200
Forgatás, forgásszimmetria	202
Összefoglalás	205
Számítási és bizonyítási feladatok	207
Hasonlóság	209
A hasonlóság alkalmazása	215
Háromszögek hasonlósága	218
Hasonló síkidomok területének aránya	227
Hasonló testek térfogatának aránya	230
Középpontos hasonlóság	231
A középpontos hasonlóságról tanultak kiegészítése	236
A középpontos hasonlóságról tanultak alkalmazása	238
Gyakorló- és fejtörő feladatok	243
Tudáspróba	246
5. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK, SOROZATOK	247
Hozzárendelés, függvény, szám-szám függvény	247
Egyenes arányosság, lineáris függvény	252
Mennyiségek közti kapcsolatok ábrázolása grafikonnal	258
A sorozat mint függvény	263
Néhány nemlineáris függvény	269
Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása	275
Lineáris egyenletrendszerek	279
Függvények összekapcsolása	283
Új függvények előállítása valós szám hozzáadásával	283
Új függvények előállítása valós számmal szorzással	287
Gyakorló- és fejtörő feladatok	290
Tudáspróba	292
6. KÉPESSÉGPÓRÓBA	293
Gyakorlati alkalmazások	293
Vektorok alkalmazása	301
Fejtörő feladatok	303
7. KISLEXIKON	307

A Wikipédiáról származnak a következő fotók (a szám az oldalszámot, a betű az oldalon belüli sorrendet jelöli, a kép után a szerző, majd zárójelben a licenc típusa látható, ahol nincs, az szabad felhasználású kép. Bővebben: http://commons.wikimedia.org/wiki/Commons/Copyright_tags): 58 Morio (cc-by-sa 3.0), 63 Maros (cc-by-sa 3.0), 81 Humnfeather (cc-by-sa 3.0), Jorge Royan (cc-by-sa 3.0), 131a, 151, 179a, 180, 189, 225 Manfred Münch (cc-by-sa 3.0), 131b Ra'ike (cc-by-sa 3.0), 247 GeraintOtisWarlow(cc-by-sa 2.0), 251 Lonpicman (cc-by-sa 3.0), 254b, 257 Yewenyi(cc-bysa3.0), 266, 267a Sugeesh(cc-by-sa3.0), 267b, 274, 277 MaleneThyssen(cc-by-sa3.0), 290 Mvuijlst(cc-by-sa 3.0)

MÉRTÉKEGYSÉGEK

A mértékegységek nemzetközi rendszerét, az SI mértékegység-rendszert az Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet 1960-ban fogadta el.

Magyarország már 1960 óta az SI figyelembevételével szabályozta a mértékegységek használatát. Az 1976-ban kiadott rendelet előírta az SI-re történő kötelező áttérést, majd 1980-tól kezdve a más mértékegységek (hivatalos) használatának a tilalmát. 1991-ben az országgyűlés az 1976 óta ismertté vált tudományos eredmények figyelembevételével ismét meghatározta a szabványos magyar mértékegység-rendszer alapjait. Jelenleg ez a szabályozás van érvényben.

☉ *Valamely mértékegység többszöröseit és törtrészeit előtagokkal, más szóval **prefixumokkal** fejezik ki.*

Az SI alapegységei közül matematikaórán hármat használunk:

A **hosszúság** alapegysége a **méter** (jele: **m**). A méter annak az útnak a hosszúsága, amelyet a fény vákuumban a másodperc 299 792 458-ad része alatt megtesz. A Párizson átmenő délkör hossza körülbelül 40 000 000 m (ennek alapján értelmezték a métert az 1790-es években).

Az **idő** alapegysége a **másodperc** (jele: **s**, a latin secundum szó rövidítése). A másodpercet a céziumatom sugárzásának segítségével értelmezik. A másodperc többszörösei:

perc (= minutum; jele **min**), $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

óra (= hora; jele **h**), $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$

Nagyobb időtartam mérésére használjuk a napot és az évet.

Tömegmérés: alapegysége az SI-ben a **kilogramm** (jele: **kg**).

A kilogramm az 1889. évben Párizsban megtartott 1. Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet által a tömeg etalonjának elfogadott platina-irídium henger tömege. Körülbelül ekkora az 1 dm^3 tiszta 4°C -os víz tömege is.

A kilogramm törtrésze a **gramm** (jele: **g**). $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$.

Korábban a gramm volt a tömeg alapegysége.

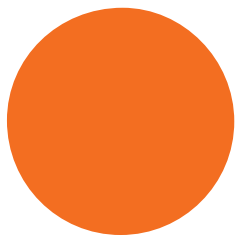
A kilogramm többszöröse a **tonna** (jele: **t**). $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$.

Űrtartalom: alapegysége a **liter** (jele: **l**; nem SI-alapegység).

$1 \text{ l} \approx 1 \text{ dm}^3$ (nagyon kicsi az eltérés). $1000 \text{ l} \approx 1 \text{ m}^3$.

Az alapegység hányszorosa (mekkora része)	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
Hosszúságmérés mértékegységei Jelölés	kilo- méter km			méter m	deci- méter dm	centi- méter cm	milli- méter mm
Tömegmérés mértékegységei Jelölés	kilo- gramm kg		deka- gramm dkg, dag	gramm g	deci- gramm dg	centi- gramm cg	milli- gramm mg
Űrtartalom mérés mértékegységei Jelölés		hekto- liter hl		liter l	deci- liter dl	centi- liter cl	milli- liter ml

A dekagrammot a legtöbb országban nem ismerik. Magyarországon a mindennapi életben a dkg rövidítést alkalmazzuk, de a dag rövidítés a szabványos.



ELŐSZÓ

KEDVES GYEREKEK!

Ezt a könyvet hasonlóan szerkesztettük, mint az előző évfolyamok tankönyveit.

„Hát azt megfigyelted-e már, hogy akiknek tehetségük van a számtanhoz, azok úgyszólván minden tudományban igen éles eszűek; (...) és akik ebben edzik a szellemüket, (...) annyit bizonyára elérnek, hogy élesebb lesz a felfogásuk, mint azelőtt volt.” (Platón, i. e. 427–347.)

☉ Kék háttéren érdekes megjegyzéseket, történeti vonatkozásokat olvashatsz.

Figyeld meg!

Színes alagra, ezzel a színnel nyomtattuk **a továbblépéshez** (beleértve a középiskolai tanulmányokat is) **szükséges értelmezéseket, összefüggéseket, tételeket** és **szabályokat**. A fontos **fogalmakat** piros betűkkel emeltük ki.

☉ A margón példák segítik az új ismeretek megértését.

Bizonyítás

A 8. osztályban is megismerkedünk néhány fontos tétel bizonyításával.

1. példa

A kidolgozott mintapéldákat ilyen keretbe írtuk.

A példák figyelmes elolvasása, illetve önálló megoldása segítheti a tananyag jobb megértését, a feladatok értelmezését.

☉ A margón további magyarázatokat, szemléltető ábrákat is találhatsz.

FELADATOK

1

A legegyszerűbb **alapozó feladatok** sorszámát üres karikába szedtük.

5

A tanultak közvetlen alkalmazását szolgáló **gyakorlófeladatok** jele.

12

Az önálló ötletet kívánó **fejtörő feladatokat** csillag jelöli.

☉ Az itt olvasható rávezető kérdések, magyarázatok segíthetik a feladatok helyes megoldását.

Figyelempróba

30

8. osztályban elvárható, hogy képes legyél a **szövegeket elemezni, helyesen értelmezni**. Ez a képesség a különböző tantárgyak tanulásához, sőt a mindennapi életben is nélkülözhetetlen.

Ilyen színű háttérre nyomtattuk azokat a feladatokat, amelyek **célja a szövegértelmező képességednek a fejlesztése**.

Kísérletezz!

31

A tanultakat nemcsak a matematikaórákon, hanem **a mindennapi életben is alkalmaznunk kell**. A zöld háttérre nyomtatott feladatok elsősorban ezt a képességedet bontakoztathatják ki.

A lapok alján található érdekes feladatok megoldásával meggyőződhetsz arról, hogy GONDOLKODNI JÓ! Például:

Többet ésszel ...

© Régi fejtörő feladat.



Rakj össze **T** betűt az alábbi darabokból!



A könyv margóján szürke pontsor jelzi a mélyebb meggondolásokat igénylő **kiegészítő anyagrészeket**. Ezeknek az anyagrészeknek a többsége az emelt szintű képzésben részt vevők számára és a nyolcosztályos vagy hatosztályos gimnáziumokban kötelező tananyag. Ezek a fejezetek kibővítik, elmélyíthetik a matematikai ismereteidet, fejleszthetik a problémameglátó és –megoldó képességedet. Ha általános iskolába jársz, és kellően fel akarsz készülni a középiskolai tanulmányokra, akkor célszerű tanulmányoznod ezeket a fejezeteket, megoldanod az itt található feladatokat.

B1

A kiegészítő feladatok sorszáma **B** betűvel kezdődik.

© A feladatgyűjteményekre a margón is felhívjuk a figyelmet. Például:

Gyakorló 5.46–5.47.;
Feladatgyűjtemény
1.1.38–48.

A tankönyv minden olyan szükséges tananyagrészt tartalmaz, amely az átlagos matematikatudás eléréséhez elegendő. Ha ennél biztosabb tudást szeretnél elérni, akkor az alábbi feladatgyűjteményekre is szükséged lehet.

Hajdu Sándor: Matematika 8. gyakorló

A legfontosabb ismeretek átismétlésében, gyakorlásában segít.

Hajdu Sándor: Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény

Összetett feladatokat tartalmaz.

Hajdu Sándor: Matematika 8. Felmérő feladatsorok

A feladatsorok megoldásával ellenőrizheted a tudásod.

Hajdu Sándor: Matematika 8. tankönyv feladatainak megoldása

Az 8. osztályos tankönyv feladatainak megoldását tartalmazza.

A könyvek a következő címen rendelhetők meg:
MŰSZAKI KIADÓ, 1033 Budapest, Szentendrei út 91–93.
Telefon: 437-2405; fax: 437-2404

1.

GONDOLKOZZ ÉS SZÁMOLJ!

Ebben a fejezetben átismétljük, rendszerezzük, majd kiegészítjük azokat az ismereteket, amelyeket korábban a számhalmazokról és a műveletekről tanultunk. Ezeknek az ismereteknek a biztos tudása nélkülözhetetlen a további fejezetek tananyagának sikeres tanulmányozásához.



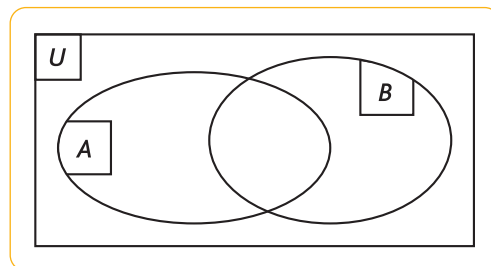
> MIT TANULTUNK A HALMAZOKRÓL?

FELADATOK

- 1 Az alaphalmaz: $U = \{\text{Az osztály tanulói}\}$
 $A = \{\text{Lányok}\}; \quad B = \{\text{Szemüveges tanulók}\}$

Szemléltessétek a halmazábra megfelelő részének kiszínezésével a következő halmazokat!

- a) $\{\text{Szemüveges lányok}\}; \quad b) \{\text{Nem szemüveges lányok}\};$
 c) $\{\text{Szemüveges fiúk}\}; \quad d) \{\text{Nem szemüveges fiúk}\};$
 e) $\{\text{Lányok vagy szemüveges tanulók}\};$
 f) $\{\text{Vagy lányok, vagy szemüveges tanulók}\}$



© Közös munkával oldjátok meg a feladatokat! Minden feladathoz rajzoljatok ilyen halmazábrát!

- 2 A következő halmazok közül melyek azok, amelyeknek az elemei felsorolhatók további értelmezés nélkül? Az alaphalmaz: $U = \{\text{Az osztály tanulói}\}$
 $A = \{\text{Lányok}\}; \quad B = \{\text{Szemüveges tanulók}\}; \quad C = \{\text{Alacsony tanulók}\}$
 Értelmezzétek a halmazok *kiegészítő halmazát*!

1. példa

Az alaphalmaz: $U = \{21\text{-nél kisebb pozitív természetes számok}\}$. Adjuk meg elemeivel a következő halmazokat:

- a) $A = \{10\text{-nél kisebb számok}\}; \quad B = \{4\text{-gyel osztható számok}\};$
 $C = \{\text{Összetett számok}\}; \quad D = \{\text{Prímszámok}\};$
 b) $\bar{C} = \{\text{Nem összetett számok}\};$
 c) $\{10\text{-nél kisebb, } 4\text{-gyel osztható számok}\};$
 d) $\{4\text{-gyel osztható prímszámok}\};$
 e) $\{10\text{-nél kisebb, } 4\text{-gyel nem osztható számok}\};$
 f) $\{10\text{-nél kisebb vagy } 4\text{-gyel osztható számok}\};$
 g) ① $\{4\text{-gyel osztható és összetett számok}\};$
 ② $\{4\text{-gyel osztható vagy összetett számok}\}$

A halmazelmélet a matematika egyik fontos ága. Nagy jelentőségűvé vált a geometria, a függvénytan és az algebra korszerű fogalmi megalapozásában.

© Emlékszel? A kapcsos zárójel itt a halmaz jele. Például:
 $C = \{\text{Összetett számok}\} =$
 $= \text{„Az összetett számok halmaza”}.$
 Emlékezz arra is, hogy egy halmazban annak bármelyik eleme csak egyszer fordul elő!

1. GONDOLKOZZ ÉS SZÁMOLJ! Mit tanultunk a halmazokról?

A megoldás során csak az **alaphalmaz** elemeit vesszük figyelembe.

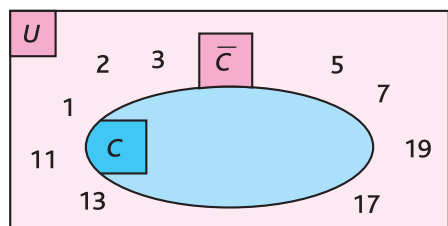
a Az alaphalmaz minden eleméről egyértelműen eldönthető, hogy a vizsgált halmazba beletartozik-e vagy sem:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\};$$

$$B = \{4; 8; 12; 16; 20\};$$

$$C = \{4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20\};$$

$$D = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$$

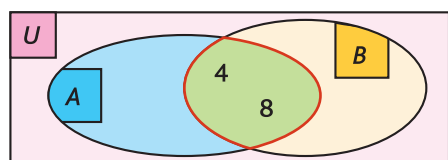


b $\bar{C} = \{\text{Nem összetett számok}\}$

Az alaphalmaznak azok az elemei tartoznak a $\bar{C}$ halmazba, amelyek nem elemei a C halmaznak:

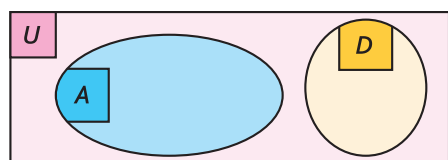
$$\bar{C} = \{1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}.$$

$\bar{C}$ a C halmaz **kiegészítő halmaza**. Mivel 1 nem prímszám és nem összetett szám, ezért a $\bar{C}$ halmaz nem egyezik meg a prímszámok halmazával.



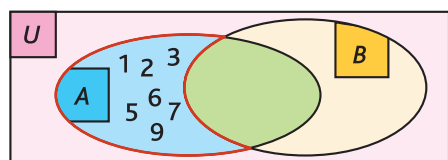
c $\{10\text{-nél kisebb, } 4\text{-gyel osztható számok}\}$

Azok az elemek tartoznak ebbe a halmazba, amelyek az A halmaznak és a B halmaznak is elemei. Ezt a halmazt az A és a B halmaz **közös részének**, vagy másképpen **metszetének** nevezzük.



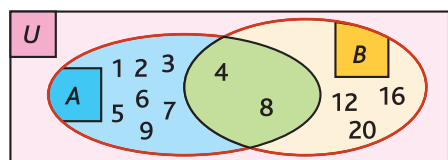
d $\{4\text{-gyel osztható prímszámok}\}$

A B és a D halmaznak nincs közös eleme. A 4-gyel osztható prímszámok halmaza az **üres halmaz**.



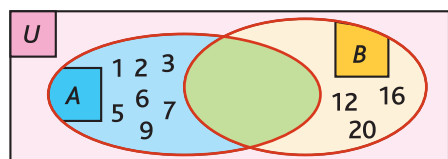
e $\{10\text{-nél kisebb, } 4\text{-gyel nem osztható számok}\}$

Azok az elemek tartoznak ebbe a halmazba, amelyek elemei az A halmaznak, de nem elemei a B halmaznak. Ezt a halmazt az A halmaz és a B halmaz **különbségének** nevezzük.

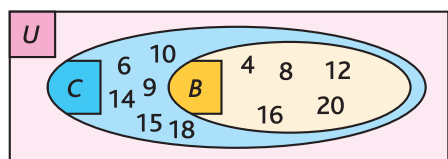


f $\{10\text{-nél kisebb vagy } 4\text{-gyel osztható számok}\}$

Azok a számok tartoznak ebbe a halmazba, amelyek az A halmaznak vagy a B halmaznak, vagyis a két halmaz közül **legalább az egyiknek** elemei. Ezt a halmazt az A halmaz és a B halmaz **egyesítettjének**, vagy másképpen **uniójának** nevezzük.



A „vagy ..., vagy ...” mondat szerkezet mást jelent. A vagy 10-nél kisebb, vagy 4-gyel osztható számok halmazába azok az elemek tartoznak, amelyek a két halmaz közül **pontosan az egyiknek** elemei. (Ezt a két halmaz szimmetrikus különbségének is nevezzük, jele: $A \Delta B$.)



g A B halmaz **részhalmaza** a C halmaznak, ezért

1 a két halmaz közös része a B halmaz;

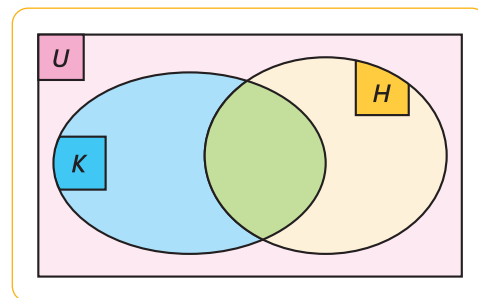
2 a két halmaz egyesítettje a C halmaz.

FELADATOK

- 3 Az alaphalmaz: $U = \{25\text{-nél kisebb természetes számok}\}$
 $K = \{2\text{-vel osztható számok}\}; H = \{3\text{-mal osztható számok}\}$

Sorold föl a következő halmazok elemeit!

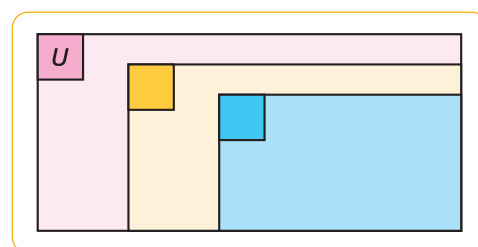
- $\{3\text{-mal és } 2\text{-vel is osztható számok}\};$
- $\{3\text{-mal osztható, de } 2\text{-vel nem osztható számok}\};$
- $\{2\text{-vel osztható, de } 3\text{-mal nem osztható számok}\};$
- $\{\text{Sem } 2\text{-vel, sem } 3\text{-mal nem osztható számok}\};$
- $2\text{-vel vagy } 3\text{-mal osztható számok}\}$



☉ Írd be az alaphalmaz elemeit a halmazábra megfelelő részébe!

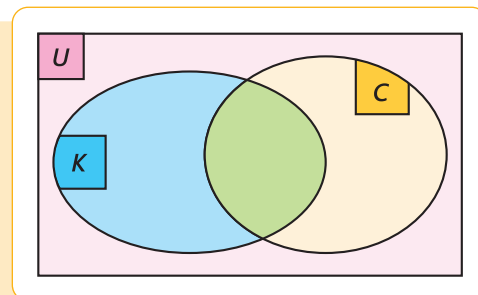
- 4 Rajzolj ilyen halmazábrát!
 Írd be az alaphalmaz elemeit a halmazábra megfelelő részébe!
 Írd be a címkéket is!

Az alaphalmaz: $U = \{25\text{-nél kisebb természetes számok}\};$
 $K = \{2\text{-vel osztható számok}\}; N = \{4\text{-gyel osztható számok}\}$



- 5 60 nyolcadikos tanuló 40%-a vesz részt a kémia vagy a cselgáncs diákkör munkájában. A két diákkör foglalkozásain részt vevő tanulók egynegyede mindkét diákkörben dolgozik. A kémia diákkör taglétszáma 12-vel több, mint a cselgáncs diákköré.

- A nyolcadikos tanulók hány százaléka dolgozik a kémia diákkörben?
- A nyolcadikosok hány százaléka tagja **pontosan az egyik** diákkörnek?
- A nyolcadikosok hány százaléka tagja **legfeljebb az egyik** diákkörnek?
- Ha taláломra megszólítunk egy nyolcadikos tanulót, akkor mi az esélye annak, hogy olyan kémia diákkörös tanulót szólítunk meg, aki nem cselgáncsozik?



☉ Írd be a halmazábra megfelelő részeibe, hogy hány tanuló tartozik oda!
 Gyakorló 1.01– 1.08.

- Legyen az alaphalmaz $U = \{\text{Uralkodók}\}$, két részhalmaza pedig $K = \{\text{Királyok}\}$ és $C = \{\text{Császárok}\}$. Számláld össze az ezek által meghatározott összes lehetséges halmazt, beleértve az alaphalmazt és az üres halmazt is! Hányat találtál?
- Első Karesz 14-et, Nagy Lali 16-ot talált, Kalapos Jocó 17-et állít. A halmazábrán a különböző színnel jelölt négy tartományt római számírással számozd meg, és ennek segítségével tégy igazságot!
- A jelenleg uralkodó magyar királyok halmaza szerepel-e a számításba vett halmazok között?

- Tekintsük a 4. feladatban értelmezett (U, K, N) halmazokat, a halmazábrán különböző színnel jelölt három tartományt jelöld római számírással! Sorold föl az ezek által meghatározott összes lehetséges halmazt, beleértve az alaphalmazt és az üres halmazt is!

- Sorold fel a latin nyomtatott nagybetűk halmaza és a római számíráselemek halmaza különbségének elemeit!

Figyelempróba

☉ Másold le az 5. feladat halmazábráját!

☉ Például mely halmazokat jelölhetjük így:
 $[III; IV], [II; III; IV], [I; IV], [I; II; III]?$

☉ Készíts halmazábrát!



A halmazelmélet alapjait Georg Cantor (1845–1918) német matematikus dolgozta ki. Apja dán kereskedő, anyja orosz énekesnő volt, ám ő Németországban élt, ott tanult, és később ott dolgozott.

A HALMAZOKRÓL TANULTAK KIEGÉSZÍTÉSE

Emlékeztető

A **halmaz** a matematika egyik **alapfogalma**. Hasonlóan alapfogalom az **elem** és az a kapcsolat is, hogy egy elem **eleme** egy halmaznak. Az alapfogalmakat nem tudjuk egyszerűbb fogalmakkal meghatározni, vagyis nem tudjuk definiálni.

A halmaz szó helyett használhatnánk például az „összesség”, a „sokaság”, az elem helyett a „dolog”, a „tag”, míg az eleme helyett a „beletartozik” szavakat is.

Megállapodunk abban, hogy a halmaz minden eleme egyszer fordul elő.

A halmazelmélet többi fogalmát a fenti három alapfogalom segítségével értelmezzük. A halmazokat általában nagybetűvel jelöljük. Ezeket a jelöléseket legtöbbször tetszőlegesen megválaszthatjuk, de a következő halmazokra általánosan elfogadott jelöléseink vannak:

$\mathbb{N} = \{\text{Természetes számok}\}; \quad \mathbb{Z} = \{\text{Egész számok}\};$

$\mathbb{Q} = \{\text{Racionális számok}\}; \quad \mathbb{R} = \{\text{Valós számok}\}$

Annak a kapcsolatnak a jele, hogy egy elem beletartozik egy halmazba: $\in$;

ha nem tartozik a halmazba, annak a jele: $\notin$

Példák a szimbólumok használatára:

A -2 beletartozik az egész számok halmazába: $-2 \in \mathbb{Z}$

A -2 nem tartozik bele a természetes számok halmazába: $-2 \notin \mathbb{N}$

Az A halmaz a 10 és 20 közé eső természetes számok halmaza:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$

Ez utóbbi jelölés esetében az x a halmaz elemeit jelöli. A függőleges vonal előtt jelezhetjük, hogy mely alaphalmazból választjuk az elemeket. A függőleges vonal után írjuk azokat az utasításokat, amelyek alapján kiválasztjuk az A halmaz elemeit az alaphalmazból. Szimbólumok segítségével nemcsak rövidebben, hanem pontosabban is megfogalmazhatjuk az A halmaz értelmezését, mint szóban.

Értelmezések

Vizsgálatainkban mindig egy adott U **alaphalmaz** elemeit vesszük figyelembe.

Üres halmaznak nevezzük azt a halmazt, amelynek egy eleme sincs.

Az üres halmaz jele: $\emptyset$

Üres halmaz például: $\{4\text{-gyel osztható prímszámok}\}$.

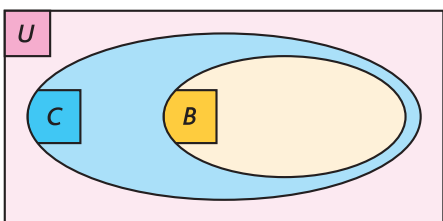
Azt mondjuk, hogy a B halmaz részhalmaza a C halmaznak, ha a B halmaz minden eleme beletartozik a C halmazba. Jelölés: $B \subseteq C$ vagy $C \supseteq B$.

(Azt is mondjuk, hogy a C tartalmazza a B -t.)

Ebből következik, hogy bármely halmaz saját magának is részhalmaza.

A B halmazt a C halmaz **valódi részhalmazának** nevezzük, ha a B halmaz minden eleme beletartozik a C halmazba, de a C -nek van olyan eleme, amelyik nem eleme a B halmaznak. Jelölés: $B \subset C$ vagy $C \supset B$.

© Üres halmaz azoknak az egyenleteknek, egyenlőségeknek a megoldáshalmaza is, amelyeknek nincs megoldásuk.



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, a természetes számok halmaza részhalmaza a racionális számok halmazának, mert minden természetes szám racionális szám.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, a természetes számok halmaza valódi részhalmaza a racionális számok halmazának, ugyanis a természetes számokon kívül vannak más racionális számok is.

$\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$, mert nem minden egész szám természetes szám.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$, de $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{N}$, mert az értelmezés szerint minden halmaz részhalmaza önmagának, de nem valódi részhalmaza.

$\emptyset \subseteq \mathbb{Q}$, mert megállapodás szerint **az üres halmazt minden halmaz részhalmazának tekintjük.** (Az $\emptyset \subset \mathbb{N}$, $\emptyset \subset \mathbb{Z}$ stb. is igaz.)

☉ Viszont $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, mert minden természetes szám egész szám.

Értelmezések

A C halmaz **kiegészítő halmazán** (komplementerén) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek elemei az alaphalmaznak, de nem elemei a C halmaznak. Jelölés: $\bar{C}$

$$\bar{C} = \{x \in U \mid x \notin C\}$$

Az A és a B halmaz **közös részén** (metszetén) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek az A -nak is és a B -nek is elemei. Másképpen: amelyek mind a két halmazba beletartoznak.

Jelölés: $A \cap B$

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$$

Olvasd: Az A és a B halmaz közös részébe az U alaphalmaznak azok az elemei tartoznak, amelyek elemei az A halmaznak és elemei a B halmaznak.

Az A és a B halmaz **egyesítettjén** (unióján) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek az A halmaznak vagy a B halmaznak elemei. Másképp: amelyek a két halmaz közül legalább az egyiknek elemei.

Jelölés: $A \cup B$

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$

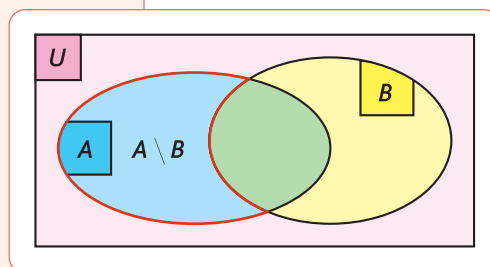
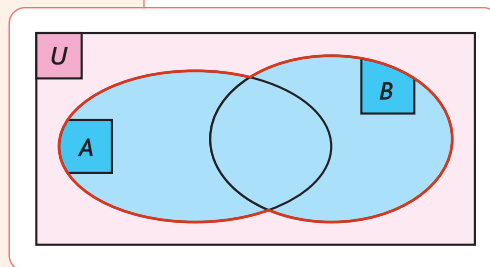
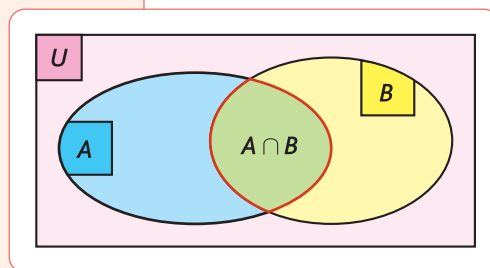
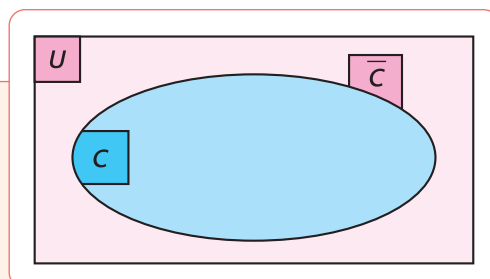
Olvasd: Az A és a B halmaz egyesítettjébe az U alaphalmaznak azok az elemei tartoznak, amelyek elemei az A vagy a B halmaznak. Ebben az értelmezésben a „vagy” kötőszó „megengedő vagy” logikai műveletet jelent. Az A és a B halmaz uniójába beletartoznak az A azon elemei, amelyek nem elemei a B -nek, továbbá a B azon elemei, amelyek nem elemei az A -nak, de azok is, amelyek a két halmaz közös elemei.

Az A és a B halmaz **különbségének** nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek elemei az A halmaznak, de nem elemei a B halmaznak.

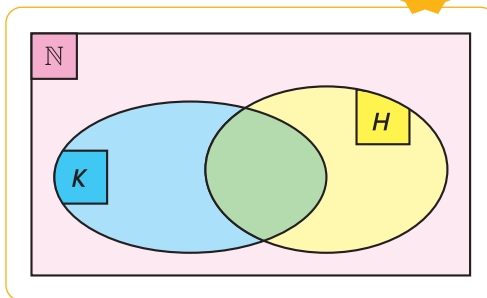
Jelölés: $A \setminus B$

$$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$$

Olvasd: Az A és a B halmaz különbségébe az U alaphalmaznak azok az elemei tartoznak, amelyek elemei az A halmaznak, de nem elemei a B halmaznak.



FELADATOK

B1 Legyen az alaphalmaz az $\mathbb{N}$.


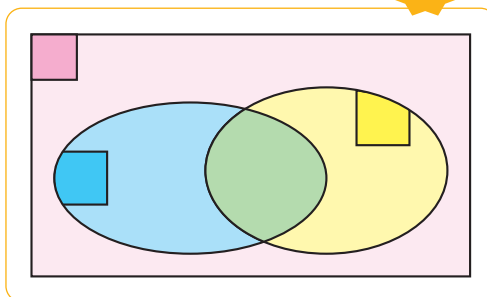
$$K = \{9\text{-cel osztható számok}\} \quad H = \{3\text{-mal osztható számok}\}$$

A következő számokat írd be a halmazábra megfelelő részébe!

0; 5; 9; 12; 36; 42; 50; 2345; 5472; 6402

A következő összefüggések közül melyik igaz, melyik hamis?

- a) $H \subset K$; b) $K \subset H$; c) $H \subseteq K$; d) $K \subseteq H$;
e) $\bar{K} \supset H$; f) $H \cap K = K$; g) $H \cap H = H$; h) $H \cup K = K$;
i) $H \cup H = H$; j) $K \setminus H = \emptyset$; k) $H \setminus K = \emptyset$; l) $H \setminus H = \emptyset$

B2 Rajzolj ilyen halmazábrát, és jelöld a címkeit, ha a halmazok a következők!


- a) $\mathbb{Q} = \{\text{Racionális számok}\}$;
 $\mathbb{N} = \{\text{Természetes számok}\}$; $\mathbb{Z} = \{\text{Egész számok}\}$
b) $\mathbb{Q} = \{\text{Racionális számok}\}$;
 $P = \{\text{Pozitív számok}\}$; $S = \{\text{Negatív számok}\}$

Vonalkázd be az üres halmazt!

A halmazábra melyik részébe írnád be a 0-t?

☉ Melyik halmaz rész-halmaza melyik másiknak?

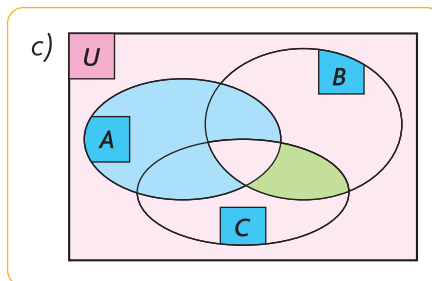
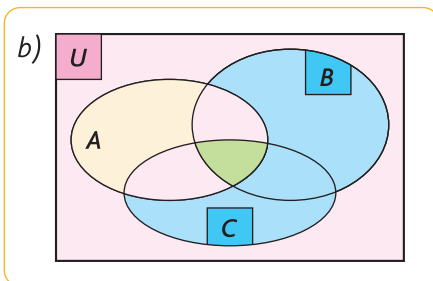
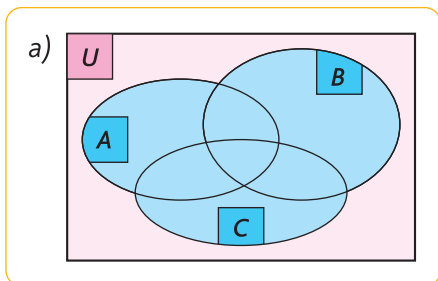
☉ A halmazábra minden részébe írd be az alaphalmaz néhány elemét!

B3 Mely halmaz a művelet eredménye?

- a) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$; b) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$; c) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z}$; d) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$; e) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}$; f) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}$;
g) $\emptyset \cup \mathbb{Z}$; h) $\emptyset \cap \mathbb{Z}$; i) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; j) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; k) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$; l) $\mathbb{Z} \setminus \emptyset$

B4 Az alaphalmaz $U = \{A \text{ 17-nél kisebb abszolútértékű egész számok}\}$;
 $A = \{3 \text{ többszöröse}\}$; $B = \{\text{Pozitív számok}\}$; $C = \{4 \text{ többszöröse}\}$.

A megbeszített halmazok és a halmazműveletek segítségével értelmezd azokat a halmazokat, amelyeket az ábrákon különböző színnel jelöltünk!



Fejtörő!

☉ A c)-nél nem érdemes listázásra vagy összeszámlálásra hagyatkozni.

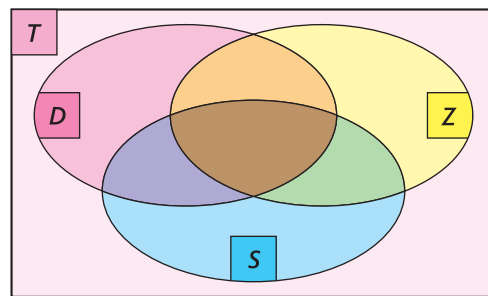

Az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán legyen $H = \{6 \text{ egész számú többszöröse}\}$, $K = \{9 \text{ egész számú többszöröse}\}$ és $\bar{O} = \{5\text{-tel osztható egész számok}\}$.

- a) Mely számok halmaza $H \cap K$; $H \cap \bar{O}$; $\bar{O} \cap K$; $H \cap K \cap \bar{O}$; $H \cup K$?
b) Melyik lehető legszűkebb részhalmazba kerül a 0?
c) Számítsd ki az adatok által meghatározott halmazok számát, az alaphalmazt és az üres halmazt is beleértve!

B5

Írd be a halmazábra megfelelő részébe, hogy hány tanuló tartozik abba a részhalmazba! (Tedd az elemszámokat zárójelbe!)

240 tanuló közül összesen 156-an tagjai valamely diákkörnek vagy a sportkörnek, illetve járnak zeneiskolába. 66-an járnak zeneiskolába, ennél 12-vel többen a sportkörre. A tanulók 5%-a mindhárom foglalkozásra jár. 30 olyan diákkörös van, aki zeneiskolába is jár, és 36 olyan diákkörös, aki tagja a sportkörnek is. A sportkörösök közül viszont csak 18-an járnak zeneiskolába.



a) Hány tanuló vesz részt mindhárom foglalkozáson?

A: 5 tanuló; B: 12 tanuló; C: 20 tanuló; D: 30 tanuló

b) Hány tanuló vesz részt legalább két foglalkozáson?

A: 60 tanuló; B: 84 tanuló; C: 96 tanuló; D: 120 tanuló

c) A tanulók hány százaléka vesz részt pontosan egyféle foglalkozáson?

A: 20%-a; B: 35%-a; C: 40%-a; D: 65%-a

d) Ha találomra megszólítunk egy tanulót, akkor mi az esélye annak, hogy diákkörös tanulót szólítunk meg?

A: 23,3%; B: 27,5%; C: 32,5%; D: 35%

© A helyes válasz betűjelének bekarikázásával válaszolj a kérdésekre!

Gyakorló

1.09– 1.27.

Feladatgyűjtemény

1.1.01– 21.

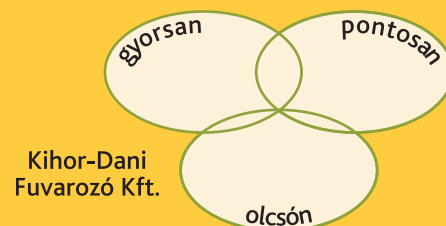


A Kihor-Dani Fuvarozó Kft. az itt látható matematikai ihletésű hirdetést tette közzé. Mit sugall így a hirdetés?

Szerinted mit szerettek volna kifejezni vele?

Rajzolj a cég reklámjához egy megfelelő halmazábrát!

Többet ésszel!



60 nyolcadikos 40%-a volt már valaha török basa vagy római császár jelmezbálon. A valamikor ezek egyikének öltözötték egynegyede volt már mindkettő is. Akik voltak török basák, 12-vel többen vannak, mint akik voltak római császárok.

a) A nyolcadikosok hány százaléka volt már török basa?

b) A nyolcadikosok hány százaléka volt már pontosan az egyik?

c) A nyolcadikosok hány százaléka volt már legfeljebb az egyik?

Figyelempróba



Legyen az alaphalmaz a sokszögek P halmaza, ebben tekintsük a következő részhalmazokat: $H = \{\text{Háromszögek}\}$, $N = \{\text{Négyszögek}\}$ és $T = \{\text{Tengelyesen szimmetrikus sokszögek}\}$. Készíts olyan halmazábrát, amelyen T tartománnyal metszően rajzold le H illetve N tartományát, de az utóbbi kettő tartománynak ne legyen közös pontja! (Ez korrekt, hiszen $H \cap N = \emptyset$.)

a) Melyek a $H \cap T$ halmaz elemei? Melyek a $T \cap N$ halmaz konkv elemei?

b) Számítsd ki az adatok által meghatározott halmazok számát, az alaphalmazt és az üres halmazt is beleértve!

Fejtörő!

A TERMÉSZETES SZÁMOK

Emlékeztető

A természetes számok halmazát $\mathbb{N}$ jelöli. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$

(Továbbra is egyesével növelve gondoljuk a következő elemeket, bár a halmaz elemeit tetszőleges sorrendben is felsorolhatjuk.)

Bármely két természetes szám összege és szorzata is természetes szám.

Az összeadásban a tagok, a szorzásban a tényezők felcserélhetők:

1 $a + b = b + a;$

2 $a \cdot b = b \cdot a$

Az összeadásban a tagok, a szorzásban a tényezők tetszőlegesen csoportosíthatók (az összeg, illetve a szorzat tetszőlegesen zárójellezhető, a zárójel el is hagyható):

3 $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c;$

4 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Összeget úgy is szorozhatunk egy számmal, hogy a tagokat külön-külön megszorozzuk, és az így kapott szorzatokat adjuk össze.

Ehhez hasonló összefüggés a különbség szorzása esetén is érvényes.

5 $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = ab + ac;$

$a \cdot (b - c) = (b - c) \cdot a = ab - ac$

☉ **Figyeld meg!**
Ezek a műveleti tulajdonságok nemcsak a természetes számok halmazán, hanem az egész számok ($\mathbb{Z}$), a racionális számok ($\mathbb{Q}$) és a valós számok ($\mathbb{R}$) halmazán is teljesülnek.

☉ **A műveletek elvégzése nélkül tudsz-e válaszolni a kérdésre?**

Figyelempróba

☉ **Készíts megoldási tervet! A megoldást a szöveg alapján ellenőrizd!**

Gyakorló
2.01– 2.15.;
Feladatgyűjtemény
2.1.01– 13., 2.1.26.,
2.2.08– 12.

FELADATOK

6 Melyik művelet eredménye természetes szám?

- a) $107 + 5620;$ b) $9301 - 7310;$ c) $7310 - 9301;$ d) $345 \cdot 107;$
e) $6049 : 61;$ f) $6039 : 61;$ g) $0 + 7053;$ h) $7053 - 0;$
i) $0 \cdot 7053;$ j) $0 : 7053;$ k) $7053 : 0;$ l) $0 - 7053$

7

- a) Egy kétkarú mérleg egyik tányérjában három egyenlő tömegű csomag és még 1 kg mérő súly van, a másik tányérban egy ugyanolyan csomag és még 5 kg mérő súly. Mekkora tömegű egy csomag, ha a mérleg egyensúlyban van?
- b) Egy gép állvánnyal együtt 7500 €. A gép ára 1500 €-val több az állvány áránál. Mennyibe kerül a gép állvány nélkül?
- c) Egy kétjegyű számban a tízesek száma 3-mal nagyobb az egyesek számánál. A szám nagyobb 29-nél, de kisebb 51-nél. Melyik ez a szám?
- d) Két természetes szám összege 17 864. A nagyobbik 0-ra végződik. Ha ezt a nullát elhagyjuk, a kisebbik számot kapjuk. Melyik ez a két szám?
- e) Egy 480 m^2 területű téglalap alakú kertet Jancsi 12 óra alatt, édesapja 6 óra alatt tudná egyedül felásni. Óránként mekkora területet tudnak felásni külön-külön, illetve együtt? Mennyi idő alatt végeznek, ha együtt dolgoznak?
- f) Volt bizonyos számú dió. Először megettük az ötödét, majd a maradék negyedét, végül az újabb maradék felét, így 6 szem dió maradt. Hány szem dió volt eredetileg?

> HASZNÁLD A SZÁMOLÓGÉPET!

Egyes feladatok megoldásakor a számolás igen időigényes és fárasztó. Számológéppel gyorsabban és kényelmesebben dolgozhatsz. Ám csak akkor bízhatod magad a zsebszámológépre, ha jól ismered működését és tulajdonságait.

A számológéppel dolgozva sokszor „melléüthet” az ember. Az ilyen hibát észrevehetjük, ha **becsléssel ellenőrizzük az eredményt**.

Figyeld meg, mely műveleti jelek térnek el a szokásostól! (Tizedesvessző helyett tizedespont van a gépen.) A műveleti jelek és a tizedespont jele a különböző gépeken ugyanaz, de az egyéb jelek szinte gépenként különböznek. Ezért tanulmányozd géped használati utasítását!

ON A bekapcsolás jele.

OFF A kikapcsolás jele.

C A törlés jele (Clear).

Egyes gépeknél az addig beírt teljes műveletsort törli. Például:

$13 + 12 + 100$ **C** $10 + 20 = 30$

Mindent töröltünk, amit a **C** megnyomása előtt beírtunk.

CE Egyes gépeken a javítás jele. Az éppen beírt szám törölhető ezzel a gombbal, és helyette beírható a helyes adat. Például:

$13 + 12 + 100$ **CE** $10 + 20 = 55$

Ha a gépen csak **C** vagy **C/CE** gomb van, akkor annak egyszeri megnyomása csak az utoljára beírt számot törli, mint az előbb ismertetett **CE** gomb. A teljes műveletsort a gomb *ismételt megnyomásával* törölhetjük.

+/- Egyes gépeken az előjelváltás jele.

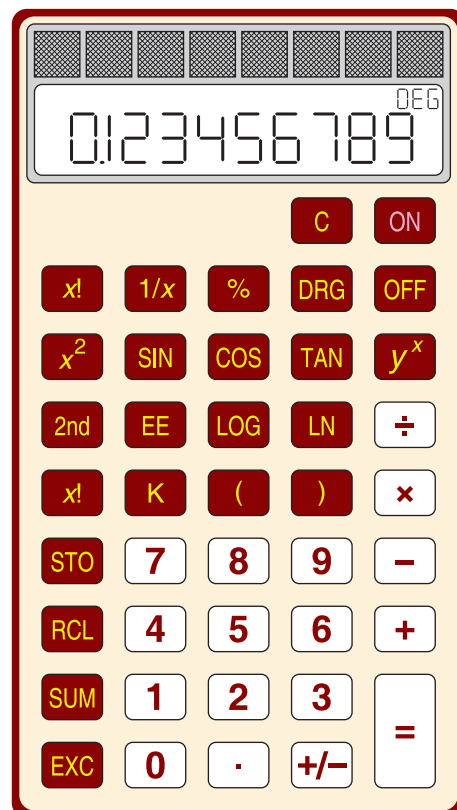
A gomb megnyomásakor megváltozik a beírt szám előjele. Például:

$13 + 10$ **+/-** $+ 5 = 13 + (-10) + 5 = 8$

M; **STO**; **x→M** A tároló (Memory) jele. A gomb megnyomására törli a tároló korábbi tartalmát, és a kijelzőn lévő számot írja be a tárolóba.

M+ A gomb megnyomására a kijelzőn lévő számot hozzáadja a tárolóban lévő számhoz.

RM; **RCL**; **M→x** A tárolóban lévő szám visszahívása.



© *Vannak gépek, amelyek az itt leírtakhoz képest egészen más módon működnek. Ezért fontos, hogy jól ismerd meg a saját gépedet, és azon gyakorold a számolást.*

© *Nézd meg, hogyan működik a mobiltelefonod számológép funkciója!*

1. GONDOLKOZZ ÉS SZÁMOLJ! 🧮 Használd a számológépet!

A táblázat szemlélteti a számológép két alapvető típusának a működését:

Megnyomott gombok	Kijelzett eredmény		A számítás menete	
	1. típus	2. típus	1. típus	2. típus
$15 - 5 \times 2 =$	20	5	$(15 - 5) \cdot 2$	$15 - (5 \cdot 2)$
$48 + 12 \div 3 =$	20	52	$(48 + 12) \div 3$	$48 + (12 \div 3)$

☉ Ha 1. típusú géped van, akkor hogyan szoktad figyelembe venni a helyes műveleti sorrendet?

1. típusú (egyszerű) gép: **Nem veszi figyelembe a helyes műveleti sorrendet.**

A beírás sorrendjében végzi el a műveletet. A gépnek ezt a hiányosságát számolás közben figyelembe kell venni.

2. típusú gép: **Figyelembe veszi a helyes műveleti sorrendet.**

Sok hibától kímél meg a 2. típusú gép. Ha még nincs számológéped, akkor föltétlenül olyat vásárolj, amelyik ismeri a helyes műveleti sorrendet és a zárójelezést. Vedd azt is figyelembe, hogy a középfokú iskolában olyan számológépre lehet szükség, amelyen van **SIN**, **TAN**, **LOG**, **y^x** gomb.

A számológépek működése más szempontból is különbözhet:

Megnyomott gombok		C	5	$\times$	3	=	=	=	=
Kijelzés	A típus	0	5	5	3	15	15	15	15
	B típus	0	5	5	3	15	75	375	1875
	C típus	0	5	5	3	15	45	135	405

Az **=** gomb ismételt megnyomása

A: nem változtat az eredményen;

B: az első tényezővel ismételten szoroz;

C: a második tényezővel ismételten szoroz.

Például egy **B** típusú gépen így is kiszámíthatjuk 3 hatványait:

Gombok:	C	3	$\times$	=	=	=	=	=	...
Kijelzés:	0	3	3	9	27	81	243	729	...
Hatvány:				3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6

Kísérletezz!

☉ Próbáld ki a játékot! A kézenfekvő „egy gombos” megoldás nem számít.



Ki tudja a számológépén a legkevesebb gombnyomással elérni 1-től 20-ig az egész számokat úgy, hogy a számjegy billentyűket csak 1-től kezdve, egyesével növekvő sorrendben használhatjuk? Például ha 8 a cél:

1 **+/-** **+** **2** **+** **3** **+** **4** **=** 9 gomb

1 **$\times$** **2** **y^x** **3** **=** 6 gomb

. **1** **$1/x$** **-** **2** **=** 6 gomb

FELADATOK

8

Számítsd ki a következő műveletsorok eredményét! A zsebszámológép használata előtt „fejben” becsüld meg az eredményt!

- a) $5 + 5 + 5 + 5$; b) $15 + 25 + 35 + 45$; c) $15 - 25 + 35 - 45$;
 d) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$; e) $20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50$; f) $200 \cdot 300 \cdot 400 \cdot 500$;
 g) $6400 : 40 : 40 : 40$; h) $64 : 4000 : 4000 : 4000$; i) $2 \cdot 3 : 0$;
 j) $1000 - 100 : 4$; k) $20 + 30 \cdot 25 - 3 \cdot 250$; l) $(23 + 45 - 28) \cdot 45$

9

Nyomd meg rendre a zsebszámológép gombjait a feladat utasítása szerint! Hasonlítsd össze a különböző gépeken kapott eredményeket!

- a) Kerekíti-e a hányadost a gép? $2 \div 3 =$
- b) $45648 \div 51 \times 51 =$
- c) Melyik műveletet végzi el a gép?
 $15 + - \times \div 5 =$; $15 \times \div + - 5 =$;
 $15 + - \div \times 5 =$
- d) Ismeri-e a helyes műveleti sorrendet a gép?
 $10 - 2 \times 3 =$ $4 + 12 \div 3 =$
- e) Hogyan számol a gép, ha ismételten megnyomjuk az $=$ gombot?
 $48 + 2 = = = =$; $48 - 2 = = = =$;
 $48 \times 2 = = = =$; $2 \times 48 = = = =$;
 $48 \div 2 = = = =$; $2 \div = = = =$
- f) Mit ír ki a gép, ha nullával osztunk? Mit jelent ez?
 $15 \div 0 =$; $15 \div 0 \times 12 =$;
 $15 \times \div 0 =$

Kísérletezz!

© Végezzétek el ezeket a számolásokat a táblázatkezelő segítségével is! Figyeljétek meg, hogy a szoftver az 1. vagy a 2. típusú számológép szerint számol-e!

10

- a) Egy gépkocsi másodpercenként 22,5 m-t tesz meg. Hány kilométert tesz meg ugyanekkora sebességgel 1 óra alatt?
- b) Egy gépkocsi óránként 126 km-t tesz meg. Hány métert tesz meg ugyanekkora sebességgel 1 s (másodperc) alatt?
- c) Egy autó 60 cm $\times$ 30 cm alapú, nagyjából téglatest alakú üzemanyagtartályában az üzemanyagszint 5,5 cm-t süllyedt egy 220 km-es út alatt. Hány litert fogyasztott az autó átlagosan 100 km-enként?

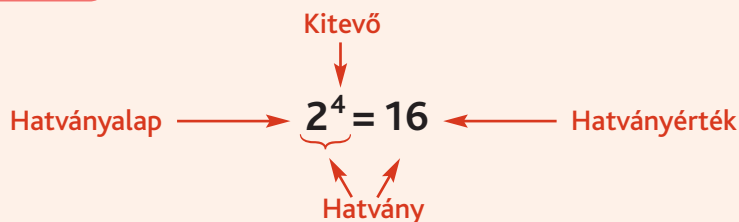
© A számításokat számológéppel végezheted. A becsült értékkel összehasonlítva ellenőrizheted az eredményt.

Gyakorló
2.16– 2.17.

HATVÁNYOZÁS

A HATVÁNYOZÁS ÉRTELMEZÉSE

Emlékeztető



Megállapodás szerint **minden 0-tól különböző szám nulladik hatványa 1.**

$$1^0 = 1; \quad 2^0 = 1; \quad (-0,2)^0 = 1; \quad \left(\frac{1}{10}\right)^0 = 1$$

A 0^0 hatványt nem értelmezzük.

Megállapodás szerint **minden szám első hatványa maga a szám:**

$$0^1 = 0; \quad 1^1 = 1; \quad 2^1 = 2; \quad (-0,2)^1 = -0,2; \quad \left(\frac{1}{10}\right)^1 = \frac{1}{10}$$

Ha a kitevő egynél nagyobb természetes szám, akkor az alapot annyiszor vesszük tényezőként, mint amennyi a kitevő. Például:

$$5^4 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4\text{-szer vesszük tényezőként}} = 625$$

4-szer vesszük tényezőként

$$(-5)^5 = \underbrace{(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)}_{5\text{-ször vesszük tényezőként}} = -3125$$

5-ször vesszük tényezőként

Zsebszámológéppel többféleképpen elvégezhetjük a hatványozást. Például számítsuk ki $4,2^3$ értékét (tizedesvessző helyett tizedespont van a gépen):

Elvégezzük az ismételt szorzást: $4.2 \times 4.2 = 74.088$

Ha a gép az $=$ megnyomásával megismétli a szorzást: $4.2 \times =$

A y^x gomb segítségével: $4.2 y^x 3 =$

FELADATOK

11 Egészítsd ki a következő egyenlőségeket!

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{\square} = \square \square \square \square$;

b) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^{\square} = \square \square \square \square \square \square$;

c) $(-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) = (-0,1)^{\square} = \square \square \square \square \square \square$

© Például:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

SZÁMOLÁS HATVÁNYOKKAL

FELADATOK

12 Figyeld meg, majd fogalmazd meg az összefüggést!

$$3^5 \cdot 3^7 = \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{5 \text{ tényező}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{7 \text{ tényező}} = 3^{5+7} = 3^{12}$$

összesen 12 tényező

Az előzőhöz hasonlóan értelmezd a következő hatványok szorzatát!

- a) $7^5 \cdot 7^7$; b) $5^3 \cdot 5^7$; c) $7^3 \cdot 7$; d) $3^5 \cdot 3^2 \cdot 3^4$; e) $9^2 \cdot 9^0 \cdot 9^1$;
f) $1^9 \cdot 1^{75}$; g) $2^8 \cdot 2^9$; h) $5^1 \cdot 5$; i) $0,1^5 \cdot 0,1^2$; j) $a^3 \cdot a \cdot a^5$

13 Figyeld meg, majd fogalmazd meg az összefüggést!

$$2^8 : 2^5 = 2^{8-5} = 2^3, \text{ mert } 2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

a) Mely számok írhatók az üresen hagyott helyre?

$$2^3 \xrightarrow{\cdot 2^5} 2^8; \quad \square \xrightarrow{\cdot 3^3} 3^7; \quad \square \xrightarrow{\cdot 5^6} 5^7; \quad \square \xrightarrow{\cdot 4^5} 4^5$$

$$\xleftarrow{: 2^5} \quad \xleftarrow{: 3^3} \quad \xleftarrow{: 5^6} \quad \xleftarrow{: 4^5}$$

b) Add meg hatványalakban a hányadost! ($w \neq 0$)

$$4^5 : 4^3; \quad 5^8 : 5^3; \quad 10^5 : 10^3; \quad 8^7 : 8^3; \quad 25^3 : 25^3; \quad w^{35} : w^{13}$$

c) Add meg hatványalakban a hányadost! ($a \neq 0$; $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$)

$$\frac{7^5}{7^3}; \quad \frac{5^9}{5^3}; \quad \frac{1^7}{1^2}; \quad \frac{2^4}{2^4}; \quad \frac{9^5}{9^4}; \quad \frac{3^9}{3^3}; \quad \frac{a^7}{a^2}; \quad \frac{a^m}{a^n}$$

d) Számítsd ki 2 (pozitív egész kitevőjű) hatványait 2^{13} -ig, az 5 hatványait 5^9 -ig!

e) Egyszerűsítsd a törteket!

$$\frac{256}{4096}; \quad \frac{125}{3125}; \quad \frac{8192}{64}; \quad \frac{15\,625}{625}; \quad \frac{512 \cdot 78\,125}{2048 \cdot 3125}; \quad \frac{75 \cdot 108}{48 \cdot 125}$$

14 Figyeld meg, majd fogalmazd is meg az összefüggést!

$$(2^4)^3 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{\square}$$

Hasonlóan értelmezd a következő hatványok hatványozását!

- a) $(5^4)^2$; b) $(10^3)^4$; c) $(0,1^2)^3$; d) $(c^4)^3$; e) $(800)^4 = (2^3 \cdot 10^2)^4$

15 Az alaphalmaz az $\mathbb{N}$. Oldd meg a következő egyenleteket!

- a) $2^6 \cdot x = 2^{13}$; b) $2^3 \cdot y = 1024$; c) $5^4 \cdot u = 25^4$;
d) $25^4 \cdot v = 5^7$; e) $2^4 \cdot 2^x = 1024$; f) $128 \cdot 2^y = 2^{11}$

16 Hány különböző szám írható föl négy 2-es számjegy és hatványozás segítségével?

☉ *Használhatod a számológépet.*

Célszerűen használhatod a d) feladatban kiszámított hatványokat.

☉ *Lásd a 13. d) feladatot.*

☉ *A kitevőben is lehet hatvány.*

☉ Figyeld meg, majd fogalmazd is meg az összefüggést!

17 Végezd el a számításokat!

$$a) 2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^{\square} = 10^{\square} = \square \square \square \square \square;$$

$$b) 20^3 = (2 \cdot 10)^3 = (2 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 10) = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10) = \square \square \square \square \square;$$

$$c) 5000^4 = \square; \quad d) 400^3 = \square; \quad e) 30^4 = \square;$$

$$f) 5^3 \cdot 4^3 = \square; \quad g) 2^5 \cdot 10^5 = \square; \quad h) 125^4 \cdot 8^4 = \square;$$

$$i) 0,2^5 = (2 \cdot 0,1)^5 = \square; \quad j) 0,05^4 = \square;$$

$$k) 0,0003^3 = \square; \quad l) (a \cdot b)^4 = \square;$$

$$m) 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 = \square; \quad n) a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 = \square$$

☉ Pozitív egész kitevőjű hatványokról van szó.

18 A következő állítások közül melyik igaz?

A: A 2-nek minden hatványa 4-nek is hatványa.

B: A 4-nek minden hatványa 2-nek is hatványa.

C: A 2-nek van olyan hatványa, amelyik 4-nek is hatványa.

D: A 4-nek van olyan hatványa, amelyik 2-nek is hatványa.

E: A 8-nak minden hatványa 4-nek is hatványa.

19 Írd be a hiányzó kitevőt, majd számítsd ki a hatvány értékét!

$$a) \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\square} = \square;$$

$$b) \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\square} = \square;$$

$$c) \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\square} = \square;$$

$$d) \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \left(\frac{3}{10}\right)^{\square} = \square$$

Gyakorló

2.18– 2.30.;

Feladatgyűjtemény

2.3.01– 12.

20 Figyeld meg, majd fogalmazd is meg az összefüggést! ($s \neq 0$)

$$a) \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \square; \quad b) \left(\frac{5}{2}\right)^5; \quad c) \left(-\frac{3}{4}\right)^6; \quad d) \left(\frac{r}{s}\right)^3$$

a)

4	9	
	5	

b)

16		
	32	
		64

B16

a) Egy i. e. 1100 körül írt, mágikus eljárásokat és jóslatokat tartalmazó kínai könyvben található ez a bűvös négyzet. Az egyes sorokban, oszlopokban, illetve átlókban található számok összege 15.

Egészítsd ki ezt a bűvös négyzetet!

☉ Keress kapcsolatot a két négyzet között!

b) Egészítsd ki ezt a bűvös négyzetet úgy, hogy az egyes sorokban, oszlopokban és átlókban lévő számok szorzata mindig ugyanannyi legyen! **Készíts te is bűvös négyzetet!**

Fogalmazzuk meg általánosan a feladatok megoldásakor felismert összefüggéseket.

Tétel

Egyenlő alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.

Bizonyítás

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ tényező}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ tényező}} = a^{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

összesen $m+n$ tényező

☉ Mivel a szorzat tényezői tetszőlegesen csoportosíthatók, a zárójeleket el is hagyhatjuk.

Például: $a^5 \cdot a^3 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{5 \text{ tényező}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_{+ 3 \text{ tényező}} = a^{5+3} = a^8$
 összesen $5 + 3$ tényező

Tétel

Egyenlő alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapot az osztandó és az osztó kitevőjének különbségére emeljük.

Bizonyítás

Mert

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad m \geq n \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$$

$\begin{array}{ccc} & : a^n & \\ \uparrow & & \downarrow \\ a^m & & a^{m-n} \\ \downarrow & & \uparrow \\ & \cdot a^n & \end{array}$

☉ Kikötjük, hogy az osztandó kitevője nem kisebb az osztó kitevőjénél.

☉ A bizonyítás azon alapszik, hogy az osztás a szorzás fordított művelete.

Például: $a^5 : a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) : (a \cdot a \cdot a) = a^{5-3} = a^2$, mert $a^3 \cdot a^2 = a^5$

Tétel

Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

Bizonyítás

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n) \cdot (a^n) \cdot (a^n) \cdot \dots \cdot (a^n)}_{m \text{ tényező}} = a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n = a^{n+n+n+\dots+n} = a^{m \cdot n}$$

összesen $m \cdot n$ tényező

A szorzat tényezői tetszőlegesen csoportosíthatók, a zárójeleket el is hagyhatjuk.

☉ Egyelőre még természetes szám kitevőkre bizonyítunk.

Például: $(a^4)^3 = \underbrace{(a^4) \cdot (a^4) \cdot (a^4)}_{3 \text{ tényező}} = a^{4+4+4} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$
 összesen $3 \cdot 4$ tényező

Tétel

A szorzás és a hatványozás elvégzése felcserélhető.

Bizonyítás

A tényezőket megfelelően felcserélhetjük és csoportosíthatjuk.

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3 \cdot b^3$$

Szorzat hatványozása
Azonos kitevőjű hatványok szorzata

☉ Az itt szemléltetett gondolatmenetnek az általánosítása bizonyítja a tételt.

Tétel

Az osztás és a hatványozás elvégzése felcserélhető.

Bizonyítás

A tényezőket megfelelően felcserélhetjük és csoportosíthatjuk.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3} \quad (b \neq 0)$$

Hányados hatványozása
Azonos kitevőjű hatványok osztása

☉ Az itt szemléltetett gondolatmenetnek az általánosítása bizonyítja a tételt.

A SZÁMOK NÉGYZETE

1. példa

Határozzuk meg annak a fakockának a felszínét, amelynek egy éle: $a = 1,63$ dm.

A kocka felszíne: $A = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 1,63^2$ dm².

Beírás	6	x	1.63	x²	=
Kijelzés	6	6.	1.63	2.6569	15.9414

Számológéppel így számolhatunk.

A kocka felszíne: $A = 15,9414$ dm² $\approx 15,94$ dm²

Értelmezés

Egy szám második hatványát a szám **négzetének** is nevezzük.

A számológépeken a négyzetre emelést elvégezhetjük, ha a szám leírása után

megnyomjuk az gombot: $1,6 \rightarrow 2.56$;

megnyomjuk a és az gombot: $1.6 \rightarrow 2.56$;

megnyomjuk az , a és az gombot: $1,6 \rightarrow 2.56$

A SZÁMOK NORMÁLALAKJA

FELADATOK

22 Végezd el a szorzásokat, osztásokat!

- a) $2,13 \cdot 10^3$; $3,4 \cdot 10^4$; $5,4506 \cdot 10^2$; $2,053 \cdot 10^5$; $7,3 \cdot 10^9$
b) $120 : 10^2$; $4560 : 10^3$; $23,45 : 10^1$; $30\,670 : 10^4$; $456\,000 : 10^5$

☉ *Például:*
 $6,14 \cdot 10^2 =$
 $= 6,14 \cdot 100 = 614$

23 Írd föl a következő pozitív számokat egy 1 és 10 közé eső szám és 10 megfelelő egész kitevőjű hatványának szorzataként!

- a) 20; 35; 25,1; 34,57; 45,68; 20,55; 76,545
b) 200; 350; 251; 345,7; 456,8; 205,5; 765,45
c) 2000; 3500; 2510; 3457; 4568; 2055; 7654,5

☉ *Például:*
 $3000 = 3 \cdot 10^3$;
 $135 = 1,35 \cdot 10^2$;
 $24,65 = 2,465 \cdot 10^1$;
 $3,54 = 3,54 \cdot 10^0$

Emlékeztető

Minden 1-nél nem kisebb szám felírható egy 1-nél nem kisebb és 10-nél kisebb x szám ($1 \leq x < 10$) és 10 valamelyik nemnegatív egész kitevőjű hatványának szorzataként.

☉ *Lásd az előző feladat példáit.*

Ha nagy számokkal végzünk műveleteket, akkor előfordul, hogy az eredményt például öt értékes jegyre kerekítve, normálalakban kapjuk meg. Például:

$$25\,478 \cdot 4679 = 1,1921 \cdot 10^8;$$

Az eredmény a kijelzőn így látható: 1.1921 08

Különböző számológépeken a normálalakot az **EE** vagy az **EXP** gombok segítségével tudjuk beírni.

☉ *Lásd a következő oldalon a 2. példát.*

FELADATOK

24 Írd fel a normálalakban adott számokat helyiértékes írásmóddal!

$$a = 2,05 \cdot 10^7; \quad b = 3,5 \cdot 10^1; \quad c = 1,005 \cdot 10^2; \quad d = 5,02 \cdot 10^0; \quad e = 5 \cdot 10^{12}$$

Gyakorló
2.31– 2.41., 7.04.,
7.06– 7.10.

25 Írd föl a következő mennyiségeket a normálalak segítségével!

A Föld sugara $\approx 6\,400\,000$ m; a Nap sugara $\approx 700\,000\,000$ m;
a Hold sugara $\approx 1\,700\,000$ m; a Föld-Hold közepes távolság $\approx 385\,000\,000$ m;
A Nap tömegéből naponta energiává váló anyag $\approx 345\,600\,000\,000$ t.

☉ *Keress te is hasonló érdekes számadatokat!*



Gál István erdélyi fizikus 1928-ban írta le a ciklotron (spirálpályás részecskegyorsító) elvét, Ernest Lawrence pedig 1931-ben építette meg az elsőt. A mai legnagyobb gyorsító, a Large Hadron Collider (LHC) közel 15 petabyte mennyiségű mérési adatot szolgáltatott az első évben, 2010-ben. Írd le ezt az adatmennyiséget normálalakban, ha $1\text{ PB} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\text{ B}$!

☉ *Más forrás szerint a ciklotron Szilárd Leó ötlete és szabadalma volt. Hol található az LHC?*

2. példa

Számológéppel számítsuk ki a szorzatot. $(4,93 \cdot 10^{12}) \cdot (3,47 \cdot 10^7)$

Az első tényező beírása és a szorzásra adott utasítás:

Beírás	C	4	.	9 3	EXP	1 2	×
Kijelzés	0	4	4.	4.93	4.93 00	4.93 12	4.93 12

A második tényező beírása és a szorzás eredménye:

Beírás	3	.	4 7	EXP	7	=
Kijelzés	3	3.	3.47	3.47 00	3.47 07	1.7107 20

$$(4,93 \cdot 10^{12}) \cdot (3,47 \cdot 10^7) \approx 1,7107 \cdot 10^{20}$$

Az eredményt öt értékes jegyre kerekítve kaptuk meg.

3. példa

Becsüljük meg a gömb alakúnak feltételezett fizikai világmindenség sugarát.

A fizika mai állása szerint az általunk megfigyelhető világ mintegy 20 milliárd évvel ezelőtti ősrobbanással keletkezett. E feltételezés szerint a fizikai világmindenség sugara nem lehet nagyobb, mint amekkorára távolságra eljutott ez alatt az idő alatt a robbanással kibocsátott fényrészecske (foton).

$$1 \text{ h (óra)} = 60 \cdot 60 \text{ s} = 3600 \text{ s (másodperc)}; 1 \text{ év} \approx 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}$$

Kényelmesebben számolhatunk, ha normálalakban írjuk fel a számokat!

$$(3,65 \cdot 10^2) \cdot (2,4 \cdot 10^1) \cdot (3,6 \cdot 10^3) = (3,65 \cdot 2,4 \cdot 3,6) \cdot 10^{2+1+3} \approx 3,15 \cdot 10^7$$

$$31,536 \approx 3,15 \cdot 10^1 \cdot 10^6$$

$$1 \text{ év} \approx 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$\text{A fény sebessége} \approx 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

A fény által 1 év alatt megtett távolság a fényév. 1 fényév körülbelül:

$$(3,15 \cdot 10^7 \text{ s}) \cdot \left(3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}\right) = (3,15 \cdot 3) \cdot 10^{7+5} \text{ km} \approx 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

A fény által 20 milliárd év alatt megtett távolság (a keresett sugár) körülbelül:

$$(9,5 \cdot 10^{12} \text{ km}) \cdot (2 \cdot 10^{10}) = 19 \cdot 10^{22} \text{ km} = 1,9 \cdot 10^{23} \text{ km}$$

• 20 milliárd = $2 \cdot 10^{10}$

Figyelempróba



Lelketlen bűnözők folyamatosan kísérelnek meg Európába csempészni nagymennyiségű kábítószer a hamburgi kikötőn át. A hamburgi vámósok közel 100 millió euró értékű kábítószer találnak meg évente. Váltsd át ezt az összeget forintra 270 forintos árfolyamon, és számold ki, hogy hány darab 10 millió forintos orvosi berendezést lehetne ebből venni!

A NORMÁLALAKRÓL TANULTAK KIEGÉSZÍTÉSE

FELADATOK

B6 Végezd el a szorzásokat, osztásokat!

a) $7 \cdot (0,1)^4$; $4,7 \cdot (0,1)^3$; $5,08 \cdot (0,1)^5$; $5,3 \cdot (0,1)^7$; $3,7 \cdot (0,1)^1$

b) $7 : 0,1$; $15 : 0,000\ 001$; $0,03 : (0,1)^2$; $0,0005 : (0,1)^4$

B7 Írd föl a következő pozitív számokat egy 1-nél nem kisebb és 10-nél kisebb szám és 0,1 megfelelő egész kitevőjű hatványának szorzataként!

a) $0,2$; $0,35$; $0,251$; $0,3457$; $0,4568$; $0,2055$

b) $0,02$; $0,035$; $0,0251$; $0,034\ 57$; $0,045\ 68$; $0,020\ 55$

c) $0,002$; $0,0035$; $0,002\ 51$; $0,003\ 457$; $0,004\ 568$; $0,002\ 055$

Megfigyelés

Minden 1-nél kisebb pozitív szám felírható egy 1-nél nem kisebb és 10-nél kisebb x szám ($1 \leq x < 10$) és 0,1 valamelyik pozitív egész kitevőjű hatványának szorzataként.

Megállapodás szerint a tízes számrendszerben az egyesnél kisebb helyiértékeket is felírhatjuk 10 hatványai segítségével:

...	Ezres	Százaz	Tízes	Egyes	Tized	Század	Ezred	...
...	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	...
...	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	...

Megállapodás szerint:

$$10^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^1 = (0,1)^1; \quad 10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = (0,1)^2; \quad 10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = (0,1)^3; \dots$$

Ennek ismeretében felírhatjuk a 0 és az 1 közé eső számok normálalakját is.

Például: $0,35 = 3,5 \cdot 10^{-1}$; $0,035 = 3,5 \cdot 10^{-2}$; $0,000\ 000\ 035 = 3,5 \cdot 10^{-8}$

Értelmezés

Egy nullánál nagyobb szám normálalakját úgy kapjuk, hogy a számot egy 1-nél nem kisebb és 10-nél kisebb x szám ($1 \leq x < 10$) és 10 megfelelő egész kitevőjű hatványának szorzataként írjuk föl.

◎ **Például:**

$$0,032 = 3,2 \cdot 0,01 =$$

$$= 3,2 \cdot (0,1)^2;$$

$$0,000\ 32 =$$

$$= 3,2 \cdot 0,0001 =$$

$$= 3,2 \cdot (0,1)^4;$$

$$0,32 = 3,2 \cdot (0,1)^1;$$

$$0,000\ 000\ 032 =$$

$$= 3,2 \cdot 0,000\ 000\ 01 =$$

$$= 3,2 \cdot (0,1)^8$$

◎ *Lásd a fenti példákat.*

◎ *Azaz definíció szerint*

10^{-1} 10 reciprokát jelenti, így 10^{-2} egyenlő 10 reciprokának négyzetével (vagy 10 négyzetének a reciprokával). És így tovább.



Az atom elemi részecskéi közül a Müon élettartama $2,197 \cdot 10^{-6}$ s, a Tau-lepton élettartama $3,4 \cdot 10^{-13}$ s. Mekkora az élettartamok aránya?

Többet ésszel!

Az anyag építőkövei az atomok. Az atom protonokból, neutronokból és elektronokból áll. E parányi részecskék tömegének, átmérőjének mérőszáma tizedestört alakban felírva nehezen áttekinthető, míg normálalakban írva jól kezelhető. Például:

A héliumatom átmérője: $\approx 0,000\,000\,05\text{ mm} = 5 \cdot 10^{-8}\text{ mm}$

A proton tömege: $\approx 0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,67\text{ g} = 1,67 \cdot 10^{-24}\text{ g}$

Az elektron tömege: $\approx 0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,91\text{ g} = 9,1 \cdot 10^{-28}\text{ g}$

• Normál nyomáson.

4. példa

1 m^3 hidrogéngázban körülbelül $26\,900\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ kétatomos molekula van, és ennek a mennyiségnek a tömege körülbelül $0,09\text{ kg}$. Becsüljük meg egy hidrogénatom tömegét.

Normálalakban írt számokkal dolgozunk:

1 m^3 -ben körülbelül $2 \cdot 2,69 \cdot 10^{25} = 5,38 \cdot 10^{25}$ db hidrogénatom van.

Ennek a tömege közelítőleg $9 \cdot 10^{-2}\text{ kg}$.

Egy hidrogénatom tömege közelítőleg:

$(9 \cdot 10^{-2}\text{ kg}) : (5,38 \cdot 10^{25}) \approx 1,67 \cdot 10^{-2-25}\text{ kg} = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$

Beírás	C	9	EXP	+/-	2	÷
Kijelzés	0	9	9.00	9. -00	9. -02	9. -02

Figyeld meg, hogy számológéppel normálalakban számolva hogyan írjuk be a 10 negatív egész kitevőjét!

Beírás	5	.	3	8	EXP	2	5	=
Kijelzés	5.38				5.38 00	5.38 25	1.6729 -27	

FELADATOK

• Gyakorold a számológép használatát!

Gyakorló

2.47– 2.51., 7.05.;

Feladatgyűjtemény

2.3.15– 19., 2.3.23– 31.,

2.3.33– 35.

• A szükséges adatokat az oldal tetején megtalálhatod.

B8

Írd le normálalakban a számokat, majd számítsd ki az eredményt!

- a) $248\,000\,000 \cdot 37\,000\,000\,000$; b) $656\,000\,000\,000 : 32\,000$;
c) $325\,000\,000\,000 : 0,000\,000\,65$; d) $7200 : 0,000\,000\,18$;
e) $16\,000\,000\,000^3$; f) $0,000\,005^4$

B9

A hidrogénatom egy protonból és egy elektronból áll. Hányszorosa a proton tömege az elektron tömegének?

Többet ésszel ...



Az atomokat protonok, neutronok (közös szóval **nukleonok**) és elektronok építik fel. Mindkét nukleon tömege $\approx 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$. (Az elektronok tömege elhanyagolható.) Becsüld meg, hány nukleont tartalmaz a tested!

> OSZTÓ, TÖBBSZÖRÖS

FELADATOK

- 26 a) Hány olyan nem egybevágó téglalap van, amelyeknek a területe 512 cm^2 , és oldalainak centiméterrel adott mérőszáma egész szám?
- b) Hány olyan nem egybevágó téglatest van, amelyeknek a térfogata 512 cm^3 , és éleinek centiméterrel adott mérőszáma egész szám?
- c) Hány olyan nem egybevágó négyzet alapú hasáb van, amelyeknek a térfogata 5000 cm^3 , és éleinek centiméterrel adott mérőszáma egész szám?

☉ Gondolj az osztópárokra!

☉ Segít a prímtényező felbontás.

- 27 a) A 67 457 mennyit ad maradékul 11-gyel; 30-cal; 13-mal osztva?
Írd föl az osztandót az osztó, a hányados és a maradék segítségével!
A 11, 30 és 13 számok közül melyikkel osztható a 67 457?
- b) Egy a pozitív egész számban a b pozitív egész szám h -szor van meg, és marad az m nemnegatív egész szám.
Írd föl az osztandót az osztó, a hányados és a maradék segítségével!
- c) Válaszd ki azokat a számokat, amelyeknek a pozitív egész számok körében pontosan két osztójuk van! Hogyan nevezzük a kiválasztott számokat?
- 1, 2, 3, 4, 5, 9, 17, 31, 91, 112, 119, 121, 1001

☉ Például a $31 : 5$ maradékos osztás felírható így:
 $31 = 5 \cdot 6 + 1$

☉ Lásd az előző feladatot.

- 28 Az alaphalmaz: $H = \{30\text{-nál nem nagyobb természetes számok}\}$
Írd be az alaphalmaz elemeit a halmazábra megfelelő részébe!

Ha a ruletkeeréken a 30-nál nem nagyobb természetes számok szereplnének, és a téteteket az itt látható mezők valamelyikébe kellene helyezni, és mindegyik ugyanannyit fizetne, melyikre tennél?



	Prímszám	Nem prímszám
Páros szám		
Nem páros szám		

	Osztható 4-gyel	Nem osztható 4-gyel
Osztható 3-mal		
Nem osztható 3-mal		

Emlékeztető

Ha egy a (pozitív) természetes szám felírható egy b természetes szám és egy másik természetes szám szorzataként, akkor a b számot az a szám osztójának, az a számot a b szám többszörösének nevezzük.

A 60 felírható 4 és egy másik természetes szám szorzataként: $60 = 4 \cdot 15$

Ezért 4 a 60-nak osztója, 60 a 4-nek többszöröse. (Ez igaz 15-re is.)

A 60 osztói **osztópárokba** rendezve:

1 és 60; 2 és 30; 3 és 20; 4 és 15; 5 és 12; 6 és 10

☉ Ha nem mondunk mást, akkor az oszthatósági vizsgálatokban az alaphalmaz a pozitív természetes számok halmaza. (Olykor az egész számok halmazán is vizsgálódunk.)

© 2300 évvel ezelőtt Eukleidész bizonyította, hogy végtelen sok prímszám van.

Emlékeztető

Törzsszámnak vagy prímszámnak nevezzük azt a természetes számot, amelynek pontosan két osztója van a természetes számok között.

Összetett számnak nevezzük azt a 0-tól különböző természetes számot, amelynek kettőnél több osztója van a természetes számok halmazában.

A 61 törzsszám (prímszám), mert pontosan két osztója van a természetes számok halmazában, 1 és 61.

A 60 összetett szám, mert 2-nél több természetes szám osztója van.

Az 1 minden természetes számnak osztója.

Az 1-nek egy osztója van, önmaga. Az 1 nem összetett szám és nem törzsszám.

A 0 minden természetes számnak többszöröse, 0-nak minden természetes szám osztója.

A 0-t nem tekintjük sem összetett számnak, sem törzsszámnak.

Tétel

A számelmélet alaptétele: Minden összetett szám felbontható törzsszámok szorzatára, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

© A tétel bizonyításához az általános iskolai ismeretek nem elegendők.

© **Prímtényező**s vagy **törztényező**s alaknak is nevezzük ezt a formát.

1. példa

A következő (törzsszámok hatványainak szorzataként felírt) számok közül válasszuk ki 32 többszöröseit, illetve 45 többszöröseit:

2^5 ; 3^4 ; $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$; $2^5 \cdot 3^1$; $2^8 \cdot 3^3 \cdot 7$; $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 11$; $3^6 \cdot 5^5 \cdot 7^7$

$32 = 2^5$, ezért 32 **többszöröseinek** törztényezős alakjában a 2 **legalább** ötödik hatványon fordul elő (ezenkívül más törztényezők is lehetnek, tetszőleges hatványon):

2^5 ; $2^5 \cdot 3^1$; $2^8 \cdot 3^3 \cdot 7$; $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 11$;

$45 = 3^2 \cdot 5^1$, ezért a 45 többszöröseinek törztényezős alakjában a 3 legalább a második, az 5 legalább az első hatványon fordul elő:

$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$; $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 11$; $3^6 \cdot 5^5 \cdot 7^7$

A $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 11$ **közös többszöröse** 32-nek és 45-nek.

2. példa

Hány osztója van **a)** 125-nek; **b)** 400-nak; **c)** 600-nak?

Az alaphalmaz a természetes számok halmaza.

Egy a természetes szám **osztóinak** törztényezős felbontásában csak azok a prímszámok szerepelhetnek, amelyek az a szám törztényezős felbontásában is előfordultak, és **legfeljebb** akkora hatványon, mint az a szám esetén.

a) $125 = 5^3$, ezért 125-nek $3 + 1 = 4$ osztója van:
 $1 (= 5^0)$, 5^1 , 5^2 , $5^3 (= 125)$

© **Egyszer sem vesszük, illetve 1-szer, vagy 2-szer, vagy 3-szor vesszük az ötöt tényezőként.**

- b** $400 = 2^4 \cdot 5^2$. Ezért a 400 osztóinak törzstényezős alakjában a 2 legfeljebb a negyedik hatványon, az 5 legfeljebb a második hatványon fordul elő.

Az osztókat például így állíthatjuk elő:

		(4 + 1)-féle kitevője lehet				
		2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
(2 + 1)-féle kitevője lehet	5^0	1	2^1	2^2	2^3	2^4
	5^1	5^1	$2^1 \cdot 5^1$	$2^2 \cdot 5^1$	$2^3 \cdot 5^1$	$2^4 \cdot 5^1$
	5^2	5^2	$2^1 \cdot 5^2$	$2^2 \cdot 5^2$	$2^3 \cdot 5^2$	$2^4 \cdot 5^2$

A 400-nak $(4 + 1) \cdot (2 + 1) = 15$ osztója van.

- c** Bontsuk a 600-at törzsszámok hatványainak szorzatára.

$$600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$$

A 600 valamely osztójának törzstényezős alakjában csak a 2, a 3 és az 5 prímszámok fordulhatnak elő.

A 600 törzstényezős felbontásában 2^3 van, ezért 600 valamely osztójának törzstényezős alakjában csak a 2^0 , 2^1 , 2^2 , vagy 2^3 fordulhat elő. Vagyis a 2 hatványai $(3 + 1)$ -féleképpen szerepelhetnek 600 osztóiban.

Mivel $2^0 = 1$, ezért az osztó törzstényezős alakjában a 2^0 -t nem szoktuk kiírni.

Hasonló gondolatmenet alapján a 3 hatványai $(1 + 1)$ -féleképpen, az 5 hatványai $(2 + 1)$ -féleképpen fordulhatnak elő.

Így a 600 osztóinak száma: $(3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) = 24$

☉ Emlékeztető

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

FELADATOK

- 29** a) Bontsd föl törzsszámok (prímszámok) szorzatára a következő számokat!

$$a = 1024; \quad b = 49; \quad c = 2560; \quad d = 1155; \quad e = 5358; \quad f = 10\,010$$

b) Írd fel az előző számok osztóit törzsszámok hatványainak szorzataként!

- 30** a) Írjátok fel prímtényezős alakban 450 és 504 pozitív osztóit!

b) Húzzátok alá a **közös osztókat**! Karikázzátok be a legnagyobb közös osztót!

c) Soroljátok fel 450 és 504 **legnagyobb közös osztójának** az osztóit!

- 31** Írd fel a következő törtek számlálóját és nevezőjét törzsszámok hatványainak szorzataként, majd egyszerűsítsd a törteket!

$$a) \frac{8192}{1024}; \quad b) \frac{5000}{6250}; \quad c) \frac{2016}{5292}; \quad d) \frac{4356}{7623}; \quad e) \frac{9360}{5408}$$

☉ **Célszerű 2-től kezdeni a törzsszám osztók keresését.**

Lásd a 2. példát.

☉ **Dolgozzatok párban! Osszátok szét egymás közt a feladatot!**



Mennyi az összege az összes kétjegyű számnak, amelynek 12 osztója van?

© Például 3150 legkisebb természetes szám többszöröse 0 lenne. Az egész számok között pedig nincs legkisebb többszöröse.

© Segít a törzstényezős felbontás.

© Például:

$$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^1;$$

$$1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1;$$

$$(756; 1080) = 2^2 \cdot 3^3 = 108$$

$$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^1;$$

$$1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1;$$

$$[756; 1080] =$$

$$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 7560$$

- 32 a) Írd fel 3150, majd 6000 tíz legkisebb pozitív többszörösét törzsszámok hatványainak szorzataként!
- b) Írd fel 3150 és 6000 öt pozitív közös többszörösét prímszámok hatványainak szorzataként! Mi a két szám legkisebb közös többszöröse? Hány közös többszöröse van e két számnak?

- 33 Határozd meg a következő természetes számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

- a) 76 és 152; b) 42 és 55; c) 68 és 170; d) 22, 52 és 15

- 34 a) Határozd meg x , y , z értékét! Az a és b legnagyobb közös osztója:

$$(a; b) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2; \text{ és } a = 2^x \cdot 3^4 \cdot 5^2; b = 2^4 \cdot 3^y \cdot 5^z$$

- b) A 8, 27, 49, 90, 100 és 120 számok közül melyek közös osztói az a) feladatban adott a -nak és b -nek?

- 35 a) Határozd meg x , y , z , v értékét! Az a és b legkisebb közös többszöröse:

$$[a; b] = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7; \text{ és } a = 2^x \cdot 3 \cdot 5^z; b = 2^4 \cdot 3^y \cdot 5^2 \cdot 7^v$$

- b) A $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^5$; $7^1 \cdot 5$; $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$; $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^3$ számok közül melyik közös többszöröse az a) feladatbeli a -nak és b -nek?

Emlékeztető

Két (vagy több) nullától különböző egész szám legnagyobb közös osztóján azt a pozitív közös osztójukat értjük, amelyik minden közös osztójuknak többszöröse. Az a és b szám legnagyobb közös osztójának jelölése: $(a; b)$

Két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztóját úgy is meghatározhatjuk, hogy a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk.

Két (vagy több) nullától különböző egész szám legkisebb közös többszörösén azt a pozitív közös többszörösüket értjük, amelyik minden közös többszörösüknek osztója.

Az a és b szám legkisebb közös többszörösének jelölése: $[a; b]$

Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszörösét úgy is meghatározhatjuk, hogy az összes előforduló prímtényezőt az előforduló legnagyobb hatványon összeszorozzuk.

Fejtörő!



Egy szép napon 1 \$ = 180 Ft-ba; 1 € = 264 Ft-ba került. Hedvig vásárolt egy gépet, amelynek az ára egész számmal kifejezhető volt a fenti pénznemek (a forintot is beleértve) akármelyikével. Hány euróba került a gép, ha az ára meghaladta a 10 000 Ft-ot, de nem érte el a 70 \$-t?



Írj a keretek helyére olyan számjegyeket, hogy az egyenlőség igaz legyen!

$$20 \square \square : 13 = \square \square 7$$

FELADATOK

36

- a) Mely számokkal való oszthatóságot lehet eldönteni az utolsó számjegyből? Hogyan?
- b) Az utolsó két számjegyből mely számokkal való oszthatóság dönthető el? Hogyan?
- c) Az utolsó három számjegyből mely számokkal való oszthatóság dönthető el? Hogyan?
- d) 25 25A; 43 2B0; 68 3C4. A betűk helyére mely számjegyek írhatók úgy, hogy a kapott szám osztható legyen
 | 2-vel; | 4-gyel; | 8-cal; | 5-tel; | 25-tel; | 125-tel; | 10-zel; | 100-zal? |

☉ Válaszod indokold!

☉ Emlékezz, hogy a természetes számok halmazán vagyunk! Vajon érvényesek-e ezek az oszthatósági szabályok az egész számok halmazán is?

37

- a) Mely számokkal való oszthatóság dönthető el a számjegyek összegéből?
- b) 45 23A; 43 2B0; 36 3C6. A betűk helyére mely számjegyek írhatók úgy, hogy a kapott szám osztható legyen
 | 3-mal; | 9-cel; | 6-tal; | 15-tel; | 75-tel; | 45-tel; | 90-nel; | 900-zal? |
- c) 9-cel osztva mennyit ad maradékul az
 | 1; | 3; | 7; | 9; | 10; | 30; | 70; | 90; | 100; | 300; | 700; | 900? |

Gyakorló
 2.52– 2.70;
 Feladatgyűjtemény
 2.6.01– 23., 6.1.12.

38

- a) Igazold, hogy egy 10-nél nagyobb természetes szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha utolsó két számjegyéből álló szám osztható 4-gyel!
- b) Fogalmazd meg és igazold a 9-cel való oszthatóság feltételét!
- c) Fogalmazd meg és igazold a 6-tal való oszthatóság feltételét!

☉ Mondjatok példákat, ellenpéldákat!

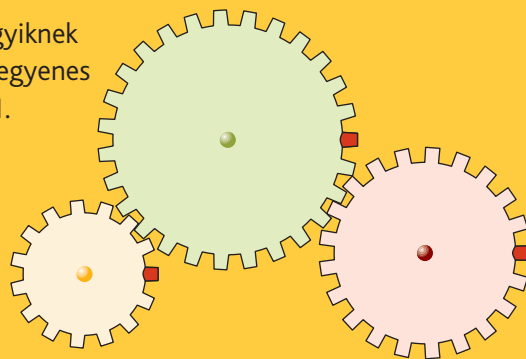


Ödömér terasza 588 cm hosszú és 378 cm széles. Padlózatát (szorosan egymás mellé helyezett) egyenlő méretű, négyzet alakú gránit lapokkal kívánja beborítani. Megfelelő minőségben és színben 36 cm, 42 cm, 54 cm, illetve 84 cm oldalhosszúságú lapokat talál. Melyik méretet válassza, ha a lapok vágása nélkül szeretné megoldani a burkolást?

Többet ésszel!



Egy függőleges táblára három fogaskereket szereltünk, mindegyiknek egy-egy foga pirosra van festve. Tengelyük egy-egy vízszintes egyenes mentén helyezkedik el. A kerek fogainak száma 15, 27 és 21. (A 27 fogú kerék a középső, és kapcsolódik a két másikhoz.) Kiindulási helyzetben mindegyik kerék piros foga vízszintes helyzetű, és a tengelytől jobbra helyezkedik el. Hányszor kell a 15 fogú kereket megforgatni az óramutató járásával egyező irányban, hogy újra a kiindulási helyzetbe jusson a három kerék?



- a) Hány olyan természetes szám van 1-től 720-ig, amelyre teljesül, hogy a szám és a 720 legnagyobb közös osztója 1 (relatív prímek)?
- b) Hány osztója van annak a számnak, amely osztóinak szorzata a szám negyedik hatványát adja?
- c) Bontsd fel az 1 000 000 000-t olyan tényezőik szorzatára, amelyek egyikében sincs 0 számjegy!

EGÉSZ SZÁMOK

A TERMÉSZETES SZÁMKÖR BŐVÍTÉSE

A természetes számok halmazában nem minden egyenlet oldható meg.

$$\begin{aligned} \text{Ilyen egyenlet például: } 12 + x &= 10 \\ x &= 10 - 12 \end{aligned}$$

Ez a különbség nem természetes szám.

Ha bármely a és b természetes szám különbségét értelmezni kívánjuk, akkor be kell vezetnünk a **negatív szám** fogalmát. Az ellentétes mennyiségek matematikai értelmezéséhez is szükségünk volt a természetes számkör bővítésére.

A természetes számok halmazát úgy bővítjük ki az egész számok halmazává, és úgy értelmezzük az egész számok közötti műveleteket, hogy a műveletek eddigi tulajdonságai érvényben maradjanak, továbbá bármely két számnak legyen különbsége.

❶ *Megmarad az összeg tagjainak és a szorzat tényezőinek felcserélhetősége és a csoportosíthatósága. Összeg szorzását egy számmal ugyanúgy hajtjuk végre, mint a természetes számok körében.*

Értelmezések

Azokat a számokat, amelyek felírhatók két természetes szám különbségeként, egész számoknak nevezzük.

Az egész számok halmazának jelölése: $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

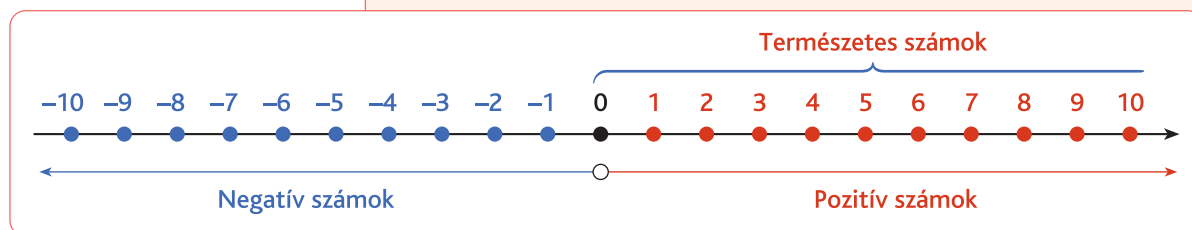
❶ *Például:*

$$\begin{aligned} 5 &= 5 - 0 = 6 - 1 = 7 - 2 = 8 - 3 = \dots; \\ 0 &= 0 - 0 = 1 - 1 = 2 - 2 = 3 - 3 = \dots; \\ -5 &= 0 - 5 = 1 - 6 = 2 - 7 = 3 - 8 = \dots \end{aligned}$$

Minden egész szám (végtelenül) sokféleképpen felírható két természetes szám különbségeként.

Hasonlítsd össze, hogy az 5-öt, illetve a -5-öt hogyan írhattuk föl két természetes szám különbségeként!

A 0-nál nagyobb számokat pozitív számoknak, a 0-nál kisebb számokat negatív számoknak nevezzük. A 0 nem pozitív és nem negatív szám.



❶ *Például az 5 és a -5 ellentettjei egymásnak.*

A 0 ellentettje önmaga.

Például:

$$\begin{aligned} |5| &= 5; \\ |0| &= 0; \\ |-5| &= -(-5) = 5 \end{aligned}$$

Egy a szám **ellentettjén** azt a számot értjük, amelyet az a -hoz hozzáadva 0-t kapunk. Az egész számok a természetes számok és azok ellentettjei.

Ha az a szám pozitív vagy 0, akkor **abszolútértékén** magát az a számot értjük. Ha az a szám negatív, akkor abszolútértékén a szám ellentettjét értjük.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0; \\ -a, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

A szám abszolútértéke a számnak a 0-tól mért távolsága a számegyenesen.

A szám abszolútértéke mindig nemnegatív szám (pozitív szám vagy 0).

FELADATOK

- 39 a) Add meg és értelmezd a következő mennyiségek ellentettjét!
- 64 Ft bevétel; fagypont alatti 27°C hőmérséklet.

- b) Oldd meg a következő egyenleteket!

$$x + 12 = 0; \quad 0 + y = 0; \quad z + (-15) = 0; \quad a + u = 0$$

Az egyenletek segítségével értelmezd az „ellentett” fogalmát!

- 40 a) Melyik az a két szám, amelyeknek a számegyenesen 0-tól vett távolsága egyenlő, és egymástól 12 egységre helyezkednek el?

- b) A következő számokat rendezd növekvő sorrendbe!

$$325; \quad -47; \quad -2138; \quad 0; \quad 10\,001; \quad -10\,000; \quad 3$$

- c) Írd fel és rendezd növekvő sorrendbe a b) feladatban felsorolt számok ellentettjét!

- d) Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$.

$$-x < 10; \quad -2y \geq -5; \quad 2 - z \leq -12; \quad -15 - 2u > 12; \quad -v > v$$

- 41 a) Rendezd növekvő sorrendbe a felsorolt számok abszolútértékét!

$$325; \quad 47; \quad -2138; \quad 0; \quad 10\,001; \quad -10\,000; \quad 3$$

- b) Írj -50 abszolútértékénél nagyobb egész számot!

- c) Írj -50 abszolútértékénél nagyobb abszolútértékű negatív számot!

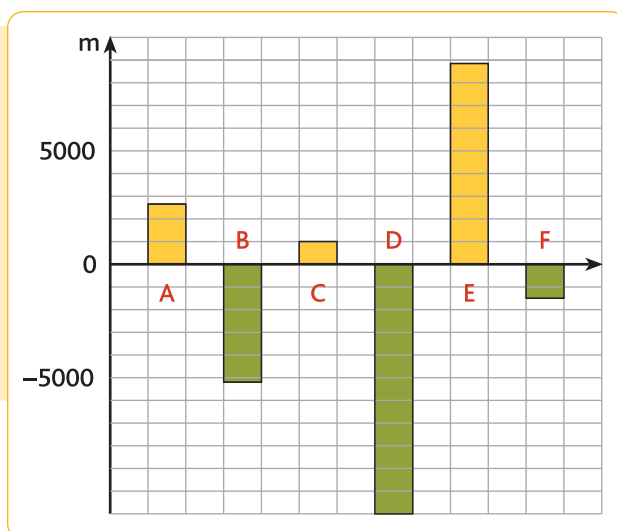
- d) Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$.

$$|x| > -50; \quad |y| < -50; \quad z \leq |-50|; \quad |u| \leq |-50|; \quad |v| > -|50|$$

- 42 Magyarország legmagasabb pontja, a Kékes, 1014 m-rel emelkedik a tenger szintje fölé. A Magas-Tátra legmagasabb csúcsa 2655 m magas, míg a Csomolungma 8850 m.

Az óceánok legmélyebb pontjának mélysége 11 000 m, az Adriáié 1500 m, a Földközi-tengeré pedig meghaladja az 5200 m-t.

Az előző adatok közül melyiknek mely oszlop felel meg a grafikonon?



☉ *Párban dolgozva adjatok egymásnak hasonló kérdéseket más ellentétes mennyiségekkel! Indokoljátok meg válaszotokat!*

☉ *Két különböző negatív szám közül melyik a nagyobb?*

☉ *Hogyan oldhatók meg a d) rész egyenlőtlenségei negatív számmal való osztás nélkül?*

☉ *A d) részben ellenőrizz! Ha nem sikerült megoldanod, próbálgatással biztosan menni fog.*



A Magyarországon mért legmagasabb, illetve legalacsonyabb hőmérséklet.

A Földön mért legmagasabb, illetve legalacsonyabb hőmérséklet.

Az aznapra előre jelzett legmagasabb és legalacsonyabb hőmérséklet.

Ábrázold grafikonon a fenti adatokat!

Gyűjtőmunka

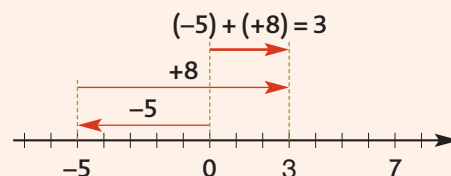
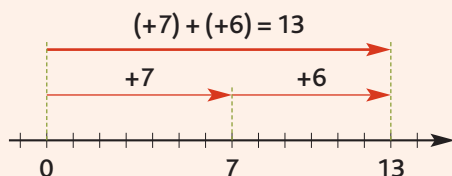
☉ *Keresd meg a világhálón az adatokat!*

MŰVELETEK EGÉSZ SZÁMOKKAL

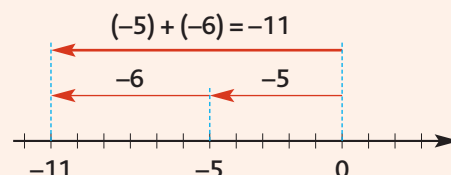
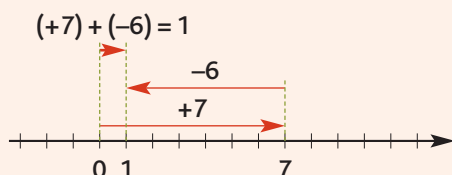
EGÉSZ SZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS KIVONÁSA

Ha 0-t adunk egy számhoz, akkor az összeg maga a szám lesz.

Ha *pozitív* számot adunk egy számhoz, akkor a *hozzáadandó abszolútértékével* növeljük a számot.



Ha *negatív* számot adunk egy számhoz, akkor a *hozzáadandó abszolútértékével* csökkentjük a számot.



Ha egy számhoz hozzáadjuk az ellentettjét, akkor az összeg 0.

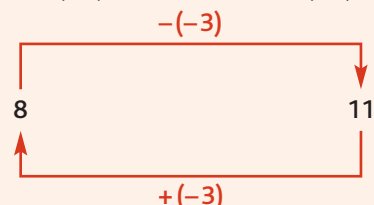
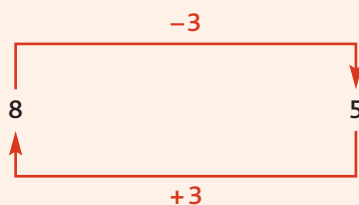
Például: $5 + (-5) = 0$; $0 + 0 = 0$; $(-3) + (+3) = 0$

Megállapodás:

Az egész számok *kivonása* az összeadás *fordított művelete* legyen.

$8 - 3 = 5$, mert $5 + 3 = 8$;

$8 - (-3) = 11$, mert $11 + (-3) = 8$



© Célszerű külön összegeznünk a negatív és külön a pozitív tagokat, majd a két különböző előjelű számot kell még összeadnunk (például vagyonszámlára gondolva).

Egy szám hozzáadása helyettesíthető ellentettjének elvételével.

Egy szám elvétele helyettesíthető ellentettjének hozzáadásával.

Például: $5 + (-7) = 5 - (+7) = 5 - 7 = -2$; $5 - (-7) = 5 + (+7) = 5 + 7 = 12$

Többnyire a második szabályt érdemes alkalmaznunk, így (az összeadásjeleket elhagyva) előjeles számok összegét vehetjük. Az **összeadás és kivonás műveletét** közös névvel **összevonásnak** nevezzük.

Figyelempróba



a) Írd le műveletsorral a következő eseménysort!

Konrad a katona végre kapott 5000 dukát zsoldot, miután már 1500 dukát adóssága volt (kamatostól). Hamar elköltött 2100 dukátot és megadott 1300 dukátot az uzsorásának. Paul kapitány elengedte 200 dukátnyi szállásdíj tartozását. Mennyi pénze maradt Konradnak?

b) Írd át a kivonásokat összeadássá, hagyd el az összeadásjeleket, majd összevonással is számítsd ki az eredményt!

FELADATOK

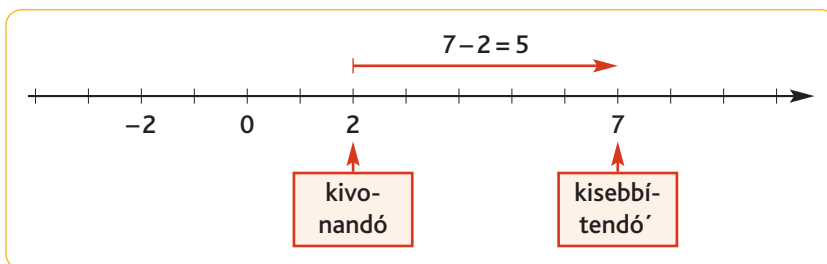
- 43** a) Adj különböző modelleket -251 és -188 , illetve -452 és $+312$ összeadásának értelmezéséhez!
- b) Add össze írásban -251 -et és -188 -at!
Hogyan határozhatjuk meg két negatív szám összegét?
- c) Add össze írásban -367 -et és $+453$ -at!
Hogyan határozhatjuk meg egy negatív szám és egy pozitív szám összegét, ha a pozitív szám abszolútértéke a nagyobb?
- d) Add össze írásban -764 -et és $+203$ -at!
Hogyan határozhatjuk meg egy negatív szám és egy pozitív szám összegét, ha a pozitív szám abszolútértéke a kisebb?

☉ Gondoltál-e a vagyonmodellre és a vektormodellre? Beszéljétek meg, hogy ki melyik modellt fogja alkalmazni! A közös megbeszélések során hallgassátok meg egymás megfogalmazását és keressétek a legtömörebb helyes változatot!

- 44** a) Sorold egy csoportba a „vagyoni helyzet” szempontjából egyenértékű változásokat!
- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| 20 Ft bevétel. | Elengednek 20 Ft adósságot. |
| 20 Ft adósság keletkezik. | Törlik 20 Ft adósság elengedését. |
| 20 Ft kiadás. | Csökken az adósság 20 Ft-tal. |

☉ Melyiknek felel meg a $-(-20)$? Segít a csoportosításban, ha a többit is leírod előbb ilyen formában.

- b) 7 a 2-nél 5-tel több, ezért $7 - 2 = 5$.
Ellenőrzés: $5 + 2 = 7$
Figyeld meg az ábrán, hogy a kivonandótól a kisebbítendőhöz húzott **vektor** a különbséget ábrázolja! (Miért?)
Hasonlóképp rajzold meg a következő kivonások vektormodelljét!



|| $7 - (-2)$; || $2 - 7$; || $2 - (-7)$; || $-7 - 2$; || $-7 - (-2)$; || $-2 - 7$; || $-2 - (-7)$ ||

Végezd el, és összeadással ellenőrizd az előző kivonásokat!

- c) Az előző kivonásokat helyettesítsd megfelelő összeadásokkal!
- d) Írd föl zárójelek nélkül a következő műveletsorokat úgy, hogy az eredmény ne változzék! Végezd el az összevonást!
- $-11 + (+22) + (-33) - (+44) - (-55)$;
 $875 + (-204) - (+120) - (-51) + (+660) - (+409) + (+143)$

☉ Például:
 $7 - 2 = 7 + (-2) = 5$
Kiolvasása: 7-ből 2 egyenlő 7 meg -2 vagy $+7$ -ből $+2$ egyenlő $+7$ meg -2

- 45** Hogyan célszerű a következő összeadásokat elvégezni?

- a) $+82 + (-33) + (+108) + (-216) + (-57) + (-54)$;
b) $103 + (-37) + 77 + 82 + (-216) + (-51) + 65$

☉ Az a)-ban hogyan gondolkozhatott az, akinek az egyik részeredménye -270 volt?

- 46** Célszerű csoportosítással végezd az összevonást!

- a) $-37 + 77 + 82 - 216 - 51 + 103 - 0$; b) $-80 + 100 + 13 + 67 - 42 + 1000 - 58$



Az autónk kilométerórája 75 572 km-t mutat.
Hány kilométerrel ezelőtt volt **legutoljára** minden számjegy **egyforma**?
Hány kilométer múlva lesz **legközelebb** minden számjegy **egyforma**?
Hány kilométert tesz meg közben az autó?

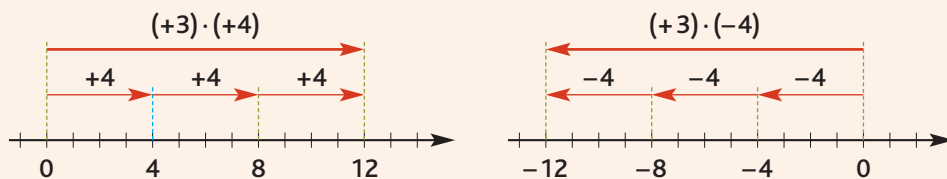
☉ Oldd meg úgy is a feladatot, hogy az **egyforma** helyett **különbözőt** írsz!

EGÉSZ SZÁMOK SZORZÁSA ÉS OSZTÁSA

A pozitív egész számmal való szorzást ismételt összeadásként értelmezzük:

$$(+3) \cdot (+4) = (+4) + (+4) + (+4) = 12;$$

$$(+3) \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$$



Bármely szám $(+1)$ -szerese maga a szám.

Bármely szám 0 -szorosa 0 .

Megállapodás szerint: **bármely szám (-1) -szerese a szám ellentettje.**

Ebből következik, hogy **a szorzat abszolútértéke megegyezik a tényezők abszolútértékének szorzatával.**

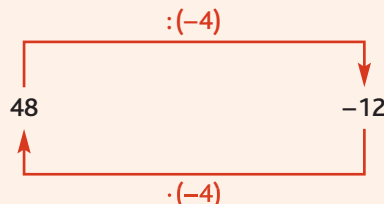
Továbbá **nullát mint tényezőt nem tartalmazó szorzat**

pontosan akkor pozitív, ha páros számú negatív tényezője van
(beleértve azt is, amikor nincs negatív tényező), illetve

pontosan akkor negatív, ha páratlan számú negatív tényezője van.

Ha egy szorzat valamely tényezője 0 , akkor a szorzat is 0 .

Az osztást az egész számok körében is a szorzás fordított műveleteként értelmezzük, ezért **az „előjelszabály” az osztásra is érvényes.**



• *Másképpen fogalmazva, egy számnak (például) a (-3) -szorosán a szám ellentettjének a 3 -szorosát értjük.*

• *Két egész számból készített tört értéke mely esetekben negatív, illetve pozitív?*

1. példa

Számítsuk ki zsebszámológép segítségével a művelet sor eredményét:

$$(-224) \cdot (+35) - (-8456)$$

Foglaljuk táblázatba a számítás menetét:

Beírás	C	224	+/-	x	35	-	8456	+/-	=
Kijelzés	0	224.	-224.	-224.	35.	-7840.	8456.	-8456.	616.

Figyeljük meg: negatív számot úgy írhatunk be, hogy beírjuk a szám abszolútértékét, majd a **+/-** gomb segítségével ellenkezőjére változtatjuk a beírt szám előjelét.

A $(-224) \cdot (+35) = -7840$ részeredményt a **-** gomb megnyomásakor kaptuk meg.

FELADATOK

47 a) Írd szorzatalakban a következő összegeket!

$$15 + 15 + 15 + 15; \quad (-41) + (-41) + (-41) + (-41) + (-41); \quad 0 + 0 + 0$$

b) Hogyan értelmezzük -3 -nak a hatszorosát?

c) Hasonlítsd össze és értelmezd a következő szorzatokat!

$$(-15) \cdot 4 \text{ és } 4 \cdot (-15); \quad (-63) \cdot 10 \text{ és } 10 \cdot (-63); \quad (-10) \cdot 0 \text{ és } 0 \cdot (-10)$$

d) Figyeld meg a szorzat változásait!

$$\begin{array}{cccccc} 2 \cdot 2; & 2 \cdot 1; & 2 \cdot 0; & 2 \cdot (-1); & 2 \cdot (-2); & 2 \cdot (-3); \\ (-2) \cdot 2; & (-2) \cdot 1; & (-2) \cdot 0; & (-2) \cdot (-1); & (-2) \cdot (-2); & (-2) \cdot (-3) \end{array}$$

e) Határozd meg a következő szorzatokat!

$$\begin{array}{cc} (-200) \cdot (-60) \cdot (+80) \cdot (-50); & (+400) \cdot (-25) \cdot (-50) \cdot (+20); \\ (-14) \cdot (+57) \cdot (-23) \cdot 0 \cdot (-35); & (-2) \cdot (-5) \cdot (-4) \cdot (-25) \cdot (-8) \cdot (-125) \end{array}$$

☉ *Mely műveleti tulajdonság teljesülését figyelhetjük meg?*

☉ *Miért elegendő a negatív tényezők számát vizsgálni az előjel megállapításához?*

48 Melyik érték nagyobb?

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 10^5 \text{ vagy } (-5)^{10}; & \text{b) } (-2)^4 \text{ vagy } (-4)^2; & \text{c) } (-7)^3 \text{ vagy } (-1)^2; \\ \text{d) } (-1)^4 \text{ vagy } (-1)^5; & \text{e) } 3^2 \cdot (-3)^3 \text{ vagy } -3^6; & \text{f) } 2^7 : (-2)^3 \text{ vagy } -2^4 \end{array}$$

☉ *Hogyan számolunk $(-2)^4$, illetve -2^4 esetében?*

49 Számítsd ki a következő hányadosokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } -31\,003 : 721; & 31\,003 : (-721); & -31\,003 : (-721); \\ \text{b) } [(+32) + (-68)] : (-12); & \text{c) } [(-200) + (-150)] : (+10); & \\ \text{d) } [(-15) - (-78)] : (-9); & \text{e) } [(+120) - (-120)] : (-60) & \end{array}$$

☉ *Hányféleképpen végezhettek el az összeg (különbség) osztását?*

50 Tervezd meg a műveletvégzés sorrendjét!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 75 - (-25) \cdot 10^3; & \text{b) } 80 \cdot (-5) - (-40) : (-8); \\ \text{c) } -(10^2) : (-5)^2 - (-5)^3; & \text{d) } 10 - [-2 \cdot (-5)]^4; \\ \text{e) } 64 : (-2)^3 - (25 : 5)^2; & \text{f) } (-10)^3 : [100 : (-5)] \cdot 2 \end{array}$$

Gyakorló
2.71– 2.75.

51 Oldd meg a következő egyenleteket! Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } -3x - 15 = 7 - 5x; & \text{b) } 10 + 2x - 25 = 13 + 5x; \\ \text{c) } 20 - 5x = 75 - (-5) \cdot (-3); & \text{d) } 18 - 8x - 25 = 130; \\ \text{e) } -9x - 15 = 1 - 5x + (-16); & \text{f) } 10x - (20 + 4x) = 20 + 6x \end{array}$$

☉ *Emlékszel a két oldal egyenlő változtatásának (a mérlegelvnek) a szabályaira? Tudatosítsd az alkalmazott azonosságokat is!*



Írd növekvő sorrendbe a következő számokat!

$$[(-2)^3]^2; \quad (-2)^{3^2}; \quad [(-2)^2]^3; \quad (-2)^{2^3}$$

☉ *Figyelj a zárójelekre!*

Figyelempróba

RACIONÁLIS ÉS IRRACIONÁLIS SZÁMOK

TÖRTEK ÉRTELMEZÉSE, MŰVELETEK TÖRTEKKEL

FELADATOK

☉ Az a)-ban a szakaszmodellhez válassz 12 cm-es egységet! Külön ábrázold az 1 negyedének a 3-szorosát, illetve 3-nak az egynegyedét!

☉ Emlékszel? $6\frac{5}{9}$ kiolvasva „hat egész öt kilenced”, és ez a vegyesszám a $6 + \frac{5}{9}$ összeg rövidített formája.

☉ Hogyan nevezzük ezeket az azonos átalakításokat?

☉ Több lépésben is egyszerűsíthetsz. Vagy inkább tényezőkre bontod a számlálót és a nevezőt?

☉ Az egyes nevezőknek hányszorosa a legkisebb közös nevező?

☉ Hogyan kaphatjuk meg egy tört tovább nem egyszerűsíthető alakját?

- 52** a) Értelmezd a $\frac{3}{4}$, illetve a $\frac{4}{3}$ törtet! Adj modelleket!
- b) Mi a kapcsolat 1 tonna $\frac{3}{8}$ része, illetve 3 tonna $\frac{1}{8}$ része között?
- c) Határozd meg 450-nek a $\frac{3}{5}$ részét, $\frac{5}{5}$ részét, $\frac{9}{5}$ részét!
- d) A végzett munka alapján Adorján kapta a munkabér $\frac{3}{5}$ részét, azaz 7800 €-t, míg Benő kapta a fennmaradt részt. Hány eurót kapott Benő?
- e) Ha a és b egész szám, akkor az $a:b = \frac{a}{b}$ hányados mely esetben természetes szám; egész szám; pozitív szám; negatív szám; nem értelmezhető?
- f) Albi egy munka $\frac{2}{5}$ részét, Bandi $\frac{2}{8}$ részét, Csaba a $\frac{7}{20}$ részét végezte el. Melyikük dolgozott legtöbbet, melyikük legkevesebbet?
- g) Írd át törtalakba a következő **vegyesszámokat**!
- $6\frac{5}{9}$; $1\frac{2}{5}$; $7\frac{3}{4}$; $2\frac{52}{69}$
- h) Írd be a hiányzó számlálókat, illetve nevezőket!
- $\frac{40}{\square} = \frac{\square}{16} = \frac{5}{8} = \frac{25}{\square} = \frac{\square}{1000}$; $\frac{9}{\square} = -\frac{\square}{10} = \frac{3}{5} = \frac{-30}{\square} = \frac{\square}{-15}$
- i) Add meg a törtet **tovább nem egyszerűsíthető alakban**!
- $\frac{8}{6}$; $\frac{15}{18}$; $\frac{200}{600}$; $\frac{140}{210}$; $\frac{840}{455}$; $\frac{468}{396}$; $\frac{1500}{2000}$; $\frac{490}{21000}$

53 Számítsd ki a következő összegeket, különbségeket!

- a) $\frac{13}{18} + \frac{13}{12}$; b) $\frac{16}{15} + \frac{17}{20}$; c) $\frac{15}{14} + \frac{13}{16}$; d) $\frac{25}{28} + \frac{18}{35}$; e) $\frac{17}{18} + \frac{25}{72}$;
- f) $\frac{11}{15} + \frac{18}{24}$; g) $\frac{24}{14} + \frac{25}{15}$; h) $\frac{25}{28} + \frac{18}{25}$; i) $\frac{23}{36} - \frac{16}{45}$; j) $\frac{10}{32} - \frac{17}{96}$;
- k) $\frac{25}{18} - \frac{13}{15}$; l) $\frac{45}{75} - \frac{18}{36}$; m) $\frac{20}{30} - \frac{16}{15}$; n) $\frac{15}{32} - \frac{11}{13}$; o) $\frac{45}{35} - \frac{12}{15}$

54 Add meg az eredményt tovább nem egyszerűsíthető törtalakban!

- a) $\frac{4}{3} - \frac{3}{2} + \frac{5}{6}$; b) $\frac{3}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{2}$; c) $\frac{5}{3} - \frac{1}{4} - \frac{6}{5}$; d) $-\frac{4}{9} + \frac{3}{2} - \frac{7}{6}$

- 55** a) Modellezd $\frac{2}{5}$ háromszorosát, ötszörösét, nyolcszorosát!

Fogalmazd meg, hogy hogyan szorozhatunk törtet egész számmal!

Példákon mutasd be, hogy mikor melyik összefüggést célszerű alkalmazni!

b) Mennyi $\frac{3}{4}$ kg liszt $\frac{1}{5}$ része, $\frac{2}{5}$ része, $\frac{5}{5}$ része, $\frac{9}{5}$ része?

c) Mennyi $\frac{8}{10}$ dl olaj $\frac{1}{2}$ része, $\frac{2}{5}$ része, $\frac{5}{4}$ része, $\frac{8}{10}$ része?

d) Milyen értelmet adhatunk a $\frac{2}{5}$ -del, illetve az $\frac{5}{2}$ -del való szorzásnak?

e) Négyzet rácson ábrázold az $\frac{5}{2}$ egység és $\frac{4}{3}$ egység oldalhosszúságú téglalapot!
Határozd meg a téglalap területét!

f) Figyeld meg a szorzat változásait!

$\frac{4}{8} \cdot 6$; $\frac{4}{8} \cdot 2$; $\frac{4}{8} \cdot \frac{2}{3}$; ...; illetve $\frac{4}{8} \cdot 10$; $\frac{4}{8} \cdot 2$; $\frac{4}{8} \cdot \frac{2}{5}$; ...

g) Végezd el a szorzásokat!

$\frac{25}{12} \cdot \frac{40}{15}$; $\frac{16}{20} \cdot \frac{20}{16}$; $-\frac{72}{50} \cdot \frac{75}{54}$; $-\frac{35}{24} \cdot \left(-\frac{18}{49}\right)$

☉ *Hogyan ábrázolható téglalapmodellel egy tört?*

☉ *Egy mennyiség $\frac{2}{5}$ -del való szorzásán a mennyiség $\frac{2}{5}$ -ét értjük.*

Az $\frac{5}{2}$ -szeresén az $\frac{5}{2}$ -ét.

☉ *A hosszegység például 6 négyzetoldal legyen.*

☉ *Hogyan szorzunk törtet törttel?*

56

a) Mennyibe kerül $\frac{5}{4}$ kg padlizsán, ha 1 kg ára 500 Ft?

b) Egy vásáron 1 kg gumicukor ára 1600 Ft. Mennyit kell fizetnünk, ha $\frac{3}{4}$ kg-ot; $\frac{1}{2}$ kg-ot; $\frac{3}{2}$ kg-ot; $\frac{1}{4}$ kg-ot; $\frac{3}{4}$ kg-ot; $\frac{7}{4}$ kg-ot vásárolunk?

c) Mekkora a tömege $\frac{3}{8}$ l olajnak, ha $\frac{5}{4}$ l olaj tömege 960 g?

d) Mekkora a tömege $\frac{5}{3}$ m³ anyagnak, ha $\frac{3}{4}$ m³ anyag tömege 600 kg; $\frac{3}{2}$ tonna; $\frac{9}{5}$ tonna; $\frac{3}{8}$ tonna; $\frac{5}{3}$ tonna; $\frac{7}{9}$ tonna?

Figyelempróba

☉ *Egyenes arányosságot feltételezve milyen összefüggés írható fel az áru mennyisége és ára között? A közös megbeszélés során használjátok az egységár fogalmát!*

57

Mikor mondunk két számot egymás reciprokának?

Írd föl az 5, az 1, a 0, a -4, a $\frac{17}{18}$ reciprokát!

☉ *Melyik számnak nincs reciproka?*



Hat vándor egy anyókanál szállt meg, aki egy kemencényi pogácsát süített nekik a másnapi útra. Kora hajnalban felkelt Andor, és magához vette a pogácsák egy hatodát. Nem látták Andor távozását, ezért Benő és Ciporján a maradék pogácsák két hatod részét vitték el. Végül Donát és két társa is felébredt, ők is azt hitték, hogy a többiek még alszanak, így a maradék pogácsák egy-egy hatodát rakták a tarisznyájukba. Hány pogácsa volt összesen, ha Andor nyolccal többet rakott el, mint Donát?

Többet ésszel ...



RACIONÁLIS SZÁMOK ÉRTELMEZÉSE, TIZEDESTÖRT ALAKJA

Az egész számok halmazában nem minden egyenlet oldható meg.

Ilyen egyenlet például: $5y = 4$;

$y = 4 : 5$ Ez a hányados nem egész szám.

Ha bármely két a és b ($b \neq 0$) egész szám hányadosát értelmezni kívánjuk, akkor be kell vezetnünk a **racionális szám** fogalmát.

Értelmezések

A két egész szám hányadosaként (az osztó nem 0) felírható számokat **racionális számoknak** nevezzük.

A racionális számok az **egész számok és a törtszámok**. „Törtszámon” ebben a könyvben olyan racionális számot értünk, amelynek értéke nem egész szám.

Minden racionális szám végtelenül sokféleképpen írható fel törtalakban.

Például: $-\frac{2}{9} = -\frac{4}{18} = -\frac{6}{27} = -\frac{8}{36} = \dots$

A törtek összeadása, kivonása (összevonása) általában egyenlő nevezőre hozás után végezhető el.

A törttel való szorzást törtrész kiszámításaként is értelmezhetjük. Törteket úgy szorozhatunk, hogy számlálók szorzatát osztjuk nevezők szorzatával. (Ha lehet, a szorzás előtt egyszerűsítsünk.)

Egy nullától különböző a szám **reciprokán** azt a számot értjük, amellyel az a számot megszorozva a szorzat értéke 1.

Nullának nem értelmezzük a reciprokát.

$\frac{5}{7}$ reciproka $\frac{7}{5}$, mert $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} = 1$; $-\frac{1}{2}$ reciproka -2 , mert $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = 1$.

A törttel való osztást értelmezhetjük a törtrészből az egész rész kiszámításaként is. Az osztó értéke nem lehet nulla. Az osztás helyettesíthető az osztó reciprokával való szorzással.

A **tizedestört alakban** felírt szám jelentése például:

$$402,735 = 4 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1000}$$

◎ Például az $\frac{5}{0}$ nem racionális szám, hiszen nem is értelmezhető.

◎ A racionális számok halmaza a két egész szám hányadosaként felírható, különböző értékű számok halmaza.

◎ Közös nevezőnek a nevezők legkisebb közös többszörösét célszerű választani.

◎ Például:

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

Kísérletezz!

◎ Próbáld ki például

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{5} \text{ osztására!}$$



Ödömér felvetette, hogy két tört osztására a szorzáshoz hasonló szabályt keressenek. Amália szerint milyen jó is lenne, ha törtet törttel úgy is oszthatnánk, hogy a számlálók hányadosát osztjuk a nevezők hányadosával.

Példát is hozott rá: $\frac{8}{15} : \frac{4}{3} = \frac{8 : 4}{15 : 3} = \frac{2}{5}$. Jó ez az eredmény? Jól használható ez a szabály bármely két törtre (kivéve a 0 nevezőket és a 0 osztót)?

1. példa

Írjuk föl a következő számokat tizedestört alakban:

a) $\frac{378}{250}$;

b) $2\frac{4}{7}$

a) A $\frac{378}{250}$ nevezőjének törztényező alakja ($250 = 2 \cdot 5^3$).

A törztényezők között csak a 2 és az 5 fordul elő. Ez a tört bővíthető úgy, hogy a nevezője 10 valamely pozitív egész kitevőjű hatványa legyen. Ezért ez a tört fölírható **véges tizedestört** alakban:

$$\frac{378}{250} = \frac{1512}{1000} = 1,512$$

b) Írjuk fel a szám törtalakját: $2\frac{4}{7} = 2 + \frac{4}{7} = \frac{18}{7}$

Ez a tört nem egyszerűsíthető és nem bővíthető úgy, hogy a nevezője 10 valamely pozitív egész kitevőjű hatványa legyen. Végezzük el az osztást:

$$18 : 7 = 2,571428...$$

Mivel 7-tel osztunk, legfeljebb 6 olyan részmaradék lehet az osztásnak, amely 0-tól különbözik.

Ezért a hányadosban **szakaszosan ismétlődnek** a számjegyek.

Ha 7-tel osztunk, akkor a szakasz legfeljebb 6 jegyből áll.

Ez a szám **végtelen szakaszos tizedestört** alakban írható föl:

$$2 + \frac{4}{7} = \frac{18}{7} = 2,5\dot{7}1428$$

$$18 : 7 = 2,571428.$$

40
50
10
30
20
60
4
...

© Az ismétlődő szakasz első és utolsó számjegye fölé pontot írunk.

Minden egész szám is fölírható tizedestört alakban:

Például: $2 = 2,0 = 2,00 = 2,000 = \dots$, de a $2 = 1,99999\dots$ egyenlőség is igaz.

Ezek a tizedestört alakban írt számok nem törtszámok.

Végtelenül sok olyan tizedestört képzelhető el, amely nem véges és nem szakaszos.

Ezek a számok nem írhatók fel két egész szám hányadosaként. Ezek **végtelen nem szakaszos tizedestörtek**, nem racionális számok, más néven **irracionális számok**.

Ha a racionális számok halmazát kibővítjük az irracionális számokkal, akkor a **valós számok** halmazát kapjuk. A valós számok halmazának jele: $\mathbb{R}$.

A számegyenes minden pontja megfelel egy-egy valós számnak. Fordítva is igaz. Minden valós számnak egyértelműen megvan a helye a számegyenesen.

A valós számok halmazán is érvényesek a racionális számoknál megismert műveleti tulajdonságok.

Két végtelen nem szakaszos tizedestört, amelynek könnyű kitalálni a képzési szabályát:

Champernowne-konstans:
0,12345678910111213...

Copeland–Erdős-konstans:
0,2357111317192329...



Írjuk fel mindenki születési dátumát $\frac{\text{hónap}}{\text{nap}}$ alakban. Kik születtek

a) egész; b) véges tizedestört; c) végtelen szakaszos tizedestört dátumnak megfelelő napon?

2. példa

Írjuk föl a következő tizedestört alakban adott számokat törtalakban:

a) $x = 2,306$; b) $y = 2,3\dot{0}6$; c) $z = 2,3\dot{0}\dot{6}$

a) Az $x = 2,306$ véges tizedestört: $2,306 = \frac{2306}{1000} = \frac{1153}{500}$

b) Az $y = 2,3\dot{0}6$ végtelen szakaszos tizedestört:

$$y = 2,306306306306 \dots$$

Ha az y -t 1000-rel szorozzuk, akkor a tizedesvessző után ugyanazok a szakaszok ismétlődnek benne (a végtelenségig), mint az eredeti számban.

Ezért ha az $1000y$ -ból kivonjuk az y -t, akkor egész számot kapunk.

$$\begin{array}{r} 1000y = 2306,306306306 \dots \\ - \quad y = \quad 2,306306306306 \dots \\ \hline 999y = 2304 \end{array}$$

Ebből az y szám törtalakja: $y = \frac{2304}{999} = \frac{256}{111}$

c) A $z = 2,3\dot{0}\dot{6}$ végtelen szakaszos tizedestört:

$$z = 2,30606060606 \dots$$

Ha a z -t 1000-rel és 10-zel szorozzuk, akkor két olyan számot kapunk, amelyben a tizedesvessző után ugyanazok a szakaszok ismétlődnek. Ezek különbsége egész szám.

$$\begin{array}{r} 1000z = 2306,06060606 \dots \\ - \quad 10z = \quad 23,06060606 \dots \\ \hline 990z = 2283 \end{array}$$

Ebből az z szám törtalakja: $z = \frac{2283}{990} = \frac{761}{330}$

Általánosan is bizonyítható a következő tétel:

Tétel

Pontosan a racionális számok írhatók föl egész számként, vagy véges tizedestört alakban, vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban.

☉ Az ehhez hasonló „tisztá szakaszos” tizedestörtek esetén 10-nek annyiadik hatványával érdemes szorozni, ahány jegyű az ismétlődő szakasz.

☉ A szemléletesség kedvéért eltértünk a szabványos írásmódtól.

☉ Bebizonyítható, hogy bármely véges vagy végtelen szakaszos tizedestört felírható két egész szám hányadosaként. Az 1. és 2. példában látottakhoz hasonlóan.

Fejtörő!



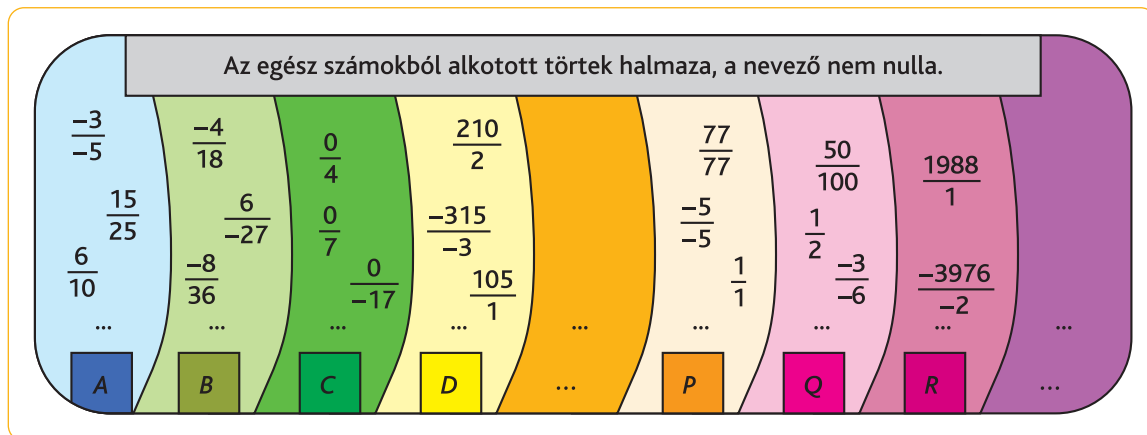
a) Bizonyítsd be, hogy az $1,999\ 999\dots$ (csak 9-est tartalmazó) végtelen szakaszos tizedestört valóban egyenlő 2-vel!

b) Írd fel az $5,456\ 999\ 999\dots$ végtelen vegyes szakaszos tizedestörtet véges tizedestört alakban!

FELADATOK

- B10** a) Milyen szempont szerint rendezhettük a törteket egy-egy részhalmazba?
 b) Hány ilyen részhalmaz készíthető? Miért?
 c) Hány tört kerül egy-egy részhalmazba? Miért?
 d) Írd föl az ábrán adott részhalmazokba tartozó számok tizedestört alakját is!

☉ Figyeld meg a halmaz-
 ábrát! Milyen kapcsolat
 van a részhalmazok és a ra-
 cionális számok között?



- B11** Írd tizedestört alakba a következő törteket!

- a) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $5\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{4}$; $\frac{22}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{32}{10}$; $\frac{79}{40}$;
 b) $\frac{1}{3}$; $\frac{34}{11}$; $\frac{79}{33}$; $\frac{50}{75}$; $\frac{645}{101}$; $\frac{10}{7}$; $\frac{500}{375}$; $\frac{10}{1001}$;
 c) $4\frac{1}{6}$; $\frac{71}{36}$; $\frac{15}{44}$; $\frac{24}{90}$; $4\frac{43}{44}$; $\frac{17}{72}$; $\frac{45}{66}$; $\frac{165}{808}$

☉ „Ránézésre” mely tör-
 tekről dönthető el, hogy
 felírhatók véges tizedestört
 alakban?

- B12** Egy egész számot osztunk 13-mal. Lehet-e a hányados

- a) egész szám;
 b) olyan véges tizedestört, amely nem egész szám;
 c) olyan végtelen szakaszos tizedestört, amelyben az ismétlődő szakasz legfeljebb 12 jegyű;
 d) olyan végtelen szakaszos tizedestört, amelynek ismétlődő szakasza legalább 13 jegyű;

☉ Lehet-e a hányados vég-
 telen nem szakaszos tize-
 destört?

Vitassátok meg a válaszo-
 kat!

- B13** Keress két egész számot, amelynek hányadosa a következő!

6; 0; 3,5; -2,75; 0,3; 0,35; 0,357; 4,2035; 0,12032

Feladatgyűjtemény
 2.1.14–19., 2.2.13–14.

- B14** Adj szabályt a 2,05055..., majd a 3,1415... tizedestörtek folytatásához úgy, hogy racionális számot, illetve, hogy irracionális számot kapj!

A kapott két racionális és két irracionális szám mindegyikéhez keress olyan párt, amivel összeadva az eredmény

- a) egész szám; b) nem egész racionális szám; c) irracionális szám lesz!

☉ Mindegyik eset megva-
 lósítható?

VEGYES GYAKORLÓFELADATOK

☉ Milyen kapcsolat van $-5 + x$ és $x - 5$ között?

☉ Igazold, hogy bármely két racionális szám között van (legalább egy) racionális szám!

Többet ésszel ...

☉ Először számolás nélkül megkeresheted az egyenlő eseteket.

Gyakorló
2.76–2.90., 2.93–2.100.,
2.117–2.121., 7.01–7.03;
Feladatgyűjtemény
2.2.15–27., 2.8.07–10.

☉ Ahol lehet, egyszerűsíts!

☉ Ahol lehet, egyszerűsíts!
Ügyelj a műveleti sorrendre is!

58 Írd föl a következő számok, kifejezések ellentettjét!

0; 53; -45; $-(-51)$; $-(-(-a))$; $(86 - 45)$; $(56 - x)$; $25 \cdot (-44) \cdot (-10)$

59

a) Hány racionális szám esik a számegyenesen -5 és 2 közé?

Hány egész szám és hány természetes szám esik az előbbi szakaszra?

b) Írj fel három olyan racionális számot, amelyik $\frac{19}{23}$ és $\frac{20}{23}$ közé esik!

60

Számítsd ki az eredményeket!

$$a = 32 - 25 + 41;$$

$$b = 32 + 25 - 41;$$

$$c = 32 - 25 - 41;$$

$$d = 32 + 25 + 41;$$

$$e = 32 - (25 + 41);$$

$$f = 32 + (25 - 41);$$

$$g = 32 - (25 - 41);$$

$$h = 32 + (25 + 41);$$

$$i = 32 - (-25 + 41)$$

61

Add meg az eredményt tovább nem egyszerűsíthető törtalakban!

$$a) 1 - \frac{24}{39} - \frac{66}{78} - \left(\frac{16}{44} - \frac{78}{66} \right);$$

$$b) \frac{14}{50} + \frac{60}{75} - \left(\frac{10}{45} - \frac{77}{55} \right);$$

$$c) \frac{21}{35} - \frac{26}{70} - \left(-\frac{48}{62} - \frac{18}{63} \right);$$

$$d) \frac{20}{32} + \frac{48}{72} - \left(\frac{40}{64} - \frac{15}{18} \right)$$

62

Végezd el a műveleteket!

$$a) \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{2};$$

$$b) 2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5};$$

$$c) \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{4} \right) : \frac{2}{5};$$

$$d) \frac{7}{2} + \frac{3}{4} : \frac{2}{5};$$

$$e) \frac{14}{8} : \frac{7}{2};$$

$$f) \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{12}{8} \cdot \frac{-6}{5} \right);$$

$$g) \left(\frac{2}{3} \right)^5;$$

$$h) \left(-\frac{4}{5} \right)^3;$$

$$i) \left(-\frac{3}{2} \right)^4;$$

$$j) 42 - \left(\frac{2}{5} \cdot 21 + \frac{1}{4} \right);$$

$$k) 42 - \frac{2}{5} \cdot \left(21 + \frac{1}{4} \right);$$

$$l) \left(42 - \frac{2}{5} \right) \cdot 21 + \frac{1}{4}$$

63

Végezd el a műveleteket!

$$a) -2 - \frac{4}{6} : \frac{75}{15} \cdot 5;$$

$$b) 12 \frac{2}{5} + 5 \frac{1}{4};$$

$$c) 2 \frac{2}{5} \cdot 5 \frac{1}{3};$$

$$d) 21 + \frac{4}{9} \cdot \frac{45}{12}$$

Többet ésszel ...



Számítsd ki az eredményt!

a) A 10-nél nem nagyobb természetes számok szorzata.

b) A -200 és $+201$ közötti egész számok összege, illetve szorzata.

$$c) \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{17}{18} \cdot 18$$

d) A $-1\frac{2}{3}$ és $+2\frac{1}{3}$ közötti harmadok összege, illetve szorzata.

64 Határozd meg az eredményeket!

$$\begin{array}{lll} 2,5 \cdot 5,78 - 2,5 \cdot 9,7; & 7,4 - 2,4 \cdot 5^2; & 15,25 - 7,8 + 4,5 - 2,18; \\ 6,6 : (2,2 : 1,1); & 6,6 : 2,2 : 1,1; & 25,43 : 0,25 + 4,57 : 0,25 \end{array}$$

☉ *Gyakorold a számológép használatát!*

65 Számítsd ki (zsebszámológéppel) a műveletsorok eredményét!

$$x = 12\,000 \cdot 7500 - 900\,000; \quad y = 90\,000 : 0,000\,000\,6 - 200^5$$

☉ *A szorzást és az osztást normálalakban is kiszámíthatod.*

66 Határozd meg a számok négyzetét!

$$\begin{array}{lllllll} \text{a)} & 0,1; & 1; & 0,01; & 10; & 100; & 0,000\,001; & 100\,000 \\ \text{b)} & 0,5; & 5; & 0,05; & 50; & 500; & 0,000\,005; & 500\,000 \end{array}$$

☉ *Írd föl normálalakokkal is a számításokat és az eredményeket!*

67 a) Egy négyzetes kiskert oldala 2,54 m hosszú, mekkora a területe?

$$T = \boxed{} \text{ mm}^2 = \boxed{} \text{ cm}^2 = \boxed{} \text{ m}^2 = \boxed{} \text{ km}^2$$

b) Egy fakocka éle 15 cm hosszú, mekkora a felszíne?

$$A = \boxed{} \text{ mm}^2 = \boxed{} \text{ cm}^2 = \boxed{} \text{ dm}^2 = \boxed{} \text{ m}^2$$

☉ *Normálalakban add meg az eredményeket!*

68 Oldd meg a következő egyenleteket!

$$\text{a)} \quad 3,65 - 4,2(0,01 - 0,25a) = 2a; \quad \text{b)} \quad 1,6b + 0,4(2,5 - 0,5b) = -4,8;$$

69 Hívjuk el az embereket mához egy hétre, 11-re egy rövid találkára az Alföldre! Elférnének-e, ha mindenki eljönne, és átlagosan egy négyzetméteren foglalna helyet (a terepviszonyok engedte legjobb tömörüléssel)?

☉ *A szükséges adatokat keressétek meg a világhálón! Latolgassátok a tréfás feladatban leírt esemény reális esélyét!*

Ha én kapu volnék, mindig nyitva állnék,
Akárhonnan jönne, bárkit beengednék,
Nem kérdezném tőle, hát téged ki küldött,
Akkor lennék boldog, ha mindenki eljött.

[Bródy János: Ha én rózsza volnék]

70

A már említett legnagyobb részecskegyorsítót (LHC) 50–175 m-rel a földfelszín alá építették ki a francia – svájci határon, Genf közelében.

A 3,8 méter széles beton alagútpálya vonalvezetése közelítőleg kör alakú, amelynek a kerülete közelítőleg 27 km. Az alagútban két, egymáshoz négy helyen becsatlakozó csőben utazik egymással ellentétes irányban egy-egy részecskenyaláb. A részecske-ütközések a két útpálya metszéspontjaiban történnek. 1232 kétpólusú és 392 négy-pólusú szupravezető mágnes mintegy 96 tonna, 1,9 Kelvin ($-271,25^\circ \text{C}$) „hőmérsékletű” folyékony héliumban vezeti a nyalábokat. Mekkora a pálya átmérője?

Figyelempróba

☉ *A kör kerülete:*

$$K \approx 2 \cdot r \cdot 3,14$$

Számos magyar fizikus mellett nyertes ösztöndíj-pályázat alapján magyar diákok is kutathattak ebben a részecskegyorsítóban.



Gabi leírt egy páros számot. Helga aláírt egy másik számot úgy, hogy az első és a második szám aránya $2:5$ legyen. Irma 15-tel növelte a két szám összegét, és ő is leírta az eredményül kapott számot. Végül Judit megszorozta a harmadik számot 2-vel és 100-at kapott eredményül. Melyik számot írta le Gabi, Helga, illetve Irma?

A SZÁMOK NÉGYZETGYÖKE

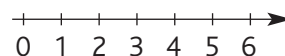
FELADATOK

71 Mekkora a négyzet egy oldala, ha a területe

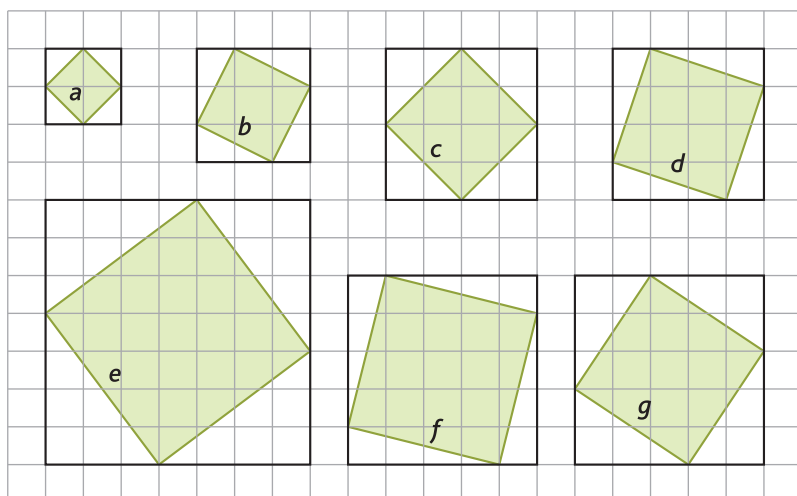
- a) $T = 4 \text{ dm}^2$, $T = 0,04 \text{ m}^2$, $T = 400 \text{ cm}^2$, $T = 40\,000 \text{ mm}^2$;
 b) $T = 81 \text{ dm}^2$, $T = 0,81 \text{ m}^2$, $T = 8100 \text{ cm}^2$, $T = 810\,000 \text{ mm}^2$;
 c) $T = 16 \text{ dm}^2$, $T = 0,16 \text{ m}^2$, $T = 1600 \text{ cm}^2$, $T = 0,0016 \text{ m}^2$?

72 Határozd meg a zöld négyzetek területét!

Másold át számegyenesre a négyzetek oldalainak (a -val, b -vel, ... jelölt) hosszát!

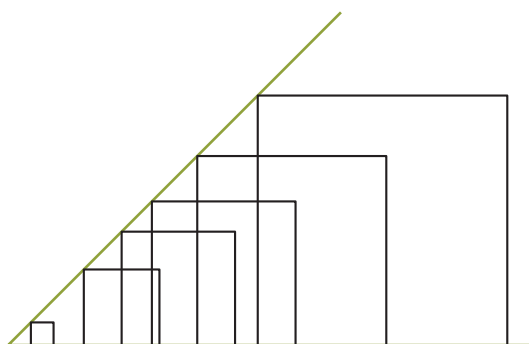


A négyzetrács egy kis négyzetének a területe a területegység, a kis négyzet oldalának a hossza a hosszúságegység.



73 Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

$$x^2 = 16; \quad y^2 = -9; \quad (z - 17,2)^2 = 625; \quad (u + 34,8)^2 = 0,25$$



Felvethetjük azt a kérdést, hogy van-e tetszőleges (nemnegatív) területű négyzet. A szemléletből arra következtethetünk, hogy van, mert ha egy négyzetet folyamatosan kicsinyítünk, illetve nagyítunk, akkor bármilyen területű négyzethez eljuthatunk.

(Képzeletben egy ponttá is zsugoríthatjuk a négyzetet, akkor a területe 0.)

Ha a négyzet területe t (ahol t tetszőleges nemnegatív szám), akkor a négyzet oldalának a hosszát **négyzetgyök** t -nek nevezzük.

Jelölés: $\sqrt{t}$

Az előbbi értelmezésből következik, hogy **a $\sqrt{t}$ nemnegatív szám.**

A négyzet területe	1	25	0,04	2	2,3
A négyzet oldala	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{0,04} = 0,2$	$\sqrt{2} = ?$	$\sqrt{2,3} = ?$

Vannak olyan racionális számok, amelyek négyzetgyöke szintén **racionális szám**.

$\sqrt{25} = 5$, mert $5^2 = 25$ (a 25 egység területű négyzet oldala 5 egység);

$\sqrt{0,04} = 0,2$, mert $0,2^2 = 0,04$; $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, mert $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

1. példa

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $x^2 = 9$; b) $x^2 = 2$; c) $x^2 = 0$; d) $x^2 = -4$

a Két olyan szám van, amelyeknek a négyzete 9.

A 9 négyzetgyöke: $x_1 = \sqrt{9} = 3$, mert $3^2 = 9$;

a 9 négyzetgyökének ellentettje: $x_2 = -\sqrt{9} = -3$, mert $(-3)^2 = 9$

b Két olyan szám van, amelyeknek a négyzete 2.

A 2 négyzetgyöke: $x_1 = \sqrt{2}$, mert $(\sqrt{2})^2 = 2$;

a 2 négyzetgyökének ellentettje: $x_2 = -\sqrt{2}$, mert $(-\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) = 2$

Határozzuk meg a $\sqrt{2}$ értékét tízesred pontossággal.

Kétoldali közelítéssel dolgozhatunk:

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5; \quad \text{mert } 1,4^2 = 1,96 < 2 < 1,5^2 = 2,25$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42; \quad \text{mert } 1,41^2 = 1,9881 < 2 < 1,42^2 = 2,0164$$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415; \quad \text{mert } 1,414^2 \approx 1,9994 < 2 < 1,415^2 \approx 2,0022$$

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143; \quad \text{mert } 1,4142^2 \approx 1,999\,96 < 2 < 1,4143^2 \approx 2,000\,24$$

Az alsó közelítés négyzete közelebb van a 2-höz, mint a felső, ezért $\sqrt{2} \approx 1,4142$.

A két megoldás: $x_1 = \sqrt{2} \approx 1,4142$; $x_2 = -\sqrt{2} \approx -1,4142$

c Egy olyan szám van, amelyiknek a négyzete 0. $x = 0$, mert $0^2 = 0$

d Mi nem tanultunk olyan számról, amelyiknek a négyzete -4 , mert akár a negatív számokat, akár a nemnegatív számokat szorozzuk meg önmagukkal, nemnegatív számot kapunk eredményül.

A $\sqrt{-4}$ -et, **negatív szám négyzetgyökét nem értelmezzük**.

Tanuld meg!

Egy nemnegatív t szám négyzetgyökén azt a nemnegatív számot értjük, amelynek négyzete t . Jelölés: $\sqrt{t}$



Az $x^2 = t$ egyenlet nem mindig oldható meg a racionális számok körében, vagyis vannak olyan nemnegatív racionális számok, amelyeknek nincs négyzetgyöke a racionális számok halmazában. Ezeknek a racionális számoknak a négyzetgyöke irracionális szám.

Bebizonyítható, hogy 2 négyzetgyöke se nem egész szám, se nem törtszám.

Azaz a $\sqrt{2}$ nem racionális szám.

Ezt Püthagorasz görög matematikus tanítványai (a pitagoreusok) vették először észre, és annyira megdöbbenek, hogy sokáig eltitkolták felfedezésüket. Amikor Hippaszosz a szabályos ötszög szerkesztésével kapcsolatban elárulta a nagy titkot, a pitagoreusok ki-rekesztették őt maguk közül. A nem racionális számok elméletét csak a XIX. század végén dolgozták ki a matematikusok.

© Milyen közelítő értékkel számolunk π helyett?

Az irracionális valós számok (például $\sqrt{2}$, vagy ilyen a π szám is) végtelen nem szakaszos tizedestört alakját nem tudjuk kiírni. Helyette közelítő véges tizedestörtekkel számolunk.

© Felsőbb szinten úgy bővítik tovább a valós számkört, hogy az $x^2 = t$ egyenletnek $t < 0$ esetén is legyen megoldása. E képzetes számokkal alkotják meg a komplex számokat.

Figyeld meg!

Ha $t > 0$, akkor az $x^2 = t$ egyenletnek két megoldása van.

A nemnegatív megoldás: $x_1 = \sqrt{t}$, ez a t szám négyzetgyöke;

a negatív megoldás: $x_2 = -\sqrt{t}$, a t szám négyzetgyökének ellentettje.

Az $x^2 = 0$ egyenletnek egy megoldása van: $x = 0$

Ha $t < 0$, akkor az $x^2 = t$ egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazában.

2. példa

Határozzuk meg zsebszámológép segítségével 29,5 négyzetgyökét.

© Szükséges pontosságú közelítő értéket keresünk. Készültek négyjegyű értéktáblázatok, de a számológépek pontosabb közelítést adnak.

Számológéppel akkor határozhatjuk meg a szám négyzetgyökét (vagy annak közelítő értékét), ha van a gépen $\sqrt{}$ gomb, vagy INV, illetve 2nd és x^2 gomb. Például $\sqrt{29,5}$ meghatározása:

A megnyomott gombok: 29 $\square$ 5 INV x^2

A kijelzőn megjelenő közelítő érték: 5,413902

FELADATOK

74 Határozd meg a következő számok négyzetgyökét (esetleg közelítőleg)!

- a) 1,823; 18,23; 2,372; 23,72; 2,560; 25,60; 3,204; 32,04
 b) 4,928; 49,28; 5,476; 54,76; 6,708; 67,08; 7,344; 73,44
 c) 144,0; 240,8; 4561; 5960; 23 450; 25 460; 38 200 000
 d) 3,648; 36,48; 9,120; 91,20; 24,50; 30,14; 61; 61,2

☉ *Gyakorold a számológép használatát!*

Gyakorló
 2.122–2.126.;
 Feladatgyűjtemény
 2.3.37.

75 Határozd meg a következő számok négyzetgyökét!

- a) 10^2 ; 10^6 ; 10^8 ; 10; 10^3 ; 10^7 ; -10
 b) 10 000; 1 000 000; 100 000; 100 000 000
 c) $0,1^2$; $0,1^4$; $0,1^8$; $0,1^3$; $0,1^5$
 d) 0,01; 0,0001; 0,001; 0,000 01; 0,000 000 1

☉ *Ki tudja hamarabb meghatározni a számok négyzetgyökét?*

Fogalmazzatok meg észrevételeiteket!

76 Mekkora a négyzet alakú felület egy oldala, ha a területe

- 1,64 dm²; 16,4 dm²; 0,0164 dm²; 16 400 dm²; 164 000 dm²?

☉ *Fogalmazd meg észrevételeidet!*

77 Egy kocka felszíne 152,4 cm². Mekkora a kocka éle, illetve a térfogata?

☉ *Szükség esetén lásd a kislexikont.*

78 Figyelj az adatokra!

a) Határozd meg a kör kerületét és területét, ha a sugara:

- ① 5,4 cm; ② 3,25 dm; ③ 0,04 m!

b) Határozd meg a kör sugarát és területét, ha a kerülete:

- ① 15,7 cm; ② 1,57 dm; ③ 0,628 m!

c) Határozd meg a kör sugarát és kerületét, ha a területe:

- ① 19,625 cm²; ② 14,51 dm²; ③ 0,636 m²!

☉ *Emlékeztető:*

a kör kerülete:

$$K = 2 \cdot r \cdot \pi;$$

a kör területe:

$$T = r^2 \cdot \pi,$$

ahol az r a kör sugara,

$$\pi \approx 3,14.$$



Igaz vagy hamis? Számológép nélkül próbálj dönteni az állításokról!

- ① A 121 négyzetszám. ☐ ② A $\sqrt{1,21}$ racionális szám. ☐
 ③ A $\sqrt{1210}$ racionális szám. ☐ ④ A $\sqrt{12100}$ racionális szám. ☐
 ⑤ A $\sqrt{0,121}$ racionális szám. ☐ ⑥ A $\sqrt{0,0121}$ racionális szám. ☐

Fejtörő!



Írd föl 11-től 19-ig a természetes számok négyzetét! Ezek segítségével keresd meg azokat a számokat, amelyek négyzetgyöke

- ① 1 és 2 közé eső, legfeljebb egy tizedesjegyű tizedestört;
 ② 100 és 200 közé eső kerek tízes szám;
 ③ 0,1 és 0,2 közé eső, legfeljebb két tizedesjegyű tizedestört!

☉ *Át tudod-e fogalmazni a feladatot egyszerűbbre?*

ARÁNY, ARÁNYOSSÁG, SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

Emlékeztető

Két szám hányadosát a két szám **arányának** is nevezzük (az osztó $\neq 0$).

☉ Kettőnél több szám aránya esetén páronként érvényes az értelmezés.

☉ Kettőnél több szám aránya nem művelet.

☉ Az utolsó arányt Ödömrér így írta át:

$$\frac{1}{5} : \frac{3}{10} : \frac{3}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{4}{3}$$

Te hogyan dolgoznál?

☉ Oldd meg a feladatokat következtetéssel, majd próbálkozz egyetlen felírásával is!

Figyelempróba

☉ Készítsetek többféle megoldási tervet! Párban dolgozva hasonlítsátok össze az eredményeiteket! Minden esetben kiszámítható a kért adat?



Ha három szám aránya: $\text{red} : \text{green} : \text{blue} \leftrightarrow 2 : 3 : 4$, ez azt jelenti, hogy

$\text{red} : \text{green} = 2 : 3$, $\text{red} : \text{blue} = 2 : 4$ és: $\text{green} : \text{blue} = 3 : 4$ arányok mindegyike fennáll.

Például: $4 : 6 : 8 \leftrightarrow 2 : 3 : 4$, vagyis ez a két arány **megfelel egymásnak**, ám osztásként kiszámolt értékük nem egyenlő: $4 : 6 : 8 = \frac{1}{12}$; $2 : 3 : 4 = \frac{1}{6}$!

FELADATOK

79 Írd fel a következő arányokat egész számok arányaként!

$$\frac{1}{2} : \frac{5}{10}; \quad \frac{3}{4} : \frac{4}{3}; \quad \frac{3}{10} : \frac{3}{5}; \quad 2\frac{4}{5} : 14; \quad \frac{1}{5} : \frac{3}{10} : \frac{3}{4}$$

☉ Például: $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} = 3 : 2$ Másképpen: $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{6} : \frac{2}{6} = 3 : 2$

80

- Egy téglalap szomszédos oldalainak aránya $2 : 3$, kerülete 90 cm. Mekkora a téglalap területe?
- Egy háromszög oldalainak az aránya $2 : 3 : 4$, kerülete 27 cm. Mekkora a háromszög oldalai?
- Egy téglalap szomszédos oldalainak az aránya $2 : 3$, területe 96 cm^2 . Mekkora a téglalap kerülete?

81

Határozd meg az ismeretlen mennyiségeket! Mely esetben van egyenes, illetve fordított arányosság a mennyiségek között?

- Döme 4 óra alatt felásta a 600 m^2 -es kiskert $0,4$ részét. Ugyanekkora munkatempót feltételezve hány négyzetméterért és fel 6 óra alatt?
- Hány óra alatt ásná fel 6 munkás azt a kertet, amelyet 14 munkás 18 óra alatt ás fel?
- Hány perc alatt oldaná meg 18 tanuló azt a felmérő feladatsort, amelyet 24 tanuló 45 perc alatt old meg?
- Ágiék 1800 km-es autós túrát terveznek. Hány eurót kell üzemanyagra tartalékolniuk, ha a személygépkocsi 5,2 liter gázolajat fogyaszt 100 km-enként, és 1 liter gázolaj ára 1,45 €?
- Ági a túra első napján reggel 6 órától 12 óráig 18,30 €-t költött el. Hány eurót fog elkölteni este 10 óráig?
- Ha egy egyenletesen haladó vonat 1 óra 4 perc alatt 80 km-t tesz meg, mekkora utat tesz meg 0,6 óra alatt?
- Hány nap alatt végezne 8 munkás napi 10 órás munkával azzal a feladattal, amelyet 12 munkás napi 8 órás munkával 16 nap alatt old meg?

1. példa

Mennyit kell fizetni 72 m futószőnyegért, ha 54 m 972 €-ba kerül?

1. megoldás

$$\begin{array}{rcl} 54 \text{ m} & & 972 \text{ €} \\ 72 \text{ m} & & x \text{ €} \end{array}$$

Egyenes arányosság van a két mennyiség között.

Az **összetartozó értékpárok aránya egyenlő**, ezért fölírhatjuk az ár és hosszúság arányát (az egységárat) kifejező egyenletet

$$\frac{x}{72} = \frac{972}{54}$$

Ezt az egyenletet **aránpárnak** nevezzük.

$$\frac{x}{72} = 18$$

$$x = 18 \cdot 72 = 1296$$

A 18 €/m egységár megállapítása volt a megoldás kulcsa:

1 m szőnyeg ára 18 €

72 m szőnyeg ára $72 \cdot 18 \text{ €} = 1296 \text{ €}$.

2. megoldás

Az azonos mennyiségek értékeinek arányaival is számolhatunk. Írjuk fel az összefüggést **aránpárral**.

$$\frac{x}{972} = \frac{72}{54}$$

$$\frac{x}{972} = \frac{4}{3}$$

A hosszúság változásának aránya $\frac{4}{3}$, így az ár is a $\frac{4}{3}$ -szorosára változik:

$$x = 972 \cdot \frac{4}{3} = 1296$$

72 m szőnyeg ára 1296 €.

Figyeljük meg a következtetés sémáját:

$$\begin{array}{ccc} \cdot \frac{4}{3} \downarrow & 54 \text{ m} & 972 \text{ €} \\ & \downarrow & \downarrow \cdot \frac{4}{3} \\ & 72 \text{ m} & x \text{ €} \end{array}$$

© Feltételezzük, hogy rögzített egységáron adják az árut.



Emlékeztető

Két változó mennyiséget **egyenesen arányosnak** mondunk, ha valahányszorosára változik az egyik mennyiség, ugyanannyiszorosára változik a másik mennyiség is.

Egyenesen arányos mennyiségek összetartozó értékeinek megfelelő aránya állandó. (A 0-hoz 0 tartozik, de a $0:0$ arányt nem értelmezzük.)

© Két változó mennyiség **egyenesen arányos**, ha változásuk aránya mindig megegyezik egymással.

FELADATOK

82



Egy szakácskönyvből írtuk ki, hogy négy személy számára mennyi hozzávaló szükséges az egyes ételek elkészítéséhez.

Határozd meg, hogy mennyi hozzávaló kell, ha az ételt

- 1 3 személy;
 - 2 10 személy számára készítik!
- a) Kókuszos rizs gyümölcscsel: 20 dkg rizs, 6 dl tej, 10 dkg kókuszreszelék, 15 dkg porcukor, 2 dl málnalekvár, 2 fürt szőlő, 5 dkg mazsola, 3 alma, 1 doboz mandarinkonzerv, egy csapott kiskanál só.
- b) Túróval rakott alma: 60 dkg alma, 20 dkg túró, 2 tojás, 5 dkg margarin, 2 evőkanál cukor, 2 csomag vaníliás cukor, fél citrom, 2 dkg dió, 2 dkg mazsola.

Gyakorló
2.91–2.92.

© Keresd meg a világhálón a jelenlegi árfolyamokat!

83

- a) Emma átváltott USA-dollárt euróba. Hány dollárt fizetett, ha 270 €-t vásárolt, és 1 €-ért 1,35 \$-t kértek?
- b) Alex átváltott eurót USA-dollárba. Hány eurót fizetett, ha 270 \$-t vásárolt, és 1 € = 1,35 \$ volt az árfolyam?
- c) Pál 800 ausztrál dollárt (AUD) átváltott USA-dollárba, és 450 \$-t kapott. Péter mennyi ausztrál dollárt kapna ugyanolyan árfolyamon 560 \$-ért?
- d) Két (képzeletbeli) valuta árfolyama: $1 X = 45 \text{ Ft}$; $1 Y = 54 \text{ Ft}$. Mennyit kell fizetni X valutában egy $7200 Y$ értékű gépért?

© Vigyázzunk, hogy átöntéskor a gyümölcsle mennyisége ne változzék!

2. példa

Hány darab 7 dl-es üvegbe tölthető át 42 darab 5 dl-es üveg gyümölcsle?

1. megoldás

5 dl-es üvegekből	42 db
7 dl-es üvegekből	x db

Nagyobb üvegből kevesebb kell. **Fordított arányosság** van a két mennyiség közt. **Az összetartozó értékpárok szorzata egyenlő**, ezért fölírhatjuk a következő egyenletet:

$$7x = 5 \cdot 42$$

$$x = \frac{5 \cdot 42}{7}$$

$$x = 30$$

30 db 7 dl-es üvegre van szükség.

2. megoldás

$\frac{7}{5}$ -ször akkora üvegekből $\frac{5}{7}$ -szer annyi szükséges.

»»

»»

A megoldás gondolatmenetének sémája:

$\cdot \frac{7}{5}$ ↓
5 dl-es üvegekből
7 dl-es üvegekből

42 db kell ↓
 $42 \cdot \frac{5}{7}$ db kell $\cdot \frac{5}{7}$

© Gyűjtsetek olyan mennyiségeket, amelyek fordított arányosan változnak!

Emlékeztető

Két változó mennyiséget fordítottan arányosnak mondunk, ha valahányszorosára változik az egyik mennyiség, annak reciprokszorosára változik a másik mennyiség.

Fordítottan arányos mennyiségek összetartozó értékeinek szorzata 0-tól különböző állandó. (A 0-hoz nem tartozik érték.)

© Két változó mennyiség fordítottan arányos, ha a két változás aránya mindig egymás reciproka.

FELADAT

84

a) Mennyi 1500 €-nak a $\frac{3}{4}$ része; $\frac{2}{5}$ része; $\frac{5}{2}$ része?

Hány százaléka (századrésze) ez az 1500 €-nak?

b) Hány kilogramm $\frac{3}{4}$ része 600 kg?

c) Hány kilogramm $\frac{4}{3}$ része 600 kg?

d) Mennyi $\frac{5}{8}$ -nak a $\frac{7}{100}$ része; $\frac{1}{2}$ része; $\frac{7}{5}$ része; $\frac{21}{10}$ része?

Hány százaléka (századrésze) ez az $\frac{5}{8}$ -nak?

e) Hány kilogramm $\frac{5}{6}$ része $\frac{3}{5}$ kg?

f) Mennyinek a $\frac{7}{4}$ része 66,5?

© Írd le a számítás tervét többféleképpen, két lépéses és egyműveletes következtetéssel, illetve egyenlettel is! Pozitív törttel való szorzással az egész mennyiségből a törtrészt számíthatjuk ki. Pozitív törttel való osztással a törtrészből az egész mennyiséget számíthatjuk ki.

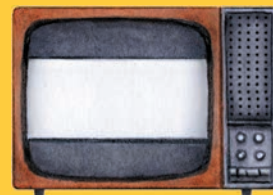


Korábban a legelterjedtebb képernyő képarány 4:3 (szélesség : magasság) volt, míg manapság a mozifilmek miatt a 16:9-es arány egyre népszerűbb. Ha egy 4:3 képarányú képernyőn nézünk egy 16:9 képarányú filmet, a kép tetején és alján egy-egy fekete csík látható, mert a képernyő szélességéhez igazodik a film. Hány százaléka fekete ekkor a képernyőnek? Mi a helyzet fordított esetben, azaz ha egy 16:9-es képernyőn egy 4:3-as filmet nézünk?



Egy tál szilvából Andi megevett néhány szemet, a szilvák $\frac{1}{6}$ részét. Bandi a maradék szilva $\frac{1}{5}$ részét, míg Cili a kettőjük után megmaradt szilva $\frac{1}{4}$ részét ette meg. Dani a tálon maradt szilva felét elfogyasztva 6 szemmel többet evett, mint Andi. Hány szem szilva volt a tálon, és mennyit evett meg belőle egy-egy gyerek?

Fejtörő!



Emlékeztető

☉ A százalékték kiszámítása kétműveletes következtetéssel
 $400 : 100 \cdot 85 = 340$,
 az alap kiszámítása
 $340 : 85 \cdot 100 = 400$.

Egy mennyiség 0,01 részét a mennyiség 1 százalékának (1%-ának) is nevezzük.

A mennyiség 0,85 része a mennyiség 85%-a.

Elnevezések: $\underbrace{400\text{-nak a}}_{\text{alap}}$ $\underbrace{85\text{ \%-a}}_{\text{százalékláb}}$ $\underbrace{340}_{\text{százalékték}}$

A százalékték és az alap arányának 100-szorosát **százaléklábnak** nevezzük.

3. példa

- ➊ Mennyi 400-nak a 85%-a? ➋ Mely szám 85%-a 340?
 ➌ 400-nak hány százaléka 340?

☉ Általánosan:

$$e = a \cdot \frac{p}{100}$$

$$a = e : \frac{p}{100}$$

$$p = \frac{e}{a} \cdot 100$$

Legyen az e százalékték az a alap p -a, vagyis az alap $\frac{p}{100}$ része.

➊ A százalékték kiszámítása az alap és a százalékláb segítségével

400-nak 85%-a, azaz 0,85 része: $e = 400 \cdot 0,85 = 340$.

➋ Az alap kiszámítása a százalékték és a százalékláb segítségével

Az alap 85%-a, azaz 0,85 része 340, ezért $a = 340 : 0,85 = 400$.

➌ A százalékláb kiszámítása az alap és a százalékték segítségével

Az 340 és a 400 arányának 100-szorosa: $p = \frac{340}{400} \cdot 100 = 85$; 85%-a.

☉ Írj többféle megoldási tervet!

FELADATOK

85

- a) Mennyi 240 kg-nak az 1%-a; 10%-a; 20%-a; 100%-a; 150%-a? Mekkora része ez a 240 kg-nak?
 b) A 240 kg minek az 1%-a; 10%-a; 20%-a; 100%-a; 150%-a?
 c) Hány kilogramm kenyér készül 45 kg lisztből, ha a kenyér tömege a liszt tömegének 142%-a?

Figyelempróba



Los Angeles eredeti neve: „El Pueblo de Nuestra Senora la Reina de los Angeles de Porciuncula”, többnyire mégis Los Angeles-ként emlegetik. Hány százalékos ez a rövidítés?



Egyik nap a Budapesti Értéktőzsde (BÉT, Budapest Stock Exchange) tőzsdeindexe, a BUX-index 21 503,95 Ft értéken zárt. Másnap a 09:00 órai 21 605,02 Ft-os nyitást követően előbb 21 680,54-ig emelkedett, majd némi hullámmzással 11:30-ra 21 362,04-ra esett, azután további hullámmzás mellett 21 740,71-re emelkedett 15:32-re. Végül a 17:30-as záróár az előző napi záróárhoz képest 0,73%-kal lett magasabb. Számold ki ezt a záróarat! A nyitó ár hány százalékot esett a napi minimumig, illetve hány százalékkal nőtt a napi maximumig?

☉ Érdekesség: A BUX olvasata óvatosságra intheti a befektetőket?

86

- a) Egy gépkocsi árát 15%-kal csökkentették. Mennyibe kerül most a gépkocsi, ha az eredeti ár 21 560 € volt?
- b) Egy gépkocsi árát 10%-kal felemelték. Mennyibe került eredetileg a gépkocsi, ha az új ár 21 560 €?
- c) Egy gépkocsi ára 14 300 € -ről 11 440 €-ra módosult. Hogyan, hány százalékkal változott a gépkocsi ára?
- d) Egy gépkocsi árát 12 000 € -ről 10%-kal felemelték, majd az új árát 10%-kal csökkentették. Hogyan, hány százalékkal változott a kocsi ára?



87

- a) Egy gépet 20%-os engedménnyel árultak, majd újabb 20%-os engedményt adtak a csökkentett árból is. Az eredetileg 520 €-s gép mennyibe került végül? Hány százalékos így a leárazás?
- b) Egy cipő árát az A boltban 35%-kal felemelték, a B boltban 10%-kal leszállították. Mennyibe került eredetileg a cipő, ha az eredeti ár a két boltban ugyanaz volt, viszont most 13,50 € különbség van a két ár között?

Gyakorló
2.101–2.116.;
Feladatgyűjtemény
2.4.01–19., 2.5.01–30.

88

- a) Egy osztályba 25 tanuló jár. A tanulók $\frac{3}{5}$ része lány. Hány fiú van az osztályban? A tanulók hányad része, hány százaléka fiú?
- b) A 8. évfolyam létszáma az előző évi 75-ről 87-re emelkedett. Hány százalékos volt a létszámnövekedés?
- c) Az iskola tanulóinak száma a 10 évvel ezelőtti 1250-ről 875-re csökkent. Hány százalékos volt a létszámcsökkenés 10 év alatt?



89

- a) Hány euró után jár egy év után 5%-os kamatra 346,50 €?
- b) 2400 €-t három évre, évi 8%-os kamatos kamatra lekötöttek. Mennyi pénzt kaptak három év múlva?
- c) Mekkora összeget tettek két évre kötvénybe évi 10%-os kamatra, ha most 4235 €-t kapnak kézhez?

☉ **A második évtől kezdve az előző év végén jóváírt kamat is kamatozik.**



Egy Airbus 320-as repülőgép a budapesti Liszt Ferenc repülőtértől 120 km-re 11 278 m magasságból, 898 km/h utazósebességről megkezdte az ereszkedést. Repülési iránya ekkor 121° volt.

- a) Tíz perc alatt 80%-kal alacsonyabbra ereszkedett, miközben sebessége a 60%-ára csökkent és 143° irányba fordult. Milyen magasan és mekkora sebességgel repült ekkor a gép?
- b) Két perccel később 1897 m magasan, 448 km/h sebességgel, 197° irányban repült a gép. Hány százalékos változások ezek a magasságban és a sebességben az a) adataihoz képest?
- c) Ezután a gép 4 perc alatt ráfordult a leszállópálya 312° -os irányára, magassága 701 m-re, sebessége 233 km/h-ra csökkent, majd rá 4 percre 244 km/h sebességnél landolt. Közelítőleg hány százalékos volt az átlagos pályaereszkedés (az első magasságadat és távolságadat alapján)?

Figyelempróba

☉ **A repülési irány az északi iránnyal bezárt szöget jelenti.**
A www.flightradar24.com oldalon megfigyelhetitek sok repülőgép mozgását és főbb repülési adatait.



> HÁNYFÉLEKÉPPEN?

Első osztálytól kezdve gyakran találkoztunk olyan feladatokkal, amelyekben például számokat, betűket, színeket kellett kiválasztani, sorba rendezni. Néhány elem esetében nem okoz gondot az összes megoldás megkeresése. Ha sok elem van, akkor **fagráf**, táblázat segítségével rendszerezük a lehetséges megoldásokat, így nem fordulhat elő, hogy kihagyunk egy-két megoldást, vagy valamelyiket kétszer írjuk.

FELADATOK

90

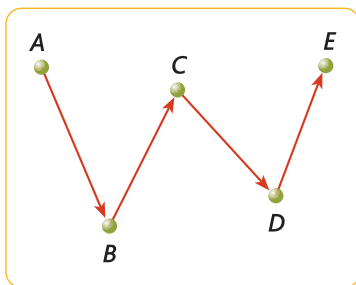
- a) Az a, b, c betűkből írd föl az összes hárombetűs „szót” úgy, hogy minden betű pontosan egyszer forduljon elő!
- b) $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{a; b; c\}$. Add meg nyíldiagrammal az összes olyan függvényt, amelynek az értelmezési tartománya az A , az értékkészlete a B halmaz!

91

Az A, B, C, D, E pontok közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre. Kösd össze az öt pontot egy „irányított” töröttvonalal úgy, hogy minden pontot csak egyszer érints!

Például az ábrán látható irányított töröttvonal a pontok betűjelével így írható: $ABCDE$. Írd föl a pontok betűjelével azokat a töröttvonalakat, amelyek

- a) ABC -vel; b) CDA -val; c) AB -vel kezdődnek!
- d) Hány töröttvonal kezdődhet A -val?
- e) Hányféle irányított töröttvonalat határoz meg az öt pont?
- f) Hányféle töröttvonalat határoz meg az öt pont, ha nem irányítjuk a töröttvonalat?



🕒 Szemléltesd fagráffal a megoldást!

🕒 Mi a különbség az e) és az f) feladat megoldása között?

92

Képezz háromjegyű számokat a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek felhasználásával!

Egy-egy számjegy legfeljebb egyszer fordulhat elő a számban.

- a) Hányféle számjegy állhat a százask helyén?
- b) Hányféle számjegy kerülhet a tízesek helyére, ha a százask száma 1?
- c) Hányféle számjegy kerülhet a tízesek helyére, ha a százask száma 2?
- d) Ha a százask száma 1, a tízesek száma 0, akkor hányféle számjegy kerülhet az egyesek helyére?
- e) Az öt számjegyű hányféle háromjegyű „számsor” képezhető?
- f) Az öt számjegyű hányféle háromjegyű szám képezhető?

93

Képezz háromjegyű számokat a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek felhasználásával!

Egy-egy számjegy többször is előfordulhat a számban.

Válaszolj most is a 92. feladatban feltett kérdésekre!



A hét törpe reggelizőasztalán mindennap ott sorakozik a hét kis bögre, mind-egyiken a gazdája nevének rövidítése (**K, H, M, V, Szu, Sze, T**). A törpék ügyelnek rá, hogy amíg lehet, mindennap új legyen a bögrék sorrendje, majd kezdődjön az egész előlről. A 2012. január 1-jén kirakott bögresorrend legközelebb mikor ismétlődik meg?

94

Egy futóversenyen hatan vesznek részt. Jelöld a versenyzőket A, B, C, D, E és F betűkkel!

- Hányféleképpen alakulhat a helyezési sorrend?
- Ha csak az első hármat díjazzák, akkor hányféleképpen alakulhat a verseny kimenetele?
- Ha ez a futóverseny egy előfutam, amelyből csak az első három versenyző juthat tovább, akkor hányféleképpen alakulhat a továbbjutók csoportja?

© Mi a különbség a b) és a c) feladat megoldása között?



95

Fiúk és lányok úgy ülnek le a csónakban, hogy egymás mögé különböző neműek kerülnek. Hányféleképpen ülhet a csónakban

a) 1 fiú és 1 lány;	b) 1 fiú és 2 lány;
c) 2 fiú és 2 lány;	d) 2 fiú és 3 lány;
e) 3 fiú és 3 lány;	f) 4 fiú és 2 lány;
g) 4 fiú és 3 lány;	



96

Írd fel a RÓKA betűinek összes sorrendezését!

- A sorrendet hányszor kezded Ó-val?
- A sorrendet hányszor fejezed be Ó-val?

R Ó K A
K A R Ó

97

Az 1, 3, 5, 7 számjegyekből hány négyjegyű szám írható föl, ha

- minden számjegy csak egyszer fordulhat elő;
- a számjegyek többször is előfordulhatnak;
- Az a), illetve a b) feladatban kapott számok közül hány osztható

1 3-mal?	2 4-gyel?	3 5-tel?	4 9-cel?	5 15-tel?

© A b)-ben csak lehetőség a számjegyek ismétlődése, de az is lehetséges, hogy mindegyik számjegy különböző.

98

Egy társaság 5 tagja között különböző dolgokat sorsolnak ki. A társaság tagjait jelöld A, B, C, D és E betűvel, a tárgyakat kezdőbetűjükkel!

- Hányféleképpen végződhet a sorsolás, ha az öt tag között egy-egy labdát, pingpongütőt, könyvet, társasjátékot, festékkészletet sorsolnak ki?
- Hányféleképpen végződhet a sorsolás, ha az öt tag között két egyforma labdát, egy pingpongütőt, egy könyvet és egy társasjátékot sorsolnak ki?
- Hányféleképpen végződhet a sorsolás, ha az öt tag között két egyforma labdát, két egyforma pingpongütőt és egy könyvet sorsolnak ki?
- Hányféleképpen végződhet a sorsolás, ha az öt tag között három egyforma labdát és két egyforma pingpongütőt sorsolnak ki?



Hányféleképpen húzhatnak ki 7 számból 3 fogat, ha mindegyikben 4 fog van? – gondolkodik a sárkány fogorvoshoz menvén. Persze mindegy a sorrend, de nem mindegy, melyik számból és hányat húz ki Dr. Szent György.

1. példa

Egy társasház négy lakását kisorsolják a négy tulajdonos között.
Hányféle kimenetele lehet a sorsolásnak?

☉ **Megfigyelted?**
Ha kihúznak egy cédulát,
azt már nem teszik vissza a
kalapba.

Jelölje a tulajdonosokat az A, B, C, D . A sorsoláskor a jelüket felírják egy-egy cédulára, és azokat beteszik egy kalapba. (A lakásokat 1-től 4-ig számozzuk.)

Az 1. lakás kisorsolásakor még négy cédula közül húzhatnak.

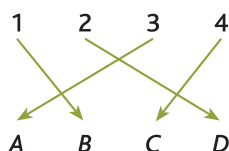
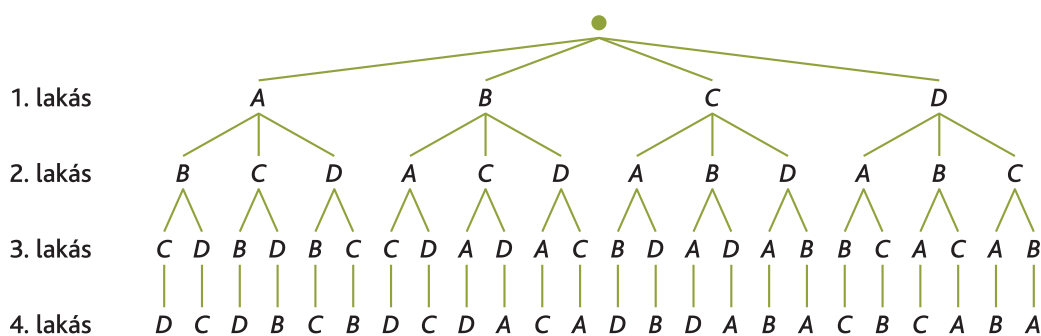
Bármelyik cédulát húzzák is ki először, a 2. lakás sorsolásakor három cédula közül választhatnak. Ezért az első két lakás $(4 \cdot 3 =)$ 12-féleképpen találhat gazdára.

Bármelyik is fordul elő a 12 eset közül, a 3. lakás kisorsolása kétféleképpen folytatható, mert a maradék két cédula közül választanak: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

A 4. lakás (a megmaradt cédulával) egyféleképpen találhat gazdára.

Tehát $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 24-féle kimenetele lehet a sorsolásnak.

Az előző gondolatmenetet ezzel a **fagráffal** tehetjük szemléletessé.



1.	2.	3.	4.
B	D	A	C

Figyeljük meg: A sorsolás az 1, 2, 3, 4 természetes számhoz (a lakások sorszámaihoz) hozzárendelte az $\{A; B; C; D\}$ halmazt (a családok halmazát) úgy, hogy minden lakáshoz pontosan egy család és minden családhoz pontosan egy lakás tartozott. Az ilyen hozzárendelést **kölcsönösen egyértelműnek** nevezzük.

Például a sorsolás egy lehetséges kimenetele látható az ábrán.

Úgy is mondhatjuk, hogy a sorsolással (a lakások szerint) **sorba rendeztük** a családokat, azaz az $\{A; B; C; D\}$ halmaz elemeit.

Foglaljuk táblázatba néhány különböző elem sorba rendezéseinek a számát:

Az elemek száma	Az esetek száma							Összesen
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
	helyen							
1.	1							$1! = 1$
2.	2	1						$2! = 2 \cdot 1 = 2$
3.	3	2	1					$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
4.	4	3	2	1				$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
5.	5	4	3	2	1			$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
6.	6	5	4	3	2	1		$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
7.	7	6	5	4	3	2	1	$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

Ha $n > 1$, akkor az első n pozitív egész szám szorzatát **n -faktoriálisnak** nevezzük. Jelölés: **$n!$**

Például:

3 faktoriális: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

Megállapodás szerint:

$0! = 1$; $1! = 1$

2. példa

A dó, re, mi, szó, lá hangokból hányféle három hangból álló dallam alkotható, ha ugyanaz a hang többször nem fordulhat elő?

Az első hang 5-féleképpen választható meg.

A második helyre csak 4 hang közül választhatunk, így az első két helyre:
 $5 \cdot 4 = 20$ -féleképpen választhatunk a hangok közül.

A harmadik helyre a maradék 3 hang közül választhatunk, ezért három hang:
 $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ -féleképpen választható.

A három hangból álló dallamok száma, ha a hangok **nem ismétlődhetnek**:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$



3. példa

A dó, re, mi, szó, lá hangokból hányféle három hangból álló dallam alkotható, ha ugyanaz a hang többször is előfordulhat?

A dallam ötféleképpen kezdődhet, de most a megkezdett öt dallam mindegyike ötféleképpen folytatódhat, mert a hangok ismétlődhetnek.

Ez $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ kéthangú dallam.

A harmadik hangot (bárhogyan is választottuk az előző kettőt) újra ötféleképpen választhatjuk.

A három hangból álló dallamok száma, ha a hangok **ismétlődhetnek**:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$$

☉ *Hasonlítsd össze a 2. és a 3. példa megoldásának a gondolatmenetét! Miben különbözik a két megoldás egymástól?*

FELADATOK

99

Egy dobókockával egymás után többször dobunk, és feljegyezzük a dobássorozatok. Milyen dobássorozatok lehetnek, ha

- három dobás közül pontosan 2-szer egyest dobunk;
- négy dobás közül pontosan 3-szor egyest dobunk;
- négy dobás közül 2-szer egyest és 2-szer kettest dobunk?

☉ *A „sorozat” kifejezés jelzi, hogy különbözőnek tekintjük azt, ha más sorrendben dobjuk ugyanazokat a számokat.*

100

Egy dobókockával egymás után dobunk. Hányféle dobássorozat lehet, ha

- kétszer;
- háromszor;
- négyszer dobunk?

Az előző dobássorozatok között hány olyan van, amelyben az előforduló számok mind különbözők?

☉ *Készíts rendezett listát a dobássorozatokról!*



Egy digitális kijelzőn az ábrán látható módon jelennek meg a számok. Ödömér szeretné meghatározni, hogy hány olyan hatjegyű szám van, amelynek a megjelenő képe

- középpontosan szimmetrikus;
- tengelyesen szimmetrikus.

Segíts Ödömérnek!



☉ Mindkét esetben 5 féle fagyiból kell 3-at kiválasztani.

☉ Itt a kiválasztás mellett a sorrend is számít.

☉ Itt nem számít a kiválasztott elemek sorrendje.

4. példa

Egy fagylatozóban ananász-, barack-, citrom-, dió- és eperfagyi kapható. Hányféleképp lehet olyan háromgombócos fagyit kérni, amelyben mindegyik gombóc különböző, ha

- egy tölcsérben egymásra rakják a gombócokat;
- egy pohárban egymás mellé rakják a gombócokat?

- A tölcsérből a fagyaltokat csak meghatározott sorrendben fogyaszthatjuk el, ezért számít a gombócok sorrendje. Alkalmazható a 2. példa megoldásának gondolatmenete:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Tölcsérbe 60-féleképpen kérhetjük a háromgombócos fagyit.

- A pohárba rakott fagyik esetén a gombócok sorrendje nem számít (a fogyasztás szempontjából lényegtelen), ezért az adagféleségek száma kevesebb, mint az a) példában.

Például ananász-, barack- és citromgombócot tölcsérbe hatféle sorrendben kérhetünk (a fagyaltféleségeket jelöljük kezdőbetűikkel).



Ezek az adagok a b) példa feltételei mellett egy megoldásnak számítanak.

Bármelyik három fagyaltféleséget választjuk ki, az hatféleképpen

($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$) rakható sorba. Mivel most a sorrend nem számít, ezért az a) feladat megoldásainak száma hatodrésztére csökken.

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{60}{6} = 10$$

Pohárba 10-féleképpen kérhetjük a háromgombócos fagyit.



FELADATOK

☉ Alkalmazhatod az előző b) példa gondolatmenetét.

101 Hányféleképpen tölthető ki egy olyan lottószelvény, amelyben

- hat szám közül kettőt kell eltalálni;
- hat szám közül négyet kell eltalálni;
- tíz szám közül kell négyet eltalálni;
- tíz szám közül hatot kell eltalálni;
- 45 szám közül hatot kell eltalálni;
- 90 szám közül ötöt kell eltalálni?

☉ 5 találatra nem fizet a totó, csak matematikai érdekessége miatt kérdezzük ilyet.



A totófogadásban a futballmérkőzésekre a tippek: 1 (hazai győzelem), x (döntetlen) vagy 2 (vendéggyőzelem). Nálunk 13 alapmérkőzés és 4 pótmérkőzés szerepel minden héten.

Legkevesebb hány 13 mérkőzéses totóoszlop ügyes kitöltésével garantálható legalább öt találat? Hogyan tegyük ezt?

102

Az A, B, C, D, E pontok közül semelyik három nem esik egy egyenesre, és a két-két pont által meghatározott szakaszok között nincs két egyforma hosszúságú.

- Hány vektort határoz meg ez az öt pont?
- Hány szakaszt határoz meg ez az öt pont?

☉ *Mi a különbség az a) és a b) feladat megoldása között? Készíts ábrákat!*

103

Egy osztály létszáma 24. Hányféleképpen választható ki közülük

- egy földrajz- és egy történelemszertár-felelős;
- két hetes;
- egy földrajz-, egy történelem-, egy fizika- és egy matematikaszertár-felelős;
- egy négytagú küldöttség?

☉ *Mi a különbség az a) és a b), illetve a c) és a d) feladat matematikai modellje között?*

104

Panni, Julcsi és Réka fagylaltozni mentek. Mindhárman csokit, vaniliát és citromot kértek. Lehetséges-e a gombócok olyan sorrendje, hogy kettőjüknél a csoki a citrom felett van, kettőjüknél a citrom a vanília felett van, ugyanakkor kettőjüknél a vanília a csoki felett van?

Gyakorló
9.01–9.20.;
Feladatgyűjtemény
5.1.01–42.

105

- Hányféleképpen állítható sorba $3, 4, 5, \dots, n$ agyagkatona?
- Hányféleképpen ülhet le a kerekasztalhoz $2, 3, \dots, n$ egyenrangú lovag?
A társalgás szempontjából az egymáshoz viszonyított sorrend számít.
- Ha Artúr király leült a kerekasztalhoz akkor hányféleképpen ülhet az asztalhoz további $2, 3, \dots, n$ lovag?
- Hányféle sorrendben ülhet le egymás mellé egy padra a várúr 4 apródja és az úrnő 3 udvarhölgye, ha az udvarhölgyek egymás mellett ülnek?
- A kis herceg hányféleképpen állíthat sorba 3 egyforma ólomhuszárt, és 2 egyforma ólomdarabontot?



Hány különböző módon olvasható le az ábráról a **PILLANGÓ** szó, ha a **P** betűkből elindulva csak a nyilak irányában folytathatjuk az olvasást?

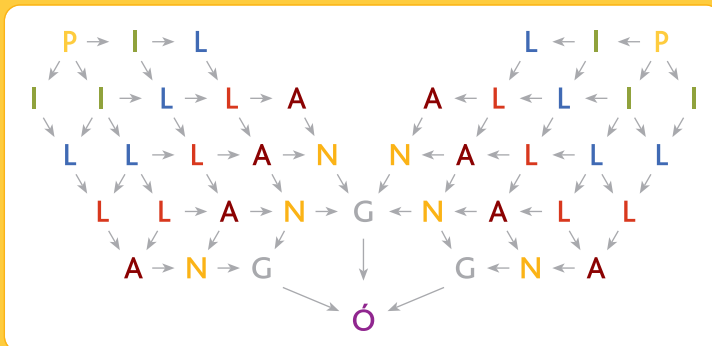
☉ *Készíts te is hasonló feladatot!*



Zénó kapuja négy számjegyből álló számkód beállításával nyitható. Hány próbálkozással nyitható a kapu, ha tudjuk a következőket?

- A számkódban négy különböző számjegy csökkenő sorrendben áll.
- Tudjuk még, hogy a négyjegyű kódszám osztható 9-cel és 5-tel is.
- Tudjuk még, hogy a kódszám csak páros számjegyekből áll.

Ha nem tudunk semmit a számkódról, és egy kód beállítása 9 másodpercbe telik, biztosan elég-e egy nap, hogy kinyissuk a zárat?



Fejtörő!

VALÓSZÍNŰSÉGI KÍSÉRLETEK ÉS SZÁMÍTÁSOK

© Olvassátok el E. A. Poe *Az aranybogár című elbeszélését* (lásd a Magyar Elektronikus Könyvtár honlapján)! E történetben a főhős a betűgyakorlás segítségével fejteti meg Kidd kapitány rejtjeles pergaménjét.

A példák és a feladatok megoldásával ismételjük át a korábban tanultakat.

1. példa

József Attila *Mama* című verse négy szakaszból áll. Minden szakaszban 4 sor, minden sorban 9 szótag van. Így a magánhangzók száma 144.

a) Készítsünk összesítést az egyes magánhangzók **gyakoriságáról**.

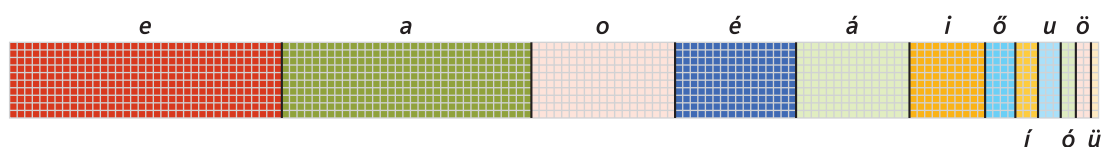
Ábrázoljuk a gyakoriságot szalagdiagramon.

b) Számítsuk ki az *a*, az *á*, az *e* és az *é* hang előfordulásának **relatív gyakoriságát**.

a) Szakaszonként készítsünk összesítést a magánhangzókról.

	<i>a</i>	<i>á</i>	<i>e</i>	<i>é</i>	<i>i</i>	<i>í</i>	<i>o</i>	<i>ó</i>	<i>ö</i>	<i>ő</i>	<i>u</i>	<i>ú</i>	<i>ü</i>	<i>ű</i>	Összesen
1. szakaszban	9	5	10	2	2	1	5	1	1	0	0	0	0	0	36
1–2. szakaszban	21	8	16	5	4	2	11	1	2	1	1	0	0	0	72
1–3. szakaszban	28	12	28	10	7	2	14	1	2	1	3	0	0	0	108
1–4. szakaszban	33	15	36	16	10	3	19	2	2	4	3	0	1	0	144

A **gyakoriság** szerinti sorrendben ábrázoljuk a **szalagdiagramon** a magánhangzókat.



b) Készítsük el a következő táblázatot:

	<i>a</i>	<i>á</i>	<i>e</i>	<i>é</i>
1. szakaszban	$\frac{9}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{2}{36}$
százalékban	25%	14%	28%	6%
1–2. szakaszban	$\frac{21}{72}$	$\frac{8}{72}$	$\frac{16}{72}$	$\frac{5}{72}$
százalékban	29%	11%	22%	7%
1–3. szakaszban	$\frac{28}{108}$	$\frac{12}{108}$	$\frac{28}{108}$	$\frac{10}{108}$
százalékban	26%	11%	26%	9%
1–4. szakaszban	$\frac{33}{144}$	$\frac{15}{144}$	$\frac{36}{144}$	$\frac{16}{144}$
százalékban	23%	11%	25%	11%

A statisztikai vizsgálatokban legtöbbször nem csak azt vesszük számba, hogy hányszor fordult elő egy-egy megfigyelt **esemény**. Többet árul el az, hogy az összes megfigyelt esetek mekkora részében, hány százalékában fordulnak elő ezek az események.

Értelmezés szerint **egy esemény relatív gyakorisága azt mutatja meg, hogy az összes megfigyelt esetnek mekkora részében következett be az esemény**.

$$\text{Relatív gyakoriság} = \frac{\text{gyakoriság}}{\text{összes magánhangzó}}$$

2. példa

Egy osztályba 18 lány és 12 fiú jár, közülük 9 fiú és 6 lány rendszeresen sportol. A tanulók nevét egy-egy cédulára felírjuk, dobozba tesszük, és egyet kihúzunk. Rendezzük a következő eseményeket valószínűségük csökkenő sorrendje szerint. A kihúzott név olyan tanulóé, aki

A: sportol; **B:** lány; **C:** fiú vagy sportol; **D:** lány és sportol.

30 tanuló van, ezért ennek a valószínűségi kísérletnek 30 lehetséges kimenetele van, mert a 30 cédula bármelyikét kihúzhatjuk. Ezek a **lehetséges kimenetek az elemi események**.

Ha a cédulák kihúzását semmi sem befolyásolja, akkor feltételezhetjük, hogy a 30 elemi eseménynek egyenlő a **valószínűsége**.

Így a felsorolt **események valószínűsége attól függ, hogy az elemi események közül mennyi a kedvező esetek száma**, vagyis hány tanulóra igazak a tulajdonságok.

A **B** és a **C** eseménynek egyenlő a valószínűsége.

Az **A** esemény bekövetkezésének valószínűsége kisebb, mint a **B** vagy a **C** eseményé.

A **D** esemény bekövetkezése a legkevésbé valószínű.

Az események valószínűsége

Esemény	Kedvező esetek száma	Valószínűség
A	15	$\frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0,5$
B	18	$\frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6$
C	18	$\frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6$
D	6	$\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0,2$

☉ Táblázatba rendezzük, hogy egy-egy eseményhez hány tanuló tartozik.

3. példa

Egy dobókockával dobunk kétszer egymás után, és a kapott két számot összeszorozzuk. Rendezzük a következő eseményeket valószínűségük csökkenő sorrendje szerint:

A: A szorzat pontosan 12.

B: A szorzat legfeljebb 4.

C: A szorzat pontosan 32.

D: A szorzat legfeljebb 36.

Foglaljuk táblázatba az elemi eseményeket:

Az első dobás hatféle lehet. Bármennyit is dobunk először, a második dobás ismét hatféle lehet. Ezért az elemi események száma:

$$6 \cdot 6 = 6^2 = 36$$

A táblázatból megállapítható, hogy a vizsgált eseményekhez hány elemi esemény tartozik. Tehát a vizsgált események valószínűsége meghatározható:

A: 4 kedvező eset; az esemény valószínűsége: $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

B: 8 kedvező eset; az esemény valószínűsége: $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

C: 0 kedvező kimenetel; a **C lehetetlen esemény**, valószínűsége: 0

D: 36 kedvező kimenetel; a **D biztos esemény** valószínűsége: $\frac{36}{36} = 1$

Az események a valószínűségük sorrendjében: **D; B; A; C**

Az 1. dobás lehet	A 2. dobás lehet					
	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Emlékeztető

Ha véges sok elemi esemény van, és az elemi események bekövetkezésének egyenlő a valószínűsége, akkor egy

$$\text{esemény valószínűsége} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$$

FELADATOK

Kísérletezz!

☉ Célszerű csoportban dolgozni, majd összegezni a különböző csoportok eredményét. Gyorsabban mehet a munka, ha a „dobásokat” például átlátó fedelű joghurtosdobozal végzitek.

106

Két dobókockával sokszor dobunk egymás után. A két kockán felül levő pontokat összeadjuk.

- Mit gondoltok, melyik következik be legtöbbször (legkevesebbszer) a következő események közül?
A: A dobott számok összege 3.
B: A dobott számok összege 7.
C: A dobott számok összege 12.
- Dobjatok fel két kockát 20-szor! Foglaljátok táblázatba a dobások eredményét! Hányszor volt a két szám összege 1, 2, 3, ..., 11, 12?
- Összegeztétek tíz kísérletsorozat (200 dobás) eredményét! Melyik összeg fordult elő legtöbbször, melyik legkevesebbszer? Keressetek magyarázatot!
- A 200 dobásból hányszor, illetve az összes dobás mekkora részében következett be az **A**, hányszor a **B**, illetve a **C** esemény?
- Készítsetek két kockát, az elsőn az 1, 2, 2, 3, 3, 4; a másodikon az 1, 3, 4, 5, 6, 8 számok szerepeljenek! Oldjátok meg a feladatot ezzel a két kockával is! Mit tapasztaltok?

☉ Indokold a válaszod!

107

Pista egy dobókockával ötször dobott egymás után. A három első dobása hatos lett, a negyedik kettes, az ötödik hármas. A következő események közül melyiknek a legnagyobb a valószínűsége?

A: A hatodik dobás hatos.	B: A hatodik dobás kettes.
C: A hatodik dobás ötös.	D: A hatodik dobás négyes.

Feladatgyűjtemény
5.2.01–10.

☉ A feladatgyűjteményben a feladatok előtt lévő magyarázatot is olvasd el!

108

Egy dobókockával háromszor dobunk egymás után. A dobássorozatokat lejegyezzük.

- Hányféleképpen folytatódhat a sorozat, ha az első dobás eredménye 1?
- Hány különböző dobássorozatot kaphatunk összesen?
- Hányféle lehet egy-egy dobássorozatban a dobott számok összege? Melyik összeget tartod a legkevésbé valószínűnek, melyiket a legvalószínűbbnek? Válaszodra keress magyarázatot!
- Írd le azokat a lehetséges dobássorozatokat, amelyeknek az összege 3, 7, 11, 16!
- Melyik más dobássorozat összegének a valószínűsége annyi, mint a 3 összeg valószínűsége?

109

- a) Készítetek összesítést a 108. feladat magánhangzóinak gyakoriságáról! Ábrázoljátok a gyakoriságot szalagdiagramon!
- b) Számítsátok ki az *a*, az *á*, az *e* és az *é* hang előfordulásának relatív gyakoriságát! Hasonlítsátok össze az 1. példában kapott eredményekkel!

110

Két különböző pénzérmével dobunk. Mekkora a valószínűsége a következő eseményeknek?

A: A tízforinton „fej” (címer) van felül, a húszforinton írás.

B: Egy érmén fej van felül, a másikon írás.

111

Három különböző pénzérmével dobunk. Mekkora a valószínűsége a következő eseményeknek?

A: A kétszázforinton „fej” van felül, a húszforinton és az ötforinton írás.

B: Egy érmén fej van felül, kettőn írás.

C: Legalább két érmének egyforma oldala (fej-fej vagy írás-írás) van felül.

112

25 nyolcadikostól megkérdezték, hogy öt tantárgy (fizika, irodalom, kémia, matematika és történelem) közül melyiket kedvelik legjobban.

A válaszok alapján elkészítették az ábrán látható diagramot.

Zénó bemegy az osztályba, és találomra megszólít valakit.

Mekkora a valószínűsége annak, hogy a megszólított tanuló legjobban kedveli

a) a matematikát; b) a fizikát; c) az irodalmat; d) a történelmet?

Gyűjtőmunka

© *Csoportmunkában cél-szerű vizsgálni.*

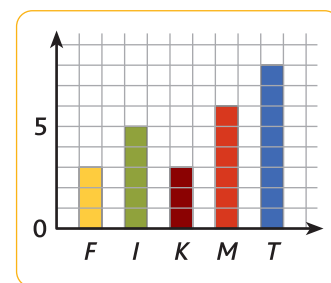
Gyakorló

9.31–9.38.;

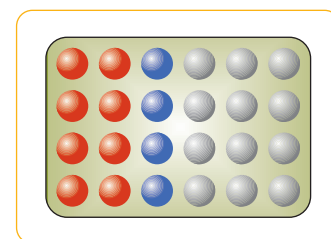
Feladatgyűjtemény

5.2.11–22.

© *Különbözik-e a B esemény az A eseménytől?*



Figyelempróba



© *Indokold választod!*

113

- a) Adél egy zacskóba beönti az ábrán látható golyókat, majd találomra kihúzza egyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy kék golyót húz ki?
- b) Legalább hány golyót kell egyszerre kihúzni a zacskóból, ha azt akarjuk, hogy biztosan legyen a kihúzott golyók közt két különböző színű?
- c) Piroska és Feri társasjátékot játszanak. Egy zacskóba beleöntik az ábrán látható golyókat. Ezután a zacskóból felváltva húznak egy-egy golyót. Megnézik, majd azonnal visszateszik. Ha Piroska piros golyót húz, akkor dobhat egy kockával, és ha páros számot dob, akkor kap egy pontot. Feri akkor dobhat, ha szürke golyót húz, és akkor kap pontot, ha 3-mal osztható számot dob.

Vizsgáld meg, hogy igazságos-e ez a játék!



Matematikaországban, egy teljesen sötét (végtelen nagy) szobában végtelen sok fehér és végtelen sok fekete, egyforma méretű zokni van. A fehér és a fekete zoknik kiválasztásának valószínűsége megegyezik.

- a) Találomra kiveszünk három zoknit. Mekkora a valószínűsége annak, hogy lesz közöttük egy pár?
- b) Találomra kiveszünk négy zoknit. Mekkora a valószínűsége annak, hogy lesz közöttük egy pár fehér?
- c) Találomra kiveszünk öt zoknit. Mekkora a valószínűsége annak, hogy lesz közöttük egy pár fehér és egy pár fekete?

Fejtörő!



STATISZTIKAI SZÁMÍTÁSOK

AZ ADATOK GYŰJTÉSE, RENDSZEREZÉSE, ELEMZÉSE

☉ A példákban szereplők mellett további statisztikai jellemzőket is értelmeznek, de ahhoz az adatokat növekvő sorrendbe rendezik.

A rendezett minta középső számadatát (páratlan sok adat esetén) vagy középső két adatának átlagát (páros sok adat esetén) **mediánnak** vagy a minta közepének nevezik.

Hasonlóan értelmezik a minta alsó illetve felső kvartiliséit (negyedelőjét), mint a medián alatti, illetve feletti rész mediánját.

A legnagyobb és a legkisebb szám különbségét a minta **terjedelmének** mondjuk.

A statisztikai számításokat a különböző tudományokban és a gyakorlati élet nagyon sok területén alkalmazzák. **Adatgyűjtés**, az **adatok rendszerezése** és **statisztikai elemzése** nélkül nem képzelhető el a termelés és a kereskedelem, az egészségügy és az oktatás irányítása, a lakosság nyilvántartása, az időjárás előrejelzése, egy új gyógyszer előállítás, az atomfizikai folyamatok leírása stb.

1. példa

Egyik évben 98 véletlenszerűen kiválasztott nyolcadik osztály tanulójának előző év végi matematikaosztályzata a következőképpen oszlott meg: Jelese 298, jó érdemjegye 559, közepese 682, elégséges 687, elégtelene 9 tanulónak volt.

a) Határozzuk meg az osztályzatok **átlagát**.

Jellemezzük az átlagtól való eltérések mértékét, az adatok **szóródását**.

b) Szemléltessük többféleképp az osztályzatok szerinti megoszlást.

a) Az átlagosztályzatot (jelölje $\bar{x}$) úgy számíthatjuk ki, hogy összeadjuk a tanulók osztályzatait, és a kapott összeget osztjuk a tanulók számával. Megfelelően csoportosítva az adatokat (lásd a táblázat első két sorát!) egyszerűsíthetjük a számítást:

$$\bar{x} = \frac{9 \cdot 1 + 687 \cdot 2 + 682 \cdot 3 + 559 \cdot 4 + 298 \cdot 5}{9 + 687 + 682 + 559 + 298} = \frac{7155}{2235} = 3,20$$

Az osztályzatok átlaga: $\bar{x} = 3,20$

A táblázat harmadik sorába beírtuk az átlag és az egyes osztályzatok különbségének abszolútértékét.

A tanulók száma: n	9	687	682	559	298
Osztályzata: x	1	2	3	4	5
Eltérés az átlagtól: $ \bar{x} - x $	2,2	1,2	0,2	0,8	1,8

☉ A leggyakoribb adatot **módusznak** nevezzük. Itt a leggyakoribb adat a 2-es.

Az osztályzatoknak az átlag körüli **szóródását** jellemezhetjük az eltérések átlagával (itt is egyszerűsítve a számítást):

$$\bar{e} = \frac{9 \cdot 2,2 + 687 \cdot 1,2 + 682 \cdot 0,2 + 559 \cdot 0,8 + 298 \cdot 1,8}{9 + 687 + 682 + 559 + 298} = \frac{1964,2}{2235}$$

$$\bar{e} \approx 0,88$$

A **szóródás** mértéke információt nyújt arról, hogy az adatok hogyan helyezkednek el az átlaghoz viszonyítva.

A „szóródást” pontosabban jellemzi a következőképpen kiszámított, **szórásnak** nevezett érték: képezzük az adatok és az átlag különbségének a négyzeteit; az így kapott értékeket összeadjuk; az összeget osztjuk n -nel (az adatok számával); a hányadosból négyzetgyököt vonunk.

Az előző vizsgálatban az így kiszámított szórás értéke: 1,03

b A diagramok elkészítéséhez adjuk meg százalékosan az **eloszlást**:
Összesen 2235 tanuló 7. év végi osztályzatát ismerjük (ez a létszám a 100%).
Jelese volt 298 tanulónak, ez a tanulók 13,3%-a, mert:

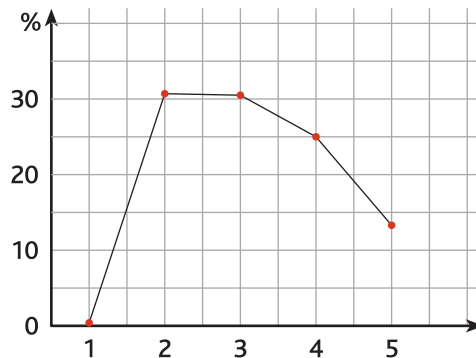
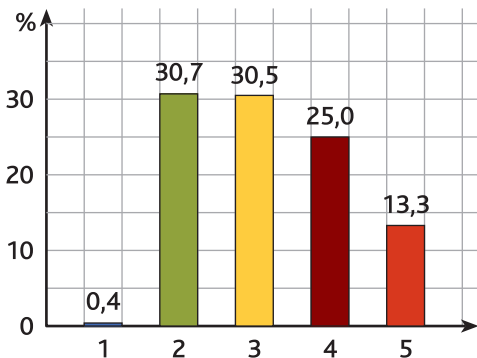
$$(298 : 2235) \cdot 100 \approx 13,3$$

Hasonlóan kiszámíthatjuk a többi értéket is:

jó érdemjegyet kapott a tanulók 25,0%-a, közepest 30,5%-a, elégségest 30,7%-a, elégtelent 0,4%-a.

Szemléltessük **oszlopdiagrammal**, illetve **töröttvonallal** az eloszlást.

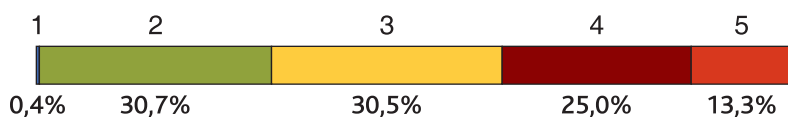
Mindkét diagramot elkészíthetjük az eredeti adatokkal, illetve a százalékban megadott adatokkal is.



A töröttvonálnak csak a csúcsait kell figyelembe vennünk. A csúcsokat összekötő szakaszoknak (ellentétben a függvények grafikonjával) nincs matematikai jelentésük.

Készítsünk **szalagdiagramot**.

Például egy 100 mm hosszúságú keskeny téglalapot osszunk fel a százalékatok arányában:



Készítsünk **kördiagramot**.

A körlaphoz tartozó középponti szög 360° , ez szemlélteti a 100%-ot.

Elégtelen: 0,4% ($0,4 \cdot 3,6 = 1,44^\circ \approx 1^\circ$)

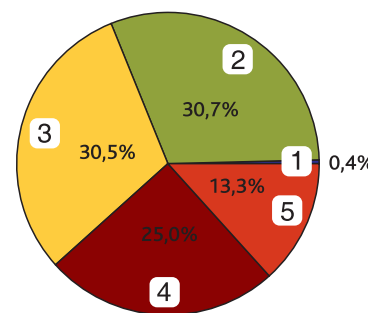
Elégséges: 30,7% ($30,7 \cdot 3,6 = 110,52^\circ \approx 111^\circ$)

Közepes: 30,5% ($30,5 \cdot 3,6 = 109,80^\circ \approx 110^\circ$)

Jó: 25,0% ($25,0 \cdot 3,6 = 90,00^\circ \approx 90^\circ$)

Jeles: 13,3% ($13,3 \cdot 3,6 = 47,88^\circ \approx 48^\circ$)

A rajzoláskor ügyelünk a kerekítésből adódó eltérésre.



☉ A diagramok elkészítéséhez használhatjuk a számítógép táblázatkezelő programját.



Halász Pál kifogott 13 halat, lemérte a hosszukat centiméterben és lejegyezte: 35, 32, 13, 20, 22, 50, 40, 35, 35, 15, 20, 30, 27.

a) Határozd meg az adatok átlagát, **terjedelmét** (a legnagyobb és a legkisebb adat különbségét), a nagyság szerint rendezett adatok közül a **középső adatot**, végül a **leggyakoribb adatot**!

b) Hogyan jellemeznéd az adatok szóródását?

☉ **Középső adat:** medián
Leggyakoribb adat: módusz

2. példa

Osztályzat	Elért pontszám				
	0–5	6–10	11–16	16–21	22–27
Elégtelen	3	6	–	–	–
Elégséges	130	342	184	28	3
Közepes	30	229	302	112	9
Jó	4	62	280	179	34
Jeles	1	5	75	130	87

Egy felmérésben a tanulók dolgozatot írtak matematikából. A táblázatból kiolvasható, hogy azok közül a tanulók közül, akiknek 7. osztály év végén elégtelene, elégséges stb. volt matematikából, hányan milyen eredményt értek el ebben a dolgozatban.

Az elégtelen osztályzatúak nyáron sikeres pótvizsgát tettek.

Az adatok segítségével döntsük el, hogy melyik állítással érthetünk egyet

A: Akinek jelese volt matematikából, az biztosan jó dolgozatot ír.

B: Akinek elégséges volt, az biztosan gyenge dolgozatot ír.

C: Akinek elégséges volt, az biztosan gyengébb dolgozatot ír, mint az, akinek jelese volt.

D: Akinek jelese volt, az nagy valószínűséggel jó dolgozatot ír.

Osztályzat	Elért pontszám				
	0–5	6–10	11–16	16–21	22–27
Elégséges (%)	18,9	49,8	26,8	4,1	0,4
Jeles (%)	0,3	1,7	25,2	43,6	29,2

Hasonlítsuk össze az elégséges és a jeles tanulók teljesítményét.

Az **A** állítás hamis, hiszen a jelesek 1,7%-a gyenge, 0,3%-a igen gyenge dolgozatot írt. A **B** állítás hamis, az elégségesek 4,1%-a jó, 0,4%-a igen jó dolgozatot írt.

A **C** állítás is hamis. Voltak olyan tanulók, akiknek jelesük volt matematikából, de gyengébb dolgozatot írtak, mint néhány elégséges.

A **D** állítással már egyet kell értenünk. A jelesek 43,6%-a jó, 29,2%-a igen jó dolgozatot írt.

Ha a **B** és a **C** állításban a „biztosan” szó helyett azt mondjuk, hogy „nagy valószínűséggel”, akkor igaz kijelentést kapunk.

☉ A matematikai statisztikát jobban megismerve a „nagy valószínűséggel” kifejezés helyett pontosabban is fogalmazhatunk.

☉ A pontos célba ugrás fontos a hadászatban. Katona versenyzőink többnyire 0 pontot ugranak, és a Föld legjobbjai között vannak.

☉ Egy ábrára rajzold a két töröttvonal-diagramot, egy másikra a két oszlopdiagramot!

FELADATOK

114

Az ejtőernyős célba ugrásnál a versenyző egy 3 cm átmérőjű korongot céloz meg az ugrócipője talpán kiképzett kúppal. Ha eltalálja 0 pont az eredmény, ha nem, akkor a korongtól vett távolság centiméterben, de legfeljebb 16 pont (16 cm távolság ugyanolyan rontás, mint például 20 m). Milyen négy ugrás adhat 13 pont összeredményt?

115

A 2. példa táblázata alapján rajzold meg az elégséges, illetve jeles osztályzatot elért tanulók százalékban kifejezett teljesítményének

a) töröttvonal-diagramját; b) oszlopdiagramját; c) kördiagramját!



116

Egy osztályban a következőképpen oszlottak meg az érdemjegyek matematikából és fizikából:

	Jeles	Jó	Közepes	Elégséges	Elégtelen
Matematika	5	8	10	7	2
Fizika	3	11	14	3	1

- Határozd meg az osztályzatok átlagát, és jellemezd az adatok szóródását mindkét tárgy esetén!
- Egy ábrán, különböző színeket használva rajzold meg a *töröttvonal-diagramokat*!
- Rajzold meg mindkét tantárgyból az osztályzatok százalékos megoszlását mutató *szalagdiagramot*!
- Rajzold meg mindkét tantárgyból az osztályzatok százalékos megoszlását mutató *kördiagramot*!



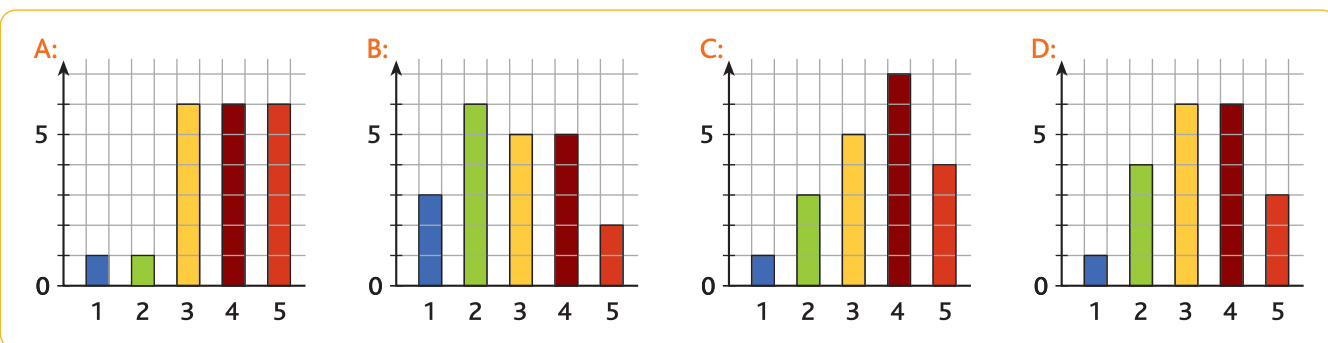
117

Arisztid osztályából 18 tanuló dolgozatot írt matematikából, amelynek az átlaga pontosan 3,5 lett. Arisztid és Tasziló pótlólag írták meg a dolgozatot. Arisztidé elégséges, Taszilóé elégtelen lett. E két eredmény hozzászámításával mennyi lett az osztályátlag?

© Jelöld meg a helyes választ betűjelét!

- A következő számolási tervek közül melyik helyes?
A: $(3,5 + 2 + 1) : 3$; **B:** $3,5 - (2 + 1) : 20$; **C:** $(18 \cdot 3,5 + 2 + 1) : 20$
D: A fenti számolási tervek mindegyike hibás.
- A két eredmény hozzászámítása után mennyi lett az osztályátlag?
A: 2,17; **B:** 3,3; **C:** 3,35; **D:** 3,4
- Az alábbi diagramok közül melyik szemléltetheti a 20 tanuló teljesítményét?

Gyakorló
9.21–9.30.



118

Hasonlítsd össze Benő és Döme dolgozatainak eredményét! Az adatok szóródását az adatok átlagtól való eltéréseinek átlagával jellemezd!

Benő dolgozatjegyei: 3, 3, 4, 4; 4, 3; Döme dolgozatjegyei: 2, 5, 1, 5, 5; 3
Melyik megállapítás igaz a következők közül?

© Jelöld meg a helyes megállapítás betűjelét!

- Megegyezik a dolgozatjegyek átlaga és szóródása is.
- Különbözik a dolgozatjegyek átlaga és szóródása is.
- Különbözik a dolgozatjegyek átlaga, de megegyezik a szóródásuk.
- Megegyezik a dolgozatjegyek átlaga, de különbözik a szóródásuk.

• KÉT VÁLTOZÓ VÉLETLEN KAPCSOLATA

3. példa

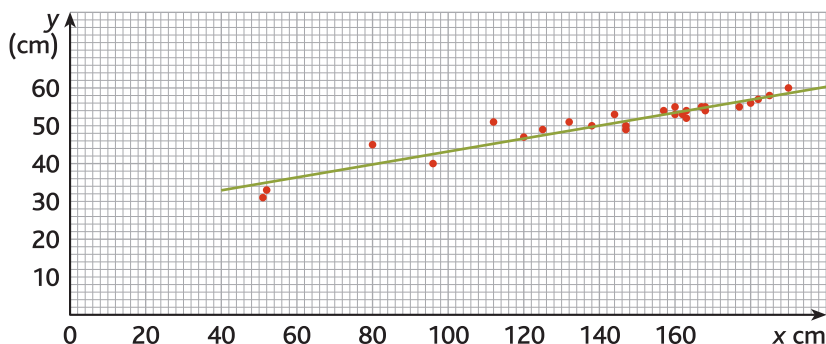
Ági megmérte néhány különböző életkorú gyerek, illetve felnőtt testmagasságát és fejkörméretét:

x: magasság (cm)	52	80	116	190	168	144	163	163	177	168	182	147	162
y: fejkörméret (cm)	33	45	51	60	55	53	52	54	55	54	57	49	53

x: magasság (cm)	51	96	147	157	167	160	160	185	180	125	132	138	120
y: fejkörméret (cm)	31	40	50	54	55	53	55	58	56	49	51	50	47

Van-e valamilyen kapcsolat a testmagasság és a fejkörméret között?

Vizsgálati eredmények



Rajzoljuk meg derékszögű koordináta-rendszerben az adatpároknak megfelelő pontokat.

A testmagasság nem határozza meg egyértelműen a fejkörméretet. Például a 160 cm magas tanulók fejkörmérete különböző lehet. A két adatsor közti kapcsolat **véletlentől függő kapcsolat**.

Meghúzhatunk egy egyenest úgy, hogy az adatpároknak megfelelő pontok az egyenes körül csoportosuljanak. Ha minden lehetséges pont az egyenesen lenne, akkor lineáris függvénykapcsolat lenne a két változó között.

Példánkban a mérési pontok nagyon közel vannak az egyeneshez, ez a véletlentől függő kapcsolat majdnem lineáris függvénykapcsolat. A testmagasság ismeretében nagy pontossággal megbecsülhetjük a fejkörméretet.

Nagyobb testmagassághoz nagy valószínűséggel nagyobb fejkörméret tartozik. A megrajzolható egyenes meredeksége (iránytényezője) pozitív.

4. példa

Cili megmérte, hogy néhány osztálytársa mennyi idő alatt old meg egy egyenletet, majd feljegyezte, hogy az illetőnek hányasa volt matematikából.

A feljegyzett adatok:

x: idő (min)	0,5	1	3,5	4	4,5	1,5	2	3	2,5	4	5	2,5	4
y: osztályzat	5	4	2	3	2	4	5	3	4	3	1	3	2

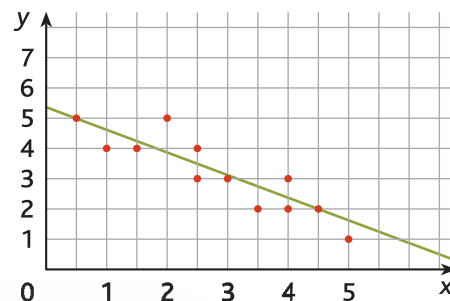
Kimutatható-e valamilyen kapcsolat a munkatempó és a matematikajegy között?

Vizsgálati eredmények

Észrevehetjük, hogy nagyobb időértékekhez nagy valószínűséggel alacsonyabb osztályzatok tartoznak.

Az egyenes irányításezője negatív.

Azt is észrevehetjük, hogy a pontok nem helyezkednek el olyan szorosan az egyenes mentén, mint az 1. példában, ezért az időadatok segítségével sokkal kisebb pontossággal tudjuk megbecsülni, hogy valakinek hányasa volt matematikából.



5. példa

Balázs skálát dolgozott ki valami szeretetének a mérésére:

Néhány osztálytársánál „megmérte”, hogy ki mennyire szereti a kemény rockot, illetve megkérdezte, hogy hányasa volt énekből.

A rock szeretetének mértékét x -szel, az énekjegyet y -nal jelölte.

Ezeket az adatokat jegyezte fel:



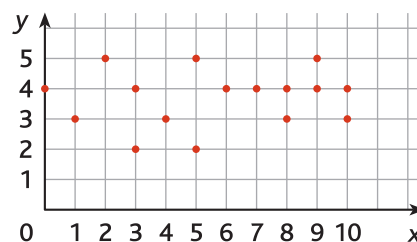
x	8	7	9	2	0	5	4	3	6	8	9	10	10	1	3	5
y	3	4	4	5	4	2	3	4	4	4	5	3	4	3	2	5

Kimutatható-e valamilyen kapcsolat a kemény rock szeretete és az énekjegy között?

Vizsgálati eredmények

Ha megrajzoljuk az összetartozó adatszárak által meghatározott pontokat, akkor nem veszünk észre semmilyen kapcsolatot.

Nem húzhatunk meg egyenest úgy, hogy az adatszáraknak megfelelő pontok az egyenes közelében csoportosuljanak.

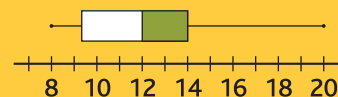


A „**doboz és szalag**” statisztikai modell a következő: Számegyenesen ábrázoljuk a növekvően rendezett adatszár legkisebb, legnagyobb tagját és a közepét (mediánját). Meghatározzuk és ábrázoljuk a számegyenesen a legkisebb adattól a minta közepéig terjedő adatszár közepét, az **alsó kvartilist** (negyedelőt), illetve hasonló módon a **felső kvartilist**. A számegyenes fölött a negyedelők közé téglalapot („dobozt”) rajzolunk, és a minta közepénél kettévágjuk a „dobozt”. A szalagot a „doboztól” balra a legkisebb tagig, illetve jobbra a legnagyobbig húzott szakasz jelöli.

- Készítsd el a 69. oldal alján lévő feladat mintájához ezt a modellt!
- Mekkora az alsó és a felső szalag terjedelme? Mit mutat ez?
- Mi olvasható le erről a modelltől?
- További jellemzésre nyílik mód, ha az átlagot is bejelöljük. Tedd meg!

Figyelempróba

☉ **Dobozdiagram**
Például:



☉ **Páros számú tag esetén a középső két szám átlaga a közép.**

FEJTÖRŐ FELADATOK

☉ Könnyebben megválaszolhatod az első négy kérdést, ha listázod az első harminc négyzetszámot.

- 119 a) A természetes számok négyzetét (vagyis a négyzetszámokat) 10-zel osztva mit kaphatunk maradékkal?
- b) A négyzetszámokat 100-zal osztva lehet-e a maradék
- 0; 9; 11; 21; 25; 29; 34; 36; 41; 46; 50; 54; 56?
- c) A 25-nél valamennyivel kisebb természetes szám és az ugyanannyival nagyobb természetes szám négyzetéről mit állapíthatsz meg?
- d) Keresd egyéb szabályosságokat a természetes számok négyzetének a sorozatában!
- e) A törzsszámok szorzataként adott számok közül válaszd ki azokat, amelyek természetes számok négyzetei!
- $a = 2^2 \cdot 7^3$; $b = 2^4 \cdot 7^8 \cdot 19^2$; $c = 5^4 \cdot 13^2 \cdot 17^6$; $d = 7 \cdot 11^2 \cdot 13^3$

Figyelempróba

☉ Van-e különbség a b) és a c) feladat matematikai modellje között?

- 120 a) Gábor egy szállodában vacsorára ötféle sültből, kétféle köretből és négyféle süteményből választhat egyet-egyet. Hányféle (sült-köret –süti) vacsoramenü állítható össze ezekből az ételekből?
- b) Hedvig és két gyermeke választanak egy-egy adagot az ötféle sültből. Hányféleképpen választhatnak,
- 1 ha mindenki mást rendel; 2 ha nem feltétlenül rendel mindenki mást?
- c) Irma hazavisz három különbözőt az ötféle sültből. Hányféleképpen választhat?

- 121 Egy kiránduláson összesen 80 tanuló vett részt, 45%-uk hetedikes volt, köztük 24 fiú. A többiek nyolcadikosok voltak. A résztvevő tanulók kétötöde lány volt. A résztvevő tanulók hány százaléka volt nyolcadikos fiú?

☉ Oldd meg következtetéssel, a végéről visszafelé lépegetve! Azután egyenlettel is próbáld megoldani!

- B15 a) Gondoltam egy számot. A feléhez hozzáadtam egyet, majd elvettem az összeg harmadának a kétszeresét. A maradékból kettőt kivonva kettő maradt. Melyik számra gondoltam?
- b) Dóra a kirándulás első napján elköltötte zsebpénze egynegyed részét és még 300 Ft-ot. A második napon a maradék pénz egyharmadát és még 1000 Ft-ot. Így 2000 Ft-ja maradt a harmadik napra. Hány forintja volt eredetileg?

☉ Érdemes a döntés előtt kiszámítanod az eredményt.

- B16 Egy pék egy cipőt 175 Ft-ért adott, majd felemelte az árát a korábbi ár két ötödével. Ám ekkor észrevette, hogy a korábbi vevői más üzletben vásárolnak. Ezért csökkentette a cipő árát az új ár 40%-ával.

Melyik állítás igaz a következők közül?

- A: A cipő ára a második árváltozás után az eredeti ár 84%-a lett.
- B: A cipő ára a második árváltozás után az eredeti árnál 15 Ft-tal kevesebb lett.
- C: A cipő ára a második árváltozás után visszaállt az eredeti szintre.
- D: A cipő ára a második árváltozás után az eredeti ár 105%-a lett.

B17

Lotte öt napra megszállt egy szállodában. A táblázatban megadtuk, hogy mennyibe kerülnek a szálloda szolgáltatásai

- a) Mennyibe került a 4-4 adag reggeli és vacsora együtt?
b) Megvehetette-e Lotte a fürdőbérletet, ha nem akart 400 €-nál többet költeni ebben a szállodában? A fürdőbérlet megvásárlása esetén a szaunáért nem kellett külön fizetnie.

Szolgáltatás	Ár (€)	Igénybevétel
Szállás/nap	58,00	5
Reggeli/adag	7,50	4
Ebéd/adag	12,80	1
Vacsora/adag	9,50	4
Fürdőbérlet/5 nap	25,00	–
Szauna/alkalom	3,90	2

B18

Írj zárójeleket és műveleti jeleket a számok közé úgy, hogy az eredmény helyes legyen!

- a) 16 12 4 = 19; b) 16 12 4 = 0; c) 16 12 4 = 7;
d) 15 12 4 = 5; e) 100 25 4 = 1; f) 100 25 4 = 16

B19

Az első 5 pozitív egész szám szorzatát **öt faktoriálisnak** nevezzük.

Jelölés: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$ (= 120)

- a) Sorold fel 5! összes osztóját!
b) Hány 0-ra végződik a 10! (olvasd: tíz faktoriális)?
c) Hányszor van meg a 4!, illetve a 3! az 5!-ban?
d) Határozd meg a legkisebb n értéket úgy, hogy $n!$ osztható legyen 7-tel; 8-cal; 9-cel; 10-zel; 15-tel; 18-cal; 100-zal (az n pozitív egész szám)!

☉ *Tapasztalatszerzéshez listázd az első tíz pozitív egész szám faktoriálisát!*

Jó ha tudod, megállapodás szerint $0! = 1$.

B20

- a) Az $a = 2400$, $b = 631\,632$, $c = 757\,575$ számok közül melyik osztható 2-vel; 3-mal; 4-gyel; 5-tel; 6-tal; 8-cal; 9-cel; 15-tel; 25-tel?
b) A $10^{87} + 8$ osztható-e 2-vel; 3-mal; 4-gyel; 6-tal; 8-cal; 9-cel; 15-tel?
c) Keresd meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyik osztható 1-től 15-ig minden egész számmal!
d) Bizonyítsd a maradékok vizsgálatával, hogy a pozitív egész számok négyzeténél 1-gyel nagyobb szám nem osztható 3-mal!

☉ *Igaz-e az állítás bármely egész számra?*

B21

Határozd meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amelynek 1260-szorosa egy természetes szám harmadik hatványa!

☉ *Segíthet, ha prímtényezőkre bontod az 1260-at!*

B22

Gedeon leírja egymás után a 11-et 11-szer, majd folytatva a sort, a 12-t 12-szer és így tovább, a 15-öt 15-ször.

- a) Hány számjegyet írt le összesen Gedeon?
b) Melyik számjegy áll a 100. helyen a sorban?



Két pozitív egész számnak képeztük a szorzatát, összegét, különbségét (a nagyobb számból vonva ki a kisebbet) és hányadosát, majd ezeket összeadva 192-t kaptunk. Melyik ez a két szám?

Fejtörő!

☉ *Szlovákiai magyar versenyfeladat alapján.*

A Kékharisnya Társaság informális szociális és önképző mozgalom volt a XIX. század közepén Angliában.

B23 A Kékharisnya Társaság 120 tagja között 30 botanikus, 24 író van, a tagok 45%-a tolmács, a többiek könyvkiadónál dolgoznak.

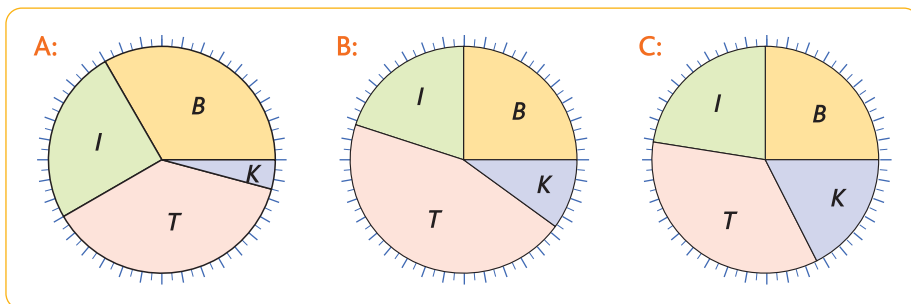
a) A tagok hány százaléka botanikus?

b) Ha találomra megszólítunk egy tagot, mi a valószínűsége, hogy író az illető?

c) Hányan dolgoznak könyvkiadónál?

d) A kördiagramok melyike szemlélteti a társaság foglalkozások szerinti megoszlását?

☉ A helyes diagram betűjelének megjelölésével válaszolja a kérdésre!



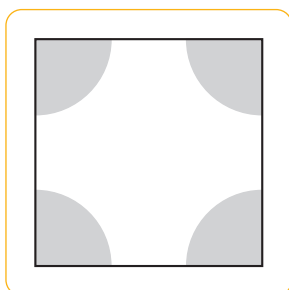
Fejtörő!

B24 Ödömér úgy sejt, hogy ha egy háromjegyű szám számjegyeit fordítva leírjuk, és az így kapott két háromjegyű szám közül a nem kisebből kivonjuk a másikat, akkor a kapott két szám különbsége biztosan osztható 9-cel.

Vajon igazolható-e tetszőleges háromjegyű számra Ödömér sejtése?

Van-e másik szám, amelyről ugyanaz állítható, mint amit Ödömér vél a 9-ről?

Figyelempróba



☉ Miben különbözik egymástól az a), a c) és a d) feladat?

B25 Színezd ki a négyzet négy csúcsánál lévő köröket!

A szemközti csúcsoknál lévő körök lehetnek azonos színűek, de a szomszédos csúcsoknál lévők nem. Négy színt használhatsz, pirosat (P), kéket (K), sárgát (S) és zöldet (Z).

a) Hányféle színezés lehetséges, ha a négyzet egy kert alaprajza, és a színes körök különböző növényekkel beültetett ágyásokat szemléltetnek?

b) Hányféle színezés lehetséges, ha a kert délkeleti sarkában lévő ágyásba fűvet kell vetnünk (a zöld szín jelképezi), míg a többi ágyásba virágokat ültethetünk, de fűvet nem?

c) Hányféle színezés lehetséges, ha az ábra egy asztal felülnézete, amelynek a négy sarkára egy-egy színes műanyaglapot ragasztottak?

d) Hányféle színezés lehetséges, ha az ábra egy ablakkeretet ábrázol, amelynek a négy sarkában lévő rekeszeibe egy-egy színes üveglapot helyeztek? Az ablakkeret olyan, hogy elforgatva, illetve átfordítva is beszerelhető az ablakba. (Tehát egy színes üveglapokkal beüvegezett ablak síkbeli elforgatottját vagy térbeli átfordítottját nem tekintjük az eredeti ablaktól különbözőnek.)

B26 Írj zárójeleket a $6 \cdot 18 + 54 : 9$ kifejezésbe úgy, hogy az eredmény

a) 144;

b) 114;

c) 48;

d) 18 legyen!

☉ Kalmár László Matematikaverseny országos döntője, 1993., 8. osztályosok versenye.



Kiválasztunk egy tetszőleges háromjegyű számot és négyzetre emeljük. Ezután a kiválasztott szám számjegyeit fordított sorrendben leírjuk, és a kapott számot emeljük négyzetre. A két négyzet közül a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket. Igaz-e, hogy az eredmény mindig osztható 99-cel?

B27

Mindegyik sorozat első hat tagját kell meghatároznunk, amelyek közül kettő már adott. Számítsd ki a hiányzó elemeket az adott szabály szerint!

A sorozatok elemei racionális számok.

- a) Az első két elem kivételével mindegyik elem a közvetlenül előtte lévő két elem számtani közepe (átlaga).

; ; 8; 12; ;

- b) Az első elem kivételével mindegyik elem a két szomszédos elem számtani közepe (átlaga).

; ; 8; 12; ;

- c) Az első elem kivételével mindegyik elem a két szomszédos elem számtani közepénél 0,5-del kevesebb.

; ; 8; 12; ;

- d) Az első két elem kivételével mindegyik elem a közvetlenül előtte lévő két elem szorzatánál 4-gyel kevesebb.

; ; 8; 12; ;

- e) Az első elem kivételével mindegyik elem a két szomszédos elem szorzatánál 4-gyel kevesebb.

; ; 8; 12; ;

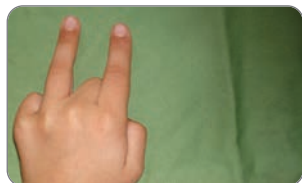
A SZÁMRENDSZEREKRŐL TANULTAK KIEGÉSZÍTÉSE

Elevenítsük fel a nem tízes alapú számrendszerekről korábban tanultakat.

1. példa

Eszter a két kezének ujjai segítségével bármely 1024-nél kisebb természetes számot fel tud mutatni. Például a képen látható a szám 10-et, a b 100-at jelent. Mi lehet Eszter titka? Vajon mivel lehet egyenlő a felmutatott c szám?

a :



b :



c :



Eszter az ujjainak rendre megfeleltette a kettes számrendszer **helyiértékeit**, azaz **2 nemnegatív egész kitevőjű hatványait**, így a számokat kettes számrendszerben mutatta fel:

$$a = 1010_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10;$$

$$b = 1\ 100\ 100_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 100;$$

$$c = 1\ 111\ 101\ 000_2 = 1000. \text{ Önálló számítással igazoljátok az eredményt!}$$

© A kettes számrendszert először Leibniz írta le 1703-ban megjelent könyvében.

© Neumann János magyar származású matematikus (1903–1957). Kiemelkedő szerepet játszott a számítógépek logikai tervezésében, az ún. Neumann-elvek (a kettes számrendszer alkalmazása, memória, programtárolás, utasításrendszer) kidolgozásában.

© A 27. oldalon hasonló módon értelmeztük a 10 negatív egész kitevőjű hatványait.

© Mely számjegyek fordulhatnak elő az ötös számrendszerben?

© Emlékszel? A babiloni tudósok 60-as számrendszerben számoltak. Ismerték a vesszős törtek fogalmát (bár a vesszőt nem használták). Sorold fel a hatvanas számrendszer néhány egynél kisebb helyiértékét!

Megállapodás szerint (például) a kettes számrendszerben az egyesnél kisebb helyiértékeket is felírhatjuk **2 egész kitevőjű hatványai** segítségével:

$$2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1; \quad 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \quad 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3; \quad 2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad 2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Következésképpen a tizedestörtek mintájára bármely számrendszerben értelmezhetjük a **vesszős törtek** fogalmát.

2. példa

Írjuk fel az a és b szám tízes számrendszerbeli alakját:

$$a = 101,011_{(2)}; \quad b = 304,204_{(5)}$$

$$\begin{aligned} a = 101,011_{(2)} &= 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \\ &= 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \\ &= 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 5 + \frac{3}{8} = 5,375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = 304,204_{(5)} &= 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^{-1} + 0 \cdot 5^{-2} + 4 \cdot 5^{-3} = \\ &= 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 + 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \\ &= 75 + 4 + \frac{2}{5} + \frac{4}{125} = 79 + \frac{54}{125} = 79,432 \end{aligned}$$

Értelmezés

Egy 0-tól különböző szám negatív egész kitevőjű hatványa a szám reciprokának az ugyanolyan abszolútértékű pozitív egész kitevőjű hatványa, vagy a szám ugyanolyan abszolútértékű pozitív egész kitevőjű hatványának a reciproka.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

$a \neq 0$, n pozitív egész szám

FELADATOK

B28

Írd fel pozitív egész kitevőjű hatványkitevő segítségével a következő hatványokat, majd számítsd ki a hatványok értékét!

$$10^{-4}; \quad 2^{-5}; \quad 5^{-2}; \quad 4^{-1}; \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}; \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{-3}; \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

B29

Határozzátok meg kétféleképpen a kifejezések értékét! Fogalmazzatok meg a tapasztaltakat!

$$10^{-4} \cdot 10^5; \quad 5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^2; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}; \quad [(10)^{-3}]^{-2}$$

B30

Írjuk fel a következő számok tízes számrendszerbeli alakját:

$$a = 1100, 101_{(2)}; \quad b = 2432, 102_{(5)}; \quad c = 3021, 012_{(4)}$$

© Például:

$$2^4 \cdot 2^{-5} = 2^{4+(-5)} = 2^{-1} = \dots$$

$$2^4 \cdot 2^{-5} = 2^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \dots$$

TUDÁSPRÓBA

122

1 Határozd meg az adott számok négyzetét, illetve négyzetgyökét!

a) $3,5^2 =$

b) $350^2 =$

c) $0,035^2 =$

d) $\sqrt{2,250} \approx$

e) $\sqrt{22,50} \approx$

f) $\sqrt{2250} \approx$

2 Végezd el a következő átváltásokat!

a) $1,5 \text{ l} =$ $\text{dl} =$ $\text{hl} =$ $\text{dm}^3 =$ cm^3

b) $0,015 \text{ m} =$ $\text{mm} =$ $\text{dm} =$ cm

A következő átváltásoknál használd a számok normálalakját!

c) $1,5 \cdot 10^5 \text{ m} =$ $\text{m} =$ $\cdot 10^{\text{$ $\text{cm} =$ $\text{km} =$ $\cdot 10^{\text{$ km

d) $1,5 \text{ kg} =$ $\text{dkg} = 1,5 \cdot 10^{\text{$ $\text{dkg (dag)} =$ $\cdot 10^{\text{$ $\text{g} =$ t

3 a) Év végén a hetedik osztályos tanulók 20%-a, 12 tanuló kapott jelest matematikából, míg 35%-uk jót. Hányan kaptak jót matematikából?

b) Egy asztalos 2400 €-ért adott el egy szekrénysort. A felhasznált anyag 660 €-ba került. Hány százaléka az anyagköltség a szekrénysor árának?

4 Egy nyolcadik osztályban az A és a B csoportban is 10 tanuló írt dolgozatot. Az elért pontszámokat növekvő sorrendben a következő táblázat tartalmazza:

A csoport pontszámai	0	15	15	17	24	25	25	27	28	28
B csoport pontszámai	12	17	17	19	20	22	23	24	24	27

a) Mennyi volt az A csoport tagjainak átlagos pontszáma? Hány százalékos teljesítményt jelentett ez, ha maximálisan 30 pontot lehetett kapni a dolgozatra?

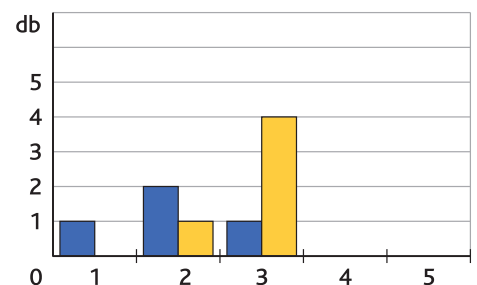
b) A tanár a következő értékelési norma szerint osztályozta a dolgozatokat:

Elégtelen	Elégséges	Közepes	Jó	Jeles
0–10	11–15	16–20	21–25	26–30

Szemléltessük a két csoport dolgozatjegyeinek megoszlását közös oszlopdiagramon. Fejezd be a diagram megrajzolását!

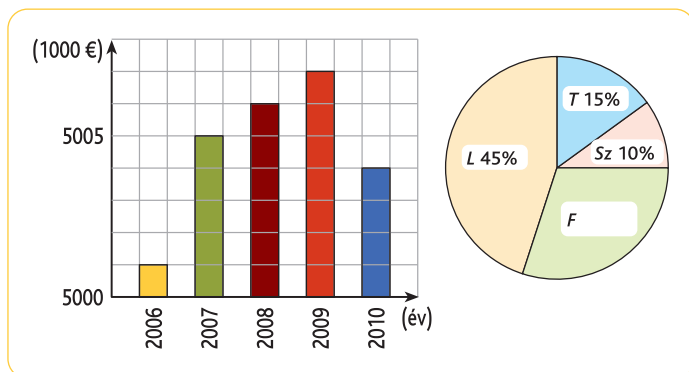
c) Kálmán szerint egyforma teljesítményt nyújtott a két csoport, Lilla szerint az A csoport, Malvin szerint a B csoport volt jobb.

Mivel érvelhettek a különböző eredményekre jutó tanulók?



- 5 Számítsd ki (számológéppel) a műveletsorok eredményét!
- $$u = 5,75 \cdot 12,64 - 560 : 0,8; \quad v = (2,55 - 1,05)(12 + 2 : 0,16)$$

- 6 Az oszlopdiagramról leolvasható, hogy öt év alatt hogyan változott egy vállalkozó bevétele 1000 €-ra kerekített értékekben megadva.



A kördiagram azt szemlélteti, hogy 2010-ben a vállalkozó egy-egy tevékenységi köre (L, T, Sz, F jelöli) mekkora hányadát adta az összbevételnek.

- a) Melyik évben volt a vállalkozó bevétele 5 005 000 €?

A: 2006-ben; B: 2007-ben;
C: 2008-ban; D: 2009-ben.

- b) Károly szerint 2010-ben lényegesen kevesebb volt a vállalkozó jövedelme, mint az előző évben. Egyetért-e ezzel a megállapítással vagy sem? Indokold a választ!

- c) Mit szemléltet jól a fenti oszlopdiagram az alábbiak közül?

- 1 Az egyes években elért bevételek mértékét.
2 Az egyes években elért bevételek egymáshoz való viszonyát.

A: Csak az 1-et. B: Csak a 2-t. C: Mindkettőt. D: Egyiket sem.

- d) 2010-ben hány euró volt (ezresre kerekítve) a lakásfelújításokból származó bevétele? A kördiagramon F jelöli.

A: 5 400 000 €; B: 1 668 000 €; C: 1 500 000 €; D: 1 501 000 €

☉ A kérdésekre a helyes válasz megjelölésével válaszolj!

☉ Indokold a választ!

- 7 Lotte eurót akar átváltani USA-dollárra, mert olyan országba utazik, ahol a dollárt elfogadják fizetőeszközként.

- a) Hány eurót kell fizetnie 5800 \$-ért, ha az átváltási arány: 1 EUR = 1,45 USD?

- b) Abban az országban, ahová utazik, az átváltási arány: 1 USD = 0,75 EUR.

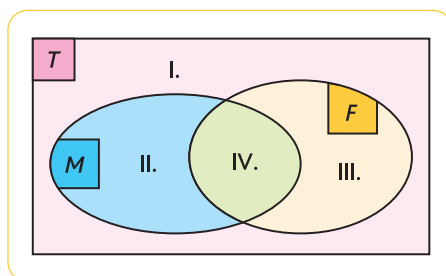
Melyik országban célszerű az átváltást lebonyolítani?

- 8 Egy tanároknak tartott konferencián 125 tanár vesz részt. Köztük 45 matematikatanár és 35 fizikatanár, akik közül 20 matematika-fizika szakos.

Írd be a halmazábrába, hogy a római számírással jelzett részhalmazokba a résztvevő tanárok hány százaléka tartozik!

Ha egy idegen találomra megszólít egy résztvevőt, akkor mi a valószínűsége annak, hogy

- a) matematikatanárt szólít meg;
b) olyan matematikatanárt szólít meg, aki nem fizika szakos;
c) matematika- vagy fizikatanárt szólít meg?



Többet ésszel ...

☉ Szlovákiai magyar versenyfeladat alapján.



Egy tepszi sült tésztát a széleivel párhuzamos vágásokkal 60 azonos méretű szeletre darabolunk. Hány vágással tehetjük ezt meg, ha mindkét irányban legalább két vágást teszünk? Legkevesebb hány vágással oldható meg a feladat?

2. TESTEK, FELÜLETEK, SÍKIDOMOK

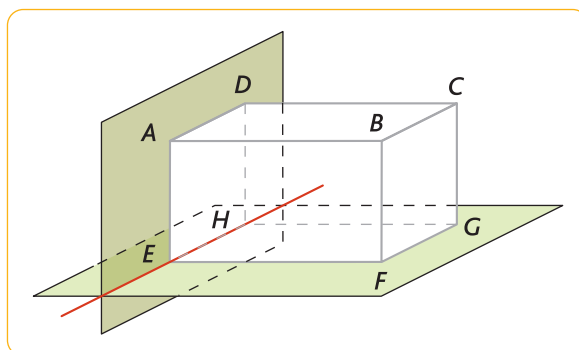
Ebben a fejezetben is – mielőtt továbblépünk – alaposan átismétljük a korábban tanultakat.

TÉRELEMEK

TÉRELEMEK KÖLCÖNÖS HELYZETE, TÁVOLSÁGA

FELADATOK

- 1 a) Mely élegyenesekre, illetve lapsíkokra illeszkedik az A csúcs?
 b) Mekkora távolságra van az A csúcs az
 ① EF egyenestől; ② FG egyenestől; ③ EC egyenestől?
 c) Mutasd meg, mekkora távolságra van a B csúcs az
 ① $EFGH$ síktól; ② $EHDA$ síktól; ③ $EGCA$ síktól!
 d) Hányféle legrövidebb út vezet az A pontból a G pontba az élek mentén?
 e) Rajzold meg az A csúcsból a G csúcsba vezető legrövidebb utat a téglatest felületén!
- 2 a) Melyik lapsíkra illeszkedik az AB élegyenes? Melyiket metszi?
 b) Hány olyan éle van a téglatestnek, amely
 ① merőlegesen metszi az AE élegyenest;
 ② párhuzamos az AE élegyenessel;
 ③ nem metszi az AE élegyenest, és nem is párhuzamos azzal?
 c) Mekkora távolságra van az AB élegyenes a
 ① DC egyenestől; ② HG egyenestől; ③ FG egyenestől?
 d) Mekkora távolságra van az AB élegyenes az
 ① $EFGH$ síktól; ② $EFCD$ síktól; ③ $EHCB$ síktól?
- 3 a) Keress négy olyan csúcsot, amelyik nem egy síkra illeszkedik!
 b) Sorold fel azokat a lapsíkokat, amelyek
 ① merőlegesen metszik az $ABCD$ lapsíkot; ② párhuzamosak az $ABCD$ síkkal;
 ③ nem metszik az $ABCD$ lapsíkot, és nem is párhuzamosak azzal!
 c) Sorold fel azokat az élegyeneseket, amelyek
 ① párhuzamosak az $ABCD$ lapsíkkal; ② merőlegesek az $ABCD$ lapsíkra;
 ③ nem metszik az $ABCD$ lapsíkot, és nem is párhuzamosak azzal!



A téglatest 12 éle egy-egy egyenes része. Ezeket az egyeneseket (és az éleket is) a téglatest két csúcsához írt betűkkel nevezzük el (EH egyenes, EH él). A téglatest hat lapja egy-egy sík része. Ezeket a síkokat (és a téglatest lapjait is) szintén a csúcsokhoz írt betűkkel nevezhetjük el ($EFGH$ sík, $EFGH$ lap). Az $EFGH$ sík e négy betű közül bármelyik hárommal elnevezhető, mert három csúcspont egyértelműen meghatározza a síkot. (A háromlábú szék nem inog!)

☉ A fenti ábra alapján dolgozz!

☉ Az 1. feladat ábrája alapján dolgozz!

☉ Párhuzamos egy egyenes a síkkal akkor is, ha illeszkedik a síkra.

☉ **Rajzolj! Készülj fel egy-egy részfeladat bemutatására és a megoldás indoklására!**

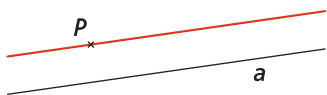
☉ **Rajzolj ilyen eseteket!**

- 4 a) Milyen részekre osztja az egyenest | egy, | kettő, | három, | ... | pontja?
- b) Hány és milyen részre oszthatja a síkot a rá illeszkedő
| 1 egyenes; | 2 egyenes; | 3 egyenes; |
c) Hány és milyen részekre oszthatja a teret | 1 sík; | 2 sík; | 3 sík; | 4 sík; |
d) Legkevesebb hány ponttal lehet az egyenes egy véges darabját megadni?
Legkevesebb hány egyenessel lehet a sík egy véges darabját körülhatárolni?
Legkevesebb hány síkkal lehet a tér egy véges darabját körülhatárolni?
- e) Hány egyenest határoz meg a síkban | 3 pont; | 4 pont; | 5 pont; | 6 pont; | ... | n pont,
ha semelyik három nincs egy egyenesen?
- f) Egy síkban fekvő | 2; | 3; | 4 | pont által meghatározott egyenesek hány
részre oszthatják a síkot?
- g) Hány síkot határozhat meg | 1; | 2; | 3; | 4 pont?

A geometriai alapfogalmak és **axiómák** választásától függően különböző geometriai elméleteket építettek föl, amelyek alkalmazhatók más (nem matematikai) területeken is.

Az első axiómarendszert **Eukleidesz** ókori görög matematikus dolgozta ki. Mi az ő rendszere alapján felépített **euklideszi geometriával** foglalkozunk. Ennek a geometriának egyik alaptétele, axiómája:

Egy a egyenessel a rajta kívül fekvő P ponton át pontosan egy párhuzamos egyenes húzható a síkban.



Ha azt fogadjuk el, hogy az a egyenessel a P ponton át több párhuzamos egyenes is húzható a síkban, vagy egy párhuzamos egyenes sem húzható, akkor különböző **nemeuklideszi geometriákhoz** jutunk.

Az első nemeuklideszi geometriát **Bolyai János** (1802–1860) alkotta meg (szinte egy időben az orosz **Lobacsevszkij**).

Emlékeztető

Az új fogalmakat általában ismert fogalmak segítségével értelmezzük, (idegen szóval) **definiáljuk**. A fogalmak közti összefüggéseket **tételekben** fogalmazzuk meg. A tételeket általában már ismert tételek segítségével bizonyítjuk. Az általános iskolában nem minden fogalmat definiálunk, és a tételek egy részét sem bizonyítjuk be. Többségüket későbbi tanulmányaitok során értelmezhetitek, illetve bizonyíthatjátok.

Vannak azonban olyan **alapfogalmak**, amelyeket a felsőbb matematikában sem definiálnak, mert nem vezethetők vissza egyszerűbb fogalmakra.

A geometriában alapfogalomnak tekintjük: a pont, a vonal, az egyenes, a felület, a sík és a tér fogalmát.

A következő fogalmakat az alapfogalmak (és már értelmezett fogalmak) segítségével definiáljuk:

Két egyenes metszi egymást, ha pontosan egy közös pontjuk, metszéspontjuk van.

Két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak, és nem metszik egymást (nincs közös pontjuk, vagy legalább két közös pontjuk van). Minden egyenes párhuzamos önmagával.

Két egyenes kitérő, ha nincsenek egy síkban.

Két sík metszi egymást, ha pontosan egy közös egyenesük, metszésvonaluk van.

Két sík párhuzamos, ha nem metszik egymást (nincs közös egyenesük; vagy legalább két közös egyenesük van, tehát illeszkednek egymásra). Minden sík párhuzamos önmagával.

Egy egyenes metszi (döfi) **a síkot**, ha egy közös pontjuk van.

Egy egyenes párhuzamos a síkkal, ha nincs közös pontjuk, vagy illeszkedik a síkra (az egyenes minden pontja a síknak is pontja).

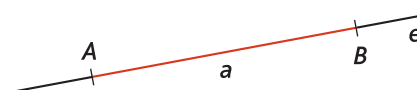
Néhány alaptételt eleve igaznak fogadnak el, ezeket nem kell bizonyítani. Az alaptételek, illetve a már bizonyított tételek segítségével a többi állítás bizonyítható vagy cáfolható. Az alaptételeket **axiómáknak** nevezik.

Egy egyenest egy P pontja két **félegyenesre** bontja. Ha nem mondunk mást, akkor a P pont mindkét félegyeneshez hozzátartozik.

Egy síkot egy e egyenese két **félsíkra** bontja. Ha nem mondunk mást, akkor az e egyenes mindkét félsíkhöz hozzátartozik.

A teret egy S síkja két **féltérre** bontja. Ha nem mondunk mást, akkor az S sík mindkét féltérhez hozzátartozik.

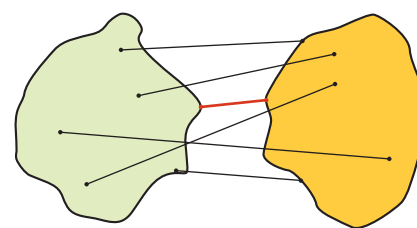
Egy egyenest az A és a B pontja egy **szakaszra** és két félegyenesre bontja. A szakaszt jelölhetjük két végpontjával (AB -vel) vagy egy kisbetűvel (a -val). Ha nem mondunk mást, akkor a szakasz végpontjai a szakaszhoz tartoznak.



☉ Itt a zárt félegyenest, félsíkot stb. értelmeltük. Ha elhagyjuk ezeknek az alakzatoknak a határpontjait, határoló vonalát stb., akkor nyílt félegyenesről, félsíkról stb. beszélünk.

Az A és a B pont távolsága az egyenesen, a síkban és a térben az AB szakasz hossza. Az AB távolság jele: d_{AB} . (Ha nem érthető félre, akkor a szakasz jele egyúttal a szakasz hosszát is jelölheti.)

Két alakzat távolsága az egyik alakzat pontjait a másik alakzat pontjaival összekötő szakaszok közül a legrövidebbnek a hossza.



Az ábrán a két határvonal egy-egy pontját összekötve kapjuk meg a két ponthalmaz távolságát. Ha elhagyjuk a határvonalakat, akkor a két ponthalmaz pontjai között nem húzható legrövidebb szakasz. Ezért a matematikusok pontosabban fogalmazzák meg a fenti definíciót.

Gyakorló
6.01–6.02.

➤ SZÖGEK ÉRTELMEZÉSE SÍKBAN ÉS TÉRBE

FELADATOK

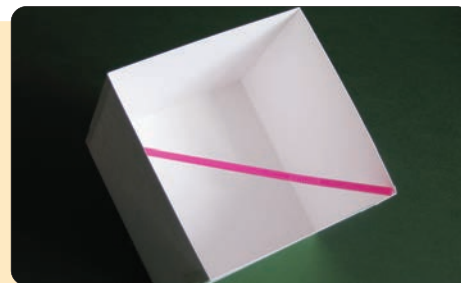
5

a) Készíts felül nyitott kockamodellt! Rajzold meg a kocka egy lapátlóját! Mekkora szöget zár be ez a lapátló

- 1 az éllel; 2 a lapokkal; 3 a lapátlókkal?

b) Szívószállal modellezd a kocka egy testátlóját! Mekkora szöget zár be ez a testátló

- 1 az éllel; 2 a lapokkal; 3 a lapátlókkal?



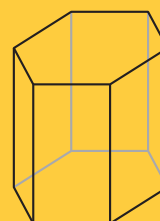
a) Hány testátlója van a kockának?

b) Hány testátlója van a hatszög alapú hasábnak?



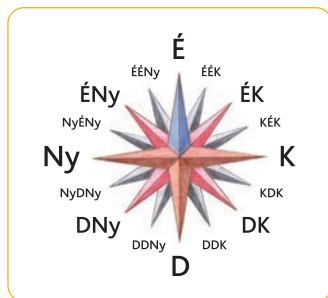
Van-e olyan síklapokkal határolt test, amelynek

- a) nincs testátlója; b) egy testátlója van; c) két testátlója van;
d) három testátlója van; e) négy testátlója van?



☉ *Hasonlítsd össze a szö-
get a derékszöggel, az
egyenesszöggel.*

Gyakorló
6.03–6.10.



- 6 a) Rajzolj minden tanult **szögfajtából** egyet, és jellemezd ezeket a szokásos **fok** mértékegység nélkül!
- b) Mérd meg az a) feladatban megrajzolt szögek nagyságát!
- c) Szerkessz 30° -os; 75° -os; 135° -os; $157^\circ 30'$ -es szöget!
- d) Fejezd ki egyenesszögben (jelölje π) a következő szögeket!
 $\alpha = 90^\circ$; $\beta = 450^\circ$; $\gamma = 120^\circ$; $\delta = 240^\circ$; $\varepsilon = 315^\circ$
- e) Hogyan értelmezzük a következő forgásszögeket?
 $\alpha = 361^\circ$; $\beta = 7200^\circ$; $\gamma = -450^\circ$; $\delta = 0^\circ$

- 7 Melyik irányba fogok nézni, ha
- a) északi irányból jobbra elfordulok 135° -kal;
- b) északi irányból balra elfordulok 225° -kal;
- c) északkeleti irányból jobbra elfordulok $67,5^\circ$ -kal;
- d) déli irányból balra elfordulok $112,5^\circ$ -kal;
- e) keleti irányból balra elfordulok $7 \cdot \frac{\pi}{8}$ nagyságú szöggel?

Emlékeztető

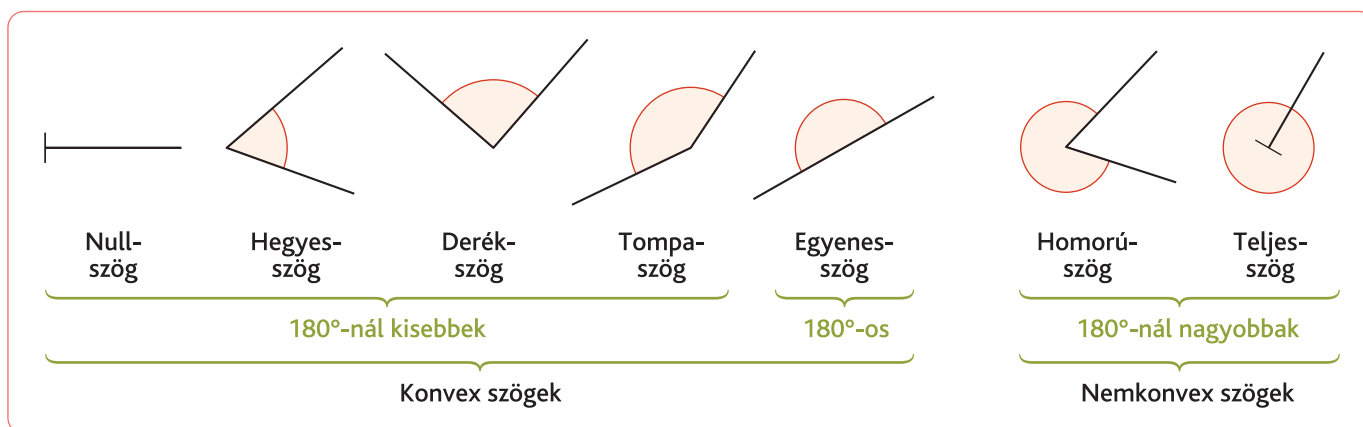
Egy adott pontból kiinduló két félegyenes **szöget** (szögvonalat) alkot. Az adott pontot a szög csúcsának, a félegyeneseket a szög **szárainak** nevezzük.

A szög szárai a síkot két **szögtartományra** bontják. A két szögszár mindkét szögtartományhoz hozzátartozik.

A szögmérés (egyik) egysége az 1° . Ha az egyenesszöget π -vel jelöljük, akkor:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \quad 1^\circ = 60' \text{ (szögperc); } 1' = 60'' \text{ (szögmásodperc)}$$

A SZÖGEK FAJTÁI

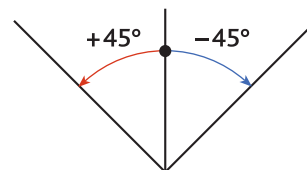


AZ ELFORDULÁS JELLEMZÉSE IRÁNYÍTOTT SZÖGGEL

Egy mutatót a kezdőhelyzetből kétféle irányban fordíthatunk el.

Az óramutató járásával ellentétes elfordulás megállapodás szerint pozitív, az óramutató járásával megegyező elfordulás negatív.

Az elfordulás mértéke tetszőleges lehet.



SZÖGPÁROK

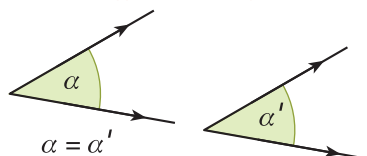
Párhuzamos szárú szögek

Egyállású szögeknek nevezünk két konvex, illetve két konkáv szöget, ha szárai páronként párhuzamosak és megegyező irányúak. Az egyállású szögek egyenlők.

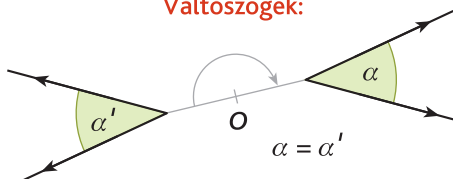
Váltószögeknek nevezünk két konvex, illetve konkáv szöget, ha szárai páronként párhuzamosak, de ellentétes irányúak. A csúcsszögek olyan váltószögek, amelyeknek közös a csúcuk. A váltószögek egyenlők.

☉ Szemléltessétek a szögfajtákat, illetve a szögpaárokat például számítógép alkalmazásával!

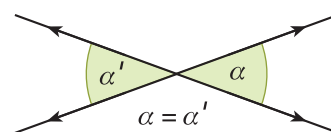
Egyállású szögek:



Váltószögek:



Csúcsszögek:



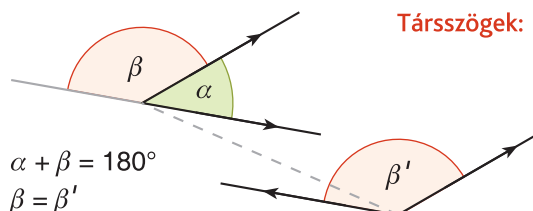
Társszögeknek nevezünk két konvex szöget, ha szárai párhuzamosak, egy-egy száruk iránya megegyezik, egy-egy száruk iránya ellentétes.

A társszögek 180° -ra egészítik ki egymást, ezért **kiegészítő szögek**.

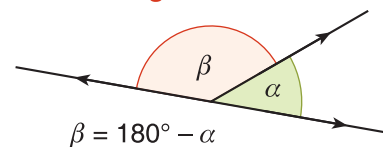
A mellékszögek olyan társszögek, amelyeknek közös a csúcuk.

☉ A társszögek is párhuzamos szárú szögek.

Társszögek:



Mellékszögek:



Meghúztuk a szabályos ötszög összes átlóját.

Hány háromszöget látsz az ábrán?

Ezek közül hány

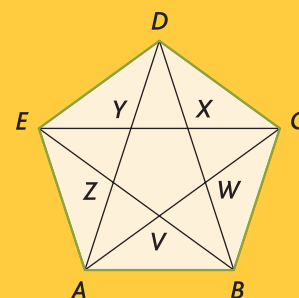
a) derékszögű, b) hegyesszögű; c) tompaszögű?



Egy szög társszögének a harmada egyenlő a váltószögének a felével.

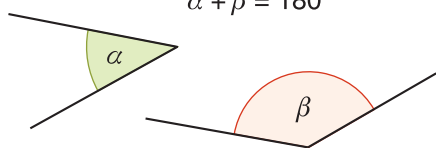
Hány fokal a szög?

☉ Rajzolj vázlatot!



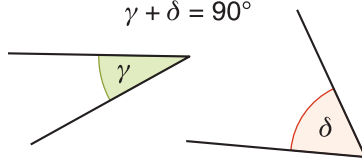
Kiegészítő szögek:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



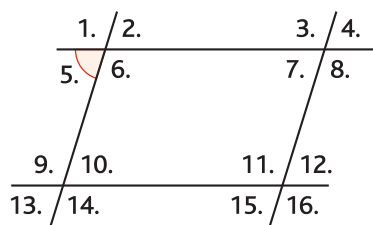
Pótszögek:

$$\gamma + \delta = 90^\circ$$



Kiegészítő szögeknek nevezzük az egymást 180° -ra kiegészítő szögeket.

Pótszögeknek nevezzük az egymást 90° -ra kipótoló szögeket.

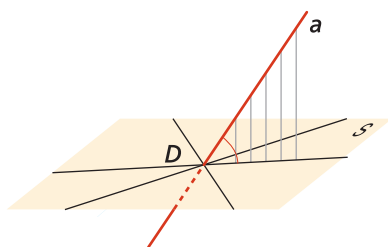
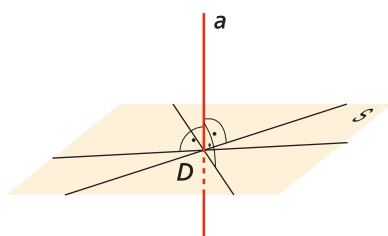


FELADATOK

- 109** a) Szerkessz : 30° -os; : 45° -os; : 75° -os; : 120° -os szöget!
b) Sorold föl az ábrán színesen jelölt szög
1 egyállású szögeit; 2 társszögeit; 3 váltószögeit!

Gyakorló
6.11–6.12.

EGYENES ÉS SÍK HAJLÁSSZÖGE



Az a egyenes a D pontban dőli az S síkot. A D ponton keresztül végtelen sok egyenes húzható a síkban. Ezek különböző nagyságú szögeket zárhatnak be az a egyenessel.

Ha az így keletkezett szögek

- 1 mindegyike derékszög, akkor **az egyenes merőleges az S síkra**, az egyenes és a sík hajlásszöge derékszög;
- 2 nem mind egyenlők, akkor a legkisebbet tekintjük az **egyes és a sík hajlásszögének**. Ezt a szöget az a egyenes és az a egyenesnek az S síkra eső **merőleges vetülete** zárja be.

Az értelmezés szerint az egyenes és a sík hajlásszöge nem lehet derékszögnél nagyobb.

Fejtörő!

☉ Ha inog az asztal!

☉ Hány pont határoz meg egy-egy síkot?



Ha négy pont nem fekszik egy síkon, akkor hány síkot határoz meg?



Ha öt pont közül bármelyik négy nem fekszik egy síkon, akkor hány síkot határoz meg?

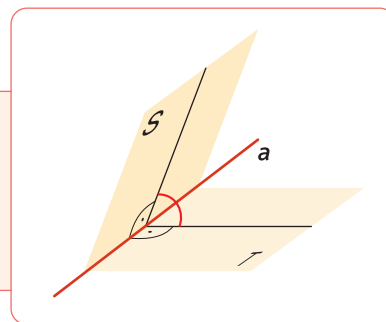


Hány pont (amelyek közül semelyik négy nem fekszik egy síkon) határoz meg 35 különböző síkot?

LAPSZÖGEK

Egy egyenesből kiinduló két félsík **lapszöget** alkot. Az adott egyenest a **lapszög élének**, a félsíkokat a **lapszög lapjainak** nevezzük. A lapszög lapjai a teret két **lapszögtartományra** bontják.

A két lap mindkét lapszögtartományhoz hozzá tartozik.



FELADAT

- 9 Attila meg akarta határozni, hogy a Nap sugarai a kertjükben mekkora szögben érik el a Földet.

Függőlegesen felállított egy méterrudat, és azt tapasztalta, hogy a rúd árnyéka északkelet felé mutat, és körülbelül 173 cm hosszú.

- a) Mely napszakban végezhetette Attila a mérést?

A: Reggel; B: délelőtt; C: délben; D: délután.

- b) Körülbelül mekkora szöget zártak be a Nap sugarai a kert vízszintes síkjával?

A: 20° -os; B: 30° -os; C: 45° -os; D: 60° -os



ADOTT TULAJDONSÁGÚ PONTHALMAZOK

A **ponthalmazok** vizsgálatánál két állítást kell belátnunk:

- 1 Az alakzat minden pontja rendelkezik az adott tulajdonsággal.
- 2 Ha egy pont rendelkezik az adott tulajdonsággal, akkor illeszkedik az alakzatra.

FELADATOK

- 10 Végez fel egy P pontot! Add meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyeknek a P ponttól való távolsága

- 1 3 cm-nél nem nagyobb; 2 3 cm; 3 3 cm-nél nem kisebb

- a) a P síkjában; b) a térben; c) a P -től 2 cm távolságra lévő síkban!

Kísérletezz!

© *Dolgozzatok párban! Készüljete fel a megoldások bemutatására, indoklására is!*



- a) Határozzátok meg, hogy nálatok (a mérés pillanatában) mekkora szögben érik a Földet a Nap sugarai!

- b) Készítsetek felül nyitott téglatest modellt! Fektessetek megfelelő méretre vágott lapot két szemben fekvő élére. Határozzátok meg ennek a lapnak és a téglalap lapjainak a szögét!

☉ *Ügyelj a szokásos jelölésre!*

☉ *Minden megoldást megáláltál?*

Kísérletezz!

☉ *Szívószállal szemléltethetitek az egyenest. Dolgozzatok párban! Készüljete fel a megoldások bemutatására, indoklására is!*

☉ *Készítsetek összegzést a 10., 13. és 14. feladat tapasztalatairól!*

☉ *Emlékszel a tengelyes tükrözés, illetve a középpontos tükrözés tapasztalataira?*

11 a) Szerkessz háromszöget, ha az $a = 4$ cm; $b = 5$ cm és $\alpha = 45^\circ$!

b) Az adott tulajdonságú pontthalmazokról tanultakkal igazold a szerkesztés helyességét!

12 Egy csapatszallító hajó egyenes útvonalon halad. A hajó útvonalától 200 m távolságra cirkálók haladnak. Szerkeszd meg a cirkálók útvonalát kicsinyítve!

13 Végy fel egy e egyenest! Határozd meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek az e egyenestől

- 1 3 cm-nél nem nagyobb; 2 3 cm; 3 3 cm-nél nem kisebb ávolságra vannak
a) az e síkjában; b) a térben; c) az e -re merőleges síkban;
d) az e -vel 30° -os szöget bezáró síkban!

14 a) Végy fel a síkon egy P pontot! Határozd meg azoknak az egyeneseknek a halmazát, amelyek a P síkjában a P ponttól 3 cm távolságra vannak!

b) Végy fel a térben egy P pontot! Határozd meg azoknak a síkoknak a halmazát, amelyek a ponttól 3 cm távolságra vannak!

15 a) Áttetsző papírra rajzolj piros (P) és kék (K) színnel két pontot, majd rajzold meg a PK szakaszt! Hajtsd össze a papírlapot úgy, hogy a két pont fedje egymást! Fogalmazd meg igaz állításokat a hajtással kapcsolatosan!

b) Hajtogatással szemléltesd, hogy a hajtás bármely pontja ugyanolyan távolságra van a P ponttól, mint a K ponttól!

c) Színezd ki a síkon azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek a K ponthoz közelebb vannak, mint a P ponthoz!

16 Rajzolj egy 4 cm hosszúságú szakaszt, végpontjait jelölje P és Q !

Szerkessz a PQ szakasz végpontjain áthaladó kört, amelynek sugara

- a) 2 cm; b) 4 cm; c) 3 cm; d) 1 cm; e) 5 cm!

Igazold szerkesztéseid helyességét! Határozd meg a PQ szakasz végpontjain áthaladó körök középpontjának halmazát!



a) Színezd pirosra a négyszögvonaltól 5 mm távolságra lévő pontokat!

b) Színezd zöldre a négyszögvonaltól 5 mm-nél kisebb távolságra lévő pontokat!

c) Színezd kékre a négyszögvonaltól 5 mm-nél nagyobb távolságra lévő pontokat!



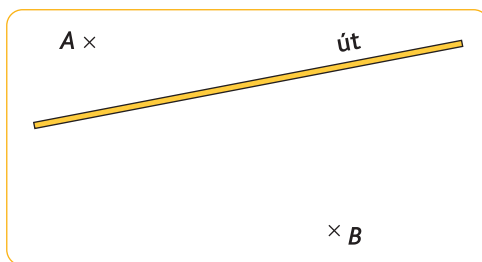
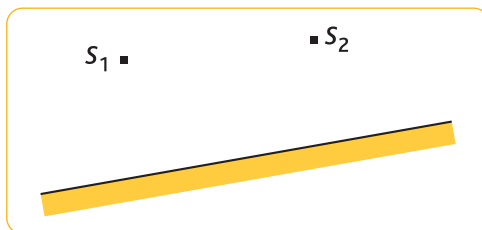
17

- a) Egy távirányítással működő hajómodellt két szigetről vezérelnek úgy, hogy a hajómodell mindig egyenlő távolságra van a két szigettől. Szerkeszd meg a hajómodell útvonalát!

A partvonal mely pontjából indulhatott a hajómodell, ha az induláskor is egyenlő távolságra volt a két szigettől?

- b) Egy bemérőkocsi mozog az úton. Radarral megállapítják, hogy egyenlő távolságra van az A és a B terepponttól.

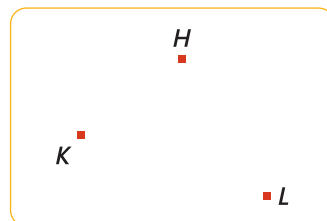
Határozd meg a bemérőkocsi pillanatnyi helyzetét az úton!



18

- Három város, H , K és L közös adóállomás felállítását tervezi úgy, hogy az adóállomás azonos távolságra legyen a három várostól.

Határozd meg az adóállomás helyét!



19

- a) Áttetsző papírra rajzolj piros (p) és kék (k) színnel párhuzamos egyenes-párt! Hajtsd össze a papírlapot úgy, hogy a két egyenes fedje egymást! Fogalmazd meg igaz állításokat a hajtással kapcsolatosan!

- b) Hajtogatással szemléltesd, hogy a hajtásél bármely pontja ugyanolyan távolságra van a p egyenestől, mint a k egyenestől!

- c) Színezd ki a síkon azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek közelebb vannak a p egyeneshez, mint a k egyeneshez!

Kísérletezz!

20

- a) Derékszögű koordináta-rendszerben ábrázold az $x \mapsto 2x$ függvény grafikonját!

- b) A kapott egyenest tükrözd az y tengelyre! A tükörkép mely függvénynek a grafikonja?

- c) A kapott egyenest tükrözd az x tengelyre!

- d) Fogalmazd meg igaz állításokat az y tengely, illetve az x tengely, az eredeti egyenes, valamint a tükörképek helyzetével kapcsolatban!

© Fogalmazd meg észrevételed!

21

- a) Egy 30 m széles egyenes csatornában úgy halad egy csónak, hogy mindig egyenlő távolságra van a két parttól.

Szerkeszd meg a csónak útvonalát 1 : 1000 arányban kicsinyítve!

(Ami a rajzon 1 mm, az a valóságban 1 m.)

- b) Végezd fel a síkon két egymással párhuzamos egyenest! Szerkessz köröket úgy, hogy mindkét egyenest érintsék!



© Dolgozzatok párban!
Vitassátok meg a tapasztaltakat!

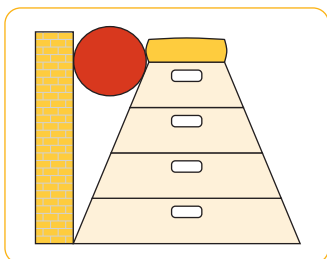
© Az adatok alapján elkészített vázlat értelmezése után már könnyebben meg tudjátok tervezni a szerkesztés menetét. Készüljétek fel a megoldás bemutatására és indoklására!

© Mi a különbség a g) és a h) feladat megoldása között?

Kísérletezz!

Gyakorló
6.21–6.30.;
Feladatgyűjtemény
4.1.08–14.

© Indokold a megoldásodat!
Fogalmazd meg a tapasztaltakat!



- 22 a) Rajzolj egy egyenest, és jelöld ki rajta egy pontot! Add meg az egyenest a kijelölt pontban érintő körök középpontjának halmazát!
- b) Rajzolj egy 4,5 cm sugarú és egy 3 cm sugarú, egymást érintő kört! Hány megoldás van?
- c) Rajzolj egy kört, és jelöld ki rajta egy pontot! Add meg azon körök középpontjának halmazát, amelyek a rajzolt kört a kijelölt pontban érintik!
- d) Két egymást érintő kör középpontja 5 cm távolságra van. Az egyik sugara 3,5 cm, mekkora a másik kör sugara? Szerkeszd meg a két kört!
- e) Rajzolj két egymást érintő, 3 cm sugarú kört! Add meg a mindkét kört érintő körök középpontjának halmazát!
- f) Rajzolj két egymást érintő, 3 cm sugarú kört! Szerkessz 1 cm sugarú, mindkét kört érintő kört!
- g) Rajzolj egy 4 cm sugarú kört, és jelöld ki a középpontjától 6 cm távolságra egy P pontot! Szerkessz 3 cm sugárral kört, amely átmegy a P ponton, és érinti a 4 cm sugarú kört!
- h) Rajzolj egy 4 cm sugarú kört, és jelöld ki a körvonalától 2 cm távolságra egy P pontot! Szerkessz 3 cm sugárral kört, amely átmegy a P ponton, és érinti a 4 cm sugarú kört!

- 23 a) Áttetsző papírra rajzolj piros (p) és kék (k) színnel két egymást metsző egyenest! Hajtsd össze a papírlapot úgy, hogy a két egyenes fedje egymást! Hány megoldást találtál? Fogalmazd meg igaz állításokat a hajtásélekkel kapcsolatosan!
- b) Hajtogatással szemléltesd, hogy a hajtásélek bármely pontja ugyanolyan távolságra van a p egyenestől, mint a k egyenestől!
- c) Színezd ki a síkon azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek a k egyeneshez közelebb vannak, mint a p egyeneshez!

- 24 a) Szerkessz 30° -os; 45° -os; 75° -os; $37,5^\circ$ -os szöget!
- b) Végezd föl a síkon két egymást metsző egyenest! Szerkessz köröket úgy, hogy mindkét egyenest érintsék!
- c) Szerkeszd meg két metsző egyenes síkján a keletkezett szögek szögfelezőit, majd a mindkét egyenest érintő, 2 cm sugarú köröket!
- d) A c) feladatban hogyan lehet az érintő köröket megszerkesztetni a szögfelezők megszerkesztése nélkül?

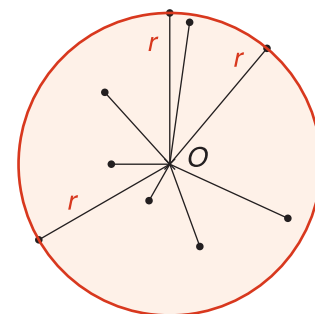
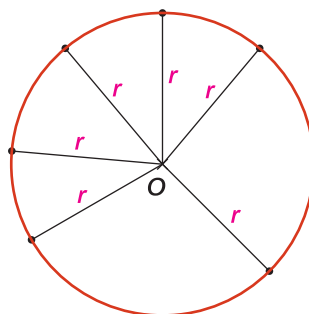
- 25 A tornaszertárban egy labda a fal és egy a falhoz tolt ferde falú ugrószekrény közé esett.

A labda szép lassan leeresztett, de közben mindig gömb alakú maradt. Szerkeszd meg a labda középpontjának útját!

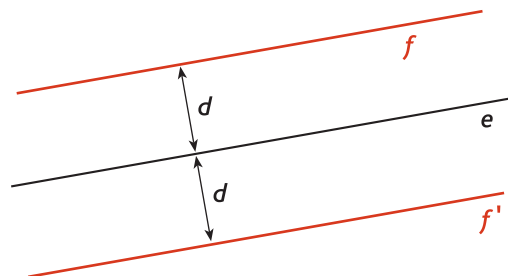
Értelmezések

Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek a sík egy O pontjától adott r ($r \neq 0$) távolságra vannak, egy **körvonal**.

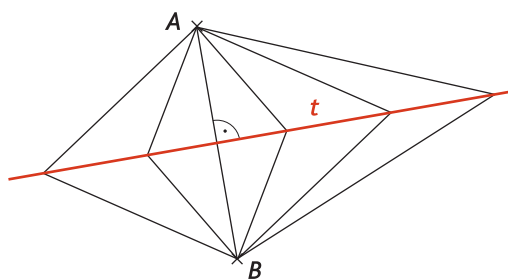
Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek a sík egy O pontjától adott r ($r \neq 0$) távolságnál nem nagyobb távolságra vannak, egy (zárt) **körlap**.



Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek a sík egy e egyenesétől adott d ($d \neq 0$) távolságra vannak, az e egyenestől d távolságra lévő, azzal párhuzamos egyenespár.

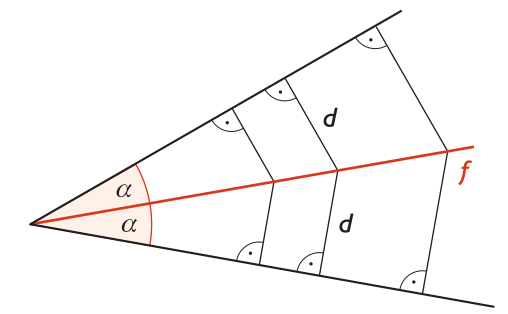
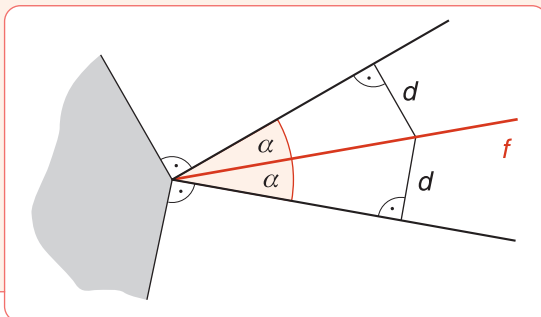


A sík két pontjától egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a két pont által meghatározott **szakasz felezőmerőlegese**.



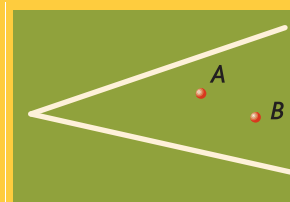
A konvex szögtartományban a szög két szárától azonos távolságra lévő pontok halmaza a **szögfelező**.

☺ **Megjegyzés:** A szögtartományon kívüli síkrészben is vannak olyan pontok, amelyek azonos távolságra vannak a két szögszárától, lásd az alábbi ábrán szürkére színezett síkrészt.



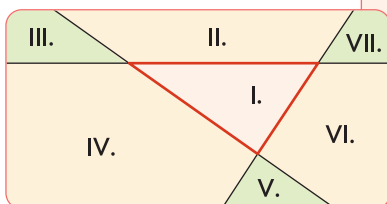
Biliárdasztalra két visszaverő lécezt rögzítenek (az ábra szerint). Szerkeszd meg az A pontban álló biliárdgolyó útvonalát ha úgy lökik meg, hogy

- a két lécről visszaverődve az A pontba tér vissza;
- a két lécről visszaverődve a B pontba tér vissza!



SÍKIDOMOK, SOKSZÖGEK

Emlékeztető



A **sík** feldarabolásával **síkidomokat** kapunk. Például: a körlap, a trapéz, a szögtartomány, a félsík síkidomok. A síkidomot **vonallal** határolja (vonalak határolják).

A **tér** feldarabolásával **testeket** kapunk. Például: a gömbtest, a hasáb, a lapszögtartomány, a féltér testek. A testet **felület** határolja (felületek határolják).

Az egymáshoz csatlakozó szakaszok **töröttvonalat** alkotnak. A záródó töröttvonal neve **egyszerű sokszögvonal**, az egymáshoz csatlakozó szakaszokat

oldalakkal, a csatlakozási pontokat **csúcso**knak nevezzük, ha ugyanannyi csúcs van, mint oldal, a töröttvonal minden csúcsához két oldal csatlakozik, és az oldalakkal a csúcson kívül nincs más közös pontjuk.

A síkbeli egyszerű sokszögvonal két síkidomra vágja a síkot ezek közül a korlátosat (a sokszögvonalon belülit) **sokszöglapnak** nevezzük.

Ha az egyértelműséget nem veszélyezteti, akkor a sokszögvonalat is és a sokszöglapot is **sokszögnek** nevezzük. (Mi csak a síkbeli egyszerű sokszögvonalakkal foglalkozunk, és sokszögön az ezek által határolt egyszerű sokszöget értjük.)

Az n oldalú sokszögnek n csúcsa és n belső szöge van.

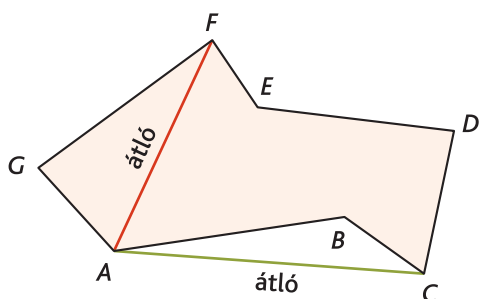
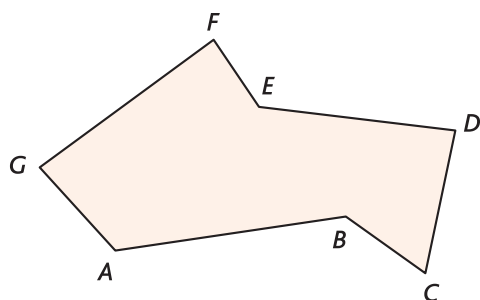
Azt a szakaszt amely két nem szomszédos csúcsot köt össze, **átlónak** nevezzük.

A sokszög **kerülete** a sokszöget határoló töröttvonal hossza.

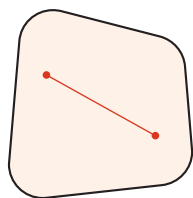
Konvex a síkidom, ha bármely két pontját összekötő szakasz minden pontja a síkidomhoz tartozik.

A konvex sokszög minden szöge konvex.

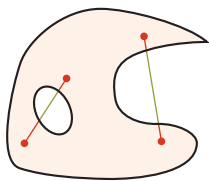
A nem konvex síkidomot **konkáv** síkidomnak is nevezzük.



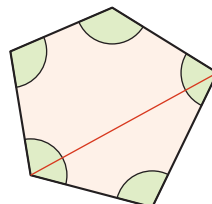
konkáv



konvex

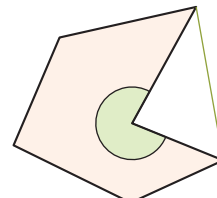


nem konvex,



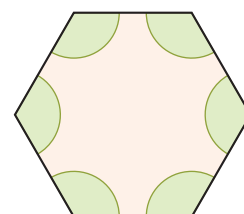
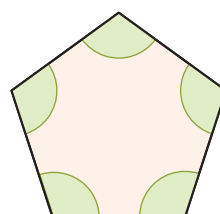
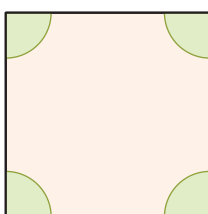
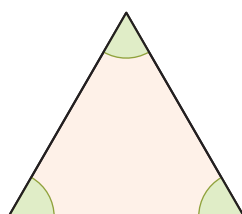
konvex

konkáv



nem konvex

A **szabályos sokszögnek** minden oldala és minden belső szöge egyenlő. Például:



FELADATOK

- 26 Rajzolj olyan síkidomokat, amelyeknek egynél több határoló vonala van! Vizsgáld ezeket a síkidomokat konvexitásuk szempontjából!

Gyakorló
6.31–6.40.

- 27 Rajzolj konvex háromszöget, négyszöget, ötszöget, ..., n oldalú sokszöget!

© Csoportmunkában szervezzétek meg a munkát!

- Hány átló húzható a sokszög egy csúcsából?
- Hány átlója van a sokszögnek?
- Az egy csúcsból húzott átlók hány háromszögre bontják a sokszöget?

HÁROMSZÖGEK

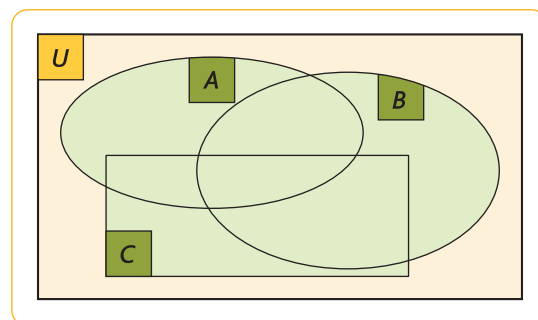
A KORÁBBAN TANULTAK ÁTTEKINTÉSE

FELADAT

- 28 Alaphalmaz: $U = \{\text{Háromszögek}\}$
Vonalkázd be az üres halmazt!

© Mindhárom feladathoz rajzolj ilyen halmazábrát!

- $A = \{\text{Hegyszögű háromszögek}\};$
 $B = \{\text{Derékszögű háromszögek}\};$
 $C = \{\text{Tompaszögű háromszögek}\}$
- $A = \{\text{Egyenlő szárú háromszögek}\};$
 $B = \{\text{Egyenlő oldalú háromszögek}\};$
 $C = \{\text{Különböző oldalú háromszögek}\}$
- $A = \{\text{Pontosan egy szimmetriatengelyük van}\};$
 $B = \{\text{Legalább egy szimmetriatengelyük van}\};$
 $C = \{\text{Nincs szimmetriatengelyük}\}$



Mindhárom feladatban vizsgáld meg, hogy milyen háromszögek tartoznak az A és a B halmaz metszetébe (közös részébe); uniójába (egyesítettjébe); különbségébe!



Színezd a sík azon pontjait, amelyek közül bárhogyan kiválasztva egy C pontot

- az ABC háromszög derékszögű lesz;
- az ABC háromszög hegyesszögű lesz;
- az ABC háromszög tompaszögű lesz;
- az ABC háromszög egyenlő szárú lesz!

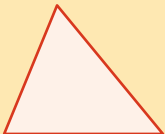
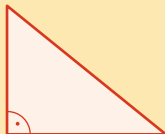
Mindig más színt használj!

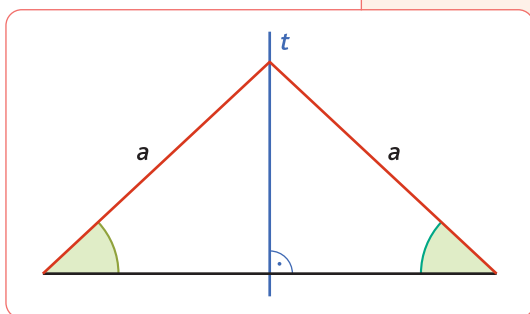
Fogalmazd meg a sejtésedet!



HÁROMSZÖGEK CSOPORTOSÍTÁSA A SZÖGEIK ÉS AZ OLDALAIK SZERINT

Háromszögnek nevezzük a sokszöget, ha három oldala van.

		Szögek szerinti csoportosítás		
		Hegyesszögű	Derékszögű	Tompaszögű
Oldalak szerinti csoportosítás	Minden oldala különböző			
	Pontosan két oldala egyenlő			
	Egyenlő oldalú		—	—



Egy háromszöget **egyenlő szárúnak** (vagy szimmetrikusnak) **mondunk**, ha van két **egyenlő hosszú oldala**. Egy háromszög pontosan akkor egyenlő szárú, ha van két egyenlő szöge, illetve ha van szimmetriatengelye.

Szabályos háromszögnek nevezzük az **egyenlő oldalú** (vagy egyenlő szögű) **háromszöget**. A szabályos háromszög is egyenlő szárú háromszög.

Hegyesszögű háromszögnek nevezzük a háromszöget, ha minden szöge hegyesszög.

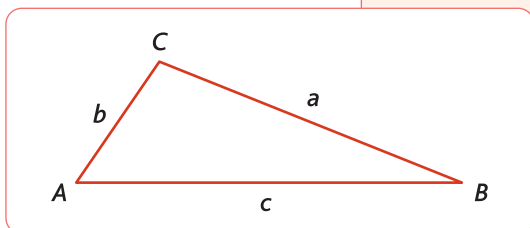
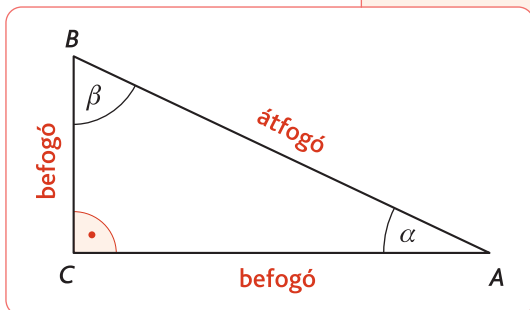
Tompaszögű háromszögnek nevezzük a háromszöget, ha van tompaszöge.

Derékszögű háromszögnek nevezzük a háromszöget, ha van derékszöge.

A derékszöget közbezáró két oldalt **befogónak**, a derékszöggel szemben lévő oldalt **átfogónak** nevezzük.

Az átfogó mindig nagyobb, mint bármelyik befogó.

A két hegyesszög összege 90° (pótszögek): $\alpha + \beta = 90^\circ$



A háromszög-egyenlőtlenség: A háromszög bármelyik két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.

$$a + b > c; \quad a + c > b; \quad b + c > a$$



Mely három adatból nem szerkeszthető háromszög az alábbiak közül?

A: 51 m; 50 m; 2 m; **B:** 5 cm; 6 cm; 1 cm; **C:** 2 mm; 1 mm; 2 mm

ÖSSZEFÜGGÉSEK A HÁROMSZÖG BELSŐ ÉS KÜLSŐ SZÖGEI KÖZÖTT

A háromszög belső szögeinek összege:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

A háromszög külső szöge megegyezik a nem mellette fekvő két belső szög összegével. Például:

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

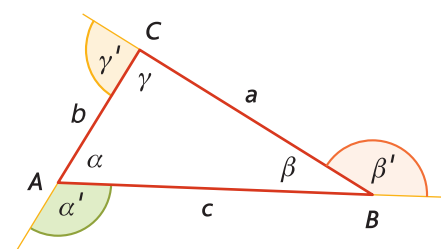
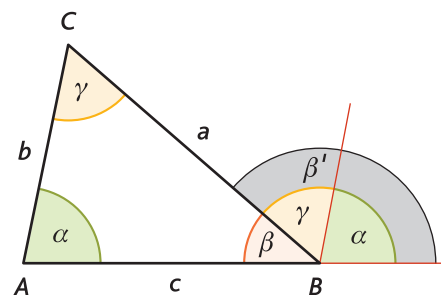
☉ Az első ábra segítségével bizonyítsd be az előző összefüggéseket!

A háromszög külső szögeinek összege:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$$

Ugyanis: $\alpha' + \beta' + \gamma' = (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma) + (\alpha + \beta) = 2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ$

☉ Melyik összefüggést alkalmaztuk a bizonyításban?

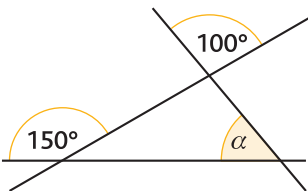


FELADAT

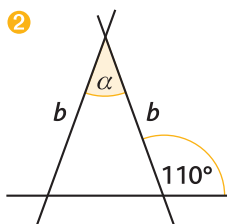
52

Számítsd ki, hogy hány fokok az ábrákon α -val jelölt szögek!

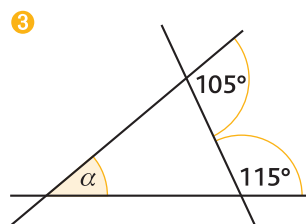
1



2



3

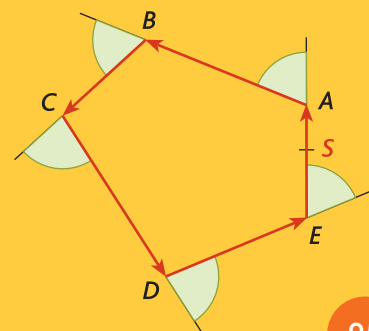


- Lehet-e egy háromszögnek két derékszöge; két tompaszöge?
- Mekkorák az egyenlő szárú derékszögű háromszög szögei?
- Mekkorák lehetnek az egyenlő szárú tompaszögű háromszög szögei?
- Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 40° -os. Mekkorák lehetnek a többi szögei?
- Milyen középpontosan tükrös háromszögeket ismersz?
- Mekkorák a háromszög szögei, ha a szögek aránya $2 : 3 : 5$?
- Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 24° -kal kisebb a másik szögénél. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei?

☉ Válaszod indokold!



- Határozd meg a téglalap, a trapéz, a szabályos hatszög, a szabályos nyolcszög külső szögeinek összegét! Mit tapasztalsz?
- Egy helikopter az ábrán látható útvonalon repül végig úgy, hogy az S pontból indul, és oda érkezik vissza. Merre néz induláskor, illetve megérkezéskor a helikopter? Az ábrán láthatók a helikopter elfordulásának a szögei is. Hány fok összesen ezeknek a szögeknek az összege?
- Fogalmazd meg sejtést tetszőleges konvex sokszög külső szögeinek összegéről!

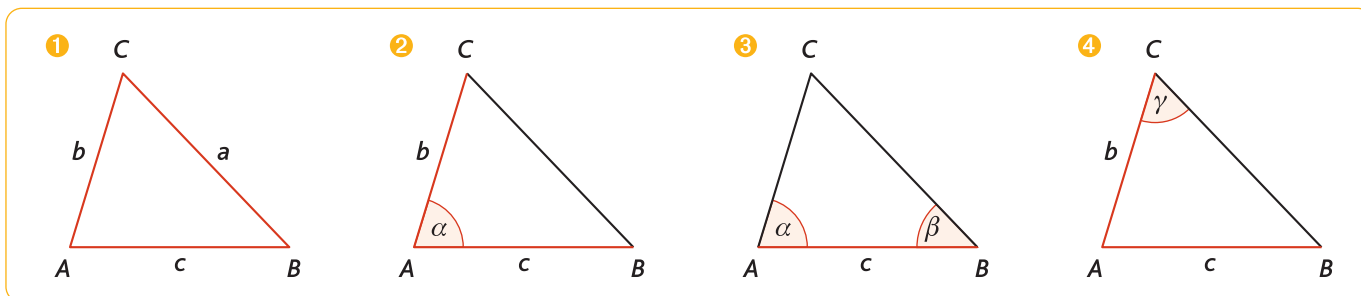


A HÁROMSZÖG SZERKESZTÉSÉNEK ALAPESETEI

☉ Az „egyértelműen” itt azt jelenti, hogy ha több háromszöget szerkesztünk ezekkel az adatokkal, akkor azok egybevágók.

A háromszög **egyértelműen megszerkeszthető**, ha adott:

- ➊ három oldala (a háromszög-egyenlőtlenség figyelembevételével);
- ➋ két oldala és a közbezárt szög (a szög kisebb 180° -nál);
- ➌ egy oldala és két szöge (a két szög összege kisebb 180° -nál);
- ➍ két oldala és a nagyobbikkal szemben fekvő szöge (a szög kisebb 180° -nál).



Euklideszi szerkesztésen a következőt értjük:

Használható eszközök: egyenes vonalzó (a vonalzó egy éle) és a körző.

Alapszerkesztések:

- ➊ Két adott pont összeköthető egyenessel.
- ➋ Két egyenes metszéspontja kijelölhető.
- ➌ Két pont távolsága körzőnyílásba vehető.
- ➍ Adott pont körül adott sugárral kör húzható.
- ➎ Adott kör és adott egyenes metszéspontjai kijelölhetők.
- ➏ Két kör metszéspontjai kijelölhetők.

FELADATOK

☉ A betűzésre vigyázz!
Mely háromszögek szerkeszthetők meg egyértelműen és melyek nem?

30 Szerkeszd meg a háromszögeket! A háromszögek megszerkesztése és a szükséges adatok megmérése után számítsd ki a háromszögek területét!

a) $a = 4 \text{ cm}; b = 3 \text{ cm}; \gamma = 120^\circ;$	b) $a = 6 \text{ cm}; \beta = 75^\circ; \gamma = 60^\circ;$
c) $a = 6 \text{ cm}; \beta = 75^\circ; \alpha = 135^\circ;$	d) $a = 2,5 \text{ cm}; b = 3 \text{ cm}; c = 4 \text{ cm};$
e) $a = 2,5 \text{ cm}; b = 2 \text{ cm}; c = 5 \text{ cm};$	f) $a = 3 \text{ cm}; b = 3,5 \text{ cm}; \beta = 45^\circ;$
g) $a = 4 \text{ cm}; b = 3,5 \text{ cm}; \beta = 45^\circ;$	h) $a = 4 \text{ cm}; b = 3 \text{ cm}; \beta = 60^\circ;$
i) $a = 4 \text{ cm}; b = 2 \text{ cm}; \beta = 30^\circ;$	j) $\alpha = 90^\circ; \beta = 75^\circ; \gamma = 60^\circ$

Kísérletezz!

☉ Szerkessz, mérd, számold!



Egy háromszög területe 18 cm. Az oldalak mérőszáma egész centiméter.

- a) Hányféle ilyen háromszög lehetséges?
- b) Melyiknek nagyobb a területe?

A HÁROMSZÖG NEVEZETES VONALAI, PONTJAI

A HÁROMSZÖG OLDALFELEZŐ MERŐLEGESEI, KÖRÉ ÍRHATÓ KÖRE

FELADAT

52 Szerkessz háromszöget $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $\gamma = 75^\circ$ adatokkal!

- Szerkessz köröket úgy, hogy illeszkedjenek a háromszög A és B csúcsára! Milyen alakzatot határoz meg ezeknek a köröknek a középpontja?
- Szerkessz olyan köröket is, amelyek az AC oldal mindkét végpontján átmennek! Hol helyezkedik el ezeknek a köröknek a középpontja? Miért?
- Az $a)$, illetve a $b)$ feladatban szerkeszthető körök közt van-e olyan, amelyik egyidejűleg átmegy az AB oldal két végpontján és az AC oldal két végpontján is?
- Az $a)$, illetve a $b)$ feladatban szerkeszthető körök közt van-e olyan, amelyik átmegy a BC oldal két végpontján is? Ha igen, akkor szerkeszd meg a mindhárom csúcsra illeszkedő kört!

☉ *Szerkesztés előtt minden esetben érdemes vázlatot készíteni. Az adatok közti összefüggések értelmezése után terveld meg a szerkesztés menetét! Ne felejtkezz el a megoldás kiértékeléséről sem!*

Tétel

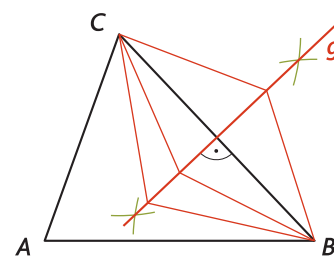
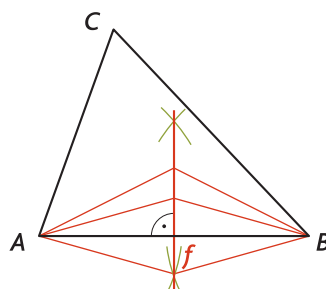
Bármely háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög köré írható kör középpontja.

Bizonyítás

☉ *A bizonyításban a két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmazáról megfigyelteket alkalmazhatjuk:*

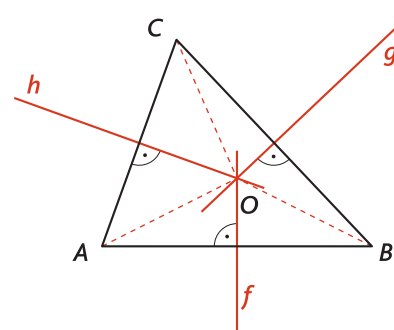
Az AB oldal felezőmerőlegesének (f egyenesnek) a pontjai egyenlő távolságra vannak az A és a B ponttól.

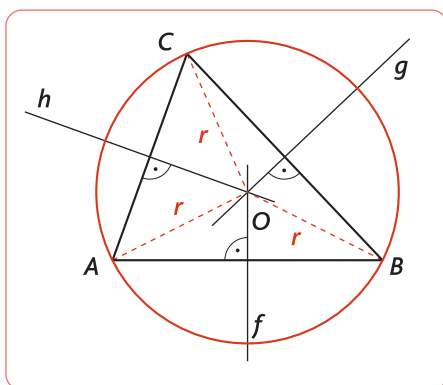
A BC oldal felezőmerőlegesének (g egyenesnek) a pontjai egyenlő távolságra vannak a B és a C ponttól.



Így az f és a g egyenes közös pontja, az O egyenlő távolságra van az A , a B és a C csúcsok mindegyikétől, tehát az AC oldal két végpontjától, a C és az A csúcsoktól is.

Ezért az AC oldal h felezőmerőlegese is az O pontban metszi a másik két oldal felezőmerőlegesét, hiszen erre a felezőmerőlegesre illeszkedik minden olyan pont, amelyik az A -tól és a C -től egyenlő távolságra van.





»»

Az O pont a háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra van, ezért az O pont a köré írt kör középpontja.

A köré írt kör sugara éppen ezeknek a szakaszoknak a hosszúsága.

Ezt kellett bizonyítanunk.

FELADATOK

Gyakorló 6.51.;
Feladatgyűjtemény
4.1.16.

32

- a) Végez föl egy hegyesszögű, egy tompaszögű és egy derékszögű háromszöget! Szerkeszd meg mindháromnak a köré írt körét!
- b) Fogalmazd meg sejtést arról, hogy hol helyezkedik el a köré írt kör középpontja hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű háromszögek esetén!

33

A sík három pontja mely esetben határoz meg olyan kört, amelyik illeszkedik a három pontra?

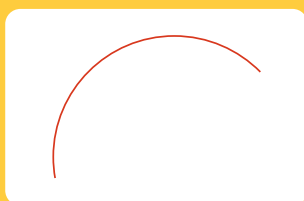
A HÁROMSZÖG SZÖGFELEZŐI, BEÍRTHATÓ KÖRE

FELADAT

34

- Szerkessz háromszöget $a = 5$ cm, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 75^\circ$ adatokkal (a szögeket is szerkesztéssel add meg)!
- a) A β szögtartományban szerkessz köröket úgy, hogy érintsék a β szög szarait! Milyen alakzatot határoz meg ezeknek a köröknek a középpontja?
- b) Szerkessz olyan köröket is, amelyek a γ mindkét szarát érintik! Hol helyezkedik el ezeknek a köröknek a középpontja? Miért?
- c) Az a), illetve a b) feladatban szerkeszthető körök közt van-e olyan, amelyik érinti a β szög két szarát és a γ szög két szarát is?
- d) Az a), illetve a b) feladatban szerkeszthető körök között van-e olyan, amelyik érinti az α szög két szarát is? Ha igen, akkor szerkeszd meg a mindhárom oldalt érintő kört!

• Készítettél vázlatot?



- a) Például pohár segítségével rajzolj egy körívet! Hogyan szerkeszthető meg a körívet tartalmazó körvonal középpontja?
- b) Rajzolj három nem egy egyenesre eső pontot! Szerkessz negyedik pontot úgy, hogy a négy pont egy húrtrapéz négy csúcsa legyen!

• Hány megoldást találtál?



- Bezárhat-e egy háromszög két szögfelezője derékszöget? Miért?

Tétel

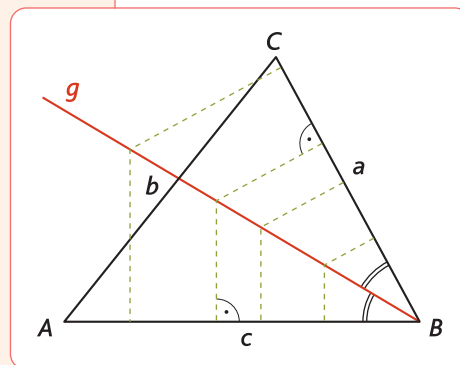
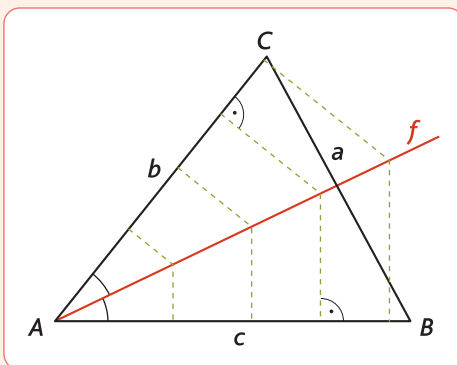
Bármely háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszögbe írható kör középpontja.

Bizonyítás

☉ A bizonyításhoz a konvex szögtartományban a szög két szárától egyenlő távolságra lévő pontok halmazáról megfigyelteket alkalmazhatjuk:

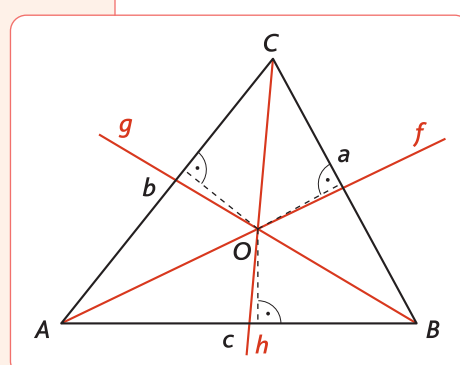
Az $A\angle$ szögfelezőjének (f -nek) pontjai egyenlő távolságra vannak a b és a c oldalegyenesektől.

A $B\angle$ szögfelezőjének (g -nek) pontjai egyenlő távolságra vannak a c és az a oldalegyenestől.



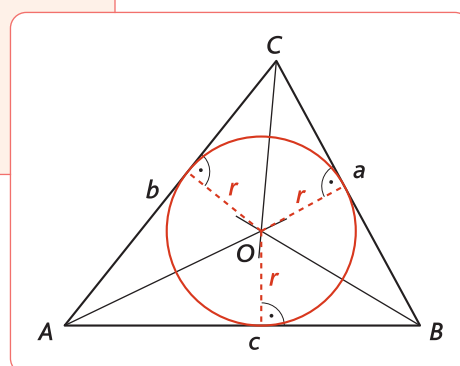
Így az f és a g félegyenes közös pontja, az O egyenlő távolságra van a b , a c és az a oldalegyenesek mindegyikétől, tehát a $C\angle$ két szárának egyenesétől, az a -tól és a b -től is.

Ezért a $C\angle$ szögfelezője is az O pontban metszi a másik két szögfelezőt, hiszen erre a szögfelezőre illeszkedik minden olyan pont, amelyik az a -tól és a b -től egyenlő távolságra van a szögtartományban.



Az O pontból az oldalakra bocsátott merőleges szakaszok egyenlők, tehát az O a beírható kör középpontja. A háromszögbe írható kör sugara (r) éppen ezeknek a merőleges szakaszoknak a hosszúsága.

Ezt kellett bizonyítanunk.



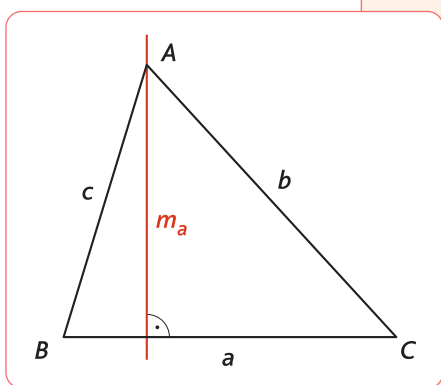
FELADAT

35 Szerkeszd meg a háromszögeket, majd a beírható körüket!

- A háromszög oldalai $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm.
- A háromszög két oldala $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, a közbezárt szög $\gamma = 60^\circ$.
- A háromszög egy oldala $a = 6$ cm, a rajta fekvő két szög $\beta = 45^\circ$ és $\gamma = 67,5^\circ$.
- A háromszög egy oldala $a = 5$ cm, két szöge $\beta = 105^\circ$ és $\alpha = 37,5^\circ$.
- A háromszög két oldala $a = 4$ cm és $b = 5$ cm, a nagyobbik oldallal szemben fekvő szög $\beta = 82,5^\circ$.
- A háromszög két oldala $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, és az a oldallal szemben fekvő szög $\alpha = 37,5^\circ$.

Gyakorló 6.52.;
Feladatgyűjtemény
4.1.15.

A HÁROMSZÖG MAGASSÁGVONALAI, MAGASSÁGPONTJA



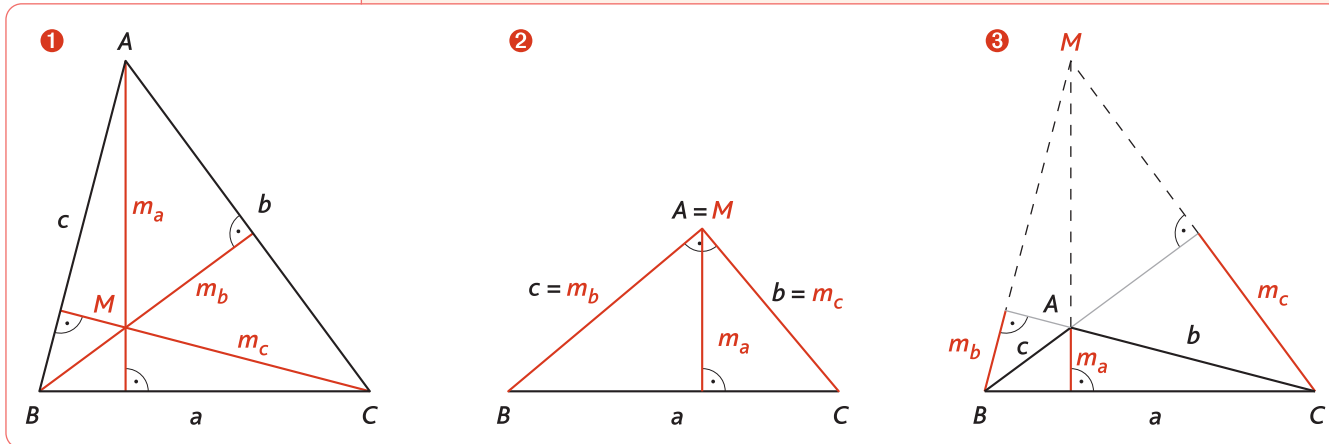
A háromszög magasságvonala a háromszög csúcsából a szemközti oldalegyenesre bocsátott merőleges egyenes.

A háromszög magassága a háromszög csúcsa és a szemközti oldalegyenes távolsága.

A magasság (magasságszakasz) a magasságvonalnak a csúcs és az oldalegyenes közé eső része.

Az a , b , c oldalhoz tartozó magasságot rendre m_a , m_b , m_c jelöli.

Bebizonyítható, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög M magasságpontja.



FELADATOK

© Készítettél vázlatot?

36 Szerkeszd meg a háromszöget, majd a magasságpontját!

- A háromszög oldalai $a = 6$ cm, $b = 4,5$ cm, $c = 5$ cm.
- A háromszög két oldala $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, a közbezárt szög $\gamma = 135^\circ$.
- A háromszög egy oldala $a = 6$ cm, a rajta fekvő két szög $\beta = 30^\circ$ és $\gamma = 60^\circ$.

Gyakorló 6.53.

37 Szerkessz háromszöget, ha

- $a = 6$ cm, $\beta = 115^\circ$, $m_a = 3$ cm;
- $a = 4,5$ cm, $b = 4$ cm, $m_a = 3,5$ cm;
- $a = 4,5$ cm, $b = 4$ cm, $m_a = 4$ cm;
- $a = 4,5$ cm, $b = 4$ cm, $m_a = 4,5$ cm

Kísérletezz!



Fogalmazd meg sejtést arról, hogy hol helyezkedik el a magasságpont a hegyesszögű, a derékszögű, illetve a tompaszögű háromszögek esetén!

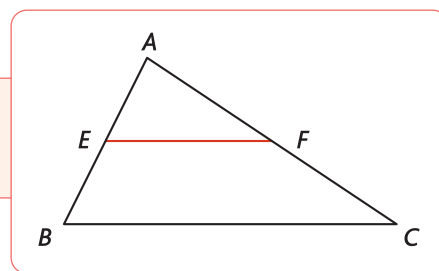
Fejtdörö!



Rajzolj egy AB szakaszt! Legyen ez egy háromszög AB oldala. Végez fel egy, az AB egyenesre nem illeszkedő M pontot, a háromszög magasságpontját! Szerkeszd meg a háromszöget! Az adatok milyen felvétele mellett kapsz derékszögű, hegyesszögű, illetve tompaszögű háromszöget?

A HÁROMSZÖG KÖZÉPVONALAI

A háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakaszt a háromszög középvonalának nevezzük.



☉ A középvonal tulajdonságainak vizsgálatához a 4. fejezetben visszatérünk.

FELADATOK

38 Szerkeszd meg a háromszöget, majd a középvonalait!

- A háromszög két oldala $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, a közbezárt szög $\gamma = 67,5^\circ$.
- A háromszög egy oldala $a = 5$ cm, a rajta fekvő két szög $\beta = 45^\circ$ és $\gamma = 45^\circ$.
- A háromszög két oldala $a = 4$ cm, $b = 4$ cm, és az egyik szöge 75° .

☉ Fogalmazd meg és próbáld bizonyítani sejtésedet!

☉ Mérd meg és hasonlítsd össze az egyes középvonalak és a velük párhuzamos oldalak hosszúságát!

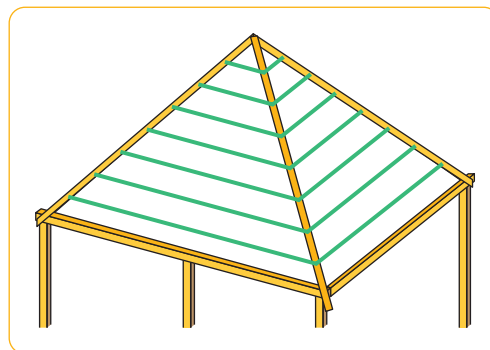
39 Egy kis kerti lugas gúla alakú tetőzetének egy-egy lapja egyenlő szárú háromszög alakú. Az ereszvonal 4,4 m hosszú.

A tetőszerkezet éleit alkotó szarufák hossza 4,2 m. A szarufákra szegezik fel a tetőszerkezet lécezését.

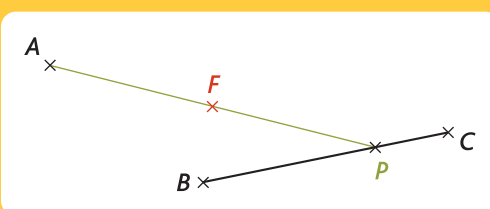
Milyen hosszúak azok a lécek, amelyeket a tető csúcsától 2,1 m-re, az élszarufák közepére szegeztek fel?

☉ Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!

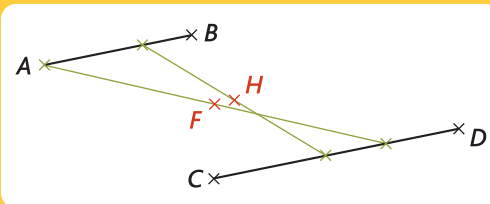
- A: 2,2 m; B: 2,1 m; C: 1,8 m; D: 1,05 m



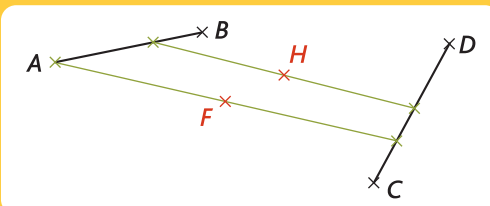
Az A pontból megközelíthető a BC szakasz bármely pontja. Hol helyezkednek el a „félúton” lévő pontok?



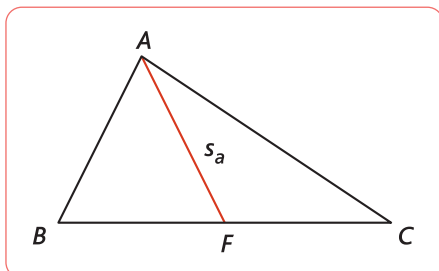
Az AB szakasz minden pontjából megközelíthető az AB-vel **párhuzamos** CD szakasz bármely pontja. Hol helyezkednek el a „félúton” lévő pontok?



Az AB szakasz minden pontjából megközelíthető az AB-vel **nem párhuzamos** CD szakasz bármely pontja. Hol helyezkednek el a „félúton” lévő pontok?

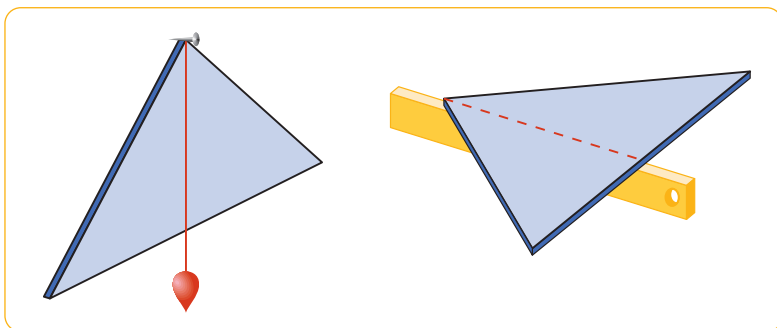


A HÁROMSZÖG SÚLYVONALAI, SÚLYPONTJA



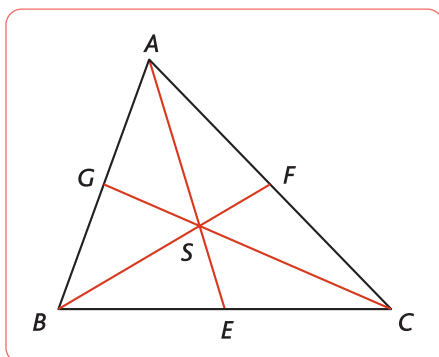
A háromszög csúcsát a szemkötti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt a háromszög súlyvonalának nevezzük.

A „súlyvonal” elnevezésnek fizikai tartalma van.



Ha kartonlemezről kivágunk egy háromszöget, és az egyik csúcsánál felfüggesztjük azt, akkor az ugyanott felfüggesztett függőön zsinórja a súlyvonal mentén áll be.

Ha a háromszöglemezt a súlyvonal mentén támasztjuk alá, akkor egyensúlyban marad.



Bebizonyítható, hogy **bármely háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög súlypontja.**

A kartonlemezről kivágott háromszög a súlypontjában alátámasztva egyensúlyban marad.

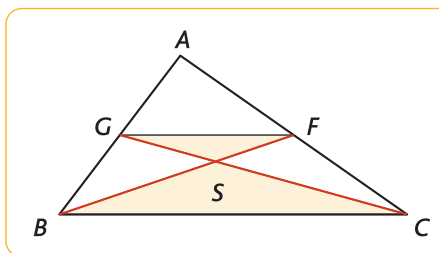
FELADATOK

40 Szerkeszd meg a háromszöget, majd a súlypontját!

© Készítettél vázlatot?

Gyakorló
6.54–6.60.

- A háromszög két oldala $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, a közbezárt szög $\gamma = 120^\circ$.
- A háromszög egy oldala $a = 5$ cm, a rajta fekvő két szög $\beta = 30^\circ$ és $\gamma = 35^\circ$.
- A háromszög két oldala $a = 3$ cm és $b = 4$ cm, a nagyobbik oldallal szemben fekvő szög $\beta = 75^\circ$.



41 Rajzolj tetszőleges háromszöget! Szerkeszd meg (az ábra betűzését alkalmazva) a BF , a CG súlyvonalát és az GF középvonalát!

Hasonlítsd össze a BCS és az FGS háromszög szögeit!

Keress szögpárokat! Mit tapasztalsz?

Mérd meg és hasonlítsd össze a BCS és az FGS háromszög oldalait is!

Fogalmaz meg sejtést például a BS és az FS szakasz hosszáról!



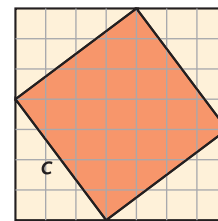
A 41. feladatban tapasztaltakat alkalmazva szerkessz háromszöget, ha adott az AB oldala és a súlypontja!

PITAGORASZ TÉTELE

1. példa

Határozzuk meg a narancssárgára színezett négyszög területét, majd a c -vel jelölt oldalának hosszát.

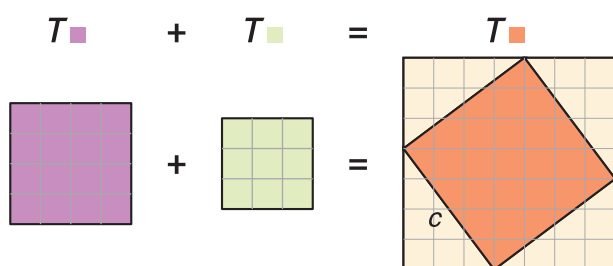
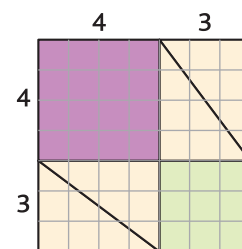
Egy hosszúságegység egy kis rácsnégyzet oldala, a területegység egy kis rácsnégyzet területe.



$(4 + 3 =) 7$ egység oldalú négyzetben a sárgára színezett négy derékszögű háromszög egybevágó. Ezért mindegyik háromszög átfogója c egység hosszú. A háromszögek két hegyesszöge és a négyszög egy-egy szöge 180° -ra egészítik ki egymást. Azaz a négyszög minden szöge 90° . Tehát a narancssárgára színezett rácsnéyszög négyzet.

Rajzoljuk be másképpen a négy egybevágó derékszögű háromszöget a 7 egység oldalú négyzetbe.

A fenti ábráról is, és erről az ábráról is hagyjuk el a négy-négy háromszöget. Ekkor a második ábrán megmaradt két (lila és zöld) négyzet területének összege megegyezik az első ábrán megmaradt (narancssárgára) négyzet területével.



Felírhatjuk a felismert összefüggést kifejező egyenletet:

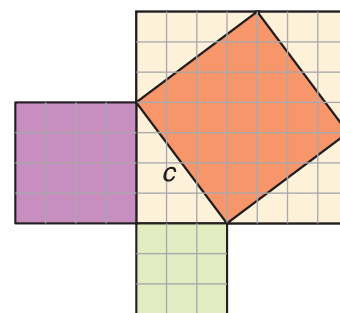
$$4^2 + 3^2 = c^2 \quad (c > 0)$$

$$16 + 9 = c^2$$

$$25 = c^2$$

Az eredeti négyzet területe 25 területegység, tehát a négyzet oldala:

$$c = 5 \text{ egység.}$$

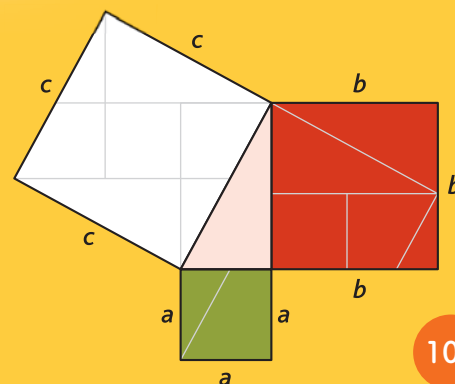


Feldaraboltuk a derékszögű háromszög oldalaira emelt négyzeteket. A befogókra emelt négyzetek „darabjainak” keresd meg az **elto-lással** kapható párját az átfogóra emelt négyzet darabjai között. Színezd azonos színűre!

Fogalmazd meg sejtésedet!

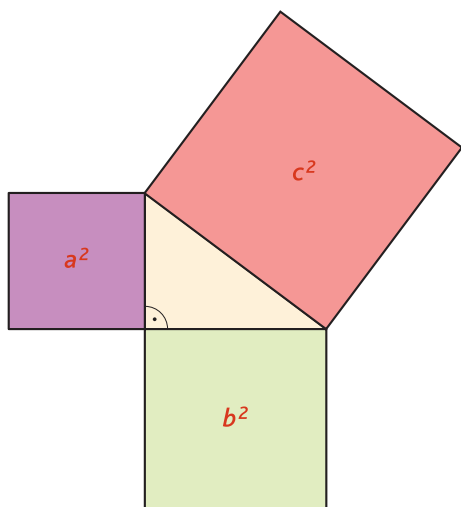


Keress a világhálón további bizonyításokat, amelyek igazolják a következő oldalon látható Pitagorasz-tételt!



Tétel

A derékszögű háromszög befogóira emelt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra emelt négyzet területével.



Püthagorasz (más írásmódban Pitagorasz; i. e. 550 körül) ókori görög matematikus előtt már ismerték a róla elnevezett tételüket. Mezopotámiában a sumérok i. e. 2000 körül már általánosan is bizonyították a „Pitagorasz-tételt”. Egy i. e. 1200 körül Kínában készült naptárban látható egy, a tételt bizonyító rajz. Az ősi Indiában i. e. 800 körül az oltárok építéséhez végzett számításokban alkalmazták ezt a tételt. Lehetséges, hogy az egyiptomi papok is ismerték, és a derékszögek kitűzésénél alkalmazták a tételt.

Püthagorasz a káldeusok és az egyiptomiak földjén folytatta tanulmányait. Feltételezések szerint itt ismerkedett meg a később nevéhez kapcsolt tétellel. Hazatérve iskolát alapított. Ő és tanítványai az egész számok tulajdonságaival és szám-misztikával foglalkoztak.

Bizonyítás

Az $a + b$ oldalú négyzetbe berajzolhatjuk az a^2 és a b^2 területű négyzetet és négy egybevágó, a és b befogójú derékszögű háromszöget.

Az $a + b$ oldalú négyzetbe másképp is berajzolhatjuk a négy egybevágó, a és b befogójú derékszögű háromszöget. Lásd a legalsó ábrát.

A négyzet átlóinak metszéspontja körül 90° többszöröseivel elforgatva ezt az ábrát, az eredeti ábrával fedésbe hozható (tehát forgásszimmetrikus).

A pirosra színezett négyszög minden oldala c , és az ábra forgásszimmetriája miatt szögei egyenlő nagyságúak. Ez a négyszög az átfogóra emelt, c^2 területű négyzet.

Ha mindkét ábráról elhagyjuk a négy-négy egybevágó háromszöget, a maradék idomok területe a két ábrán megegyezik.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Az összefüggést leíró egyenletet átrendezve az átfogó és az egyik befogó ismeretében kiszámíthatjuk a másik befogó négyzetét, majd a befogót is:

$$a^2 = c^2 - b^2; \quad b^2 = c^2 - a^2$$

Ha az a és a b oldal által közbezárt szög hegyesszög, akkor $a^2 + b^2 > c^2$;

Ha az a és a b oldal által közbezárt szög tompaszög, akkor $a^2 + b^2 < c^2$

Az előző összefüggésekből következik **Pitagorasz tételének megfordítása**:

Ha egy háromszögben két oldal négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

2. példa

Egy téglalap egyik oldala 4 cm, az átlója 6 cm.
Határozzuk meg a téglalap kerületét és területét.

Az átló két egybevágó derékszögű háromszögre bontja a téglalapot. Az oldalak és az átló közti összefüggés:

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$b^2 = d^2 - a^2$$

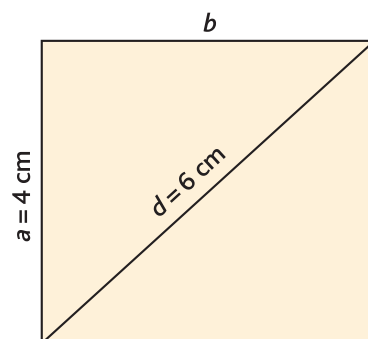
$$b^2 = 36 - 16 = 20$$

$$b = \sqrt{20} \approx 4,47$$

A téglalap másik oldala 4,47 cm. **A negatív megoldás nem értelmezhető.**

A téglalap kerülete: $K = 2(a + b) \approx 2(4 \text{ cm} + 4,47 \text{ cm}) = 16,94 \text{ cm}$

A téglalap területe: $T = ab \approx 4 \cdot 4,47 \text{ cm}^2 = 17,88 \text{ cm}^2 \approx 18 \text{ cm}^2$



FELADATOK

42 Szerkeszd meg a háromszöget, ha oldalainak hossza:

a) 6 cm, 8 cm és 8,5 cm;	b) 6 cm, 8 cm és 9 cm;
c) 6 cm, 8 cm és 10 cm;	d) 6 cm, 8 cm és 11 cm;
e) 6 cm, 8 cm és 12 cm;	f) 6 cm, 8 cm és 15 cm!

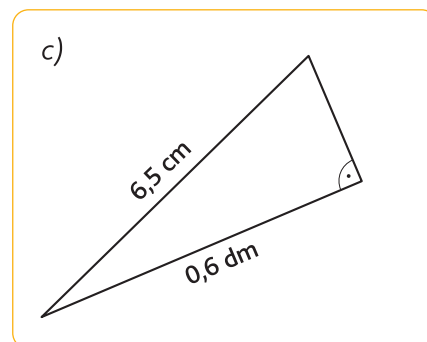
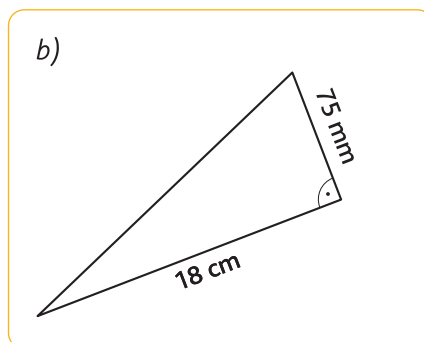
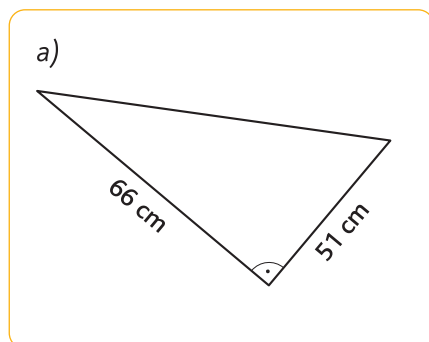
Gyakorló
6.61–6.65.

A legnagyobb szög melyik oldallal szemben található?

Keress összefüggést a legnagyobb oldal négyzete és a másik két oldal négyzetének összege között a hegyesszögű, a derékszögű és a tompaszögű háromszögek esetén!

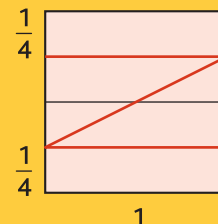
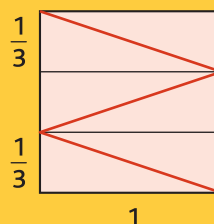
43 Felrajzoltuk néhány derékszögű háromszög vázlatát.

Milyen hosszú a harmadik oldaluk?



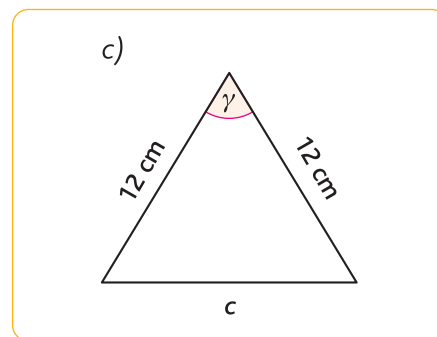
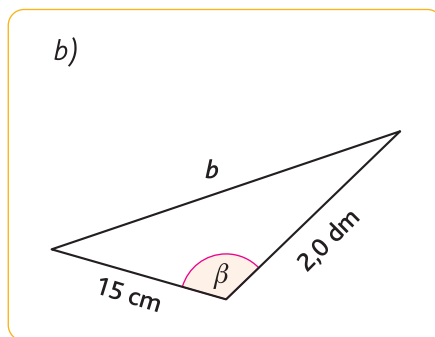
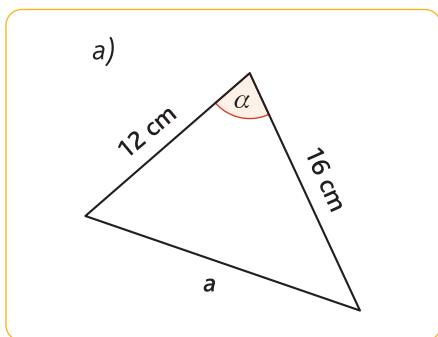
Zoró az ábrákon látható kétféle vágást szokott ejteni „névjegyként”.

Melyik esetben nagyobb az összvágáshossz?



44

Felrajzoltuk néhány nem derékszögű háromszög vázlatát. Milyen hosszú lehet a harmadik oldaluk?



Gyakorló
6.66–6.69.

45

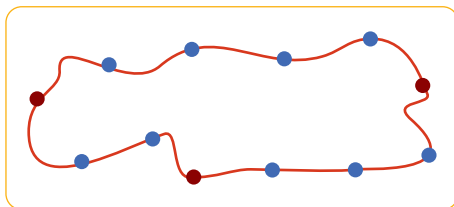
A következő számhármassok közül melyik lehet hegyesszögű, tompaszögű, illetve derékszögű háromszög oldalainak mérőszáma?

Sorszám	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
x cm	8	10	14	13	15	20	24	45	33	0,9	3,4
y cm	6	12	5	5	15	30	25	55	55	1,2	2,1
z cm	10	20	8	12	15	20	7	15	44	1,5	2,9

☉ Alkalmazd a háromszög oldalainak négyzetére vonatkozó összefüggéseket!

46

A 3, 4 és 5 egység oldalú háromszög derékszögű, hiszen: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Úgy tudjuk, hogy az ókori Egyiptomban ilyen háromszöget használtak fel derékszög kitűzésére (csomókkal és karikákkal ellátott zárt zsinór segítségével). Hogyan csinálhatták?

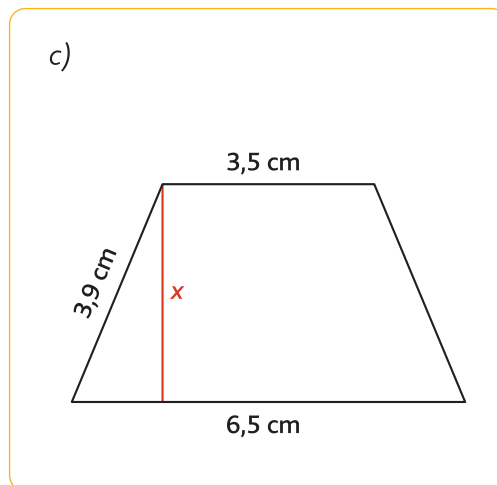
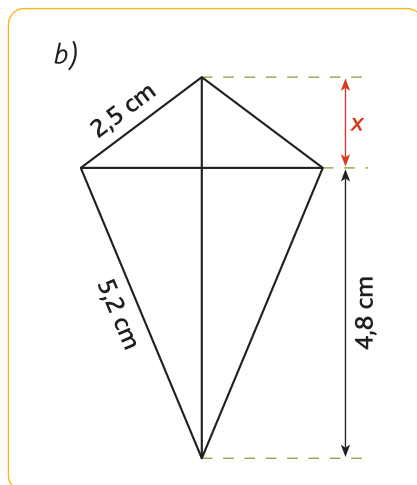
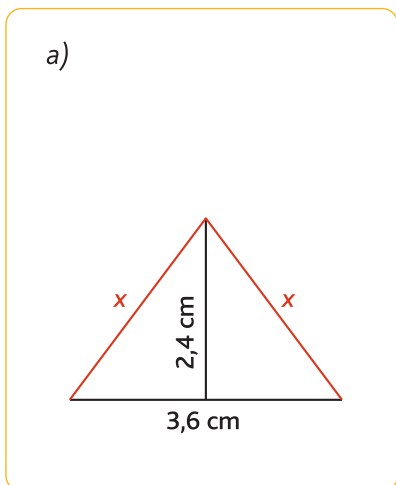


A mai mesterek is alkalmazzák ezt a módszert.

Hogyan ellenőriznéd, hogy a kert sarkában a kerítés valóban derékszögben találkozik-e, ha csak egy mérőszalag áll rendelkezésedre?

47

A feltüntetett adatokból számítsd ki az x-szel jelölt szakasz hosszát és a sokszög területét!



A PITAGORASZ-TÉTEL ALKALMAZÁSA

3. példa

Hány egység távolságra van egymástól a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(7; 9)$ és a $B(2; -3)$ pont?

Felrajzolunk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek az AB szakasz az átfogója (jelöljük c -vel), az a és a b befogót a pontok koordinátaiból kiszámíthatjuk.

$$a = 7 - 2 = 5 \text{ (egység); } b = 9 - (-3) = 12 \text{ (egység).}$$

Pitagorasz tétele alapján:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

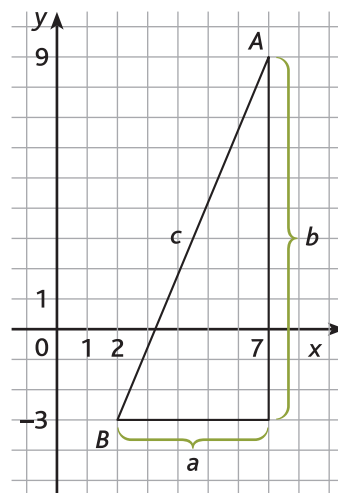
$$c^2 = 5^2 + 12^2$$

$$c^2 = 25 + 144 = 169$$

Mivel a c távolság, csak a pozitív megoldásnak van értelme:

$$c = \sqrt{169} = 13$$

13 egység távolságra van egymástól az A és a B pont.



4. példa

Egy lejtős útvonal a térképen 4,8 cm. Mekkora az útvonal tényleges hossza, ha az emelkedés 250 m, és a méretarány 1 : 20 000?

Ami a térképen 1 cm, az a valóságban: 20 000 cm = 200 m.

Ezért az útvonal v vetületének hosszúsága:

$$v = 4,8 \cdot 200 \text{ m} = 960 \text{ m.}$$

Az útvonal és a térképen ábrázolt vetülete derékszögű háromszöget határoz meg, amelynek egyik befogója az út vízszintes vetülete: $v = 960 \text{ m} = 9,6 \cdot 10^2 \text{ m}$

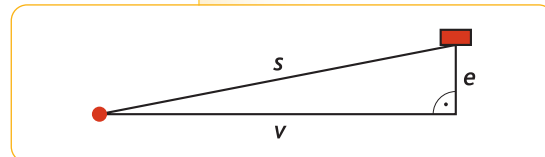
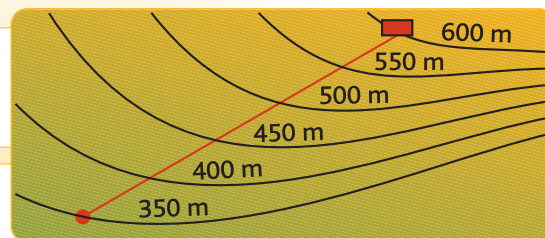
Másik befogója az emelkedés: $e = 250 \text{ m} = 2,5 \cdot 10^2 \text{ m}$

$$s^2 = v^2 + e^2 \quad s \geq 0$$

$$s^2 = (9,6 \cdot 10^2)^2 + (2,5 \cdot 10^2)^2$$

$$s^2 = 92,16 \cdot 10^4 + 6,25 \cdot 10^4 = 98,41 \cdot 10^4$$

$$s = \sqrt{98,41 \cdot 10^4} \approx 9,92 \cdot 10^2 \quad \text{Az útszakasz körülbelül 992 m.}$$



☉ Számológéppel meghatározhatjuk a számok négyzetét, majd az összeg négyzetgyökét.



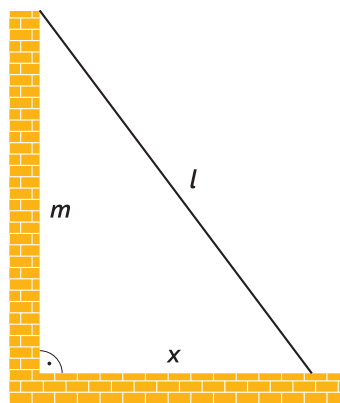
a) Rajzolj olyan derékszögű háromszöget, amelynek átfogója $\sqrt{8}$!

b) Adott két négyzet. Szerkessz (mérés nélkül) olyan négyzetet, aminek területe az első kettő területének összegével egyezik meg!

c) Adott három négyzet. Szerkessz (mérés nélkül) olyan négyzetet, aminek területe az első három területének összegével egyezik meg!

5. példa

Egy 6 m hosszú létrát 4,8 m magas falhoz támasztunk.
Milyen távol van a faltól a létra alja?



Az ábra alapján: $m^2 + x^2 = l^2$

Ebből: $x^2 = l^2 - m^2 \quad x \geq 0$

Helyettesítsük be a kifejezésbe az ismert adatokat (meghatározva a számok négyzetét): $m = 4,8$ m; $l = 6$ m

$$x^2 = 36 - 23,04 = 12,96$$

Vonjunk négyzetgyököt a kapott különbségből:

$$x = \sqrt{12,96} = 3,6$$

A létra alja 3,6 m-re van a faltól.

FELADATOK

48 Határozd meg a szimmetrikus háromszög keresett adatait, számítsd ki a háromszögek kerületét és területét! Az alapot jelöljük a -val,

- a) $a = 12$ cm, $b = 10$ cm, $m_a = ?$
b) $a = 0$ cm, $b = ?$ $m_a = 8$ cm
c) $a = ?$ $b = 13,5$ cm, $m_a = 10,8$ cm

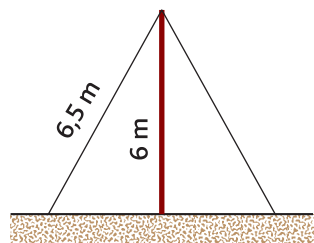
49 a) Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója 5 cm hosszú. Mekkora az átfogója?

- b) Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója 5 cm hosszú. Mekkora a befogója?
c) Egy téglalap oldalainak hossza $a = 2,1$ cm, $b = 2,8$ cm. Mekkora a téglalap átlója?
d) Egy derékszögű háromszög rövidebb befogója 10 cm hosszú, egyik szöge 60° -os. Mekkora a másik befogó és az átfogó?

50 Egy 6 m magas oszlopot 6,5 m hosszú tartókötelekkel akarnak rögzíteni. Az oszlop tövétől milyen távolságra lehet a földhöz cövekelni a köteleket?

51 a) Milyen távolságra vannak a következő pontok a koordináta-rendszer kezdőpontjától: $A(0; 5)$, $B(16; 12)$, $C(-18; -7,5)$?

b) Mekkora az $ABC\triangle$ kerülete, ha $A(-1; 1)$, $B(7; -5)$, $C(7; 7)$?



• Mivel egyenlő $(\sqrt{8})^2$?

• A négyzetrácsos füzet egy beosztása 0,5 cm.



Mekkora a derékszögű háromszög átfogója, ha befogóinak hossza

- a) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{10}$; $\sqrt{15}$; c) $\sqrt{8}$; $\sqrt{8}$?



Rajzolj a füzetedbe olyan szakaszt, amelynek a hosszúsága

- a) $\sqrt{5}$ cm; b) $\sqrt{8}$ cm; c) $\sqrt{13}$ cm; d) $\sqrt{20}$ cm; e) $\sqrt{29}$ cm!

6. példa

Egy motoros sárkányrepülő szélcsendben $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel képes haladni.

Mekkora a sebessége, ha $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességű keleti szél fúj, és

a) a sárkányrepülő motorja északi irányba „húz”;

b) a sárkányrepülő északi irányban halad?



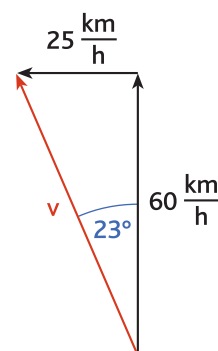
a) A tényleges sebesség a motor és a szél sebességéből tevődik össze. A három **vektor** egy derékszögű háromszöget határoz meg. Ezért:

$$v^2 = 60^2 + 25^2$$

$$v^2 = 3600 + 625 = 4225$$

$$v = 65 \text{ (a negatív megoldás nem értelmezhető)}$$

A sárkányrepülő sebessége $65 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ha megszerkesztjük a vektorháromszöget, akkor méréssel azt kapjuk, hogy a sárkányrepülő körülbelül 23° -kal nyugat felé eltér az északi iránytól.



b) Most a gép motorjának az északi iránytól kelet felé eltérve kell húznia. Ezért a három vektor ilyen derékszögű háromszöget határoz meg. A sebességek közti összefüggés::

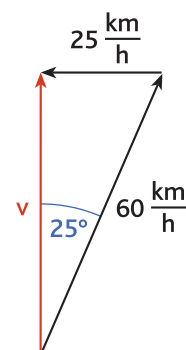
$$v^2 = 60^2 - 25^2$$

$$v^2 = 3600 - 625 = 2975$$

$$v \approx 54,5 \text{ (a negatív megoldás nem értelmezhető)}$$

A sárkányrepülő sebessége $54,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

A sárkányrepülő motorja az északi iránytól 25° -kal kelet felé eltérve húz.



FELADATOK

B1

Egy vitorlás hajó egy szigetről kelet felé indul, és 12 km-t tesz meg, ekkor dél felé fordul, és újra megtesz 12 km-t.

Milyen irányban és milyen távolságra van ekkor a hajó a szigettől?

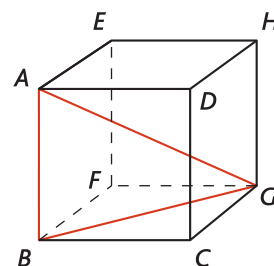
b) Egy hajó egy szigetről elindulva 26 km-re távolodik el attól. Ezután dél felé fordulva 10 km-t halad. Milyen távolságra van ekkor a szigettől, ha azt éppen nyugat felé látja?

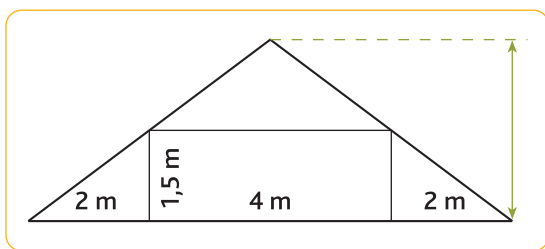
B2

Készítsd el egy felül nyitott kocka modelljét! Rajzold rá az egyik lapjára a lapátlóját! Egy szívószállal modellezd a kocka testátlóját!

Keress derékszögű háromszöget, amelynek a segítségével meghatározható a testátló hossza! Számítsd ki a kocka testátlóját, ha élei 3 cm-esek!

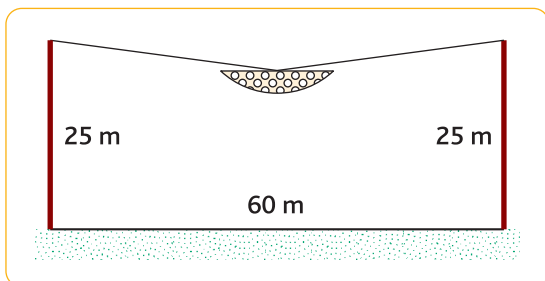
☉ **Készíts vázlatot!**
Számolj!



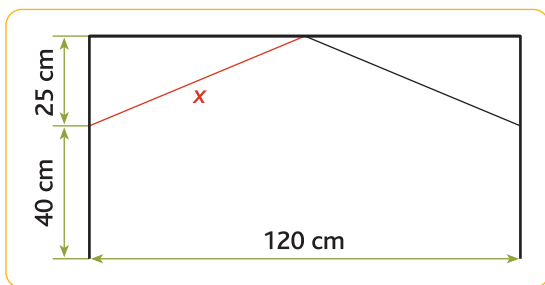


B3

- a) Egy tető gerendázatát szemlélteti az ábra. Határozd meg a hiányzó méreteket!



- b) Egy labdarúgópályára világítást terveznek. Két 25 m magas oszlopot állítanak fel a felezővonal folytatásában, egymástól 60 m távolságra. Az oszlopok tetejére 61 m-es tartóhuzalt akasztanak, és ennek a felezőpontjára szerelik a világítótestet. Milyen magasan van a lámpa a pálya felett?

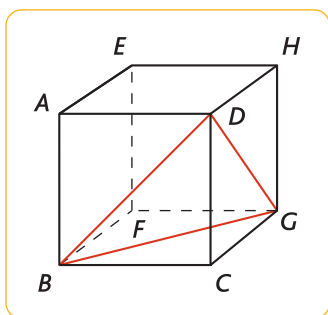


- c) Egy munkaasztal vázlatát mutatja az ábra. Milyen hosszú az x -szel jelölt merevítő?

Gyakorló 6.74–6.80.;
Feladatgyűjtemény
4.1.41–43., 4.1.50–52.

B4

- a) Számítsd ki a téglatest testátlóját, ha élei 3 cm, 4 cm, 5 cm hosszúak!
b) Számítsd ki a négyzetes hasáb testátlóját, ha alapélei 4 cm-esek, oldaléle 5 cm hosszú!



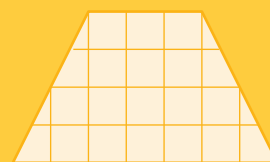
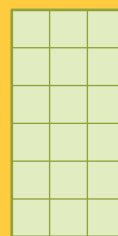
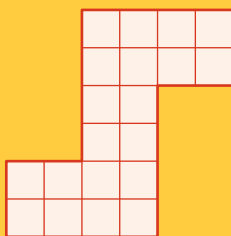
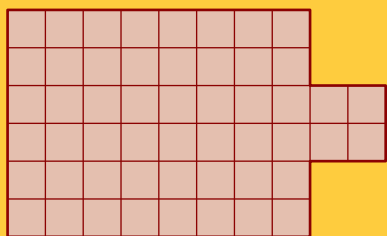
B3

- Egy kocka egyik részét a B , D , G csúcsokon átfektetett síkkal lehasítottuk. Milyen lapok határolják a levágott és a „maradék” testet?
Hány lapja, éle, csúcса van külön-külön a kapott két testnek?
Készítsd el a levágott test – a gúla – hálózátát, ha a kocka éle 6 cm! Számítsd ki a hálózát területét!
Az ismeretlen él kiszámítását Pitagorasz-tétellel végezd!

Fejtörő!



Az alábbi sokszögeket két egyenes vágással darabold át négyzetté úgy, hogy a négyzet legfeljebb három darabból álljon össze!



ÉRDEKESSEGEK A PITAGORASZ-TÉTEL TÖRTÉNETÉBŐL

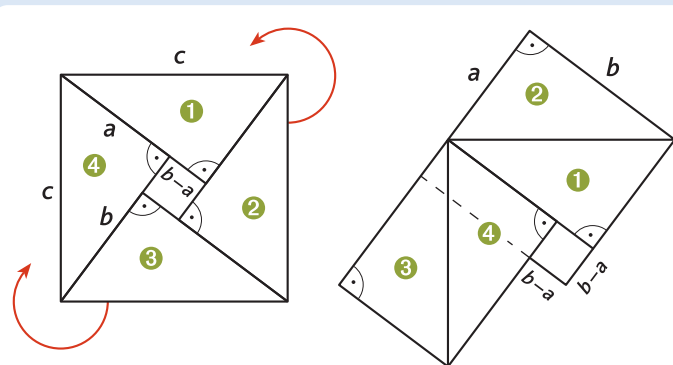
Korábban már említettük, hogy különböző kultúrák matematikusai jóval Püthagorasz előtt ismerték és alkalmazták a Pitagorasz-tételt. Az évezredek során nagyon sok bizonyítás született a tételre.

☉ *Másképpen írjuk Püthagorasz nevét, ha a tételről, illetve ha magáról az emberről van szó.*

Egy indiai matematikus az 1100-as években írt egy verses matematikai feladatgyűjteményt a lányának. Ugyanis megjósolták, hogy a lány csak egy adott időpontban mehet férjhez, máskülönben szerencsétlen lesz. Nos, amikor közeledett a kedvező időpont, a lány izgatottan leste az időmérésre használt vízórát, ám nem vette észre, hogy az óra kifolyóját eltömte egy gyöngyszem. Így elszalasztotta a várva várt pillanatot.

Az apa ezzel a feladatgyűjteménnyel akarta megvigasztalni az elkeseredett lányt. Feladatgyűjteményében ehhez hasonló ábrával bizonyítja a Pitagorasz-tételt.

Ez a bizonyítás a sok száz évvel időszámításunk előtt íródott „A Csou dinasztia napóra könyve” című kínai könyvben is megtalálható (a 3, 4, 5 oldalhosszúságú háromszög esetére).



☉ *Magyarázd el, hogyan bizonyítható a tétel az ábrán látható átdarabolással!*

Egy másik példa a pártában maradt indiai leány matematikakönyvéből.

Kicsit egyszerűsítettük a feladatot.

6. példa

Három öl magas oszlop tetején páva ült. Az oszlop tövében lakott egy kígyó. A páva meglátta a hazaigyekvő kígyót, amely az oszlop tövétől háromszor olyan távol volt, mint az oszlop magassága. A páva egyenes vonalban lecsapott a kígyóra, és elérte, mielőtt az elbújhatott volna. Ha a páva és a kígyó találkozásáig mindkettő ugyanakkora utat tett meg, akkor milyen messze voltak az oszlop tövétől a találkozás pillanatában?



Az oszlop tövétől x távolságban lévő C pontban érje el a páva a kígyót.

A feladat szerint: $AC = CK = 9 - x$

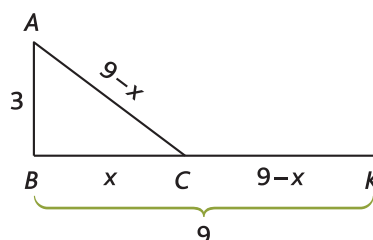
Pitagorasz tétele alapján az ABC háromszögre:

$$(9 - x)^2 = 3^2 + x^2$$

Tervszerű próbálgatással könnyen megtalálhatjuk a megoldást: $x = 4$;

az oszlop tövétől 4 öl távolságra találkoztak.

Keressünk olyan megoldást, amely akkor is alkalmazható, ha próbálgatással nem találjuk meg az eredményt.





$$\begin{aligned}
 (9-x)^2 &= 3^2 + x^2 \\
 (9-x)^2 &= (9-x) \cdot (9-x) = \\
 &= 9 \cdot (9-x) - x \cdot (9-x) = \\
 &= 81 - 9x - 9x + x^2 = \\
 &= 81 - 18x + x^2 \\
 81 - 18x + x^2 &= 3^2 + x^2 \\
 81 - 18x &= 9 \\
 x &= 4
 \end{aligned}$$

Számítsuk ki a bal oldalon álló kifejezés összegalakját.

Két lépésben elvégezzük a szorzást, majd összevonjuk az egyenmű tagokat.

A kapott egyenlet mindkét oldalából elvesszünk x^2 -et. Az egyenletet megoldva megkapjuk az eredményt.

Az oszlop tővétől 4 öl távolságra találkoztak.

FELADATOK

B6

A szél letörte a 32 láb magas bambusznádat úgy, hogy a törés fölötti rész lehajlott, és a vége a talajt a nád tővétől 16 lábnyira éri. Milyen magasan tört el?

Ez a feladat az ókori Kínából származik. Onnan jutott el különböző indiai feladatgyűjteményekbe, majd a középkorban az arabok közvetítésével felbukkant az európai matematikakönyvekben is.

B7

Idomacélból készítik el egy 2,2 m-szer 1,6 m-es kapuszárny keretét az átlósan beépített merevítővel együtt. Mennyi idomacélra van szükség a kapuszárny elkészítéséhez?

A régi indiai matematikusok a következőképpen fogalmaztak:

„Egy téglalap átlóján kifeszített kötél akkora területet határol meg, mint a függőleges és a vízszintes oldalak együttesen.”

© Például:

3, 4, 5; 6, 8, 10; 5, 12, 13

Értelmezés

Az olyan pozitív egész számokból álló számhármassokat, amelyeknél két szám négyzetösszege egyenlő a harmadik szám négyzetével, **pitagoraszai számhármassoknak** nevezzük.

Püthagorasz tanítványai így állítottak elő pitagoraszai számhármassokat:

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	

Felírjuk a négyzetszámok sorozatát, majd az előző sorozat különbségsorozatát. Ha a különbségsorozatban négyzetszámot találunk, akkor az a fölötté lévő két négyzetszámmal együtt három olyan szám, amelyek négyzetgyöke pitagoraszai számhármass. Miért?

> NÉGYSZÖGEK

FELADATOK

- 52** Messünk el két párhuzamos egyenest két másik egyenessel!
Keletkezhets-e így módon

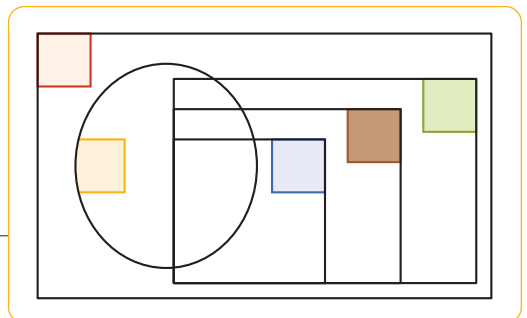
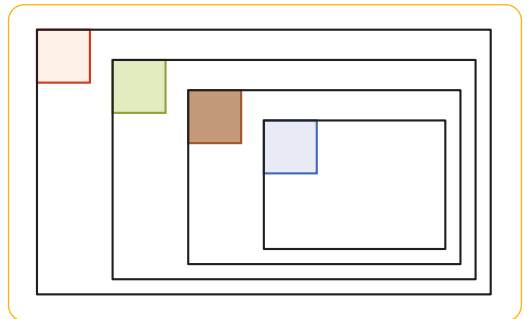
- a) **paralelogramma**; b) **húrtrapéz**; c) **rombusz**; d) **deltoid**;
e) **téglalap**; f) **négyszet**; g) **derékszögű trapéz**?

☉ *A fogalmak értelmezését a kislexikonban is megtalálhatod.*

- 53** Rajzold le nagyítva a halmazábrát, és írd bele a címkéket!
Rajzolj a halmazábra minden részébe megfelelő síkidomokat!

Vonalkázd be az üres halmazt!

- a) A: Négyszögek;
B: 4 tükörtengelyük van;
C: 1-nél több tükörtengelyük van;
D: Tengelyesen szimmetrikus négyszögek
b) N: Négyszögek;
T: Trapézok;
D: Deltoidok;
P: Paralelogrammák;
A: Téglalapok;
B: Négyzetek



- 54** a) Mi a téglalapok és a rombuszok halmazának **metszete**?
b) Mi a trapézok és a paralelogrammák halmazának **különbség-halmaza**?
c) Mi a húrtrapézok és a paralelogrammák halmazának metszete?
d) Mi a derékszögű trapézok és a rombuszok halmazának a metszete?
e) Mi a trapézok és a deltoidok halmazának a különbség-halmaza?
f) Mi a trapézok és a deltoidok halmazának a **közös része**?

☉ *Segíthet az előző két ábra.
Mit értünk két halmaz metszetén, különbségén? (Lásd a kislexikonban.)*

- 55** Minden esetben jelöld meg az egyenesek által közrezárt négyszög egyik szögét, majd színezd ki különbözően azokat a szögeket, amelyek a megjelölt szögnek **egyállású**, **váltó**-, **társ**-, **csúcs**-, **mellékszögei**!

☉ *Lásd a tankönyv 85. oldalán.*

Rajzolj négy egyenest úgy, hogy

- a) téglalaptól különböző paralelogrammát zárjanak közre;
b) téglalaptól különböző húrtrapézt zárjanak közre;
c) paralelogrammától és húrtrapéztől különböző trapézt zárjanak közre;
d) téglalapot zárjanak közre!

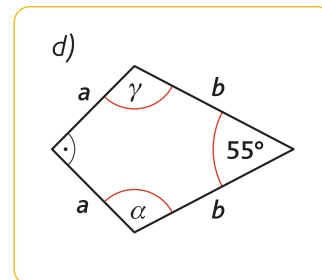
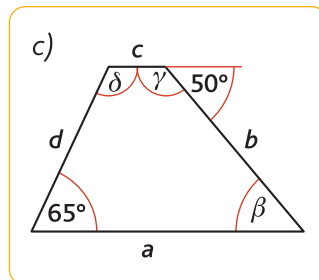
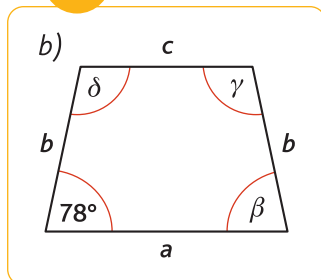
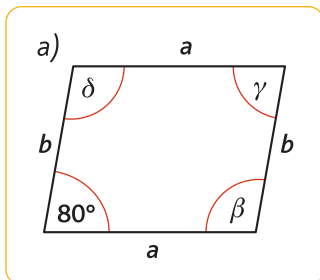


Rajzolj (például négyzetrácsra) téglalapot, amelynek oldalai 3 egység és 15 egység hosszúak! Darabold fel 4 vágással úgy, hogy a darabokból négyzetet rakhass össze!

Fejtörő!

☉ *A Pitagorasz-tétel alkalmazása segíthet.*

56 Határozd meg az ábrákon görög betűkkel jelölt szögeket!



Figyelempróba

57 Egy $ABCD$ négyszögben a $B\angle$ kétszerese az $A\angle$ -nek, a $C\angle$ 30° -kal kisebb a $B\angle$ -nél, a $D\angle = 90^\circ$. Mekkora a négyszög szögei?

Gyakorló

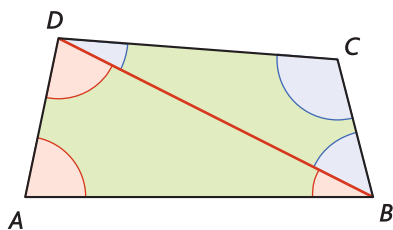
6.81–6.90.;

Feladatgyűjtemény

4.1.20–21., 4.1.24–27.

- 58** a) Szerkessz négyzetet, ha átlója 4 cm! Számítsd ki a kerületét, területét!
- b) Szerkessz téglalapot, amelynek két oldala 3,6 cm és 4,8 cm! Számítsd ki a kerületét és az átlók hosszát!
- c) Szerkessz paralelogrammát, amelynek két oldala 3 cm és 4 cm, egy szöge 60° ! Mekkora a paralelogramma többi szöge, a kerülete és a területe?
- d) Szerkessz deltoidot, ha két oldala 2,5 cm és 4 cm, a két oldal által közbezárt szög 135° ! Mekkora a deltoid kerülete?
- e) Szerkessz rombuszt, amelynek oldala 4 cm, magassága 3 cm!

Összefoglalás



A **négyszögnek** négy csúcsa és négy oldala van.

Egy átlóval két háromszögre bontható, ezért a **négyszög belső szögeinek összege**: $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$

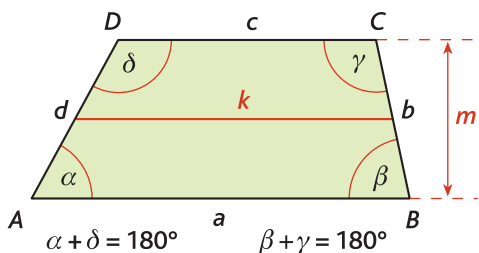
Trapéznek nevezünk egy négyszöget, ha vannak párhuzamos oldalai. A két párhuzamos oldalt (a és c) a trapéz **alapjainak**, a másik két oldalt a trapéz **szárainak** nevezzük.

A párhuzamos oldalegyenesek m távolsága a **trapéz magassága**.

A trapéz egy száron fekvő szögei társszögek (kiegészítő szögek).

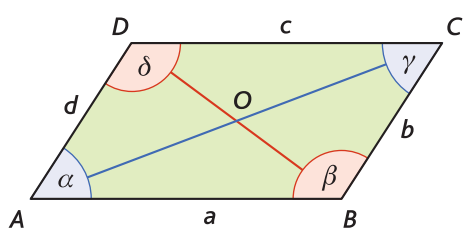
A szárok felezőpontját összekötő k szakasz a **trapéz középvonala**.

$$k = \frac{a + c}{2}$$



Paralelogrammának nevezünk egy négyszöget, ha két-két oldala párhuzamos. A paralelogrammának két **magassága** van, a két-két párhuzamos oldal távolsága.

A **paralelogramma középpontosan tükrös trapéz**. A középpontos szimmetria miatt két-két szemközti oldalának hossza egyenlő, szemközti szögei váltószögek, egyenlők. Szomszédos szögei társszögek, tehát kiegészítő szögek. Átlói felezik egymást. Az átlók metszéspontja a szimmetria-középpont.



»»

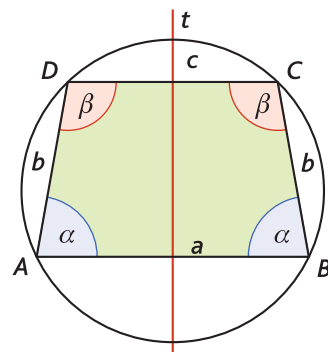
Körbe írható trapéz (húrtrapéz) nevezzük az olyan trapézt, amelyik köré kör szerkeszthető.

A körbe írható trapéznek van csúcsot nem tartalmazó szimmetriatengelye.

A tengelyes szimmetria miatt a húrtrapéz egyenlő szárú, és az egy alapon fekvő szögei egyenlők.

Az egy száron fekvő szögei társszögek.

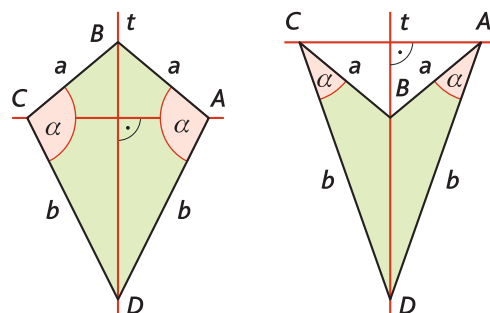
Átlói egyenlők.



Deltoid nevezzük a négyszöget, ha van szimmetriaátlója, vagyis csúcsot tartalmazó szimmetriatengelye.

A deltoid két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú,

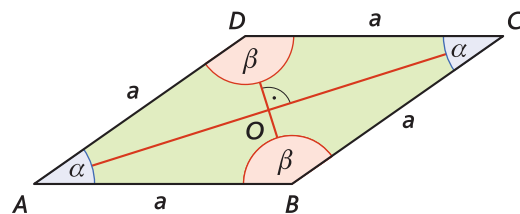
A deltoid átlói merőlegesek egymásra.



Rombus nevezzük az egyenlő oldalú négyszöget.

A rombusz speciális trapéz, speciális paralelogramma, speciális deltoid.

Mindkét átlója szimmetriaátló, ezek merőlegesen felezik egymást.

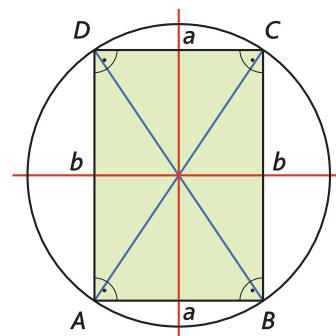


Téglalap nevezzük az egyenlő szögű négyszöget.

A téglalap speciális derékszögű trapéz, speciális húrtrapéz, speciális paralelogramma.

Átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást.

Mindkét oldalfelező merőlegese szimmetriatengely.

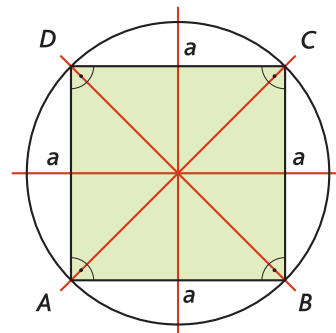


Négyzet nevezzük a szabályos (azaz egyenlő oldalú és egyenlő szögű) négyszöget.

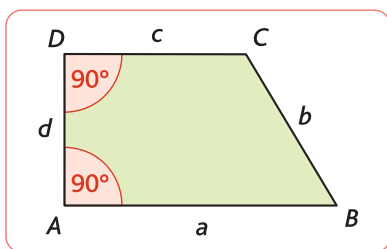
A négyzet húrtrapéz és derékszögű trapéz, egyenlő oldalú, derékszögű paralelogramma, illetve deltoid, derékszögű rombusz, egyenlő oldalú téglalap (rendelkezik ezek tulajdonságaival).

Mindkét átlója és mindkét oldalfelező merőlegese szimmetriatengely.

Az átlók egyenlő hosszúak, és merőlegesen felezik egymást.



»»



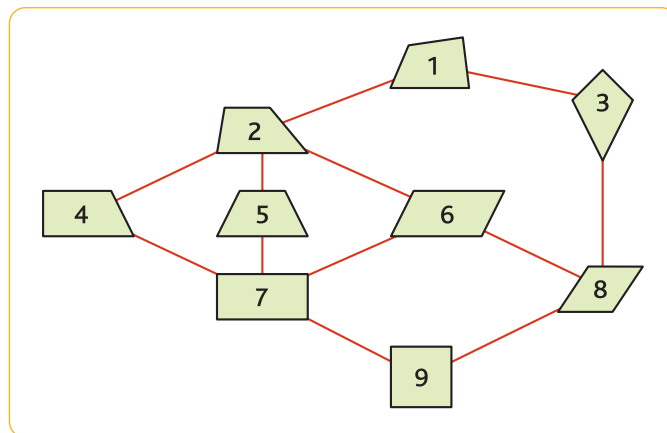
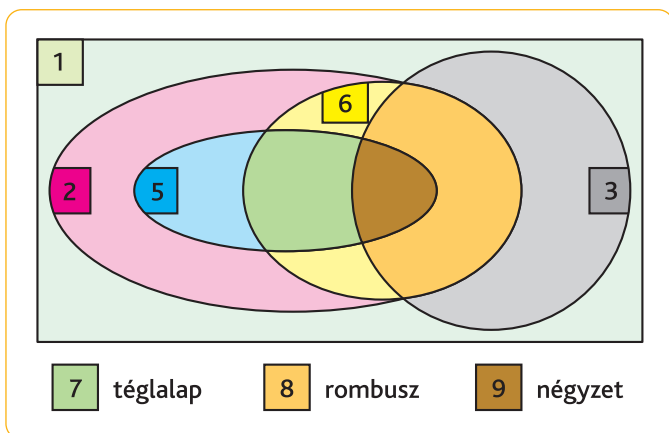
»

Derékszögű trapéznak nevezzük a trapézt, ha van derékszöge.

A téglalap, és így a négyzet is speciális derékszögű trapéz.

☉ *Készítsétek a négyszögek összefoglalását bemutató prezentációt! Párban dolgozzatok!*

A következő ábrák a négyszögek különböző részalmazai közti kapcsolatot szemléltetik:



A SOKSZÖGEK TERÜLETE

FELADATOK

59

Egészítsd ki a következő egyenlőségeket!

a) $1 \text{ m}^2 = \text{ } \text{dm}^2 = \text{ } \text{cm}^2 = \text{ } \text{mm}^2$

b) $4,5 \text{ m}^2 = \text{ } \text{dm}^2 = \text{ } \text{cm}^2 = \text{ } \text{mm}^2$

c) $0,35 \text{ km}^2 = \text{ } \text{ha} = \text{ } \text{m}^2 = \text{ } \cdot 10 \text{ } \text{m}^2$

Többet ésszel ...

☉ *Figyeld meg a fenti ábrákról leolvasható összefüggéseket!*



Írj I, illetve H betűt a kis négyzetbe aszerint, hogy igaz vagy hamis-e az állítás!

A: Bármely paralelogramma egyenlő szárú trapéz.



B: Minden paralelogramma húrtrapéz.



C: Bármely rombusz tengelyesen szimmetrikus trapéz.

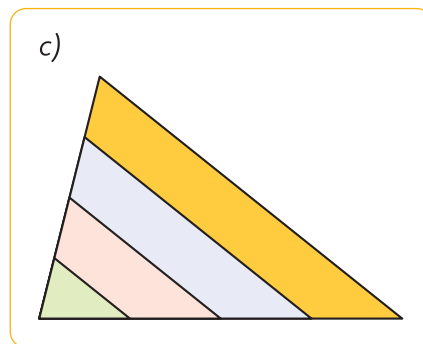
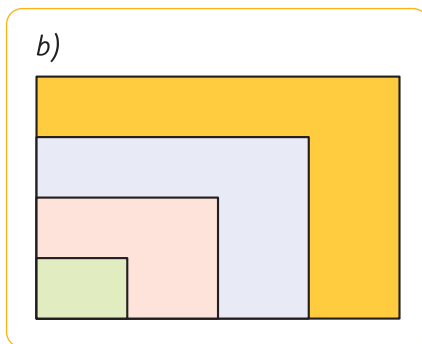
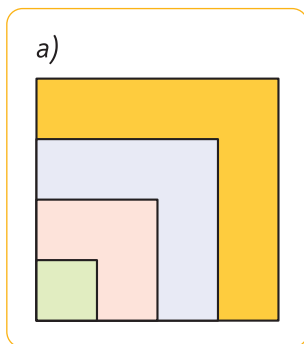


D: Van olyan rombusz, amely nem húrtrapéz.



Miért nem helyes a „húrtrapéz” elnevezés helyett az „egyenlő szárú trapéz”, illetve a „szimmetrikus trapéz”, elnevezést használnunk?

60 A zöldre színezett terület 1 egység. Mennyi az egyes „sávok” területe?



61 Ha egy-egy tő hagymának körülbelül 50 cm^2 termőterület kell, akkor hány tő hagyma fér el egy hektár földön?

62 Ábrázoljátok derékszögű koordináta-rendszerben a következő háromszögeket és négyszögeket, majd (a hálót is felhasználva) határozzátok meg a területüket az egységnégyzethez viszonyítva!

- a) $A(-10; 6)$, $B(-7; 6)$, $C(-7; 8)$, $D(-10; 8)$
- b) $A(-2; 8)$, $B(-5; 6)$, $C(-2; 6)$
- c) $A(-6; 2)$, $B(0; 2)$, $C(4; 8)$, $D(-2; 8)$
- d) $A(-6; 2)$, $B(0; 2)$, $C(4; 8)$
- e) $A(6; 6)$, $B(11; 6)$, $C(10; 8)$, $D(7; 8)$
- f) $A(-12; 2)$, $B(-7; 2)$, $C(-9; 4)$, $D(-13; 4)$
- g) $A(6; 2)$, $B(7; 0)$, $C(10; 2)$, $D(7; 4)$

☉ *Párban, feladatmegosztással dolgozzatok! Írjátok föl képlettel is a megrajzolt sokszögek területét (szokásos jelölésekkel)!*

63 Egy trapéz három csúcsának koordinátái: $(0; 0)$; $(2; 4)$; $(10; 0)$. Add meg a negyedik csúcsot úgy, hogy

- a) paralelogrammát; b) húrtrapézt kapj!
- Számítsd ki a területüket!

☉ *Van-e olyan megoldás, amely húrtrapéz és paralelogramma is?*



Alakítsd át az $ABCD$ négyzetet két vágással olyan téglalappá, amelynek egyik oldala olyan hosszú, mint az EF szakasz!

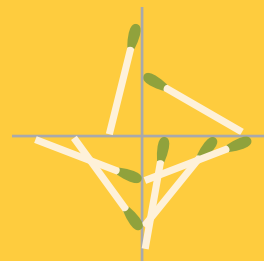
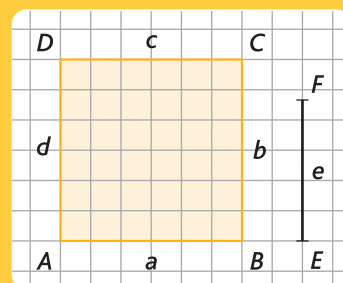


Egy ábrán valahány négyszög látható: egy közülük négyzet, kettő téglalap, kettő rombusz, három paralelogramma, három deltoid, öt trapéz, és más nincs. Rajzold le ezt az ábrát! Legalább, illetve legfeljebb hány négyszög van az ábrán?



Helyezz el a koordináta-rendszerben gyufaszálakat úgy, hogy egy-egy gyufa két vége különböző tengelyekre essen. Mi a sejtésed? Milyen alakzatra illeszkednek a gyufák felezőpontjai?

☉ *Tudod igazolni a sejtésedet?*



☉ A szokásos jelöléseket használd!
Ha elfelejtetted a képleteket, akkor lapozz egyet előre! Figyeld meg, melyik sokszög esetében hány adatra van szükség!

64 Válaszd ki a szükséges adatokat, és számítsd ki a négyszögek területét!

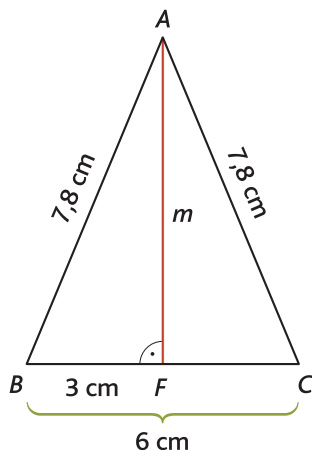
- a) Négyzet: $a = 0,34$ dm; átlója: $d \approx 0,48$ dm
b) Téglalap: $a = 2,5$ cm; $b = 4,6$ cm
c) Paralelogramma: $a = 2,8$ m; $b = 4,0$ m; $m_b = 2,5$ m
d) Rombusz: $a = 5$ dm; $e = 6$ dm; $f = 8$ dm; $m \approx 4,8$ dm
e) Trapéz: $a = 8$ cm; $c = 6$ cm; $m = 0,5$ dm
f) Deltoid: $a = 5$ dm; $e = 4$ dm; $f = 7$ dm

65

- a) Add meg az 1 cm, 2 cm, 3,5 cm, 4 cm oldalú négyzetek kerületének és területének arányát!
b) Egy téglalap mindegyik oldalát 2-szeresére, 3-szorosára, 5-szörösére, 3,5-szeresére változtatjuk. Add meg az így kapott téglalapok kerületének és területének arányát!

1. példa

Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6,0 cm, szárai 7,8 cm-esek.
Határozzuk meg a háromszög területét.



Az alaphoz tartozó magasságvonal tükörtengelye a háromszögnek, az F pontban felezi az alapot.

Az $ABF\triangle$ derékszögű háromszög. AF befogója az alaphoz tartozó m magasság. Ezért a Pitagorasz-tétel alapján:

$$3,0^2 + m^2 = 7,8^2 \quad | -3,0^2$$

$$m^2 = 7,8^2 - 3,0^2$$

$$m^2 = 60,84 - 9,00 = 51,84$$

Mindkét oldalból négyzetgyököt vonva: $m = 7,2$ ($m \geq 0$)

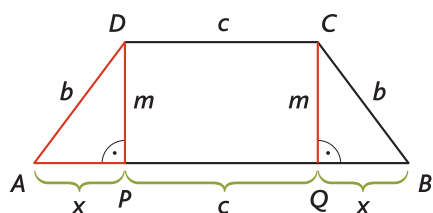
A háromszög magassága: $m = 7,2$ cm

$$\text{A háromszög területe: } T = \frac{am}{2} = \frac{6,0 \cdot 7,2}{2} = 21,6$$

$$T = 21,6 \text{ cm}^2$$

2. példa

Egy húrtrapéz alapjai: $a = 9,9$ cm; $c = 5,1$ cm; szárai: $b = d = 4,0$ cm.
Határozzuk meg a húrtrapéz területét.



Feladatunk egy olyan derékszögű háromszög kialakítása, amelynek egyik oldala az ismeretlen magasság.

Jelölje a szárak alapra eső merőleges vetületét x .

Az ábra szerint: $PQ = c = 5,1$ cm

$$\text{Ezért: } x = (9,9 \text{ cm} - 5,1 \text{ cm}) : 2 = 2,4 \text{ cm}$$

»»

Az $APD\triangle$ derékszögű háromszög.

Az $APD\triangle$ PD befogója a trapéz m magassága.

Ezt a Pitagorasz-tétel alapján meghatározhatjuk:

$$2,4^2 + m^2 = 4,0^2 \quad | -2,4^2$$

$$m^2 = 4,0^2 - 2,4^2$$

$$m^2 = 16,00 - 5,76 = 10,24$$

Mindkét oldalból négyzetgyököt vonva: $m = 3,2$ ($m \geq 0$)

A trapéz magassága: $m = 3,2$ cm

$$A \text{ trapéz területe: } T = \frac{a+c}{2} \cdot m = \frac{9,9+5,1}{2} \cdot 3,2 = 24,0$$

$T = 24,0 \text{ cm}^2$ (Tized pontosságú adatokkal dolgoztunk.)

FELADATOK

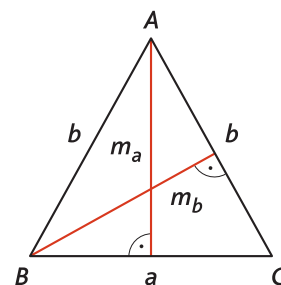
66

Határozd meg az egyenlő szárú háromszög keresett adatait, majd számítsd ki a kerületét és a területét!

a) $a = 5,4$ cm, $b = ?$, $m_a = 3,6$ cm, $m_b = ?$

b) $a = ?$, $b = 2,6$ dm, $m_a = 2,4$ dm, $m_b = ?$

c) $a = 5,6$ cm, $b = 3,5$ cm, $m_a = ?$, $m_b = ?$



67

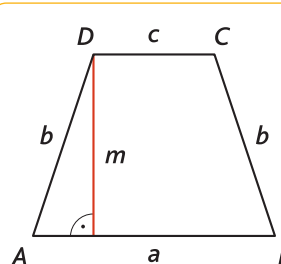
Határozd meg a húrtrapéz keresett adatait, majd számítsd ki a kerületét és területét!

a) $a = 10$ cm, $b = 6,5$ cm, $c = 5$ cm, $m = ?$

b) $a = 26$ cm, $b = ?$, $c = 14$ cm, $m = 8$ cm

c) $a = ?$, $b = 3,5$ cm, $c = 5$ cm, $m = 2,1$ cm

d) $a = 7,5$ cm, $b = 10$ cm, $c = ?$, $m = 6$ cm



68

Határozd meg a négyszög keresett adatait!

a) Paralelogramma: $a = 12$ cm, $b = 8$ cm, $\alpha = 60^\circ$;

$m_a = ?$ $m_b = ?$ $K = ?$ $T = ?$

b) Rombusz átlói: $e = 6$ cm, $f = 8$ cm;

$a = ?$ $m = ?$ $K = ?$ $T = ?$

c) Deltoid szimmetriaátlója: $e = 7,2$ cm; másik átlója: $f = 3,6$ cm;

az f átló $1:2$ arányban metszi a szimmetriaátlót.

$a = ?$ $b = ?$ $K = ?$ $T = ?$

© Készíts vázlatot!

Gyakorló

7.13–7.44., 7.55.;

Feladatgyűjtemény

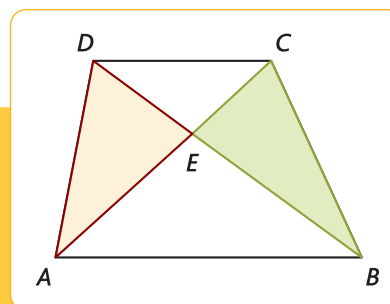
4.1.28–33.,

4.1.38–40., 4.1.44.,

4.1.46., 4.1.49., 4.4.14.



Igazold, hogy a trapézban a két kiszínezett háromszög egyenlő területű!



Emlékeztető

A **mérés** egy adott vagy választott mértékegységgel való összehasonlítás.

A **terület** szokásos mértékegységei azoknak a négyzeteknek a területe, amelyeknek az oldala egy hosszúságegység:

az 1 mm oldalhosszúságú négyzet területe **1 mm²**;

az 1 cm oldalhosszúságú négyzet területe **1 cm²**.

A gyakorlatban területmérésre használjuk még a **hektárt**, a 100 m oldalú négyzet területét, jele: **1 ha**.

A terület mértékegységei között úgy célszerű megkeresnünk a kapcsolatot, hogy a másik hosszúságegység segítségével kiszámítjuk a négyzet területét. Például:

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 10^2 \text{ cm} = 10^3 \text{ mm}; \quad \text{ezért}$$

$$1 \text{ m}^2 = 10 \cdot 10 \text{ dm}^2 = 10^2 \cdot 10^2 \text{ cm}^2 = 10^3 \cdot 10^3 \text{ mm}^2, \quad \text{vagyis}$$

$$1 \text{ m}^2 = 10^2 \text{ dm}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 10^6 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ ha} = 100 \cdot 100 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ km}^2 = 10 \cdot 10 \text{ ha} = 1000 \cdot 1000 \text{ m}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2 = 10^6 \text{ m}^2$$

A SPECIÁLIS NÉGYSZÖGEK ÉS A HÁROMSZÖG TERÜLETE

☉ Mely síkidom területének kiszámítására vezethető vissza a paralelogramma területének kiszámítása? Hogyan?

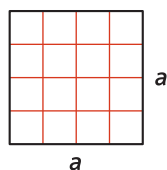
☉ Melyik geometriai transzformáció segítségével vezettük vissza a trapéz területének kiszámítását a paralelogramma területének kiszámítására?

☉ Mi olvasható le a második ábráról?

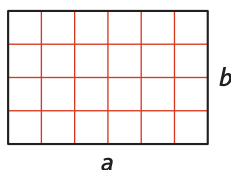
☉ Hogyan kaptuk meg a deltoid területképletét?

☉ Hogyan számítható ki a rombusz területe? Miért?

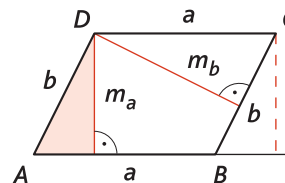
Négyzet: $T = a^2$



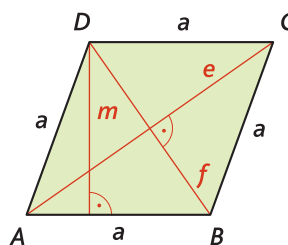
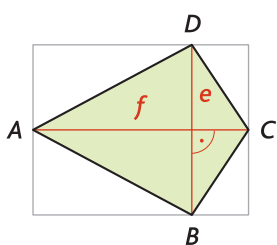
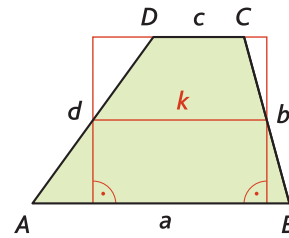
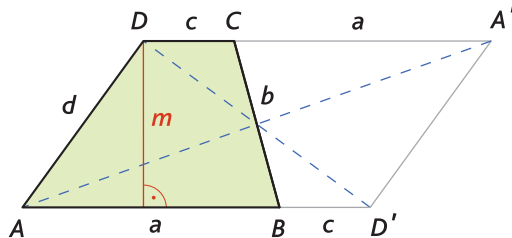
Téglalap: $T = a \cdot b$



Paralelogramma: $T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$



Trapéz: $T = \frac{(a+c) \cdot m}{2} = \frac{(a+c)}{2} \cdot m = k \cdot m$ (k = középvonal)



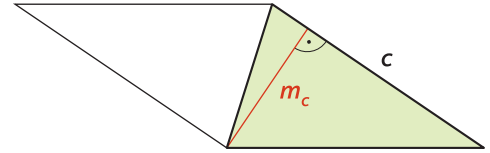
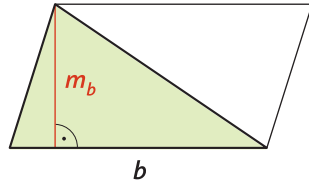
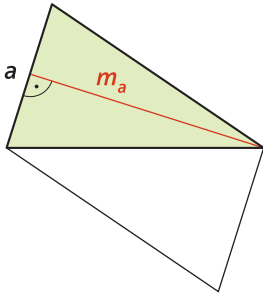
Deltoid: $T = \frac{e \cdot f}{2}$

Rombusz:

$$T = a \cdot m = \frac{e \cdot f}{2}$$

»»

>>>



Háromszög: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$

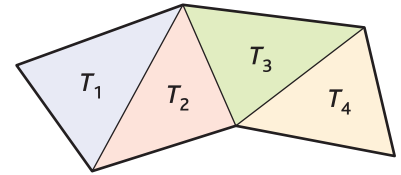
☉ Mi olvasható le az ábrákról?

TETSZŐLEGES SOKSZÖG TERÜLETÉNEK KISZÁMÍTÁSA

Bármely sokszög háromszögekre darabolható.

A részek területének összege megegyezik az egész területtel.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \dots$$



> A KÖR KERÜLETE, TERÜLETE

Emlékeztető

Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra.

A kör kerülete:

a sugár hosszával kifejezve:

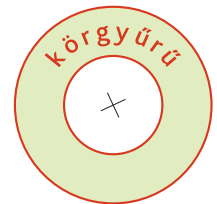
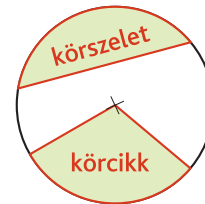
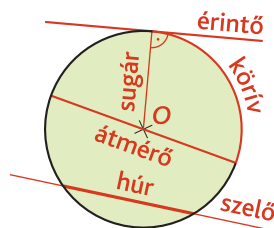
$$K = 2 \cdot r \cdot \pi \approx 2 \cdot r \cdot 3,14$$

az átmérő hosszával kifejezve:

$$K = d \cdot \pi \approx d \cdot 3,14$$

A kör területe:

$$T = r^2 \cdot \pi \approx r^2 \cdot 3,14$$

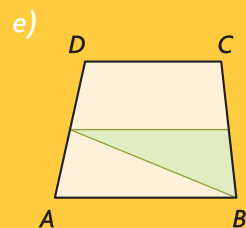
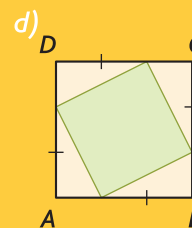
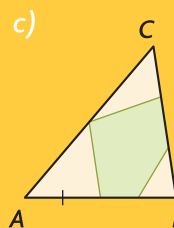


☉ A π nem racionális szám, végtelen nem szakaszos tizedestört alakban írható föl: $\pi = 3,141\ 592\ 653\ 5\dots$ Ha számításainkban nagyobb pontosságra törekszünk, akkor a 3,14 helyett a 3,142 vagy a 3,1416 stb. közelítő értékkel kell számolnunk.



Mekkora a zöld síkidom területe, ha az $ABC\triangle$, illetve az $ABCD$ négyszög területe az egység? (Az oldalakat egyenlő részekre osztottuk.)

Fejtörő!

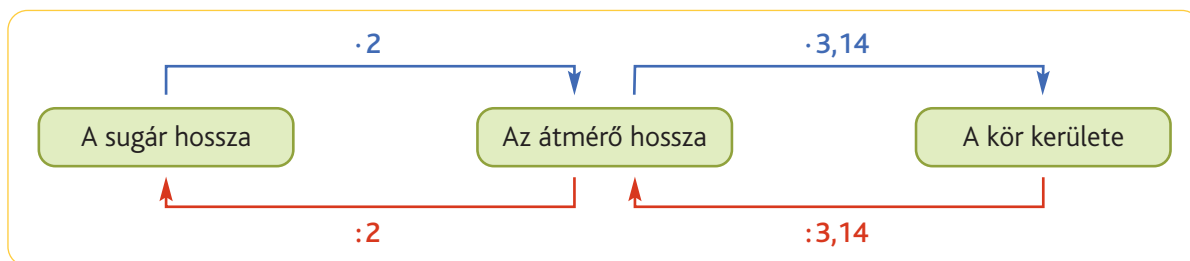


FELADATOK

Gyakorló
6.21–6.30.;
Feladatgyűjtemény
4.1.08–14.

- 69 Számítsd ki a kör kerületét és területét, ha
- a) $r = 6$ dm; b) $r = 6$ cm; c) $r = 6$ mm; d) $r = 6$ m;
e) $r = 5,8$ dm; f) $d = 4,30$ dm; g) $d = 5,6$ m; h) $d = 22,3$ m!

- 70 Egy kör kerülete 100,5 mm. Mekkora a kör átmérője, illetve sugara?



- 71 Számítsd ki a kör hiányzó adatait!

Sugár (cm)	2,5							10
Átmérő (cm)		4,8	100					
Kerület (cm)				84,4	289			
Terület (cm ²)						78,54	7,07	

- 72 Rajzolj azonos középpont köré 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm és 5 cm sugarú köröket! Add meg a keletkezett körgyűrűk területeinek az arányát!

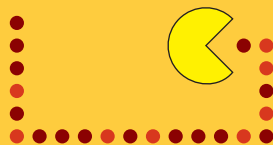
Figyelempróba

• Jelöld meg a helyes választ betűjelét!



Csaba 4 m átmérőjű, kör alakú ágyásba 200 palántát ültetett el.

- a) Körülbelül hány palántát ültetett Csaba 1–1 négyzetméter területre?
b) Megmaradt 100 tő palánta. Ezért Csaba az eredeti másfélszeresére növelte az ágyás átmérőjét, és abba ugyanolyan sűrűn, mint korábban, folytatta a palánták ültetését.
- A: Miután a megnövelt ágyást teleültette Csaba, megmaradt még 50 tő palánta.
B: A megnövelt ágyásba éppen elegendő a megmaradt 100 tő palánta.
C: A megnövelt ágyás területének felére elegendő a 300 tő palánta.
D: A megnövelt ágyás területének kétharmad részébe elegendő a 300 tő palánta.



Egy népszerű számítógépes játék főszereplője egy sárga körcikk alakú lény (lásd az ábrát!). A teljes kör lapból mindössze a szája hiányzik. Számítsd ki hősünk kerületét, ha a kör átmérője 1 cm, a száját jelképező körcikk pedig éppen

- a) derékszögben; b) 60°-ban van nyitva!

> A TESTEKRŐL TANULTAK ÁTTEKINTÉSE, KIEGÉSZÍTÉSE

> SOKSZÖGLAPOKKAL HATÁROLT TESTEK

FELADATOK

73 Rajzolj ilyen halmazábrát! Melyik címke hová való?

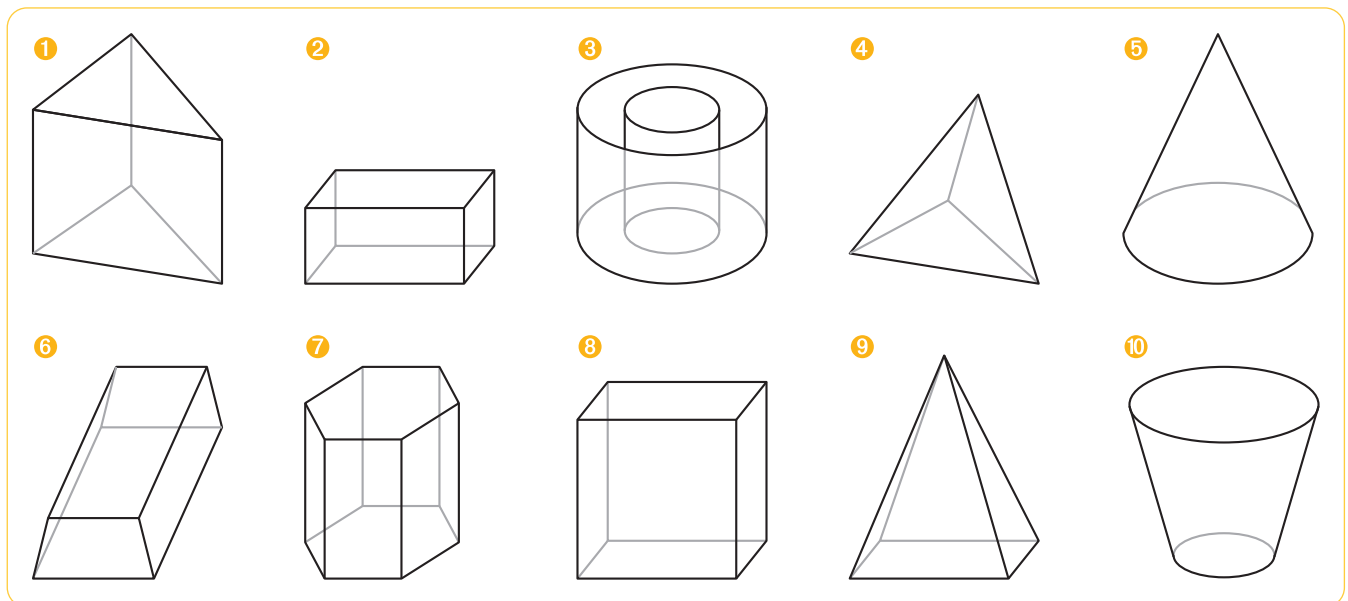
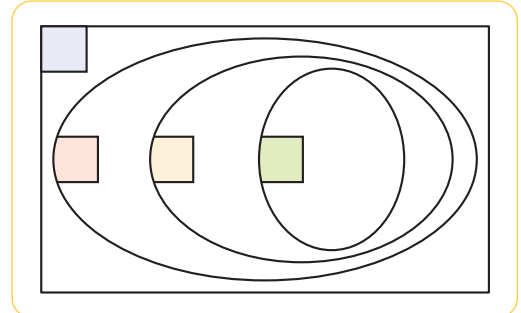
U : {Testek};

A : {Hasábok};

B : {Téglatestek};

C : {Sokszöglapokkal határolt testek}

☉ Írd be az ábrák sorszámát a halmazábra megfelelő helyére!



74 Az előző ábrán megrajzolt testek közül melyekre igaz az állítás?

A: Csak síklapok határolják.

B: Minden lapja sokszög.

C: Minden lapja négyszög.

D: Van négyszöglapja.

E: Minden lapja háromszög.

F: Van háromszöglapja.

G: Van párhuzamos lappárja.

H: Minden lapja egybevágó.

I: Van olyan csúcsa, amelyikben 3-nál több él fut össze.

☉ A testek sorszámával válaszolj!

75 a) Vázold föl az előző ábrán látható **sokszöglapokkal határolt testek hálóját!**

☉ Készíts el ezek közül néhányat!

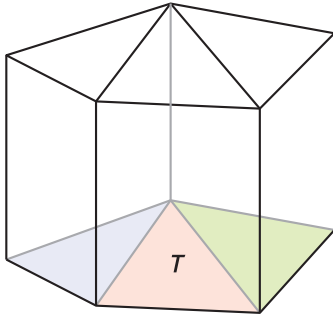
b) Rajzold meg az előző ábrán látható **1** és **9** testnek a **felülnézetét, elölnézetét, oldalnézetét!**

☉ Válassz méreteket!

Szerkeszd meg a **7** test (szabályos hatszög alapú hasáb) testátlóinak hosszát a látászati képek segítségével!

AZ EGYENES HASÁB

Összefoglalás



Egyenes hasábnak nevezzük a sokszöglapokkal határolt testet, ha két egybevágó párhuzamos sokszöglap és annyi téglalap határolja, ahány oldalú a sokszög.

A két sokszög a hasáb két **alaplaja**, a téglalapok az **oldallapjai**.

Az alaplapokat határoló élek az **alapélek**.

Az oldallapok az **oldalélekben** találkoznak.

Az egyenes hasáb oldalélei egyenlők és merőlegesek az alaplapokra.

Az egyenes hasáb **magassága**, a két alaplap távolsága egyenlő az oldalélekkel.

A téglatest speciális hasáb, a kocka speciális téglatest (így speciális hasáb).

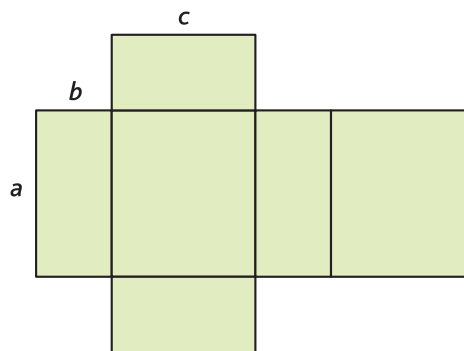
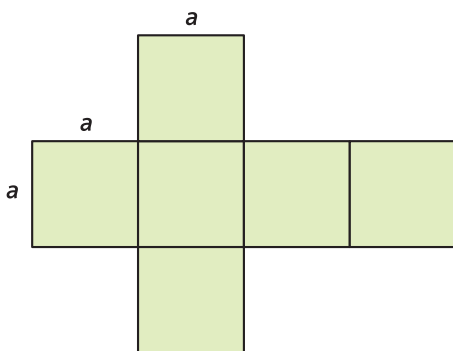
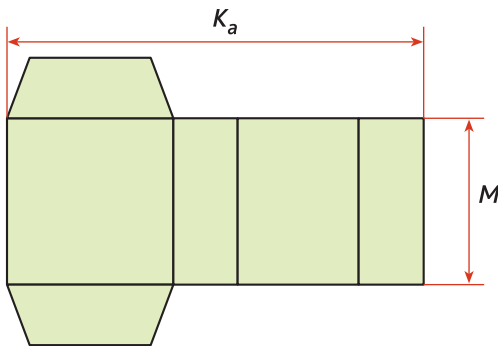
Az **egyenes hasáb felszíne** a két alaplap (T_a) és a palást (T_p) területének az összege.

A **palást** kiterítve olyan téglalap, amelynek két szomszédos oldala az alaplap kerülete (K_a) és az alkotó ($= M$).

$$A = 2T_a + T_p = 2T_a + K_a \cdot M$$

A **kocka felszíne:** $A = 6 \cdot a^2$

A **téglatest felszíne:** $A = 2 \cdot (ab + ac + bc)$



A 73. feladatban (az előző oldalon) lerajzolt sokszöglapokkal határolt testek közül melyekre igaz, hogy az élek száma 2-vel kevesebb, mint a csúcsok és a lapok számának összege?



Gyufásdobozokból sokszöglapokkal határolt testet építettünk (lásd a margón). Hány csúcsa, lapja, éle van ennek a testnek? Hasonlítsd össze a csúcsok és a lapok számának összegét az élek számával! Mit tapasztalsz?

A TESTEK TÉRFOGATA

Ha a kocka minden éle 1 hosszúságegység, akkor (megállapodás szerint) **a kocka térfogata 1 térfogategység.** Például:

az 1 cm élhosszúságú kocka térfogata **1 cm³**;

az 1 dm élhosszúságú kocka térfogata **1 dm³**;

az 1 m élhosszúságú kocka térfogata **1 m³**

A térfogat mértékegységei között úgy célszerű megkeresnünk a kapcsolatot, hogy a másik hosszúságegység segítségével kiszámítjuk a kocka térfogatát.

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} \quad = 100 \text{ cm} \quad = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ m}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ dm}^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ cm}^3 = 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3 \quad = 10^6 \text{ cm}^3 \quad = 10^9 \text{ mm}^3$$

Emlékeztető

Az a élhosszúságú **kocka térfogata:**

$$V = a^3$$

A **téglatest térfogata** az egy csúcsban találkozó három él szorzata:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

A **hasáb térfogata az alaplap területének (T_a) és a magasságnak (M) a szorzata:**

$$V = T_a \cdot M$$

Az **űrtartalom** mérésének egysége az **1 liter** (jele: 1 l); $1 \text{ l} \approx 1 \text{ dm}^3$.

$1 \text{ l} = 10$ **deciliter** (dl) = 100 **centiliter** (cl) = 1000 **milliliter** (ml)

Nagyobb egység a **hektoliter** (jele hl); $1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$.

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 \approx 1000 \text{ l} = 10 \text{ hl}$$

☉ **Figyeld meg:**

$$1 \text{ ml} \approx 1 \text{ cm}^3;$$

$$1 \text{ cl} \approx 10 \text{ cm}^3;$$

$$1 \text{ dl} \approx 100 \text{ cm}^3$$

FELADATOK

76 Írd be a hiányzó mérőszámokat!

a) $1 \text{ m}^3 = \text{ } \text{dm}^3 = \text{ } \text{cm}^3 = \text{ } \text{mm}^3$

b) $0,15 \text{ m}^3 = \text{ } \text{dm}^3 = \text{ } \text{cm}^3 = \text{ } \text{mm}^3$

c) $\text{ } \text{m}^3 = \text{ } \text{dm}^3 = 120 \text{ cm}^3 = \text{ } \text{mm}^3$

d) $1 \text{ dm}^3 = \text{ } \text{l} = \text{ } \text{dl} = \text{ } \text{cl} = \text{ } \text{ml} = 10 \text{ } \text{mm}^3$

e) $1800 \text{ dm}^3 = \text{ } \text{l} = \text{ } \text{hl} = \text{ } \text{m}^3 = \text{ } \text{cl} = \text{ } \text{cm}^3$

☉ *Találsz-e olyan derékszögű háromszöget, amelynek átfogója a testátló?*

Gyakorló
7.41–7.50.;
Feladatgyűjtemény
4.3.01–09.

Figyelempróba

☉ *Megfigyelted, hogy az oldallapok melyik alapfelülethez kapcsolódnak?*

☉ *Felvázoltad a keresztmetszetet? Kiszámítható a keresztmetszet magassága?*

77

- a) Határozd meg az 5 cm élű kocka lapátlójának a hosszát!
Határozd meg az egyik testátlójának a hosszát is!
b) Egy téglatest élei: 3 cm, 4 cm, 12 cm. Határozd meg testátlójának hosszát!

78

- a) Egy kocka egyik lapjának területe $5,76 \text{ cm}^2$. Mekkora a térfogata és a felszíne?
b) Mekkora az 1 cm, 2 cm és 5 cm élű kockák
① felszínének aránya; ② térfogatának aránya?
c) Egy 5,4 m hosszú, 360 cm széles, 2 m 70 cm magas szobát ki akarunk festeni. Mennyibe kerül, ha a mester négyzetméterenként 2,50 €-t kér? (Az ablakok és az ajtók területe mintegy 6 m^2 .)
Megoldható-e a szoba fűtése azzal a fűtőtesttel, amely 60 m^3 -es lakóteret képes befűteni?
d) Egy téglatest alakú betonlap méretei 45 cm; 90 cm; 5 cm. Mekkora a betonlap tömege, ha 1 dm^3 beton tömege 2,2 kg?
e) Egy szoba 5,6 m hosszú és 3,2 m magas. Az alapterülete $24,64 \text{ m}^2$. Milyen széles a szoba? Mekkora a térfogata?
f) Egy kocka alakú zárt tartály $13,5 \text{ m}^2$ lemezből készült. Mekkora a tartály egy éle? Hány köbméter víz fér a tartályba?

79

- Vázold föl az 5 cm magas egyenes hasáb hálóját, számítsd ki a felszínét és térfogatát, ha alaplapja
a) 5 cm-es oldalú négyzet; b) 4 cm-es oldalú négyzet;
c) olyan téglalap, amelynek oldalai 3 cm, 4,5 cm;
d) olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja 6 cm, magassága 4 cm;
e) 5 cm-es oldalú szabályos háromszög;
f) olyan rombusz, amelynek egy oldala 4 cm, a magassága 3 cm hosszú;
g) olyan rombusz, amelynek két átlója 4,2 cm és 5,6 cm hosszú;
h) olyan húrtrapéz, amelynek alapjai 4 cm, 7 cm hosszúak, magassága: 2 cm!

80

- Egy húrtrapéz keresztmetszetű 25 m hosszú töltés alapjának szélessége 16 m, tetejének szélessége 4 m, a rézsű (lejtős oldal) hossza 7,5 m.
Hány fordulóval hordhatta össze az a munkagép a töltést, amely 30 t földet tud szállítani, ha 1 m^3 föld tömege 1,5 t volt?

Gyűjtőmunka

☉ *Az árakat az interneten kereshetitek meg. A szelvényes megoldások növelik az ajánlat értékét.*



Rajzoljátok meg közösen egy lakás alaprajzát. Csoportmunkában készítsetek árajánlatot a szobák (esetleg nyílászárók) festésére, a mellékhelyiségek és a konyha falának és padlózatának burkolására, a szobák padlózatának elkészítésére stb. Az árajánlat tartalmazza az anyagköltséget, a szállítások díját és a munkadíjat is. Az a „brigád” nyer, amelyik a legteljesebb, pontos és a valóságnak legjobban megfelelő árajánlatot adja.

EGYENES KÖRHENGER

A körhenger olyan test, amelyet két párhuzamos körlap és egy görbe felület határol.

Henger alakú a legtöbb edény, a konzervdobozok, a pénzérmék stb. Hengerfelülettel modellezhető a hirdetőoszlop, a vezeték szigetelése. Hengernek (hengertestnek) tekinthető a vezetékben lévő fémhuzal, az edényt vagy a csövet kitöltő vízmennyiség.



Összefoglalás

Az AB egyenes **hengerfelületet** súrol, ha egy vele párhuzamos t egyenes körül 360° -kal elforgatjuk. Ez a t egyenes a hengerfelület **tengelye**. Ha ezt a felületet a tengelyre merőleges két síkkal elmetszük, akkor a két metsző sík és a hengerfelületnek a metsző síkok közé eső darabja egy véges testet határol, amelyet **egyenes körhengernek** nevezünk.

A metsző síkokban elhelyezkedő két egybevágó körlap a henger **alaplapi** (alap- és fedőlap). A két alaplap közötti felületrészt a henger **palástjának** nevezzük.

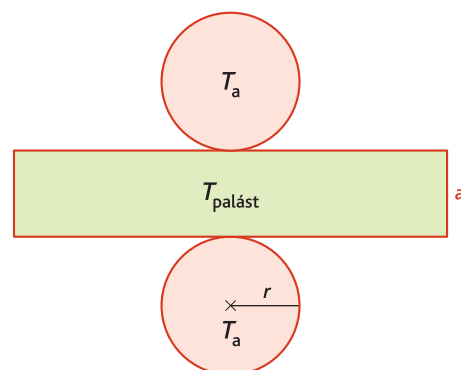
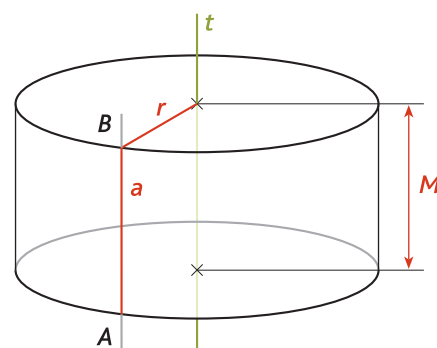
Az AB egyenes elforgatásával egymással párhuzamos egyenesek jöttek létre. Ezeknek az egyeneseknek a két körlap közé eső szakaszai a **henger alkotói**.

Az **egyenes henger felszíne**: a két alaplap és a palást területének összege.

$$A_{\text{henger}} = 2 \cdot T_{\text{alaplapp}} + T_{\text{palást}} = 2 \cdot r^2 \pi + 2r\pi \cdot a$$

A **henger térfogata** alapterületének és magasságának szorzatával egyenlő. Ha az alapkör sugara r , az alkotó a :

$$V = T_{\text{alaplapp}} \cdot M = r^2 \pi \cdot a$$



FELADATOK

81 Egy körhenger alakú torta átmérője 3 dm, magassága 1 dm.

a) A torta tetejét gyümölcsmázzal, míg körben az oldalát csokoládémázzal vonják be. Hány négyzetdeciméter a bevont felület?

A: $3^2 \cdot \pi + 1 \cdot 3 \cdot \pi$;

B: $1,5^2 \cdot \pi + 1 \cdot 3 \cdot \pi$;

C: $2 \cdot 3^2 \cdot \pi + 1 \cdot 6 \cdot \pi$;

D: $2 \cdot 1,5^2 \cdot \pi + 1 \cdot 3 \cdot \pi$

b) Számítsd ki a mázzal bevont felület nagyságát!

c) Egy cikket kívágnak a tortából úgy, hogy a vágás lapjai 40° -os szöget zárnak be. Hány dekagramm a kivágott rész tömege, ha 1 dm^3 torta tömege körülbelül 500 g?

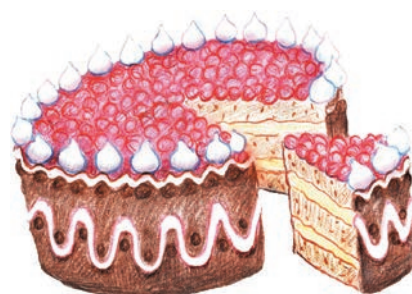
A: $[(1,5^2 \cdot \pi \cdot 1) \cdot 40] : 5$;

B: $[(2 \cdot 1,5 \cdot \pi \cdot 1) : 9] \cdot 50$;

C: $[(1,5^2 \cdot \pi \cdot 1) : 9] \cdot 50$

d) Számítsd ki a tortaszelet tömegét!

☉ Jelöld meg a helyes számítási tervet!



© *Használjátok a táblázat-kezelő programot a műveletek gyorsabb elvégzéséhez!*

Gyakorló
7.51–7.55.;
Feladatgyűjtemény
4.3.10.

© *Odafigyeltél a mértékegységek átváltására?*

© *Ragasszatok szívószálra kartonlapból kivágott téglalapokat a feladat szerint!*

© *A b) feladathoz készíts vázlatot!*

Többet ésszel ...

82 Mekkora a felszíne, illetve a térfogata az egyenes hengernek, ha alkotója a és alapkörének sugara r :

a) $a = 5$ cm, $r = 6$ cm;	b) $a = 0,6$ cm, $r = 1,2$ cm;
c) $a = 2$ cm, $r = 1$ dm;	d) $a = 1,5$ dm, $r = 16$ cm;
e) $a = 1,8$ m, $r = 15$ dm;	f) $a = 2,50$ m, $r = 36$ cm?

- 83**
- a) Egy henger alakú hirdetőoszlop 2,25 m magas, átmérője 80 cm. Hány négyzetméter lemez kellett az oszlop (palást) elkészítéséhez?
 - b) Egy ház esőcsatornája félhenger alakú. Mennyi bádóg kellett a 6,4 m hosszú csatorna elkészítéséhez, ha átmérője 20 cm?
 - c) Számítsd ki a 40 cm sugarú, 75 cm magasságú egyenes henger alakú fedett bádó tartályhoz szükséges lemez mennyiségét! (Összeforrasztáshoz a felszín 10%-át kell még anyagszükségletként figyelembe venni!)
Mennyi víz fér a tartályba?
 - d) Egy egyenes henger alakú pohár átmérője 10 cm. Mekkora a pohár magassága, ha 440 ml víz fér bele?

84 Egy 1 dm élhosszúságú fakocka tömege 636 g. A kockából kiesztergálják a lehető legnagyobb hengert. Mekkora lesz a henger tömege?

- 85**
- a) Egy kályhacső sugara 12,0 cm, hossza 1,25 m. Mennyi lemezre van szükség az elkészítéséhez, ha az átfedésre 4%-ot számítunk?
 - b) Mennyi festék kell egy 200,0 m hosszú, 0,2 m átmérőjű hengeres csővezeték befestéséhez, ha 1 kg festék 6 m²-re elegendő?
 - c) Milyen magas a 2,5 l-es edény, ha a belső átmérője 18 cm?
 - d) Egy 4 m hosszú vascső külső átmérője 0,8 cm, a falvastagsága pedig 0,2 cm, a vas sűrűsége $\rho = 7600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Hány kilogramm a vascső?

Kísérletezz!



Milyen testet kapunk, ha egy 2 cm $\times$ 3 cm-es téglalapot megforgatunk

- ① a 3 cm-es oldala körül;
- ② a 2 cm-es oldala körül;
- ③ a 2 cm-es oldalának a felezőmerőlegese körül?



a) Mérd meg egy nagyobb kavics térfogatát egy henger alakú pohár (vagy például egy befőttes üveg) segítségével!

b) Egy henger alakú pohár belső átmérője 6 cm, és 5 cm magasan áll benne a víz. Beleteszünk a pohárba egy paradicsomot, amely teljesen elsüllyed a vízben. Mekkora a paradicsom térfogata, ha a pohárban a vízszint 6,5 cm magasan állapodik meg?



Egy fából készült, 1 dm magas egyenes körhenger alaplapijának átmérője is 1 dm hosszú. Ebből a hengerből kifaragják a lehető legnagyobb négyzetes hasábot. Mekkora ennek a fahasábnak a tömege, ha 1 dm³ fa tömege 0,80 kg?

HENGER (OLVASMÁNY)

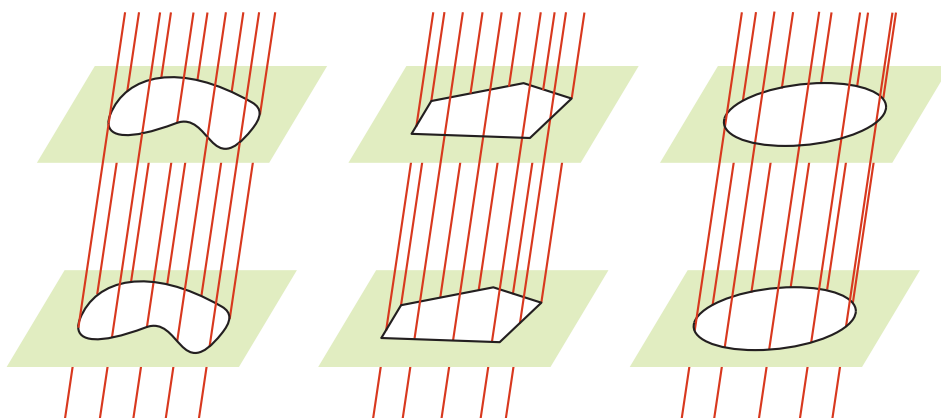
Általánosítsuk a korábban tanultakat.

Értelmezés

Ha egy síkbeli vonal pontjain át párhuzamosokat húzunk egy (a síkkal nem párhuzamos) egyenessel, akkor egy végtelen **hengerfelületet** kapunk.

Ha a vonal egy síkidom határvonala (például sokszögé vagy köré), akkor a hengerfelület egy végtelen testet határol.

Ha ezt a felületet az adott síkidom síkjával és egy vele párhuzamos másik síkkal elmetsszük, egy véges testet kapunk, amelyet **hengerszerű testnek**, röviden **hengernek** nevezünk.



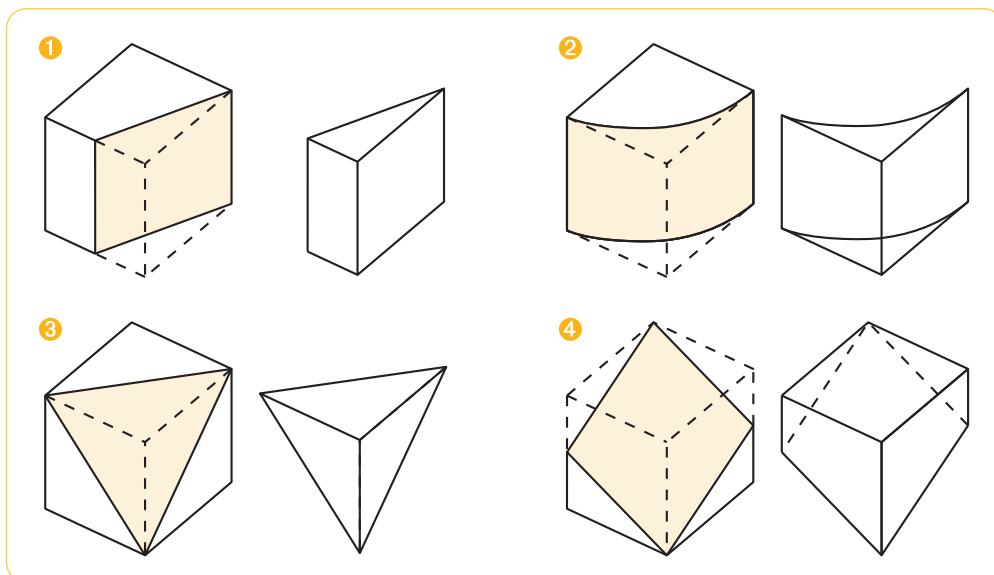
A hasáb, a forgáshenger hengerek. Az alkotó, az alaplap, a palást, a magasság ugyanazt jelenti, mint korábban.

FELADATOK



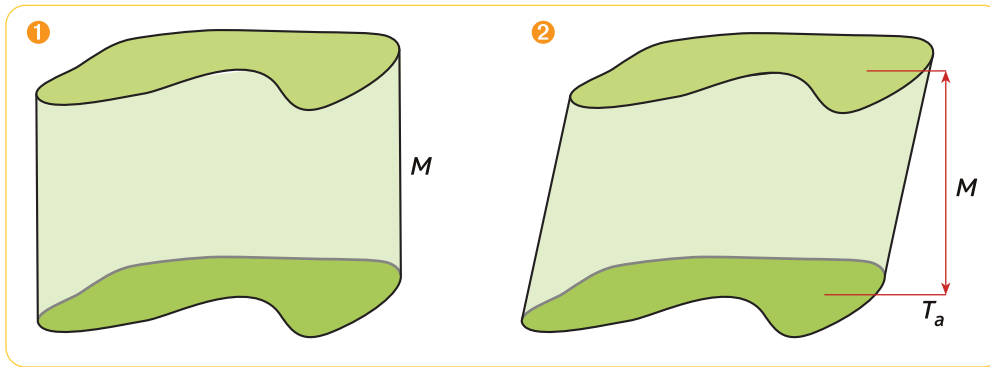
Egy négyzetes hasábot többféleképpen két részre vágunk. Mely esetben kapunk **A hasáb speciális henger (hengerszerű test).**

- hengert (hengerszerű testet);
- hasábot?



Tekintsük az előző 1, illetve 2 ábrán megrajzolt testek közül a nagyobbakat. Számítsuk ki a felszínüket, ha az eredeti hasáb mindegyik éle 1 egység volt.

Megfigyelhetjük, hogy az alkotó nagysága csak akkor egyezik meg a henger magasságával, ha az alkotó merőleges az alapokra.



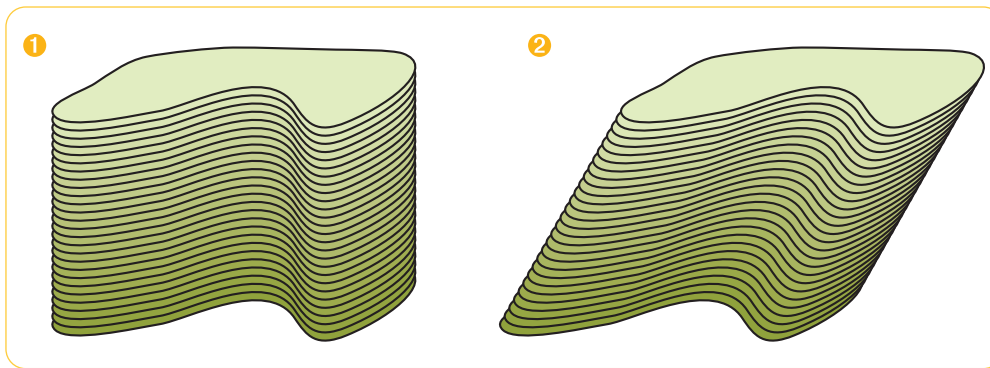
Az ilyen hengert (lásd 1) **egyenes hengernek** nevezzük.

A 2 hengernek az alkotói nem merőlegesek az alapokra.

A henger magassága nem egyezik meg az alkotóval. Ez nem egyenes henger.

A szemlélet alapján elfogadhatjuk, hogy a T alapterületű, egységnyi magasságú egyenes henger térfogatának a mérőszáma megegyezik alapterületének a mérőszámával.

Ha a magasságát M -szeresére változtatjuk, akkor a térfogata is M -szeresére változik.



Képzeld el, hogy az egyenes hengert vékony lapokból építettük föl. Ha a lapokat elcsúsztatjuk egymáson, akkor olyan testet kapunk, amely egy ferde hengerhez hasonlít; minél vékonyabb szeletekből építjük fel a testet, annál jobban megközelíti a ferde hengert. A két test térfogata megegyezik.

Az előző gondolatmenet (magasabb matematikai ismeretekkel) pontossá tehető, és bizonyítható a következő tétel:

Tétel

Bármilyen henger (hengyszerű test) térfogata az alaplappja területének és a magasságának a szorzatával egyenlő:

$$V = T_{\text{alaplapp}} \cdot M$$

Többet ésszel ...

© Jelöld meg a helyes választ betűjelét!



Ha egy körhenger alapkörének sugarát 2-szeresére növeljük, akkor mit kell tennünk, hogy a térfogata ne változzon?



Egy fából készült körhenger alaplappjának átmérője 10 cm, a henger tömege 1000 g. A hengert alaplappjára merőlegesen teljesen átfúrják. A kör alakú furat átmérője 1 cm. Mekkora az átfúrt henger tömege?

A: 900 g;

B: 990 g;

C: 999 g;

D: 999,9 g

ISMERKEDÉS A GÚLÁVAL

Az ókori Egyiptomban a fáraók óriási *gúla* alakú síremlékeket, piramisokat építettek. Ezek az építmények több ezer év óta dacolnak a mulandósággal.



Egyes ásványok, például a gyémántkristály, a legkeményebb ásvány közös négyzetlapra felépülő két gúlából áll (oktaéder).



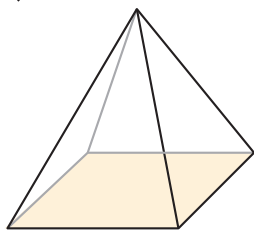
FELADATOK

86

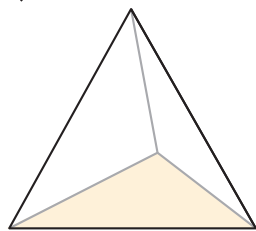
Cserepes növények felfüggesztésére tartókat készítettünk. A virágtartókhoz az ábra szerint egy-egy sokszöget és zsinórt használtunk fel.

A felfüggesztett virágtartók gúlákat határoznak meg. Mindegyik ábra esetén add meg a lapok, az élék és a csúcsok számát!

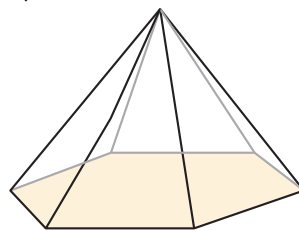
a)



b)



c)

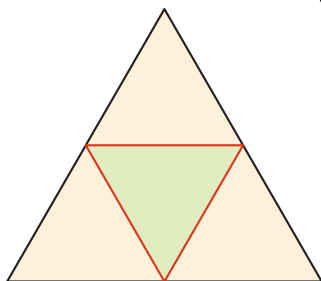


87

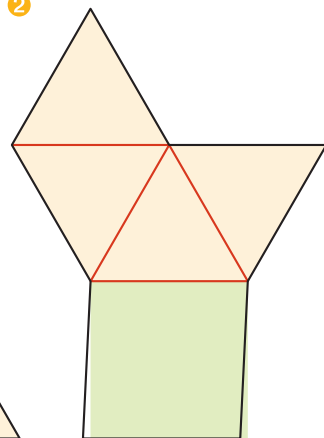
Készítsd el a következő hálókát! Alakíts ki mindegyikből egy-egy testet! Jellemezd a testeket! Hány élük, hány lapjuk, hány csúcsuk van?

Kísérletezz!

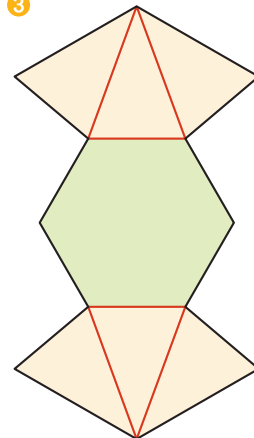
1



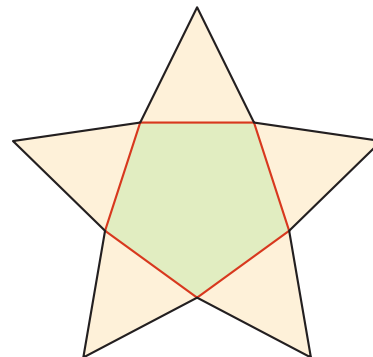
2



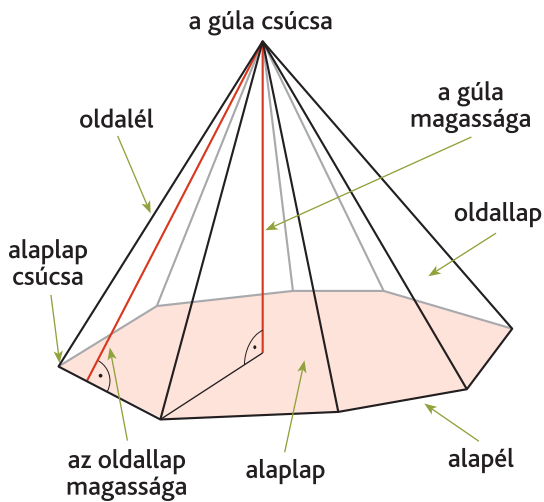
3



4



Értelmezések



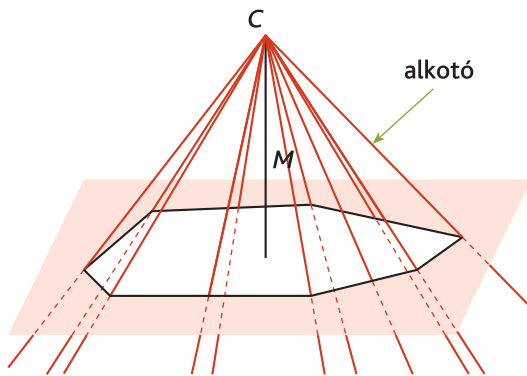
A gúlát egy sokszög és annyi háromszög határolja, ahány oldalú a sokszög. A sokszög a gúla alaplappja, a háromszögek a gúla oldallapjai.

Az alaplappokat határoló élek az **alapélek**.

Az oldallapok az oldalélekben találkoznak.

Az oldalélek egy pontban, a gúla csúcspontjában futnak össze.

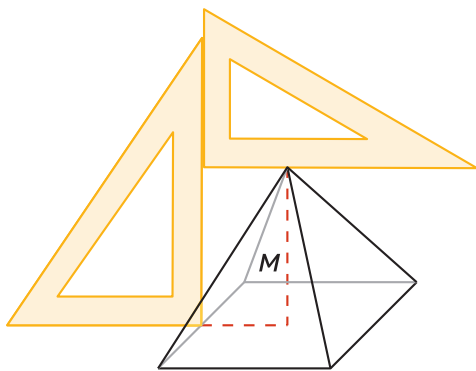
Az oldallapokat együtt a gúla palástjának nevezzük.



Gúlafelületet kaphatunk úgy is, hogy egy sokszögvonallal minden pontján át egy, a sokszög síkján kívül levő C pontból félegyeneseket húzunk. A gúlafelületnek a C pont és a sokszög közötti részét **gúlának** nevezzük.

A sokszögvonallal pontjai és a csúcs közötti szakaszok a **gúla alkotói**. Így az oldalélek is alkotók.

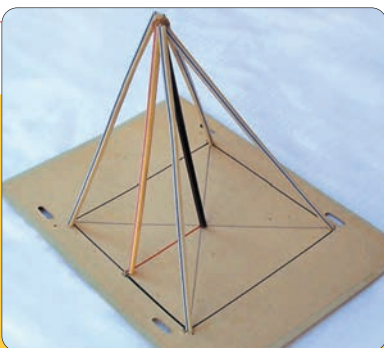
• *Figyeld meg! Nem csak az oldalélek az alkotók.*



A **gúla magassága** (M) a csúcshoz és az alaplapp síkjának a távolsága, vagyis a csúcsból az alaplapp síkjára bocsátott merőleges szakasz hossza.

• *A gúla magassága két derékszögű vonalzó segítségével mérhető meg.*

A gúla magasságát (a megfelelő adatok ismeretében) a Pitagorasz-tétel alkalmazásával kiszámíthatjuk.



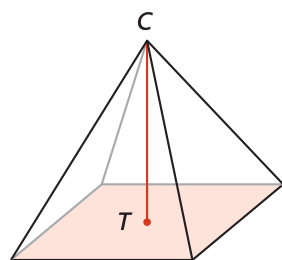
• *Kartonlapra szívoszálak és fonal segítségével percek alatt felépíthetjük bármely gúla élvázmodelljét.*

Készítsetek ilyen élvázmodelleket! Vizsgáljátok a gúla különböző adatai közti összefüggéseket!

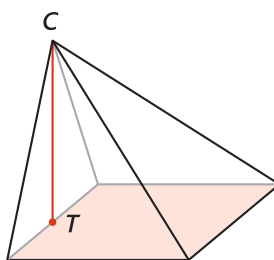
Például hasonlítsátok össze az oldaléleket, az oldallapok magasságát, illetve a gúla magasságát!

A gúla csúcsából az alaplappal párhuzamos síkjára bocsátott merőleges T talppontja lehet, hogy az alaplappal

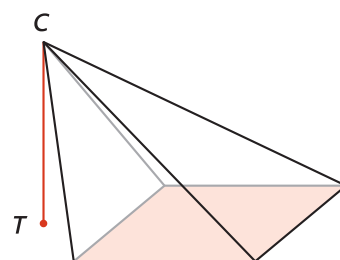
határvonalán belül van:



határvonalán van:

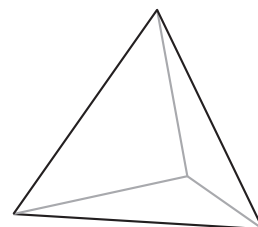


határvonalán kívül van:



Szabályos gúlának nevezzük a gúlát, ha az alaplappja szabályos sokszög, és a magasságának talppontja az alaplapp középpontjában van.

A háromoldalú gúlát **tetraédernek** is nevezzük. **A szabályos tetraéder olyan gúla, amelynek minden lapja szabályos háromszög.**



➤ A GÚLA HÁLÓJA, FELSZÍNE

A **gúla hálóját** egy sokszögből és annyi háromszögből áll, ahány oldalú a gúla.

A **gúla felszíne** az alaplapp területének (T_a) és az oldallapok területének, vagyis a palást területének (T_p) az összege.

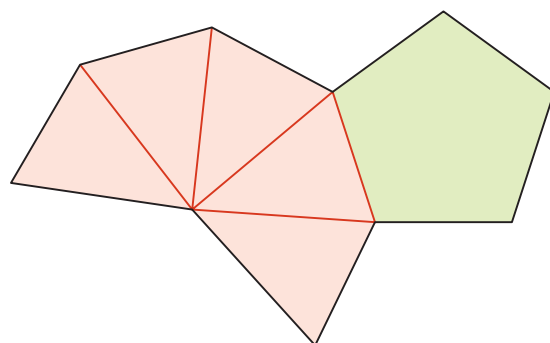
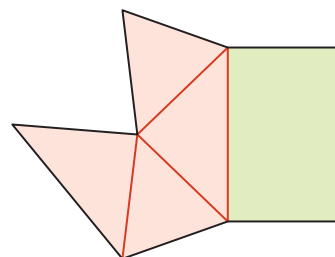
$$A = T_a + T_p$$

Ha a gúla szabályos, akkor a felszín képlete így alakulhat:

$$A = T_a + n \cdot T_o;$$

ahol az n az oldallapok száma;

a T_o egy oldallap területe.



☉ **Például az ábrán látható szabályos gúla felszíne:**

$$A = T_{\text{ötyszög}} + 5 \cdot T_{\text{háromszög}}$$

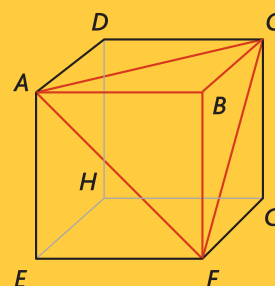


1 dm oldalélű kockából lehasítunk egy tetraédert, amelynek élei a kocka egy csúcsban találkozó három éle, és az ebben a csúcsban találkozó három lap lapátlója.

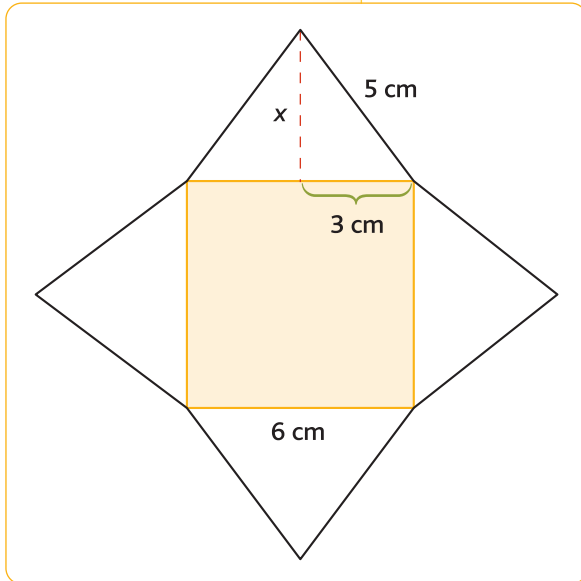
a) Milyen háromszög a tetraéder ACF lapja? Mekkora az oldalai?

☉ **Indokold válaszod!**

b) Mekkora az így kapott tetraéder felszíne?



1. példa



Egy négyzet alapú szabályos gúla alapélei $a = 6$ cm, oldalélei $o = 5$ cm-esek.

Mekkora a gúla felszíne?

Vázoljuk föl a gúla hálóját.

Az oldallapok egyenlő szárú háromszögek, magasságukat (x) a Pitagorasz-tétel alkalmazásával határozhatjuk meg:

$$x^2 + 3^2 = 5^2$$

$$x^2 = 25 - 9 = 16$$

Csak a pozitív megoldást keressük!

$$x = 4 \text{ (cm)}$$

A **gúla felszíne**: $A = T_a + T_p = T_a + 4 \cdot T_o$

$$A = a^2 + 4 \cdot \frac{ax}{2} = a^2 + 2ax$$

$$A = 36 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 6 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 84 \text{ cm}^2$$

FELADATOK

Kísérletezz!

Gyakorló

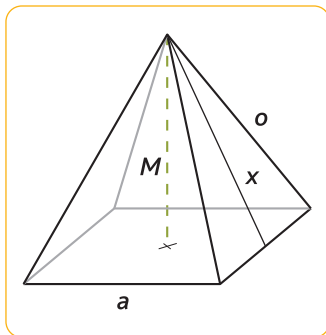
7.57–7.58.;

Feladatgyűjtemény

4.3.01., 4.3.11–14.

88

- Készítsd el egy olyan szabályos tetraéder hálózátát, amelynek minden éle 6 cm! Állítsd össze gúlavá! Mérd meg a magasságát!
- Készítsd el egy olyan négyzetes gúla hálózátát, amelynek minden éle 6 cm! Állítsd össze gúlavá! Határozd meg (méréssel vagy számítással) a test magasságát, felszínét!
- Készítsd el egy olyan szabályos hatszög alapú gúla hálózátát, amelynek mindegyik éle 6 cm! Állítsd össze gúlavá! Mit tapasztalsz?



89

Határozd meg a négyzet alapú szabályos gúlák felszínét!

- $a = 7,2$ cm, $M = 4,8$ cm;
- $a = 9,6$ cm, $x = 60$ mm;
- $M = 72$ mm, $x = 1,20$ dm;
- $a = 5,6$ dm, $o = 10$ dm;
- $a = 3,2$ cm, $o = 2,0$ cm;
- $o = 68,6$ cm, $x = 7,80$ dm

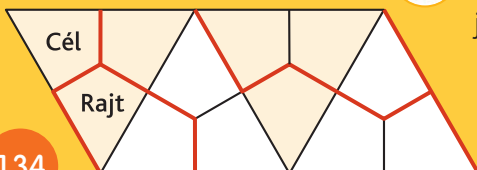
90

Egy négyzet alapú szabályos gúla alakú toronytető alapéle 4,0 m, a torony padlásterének a magassága $M = 4,8$ m. Mennyi bádogra van szükség a befedéséhez, ha 10% hulladékra kell számítani?

Fejtörő!



A tetraéder alakú Minoszturnusz bolygó felszínén egy labirintus található. Rajzold meg a bolygó hálóján a rajtot a céllal összekötő utat, ha a piros szakaszok jelölik az áthatolhatatlan falakat.



A GÚLA TÉRFOGATA

Az egyenes hasábok közül a kockát szétvághatjuk három egybevágó gúlára:

Alaplapjuk területe és a magasságuk ugyanakkora, mint a kockáé.

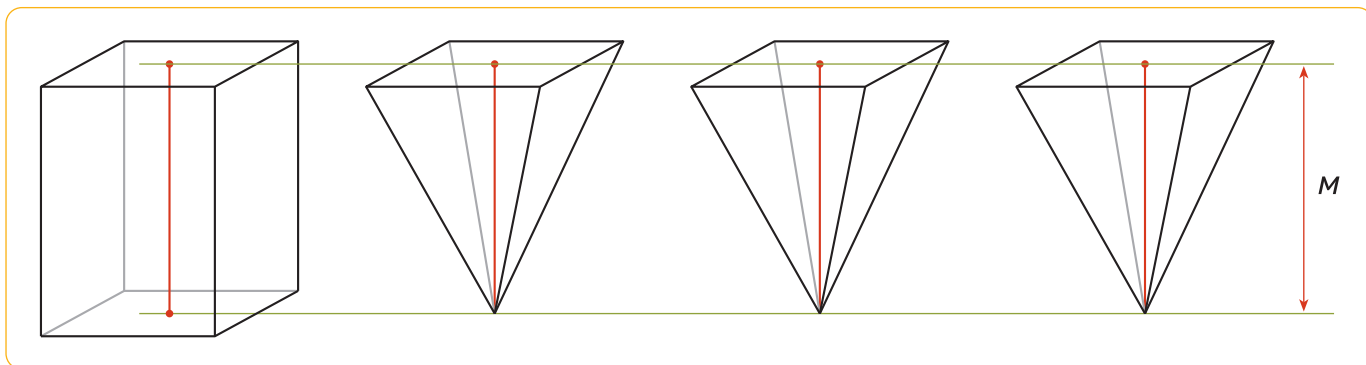
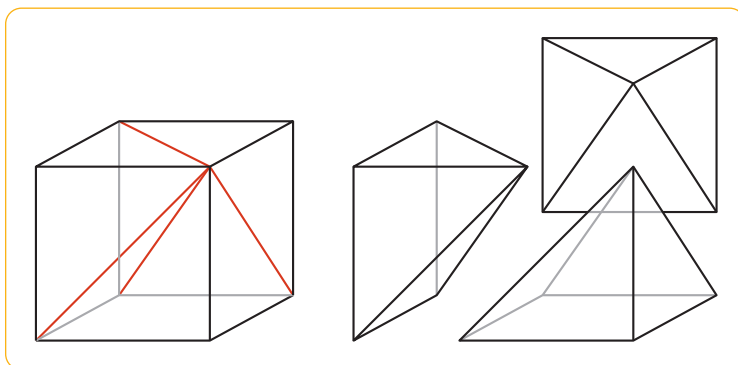
Egy-egy ilyen gúla térfogata harmadrésze a kocka térfogatának.

☛ *Csoportban dolgozzatok! Készítsetek egybevágó gúlákat, majd a 3 gúlából állítsatok össze egy kockát!*

Készítsünk egy üres hasábot és egy üres gúlát úgy, hogy egyenlő legyen az alapterületük és a magasságuk.

Töltsük meg a gúlát színültig homokkal, és öntsük át a hasádba. Ezt háromszor kell elvégeznünk, míg a hasáb megtelik.

$$V_{\text{hasáb}} = T \cdot M = V_{\text{gúla}} + V_{\text{gúla}} + V_{\text{gúla}}$$



Bebizonyítható a következő tétel:

Tétel

Bármely gúla térfogata harmadrésze a vele azonos alapterületű és magasságú hasáb térfogatának.

$$V_{\text{gúla}} = \frac{T \cdot M}{3}$$

Az alapterület T , a magasság M .

A bizonyításhoz szükséges matematikai ismeretekkel általános iskolában nem rendelkezünk.

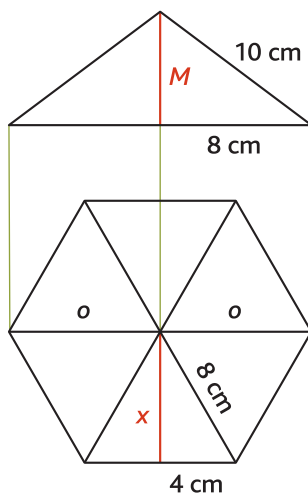
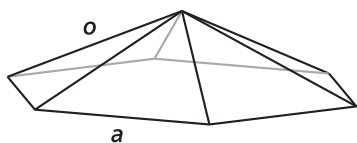
A gúla térfogatszámítására vonatkozó tételt 2400 évvel ezelőtt a görög Eudoxosz bizonyította, aki nemcsak kiváló matematikus, hanem neves csillagász, geográfus, orvos és köztisztviselő is volt.

FELADAT

91 Mekkora az 5 cm magas gúla térfogata, ha alaplapja

- 5 cm oldalhosszúságú négyzet;
- olyan téglalap, amelynek oldalai 3,5 cm és 5 cm hosszúak;
- olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja 5 cm, magassága 4 cm hosszú?

2. példa



Egy szabályos hatoldalú gúla alapéle $a = 8$ cm, oldaléle $o = 10$ cm hosszú. Számítsuk ki a gúla térfogatát.

Szerkesszük meg a gúla felülnézetét, és megfelelően megválasztva az előlnézetét. A felülnézet a gúla alaplapja, az előlnézet a gúlának olyan síkmetszete, amelynek magassága a gúla magassága.

A gúla alaplapja szabályos hatszög, hat egybevágó szabályos háromszögre bontható.

Egy háromszög magassága (jelölje x) a Pitagorasz-tétel segítségével kiszámítható:

$$x^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \quad (x > 0)$$

$$x = \sqrt{48} \approx 6,93 \text{ (cm)}$$

Egy háromszög területe:

$$t = \frac{a \cdot x}{2} \approx \frac{8 \cdot 6,93}{2} \approx 27,7 \text{ cm}^2$$

$$\text{Az alaplap területe: } T = 6t \approx 6 \cdot 27,7 \text{ cm}^2 \approx 166 \text{ cm}^2$$

A gúla előlnézete egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek az alapja most a gúla alapélének kétszerese, szára a gúla oldaléle, magassága megegyezik a gúla magasságával.

A gúla magassága Pitagorasz tételével kiszámítható:

$$M^2 = 10^2 - 8^2$$

$$M^2 = 36 \quad (\text{a pozitív megoldást keressük})$$

$$M = 6$$

A gúla magassága: $M = 6$ cm

$$\text{A gúla térfogata: } V_{\text{gúla}} = \frac{T \cdot M}{3} \approx \frac{166 \cdot 6}{3} \text{ cm}^3 = 332 \text{ cm}^3$$

FELADATOK

B9

Számítsd ki a 131. oldalon található 87. feladatban elkészített gúlák térfogatát!

B10

Számítsd ki a 134. oldalon található 89. feladatban adott gúlák térfogatát!

Gyakorló

7.59–7.60.;

Feladatgyűjtemény

4.3.15–16.

Nézz utána!



Kheopsz fáraó piramisa 148 m magas, alapéle 232 m. Becsüld meg a piramis talajszint feletti részének a tömegét, ha 1 m^3 kő tömege 2,8 t!

• A piramist négyzetes gúlának tekinthetjük. Ne vedd figyelembe a benne rejtőző üregeket!

• Mit tudsz a piramisokról?

A KÚP

Sok hengeres építménynek, például a Halászbástya kilátótornyainak tetőzete **kúp** alakú.

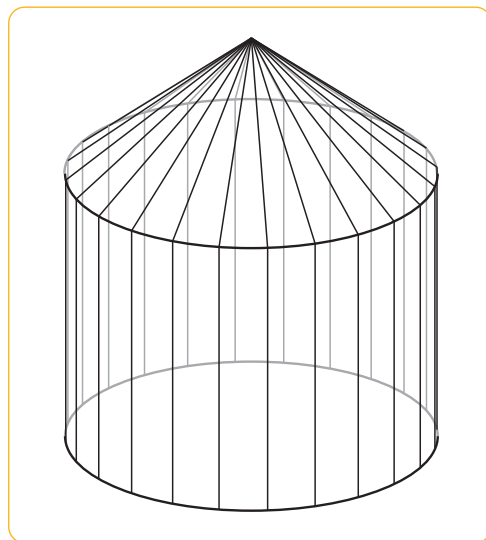
Kúp alakúra formálódik a tálba szórt kristálycukor is. Szórás közben a kúp egyre nagyobb alapkörű és egyre magasabb lesz.



Figyeljük meg az ábrán látható kalitkát! Két egybevágó fémkarikát egyenlő hosszú, egymással párhuzamos pálcikákkal összekötötték, így alakították ki a kalitka henger alakú részét. A karikák a henger alapkörrei, a pálcikák a **henger alkotói**.

A kalitka tetejét úgy készítették el, hogy a fémkarikához forrasztott pálcikák egy csúcsban találkozzanak.

Az ilyen testet nevezzük **kúpnak**. A karika a kúp alapköre. Az alapkört a csúccsal összekötő pálcikák a **kúp alkotói**.



FELADATOK

B11

Szerkessz rajzlapra két 5 cm sugarú kört! Darabold fel a körlapokat úgy, hogy 60°-os, 120°-os és 180°-os, illetve 90°-os és 270°-os középponti szögű kör-
cikkeket kapj!

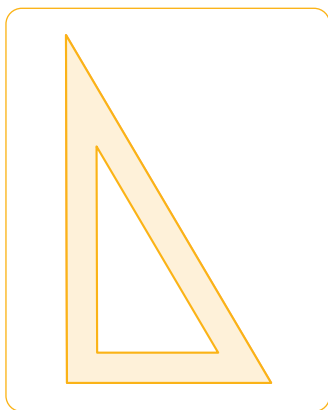
- Számítsd ki és hasonlítsd össze a kapott körívek hosszát és a kör-
cikkeket területét!
- Vágd ki a kör-
cikkeket, és a sugarak mentén ragaszd össze! Az így kapott „tölcsér-
rek” kúp alakúra formálhatók. Mekkora a kapott kúpok **alkotója**?

Hasonlítsd össze a kapott kúpok alapkörének átmérőjét!

- Mekkora a kapott kúpok alapkörének a kerülete?
Az eredeti kör-
cikk adataiból hogyan határozható meg az alapkör sugara?
- Két derékszögű vonalzó segítségével mérd meg a kúpok magasságát!
Számítsd ki Pitagorasz-tétellel is a magasságukat, és hasonlítsd össze a mérés
eredményével!

Kísérletezz!

☉ A középponti szögeket a
kör-
lap kivágása előtt szer-
keszd meg!

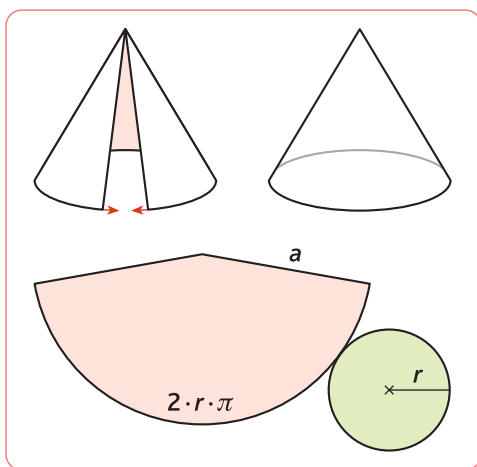


B12

A 60°-os szögű derékszögű vonalzónk átfogója 24 cm.

- Megforgatjuk a hosszabbik befogója mint tengely körül. Számítsd ki a keletkezett forgáskúp magasságát és alapkörének sugarát! Mekkora az alapkör kerülete és területe?
- Ha a tengely a kisebbik befogó, akkor mekkora a keletkezett forgáskúp alkotója, magassága és alapkörének sugara? Mekkora az alapkör kerülete és területe?
- Milyen test keletkezik akkor, ha a derékszögű vonalzót az átfogója mentén forgatjuk?

AZ EGYENES KÖRKÚP SZÁRMAZTATÁSA

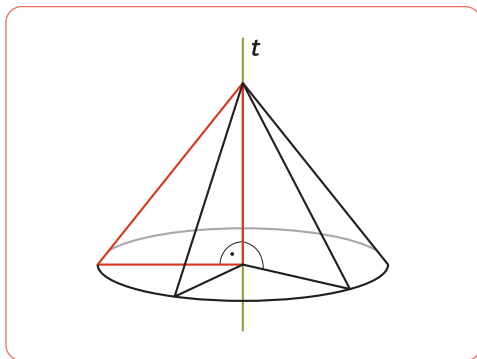


- A B11. feladatban 5 cm sugarú körökből kivágtunk néhány körcikket, és azokból egyenes körkúpot formáltunk.

Ezeknek a kúpoknak még hiányzott az alaplapjuk.

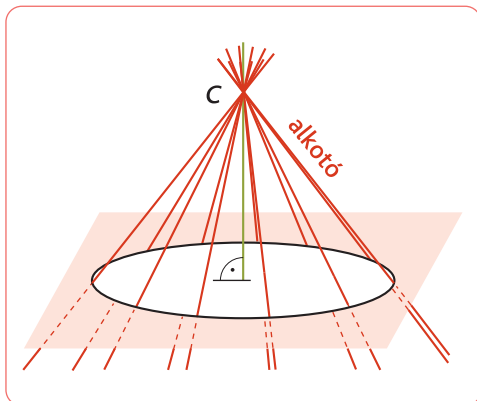
A kúp felületét egy körcikkből kialakítható palást és egy körlap alkotja.

A köríkek körívének hossza az illeszkedés miatt megegyezik a körlap kerületével.



- Ha egy derékszögű háromszöget az egyik befogója mint tengely körül megforgatunk, akkor a derékszögű háromszög kúpot vág ki a térből. A háromszög átfogója a kúp alkotója, ez forgás közben súrolja a palástot, a háromszög másik befogója a kúp alaplapjának sugara, az alaplapot súrolja.

Ezért az egyenes körkúpot forgáskúpnak is nevezzük.



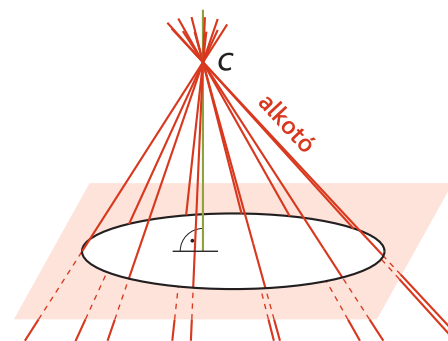
- Ha egy körvonal pontjai és a körvonal síkján kívül elhelyezkedő tetszőleges C ponton át egyeneseket fektetünk, akkor végtelen kúpfelületet kapunk. A kúpfelületnek a C ponttól a körvonalig terjedő része és a körvonal síkja egy véges testet határol. Ezt nevezzük körkúpnak.

C pont a kúp csúcsa. A körlap a kúp alaplapja. A csúcs és az alaplap síkjának a távolsága a kúp magassága. A körvonalat és a csúcst összekötő szakaszok a kúp alkotói.

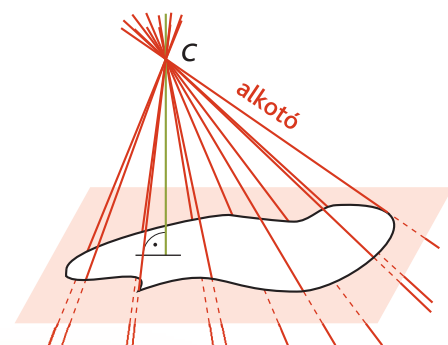
- 4 Az előző lap alján látható ábra **egyenes körkúp**ot ábrázol. A csúsból az alaplap síkjára bocsátott merőleges egyenes átmegy a kör középpontján.

Ezen az ábrán ferde körkúp látható.

Mi csak az egyenes körkúppal foglalkozunk.



- 5 A **vezérvonal** nemcsak körvonal, hanem bármilyen síkidom is lehet. A kúp ilyen származtatása miatt **a gúlát is kúpszerű testnek**, röviden **kúp**nak nevezzük.



AZ EGYENES KÖRKÚP FELSZÍNE ÉS TÉRFOGATA

3. példa

A rajzon egy kúp kicsinyített hálóját látjuk.

- a) Számítsuk ki a kúp felszínét, ha az alapkör sugara 3 cm, alkotója 5 cm.
b) Mennyi a palástot alkotó körcikk területének és az 5 cm sugarú teljes kör területének az aránya?
c) Mennyi a kúp térfogata?

- a) Az alaplap területe: $T_{\text{alap}} = 3^2 \pi \text{ cm}^2 \approx 28,3 \text{ cm}^2$

A körív hossza az alaplap kerülete: $i = k = 2r\pi = 2 \cdot 3 \pi \text{ cm}$

A palást az i körívhez tartozó $a = 5 \text{ cm}$ sugarú körcikk.

A palást területe: $T_{\text{palást}} = \frac{i \cdot a}{2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 5}{2} \text{ cm}^2 = 3 \cdot 5 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 47,1 \text{ cm}^2$

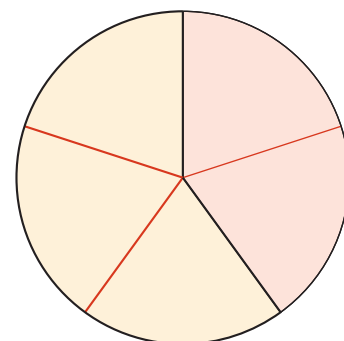
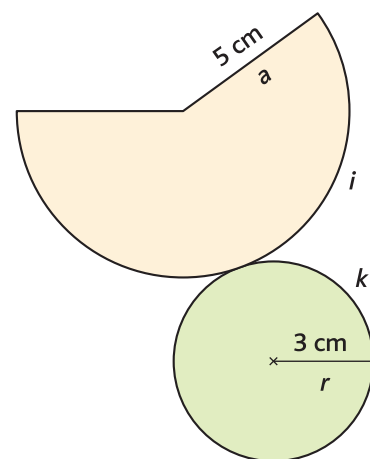
Az adott kúp felszíne: $A \approx 28,3 \text{ cm}^2 + 47,1 \text{ cm}^2 = 75,4 \text{ cm}^2$

- b) A körív hossza: $i = k = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 3 \cdot \pi \text{ cm}$

Az 5 cm sugarú teljes kör kerülete: $K = 2 \cdot a \cdot \pi = 2 \cdot 5 \cdot \pi \text{ cm}$

A körív hossza a teljes kör kerületének $\frac{3}{5}$ része.

Ezért a körcikk a teljes kör $\frac{3}{5}$ része, ahol a $\frac{3}{5}$ az alapkör sugarának és az alkotónak az aránya.



»»

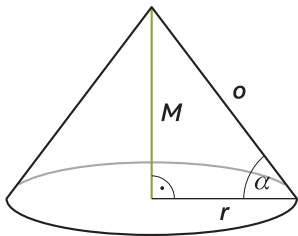
»»

A teljes kör területe: $a^2 \cdot \pi = 5^2 \cdot \pi \text{ cm}^2$

A palást területe az alkotó sugarú teljes kör területének a $\frac{3}{5}$ része.

$$T_{\text{palást}} = \frac{3}{5} \cdot 5^2 \cdot \pi = 3 \cdot 5 \cdot \pi \approx 47,1 \text{ cm}^2$$

© Bizonyítható, hogy a síkidomok területe tetszőleges pontossággal megközelíthető megfelelő sokszögek területével, ezért a gúlóra érvényes összefüggés minden kúp-szerű testre igaz.



C A gúla térfogata megegyezik a vele egyenlő alapterületű és magasságú hasáb térfogatának az $\frac{1}{3}$ részével.

A kúp magassága, az alkotó és az alapkör sugara egy derékszögű háromszöget határoz meg. Ezért a kúp M magasságát az alkotó (o) és az alapkör sugarának (r) ismeretében a Pitagorasz-tétel alkalmazásával kiszámíthatjuk.

$$o = 5 \text{ cm}; \quad r = 3 \text{ cm}$$

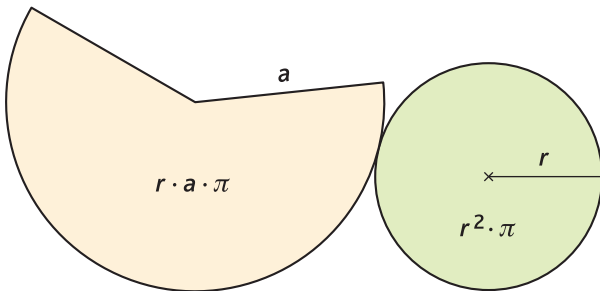
$$M^2 = 5^2 - 3^2 \quad M \geq 0$$

A gúla magassága: $M = 4 \text{ cm}$

Az alaplapp területe: $T_{\text{alap}} = 3^2 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 28,3 \text{ cm}^2$

$$V_{\text{kúp}} = \frac{T_{\text{alap}} \cdot M}{3} \approx \frac{28,3 \cdot 4}{3} \text{ cm}^3 \approx 37,7 \text{ cm}^3$$

Összegzés

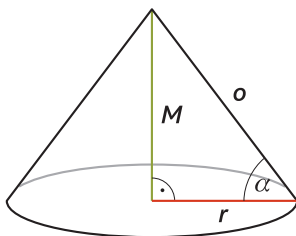


Az egyenes körkúp felszíne:

$$A = T_{\text{alap}} + T_{\text{palást}} = r^2 \cdot \pi + r \cdot a \cdot \pi$$

A palást területére általánosan is igaz, hogy az alkotó sugarú kör területének annyiad része, amennyi az alapkör sugarának és az alkotónak az aránya.

$$T_{\text{palást}} = \frac{r}{a} \cdot a^2 \cdot \pi = r \cdot a \cdot \pi$$



Az egyenes körkúp térfogata:

$$V_{\text{kúp}} = \frac{T \cdot M}{3}$$

A körkúp térfogata (ha az alapkörének sugara r és a magassága M):

$$V_{\text{körkúp}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3}$$

A bizonyításhoz olyan ismeretek szükségesek, amelyeket az általános iskolában nem tanulunk.

Kísérletezz!



Születésnapi partira készíts „parti csákót”. Mérd meg a fejed kerületét, és készíts olyan csákót, amelynek alkotója a mért kör átmérőjével egyenlő legyen!

FELADATOK

B13

Egy derékszögű háromszög átfogója 20 cm, az egyik befogója 10 cm.

Milyen testet ír le a derékszögű háromszög forgatás közben, ha a tengely

- a) a rövidebb befogó; b) a hosszabb befogó; c) az átfogó?

Mekkora a keletkező testek felszíne és térfogata?

Kísérletezz!

© *Készíts modelleket! Ragassz szívószálra derékszögű háromszögeket a feladat szerint!*

B14

Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 4 cm, alkotója 6 cm.

- a) Hány centiméter az alapkör kerülete?
b) A kiterített palást a 6 cm sugarú körnek mekkora része?
c) Készítsd el a kúp hálóját, és ragaszd össze kúppá! Méréssel is és számítással is alapítsd meg a kapott kúp magasságát!
d) Mekkora a körkúp térfogata?

© *Gondosan tanulmányozd a 3. példa megoldását?*

B15

Határozd meg az egyenes körkúpok felszínét és térfogatát!

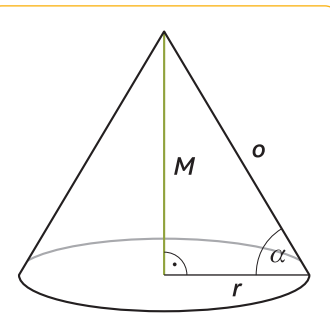
- a) $r = 3,6$ cm, $M = 4,8$ cm; b) $r = 1,5$ dm, $M = 3,6$ dm;
c) $r = 9,6$ cm, $o = 12$ cm; d) $d = 1,4$ dm, $o = 91$ cm;
e) $M = 5,6$ dm, $o = 10$ dm; f) $M = 42,6$ cm, $o = 7,80$ dm

© *Készíthetsz számítási tervet, és használhatod a táblázatkezelő programot.*

B16

- a) Egy 30 cm hosszú, 10 cm átmérőjű fahengerből a lehető legnagyobb kúpot esztergálják ki. A henger térfogatának mekkora része kerül a hulladékba?
b) A szállítószalagról leömlő homok 3 m magas és 8 m átmérőjű kúpot alkot. Mennyi a tömege ennek a homoknak, ha 1 m^3 homok tömege 1,8 t?
c) Egy 220 cm magas, 96 cm átmérőjű hirdetőoszlop egy 200 cm magas hengerből és egy kúp alakú tetőből áll. Hány négyzetméter bádoból készült ez a hirdetőoszlop?

Feladatgyűjtemény 4.3.17–20.

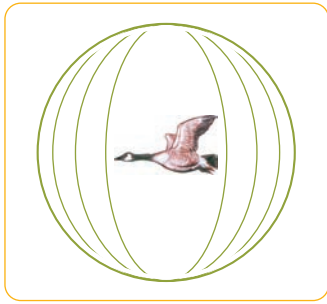


Fából készült körkúp alapkörének átmérője és magassága is 10 cm. A körkúp tömege 200 g. A kúpra (az alaplapból kiindulva) 5 cm mély és 5 cm átmérőjű kúp alakú üreget esztergálnak. Mekkora a maradék üreges kúp tömege?

Fejtörő!



- a) Egy 10 cm élhosszúságú fakockába a lehető legnagyobb űrtartalmú, körkúp alakú üreget esztergáljuk. Mekkora az így kialakított üreges test tömege, ha 1 dm^3 fa tömege 560 g?
b) Az a) feladatban ismertetett test tömege 480 g-mal növekszik, ha színültig megtöltik homokkal. Mennyivel növekszik a tömege, ha csak 5 cm magas („fordított” kúp alakú) teret foglal el a homok?



➤ A GÖMB

Gömb alakúnak tekinthető a Föld, a Hold, a Nap. Gömb alakot vesz föl a (légüres térben) szabadon eső vízcsepp. Ha egy vadliba a levegőben elgágogja magát, akkor a hang egy bizonyos idő alatt minden irányban ugyanakkora távolságra jut. A hanghullám **gömbfelületen** terjed.

Értelmezések

A **gömbfelület** azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyek egy ponttól, a gömb középpontjától ugyanakkora r ($r > 0$) távolságra vannak.

A **gömbtest** azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyek egy ponttól, a gömb középpontjától adott r ($r > 0$) távolságnál nem nagyobb távolságra vannak.

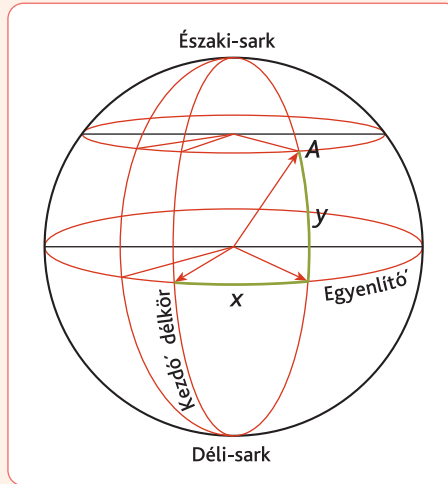
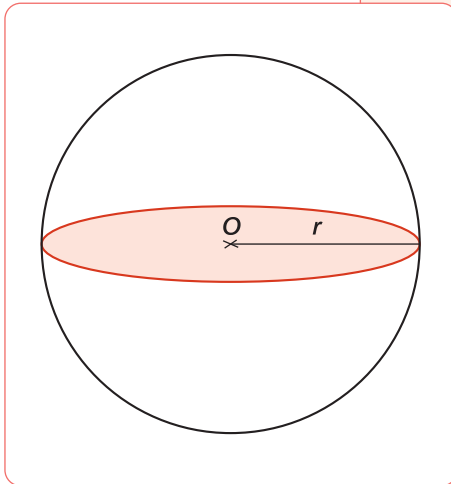
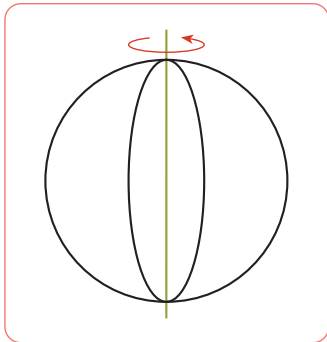
A gömb **forgástest**. Ha bármelyik átmérője körül megforgatunk egy

- ➊ körvonalat, akkor **gömbfelületet** kapunk;
- ➋ körlapot, akkor **gömbtestet** kapunk.

Ezért a gömb mindegyik síkmetszete kör.

A henger és a kúp palástja **kiteríthető a síkban**.

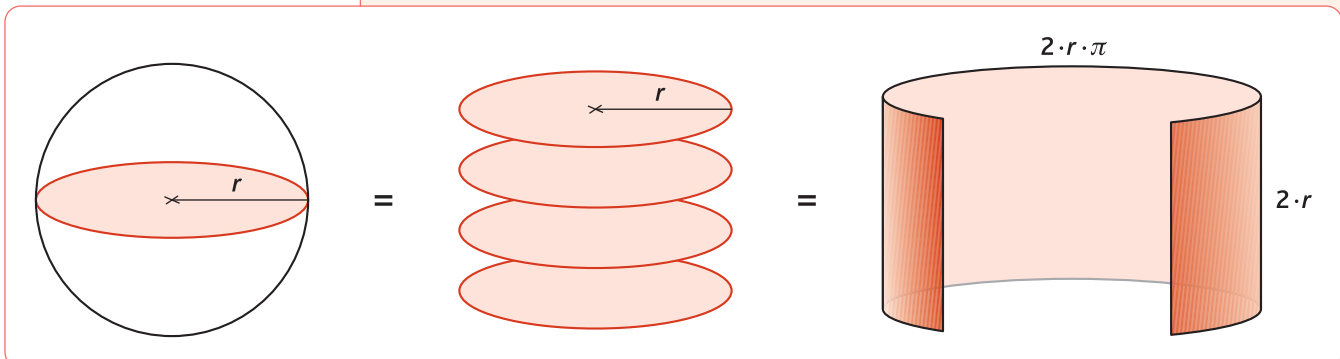
A **gömbfelület nem teríthető ki**. A térképek ezért „**torzítanak**”.



A gömb középpontjára illeszkedő síkmetszet a gömb egy **főköre**.

A Föld **hosszúsági körei** főkörök, **szélességi körei** (az Egyenlítő kivételével) nem főkörök.

A gömb felszíne ugyanakkora, mint négy főkörének területe, illetve mint a gömb köré írható egyenes hengernek a palástja:



Tételek

A gömb felszíne: $A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$

A gömb térfogata: $V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$

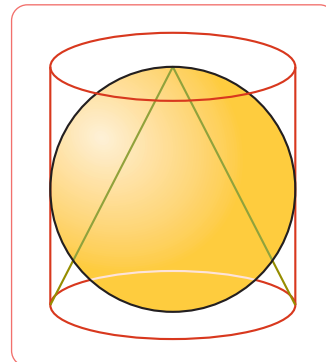
☉ A bizonyításhoz olyan ismeretek szükségesek, amelyeket az általános iskolában nem tanulunk.

A gömb felszínét és térfogatát az ókor legnagyobb fizikusa és matematikusa, **Arkhimédész** (i. e. 287–212) határozta meg.

Bebizonyította, hogy az egyenlő oldalú henger ($M = d$), az abba írható gömb, illetve egyenes körkúp térfogatának aránya:

$$V_{\text{henger}} : V_{\text{gömb}} : V_{\text{kúp}} = 3 : 2 : 1$$

Erre az eredményére emlékezve véstek ehhez hasonló ábrát a sírkövére.



FELADATOK

B17

Hogyan értelmezhetjük különböző felületeken két pont távolságát?

- New York és Bogota (Kolumbia fővárosa) megközelítően azonos hosszúsági körön (délkörön) fekszik. Mérhetjük-e a két város távolságát a hosszúsági kör mentén?
- New York és Madrid majdnem azonos szélességi körön fekszik. Mérhetjük-e a két város távolságát a szélességi kör mentén?
- Hogyan jelölnénk ki egy repülőgép számára a Bogota és Budapest közti legrövidebb utat?

Nézz utána!

☉ *Magyarország mely szélességi, illetve hosszúsági körök között terül el?*

B18

- Hányféle lehet egy sík és egy gömb kölcsönös helyzete? Egy sík és egy gömb metszete mely esetben kör?
- A 10 cm sugarú gömb és egy sík közös része olyan kör, amelynek sugara 8 cm. A gömböt középpontjától mekkora távolságra metszi a sík?
- Egy 26 cm átmérőjű gömböt messünk el a középpontjától 5 cm távolságra lévő síkkal. A sík a gömböt egy körben metszi. Mekkora ennek a körnek a területe?

☉ *Rajzolj vázlatot!*

B19

Számítsd ki a gömb térfogatát és felszínét, ha

- $r = 4$ cm;
- $r = 3,2$ cm;
- $d = 12$ cm;
- $d = 8$ cm 4 mm!



- Hányszorosa a Föld felszíne a Hold felszínének?
Hányszorosa a Föld térfogata a Hold térfogatának?
- Hányszorosa a Jupiter felszíne a Föld felszínének?
Hányszorosa a Jupiter térfogata a Föld térfogatának?
- Hányszorosa a Nap felszíne a Föld felszínének?
Hányszorosa a Nap térfogata a Föld térfogatának?

Nézz utána!

☉ *A szükséges adatokat keresd meg a világhálón!*

Figyelempróba

B20

- a) Egy 6 cm sugarú, gömb alakú lombikból áttöltik a vizet egy 6 cm sugarú és 12 cm magas üveghengerbe. Milyen magasan áll a víz a hengerben, ha a lombik tele volt?
- b) Egy 12 cm magas és 12 cm átmérőjű, kúp alakú (csappal elzárható) tölcsért teleengednek vízzel, majd a vizet egy 6 cm sugarú, gömb alakú lombikba engedik. Mennyire tölti meg a víz a lombikot?

☉ A számításokat elvégezheted a táblázatkezelő program segítségével is. Készíts számítási tervet, írd be a programba, add meg az adatokat!

Feladatgyűjtemény
4.1.08–14.

B21

Mekkora a tömege

- a) egy $r = 4$ cm sugarú vasgolyónak, ha $\rho = 7,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$;
- b) egy $r = 8$ cm sugarú alumíniumgolyónak, ha $\rho = 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$;
- c) egy $d = 12$ cm átmérőjű narancsnak, ha $\rho = 0,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$;
- d) egy borsószemnek, ha $d \approx 6$ mm, $\rho = 1,1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$;
- e) egy dinnye $\frac{1}{8}$ részének, ha $d = 30$ cm, $\rho = 0,95 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$;
- f) egy $d = 24$ cm átmérőjű dinnye 2 cm vastag héjának, ha $\rho = 1,1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$;
- g) a Földnek, ha $r \approx 6370$ km, $\rho = 5,51 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?

B22

- a) Egy 6 m átmérőjű, gömb alakú tartályból egy téglatest alakú, 5 m széles, 10 m hosszú és 2,5 m mély medencébe engedték a vizet. Milyen magasan áll a medencében a víz, ha tele volt a tartály?
- b) Egy kockából a legnagyobb gömböt esztergályozták ki. Mekkora a gömb felszíne és térfogata, ha a kocka éle 4 dm hosszú volt?
- c) Egy bűvargömb átmérőjének hossza 5 m. Mekkora a felszíne és a térfogata? Közeliítően mekkora lenne a felszíne egy ugyanekkora térfogatú, kocka alakú mérőműszernek?

Többet ésszel ...

☉ Tanulmányozd az előző oldalon látható ábrát?

B23

Egy 8 cm átmérőjű és 8 cm magas fahengerből 4 cm sugarú gömböt esztergálnak; egy másik ugyanekkora méretű fahengerből kiesztergálnak egy 8 cm átmérőjű és 8 cm mély, kúp alakú üreget. Hasonlítsd össze a keletkezett két test térfogatát! A henger térfogatának hányad része volt a hulladék az egyik, illetve a másik esetben?

Fejtorló!



Mekkora a térfogata és a felszíne az egységnyi élű kocka köré írható gömbnek?

☉ A kocka csúcsai a köré írható gömb felületére illeszkednek. Mekkora ennek a gömbnek az átmérője?



FELVÉTELI VIZSGÁRA FELKÉSZÍTŐ FELADATOK

B24

- a) Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő egyik szöge 75° . Mekkora a háromszög másik két szöge?
- b) Egy húrtrapéz egyik szöge 135° . Mekkora a többi szöge?
- c) Mekkora a paralelogramma szögei, ha egyik szöge 25° -kal nagyobb a másik szögénél?
- d) Mekkora a paralelogramma szögei, ha két szögének aránya $5 : 7$?
- e) Mekkora a trapéz szögei, ha egy száron fekvő két szögének aránya $8 : 7$, a hosszabb alapon fekvő két szögének összege 150° ?

☉ Emlékszel a háromszög, illetve a speciális négyszögek belső szögei közti összefüggésekre?

B25

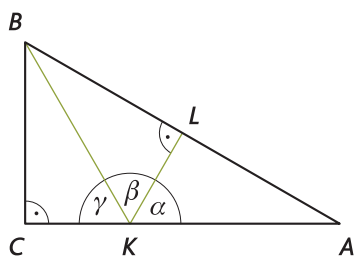
- a) Mennyi a háromszög, hatszög, tízszög belső szögeinek összege?
- b) Mekkora a háromszög belső szögei, ha a szögek aránya $3 : 5 : 4$?
- c) Egy háromszög két kisebb belső szögének aránya $2 : 3$. Mekkora a háromszög szögei, ha a legnagyobb szöge 40° -kal nagyobb a legkisebb szögénél?
- d) Hány oldalú sokszög belső szögeinek összege 900° ?
- e) Egy paralelogramma egyik szöge 24° -kal kisebb, mint a szomszédos szög. Mekkora a paralelogramma szögei?

☉ Az ábrák vázlatok. Mérések segítségével nem állapíthatjuk meg a keresett adatokat!

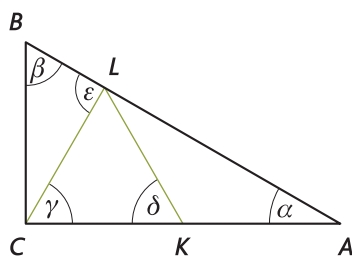
B26

Megadtuk az ábrákon látható háromszögek, illetve négyszögek néhány adatát és az adatok közti összefüggéseket. Határozd meg a görög betűkkel jelzett szögek nagyságát, illetve az ábra alá írt szakaszok hosszát!

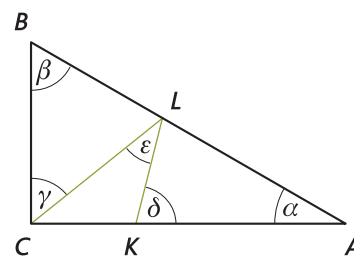
- a) $\angle CBK = \angle KBA = \angle KAB$;
 $KL = 5 \text{ cm}$



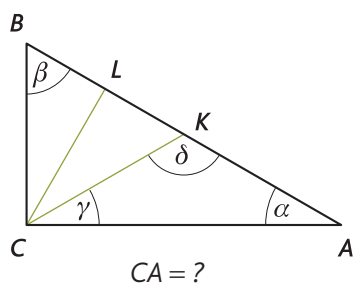
- b) $CK = KA = KL = 5 \text{ cm}$;
 $\angle BCA = 90^\circ$; $\alpha : \beta = 2 : 3$



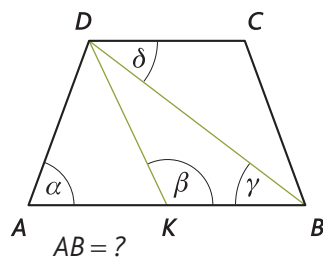
- c) $CK = KL$; $AK = AL$;
 $\angle BCA = 90^\circ$; $\angle CLB = 60^\circ$



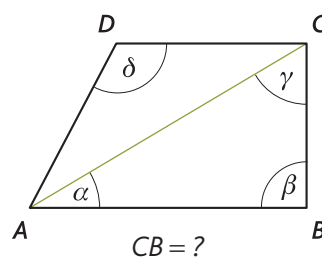
- d) $\angle BCL = \angle LCK = \gamma$; $\angle BCA = 90^\circ$;
 $m_c = CL = 2 \text{ cm}$



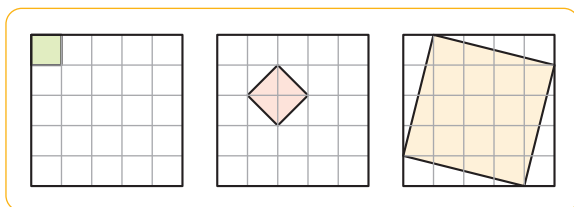
- e) $AD = DC = CB = 3 \text{ cm}$;
 $\angle ADB = \alpha : \gamma = 3 : 2 : 1$;
 $\alpha + \beta = 180^\circ$; $DC \parallel AB$



- f) $DA = DC$; $\angle DCA = 30^\circ$;
 $\alpha + \beta = 120^\circ$; $\alpha : \beta = 1 : 3$;
 $AC = 5 \text{ cm}$



B27 Rajzolj 5×5 -ös négyzetrácsba négyzeteket úgy, hogy minden csúcsuk rácspont legyen! Három lehetőséget példaként mi is megrajzoltunk.



• A téglalapok minden csúcsa rácspont legyen.

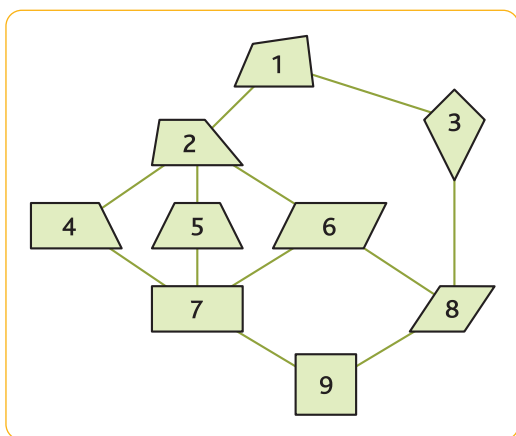
- Hány ilyen nem egybevágó négyzet rajzolható?
- Mekkora a megrajzolt négyzetek területe, illetve kerülete? Egy hosszúságegység a négyzetrács egy beosztása, egy területegység egy kis rácsnégyzet területe.
- Rajzolj az 5×5 -ös négyzetrácsba legalább öt nem egybevágó, nem négyzet téglalapot úgy, hogy a területük mérőszáma egész szám, a kerületük mérőszáma nem egész szám legyen!

B28 a) Egy téglalap hosszabbik oldala $\frac{7}{4}$ -e a másiknak, kerülete 25,3 m.

Számítsd ki az oldalait és a területét!

- Mekkora a háromszög 9 cm-es oldalához tartozó magassága, ha a 7 cm-es oldalához tartozó magasság 5,5 cm?
- Egy szoba hossza 6,4 m, szélessége 3 m 80 cm. A szőnyeg széle a szoba hosszabb oldalaitól 90 cm-re, a rövidebb oldalaitól 70 cm-re van. Mekkora a szőnyeg területe?

B29 Mely négyszögekre igazak a következő állítások?



A: Tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus.

B: Tengelyesen szimmetrikus, de nem deltoid.

C: Deltoid is és derékszögű trapéz is.

D: Pontosan három szimmetriatengelye van.

E: Deltoid, de nem középpontosan szimmetrikus.

F: Középpontosan szimmetrikus, de nem deltoid.

G: Szemközti szögei egyenlők.

H: Szomszédos oldalai egyenlők.

• Írd az állítások után azoknak a négyszögeknek a sorszámát, amelyekre igaz az állítás!

B30 A fenti ábrán lévő kilenc négyszöget kartonpapírra lerajzoljuk, kivágjuk és beletesszük egy zacskóba. Tizedikként a zacskóba tesszük ezt a sokszöget is, majd találomra kihúzzunk egy lapot.



a) Mi a valószínűsége a következő eseményeknek?

I: A kihúzott lap belső szögeinek összege két egyenesszög.

J: A kihúzott lap deltoid.

K: A kihúzott lap konvex deltoid.

L: A kihúzott lap deltoid és paralelogramma.

M: A kihúzott lap deltoid vagy paralelogramma.

b) Legalább hány lapot kell kihúznunk, hogy biztosan legyen köztük tengelyesen vagy középpontosan szimmetrikus négyszög?

B31

Bea kezébe vesz egy-egy négyszöglapot, helyesen megnevezi azokat, majd mond róluk egy-egy állítást. Írj az állítás után *I* betűt, ha biztosan igaz, *H* betűt, ha biztosan hamis! Írj *L* betűt, ha (a kézben tartott laptól függően) lehet igaz, de nem biztosan igaz az állítás!

- A:** Ez deltoid. Két-két szemközti szöge egyenlő. ☐
- B:** Ez trapéz. Van három tompaszöge. ☐
- C:** Ez paralelogramma. Átlói felezik egymást. ☐
- D:** Ez deltoid. Van három hegyesszöge. ☐
- E:** Ez trapéz. Tengelyesen szimmetrikus, de nem húrtrapéz. ☐
- F:** Ez trapéz. Két-két szögének összege egyenesszög. ☐

© Csoportban játsszátok el a feladatot, úgy, hogy felváltva húztok a négyszögek közül!
Indokoljátok meg a választ!

B32

- a) 2 dm oldalhosszúságú, négyzet alakú fémlapból a lehető legnagyobb kör lapot vágják ki. Az eredeti lap hány százaléka lesz hulladék?
- b) 2 dm átmérőjű, kör alakú fémlapból a lehető legnagyobb oldalhosszúságú négyzet lapot vágják ki. Az eredeti lap hány százaléka lesz hulladék?

B33

- a) Egy kör sugara 3,4 m. Számítsd ki a 60° -os középponti szöghöz tartozó körív hosszát és körcikk területét!
- b) Egy kör sugara 5 cm. Határozd meg a 72° -os középponti szöghöz tartozó körívnek hosszát és a körcikk területét!
- c) Számítsd ki a körcikk területét, ha a körív 2 cm hosszú, a sugár pedig 5 cm!

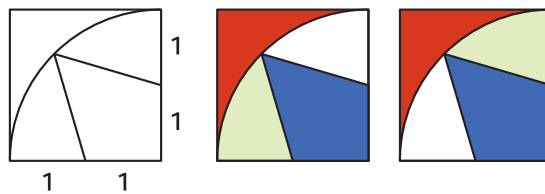
B34

Az ábrán látható, 2 dm oldalhosszúságú négyzet alakú keretek rekeszeibe színes üveglapokat raknak. Piros, sárga, kék és zöld színű üveglapok közül válogathatnak.

- a) Mekkora a kék, a piros, illetve a zöld színű lap területe?
- b) Hányféleképpen helyezhetők el a színes üveglapok, ha szomszédos rekeszbe nem raknak azonos színű lapot? Például az ábrákon az üresen hagyott rekeszbe csak sárga vagy zöld lap kerülhet. Viszont a kék, deltoid alakú lap lehetne piros is.

A kereteket nem fordíthatják át, tehát a két színes ábrát még akkor is különbözőnek tekintjük, ha az üresen hagyott rekeszekbe megegyező színű lapot tesznek.

- c) Hányféleképpen helyezhetők el a színes üveglapok, ha szomszédos rekeszbe nem raknak azonos színű lapot, de a keretek átfordíthatók?



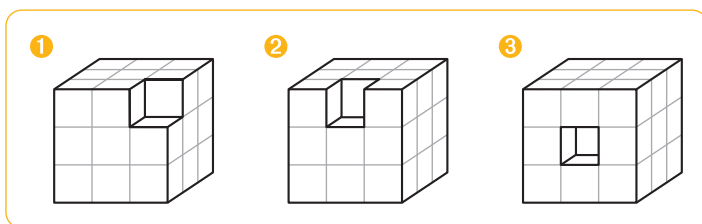
B35

Egy 2,5 dm élű kocka egy csúcsba futó éleit 4-4 egyenlő részre osztjuk, majd az osztópontokon keresztül a kockát kis kockákra daraboljuk.

- a) Hány százaléka egy kis kocka térfogata az eredeti kocka térfogatának?
- b) Hány százaléka egy kis kocka felszíne az eredeti kocka felszínének?
- c) Hány százaléka az így kapott kis kockák felszínének összege az eredeti kocka felszínének?

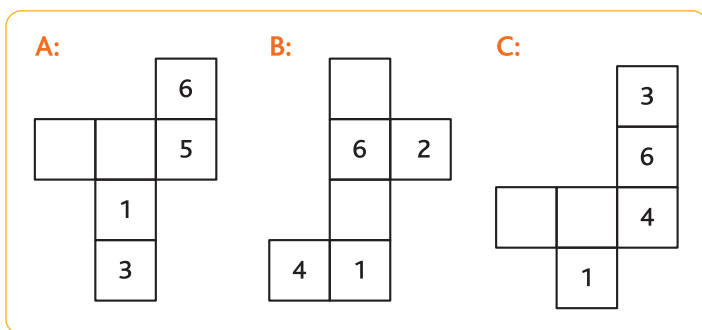
- B36** a) Mekkora egy 5 cm-es élű kocka térfogata és felszíne?
b) Mekkora a térfogata a kockának, ha a felszíne 96 cm^2 ?
c) Mekkora a kockának az éle, ha felszínének és térfogatának mérőszáma megegyezik?
d) Egy téglatest alapéleinek az aránya $4 : 3$, az alaplap kerülete 112 cm , a test magassága 30 cm . Mekkora a test felszíne és térfogata?
e) Melyik az a leghosszabb szakasz, amely egy 8 cm élű kockába belefér?
f) Egy 2 dm -es élű kocka élvázmodelljét 1 cm^2 -es négyzet keresztmetszetű lécből készítik el. Mennyi a felhasznált lécs térfogata? Hány kilogramm a felhasznált lécs tömege, ha 1 dm^3 fa tömege 560 g ?
g) Egy téglatest felszíne 280 cm^2 . Két éle 5 cm , illetve 6 cm hosszú. Mekkora a harmadik éle, illetve a testátlója?
h) Egy négyzetes hasáb éleinek összege $3,6 \text{ m}$. Egyik éle kétszerese a másiknak. Mennyi a felszíne és a térfogata?

B37 27–27 egységkockából felépítünk három nagyobb kockát. Az első kocka egyik csúcsáról, a második kocka egyik élének közepéből, a harmadik kocka egyik lapjának közepéből kiemelünk egy-egy kis kockát.



Az így kapott testek közül melyekre igazak a következő állítások?

- A:** A térfogata kisebb, de a felszíne nagyobb, mint az eredeti kockának. ☐
B: Csúcsainak száma 6-tal nagyobb, mint az eredeti kockának. ☐
C: Lapjainak száma páratlan szám. ☐
D: Élei számának és csúcsai számának aránya $3 : 2$. ☐
E: Lapjai és csúcsai számának összege 2-vel nagyobb élei számánál. ☐



B38 Az alakzatok közül melyikből hajtható össze szabályos dobókocka?

Néhány lapra ráírtuk a rajta lévő pontok számát. (A szabályos dobókocka szemközti lapjain lévő számok összege mindig 7.)

☉ Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!

A szabályos dobókocka hálójára írd be a hiányzó számokat!

Fejtörő!



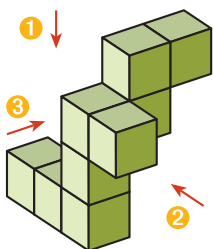
- a) 100 db egységkockából hány darab különböző méretű kockát tudunk összeragasztani?
b) Ha ezek közül a legnagyobb kockát befestjük, majd száradás után szétszedjük, akkor hány olyan kis kocka lesz, amelynek
1 0 lapja; 2 1 lapja; 3 2 lapja; 4 3 lapja; 5 4 lapja van befestve?

B39

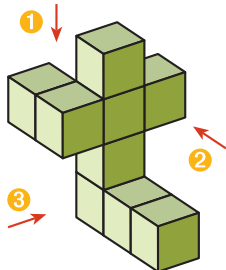
Egységkockákból 4 egység élhosszúságú kockákat ragasztottunk össze. Az így összeállított nagy kockákból néhány egységkocka elvételével a következő testeket kaptuk.

Jelölések: ①: a felülnézet; ②: az előlnézet; ③: az oldalnézet iránya.

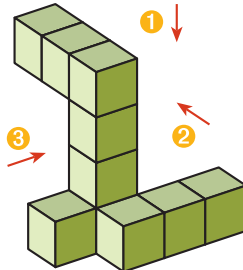
A:



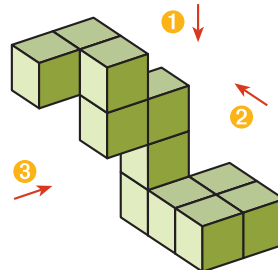
B:



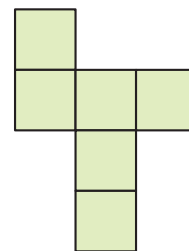
C:



D:



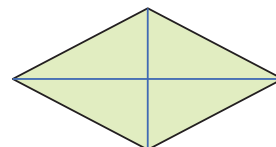
- Mennyi a 4 egység élhosszúságú kocka és a **C** test térfogatának, illetve felszínének aránya?
- Rajzold le mindegyik test előlnézetét, felülnézetét, oldalnézetét!
- A fent ábrázolt testek közül melyiknek felülnézete az itt látható alakzat?
- Építsd tovább a c) pontban kapott testet úgy, hogy a felülnézete ne változzék, de térfogata a 4 egység élhosszúságú kocka térfogatának a 25%-a legyen! Írd rá a felülnézetre, hogy hány kis kocka épül egymás fölé!



B40

Egy rombusz átlóinak hossza 24 cm és 10 cm.

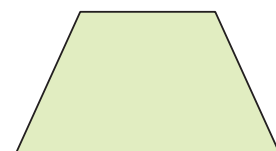
- Mekkora a rombusz területe és kerülete?
- Mekkora annak az egyenes hasábnak a térfogata és felszíne, amelynek alaplapja ez a rombusz, és minden éle egyenlő hosszúságú?



B41

Egy húrtrapéz rövidebb alapjának a hosszúsága 80%-a az egyik szár hosszának, hosszabbik alapjának a hosszúsága a szár hosszának kétszerese. A húrtrapéz kerülete 28,8 cm.

- Mekkorák a húrtrapéz oldalai?
- Mekkora a húrtrapéz területe?



Egy 216 cm^3 térfogatú kocka **mindegyik csúcsát** levágjuk a csúcsban összefutó élei felezőpontjára illeszkedő síkkal (az ábra szerint).

- Hány csúcsa van a maradék testnek?

A: 12; B: 16; C: 24; D: 32

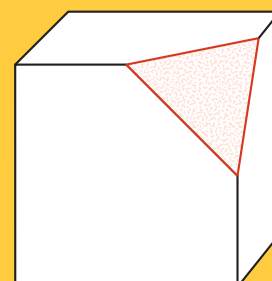
- Hány éle van a maradék testnek?

A: 48; B: 36; C: 24; D: 18

- Mekkora a maradék test térfogata?

A: 208 cm^3 ; B: 192 cm^3 ; C: 180 cm^3 ; D: 168 cm^3

Fejtörő!



TUDÁSPRÓBA

92

1 Írd be a hiányzó mérőszámokat!

a) $0,25 \text{ km} = \boxed{} \text{ m} = \boxed{} \text{ dm} = \boxed{} \cdot 10^{\boxed{}} \text{ dm}$

b) $0,25 \text{ hl} = \boxed{} \text{ l} = \boxed{} \text{ ml} = \boxed{} \cdot 10^{\boxed{}} \text{ ml}$

c) $1,25 \text{ ha} = \boxed{} \text{ km}^2 = \boxed{} \text{ m}^2 = \boxed{} \cdot 10^{\boxed{}} \text{ m}^2$

d) $0,023 \text{ m}^3 = \boxed{} \text{ l} = \boxed{} \text{ cm}^3 = \boxed{} \cdot 10^{\boxed{}} \text{ cm}^3$

2 Szerkessz (esetleg rajzolj) deltoidot, ha két oldalának hossza 3 cm és 4,5 cm, a közbezárt szög 90° ! A szükséges adatok megmérése után számítsd ki a kerületét és a területét!

3 Mekkora annak az egyenes hasábnak a térfogata és felszíne, amelynek a magassága 2 cm, az alaplapja a 2. feladatban adott deltoid? Vázold föl a hasáb hálóját!

4 Egy egyenes körhenger alaplapjának átmérője 4 cm, alkotója 3 cm hosszú. Vázold fel a körhenger hálóját, számítsd ki a felszínét, térfogatát!

5 Egy téglalap alakú kert két oldala 25 m és 60 m. A kert egyik sarkában van egy csap.

- A kert utca felőli, 25 m hosszú oldalán már van egy deszkakerítés, rajta egy 3 m széles kapuval és egy 1 m széles kisajtóval. A kert többi oldalára drótkerítést szereltek. Milyen hosszú ez a drótkerítés?
- A kert területének 40%-át füvesítették. Mekkora a füvesített terület?
- Milyen hosszú gumitömlőt kell felszerelni a csapra, ha a kert egészét öntözni szeretnék, és a tömlőből kiáramló vízszugár legfeljebb 5 m távolságra jut el?

6 a) Egy téglatest alapéleinek az aránya 4 : 5, az alaplap kerülete 180 cm, a téglatest magassága 20 cm. Mekkora a test felszíne és térfogata?

b) Hány liter víz fér a felül nyitott, téglatest alakú, 5 m széles, 24 m hosszú és 2 m mély medencébe? Hány 20 cm $\times$ 20 cm-es csempével lehet kicsempézni a medencét?

7 Sátorat készítenek 6 db egyenlő szárú háromszög alakú vászondarabból. Mennyi vásznat használnak fel, ha egy-egy egyenlő szárú háromszög alapja 1,2 m, szára 2,0 m? Milyen magas a kifeszített sátor?



3.

ALGEBRA

A matematikának a műveletek általánosításával, a műveleti tulajdonságok vizsgálatával, valamint az egyenletek megoldásával foglalkozó ágát **algebrának** nevezzük.

Az algebrai jelrendszer megteremtőjének Diophantos (olvasd: diofantosz) görög matematikust (Kr. u. 250. körül) tekintik. Eredményeit a XVI. században fejlesztette tovább Viète francia matematikus (1540–1603).



ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK

1. példa

Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapélét jelölje a , oldalélét b .

Mennyi a hasáb felszíne?

a) Mennyi a hasáb felszíne, ha $a = 5$ cm, $b = 3$ cm?

b) Mennyi a hasáb felszíne, ha $a = 3$ cm, $b = 5$ cm?

Egy alaplapp területe:

$$a^2$$

Egy oldallap területe:

$$a \cdot b$$

A két alaplapp területe összesen:

$$2 \cdot a^2$$

A négy oldallap területe összesen:

$$4 \cdot a \cdot b$$

A felszín (jele A) az alaplappok és az oldallapok területének összege:

$$A = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot b$$

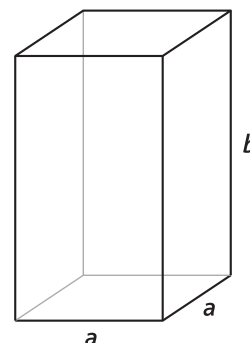
A jobb oldalon álló kifejezés a következőképpen is írható:

$$2a^2 + 4ab$$

Ha ismerjük a felszín kiszámításának tervét leíró kifejezést, akkor a megfelelő adatok **behelyettesítésével** tetszőleges négyzetes hasáb felszínét kiszámíthatjuk. Például:

a) Ha $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, akkor $A = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 \cdot 3 = 110$ (cm²).

b) Ha $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, akkor $A = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 78$ (cm²).



© A szorzás jelét általában nem szoktuk kiírni.

Emlékeztető

Ha a négy alpműveletet számokra és (számokat jelentő) betűkre véges sokszor alkalmazzuk, akkor **algebrai kifejezést** kapunk.

Az algebrai kifejezésekben előforduló betűket változóknak nevezzük, ezek valamilyen alaphalmaz elemeit helyettesítik. A változók szorzótényezőiként előforduló számok az **együtthatók**.



☉ *Például algebrai egészek:*

$$3x + 2y^2; \quad \frac{x}{2} - 0,1y; \quad x : 5$$

Algebrai törtek:

$$\frac{3}{x} + 2y^2; \quad \frac{1-x}{1+x}; \quad 5 : x$$

$$x \neq 0; \quad x \neq -1; \quad x \neq 0$$

Mindig ki kell kötni, hogy a nevező (az osztó) nem lehet 0.

Ha nem adunk meg mást, akkor az alaphalmaz a **valós számok** ($\mathbb{R}$) halmaza.

Ha az algebrai kifejezésben az esetleg előforduló törtek nevezőjében (hányadosok osztójában) nincs változó, akkor **algebrai egész kifejezésekről**, ellenkező esetben **algebrai törtkifejezésekről** beszélünk.

Ha az algebrai kifejezésben előforduló változók helyére az alaphalmaz elemeit írjuk, és ezekkel elvégezzük a kijelölt műveleteket, akkor megkapjuk az algebrai kifejezés **helyettesítési értékét**.

Két algebrai kifejezést **azonosnak** tekintünk, ha az alaphalmaz bármely elemét helyettesítjük be a változók helyére, a helyettesítési értékük mindig megegyezik.

Azokat az egytagú algebrai kifejezéseket, amelyek legfeljebb együtthatóikban különböznek egymástól, **egynemű algebrai kifejezéseknek** nevezzük.

$$\textcircled{1} \quad 2x^2y; \quad x^2y; \quad \frac{1}{2}yx^2; \quad y \cdot 3x^2$$

Például az **1** sorba írt kifejezések egyneműek, mert csak együtthatóikban különböznek egymástól.

$$\textcircled{2} \quad 0,5xy^2; \quad -\frac{1}{2}x^3y; \quad 2x^2z; \quad xz$$

A **2** sorba írt kifejezések mind **különneműek** és az **1** sorba írt kifejezések egyikével sem egyneműek, vagyis **különneműek**, mert az egyes változók nem ugyanazon a hatványon fordulnak elő, vagy nem ugyanazok a változók.

FELADATOK

☉ *Szükség esetén ne feledd meg a zárójel használatáról!*

1

Az x és y valós számok. Írd föl

- x és y összegét;
- x és y különbségét;
- x és y szorzatát;
- x és 17 hányadosát;
- az x felének és y ötszörösének a különbségét;
- 5 -nek, valamint y és x különbségének a szorzatát;
- x és y összegének és 3 -nak a hányadosát!

☉ *Ügyelj a műveletek sorrendjére!*

2

Számítsd ki az **1.** feladatban fölírt kifejezések helyettesítési értékét!

$$\textcircled{1} \quad x = 5,2, \quad y = 4,8; \quad \textcircled{2} \quad x = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{15}{2}; \quad \textcircled{3} \quad x = -6, \quad y = -4$$

☉ *Megvizsgáld, hogy a változók mely értékeinél nincsenek értelmezve ezek a törtek?*

3

Az x és y valós számok. Írd föl

- x és y hányadosát;
- y és x hányadosát;
- x -nek és 10 és y összegének a hányadosát;
- x és 10 összegének és y -nak a hányadosát;
- 10 -nek és x és y összegének a hányadosát!

☉ *Ügyeltél a műveletek sorrendjére?*

4

Számítsd ki a **3.** feladatban fölírt törtkifejezések helyettesítési értékét!

$$\textcircled{1} \quad x = 5, \quad y = 8; \quad \textcircled{2} \quad x = 0, \quad y = 7; \quad \textcircled{3} \quad x = -6, \quad y = -4$$

5

Számítsd ki a következő algebrai kifejezések helyettesítési értékét!

$$a = 8,25; \quad b = 0,04; \quad c = 0,25$$

$$a) \ 2a - bc; \quad b) \ (2a - b)c; \quad c) \ (2 - a)bc; \quad d) \ (2 - ab)c$$

6

Írd külön csoportokba az egymással egymemű kifejezéseket! Húzd alá az együtthatókat!

$$a) \quad 3x^2; \quad -\frac{1}{2}xy; \quad -x^2; \quad 0,6xy; \quad 5x; \quad -7y; \quad 8xy; \quad -\frac{3}{4}x; \quad 2x \cdot 3y$$

$$b) \quad x^3; \quad y^3; \quad \frac{2}{5}xy; \quad \frac{2}{5}; \quad \frac{2}{5}x^3; \quad x^2; \quad 0; \quad 0,3xy; \quad -\frac{3}{4}y^2$$

7

Mely testek mely adatát számíthatjuk ki ezekkel a kifejezésekkel? Melyek azonosak ezek közül a kifejezések közül?

$$\begin{array}{llll} 1) \ 2r\pi(r+M); & 2) \ 2ab+2bc+2ca; & 3) \ 6a^2; & 4) \ r^2\pi M; \\ 5) \ 2a(b+c)+bc; & 6) \ abc; & 7) \ 2(ab+bc+ca); & 8) \ 2r^2\pi+2r\pi M \end{array}$$

8

Határozd meg a következő kifejezések helyettesítési értékét!

$$a) \ A = a - bc^2; \quad B = (a - b)c^2; \quad C = (a - bc)^2; \\ \text{ha } a = 23\ 500; \quad b = 54; \quad c = 105$$

$$b) \ A = a - b : c^2; \quad B = (a - b) : c^2; \quad C = (a - b : c)^2; \\ \text{ha } a = 34\ 350; \quad b = 150; \quad c = 45$$

$$c) \ A = a^2 - b^2c^2; \quad B = (a^2 - b)^2c^2; \quad C = (a^2 - bc)^2; \\ \text{ha } a = 0,459; \quad b = 0,59; \quad c = 0,0075$$

9

a) Határozd meg a kör területét és kerületét, ha

$$1) \ r = 5,6 \text{ cm}; \quad 2) \ r = 428 \text{ mm}; \quad 3) \ r = 0,01 \text{ m}; \quad 4) \ r = 0,248 \text{ m!}$$

b) Határozd meg az egyenes körhenger térfogatát és felszínét, ha az alapkör sugara (r) és a henger magassága (h):

$$1) \ r = 4,68 \text{ dm}, \ h = 2 \text{ m}; \quad 2) \ r = 285 \text{ mm}, \ h = 12,3 \text{ cm!}$$

10

Határozd meg a gömb felszínét és térfogatát, ha

$$1) \ r = 5,6 \text{ cm}; \quad 2) \ r = 428 \text{ mm}; \quad 3) \ r = 0,01 \text{ m}; \quad 4) \ r = 0,248 \text{ m!}$$

☉ Gyakorold a számológép használatát!

☉ Miben különbözhetnek egymástól az egymemű kifejezések?

☉ Például: $-x^2 = -1 \cdot x^2$

☉ A szokásos jelöléseket használtuk:
 r : sugár; M : magasság;
 a, b, c oldalélek.

☉ A számológép használata közben ügyeltetek a helyes műveleti sorrendre? A tanulópárossal közösen ellenőrizd az eredményeket!

☉ Gyakorold a számológép használatát! Szükség esetén lapozz a kislexikonhoz!

☉ Emlékszel?

$$A = 4r^2\pi; \quad V = \frac{4r^3\pi}{3}$$

Emlékeztető

Egyemű algebrai kifejezéseket úgy vonunk össze, hogy az együtthatókat összevonjuk, a betűkifejezést változtatlanul leírjuk.

A különmemű algebrai kifejezések nem vonhatók össze.

☉ Például:

$$2x^2y + x^2y - \frac{1}{2}x^2y = \frac{5}{2}x^2y$$

$$3xy^2 - 2x^2y + 5y^2x - yx^2 = 8xy^2 - 3x^2y$$



Ödömér így szorozott: $5 \cdot (2 \cdot x^2) = 10 \cdot 5x^2 = 50x^2$

Vajon helyesen számolt?

© Például:

$$\begin{aligned} 3a + (5 - 2a + b) - (4 + 3a - 5b) &= \\ = 3a + 5 - 2a + b - 4 - 3a + 5b &= \\ = 1 - 2a + 6b \end{aligned}$$

Megfigyelted? Az első zárójel előtt „+” jel, a második előtt „-” jel volt.

Zárójeles kifejezések összevonása esetén a következőképpen **bonthatjuk fel a zárójeleket**:

Ha „+” jel van a zárójel előtt (vagy nincs előtte előjel), akkor a zárójelet úgy hagyjuk el, hogy a zárójelben lévő tagok előjelét változtatlanul hagyjuk.

Ha „-” jel van a zárójel előtt, akkor a zárójelet úgy hagyhatjuk el, hogy a zárójelben lévő tagok előjelét ellentettjére változtatjuk. Ugyanis egy kifejezés kivonása helyettesíthető ellentettjének hozzáadásával.

© Például:

$$\begin{aligned} (3x^2y^4)(4x^3z) &= 12x^5y^4z; \\ (15x^3y^4) : (3x^2z) &= 5 \frac{xy^4}{z}; \\ x \neq 0; z \neq 0 \end{aligned}$$

Az **egytagú algebrai kifejezéseket** a következőképpen **szorozzuk** össze, vagy **osztjuk** el egymással:

- 1 az együtthatók szorzatát vagy hányadosát kiszámítjuk;
- 2 az egyenlő alapú hatványok szorzatát vagy hányadosát fölírjuk hatványalakban;
- 3 a különböző változók szorzatát vagy hányadosát csak jelöljük.

Az egytagú kifejezések szorzásánál alkalmazzuk a szorzat tényezőinek **felcserélhetőségét** és **csoportosíthatóságát**. (Az osztást visszavezethetjük az osztó reciprokaival való szorzásra.)

Ha az osztóban változó is van, akkor még az osztás előtt megvizsgáljuk, hogy a kifejezés mely számokra nem értelmezhető. (Amelyekre az osztó 0.)

Összeget (vagy különbséget) kétféleképpen szorozhatunk egy számmal:

- 1 elvégezzük a zárójelben az összevonást, és az eredményt szorozzuk a számmal;
- 2 az összeg (különbség) minden tagját megszorozzuk a számmal, és utána végezzük el az összevonást. (Ha lehet.)

© Ha a beszorzás után kapott tagok nem egyenműek, akkor az összevonást csak kijelöljük.

$$\begin{aligned} 1 \quad 5 \cdot (12 - 3) &= 5 \cdot 9 = 45; \\ 5a \cdot (12ab - 3ab) &= 5a \cdot 9ab = 45a^2b \\ 2 \quad 5 \cdot (12 - 3) &= 5 \cdot 12 - 5 \cdot 3 = 60 - 15 = 45; \\ 5a \cdot (12a - 3b) &= 5a \cdot 12a - 5a \cdot 3b = 60a^2 - 15ab \end{aligned}$$

Az 1 és a 2 összefüggés együttes alkalmazása:

$$5a \cdot (12a - 3 - 2a) = 5a \cdot (10a - 3) = 5a \cdot 10a - 5a \cdot 3 = 50a^2 - 15a$$

© A tagokat olyan szorzatok formájában írjuk fel, amelyeknek valamelyik tényezőjük megegyezik.

Az összefüggés alkalmazásával a többtagú kifejezést **kiemeléssel** szorzattá alakíthatjuk, ha mindegyik tagjában előfordul ugyanaz a tényező:

$$\begin{aligned} &\text{Szorzat felírása összegalakban} \\ &\xrightarrow{\hspace{10em}} \\ 2a^2 \cdot (a - 3b + 5) &= 2a^2 \cdot a - 2a^2 \cdot 3b + 2a^2 \cdot 5 = 2a^3 - 6a^2b + 10a^2 \\ &\xleftarrow{\hspace{10em}} \\ &\text{Összeg felírása szorzatalakban} \end{aligned}$$

Az összeg és a különbség szorzására mondottak igazak az osztásra is, csak ügyelni kell arra, hogy az osztó nem lehet 0.

FELADATOK

11 Hozd egyszerűbb alakra!

- a) $2x + 3y - 1,2x + 3y - 6xy$; b) $x - xy^2 + 2x + 3xy^2 + 5$;
 c) $4 + 3x - 2x + 5 - 3y$; d) $2x^2 - 1,5x^2 + 3x^2 + 4x^2 - 12x^2$;
 e) $\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a + 3 - \frac{3}{2}b$; f) $2,8c^2 + 3,2b - 4c^2 - 3b + 8$

☉ Ahol lehet, végezd el az összevonásokat!

12 Mely kifejezések azonosak?

- $A = 2x + 5 - 3y$; $B = 2x - 5 + 3y$; $C = 2x - 5 - 3y$;
 $D = 2x + (5 - 3y)$; $E = 2x + (-5 + 3y)$; $F = 2x + (-5 - 3y)$;
 $G = 2x - (5 - 3y)$; $H = 2x + (5 + 3y)$; $I = 2x - (-5 + 3y)$

☉ Mikor nevezünk két algebrai kifejezést azonosnak?

13 A szorzatokat alakítsd összeggé!

- a) $3(x + y + z)$; b) $3(a - 2b)$; c) $x(y + 5)$; d) $-2(3 - x)$;
 e) $x(4 + x)$; f) $-a(a^2 - a)$; g) $x(xy - 1)$; h) $x(4 - x^2)$;
 i) $(5 - x)6x^2$; j) $x^3(x^2 - x)$; k) $(1 - x - 2x^2)x^2$; l) $(-x)^2(x - 5 - 6x^2)$

☉ Végezd el a szorzást!

Gyakorló
 3.01–3.60.;
 Feladatgyűjtemény
 2.7.01–50.

14 Írd föl szorzatalakban az összegeket!

- a) $3x - 3y$; b) $6ab + 9a - 3b$; c) $2ab + 9a - 3ac$;
 d) $3x - xy$; e) $12ab + 4a - 8a^2$; f) $5a^2 + 10a - 15ab$;
 g) $48a + 15ab$; h) $6x + 10xy - 4x^2$; i) $21x - 7xy + 14y$

☉ Észrevetted, hogy melyik tényező fordul elő mindig egyik tagban? Hogyan ellenőrzöd az eredményt?

15 Bontsd fel a zárójeleket, majd vond össze az egynemű tagokat!

- a) $(3a + 5b - 3) + (2a - 4b + 2)$; b) $(3a + 5b) - (3 + 2a) - (4b + 2)$;
 c) $15b - (2a^2 + 7b) + (3b^2 - a^2)$; d) $(15b - 2a^2) + (7b + 3b^2) - a^2$;
 e) $(3ab - 2ab) - (6 + 6 - 4ab)$; f) $3ab - (2ab - 6) + (6 - 4ab)$



Ha $x + y = 5$, és $x - y = 3$, akkor mennyi

- ① $2x$; ② $2y$; ③ $5x$; ④ $5y$?

Fejtörő!



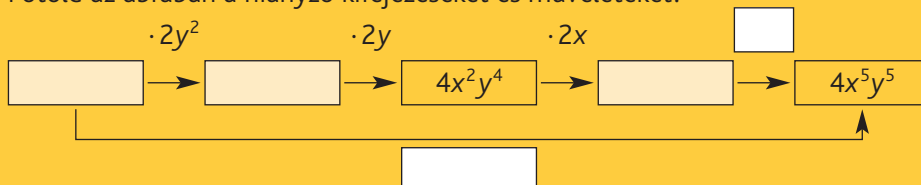
Az x és az y egy-egy törtszámot jelent.

Melyik lehet ez a két törtszám, ha tudjuk, hogy $2x + 3y = 6$?

☉ Ebben a könyvben törtszámon nem egész racionális számot értünk.



Pótold az ábrában a hiányzó kifejezéseket és műveleteket!



NEVEZETES AZONOSSÁGOK

2. példa

☉ Mit értünk egy szám (kifejezés) négyzetén?

☉ Emlékeztető:
Többtagot többtaggal úgy szorzunk, hogy az egyik tényező minden tagját szorozzuk a másik tényező minden tagjával.

☉ Mikor nevezünk két algebrai kifejezést azonosnak?

Oldjuk meg a következő egyenletet. Az alaphalmaz az $\mathbb{R}$.

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 3x + 3x + 3 \cdot 3 = x^2 + 6x + 9$$

Az egynemű tagok összevonása után az egyenlet a következő alakba írható:

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

A két oldalon ugyanaz az algebrai kifejezés áll, azaz bármely valós számot írjuk az x helyére, a bal oldal értéke egyenlő lesz a jobb oldal értékével.

Az egyenlet igazsághalmaza megegyezik az alaphalmazzal.

Ez az egyenlet azonosság.

3. példa

Oldjuk meg a következő feladatot. Az alaphalmaz az $\mathbb{R}$.

$$(a - 5)^2 = a^2 - 10a + 25$$

Alakítsuk át az egyenlet bal oldalán álló kifejezést:

$$(a - 5)^2 = a^2 - 10a + 25$$

$$(a - 5) \cdot (a - 5) = a^2 - 10a + 25$$

$$a^2 - 5a - 5a + (-5) \cdot (-5) = a^2 - 10a + 25$$

Vonjuk össze az egynemű kifejezéseket:

$$a^2 - 10a + 25 = a^2 - 10a + 25$$

Minden valós szám kielégíti az egyenletet, tehát ez az egyenlet is azonosság.

4. példa

Hogyan számítható ki másképpen $(10 + x)(10 - x)$ szorzat?

☉ Gyűjtsetek több ilyen példát az összefüggés bemutatására!

$$(10 + x)(10 - x) = 10^2 + 10x - 10x - x^2$$

A szorzat kiszámítható a 10 négyzetének és az x négyzetének különbségeként.

$$(10 + x)(10 - x) = 10^2 - x^2$$

$$\text{Valóban: } 11 \cdot 9 = 10^2 - 1^2 = 99; \quad 12 \cdot 8 = 10^2 - 2^2 = 96; \quad \dots \quad 19 \cdot 1 = 10^2 - 9^2 = 19$$

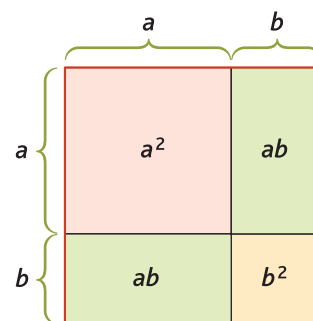
Az előző példákban igazolt összefüggések általánosan is bizonyíthatók.

A következő tételek tárgyalásánál figyeld meg, hogyan szemléltetik és igazolják az ábrák az adott összefüggéseket!

Tétel

Két szám összegének a négyzetét megkaphatjuk, ha a két szám négyzetének összegéhez hozzáadjuk a két szám kétszeres szorzatát.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Bizonyítás

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

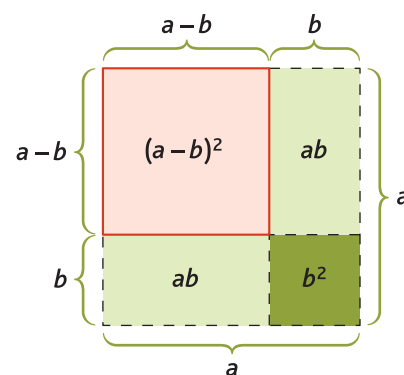
Felírjuk összegalakban az egyenlet jobb oldalán álló szorzatot, majd összevonjuk az egymű tagokat.

A geometriai bizonyítások csak nemnegatív valós számokra igazak, hiszen egy szakasz hossza mindig nemnegatív szám. Az összefüggések viszont minden valós számra érvényesek.

Tétel

Két szám különbségének a négyzetét megkaphatjuk, ha a két szám négyzetének összegéből kivonjuk a két szám kétszeres szorzatát.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



Bizonyítás

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$$

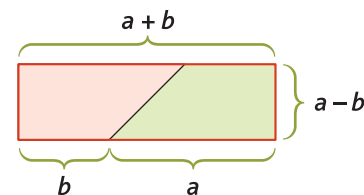
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

☉ Az $(a - b)$ oldalú négyzet $(a - b)^2$ területét megkapjuk, ha az a oldalú négyzetből levágunk két ab területű téglalapot, de „visszaadjuk” a kétszer levágott b oldalú négyzet területét, a b^2 -et.

Tétel

Két szám összegének és különbségének a szorzata megegyezik a két szám négyzetének különbségével.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



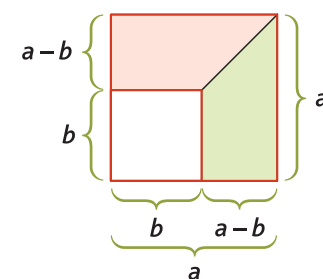
Bizonyítás

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$a^2 - ab + ab + b^2 = a^2 - b^2$$

$$a^2 - b^2 = a^2 - b^2$$

Írjuk fel összegalakban az egyenlet bal oldalán álló szorzatot, majd vonjuk össze az egymű tagokat.



Az előző tételekben szereplő egyenleteket minden valós szám kielégíti. Ezért a fenti egyenletek azonosságok.



Keress szabályt az 5-re végződő kétjegyű természetes számok négyzetének kiszámítására! Érvényes-e ez a szabály tetszőleges 5-re végződő természetes szám négyzetének kiszámítására?

$15^2 = (10 \cdot 1 + 5)^2$;
 $25^2 = (10 \cdot 2 + 5)^2$;
 $35^2 = (10 \cdot 3 + 5)^2$; stb.

FELADATOK

☉ *Hogyan szorzunk több tagú kifejezést több tagú kifejezéssel?*

Végezd el a szorzást!

☉ *Hogyan végezzük el a négyzetre emeléseket?*

☉ *Alkalmazhatod a két szám összegének, illetve különbségének négyzetéről megismert összefüggéseket.*

☉ *Melyik tétel alkalmazható?*

☉ *A nevezetes szorzatok alkalmazásával egyszerűsíthető a számolás.*

Gyakorló

3.61–3.65.;

Feladatgyűjtemény

2.3.32., 2.7.51–54.

☉ *Párban dolgozva osszátok meg a munkát!*

(1) *Behelyettesítés után művelet.*

(2) *Művelet után behelyettesítés.*

B1 A szorzatokat alakítsd összeggél!

$$a) (x+2)(x+3); \quad b) (4-x)(x-3); \quad c) \left(3x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3} - x\right)$$

B2 Írd fel a kifejezéseket összegalakban!

$$(x+y)^2; \quad (x-y)^2; \quad (a+1)^2; \quad (4-a)^2; \quad (3+5z)^2; \quad (2x-y)^2$$

B3 Fejben számolva határozd meg a következő második hatványokat!

Esetleg kétféleképpen is számolhatsz.

$$a) 41^2; \quad b) 39^2; \quad c) 45^2; \quad d) 1005^2; \quad e) 995^2; \quad f) 4,1^2; \quad g) 3,9^2$$

B4 Írd fel a kifejezéseket összegalakban!

$$a) (x+2)(x-2); \quad b) (a-5)(a+5); \quad c) (b+0,5)(b-0,5);$$

$$d) \left(\frac{1}{3} - c\right)\left(\frac{1}{3} + c\right); \quad e) (2x+y)(2x-y); \quad f) (3,5-z)(3,5+z)$$

B5 Számítsd ki szóban az eredményt! **Például:**

$$28 \cdot 32 = (30-2) \cdot (30+2) = 30^2 - 2^2 = 900 - 4 = 896$$

$$32^2 = (30+2)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 = 900 + 120 + 4 = 1024$$

$$a) 17 \cdot 23; \quad b) 105 \cdot 95; \quad c) 25^2; \quad d) 23 \cdot 27;$$

$$e) 403^2; \quad f) 402 \cdot 404; \quad g) 398^2; \quad h) 396 \cdot 400$$

B6 Határozd meg a kifejezések értékét kétféleképpen! $x=3$, $y=2$

$$a) (x+y)^2; \quad b) (x-y)^2; \quad c) (x+y)(x-y); \quad d) \left(3x - \frac{1}{6}\right)^2;$$

$$e) (x-0,5)^2; \quad f) (x+0,75)^2; \quad g) (y-1)(y+1); \quad h) (1-x^2)(1+x^2)$$

B7 Írd fel a kifejezéseket két tag összegének, illetve különbségének négyzeteként!

$$a) 16 + 8x + x^2; \quad b) 25a^2 - 10a + 1;$$

$$c) 4a^2 + 12ab + 9b^2; \quad d) 1 - 20y + 100y^2$$

B8 Írd fel a kifejezéseket szorzatalakban!

$$a) 16 - x^2; \quad b) 25a^2 - 1; \quad c) 4a^2 - 49b^2; \quad d) v^2 - 0,01$$

Fejtörő!



a) Igazold, hogy egyik természetes szám négyzete sem végződik 2-re!

b) Mely számjegyek fordulhatnak elő egy négyzetszám utolsó számjegyeként?

▶ FELADATOK KÖZÉPISKOLÁBA KÉSZÜLŐKNEK

B9 Legyen $A = 4,6x^2 - 7x - 1$ és $B = 5,4x^2 + 2x - 5$.

Ha $x = \frac{2}{5}$, akkor mivel egyenlő az $A + B$, illetve az $A - B$?

☉ *Kétféleképpen is megoldható a feladat. Melyik megoldás egyszerűbb?*

B10 Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{a}{6} + \frac{25a}{15} - \frac{20a}{18}$; b) $\frac{b}{4} - \frac{28b}{56} - \frac{20b}{18}$; c) $\frac{c}{60} + \frac{75c}{15} - \frac{24c}{36}$;
 d) $\frac{6a}{5} \left(\frac{25a}{15} - \frac{b}{6} \right)$; e) $\frac{60}{a} \left(\frac{5a}{15} - \frac{a}{6} \right)$; f) $\left(\frac{4b}{9} - \frac{48b}{18} \right) : \frac{b}{6}$

☉ *Egyszerűsíts!*

☉ *Mely értékeket nem vehet fel a betűk?*

B11 Írd föl egyszerűbb alakban, majd határozd meg a kifejezések helyettesítési értékét!

$a = \frac{x}{6} - \frac{x}{9} + \frac{8y}{12} - \frac{y}{18}$; ha $x = 5,4$; $y = 0,4$

$b = \frac{x}{9} - \frac{y}{3} + \frac{9x}{54} - \frac{3y}{15}$; ha $x = 50$; $y = 4$

$c = \frac{x-3}{2} + \frac{x-3}{4} - \frac{x-3}{5}$; ha $x = 3$

☉ *A közös nevezők meghatározásánál gondoldj arra, hogy mikor nem változik egy tört értéke.*

B12 Az üres helyre írd számot, kifejezést úgy, hogy azonosságot kapj! Az alaphalmaz az $\mathbb{R}$.

a) $15x - 9 = \square (5x - 3)$; b) $35 - 7x = 14 - 7(\square)$;
 c) $4x^2 + 6x = \square (2x - \square)$; d) $12x - (10 - 3x) = \square (3x - \square)$;
 e) $(12x - 9)^2 = 9(\square)$; f) $(3x - 2)(3x + 2) = \square$

☉ *A kifejezések közé a szorzás jelét általában nem írjuk ki.*

B13 Töltsd ki a táblázatot! ☉ *Megfigyelted az összeg változásait?*

a	10	11,4	3,3	-20	-3,3	-50	0	-6,7
$26,7 + a$								
$26,7 + (a + 2)$								
$26,7 + (a - 5)$								

B14 Töltsd ki a táblázatot! ☉ *Megfigyelted a különbség változásait?*

a	10	11,4	3,3	-20	-3,3	-50	0	-6,7
$26,7 - a$								
$26,7 - (a + 2)$								
$26,7 - (a - 5)$								

EGYENLET, AZONOSSÁG, EGYENLŐTLENSÉG, AZONOS EGYENLŐTLENSÉG

1. példa

☉ Egy szorzat eredménye mikor lesz 0?

Határozzuk meg a **nyitott mondat igazsághalmazát**, ha az **alaphalmaz** a $\mathbb{Z}$.

$$(5 - x)(3 + x)(2x - 1) = 0$$

☉ Ez az egyenlet olyan nyitott mondat, amelynek állítmánya „egyenlő”.

A nyitott mondatoknak, így az **egyenleteknek, egyenlőtlenségeknek** általában nincs logikai értékük. Nem mondhatjuk el róluk, hogy igazak vagy hamisak. Így például az adott egyenlet se nem igaz, se nem hamis:

$$(5 - x)(3 + x)(2x - 1) = 0$$

Ha az x helyére beírjuk az alaphalmaz valamelyik elemét, akkor ebből a nyitott mondatból **kijelentést** kapunk. **Például:**

- 1 Ha az x helyére **4**-et írunk, akkor **hamis kijelentést** kapunk, mert $(5 - 4)(3 + 4)(2 \cdot 4 - 1) \neq 0$. Az $x = 4$ **nem megoldása** az egyenletnek.
 - 2 Ha az x helyére **5**-öt írunk, akkor **igaz kijelentést** kapunk: $(5 - 5)(3 + 5)(2 \cdot 5 - 1) = 0$. Az $x_1 = 5$ (és az $x_2 = -3$) **kielégíti az egyenletet**. Ezek egész számok, az alaphalmaz elemei.
Az $x_1 = 5$ és az $x_2 = -3$ **megoldása**, más szóval **gyöke** az egyenletnek.
 - 3 Az $x_3 = \frac{1}{2}$ is kielégíti az egyenletet, de nem egész szám, az alaphalmaznak nem eleme, ezért nem megoldása (nem gyöke) az egyenletnek.
- Az egyenlet **igazsághalmaza** vagy **megoldáshalmaza**: $I = \{5; -3\}$

☉ Az I részhalmaza a $\mathbb{Z}$ -nek.

2. példa

Határozzuk meg az **egyenlet megoldáshalmazát**, ha az **alaphalmaz** az $\mathbb{R}$.

$$3(2 - x) = 6 - 3x$$

☉ Mikor azonos két algebrai kifejezés?

Ezt az egyenletet bármely valós szám kielégíti. Ennek **az egyenletnek a megoldáshalmaza megegyezik az alaphalmazzal**. Ez az egyenlet **azonosság**.

3. példa

☉ Az egyenlőtlenség így írható fel:

$$-3 \leq 2 + x \leq 3$$

Adjuk meg az **egyenlőtlenség megoldáshalmazát**, ha az **alaphalmaz** az $\mathbb{R}$.

$$|2 + x| \leq 3$$

☉ Néhány érték behelyettesítésével keressük a megoldást.

Ha ebbe az egyenlőtlenségbe -5 -nél nem kisebb és 1 -nél nem nagyobb valós számot helyettesítünk be, akkor igaz kijelentést kapunk. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza:

$$I = \{-5\text{-nél nem kisebb és } 1\text{-nél nem nagyobb valós számok}\}$$

A megoldáshalmaz olyan **számköz**, amelyhez mindkét végpontja hozzátartozik. Ezt tömör karikával szemléltethetjük, ha számegyenesen ábrázoljuk a megoldáshalmazt.



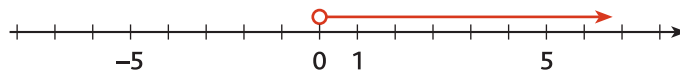
4. példa

Határozzuk meg az egyenlőtlenség megoldáshalmazát, ha az alaphalmaz az U .

$$2 + x > 2, \quad U = \{\text{Pozitív valós számok}\}$$

Ezt az egyenlőtlenséget bármely pozitív valós szám kielégíti. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $I = \{\text{Pozitív valós számok}\}$, vagyis $I = U$.

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza megegyezik az alaphalmazzal. Ez **azonos egyenlőtlenség** az adott alaphalmazon. Ha az alaphalmaz például a valós számok halmaza lenne, akkor nem lenne azonos egyenlőtlenség. A megoldáshalmazhoz nem tartozik hozzá a 0, ezt üres karrával szemléltetjük.



Fontosak azok a vizsgálatok, amelyekben megállapítjuk, hogy egy alaphalmaz mely elemeire igaz, illetve mely elemeire hamis egy adott állítás. Ilyenkor az állításban az alany helyén (kerettel, kipontozással, betűvel stb. jelölt) **változó** szerepel. Az ilyen állítást nevezzük **nyitott mondatnak**. A nyitott mondatba írt változót **ismeretlennek** nevezzük. Például ezek nyitott mondatok (az alaphalmazt U jelöli):

- ① magasabb, mint Feri, $U = \{\text{Az osztály tanulói}\}$;
- ② $(5 - x)(3 + x)(2x - 1) = 0$, $U = \{\text{Egész számok}\}$;
- ③ 24 és x közös osztója 6, $U = \{\text{Természetes számok}\}$;
- ④ $2 + x > 2$, $U = \{\text{Valós számok}\}$

Az egyenletek és az egyenlőtlenségek speciális nyitott mondatok. Az előző nyitott mondatok közül a ② egyenlet, a ④ egyenlőtlenség.

Általában kijelentésnek, **logikai ítéletnek** nevezzünk egy kijelentő mondatot, ha egyértelműen eldönthető, hogy a benne foglalt állítás igaz vagy nem igaz (azaz hamis).

Például ezek kijelentések:

Józsi magasabb, mint Feri.

$$8 + 5 = 20. \quad 15 - 3 < 20.$$

A kijelentő mondat nem ítélet, ha nem dönthető el, hogy igaz-e vagy hamis. A kérdő, az óhajtó és a felszólító mondatok sem ítéletek, mivel nincs értelme azt kérdezni, hogy igazak-e. Ezek a mondatok nem ítéletek:

Ki álmos? Jaj, de szép a hajnal! Mars!

A 13 a legszebb szám.

Emlékeztető

Ha két kifejezést egyenlőségjellel kapcsolunk össze, akkor **egyenletről** beszélünk. A két kifejezést az **egyenlet bal**, illetve **jobb oldalának** nevezzük.

Ha két kifejezést a $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\neq$, $\prec$, $\succ$, $\nlessgtr$, $\nlessgtr$ jelek valamelyikével kapcsolunk össze, akkor **egyenlőtlenséget** kapunk.

Egyenletet és egyenlőtlenséget megoldani annyit jelent, hogy megkeressük az alaphalmaz mindazon elemeit, amelyeket az adott egyenletbe, egyenlőtlenségbe helyettesítve igaz kijelentést kapunk.

Ha nem adunk meg mást, akkor az alaphalmaz a valós számok ($\mathbb{R}$) halmaza.

Azonosságnak (azonos egyenlőtlenségnek) nevezzük azt az egyenletet (egyenlőtlenséget), amelynek igazsághalmaza az alaphalmaz.



Az $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\neq$, $\prec$, $\succ$, $\nlessgtr$, $\nlessgtr$ jelek között vannak-e olyanok, amelyekkel ugyanazt az összefüggést fejezzük ki? Ha igen, melyek?

Fejtörő!

FELADATOK

© Írj te is példákat!
Vitassátok meg a válaszokat!

© Figyeltél arra, hogy mi az értelmezési tartomány?

© Tervszerű próbálgatással dolgozhatsz.
A próbálkozással történő megoldás megfelel az ellenőrzésnek is.

© Ellenőrizd a megoldást!
Melyik egyenlet igazsághalmaza az alaphalmaz?
Melyik egyenlet igazsághalmaza az üres halmaz?

© Írd föl az igazsághalmazt is!
Melyek azonos egyenlőtlenségek ezek közül?

16 Melyik kijelentés, nyitott mondat, egyenlet, egyenlőtlenség?

- a) Nóra olvas. b) Add ide a labdát! c) $5 + 7 = 12$.
d) Ki megy el a boltba? e) $2x + 3 = 5$. f) $15 > 6 \cdot 7 - 5^2$;
g) $x + 15 < 2x$

17 A-val jelöltük az alaphalmazt. Oldd meg az egyenleteket próbálgatással!
Mi az igazsághalmaz (megoldáshalmaz)? Melyek azonoságok?

- a) $x^2 + 1 = 5$, $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$;
b) $2x + 4 = 3x + 6$, $A = \{-2; -1; 1; 0\}$;
c) $(x - 3)(x + 1) = x + 1$, $A = \{-2; -1; 0; 1; 4\}$;
d) $\frac{2}{x - 1} = 1$, $A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$;
e) $3x - 4 = 3(x - 2) + 2$, $A = \left\{\frac{1}{3}; -1; -\frac{1}{3}; 1\right\}$;
f) $(x - 5)(x + 5) = x^2 - 25$, $A = \{-15; -10; -5; 0; 5; 10; 15\}$

18 A-val jelöltük az alaphalmazt. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!
Mi az igazsághalmaz? Melyek azonos egyenlőtlenségek?

- a) $x^2 + 1 < 5$, $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$;
b) $x - 5 < x + 5$, $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$;
c) $\frac{3}{x - 2} \geq x$, $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$;
d) $(x - 4)(x - 2) < 0$, $A = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

19 Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz az egész számok halmaza ($\mathbb{Z}$).

- a) $x + 12,5 = 7,3$; b) $x - 2,3 = 5,4$; c) $3,2 - x = 4,2$;
d) $-8x = 14,4$; e) $x \cdot (-2,5) = -15$; f) $42 : (-x) = 14$;
g) $12x = -30$; h) $x : (-7,2) = 0$; i) $2,1 : x = 0$

20 Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$.

- a) $x - 3 \leq 5$; b) $x + 5 > x + 4$; c) $-2x > 7$;
d) $x : (-3) < 4$; e) $x : 120 > x : 100$; f) $2x \geq 6x$;
g) $x + 3 \leq 5$; h) $x + 5 \geq 2x + 5$; i) $1 - x < 2$;
j) $-3x + 3 > 5$; k) $2x + 5 > 2(x + 4)$; l) $2x < 2 : x$

Fejtörő!



Egy apa három különböző korú fia között úgy osztott szét kilenc kéteuróst és három egyeuróst, hogy mindhárom fiú annyi eurót kapott, mint ahány éves, és mindhárman ugyanannyi pénzérmét kaptak. Hány évesek lehetnek a gyerekek?

EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK ALGEBRAI MEGOLDÁSA

MÉRLEGELV

A két oldal egyenlő változtatását mérleggel tettük szemléletessé: ha a mérleg mindkét serpenyőjében egyenlően változtatjuk meg az ott lévő dolgokat, akkor a mérleg egyensúlyi állapota nem változik meg. Ezért az eljárás gondolatmenetét **mérlegelvnek** is nevezzük.



1. példa

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget. Az alaphalmaz az $\mathbb{R}$.

$$13 - 3x < x + 5$$

A két oldal egyenlő változtatásával oldjuk meg.

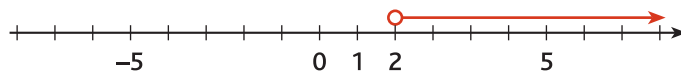
$$\begin{array}{lll} 13 - 3x < x + 5 & / -13 & \text{Mindkét oldalból elveszünk 13-at.} \\ -3x < x - 8 & / -x & \text{Mindkét oldalból elveszünk } x\text{-et.} \\ -4x < 8 & / : (-4) & \text{Mindkét oldalt osztjuk } -4\text{-gyel.} \\ x > 2 & & \text{Az egyenlőtlenség iránya megváltozik.} \end{array}$$

Megoldáshalmaz: $I = \{2\text{-nél nagyobb valós számok}\}$

Ellenőrzés:

Ha 2-nél kisebb számot vagy 2-t írunk az x helyére, akkor az egyenlőtlenség bal oldala nem kisebb, mint a jobb oldala, hamis állítást kapunk.

Ha 2-nél nagyobb számot írunk az x helyére, akkor az egyenlőtlenség bal oldala kisebb, mint a jobb oldala, igaz állítást kapunk.



☉ Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk, az egyenlőtlenség iránya ellenkezőjére változik.

Például:

$$\begin{array}{l} -20 < -8 \quad / : (-4) \\ 5 > 2 \end{array}$$

☉ A megoldás ellenőrzése sohasem maradhat el. Ezzel bizonyítjuk, hogy helyes a megoldásunk.

2. példa

Oldjuk meg az egyenletet. Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$.

$$3x - \{4x - [5x - (6x - 7)]\} = 11$$

Bontsuk fel a belső (kerek) zárójelet. Mivel a zárójel előtt negatív előjel van, olyan, mint ha (-1) -gyel szoroznánk.

$$3x - \{4x - [5x - (6x - 7)]\} = 11$$

$$3x - \{4x - [5x - 6x + 7]\} = 11$$

$$3x - \{4x - 5x + 6x - 7\} = 11$$

$$3x - 4x + 5x - 6x + 7 = 11$$

$$-2x + 7 = 11$$

$$-2x = 4$$

$$x = -2$$

A zárójelben lévő tagok előjele megváltozik: $-(6x - 7) = -6x + 7$

Felbontjuk ismét a belső zárójelet.

Felbontjuk az utolsó zárójelet.

Összevonjuk az egyenmű tagokat.

Mindkét oldalból kivonunk 7-et.

Mindkét oldalt osztjuk (-2) -vel.

Leolvassuk a megoldást.

☉ Azonos átalakításokkal, például a zárójelek felbontásával, majd az összevonások elvégzésével egyszerűbb alakra hozzuk az egyenletet. Alkalmazzuk a mérlegelvet.

»»

© Az eredeti egyenletbe helyettesítünk be.

»

Ellenőrzés:

A -2 egész szám, tehát eleme az alaphalmaznak.

Bal oldal (az x helyére beírjuk a -2 -t):

$$\begin{aligned} -6 - \{-8 - [-10 - (-12 - 7)]\} &= -6 - \{-8 - [-10 - (-19)]\} = \\ &= -6 - \{-8 - [-10 + 19]\} = -6 - \{-8 - 9\} = -6 - \{-17\} = -6 + 17 = 11 \end{aligned}$$

Mivel a jobb oldalon álló szám is 11, így az $x = -2$ valóban megoldás.

3. példa

Oldjuk meg az egyenletet. Az alaphalmaz a racionális számok halmaza, a $\mathbb{Q}$.

$$\frac{x}{12} - \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 2 - \frac{2x}{3}$$

© Alkalmazzuk a törtekre tanult műveleti eljárásokat.

© Ha már begyakoroltuk a törtegyütthatós egyenletek megoldását, akkor a lépések összevonásával lerövidíthetjük a megoldást.

$$\frac{x}{12} - \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 2 - \frac{2x}{3}$$

$$\frac{x}{12} - \frac{9x}{12} + \frac{10x}{12} = \frac{24}{12} - \frac{8x}{12} \quad / \cdot 12$$

$$x - 9x + 10x = 24 - 8x$$

$$2x = 24 - 8x \quad / + 8x$$

$$10x = 24 \quad / : 10$$

$$x = 2,4$$

A törteket egyenlő nevezőjű törtekké alakítjuk.

Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát a közös nevezővel.

Összevonjuk az egyenmű tagokat.

Mindkét oldalhoz $8x$ -et adunk.

Mindkét oldalt osztjuk 10-zel.

Ellenőrzés:

A $2,4$ racionális szám, tehát eleme az alaphalmaznak.

Bal oldal: $\frac{2,4}{12} - \frac{7,2}{4} + \frac{12}{6} = 0,2 - 1,8 + 2 = 0,4$

Jobb oldal: $2 - \frac{4,8}{3} = 2 - 1,6 = 0,4$

Mivel a jobb oldal helyettesítési értéke egyenlő a bal oldal helyettesítési értékével, ezért az $x = 2,4$ megoldása az egyenletnek.

4. példa

Oldjuk meg az egyenletet. Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$.

$$2x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{5 + 4x}{10} + 2$$

$$2x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{5 + 4x}{10} + 2 \quad / \cdot 10$$

$$20x - 6x = 15x - (5 + 4x) + 20$$

$$14x = 11x + 15 \quad / - 11x$$

$$3x = 15 \quad / : 3$$

$$x = 5$$

Megkeressük a nevezők legkisebb közös többszörösét (a közös nevezőt) és ezzel megszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát.

Figyelembe vesszük, hogy a **törtvonal zárójelet helyettesít**. Felbontjuk a zárójelet, összevonjuk az egyenmű tagokat, majd a két oldal egyenlő változtatásával megkeressük a megoldást.

© Ügyeljünk a zárójel felbontására:

$$-(5 + 4x) = -5 - 4x$$

»

»»

Ellenőrzés:

Az 5 eleme az egész számok halmazának.

Bal oldal: $2 \cdot 5 - \frac{3}{5} \cdot 5 = 10 - 3 = 7$

Jobb oldal: $\frac{3}{2} \cdot 5 - \frac{5+4 \cdot 5}{10} + 2 = \frac{15}{2} - \frac{25}{10} + 2 = \frac{75-25}{10} + 2 = 5 + 2 = 7$

Az $x = 5$ valóban megoldása az egyenletnek, $I = \{5\}$.

☉ Az eredeti egyenletbe helyettesítünk be.

Emlékeztető

Az egyenlet vagy egyenlőtlenség igazsághalmaza nem változik, ha

- 1 az egyenlet vagy az egyenlőtlenség bármelyik oldalán azonos átalakításokat hajtunk végre (összevonjuk az egyenmű tagokat, elvégezzük a kijelölt szorzásokat, közös nevezőre hozunk stb.);
- 2 az egyenlet vagy az egyenlőtlenség mindkét oldalához ugyanazt a számot vagy algebrai egész kifejezést hozzáadjuk, vagy mindkét oldalából kivonjuk;
- 3 az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a nem nulla számmal szorozzuk vagy osztjuk;
az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a pozitív számmal szorozzuk vagy osztjuk, vagy **az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk, és az egyenlőtlenség irányát megváltoztatjuk.**

☉ Ha olyan kifejezést adunk hozzá az egyenlet mindkét oldalához (vagy vonunk ki az egyenlet mindkét oldalából), amely az alaphalmaz valamely értékére nincs értelmezve, akkor az így kapott új egyenletnek más lehet az igazsághalmaza, mint az eredetinek. Ez vonatkozik arra az esetre is, ha az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk vagy osztjuk egy olyan kifejezéssel, amely nulla is lehet, vagy az alaphalmaz nem minden értékére van értelmezve.

FELADATOK

21 Oldd meg az egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz a valós számok halmaza ($\mathbb{R}$).

a) $15x - 3 > 2 + 10x$;	b) $x - 2 = 3 - x$;
c) $8x - 15 = 5x + 4 - 2x$;	d) $6x - 4 < x + 2$;
e) $1,5x + 2,5 - x = x - 2$;	f) $0,5x - 2,6 \geq 0,25x + 8$;
g) $0,7x + 5 - 1,8x = 3 - 1,1x$;	h) $2x - 5x - 5 = 8 - 3x - 11$;
i) $1,7x + 3 < 3,5x + 2 - 1,8x$;	j) $0,5x - 6 > 5 + 1,5x - 11$;
k) $5,8x - 1 \leq 7,5x + 5 - 1,7x$;	l) $0,52x - 1,6 \geq 5 + 2,27x - 2,4$

☉ Minden esetben végezz ellenőrzést!

☉ Az összeg, különbség stb. változásait megfigyelve teljessé tehetjük az ellenőrzést.



A mérlegen azonos tömegű csomagok és 1 kg, illetve 0,5 kg tömegű mérő súlyok vannak. A mérleg egyensúlyban van.

☉ Írj szöveget a kép alapján!

Mennyi egy-egy csomag tömege?



$$\frac{1}{3} > \frac{1}{x} \quad / \cdot 3x$$

$$x > 3$$

Ödömér így oldotta meg az egyenlőtlenséget (az alaphalmaz az valós számok halmaza volt). Mutasd meg Ödömérnek, hogy mi a hiba a megoldásában!



☉ Minden megoldást megtalált Ödömér?

☉ Mely megoldások ábrázolhatók folytonos vonallal, melyek nem?

☉ Dolgozzatok párbán! Felezzétek meg egymás közt a feladatokat! Ellenőrizzétek egymás megoldásait!

☉ Mit célszerű közös nevezőnek választani? Minden tagot megszoroztál a közös nevezővel?

Gyakorló
4.01–4.21.;
Feladatgyűjtemény
2.8.01–23.

22

Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket! (Az alaphalmazt az egyenlőtlenség utáni zárójelben adtuk meg.) Ábrázold számegyenesen a megoldáshalmazt!

a) $15 - 5x \geq 25$ ($\mathbb{N}$);	b) $42 - 7x < 35$ ($\mathbb{Z}$);
c) $15 - 8x > 27$ ($\mathbb{Q}$);	d) $12 - 5x > 15$ ($\mathbb{N}$);
e) $5,3 - 2,5x \leq -2 : (-5)$ ($\mathbb{R}$);	f) $45x : (-9) \geq 3,5$ ($\mathbb{Z}$);
g) $0,5x \cdot (1 - 1,5) > -2$ ($\mathbb{R}$);	h) $1 + 0,7(-x) < 4,5$ ($\mathbb{Z}$);
i) $-8x : (2 - 2,3) \leq -4$ ($\mathbb{Q}$);	j) $1 - 5x : (3 - 3) > 1$ ($\mathbb{N}$);
k) $(5 - 7,5)x > (-2)^3$ ($\mathbb{Q}$);	l) $x : (-1)^9 \leq 3,5$ ($\mathbb{Z}$);

23

Oldd meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz az $\mathbb{R}$.

a) $5(2 - x) = 12x$;	b) $x - (3 - x) < 8$;
c) $(18 - 12x) : (-6) > 1$;	d) $5 - 2x - (3 + 2x) = 2$;
e) $21 + 7x = 2(x - 3) + 48 - 4(3 - x)$;	
f) $4(x + 1) + 2(x - 3) = 3(x - 2) + 3(x + 5)$;	
g) $(-2)(2 - x + 1) - (3 - x) = 5 - (x - 2) - 3(5 - x)$;	
h) $(12x - 30) : (-6) - (1 - 2x) = 5x - (x - 12)$;	
i) $4(18 - 5x) - 12(3x - 7) < 15(2x - 16) - 6(x + 14)$;	
j) $4x - 2 - \{x - [3 - (x - 1)]\} = 3x - 6$	

24

Oldd meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz az $\mathbb{R}$.

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 4$;	b) $\frac{y}{2} + \frac{1}{4} = \frac{y}{8}$;	c) $\frac{z}{6} - \frac{z}{3} < 1 - \frac{z}{4}$;
d) $\frac{x}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + x$;	e) $\frac{y}{6} - \frac{5}{4} > 1 - \frac{y}{3}$;	f) $\frac{1}{5} - \frac{z}{4} \geq z - 1,8$;
g) $\frac{x}{2} - \frac{5}{2} = \frac{35}{14} + 2x$;	h) $\frac{y}{7} - \frac{15}{42} = \frac{y}{2} + 3$;	i) $\frac{z}{2} - \frac{z}{3} = \frac{z}{6} - 8$;
j) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{4} = \frac{x}{6} + 1$;	k) $\frac{7y}{5} - \frac{5y}{4} = \frac{3y}{10} + \frac{1}{2}$;	l) $\frac{2z}{3} - \frac{z}{9} \leq 2 - \frac{z}{6}$

25

Oldd meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz az $\mathbb{R}$.

a) $\frac{x-3}{4} = \frac{1}{2}$;	b) $\frac{3y+9}{6} = y + \frac{2}{3}$;	c) $\frac{z-3}{3} \leq z - 1$;
d) $5 - \frac{u-2}{3} > u + 1$;	e) $\frac{2x-4}{5} - \frac{x-1}{4} = 1$;	f) $\frac{3y+1}{8} - \frac{y-2}{4} = \frac{3}{2}$

Többet ésszel ...



Igaz-e, hogy ha egy 5-nél nem nagyobb valós számot szorzunk egy 3-nál nem nagyobb valós számmal, akkor 15-nél nem nagyobb számot kapunk?

SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSA EGYENLETTEL

5. példa

Melyik az a szám, amelynek hatszorosa eggyel nagyobb, mint a nála hárommal nagyobb szám ötszöröse?

A szöveges feladatok esetén a következő „menetrend” követése segítheti a feladat hibátlan és hiánytalan megoldását.

1 A feladat értelmezése, az ismeretlenek jelölése:

A szám: x ; ennek 6-szorosa: $6x$

A számnál 3-mal nagyobb szám: $x + 3$; ennek 5-szöröse: $5(x + 3)$

2 Az adatok közötti összefüggések elemzése, becslés:

Ha a szám hatszorosából 1-et kivonunk, akkor éppen a számnál 3-mal nagyobb szám 5-szörösét kell kapnunk eredményül.

Az $x = 10$ túl kicsi, mert $6 \cdot 10 < 5 \cdot 13$.

Az $x = 20$ túl nagy, mert $6 \cdot 20 > 5 \cdot 23$.

A szám 10-nél nagyobb és 20-nál kisebb.

3 Tervkészítés, az egyenlet felírása:

$$6x - 1 = 5(x + 3)$$

$$6x - 1 = 5x + 15$$

4 Az egyenlet megoldása:

$$6x - 1 = 5x + 15 \quad / -5x$$

$$x - 1 = 15 \quad / +1$$

$$x = 16$$

5 Ellenőrzés:

A 16 a becslött 10 és 20 érték közé esik, tehát a becslött értékkel összhangban van.

A szám hatszorosa: $16 \cdot 6 = 96$

A számnál 3-mal nagyobb szám ötszöröse: $(16 + 3) \cdot 5 = 19 \cdot 5 = 95$

Mivel $96 - 95 = 1$, az $x = 16$ eleget tesz a feltételeknek. A szám tehát 16.

☉ Megkeressük a kapcsolatot az adatok között.

☉ Van, amikor a becslés nagyon bonyolult, ilyenkor nem végezzük el.

☉ A terv lehet rajz, táblázat, szöveg stb.

☉ A két oldal egyenlő változtatásával megoldjuk az egyenletet.

☉ Szöveges feladatnál mindig a szöveget követve végezzük az ellenőrzést! Az ellenőrzés sohasem maradhat el.



Lukrécia megkérdezi Tihamértól, hogy mennyi pénze van. Tihamér válasza: Ha négyszer annyi tallérom lenne, mint amennyi van, akkor vagyonom annnyival lenne több 1000 tallérnál, mint amennyi most hiányzik az 1000 tallérból. Hány tallérja van Tihamérnak?



Ha a nagypapa életkorát jelző számjegyeket felcseréljük, akkor megkapjuk a nagymama éveinek számát. Ha az előbbiből kivonjuk az utóbbit, akkor megkapjuk az unoka életkorát.

a) Hány éves a nagypapa, a nagymama és az unoka, ha a nagymama éveinek száma az unoka évei számának 6-szorosánál 2 évvel több?

b) Milyen eredményt kapunk, ha az előző feladatban az életkort nem években, hanem hónapokban számítjuk?

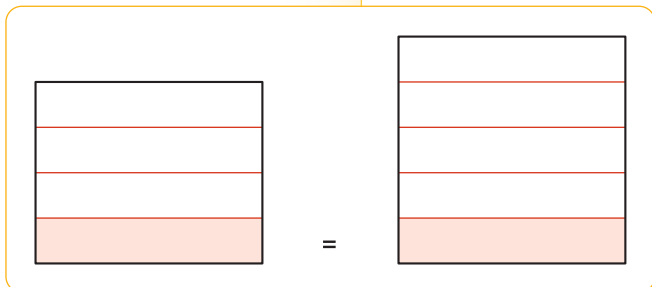
Fejtörő!

☉ A szöveges feladat gyakran egyenlet nélkül is megoldható.

6. példa

Két rekeszben összesen 90 kg alma van. Mennyi alma van az egyes rekeszekben, ha tudjuk, hogy az első rekesz almáinak 25%-a egyenlő a másik rekesz almáinak 20%-ával?

☉ Mekkora részt jelent a 20%, illetve a 25%?



☉ Egy-egy rajzos vázlat segíthet az összefüggések felismerésében.

☉ A megoldás ellenőrzésekor azt is vizsgáljuk, hogy a kapott értékek reálisak-e, megfelelnek-e a szöveg tartalmának.

Értelmezés, az adatok közötti összefüggések elemzése, becslés:

Az alma tömege:

1 rekesz:

x

Ennek 25%-a:

$$x \cdot \frac{25}{100}$$

vagy $0,25x$

2 rekesz:

$90 - x$

Ennek 20%-a:

$$(90 - x) \cdot \frac{20}{100}$$

vagy $0,20(90 - x)$

Mivel 20% és 25% között nem túl nagy a különbség, „majdnem feleződik” a 90 kg. Tehát 45 kg körüli mennyiség van mindkettőben úgy, hogy az elsőben van kevesebb, mert ennek a 25%-a egyenlő a másik 20%-ával.

Terv:

A két százaléktértek egyenlő.

Az egyenlet felírása és megoldása:

$$0,25x = 0,20(90 - x) \quad / \cdot 100$$

$$25x = 20(90 - x)$$

$$25x = 1800 - 20x \quad / + 20x$$

$$45x = 1800 \quad / : 45$$

$$x = 40$$

Elvégezzük a kijelölt műveleteket, és a két oldal egyenlő változtatásával megoldjuk az egyenletet.

Az első rekeszben 40 kg, a másodikban $(90 - 40)$ kg = 50 kg alma van.

Ellenőrzés a szöveg alapján:

40 kg alma 25%-a 10 kg;

50 kg alma 20%-a 10 kg.

Megoldásunk helyes.

Többet ésszel ...



1800 Ft-ot egyenlő számú tíz- és húszforintossal akarnak kifizetni. Hány darab tíz-, illetve húszforintosra van szükség?



Egy 6750 kg-os farakásban tölgyfa és fenyőfa gerendák vannak, összesen 200 darab. A fenyőgerendák tömege 30 kg, a tölgygerendáké 45 kg. Hány fenyő- és hány tölgygerenda van a farakásban?

Fejtörő!



Két ember életkorának aránya most 3 : 5. Hány évesek, ha 10 év múlva életkoruk aránya 7 : 10 lesz?

FELADATOK

26

Az x tetszőleges valós szám. Írd föl azt a számot,

- a) amely az x -nél 3-mal nagyobb;
- b) amelynél 3-mal nagyobb az x ;
- c) amelynek az x az $\frac{1}{3}$ része;
- d) amely az x -nek 3-szorosa;
- e) amely az x -nek a 2-szeresénél 3-mal kisebb;
- f) amelynél az x -nek a 2-szerese 3-mal kisebb!

☉ *Megfigyelted, hogy melyik kisebb (nagyobb) a másiknál?*

27

Áginak és Beának összesen 500 Ft-ja van. Hány forintja van Beának, ha

- a) Áginak 200 Ft-ja van;
- b) Áginak x Ft-ja van;
- c) Áginak 200 Ft-tal több pénze van, mint Beának;
- d) Áginak x Ft-tal kevesebb pénze van, mint Beának;
- e) Áginak másfélszer annyi pénze van, mint Beának;
- f) Ági és Bea pénzének aránya $3 : 7$?

☉ *Figyelj az adatokra!*

$$\begin{array}{ccc} \boxed{} & + & \boxed{} = 500 \\ \text{Á} & & \text{B} \\ \boxed{} & > & \boxed{} \\ & 200 & \end{array}$$

28

A kosárban 36 kg-mal kevesebb dió van, mint a zsákban. Mennyi dió van a zsákban, ha

- a) a kosárban 15 kg dió van;
- b) a kosárban x kg dió van;
- c) a kosárban és a zsákban lévő dió összesen 120 kg;
- d) a kosárban és a zsákban lévő dió mennyiségének aránya $4 : 7$;
- e) a zsákban 4 kg-mal kevesebb dió van, mint a kosár tartalmának kétszerese?

$$\begin{array}{c} K < Zs \\ 36 \end{array}$$

29

a) Egy könyvespolc három polcán összesen 420 könyv van. Az első polcon 60-nal több, a másodikon kétszer annyi van, mint a harmadikon. Hány könyv van a harmadik polcon?

- b) Három dinnyét vásároltunk 30 €-ért. Az első ára háromnegyed része, a másodiké kétszerese volt a harmadik árának. Mennyibe kerültek a dinnyék külön-külön?
- c) Cili pénzének két heted része 120 €-val több, mint az egyötöd része. Hány eurója van Cilinek?

☉ *Készíts táblázatot!*

30

Ödömérnek születésnapja van, és évei számáról a következőket mondja: Életkorom kétjegyű számmal írható le, amelyben az egyik számjegy kétszerese a másiknak. Viszont, ha megcserélem a két számjegyet, akkor nagybátyám életkorát kapom, aki 8 év múlva pontosan kétszer annyi idős, lesz, mint amennyi most én vagyok. Hiteles-e Ödömér kijelentése? Miért?



A Galaktikus nagyáruház négy polcán összesen 70 GWR van. Az első és a második polcon összesen 37. A harmadikon $\frac{1}{4}$ -szer, a negyediken $\frac{5}{4}$ -szer annyi, mint az elsőn. Mi az a GWR az alábbiak közül?

A: Garbó; B: Görögdinnye; C: Gépkarabély; D: Golyó

Többet ésszel!

☉ *Kiszámoltad, hogy melyik polcon hány GWR van?*

© Észrevetted, hogy az a) és a b) feladatban célszerű „hátról” lebontogatni a feladatot?

© Ügyeltél a műveletek sorrendjére?

© Hogyan írható fel egy (például x) szám valamely törtrésze?

© Felírható-e az arány egyszerűbb alakban?

© Gondold meg, melyiket keressük, az alap, a százaléklékérték, illetve a százalékláb közül?

Gyakorló
4.22–4.27.

© Az egy huszonötöd rész hány százalék?

31

- a) Gondoltam egy számot. Megszoroztam 5-tel, a szorzatból kivontam 10-et. Eredményül 50-et kaptam. Melyik számra gondoltam?
- b) Gondoltam egy számot. Kivontam belőle 10-et, a különbséget megsoroztam 5-tel. Eredményül 50-et kaptam. Melyik számra gondoltam?
- c) Melyik az a szám, amelynek 4-szerese 5-tel kisebb, mint a szám 6-szorosa?
- d) Két szám aránya $5 : 9$, összegük 280. Melyik ez a két szám?
- e) Két szám aránya $5 : 9$, különbségük 280. Melyik ez a két szám?
- f) Melyik az a szám, amelynek 9-szerese 40-nel kisebb, mint a nála 10-zel kisebb szám 10-szerese?

32

- Melyik az a szám,
- a) amelyhez hozzáadva a $\frac{2}{3}$ részét és még 5-öt, a szám kétszeresét kapjuk;
- b) amelynek kétszereséből kivonva a $\frac{3}{4}$ részét és még 5-öt, a számot kapjuk;
- c) amelynek $\frac{3}{4}$ részéből kivonva a $\frac{2}{3}$ részét és még $\frac{1}{2}$ -et, 1-et kapunk;
- d) amelynek $\frac{2}{5}$ részéhez hozzáadva a számnál 4-gyel kisebb szám $\frac{5}{6}$ részét, 3-at kapunk?
- e) Két szám aránya $\frac{6}{5} : \frac{4}{5}$, összegük $\frac{98}{15}$. Melyik ez a két szám?

33

- Számítsd ki az eredményt!
- a) Mennyi 560 kg 80%-a? b) Mennyi x kg 80%-a?
- c) Mennyi 560 kg $x\%$ -a? d) Mennyinek a 80%-a 560 kg?
- e) Mennyinek a 80%-a x kg? f) A 20-nak a 12 hány százaléka?
- g) A 20-nak az x hány százaléka? h) Az y -nak a 12 hány százaléka?

34

- a) A 3 perces homokórámiban összesen 140 ml homok van. Ha mostantól számítva a felső tartályból a benne lévő homok 12,5%-a még átfolyik az alsóba, akkor pont ugyanannyi homok lesz a két tartályban. Hányad része telt el a 3 percnél mostanáig?
- b) Gábor hétfőn lementette adatainak 18%-át a számítógépéről, kedden a 25%-át, szerdán 2,8 GB-tal többet, mint hétfőn. Így még 24,5 GB adat maradt mentés nélkül. Mennyi adata van Gábornak a gépen?
- c) Kálmán egy kirándulásra édesapjától 25%-kal több pénzt kapott, mint amennyit ő gyűjtött össze. A nagymamájától kapott még 25 €-t. Így a 11 €-s buszjegy megvásárlása után is maradt 50 €-ja. Hány eurót gyűjtött össze Kálmán a kirándulásra?
- d) Irén hétfőn elköltötte 500 €-jának valahány százalékát, kedden 50 €-val többet. Ekkor pénzének annyi huszonötöde maradt meg, mint amennyi százalékot hétfőn elköltött. Pénze hány százalékát költötte el Irén hétfőn?

SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSA EGYENLŐTLENSÉGGEL

7. példa

Melyik lehet az a három közvetlenül egymás után következő páros természetes szám, amelynek összege legfeljebb 63-mal nagyobb, mint a köztük lévő két páratlan szám összege?

Jelölések, az adatok közötti összefüggések elemzése:

Bármely páros szám 2-nek többszöröse: $2 = 2 \cdot 1$; $12 = 2 \cdot 6$; $28 = 2 \cdot 14$

Egy tetszőleges páros természetes szám a következő alakban írható: $2x$ (ahol x tetszőleges természetes szám).

Három közvetlenül egymás után következő páros szám például:

$$10 = 2 \cdot 5; \quad 12 = 2 \cdot 5 + 2; \quad 14 = 2 \cdot 5 + 4$$

A köztük lévő két páratlan szám:

$$11 = 2 \cdot 5 + 1; \quad 13 = 2 \cdot 5 + 3$$

Három tetszőleges, közvetlenül egymás után következő páros szám:

$$2x; \quad 2x + 2; \quad 2x + 4$$

A köztük lévő két páratlan szám 1-gyel, illetve 3-mal nagyobb $2x$ -nél:

$$2x + 1; \quad 2x + 3$$

A három legkisebb ilyen páros szám a 0; 2; 4. **Megfelel a feltételnek.**

Tervkészítés, az egyenlőtlenség felírása és megoldása:

A „legfeljebb 63-mal nagyobb” azt jelenti, hogy ha a három páros szám összegéből kivonjuk a két páratlan szám összegét, akkor a különbség 63 vagy annál kisebb lesz.

$$[2x + (2x + 2) + (2x + 4)] - [(2x + 1) + (2x + 3)] \leq 63$$

A belső (kerek) zárójeleket felbontjuk, és a külső zárójeleken belül az egynemű tagokat összevonjuk.

$$[6x + 6] - [4x + 4] \leq 63$$

A zárójeleket felbontjuk, és ismét összevonjuk az egynemű tagokat:

$$2x + 2 \leq 63 \quad / -2$$

A két oldal egyenlő változtatásával megoldjuk az egyenlőtlenséget.

$$2x \leq 61 \quad / : 2$$

$$x \leq 30,5$$

x értékeként a 30-nál nem nagyobb természetes számok jöhetnek számításba.

Ezért a feltételnek megfelelő három legnagyobb páros szám: 60; 62; 64

Ellenőrzés:

$(60 + 62 + 64) - (61 + 63) = 62 < 63$. Ez a számhármasság megfelel a feltételnek.

Ha kisebb páros számból indulunk ki, akkor a különbség csökken, tehát ezek a számok is megoldást adnak. **Például:**

$$(58 + 60 + 62) - (59 + 61) = 60 < 63; \quad \dots; \quad (0 + 2 + 4) - (1 + 3) = 2 < 63$$

Ha nagyobb páros számból indulunk ki, akkor a különbség nő, tehát ezek a számok nem adnak megoldást. **Például:**

$$(62 + 64 + 66) - (63 + 65) = 64 > 63$$

© A páros számok 2 többszörösei.

© A műveleti tulajdonságokat (itt a különbség változásairól megfigyelteket) alkalmazva ellenőrizhetjük az egyenlőtlenség megoldását.

FELADATOK

Gyakorló

4.28–4.30.;

Feladatgyűjtemény

2.8.25–28., 2.8.32.

© Magyarázd meg, mit jelent a „legalább”, illetve a „legfeljebb” kifejezés!

Figyelempróba

© Dolgozzatok párban! Beszéljétek meg, hogy a szöveg alapján egyértelműen értelmezhető-e az adatok közti összefüggés!

© Milyen egyenlőtlenség-gel írható le a „legalább”, illetve a „legfeljebb”? Keressétek meg azt a kiindulási adatot, amivel a többit kifejezhetitek!

35

Írd föl azokat a természetes számpárokat, amelyek

- összege 20, különbsége legalább 10;
- összege 20, különbsége nagyobb 10-nél;
- összege 20, különbsége nem kisebb 10-nél;
- különbsége 5, összege legfeljebb 20;
- különbsége 5, összege kisebb 20-nál;
- különbsége 5, összege nem nagyobb 20-nál;
- összege legfeljebb 20, különbsége nagyobb 10-nél;
- különbsége nagyobb 6-nál, szorzata legfeljebb 20;
- aránya $2 : 3$, különbsége nem nagyobb 6-nál!

36

Írd föl a számok közti összefüggést egyenlőtlenséggel!

Ábrázold számegyenesen a megoldáshalmazt! Az alaphalmaz az $\mathbb{R}$.

- Mely számok kétszeresének és 5-nek a különbsége nem nagyobb 3-nál?
- Egy a szám és egy másik szám összege 14, az a szám háromszorosa kisebb, mint a másik szám négyszerese. Mi lehet az a szám?
- Két szám aránya $4 : 5$, összegük legfeljebb 18. Mi lehet ez a két szám?
- Két szám különbsége 3. Az egyik szám $\frac{3}{4}$ részének és a másik szám $\frac{5}{6}$ részének az összege legalább 4. Mely számokra igazak ezek a feltételek?
- Két szám különbsége kisebb 3-nál. Az egyik szám $\frac{3}{4}$ részének és a másik szám $\frac{5}{6}$ részének az összege 4. Mely számokra igazak ezek a feltételek?

37

- Az egyik kosárban felényi, a másikban 12 kg-mal kevesebb búza van, mint a zsákban. Mennyi búza lehet a zsákban, ha összesen legfeljebb 140 kg búza van?
- Két dobozba összesen 50 golyót teszünk úgy, hogy a nagyobb dobozba legfeljebb 21 golyóval kerül több, mint a másikba. Hány golyó lehet az egyes dobozokban?
- Egy 50 cm hosszú fonalat kettévágunk úgy, hogy a nagyobb darab legfeljebb 21 cm-rel legyen hosszabb, mint a másik. Mekkora lehetnek az egyes darabok?

Fejtörő!



- Egy anya és a lánya életkorának összege legfeljebb 50 év. Hány éves lehet a lány, ha az anya 20 éves volt, amikor a lány született?
- Egy apa és a fia életkorának különbsége legalább 20 év. Hány évesek lehetnek, ha életkoruk összege 50 év?



A SZÖVEGES FELADATOKRÓL TANULTAK KIEGÉSZÍTÉSE



A HELYIÉRTÉKES ÍRÁSMÓDDAL KAPCSOLATOS FELADATOK

FELADAT

B15

- a) Melyik az a négyjegyű szám, amely összegalakban:

$$4 \cdot 1000 + 2 \cdot 10 + 5?$$

Ezres	Százaz	Tízes	Egyes

- b) Egy háromjegyű szám első számjegye 3, második számjegye 2, harmadik számjegye 1. Írd föl összegalakban a számot! A legnagyobb helyiértékű szám az „első számjegy”.
- c) Egy kétjegyű szám első számjegye x , második számjegye 7. Írd föl összegalakban a számot! Írd föl a számjegyek fölcserélésével kapott szám összegalakját!
- d) Egy háromjegyű szám első és harmadik számjegye x , második számjegye 2. Írd föl összegalakban a számot!

1. példa

Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 11. Ha a számjegyeket felcseréljük, az így kapott szám az eredeti kétszeresénél 20-szal kisebb lesz. Melyik ez a szám?

Az adatok közti összefüggések elemzése, jelölések bevezetése:

Figyeljük meg: $38 = 3 \cdot 10 + 8$; $12 = 1 \cdot 10 + 2$; $89 = 8 \cdot 10 + 9$

Ha a kétjegyű szám tízeinek helyén a , az egyeseinek helyén b áll, akkor a számot a következő alakban írhatjuk föl: $10a + b$

Ha két szám összege 11, és az egyik szám x , akkor a másik szám $11 - x$.

Ezek alapján a két számot a táblázatban látható módon írhatjuk fel:

	Tízes	Egyes	A szám
Eredeti szám:	x	$11 - x$	$10x + (11 - x)$
Felcserélve:	$11 - x$	x	$10(11 - x) + x$

Tervkészítés, az összefüggés felírása:

Egyenlőtlenséggel: $2(10x + 11 - x) \underset{20}{>} 10(11 - x) + x$

Egyenlettel: $2(10x + 11 - x) - 20 = 10(11 - x) + x$

Az egyenlet megoldása:

$$2(10x + 11 - x) - 20 = 10(11 - x) + x$$

$$20x + 22 - 2x - 20 = 110 - 10x + x$$

$$18x + 2 = 110 - 9x \quad / + 9x$$

$$27x + 2 = 110 \quad / - 2$$

$$27x = 108 \quad / : 27$$

$$x = 4$$

Az első számjegy 4, a második $11 - 4 = 7$. A szám: 47

Elvégezzük a beszorzásokat, majd összevonjuk az egyenműtagokat.

A két oldal egyenlő változtatásával megoldjuk az egyenletet.

☉ Az ilyen feladatokat néha egyszerűbb egyenlet nélkül megoldani. Felírhatjuk az összes olyan számot, amelyek számjegyeinek összege 11:

29; 38; 47; 56; 65; 74; 83; 92

Ezután ebből a 8 esetből próbálgatással megkeressük azt, amelyik a feladat feltételeinek eleget tesz.

>>>

Ellenőrzés:

Az eredeti szám: 47, a számjegyek felcserélése után: 74

Az eredeti kétszerese: $47 \cdot 2 = 94$; $94 - 74 = 20$

Az eredeti kétszerese valóban 20-szal több a számjegyek felcserélése után kapott számnál.

FELADAT

© Csak egy ilyen számot találasz?

© Minden esetben megvalósítható a második utasítás?

© Párban dolgozzatok! Oldjátok meg a feladatokat egyenletekkel és egyenletek nélkül is! A kétféle megoldás összehasonlításával ellenőrizték a megoldást!

Gyakorló
4.31–4.32.;
Feladatgyűjtemény
2.8.33.

- B16** a) Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 8. Írd föl a számot! Írd föl a számjegyek fölcserélésével kapott számot is!
- b) Egy háromjegyű szám első számjegye 2-vel nagyobb, harmadik számjegye 1-gyel kisebb, mint a második számjegye. Írd föl a számot! Írd föl azt a számot is, amelyet az előző számból úgy kapunk, hogy a számjegyeket kettővel csökkentjük!
- c) Egy kétjegyű szám első és második számjegyének aránya $3 : 1$. Mi lehet ez a szám? Írjuk fel ezt a számot, ha az egyes helyen álló szám n .

- B17** a) Egy kétjegyű szám első számjegye kétszer akkora, mint a másik. Ha a számjegyeket felcseréljük, akkor a két szám különbsége 36 lesz. Mi volt az eredeti szám?
- b) Egy kétjegyű szám második számjegye 2-vel nagyobb az elsőnél. Ha ezt a számot és a számjegyei felcserélésével kapott számot összeadjuk, akkor 178-at kapunk. Melyik ez a szám?
- c) Egy kétjegyű szám második számjegye 1-gyel nagyobb az elsőnél. Ha mindkét számjegyét 2-vel növeljük, akkor az eredeti és az új szám összege 90. Mi az eredeti szám?
- d) Egy kétjegyű szám második számjegye 2-vel kisebb az elsőnél. Ha mindkét számjegyét 1-gyel növeljük, akkor az eredeti és az új szám összege nagyobb 100-nál. Mi lehetett az eredeti szám?
- e) Egy kétjegyű szám második számjegye 2-vel kisebb az elsőnél. Ha mindkét számjegyét 3-mal csökkentjük, akkor az eredeti és az új szám különbsége 33. Mi az eredeti szám?
- f) Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 13. Ha a számjegyeket felcseréljük, akkor az új szám és az eredeti szám különbsége 19. Mi az eredeti szám?
- g) Egy kétjegyű szám számjegyeinek aránya $2 : 3$. Ha a 2-vel növelt számjegyeit fölcseréljük, az új szám az eredeti kétszeresénél 6-tal kisebb lesz. Mi az eredeti szám?
- h) Egy háromjegyű szám számjegyeinek aránya $1 : 2 : 2$. Ha az első és az utolsó számjegyét fölcseréljük, akkor az új szám az eredeti kétszeresénél kisebb lesz. Mi lehetett az eredeti szám?

Többet ésszel ...



- a) Melyik az a kétjegyű természetes szám, amelyik egyenlő számjegyeinek kétszeres szorzatával?
- b) Melyik az a négyjegyű természetes szám, amelyik 9-szer akkora, mint a számjegyei fordított sorrendbe írásával kapott szám?

GEOMETRIAI SZÁMÍTÁSOKKAL KAPCSOLATOS FELADATOK

A geometriában a kerület-, terület-, térfogat-, felszínszámítás körében, a sokszögek belső és külső szögeinek összegével kapcsolatosan, a Pitagorasz-tétel alkalmazása során, hasonló síkidomok adatainak kiszámításánál találkozhatunk olyan feladattal, amelyben az adatok közti összefüggést egyenlettel is felírhatjuk.

2. példa

Egy trapéz egyik alapja 3 cm-rel hosszabb a másik alapnál, a trapéz magassága 5 cm. Mekkora a trapéz alapjai, ha a területe 35 cm^2 ?

Adatok közti összefüggések elemzése

A trapéz területe:

$$T = \frac{a+c}{2} \cdot m$$

$$m = 5 \text{ cm}; \quad c = a - 3 \text{ cm}; \quad T = 35 \text{ cm}^2$$

Az egyenlet felírása és megoldása (kétféleképpen)

$$35 = \frac{a + (a - 3)}{2} \cdot 5 \quad / : 5$$

$$35 = \frac{(c + 3) + c}{2} \cdot 5 \quad / : 5$$

$$7 = \frac{a + (a - 3)}{2} \quad / \cdot 2$$

$$7 = \frac{(c + 3) + c}{2} \quad / \cdot 2$$

$$14 = a + (a - 3)$$

$$14 = (c + 3) + c$$

$$14 = 2a - 3 \quad / + 3$$

$$14 = 2c + 3 \quad / - 3$$

$$17 = 2a \quad / : 2$$

$$11 = 2c \quad / : 2$$

$$8,5 = a$$

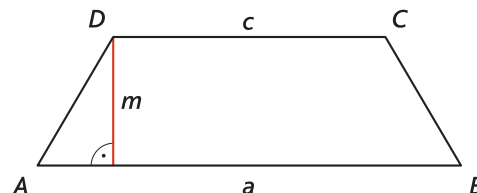
$$5,5 = c$$

A trapéz alapjai: $a = 8,5 \text{ cm}; \quad c = a - 3 \text{ cm} = 5,5 \text{ cm}$

$$c = 5,5 \text{ cm}; \quad a = c + 3 \text{ cm} = 8,5 \text{ cm}$$

Ellenőrzés a szöveg alapján

$$T = \frac{a+c}{2} \cdot m = \frac{8,5+5,5}{2} \cdot 5 = 35 \text{ (cm}^2\text{)}$$



© A megfelelő adatokat behelyettesíthetjük a képletbe, majd megoldjuk az egyenletet.

Ha a c 3 cm-rel kisebb, mint az a , akkor az a 3 cm-rel nagyobb, mint a c .

FELADATOK

B18

A következő képletekből egyenletrendezéssel fejezd ki a képlet mellé írt változót!

a) $V = abc;$ $b = ?;$

b) $K = 2(a + b);$ $a = ?;$

c) $T = \frac{a \cdot m}{2};$ $m = ?;$

d) $a_n = a_1 + (n - 1)d;$ $d = ?;$

e) $T = \frac{a+c}{2} \cdot m;$ $c = ?;$

f) $v = \frac{s}{t};$ $t = ?$

© Mely síkidomokra, illetve testekre vonatkozhatnak ezek a képletek? Állapítsátok meg azt is, hogy a többi képlettel mely mennyiségek közti összefüggéseket fejezzük ki!

Gyakorló
4.33–4.35.;

Feladatgyűjtemény
2.8.29–31.

☉ Rajzold le a síkidomokat, írd be az ábrába az adatokat!

☉ Az ellenőrzéskor vizsgáld meg, hogy van-e olyan síkidom, amelyik megfelel a feltételeknek!

☉ Hogyan írható fel, hogy az oldalak különbsége legalább 4 cm?

☉ Mit jelent a „nem nagyobb” kifejezés?

☉ Megtaláltál minden szükséges képletet?

- B19** a) Egy paralelogramma szomszédos szögeinek különbsége 25° . Mekkora a paralelogramma szögei?
- b) Egy húrtrapéz egy száron fekvő szögei közül az egyik szög 60%-a a másiknak. Mekkora a húrtrapéz szögei?
- c) Egy egyenlő szárú háromszög két szögének aránya $2 : 5$. Mekkora lehetnek a háromszög szögei?
- d) Egy deltoid három szögének aránya $2 : 3 : 5$. Mekkora lehetnek a deltoid szögei, ha a szögek fokokban kifejezett mérőszáma egész szám?

- B20** a) Egy háromszög kerülete 100 cm, egyik oldala 5 cm-rel rövidebb, a másik 6 cm-rel hosszabb a harmadik oldalnál. Mekkora a háromszög oldalai?
- b) Egy téglalap kerülete 56 cm. Mekkora a téglalap oldalai, ha szomszédos oldalai hosszának különbsége legalább 4 cm?
- c) Egy egyenlő szárú háromszög alapjának és szárának aránya $2 : 3$. Mekkora a háromszög oldalai, ha kerülete 49 cm?
- d) Mekkora a kör sugara, ha kerülete 10,7 cm-rel hosszabb az átmérőjénél?
- e) Egy trapéz egyik alapja 8 cm-rel hosszabb a másik alapnál, a két szára 3 cm és 4 cm. Mekkora lehetnek a trapéz alapjai, ha a kerülete nem nagyobb 25 cm-nél?
- f) Egy derékszögű trapéz egyik alapjának hossza 5 cm-rel nagyobb a másik alap hosszánál. A trapéz rövidebb szárának hossza 12 cm. Mekkora a húrtrapéz kerülete, ha területe 210 cm^2 ?

- B21** a) Egy téglalap területe 252 cm^2 , egyik oldala 21 cm. Mekkora a kerülete?
- b) Egy háromszög a oldala 45 cm, területe 360 cm^2 . Mekkora az a oldalhoz tartozó magassága?
- c) Egy rombusz területe $31,5 \text{ cm}^2$, egyik átlója 7 cm. Mekkora a másik átlója és a kerülete?
- d) Egy trapéz két alapja: $a = 7 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$, területe 48 cm^2 . Mekkora a trapéz magassága?
- e) Egy háromszögben $a = 14 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $m_a = 15 \text{ cm}$. Mekkora a b oldalához tartozó magasság?

- B22** a) Egy téglatest térfogata kisebb 1100 cm^3 -nél, egy csúcsban találkozó két éle 12 cm és 13 cm. Mekkora lehet az ebbe a csúcsba futó harmadik éle, ha annak centiméterekkel kifejezett mérőszáma egész szám?
- b) Egy henger alakú tartály térfogata 565 m^3 . Milyen magas a tartály, ha az átmérője 12 m?
- c) Egy téglatest felszíne 592 cm^2 , egy csúcsban találkozó két élének hosszúsága 12 cm és 10 cm. Mekkora az ebbe a csúcsba futó harmadik éle?

Fejtörő!



Egy háromszög két rövidebb oldala hosszúságának különbsége 5 cm, kerülete 40 cm. Mekkora lehetnek a háromszög oldalai?



Milyen magasan áll a víz egy 20 cm belső átmérőjű hengeres edényben, ha egy 6 cm sugarú kögolyót beletéve a víz magassága az eredeti magasság 130%-ára nő?

FIZIKAI SZÁMÍTÁSOKKAL KAPCSOLATOS FELADATOK

A fizikában például az egyszerű gépekkel (emelőkkal, hengerkerékkel), a mozgással (elmozdulással, sebességgel), a belső energiával, munkavégzéssel kapcsolatosan találkozhatunk olyan feladattal, amelyben az adatok közti összefüggést egyenlettel is felírhatjuk.



FELADATOK

B23

a) Egy kerékpáros sebessége $v = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mekkora utat tesz meg

1 h; 2,5 h; $\frac{3}{4}$ h; 1 min; 15 min; t h alatt?

b) Mennyi idő alatt ér célba, ha az út

15 km; 37,5 km; 10 km; s km?

B24

a) Egy gyalogos sebessége $v = 75 \frac{\text{m}}{\text{min}}$. Mekkora utat tesz meg

1 min; 15 min; 1 h; 1 s; 12 s; t min alatt?

b) Mennyi idő alatt ér célba, ha az út

75 m; 450 m; 3000 m; 5 m; s m?

A marathóni csata előtt az athéniak futárt küldtek a kb. 250 km-re lévő Spártába, hogy segítséget kérjenek a perzsák ellen. Pheidippidész hivatásos futó volt, és Hérodotosz szerint „az Athénból való indulása utáni napon már meg is érkezett”. Mekkora lehetett az átlagos sebessége?

3. példa

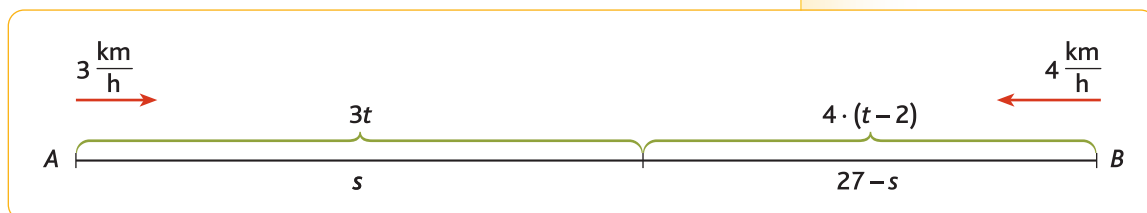
Egy 27 km-es túraútvonal egyik végpontjáról 8 órakor indult el Andrea, a másik végpontról 10 órakor Bea. Mikor találkoztak, ha Andrea sebessége $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, Beáé $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt? Hány kilométert gyalogoltak külön-külön?

☉ *Egyenletes mozgás esetén milyen összefüggés van az út (s), az idő (t) és a sebesség (v) között?*

☉ *A két lány által megtett út összege a teljes túraútvonal.*

1. megoldás

Adatok közti összefüggések elemzése

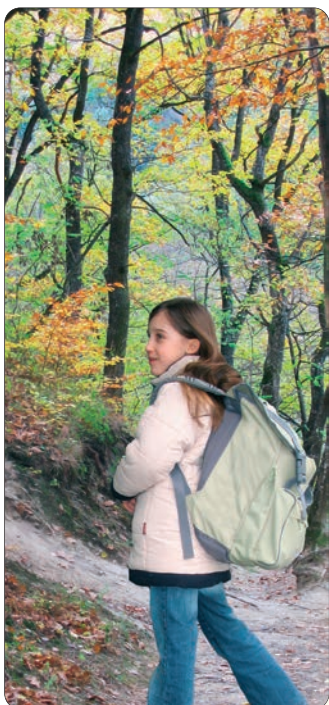


Andrea sebessége: $v_1 = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, és t órát gyalogolt a találkozásig.

Bea sebessége: $v_2 = 4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, és $(t-2)$ órán keresztül gyalogolt.

Foglaljuk táblázatba az adatokat.

☉ *Bea 2 órával rövidebb ideig gyalogolt, mint Andrea.*



»

	Sebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	Idő (h)	Megtett út (km)
Andrea	3	t	$3t$
Bea	4	$t - 2$	$4(t - 2)$

A találkozásukig összesen 27 km-t tettek meg.

Az összefüggést leíró egyenlet; az egyenlet megoldása

$$\begin{aligned}
 3t + 4(t - 2) &= 27 \\
 3t + 4t - 8 &= 27 & / + 8 \\
 7t &= 35 & / : 7 \\
 t &= 5
 \end{aligned}$$

Andrea indulása után 5 órával, délután 1 órakor találkoztak.

Andrea ($3 \cdot 5 =$) 15 km-t, Bea ($4 \cdot 3 =$) 12 km-t tett meg.

Ellenőrzés: A két távolság összege valóban 27 km.

2. megoldás

Adatok közötti összefüggések elemzése

	Sebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	Megtett út (km)	Idő (h)
Andrea	3	s	$\frac{s}{3}$
Bea	4	$27 - s$	$\frac{27 - s}{4}$

Az 1. megoldásban a két lány által megtett utat fejeztük ki a sebesség és az eltelt idő segítségével. Most az eltelt időt fejezzük ki a sebesség és az eltelt idő alatt megtett út segítségével:

$$t = \frac{s}{v}$$

Az adatok közti összefüggés felírása egyenlettel; az egyenlet megoldása

Andrea útja 2 órával tovább tartott.

$$\frac{s}{3} - 2 = \frac{27 - s}{4} \quad \text{Közös nevezőre hozunk.}$$

$$\frac{4s}{12} - \frac{24}{12} = \frac{3 \cdot (27 - s)}{12} \quad / \cdot 12$$

$$4s - 24 = 81 - 3s \quad / + 24$$

$$4s = 105 - 3s \quad / + 3s$$

$$7s = 105 \quad / : 7$$

$$s = 15$$

Andrea 15 km-t gyalogolt $\left(\frac{15}{3} =\right)$ 5 óra alatt.

Bea 12 km-t gyalogolt $\left(\frac{12}{4} =\right)$ 3 óra alatt.

Ellenőrzés: Andrea útja valóban 2 órával tovább tartott.

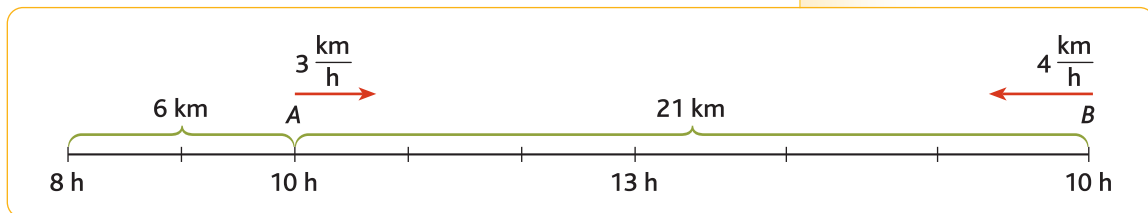
© Figyeld meg!

$$\frac{s}{3} > \frac{27 - s}{4}$$

2-vel nagyobb

»»

3. megoldás



Andrea 8 órától 10 óráig 6 km-t tett meg, tehát $(27 - 6 =) 21$ km-re volt az út másik végpontjától.

Óránként $(3 + 4 =) 7$ km-rel közeledtek egymáshoz.

Ezért a 21 km-t közösen $\left(\frac{21}{7} =\right) 3$ óra alatt tették meg.

Délután 1 órakor találkoztak, Andrea 15 km-t, Bea 12 km-t gyalogolt.

☉ *A feladat egyenlet nélkül is megoldható.*

4. példa

Két kerékpáros egyszerre indult A városból B városba. Az egyik velocipéddal $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel hajtott. A másik rekumbenssel $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel tekert. A lassabb 1 órával később ért célba. Hány óra alatt tették meg a távolságot? Hány kilométer a két város távolsága?



Adatok közti összefüggések elemzése

A első sebessége: $v_1 = 16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; $(t + 1)$ óra alatt teszi meg az utat.

A második sebessége: $v_2 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; t óra alatt teszi meg az utat.

☉ *Megfigyelted?*

$$s = v_1 \cdot (t + 1)$$

$$s = v_2 \cdot t$$

Az adatok táblázatba foglalása:

	Sebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	Idő (h)	Megtett út (km)
I. kerékpáros	16	$t + 1$	$16(t + 1)$
II. kerékpáros	18	t	$18t$

Az adatok közti összefüggés felírása egyenlettel

Az egyenlet megoldása

A két kerékpáros azonos utat tesz meg.

$$16(t + 1) = 18t \quad / \text{ Elvégezzük a beszorzást.}$$

$$16t + 16 = 18t \quad / -16t$$

$$16 = 2t \quad / : 2$$

$$8 = t$$

A gyorsabb (II.) 8 óra alatt, a másik 9 óra alatt tette meg az utat.

A távolság: $s = 16 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 9 \text{ h} = 144 \text{ km}$



☉ *Másképpen:*

$$s = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 8 \text{ h}$$

$$s = 144 \text{ km}$$

»»

>>>

Ellenőrzés: Az I. 16 km-t 1 óra alatt tett meg; 144 km-t ($144 : 16 =$) 9 óra alatt.
A II. 18 km-t 1 óra alatt tett meg; 144 km-t ($144 : 18 =$) 8 óra alatt.
Az I.-nek valóban 1 órával tartott tovább az útja.

FELADATOK



Gyakorló

4.36–4.37.;

Feladatgyűjtemény
2.8.34–36.

☉ *Közösen ellenőrizték a kapott eredményeket! Minden feladatban megvizsgáltatok, hogy nincs-e felesleges adat, illetve nem hiányzik-e adat?*

☉ *Mit jelent a „lekörözés”? A lekörözéskor a gyorsabb motoros mennyivel tett meg több utat, mint a lassabban haladó?*

B25

- a) A 140 öles lovagi tornapálya két végéről megindul a két lovas egymás felé. Az egyik $3 \frac{\text{öl}}{\text{s}}$, a másik $4 \frac{\text{öl}}{\text{s}}$ sebességgel vágat. Mennyi idő múlva találkoznak? Hány ölet tesznek meg találkozásukig külön-külön?
- b) A búsképű lovas és fegyverhordozója ugyanazon az útvonalon halad. Az egyik 2,5 lépést, a másik 2 lépést tesz meg másodpercenként. Amikor a lovas célba ér, a fegyverhordozó még 600 lépésre van a céltól. Hány perc alatt teszi meg a távot a lovas? Milyen hosszú ez az út? (A lépés itt hosszegység.)

B26

- a) Két gyalogos ugyanazon az útvonalon halad. Az egyik 80 m-t, a másik 60 m-t tesz meg percenként. A gyorsabb 15 perccel előbb ér célba. Hány perc alatt teszi meg a távot a másik gyalogos? Milyen hosszú az útvonal?
- b) Két város között az utat a személyvonat másfél órával kevesebb idő alatt teszi meg, mint a tehervonat. A személyvonat átlagsebessége $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a tehervonaté $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Hány óra alatt teszik meg a vonatok a távolságot? Milyen messze van egymástól a két város?
- c) Egy 4800 m hosszú körpályán ugyanazon helyről, egy irányban, egyszerre indul két motoros. Az egyik sebessége $35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a másiké $40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mennyi idő múlva „körözi” le a gyorsabb motoros a lassúbbat? Hány métert tesznek meg ez alatt az idő alatt?
- d) Két madár repül egymással szemben. Az egyik sebessége $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a másiké $18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Milyen távol lesznek egymástól a találkozásuk előtt 2 másodperccel, ha 1565 m távolságból indultak el, és a gyorsabb madár 5 másodperccel később indult, mint a másik?
- e) Két tevekaraván egyszerre elindul egymással szemben a sivatagi útvonal két végéről, és az útvonal közepétől 6 km-re találkozik. Milyen széles a sivatag, ha az egyik 10 h, a másik 15 h alatt tenné meg a teljes utat?
- f) Két kerékpáros egyszerre indul egymással szemben két, egymástól 75 km-re lévő városból, és 2 és fél óra múlva találkozik. Az egyik sebessége 50%-kal nagyobb a másik sebességénél. A találkozásukig az út hány százalékát teszi meg az egyik és hány százalékát a másik?
- g) Egy 24 km-es utat egy gyalogos 6 h alatt tett meg. Ugyanezt az utat lóháton $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val nagyobb sebességgel teszi meg. Mennyi ideig tart a lovas útja?

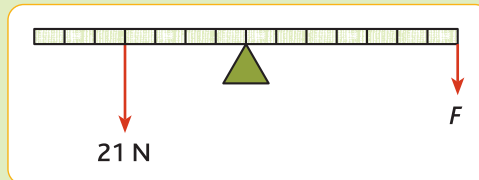
B27

A mérleghinta tengelyétől 2 m-re ül a 25 kg tömegű hugi (a hintára ható erő 250 N). Hová üljön hinta másik „karján” a 40 kg tömegű (400 N súlyú) nővére úgy, hogy a hinta egyensúlyban legyen?

☉ Mi a feltétele annak, hogy a kétkarú emelő egyensúlyban legyen?

**B28**

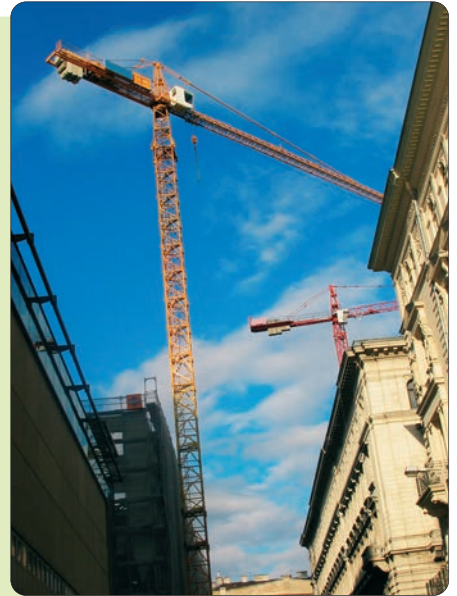
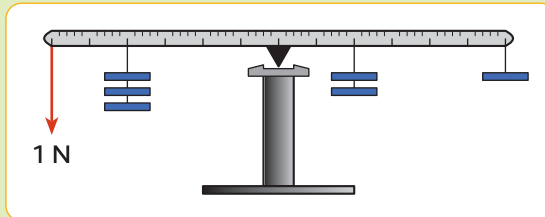
a) Mekkora F erővel tartható egyensúlyban a rajzon ábrázolt kétkarú emelő?



b) Egy kétkarú emelő karjai 36 cm és 60 cm.

Az egyik karra 3 N-nal nagyobb erő hat, mint a másikra. Mekkora ezek az erők, ha az emelő egyensúlyban van?

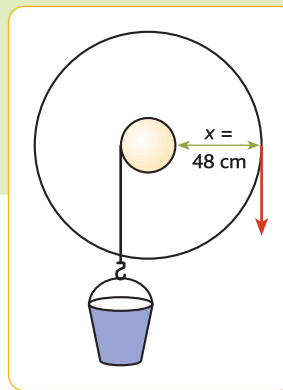
c) Mekkora lehetnek az ábrázolt (egyforma) súlyok, ha a rendszer egyensúlyához az ábrázolt módon „be kell segíteni”?



☉ *Többet ésszel! Elkerülted a csapdát?*

B29

Egy kerekes kút hengerének sugara 48 cm-rel kisebb, mint a kerék sugara. A kereket akkora erővel kell forgatni, mint a tele vödör súlyának 20%-a. Mekkora a henger, illetve a kerék sugara?



Albi és Benő, két kerékpáros egymással szemben egyszerre indul el. Albi az út első felét $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másik felét $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel teszi meg. Benő az út első felét teszi meg $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a második felét $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Találkozásukkor az út mekkora része van még hátra a két kerékpárosnak?

Többet ésszel!

KEVERÉSES FELADATOK



© Az egységár és a kilogrammal mért tömeg szorzata adja meg a cukorkák árát.

5. példa

Mennyi 4,00 €-s cukorkát kevertek 10 kg 5,50 €-s cukorkához, ha a keverék kilogrammonkénti ára 4,60 € lett?

Adatok közti összefüggések elemzése

	Egységár $\left(\frac{\text{€}}{\text{kg}}\right)$	Tömeg (kg)	Ár (€)
I.	5,50	10	$5,50 \cdot 10$
II.	4,00	x	$4,00 \cdot x$
Keverék	4,60	$10 + x$	$4,60 \cdot (10 + x)$

Az adatok közti összefüggés felírása egyenlettel; az egyenlet megoldása

Az összes cukormennyiség ára a keverés előtt és után megegyezik:

$$4,60 \cdot (10 + x) = 55 + 4,00x$$

$$46 + 4,60x = 55 + 4,00x$$

$$0,60x = 9$$

$$x = 15$$

A beszorzás elvégzése után a két oldal egyenlő változtatásával megoldjuk az egyenletet.

Tehát 15 kg 4,00 €-s cukorkát kevertek hozzá.

Ellenőrzés: $(10 \text{ kg} + 15 \text{ kg}) = 25 \text{ kg}$ keverék ára $25 \cdot 4,60 \text{ €} = 115 \text{ €}$.

10 kg 5,50 €-s cukorka ára 55 €.

15 kg 4,00 €-s cukorka ára 60 €.

A kétféle cukor ára összesen valóban 115 €.

6. példa

3 kg 60%-os kénsavhoz 5 kg 40%-os kénsavat öntünk.

Hány százalékos kénsavat kapunk így?

Adatok közti összefüggések elemzése

1 kg 60%-os kénsavban: $\frac{60}{100}$ kg tiszta (100%-os) kénsav van,

3 kg 60%-os kénsavban: $3 \cdot \frac{60}{100}$ kg 100%-os kénsav van,

5 kg 40%-os kénsavban: $5 \cdot \frac{40}{100}$ kg 100%-os kénsav van,

1 kg $x\%$ -os kénsavban: $\frac{x}{100}$ kg 100%-os kénsav van.

© A gyakorlatban 100%-os sav nem állítható elő.

$$60\% = \frac{60}{100} \text{ rész;}$$

$$40\% = \frac{40}{100} \text{ rész;}$$

$$x\% = \frac{x}{100} \text{ rész;}$$

»»

Megoldási terv, becslés

Ha összeöntjük a kétféle töménységű kénsavat, akkor az elegyben lévő „tisztá” kénsav mennyisége egyenlő az összeöntés előtti „tisztá” kénsav mennyiségével. Mivel 60%-os és 40%-os oldatokat vegyítettünk, a keletkezett kénsav töménysége 40% és 60% között lesz.

Ha egyenlő mennyiségeket öntöttünk volna össze, akkor éppen 50%-os oldatot kaptunk volna, viszont több van a 40%-os oldatból, így 50%-nál kisebb lesz az elegy töménysége.

Az egyenlet felírása és megoldása

$$3 \cdot \frac{60}{100} + 5 \cdot \frac{40}{100} = 8 \cdot \frac{x}{100} \quad / \cdot 100$$

$$3 \cdot 60 + 5 \cdot 40 = 8x$$

$$380 = 8x \quad / : 8$$

$$47,5 = x$$

Az összeöntés után 47,5%-os kénsavat kapunk.

Ellenőrzés

Az eredmény összhangban van a becsült értékkel.

3 kg 60%-os kénsavban $3 \cdot 0,60 \text{ kg} = 1,8 \text{ kg}$ „tisztá” sav van.

5 kg 40%-os kénsavban $5 \cdot 0,40 \text{ kg} = 2,0 \text{ kg}$ „tisztá” sav van.

Összesen: 3,8 kg 100%-os (tisztá) savat öntöttünk össze.

Az elegy 8 kg 47,5%-os kénsav.

8 kg 47,5%-os kénsavban $8 \cdot 0,475 \text{ kg} = 3,8 \text{ kg}$ „tisztá” sav van.

Az eredményünk helyes.



© Az eredeti szöveg alapján végezzük az ellenőrzést.

FELADATOK

B30

- 12 kg 2,50 €-s és 38 kg 3,00 €-s növénytápból keveréket készítenek. Mennyibe kerül 1 kg keverék?
- 15 kg vízbe 5 kg savat tesznek, amelynek kilogrammja 2500 Ft. Mennyibe kerül 1 kg oldat?
- 90 °C-os és 20 °C-os vizet összekevernek. Mekkora lehet a keverék hőmérséklete?
- 24 l 80 °C-os és 36 l 30 °C-os vizet összekevernek. Mekkora lesz a keverék hőmérséklete?
- Mennyi 20 °C-os vizet kell 25 l 60 °C-os vízhez kevernünk, hogy 30 °C-os vizet kapjunk?
- Mennyi 20 °C-os és mennyi 60 °C-os vizet kell összekevernünk, hogy 10 l 36 °C-os vizet kapjunk?

© A víz áráról eltekintünk.

© Milyen értékek között változhat a keverék hőmérséklete.



Hány kilogramm 40%-os sóoldatot kell 2,5 kg 50%-os sóoldathoz öntenünk, hogy 60%-os oldatot kapjunk?

Többet ésszel ...

© Legfeljebb mekkora lehet az oldat töménysége?

© Mindig az oldatban lévő „tiszt” só tömegével számoljunk.

Gyakorló
4.38–4.40.;
Feladatgyűjtemény
2.8.37.

B31

- a) Mennyi só van 10 kg; 15 kg; 0,25 kg; x kg 75%-os sóoldatban?
- b) Mennyi só van 8 kg oldatban, ha a töménysége 50%-os; 65%-os; 120%-os; 25,6%-os; y%-os?
- c) 150 g 60%-os sóoldathoz 100 g vizet adunk. Milyen töménységű oldatot kapunk?
- d) 200 g 50%-os sóoldathoz 300 g 40%-os sóoldatot adunk. Milyen töménységű oldatot kapunk?
- e) 240 g 85%-os kénsavat mennyi 55%-os kénsavval kell keverni, hogy 73%-os kénsavat kapjunk?
- f) 200 g 30%-os sóoldatot mennyi 36%-os sóoldattal kell keverni, hogy 34%-os sóoldatot kapjunk?
- g) Mennyi 75%-os és mennyi 25%-os salétromsavat kell összekevernünk, hogy 300 g 45%-os oldatot kapjunk?

B32

- a) 25 kg első osztályú és 10 kg másodosztályú almáért összesen 14,85 €-t fizettünk. Mennyibe került 1 kg első osztályú, illetve 1 kg másodosztályú alma, ha a másodosztályú alma ára 80%-a az első osztályú árának?
- b) Három dolgozó között kell 500 000 Ft-ot felosztani teljesítményük arányában. Az egyes dolgozók 125%-ra, 85%-ra, 90%-ra teljesítették az előírást. Hány forintot kapnak külön-külön?

B33

- a) Nofretete-féle tejfürdőt készítünk. Mennyire hűti le a 10 liter 16°C-os szármártej a 110 liter 40°C-os forró vizet? (Tekintsük most a tej és a víz fajhőjét egyformának.)
- b) A 120 literes Kleopátra-féle fürdők 0,4%-os méztartalmú. Hogyan változik ez a százalék, ha ebbe még 32 dkg mézet keverünk?

© A történelem koronás szépségei szerették különleges fürdőkkel kényeztetni bőrüket. Ehhez többnyire tejet és mézet keverték bele.

Hieron király áldozati koronát készíttetett, de úgy gondolta, hogy az ékszerész csalárdul ezüsttel pótolta az arany egy részét. A király Arkhimédészre, a kor kiváló matematikusára bízta a csalás leleplezését. Arkhimédész fürdés közben jött rá a vízbe mártott testekkel kapcsolatos, róla elnevezett törvényre. Kiugrott a kádból, meztelenül hazarohant, és a törvényt alkalmazva bebizonyította a csalást.

B34

A vörösréz súlyát $11\frac{1}{9}\%$ -kal, a horganyét pedig $14\frac{2}{7}\%$ -kal találjuk kevesebbnek vízbe merítve, mint a levegőn mérve. Mennyi rézet és mennyi horganyt tartalmaz az a 240 N súlyú réz-horgany ötvözet (sárgarézt), amelynek a vízben mért súlyvesztése $28\frac{8}{9}$ N?

© Középiskolai felvételi feladat volt fizikából.



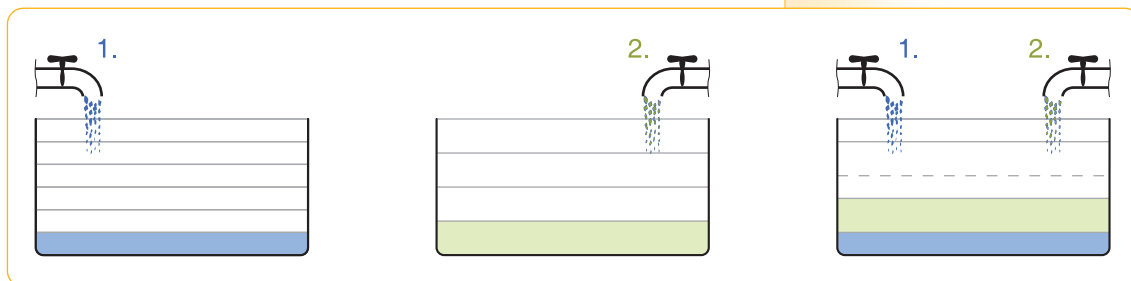
Egy egyenlő karú mérleg egyik karjára egy 1 kg tömegű vasgolyót, másik karjára egy 1 kg tömegű alumíniumgolyót függesztünk. Fennmarad-e az egyensúly, ha mindkét gömböt egyidejűleg teljesen vízbe merítjük?

EGYÜTTES MUNKAVÉGZÉSEL KAPCSOLATOS FELADATOK

7. példa

Egy medencét két csapon át lehet megtölteni. Ha csak az egyik csapot nyitjuk meg, akkor 6 óra alatt telik meg a medence, ha csak a másikat, akkor 4 óra alatt. Hány óra alatt lesz tele akkor, ha egyszerre mindkét csapot megnyitjuk?

Adatok közti összefüggések elemzése



Ha az 1. csapon 6 óra alatt telik meg, vagyis $\frac{6}{6}$ részéig töltődik fel, akkor

1 óra alatt $\frac{1}{6}$ részéig telik meg vízzel a medence;

t óra alatt $t \cdot \frac{1}{6} = \frac{t}{6}$ részéig lesz víz a medencében.

Ha a 2. csapon 4 óra alatt telik meg, akkor

1 óra alatt $\frac{1}{4}$ részéig lesz víz a medencében;

t óra alatt $t \cdot \frac{1}{4} = \frac{t}{4}$ részéig telik meg a medence.

Megoldási terv, becslés

A két csap együtt t idő alatt tölti fel a medencét.

Megnézzük, hogy az egyes csapok t idő alatt mekkora részig töltik meg a medencét, és ezen részek összege adja az egészet, tele lesz a medence. Mivel az egyik 4 óra alatt töltené meg egyedül és a másik „besegít”, biztos, hogy 4 óránál kevesebb idő alatt telik meg a medence. Két óránál viszont több lesz az idő, mert a 4 órai időtartam akkor feleződne meg, ha a másik csapon is 4 óra, nem pedig 6 óra alatt telne meg.

Az egyenlet felírása és megoldása

$$\frac{t}{6} + \frac{t}{4} = 1$$

$$\frac{2t}{12} + \frac{3t}{12} = \frac{12}{12}$$

$$2t + 3t = 12$$

$$5t = 12$$

$$t = 2,4$$

Közös nevezőre hozzuk a törtet, majd az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel.

Az összevonás után az egyenlet mindkét oldalát osztjuk 5-tel.

A két csap együtt 2,4 óra alatt tölti meg a medencét.

☉ Együtt t óra alatt töltik meg a medencét.

☉ Ha egy csap 6 óra alatt tölti meg, akkor

1 óra alatt $\frac{1}{6}$ részéig;

2 óra alatt $\frac{2}{6}$ részéig;

⋮

t óra alatt $\frac{t}{6}$ részéig tölti meg a medencét.

☉ Az ilyen típusú feladatokat „teljesítményre vonatkozó feladatoknak” is nevezzük, mert az időegység alatt végzett munkára következtetve oldjuk meg őket, feltéve, hogy közben a munkatempó nem változik.

Gyakorló
4.41–4.42.;
Feladatgyűjtemény
2.8.38–42.

☉ Egységnyi idő alatt mekkora részt végeznének el külön-külön, illetve együtt?

☉ Milyen összefüggés van a munkások száma, az elvégzett munka mennyisége és a munkához szükséges időtartam között?

»»

Ellenőrzés Eredményünk a becslt értékkel összhangban van.

Az 1. csap 1 óra alatt $\frac{1}{6}$ részig tölti meg, 2,4 óra alatt $2,4 \cdot \frac{1}{6} = 0,4$ részig.

A 2. csap 1 óra alatt $\frac{1}{4}$ részig tölti meg, 2,4 óra alatt $2,4 \cdot \frac{1}{4} = 0,6$ részig.

0,4 rész meg 0,6 rész megegyezik az egésszel.

Az eredményünk helyes.

FELADATOK

B35

- Egy 1 m^3 -es tartályt két csapon át lehet megtölteni. Ha csak az egyik csapot nyitjuk meg, akkor 12 perc alatt telik meg, ha csak a másikat, akkor 15 perc alatt. Hány perc alatt lesz tele akkor, ha egyszerre mindkét csapot megnyitjuk?
- Egy ház tatarozásával az egyik mester 24 nap, a másik 36 nap alatt készülne el. Hány nap alatt végeznék el együtt a munkát?
- Egy földdarabot az egyik erőgép 6 óra, a másik 9 óra alatt szántana fel. Hány óra alatt végzik el együtt a munkát?
- Egy hordó az egyik csapon át 50 perc alatt, a másikon 40 perc alatt, a harmadikon 3 óra 20 perc alatt telik meg. Mennyi idő alatt telik meg, ha mindhárom csapot megnyitják?
- Egy kád a csapon át 8 perc alatt telik meg, míg a tele kád 10 perc alatt ürül ki, ha a lefolyóját megnyitják. Mennyi idő kell a nyitott lefolyójú kád megtöltéséhez?

B36

- Egy munkát 8 kőműves 42 óra alatt fejezne be. Hány óra alatt végezné el ugyanezt a munkát 6 kőműves?
- 5 munkás 4 óra alatt 860 munkadarabot készít el. Hány ilyen munkadarabot készít el 12 munkás 5 óra alatt?
- Egy kertet egy ember 10 nap alatt, fia 15 nap alatt ásna fel egyedül. Hány napig tart a kert felásása, ha együtt dolgoznak rajta?
- Egy medence építésénél a földmunkákat az egyik gép 6 nap alatt, a másik 5 nap alatt, a harmadik 3 nap alatt, a negyedik 7 és fél nap alatt végeznék el. Hány nap alatt készül el a munkával a négy gép együtt?
- Egy tartályt az egyik csap 15 perc, a másik 20 perc alatt tölt meg. A megtelt tartály az alján lévő csap megnyitása után 10 perc alatt ürül ki. Mennyi idő kell az üres tartály megtöltéséhez, ha mindhárom csap nyitva van?
- Az apa 4 óra, a fia 5 óra alatt ásta volna fel a kertet. Együtt fogtak hozzá a munkához, de az apának egy bizonyos idő múlva el kellett mennie. Mennyi ideig dolgoztak együtt, ha a fiú fél óra múlva befejezte a munkát?

Többet ésszel ...



Fanyűvő egyedül 45 perc alatt enné meg a kását, Hétszűnyű Kapanyányimónyók 36 perc alatt. Mennyi idő alatt ették meg a kását ketten együtt?

☉ Ismered a Fehérlófiát? Keresd meg a világhálón!



FEJTÖRŐ FELADATOK

38

- a) Hogyan kell az a értékét megválasztani, hogy az $5x - a = 2x + 5$ egyenletnek megoldása legyen az $x = 5$; $x = -2$; $x = \frac{3}{2}$; $x = a$?
- b) Válaszd meg úgy a b értékét, hogy a $3x + b = 5$ egyenlet megoldása (gyöke) pozitív szám legyen!
- c) Válaszd meg úgy a c értékét, hogy az $5x - 2 = c + 3$ egyenlet megoldása (gyöke) ne legyen nagyobb 2-nél!
- d) Válaszd meg úgy a d értékét, hogy a $dx + 3 = -2$ egyenlet megoldása (gyöke) ne legyen nagyobb 0-nál!

☉ Egy szám mikor gyöke az egyenletnek?

☉ Milyen egyenlőtlenség-gel fejezhető ki a következő kifejezések:
„pozitív”;
„2-nél nagyobb”;
„nem nagyobb 0-nál”?

39

- a) Ha egy kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, akkor az eredetihez képest feleakkora számot kapunk. Az egyik számjegy kétszerese a másiknak. Melyik ez a szám?
- b) Egy csoportban a nők és a férfiak számának aránya 11 : 10. Mennyi a csoport tagjainak átlagéletkora, ha a nők átlagéletkora 34 év, a férfiaké 32 év?
- c) Egy húrtrapéz egyik alapjának hossza 180%-a a száraz hosszának. A másik alap 2,5 cm-rel rövidebb, mint a száraz hosszának 0,75 része. Mekkora a húrtrapéz oldalai, ha területe 43 cm²?
- d) Pál és Lali egyik éjjel a Zselici Csillagoségbolt-parkban összesen 125 csillagot figyelt meg. Pál csillagainak 24%-a ugyanennyi, mint Lali csillagainak 16%-a. Hány csillagot tanulmányoztak külön-külön?
- e) Pál egyedül 12 óra alatt rögzítené a megfigyelési adatokat. Négy órán keresztül egyedül dolgozott, de ezután Rita segített neki. Így ketten újabb 4 óra alatt befejezték a munkát. Rita egyedül mennyi idő alatt készült volna el vele?
- f) Robi meglátja maga előtt 175 m-re Klárát, és utána siet. Mennyi idő alatt éri utol, ha percenként 75 m-t tesz meg, míg Klára percenként 50 m-t?

☉ Egyenlet nélkül is próbálkozhatsz a megoldással.

40

- a) Egy téglalap egyik oldalának hossza háromszorosa a másik oldal hosszának. Mekkora a területe, ha kerülete 24 cm?
- b) Egy háromszög területe 42 cm². Egyik oldala 5 cm. Mekkora a háromszög ezen oldalához tartozó magassága?
- c) Egy acélkocka tömege 2,8 kg, sűrűsége $7,6 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$. Mekkora a térfogata?
- d) Egy trapéz egyik alapja $a = 12$ cm, magassága $m = 5$ cm. Mekkora lehet a másik alapja, ha a területe nem nagyobb 40 cm²-nél?
- e) Egy deltoid két szomszédos oldalának különbsége 7 cm. Az átlók metszéspontja egy 5 cm-es és egy 16 cm-es szakaszra osztja az egyik átlót. Mekkora a deltoid területe?

☉ A világon is ritkaságnak számító csillagoségbolt-park minősítést kapott a Zselici Tájvédelmi körzet a Nemzetközi Sötét Égbolt Szövetségtől (International Dark-Sky Association) Európában elsőként a skóciai Galloway Parkkal közösen, 2009. novemberben.

☉ Egy jó rajz segíthet.

☉ A vázlatodon keress derékszögű háromszögeket!



Egy óra két mutatója nem sokkal 6 óra után 110°-os szöget zár be. Kevéssel 7 óra előtt ismét 110°-os szöget zárnak be a mutatók. Mennyi idő telt el a két állapot között?

Fejtörő!

TUDÁSPRÓBA

41

☉ Nem feledkezel meg az ellenőrzésről?

1 Oldd meg az egyenletet, illetve az egyenlőtlenséget! Az alaphalmaz az $\mathbb{R}$.

a) $4x - 2(3x - 2) < 16$; b) $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} - x = \frac{5x}{6} + 1$

2 Hogyan kell az a értékét megválasztani, hogy az $x = 4$ megoldása legyen a következő egyenletnek?

$$2x - 5a + 2 = 0$$

3 Számítsd ki a kifejezés helyettesítési értékét! Az $a = 3$; $b = -1$.

a) $5 - 2a + 4 + a$; b) $5 - 3ab + b^2$

4 a) Írd föl egyszerűbb alakban a kifejezést! $4(x - 5) + 2(3x + 1)$

b) Írd föl szorzatalakban a kifejezést! $9x^2 - 12x$

5 Az adatok közti összefüggést írd föl egyenlettel! Oldd meg az egyenletet!

- a) Gondoltam egy számra. megszoroztam 4-gyel, az eredményből kivontam 20-at. 280-at kaptam. Melyik számra gondoltam?
- b) Egy háromszög egyik oldala kétszerese a legrövidebb oldalnak, a harmadik oldala 10 cm-rel hosszabb, mint a legrövidebb oldala. Mekkora a háromszög oldalai, ha a területe 26 cm²?
- c) Három könyvszekrényben könyvek vannak. A másodikban kétszer, a harmadikban háromszor annyi, mint az elsőben. Ha a harmadikból 400 könyvet áttesszünk az elsőbe, akkor az elsőben 310 könyvvel több lesz, mint a másodikban. Hány könyv van az első szekrényben?
- d) 25 l 60 °C-os és 50 l 90 °C-os vizet összekevernek. Mekkora lesz a keverék hőmérséklete?
- e) Albert egyedül 12 óra alatt, Béla 8 óra alatt ásna ki egy árkot. Együtt kezdenek dolgozni, de Béla 4 óra munka után elmegy. Mennyi idő alatt fejezi be Albert a munkát?

6 A trapéz területét a következő képlettel határoztuk meg: $T = \frac{a+c}{2} \cdot m$

- a) A terület, a magasság és az egyik alap ismeretében hogyan számíthatjuk ki a másik alap hosszúságát?

A: $c = 2T - \frac{a}{m}$; B: $c = 2T + \frac{a}{m}$; C: $c = \frac{2T}{m} - a$; D: $c = \frac{2T}{m} + a$

- b) Határozd meg a trapéz c alapjának a hosszúságát, ha $T = 39 \text{ cm}^2$, $a = 8 \text{ cm}$, $m = 6 \text{ cm}$!

☉ Értelmezd a feladatot, gyűjtsd ki az adatokat!

Keress összefüggést az adatok között!

Készíthetsz táblázatot, rajzot, szöveges tervet!

Becsüld meg az eredményt!

Az eredmény kiszámítása után ne feledkezz meg a szöveges válaszárról, majd az ellenőrzésről!

☉ Az a és c a trapéz két alapja, az m a trapéz magassága.

☉ Karikázd be a helyes képlet betűjelét!

4.

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK



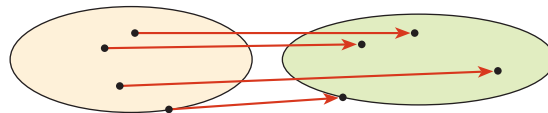
Ebben a fejezetben tömören áttekintjük, elmélyítjük, begyakoroljuk a korábban tanultakat. Erre az alpra építve lépünk tovább, és megismerkedünk a hasonlósági transzformációkkal.

> AZ EGYBEVÁGÓSÁGRÓL TANULTAK KIEGÉSZÍTÉSE

> PONT-PONT FÜGGVÉNYEK

Emlékeztető

Geometriai transzformációnak nevezzük az olyan függvényt, amely egy ponthalmaz minden pontjának a képhalmazból egy-egy pontot feleltet meg.



FELADATOK

- 1 Rajzold meg derékszögű koordináta-rendszerben az $ABCD$ trapézt, ha $A(0; 0)$; $B(4; 0)$; $C(4; 2)$; $D(2; 2)$! A következő feladatokban add meg a képpontok koordinátáit, és rajzold meg a trapéz képét! Vizsgáld meg, hogy van-e olyan pont, amelynek a képe saját maga!
- a) Tükrözd az $ABCD$ trapézt az x tengelyre! A lap síkjában mozgatva (síkmozgással!) fedésbe hozható-e a tükörképével?
A térben mozgatva fedésbe hozható-e a tükörképével?
- b) Tükrözd az $ABCD$ trapézt az origóra! Milyen síkmozgást jelent ez a tükrözés?
- c) Milyen síkmozgások, illetve térmozgások vihetik a trapézt olyan helyzetbe, ahol $A'(0; 0)$ és $D'(-2; 2)$?
- d) Told el a koordinátatengelyekkel párhuzamosan az eredeti trapézt balra 3, majd le 4 egységgel! Helyettesítsd egyetlen eltolással ezt a két síkmozgást!

☉ *Négyzetetrácsból kivágott, az $ABCD$ -vel egybevágó trapézzal kísérletezhetsz.*

*Gyakorló
8.01–8.05;
Feladatgyűjtemény
4.2.01–05.*

- 2 Rajzold meg derékszögű koordináta-rendszerben az $ABC\triangle$ -et, ha $A(0; 0)$; $B(4; 4)$; $C(0; 8)$! A következő transzformációkban add meg a képpontok koordinátáit, és rajzold meg az így kapott pontokkal meghatározott képet!

☉ *Például az a):
A csúcspontok mindkét koordinátáját szorozzuk -2 -vel.*

- a) $P(x; y) \mapsto P_1(-2x; -2y)$;
- b) $P(x; y) \mapsto P_2(-2x; 2y)$;
- c) $P(x; y) \mapsto P_3(-y; x)$;
- d) $P(x; y) \mapsto P_4(x; 2y)$

Vizsgáld, hogy

- 1 az egyenes képe egyenes-e;
- 2 bármely szakasz képe ugyanolyan hosszú-e, mint az eredeti szakasz;
- 3 bármely szakasz párhuzamos-e a képével;
- 4 a szög képe ugyanakkora-e, mint az eredeti szög;
- 5 az alakzat kölcsönösen fedésbe hozható-e a képével;
- 6 az alakzatnak és képének alakja megegyezik-e!

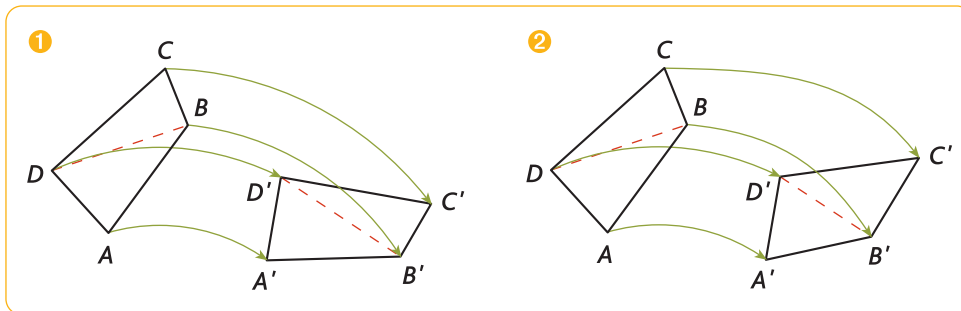
AZ EGYBEVÁGÓSÁG ÉRTELMEZÉSE

Értelmezés

Egybevágósági transzformációnak, röviden egybevágóságnak nevezzük a geometriai transzformációt, ha bármely szakasz képe ugyanolyan hosszúságú, mint az eredeti szakasz. Úgy is mondjuk, hogy az egybevágósági transzformáció **távolságtartó**.

Két alakzatot egybevágónak nevezünk, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyiket a másiknak felelteti meg.

Az egybevágóság jele: $\cong$



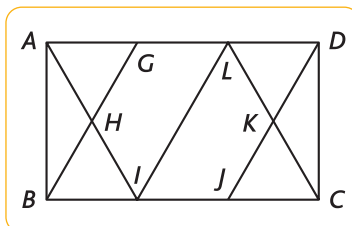
Az 1 egybevágósági transzformáció, mert bármely szakasz és a képe mindig egyenlő hosszúságú. (Pl.: $DB = D'B'$)

A 2 nem egybevágósági transzformáció, mert például a megfelelő átlók nem egyenlők, **nem távolságtartó**.

Minden **mozgás** egybevágóság. A mozgás során a körüljárás iránya megmarad.

A **tengelyes tükrözés** a síkon egybevágóság, de **nem síkmozgás**.

A **síkra tükrözés** a térben egybevágóság, de **nem térmozgás**.

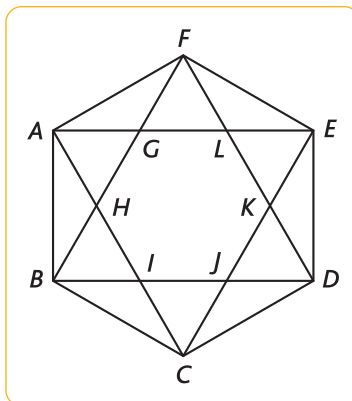


FELADATOK

- 3 Keres olyan geometriai transzformációt, amely az AHG háromszöget egy másik háromszögbe viszi át!

Vizsgáld meg a transzformációkat a 2. feladatban adott szempontok szerint!

Melyik egybevágósági transzformáció?



☉ Csúcsai betűjelével add meg az ábrán az AHG képét az adott transzformációban!

- 4 Az alábbi transzformációk közül melyik egybevágóság?

- Mi az AHG tengelyes tükörképe, ha a tengely az
 - IL egyenes;
 - BE egyenes;
 - HK egyenes?
- Mi az AHG középpontos tükörképe, ha a középpont a
 - G pont;
 - az $ABCDEF$ hatszög középpontja?
- Mi az AHG eltolás képe, ha az eltolás vektora az
 - $\vec{AL}$ vektor;
 - $\vec{HC}$ vektor?
- Mi az AHG képe, ha a $\vec{HG}$ vektorral párhuzamosan minden távolságot a kétszeresére nyújtunk úgy, hogy az AH egyenes pontjai a helyükön maradnak?
- Mi az AHG képe, ha az A pontból kiinduló „sugarak” mentén minden távolságot háromszorosára növelünk úgy, hogy az A pont a helyén maradjon?

A HÁROMSZÖGEK EGYBEVÁGÓSÁGÁNAK ALAPESETEI

Emlékeztető

Két háromszög egybevágó, ha

- 1 megfelelő oldalaik egyenlők:

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c';$$

- 2 két-két oldaluk és e két oldal által közbezárt szögük egyenlő:

$$a = a', \quad b = b', \quad \gamma = \gamma';$$

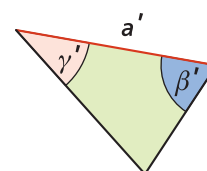
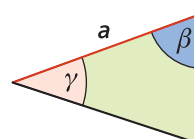
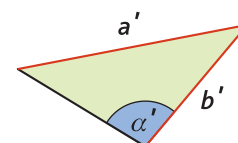
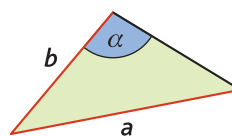
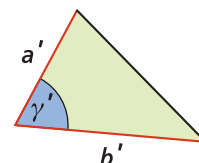
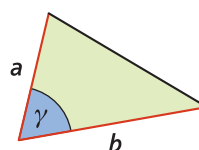
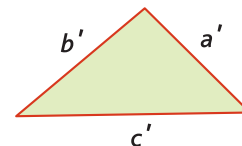
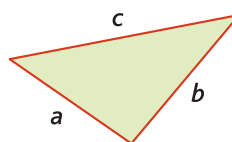
- 3 két-két oldaluk és e két oldal közül a nagyobbikkal szemközt lévő szögük egyenlő:

$$a = a', \quad b = b', \quad \alpha = \alpha';$$

$$(a > b, \quad a' > b');$$

- 4 egy-egy oldaluk és a rajta fekvő két-két szögük egyenlő:

$$a = a', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma';$$



Az alapesetekben adott (megfelelő) adatokból mindig egyértelműen megszerkeszthető a háromszög.

FELADATOK

5

Megadtuk háromszögek néhány adatát (a szokásos jelöléssel).

Szerkeszd meg a háromszöget!

- a) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$; b) $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 4,5 \text{ cm}$;
c) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 75^\circ$; d) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $\gamma = 60^\circ$;
e) $a = 5 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 75^\circ$; f) $a = 3 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$;
g) $a = 12,7 \text{ cm}$, $b = 5,9 \text{ cm}$, $c = 6,5 \text{ cm}$; h) $a = 4 \text{ cm}$, $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 40^\circ$;
i) $a = 5,5 \text{ cm}$, $\alpha = 98^\circ$, $\beta = 82^\circ$; j) $a = 7 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $\beta = 80^\circ$

6

Megadtuk derékszögű háromszögek két-két adatát. (Az átfogót jelölje c .)

Szerkeszd meg a háromszögeket!

- a) $a = 3,5 \text{ cm}$, $\beta = 32^\circ$; b) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$; c) $c = 5,2 \text{ cm}$, $\beta = 40^\circ$;
d) $a = 3,5 \text{ cm}$, $\beta = 102^\circ$; e) $a = 5 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$; f) $\alpha = 58^\circ$, $\beta = 42^\circ$

☉ Minden feladathoz készíts vázlatot, majd vizsgáld meg, hogy az adatokból egyértelműen megszerkeszthető-e a háromszög!

Többet ésszel ...

☉ Mely adatokból nem szerkeszthető derékszögű háromszög?



Készítsünk bővös négyszöget úgy, hogy minden sorban, oszlopban és mindkét átlóban szereplő adatok ugyanazt a háromszöget határozzák meg:

$a = 1 \text{ cm}$		$\gamma = 90^\circ$
	$b = \sqrt{3} \text{ cm}$	$\alpha = 30^\circ$
		$c = 2 \text{ cm}$

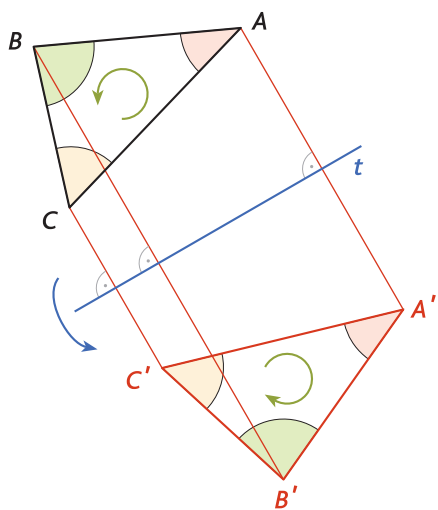


Mekkorák az egyenlő szárú háromszög szögei, ha a háromszöget egyik alapszögének szögfelezője két egyenlő szárú háromszögre bontja?

☉ Írd fel a szögek közti összefüggést!

TENGELYES TÜKRÖZÉS, TENGELYES SZIMMETRIA

Emlékeztető



A tengelyes tükrözés a síknak a t egyenese körüli 180° -os elforgatása.

A tengelyes tükrözést a t **tengely** egyértelműen meghatározza.

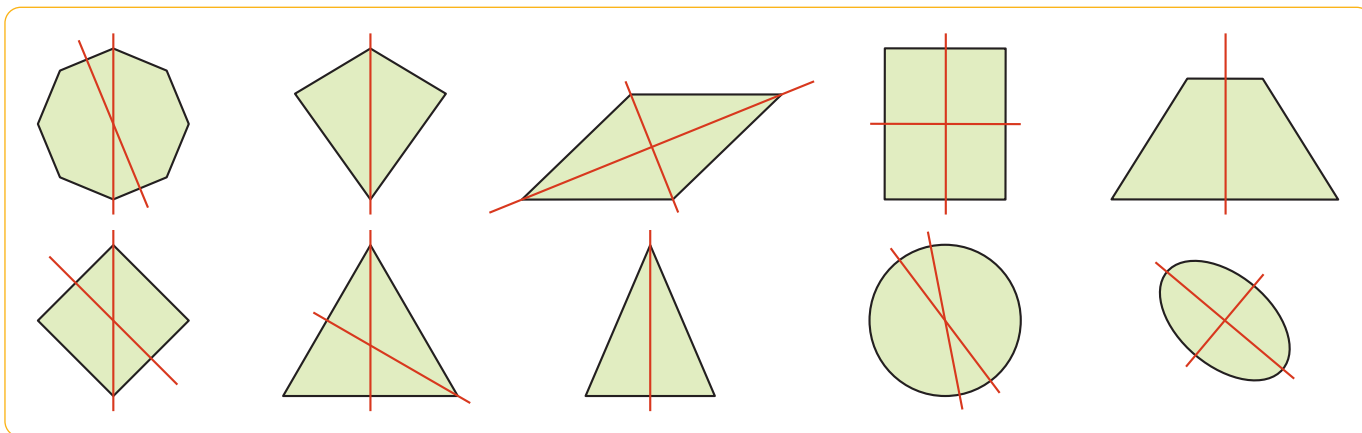
A tengelyes tükrözés megváltoztatja a síkidom **körüljárási irányát**.

A tengelyes tükrözés olyan egybevágósági transzformáció, amely **nem** síkmozgás.

Tengelyes tükrözésnek nevezzük azt a geometriai transzformációt, amely egy adott t egyenes minden pontjának önmagát felelteti meg, és a sík minden más P pontjához úgy rendeli a P' pontot, hogy a PP' szakasz felezőmerőlegese éppen a t tengely legyen.

Egy síkbeli alakzatot **tengelyesen szimmetrikusnak** nevezünk, ha van olyan t egyenes (szimmetriatengely) a síkban, amelyre az alakzatot tükrözve a tükörképe azonos az eredetivel.

Például a szabályos sokszögek, a deltoid, a rombusz, a téglalap, a húrtrapéz, az egyenlő szárú háromszög, a kör tengelyesen szimmetrikus alakzatok. Néhány tengelyt berajzoltunk.



FELADATOK

Gyakorló
8.06–8.10.;
Feladatgyűjtemény
4.2.06.

- Rajzolj egy négyszöget (jelöld a csúcsokat) és egy t egyenest! Tükrözd a négyszöget az adott egyenesre! Hasonlítsd össze az eredeti négyszögnek és képének oldalait, szögeit, körüljárási irányát!
- Szerkessz paralelogrammát, amelynek oldalai 6 cm, 4 cm hosszúak és az egyik szöge 75° ! Tükrözd a rövidebb átló egyenesére!
- Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, amelynek alapja 4 cm, két szára 6 cm hosszú! Szerkeszd meg a szárszög szögfelezőjét, és tükrözd a háromszöget a szögfelező egyenesére!

8

- a) Készíts *halmazábrát* a háromszögek rendszerezéséhez szimmetriatengelyeik száma szerint!
- b) Egy *egyenlő szárú háromszög* egyik szöge 40° -os. Mekkora a többi szögei?
- c) Igazold, hogy az egyenes tengelyesen tükrös alakzat! Milyen helyzetű lehet egy egyenes és a szimmetriatengelye?
- d) Szerkessz trapézt, amelynek egyik alapja 6 cm hosszú, az ezen fekvő mindkét szöge 60° , magassága 2 cm! Tükrözd az alap felezőmerőlegesére!
- e) A tengelyes tükrözés esetén van-e olyan pont, illetve egyenes, amelynek képe önmaga?

☉ Melyik szögről lehet szó?

KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS, KÖZÉPPONTOS SZIMMETRIA

Emlékeztető

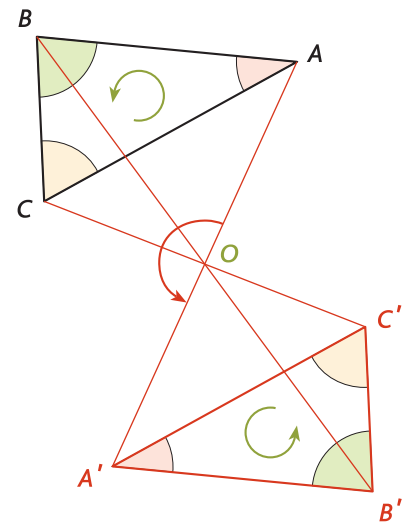
A **középpontos tükrözés** a sík 180° -os forgatása. A 180° -os forgatás középpontját a tükrözés középpontjának (centrumának) nevezzük.

A középpontos tükrözést a középpontja *egyértelműen* meghatározza.

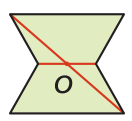
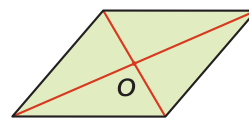
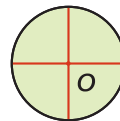
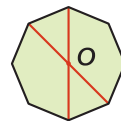
A középpontos tükrözés nem változtatja meg a síkidom **körüljárási irányát**. A középpontos tükrözés **síkmozgás**.

Középpontos tükrözésnek nevezzük azt a geometriai transzformációt, amely a sík egy adott O pontjának önmagát felelteti meg, és a sík minden más P pontjához úgy rendeli a P' pontot, hogy a PP' szakasz felezőpontja éppen az O pont legyen.

Középpontosan szimmetrikusnak nevezzük az alakzatot, ha van olyan O pont (szimmetria-középpont), amely körül 180° -kal elforgatva önmagába megy át.



Például a páros oldalszámú szabályos sokszög, a kör, a paralelogramma középpontosan szimmetrikus alakzat.



Biztosan megfigyelted már, hogy a számológép fejfelé tartva némely szám betűt formáz:

$\text{8} = \text{I}$ $\text{8} = \text{Z}$ $\text{8} = \text{E}$ $\text{8} = \text{S}$ $\text{8} = \text{L}$ $\text{8} = \text{B}$ $\text{8} = \text{O}$

A keresztretjvény függőleges meghatározásait az egyenletek megoldásai adják. Írd be ezeket „számológépes számokkal”, majd fordítsd meg a rejtvényt, és töltsd ki a vízszintes sorokat is!

2. oszlop: $2[90(50 + x)] = 648 + 181x$

4. oszlop: $537 + 2x = 3x$

5. oszlop: $367 - 0,2x = 0$

6. oszlop: $-5x = -115 - 2x(9 - 3^2)$

5. sor: Fafajta

4. sor: Kutyá

3. sor: Okos

2. sor: Sportegyesület

	1	2	3	4	5	6	7	
5								
4								
3								
2								
1								

FELADATOK

☉ Fogalmazd meg a tapasztaltakat!

Gyakorló

8.11–8.15.;

Feladatgyűjtemény

4.2.01–03., 4.2.25–28.

☉ Hogyan helyezkednek el a középpontosan szimmetrikus sokszögeknek azok az oldalai, amelyek tükörképei egymásnak a középpontos tükrözésben?

☉ Rajzolj, indokolj!

9

- Rajzolj egy négyszöget (jelöld a csúcsokat) és egy O pontot! Tükrözd a négyszöget az adott pontra! Hasonlítsd össze az eredeti négyszögnek és képének oldalait, szögeit, körüljárási irányát!
- Szerkessz trapézt, amelynek egyik alapja 6 cm hosszú, az ezen fekvő két szöge 60° és 90° , magassága 3 cm! Tükrözd a trapézt a 60° -os szögének csúcsára!
- Szerkessz trapézt a b) feladatban adott adatokkal! Tükrözd egyik szárának felezőpontjára! Milyen síkidomot határoz meg a trapéz és a képe együtt?
- Szerkessz 4 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget! Szerkeszd meg a szögfelezőit! Tükrözd a háromszöget a szögfelezők metszéspontjára!
- Rajzolj tetszőleges paralelogrammát! Tükrözd átlóinak metszéspontjára!
- A középpontos tükrözés esetén van-e olyan pont, illetve egyenes, amelynek a képe önmaga?

10

- Igazold, hogy az egyenes középpontosan tükrös alakzat! Milyen helyzetű lehet egy egyenes és a szimmetria-középpontja?
- Milyen középpontosan tükrös háromszöget ismersz?
- Sorold fel, rajzolj le az ismert tengelyesen tükrös négyszögeket!
- Sorold fel, rajzolj le az ismert középpontosan tükrös négyszögeket!
- Ha egy négyszögnek van szimmetria-középpontja, akkor hány szimmetriatengelye lehet?
- Rajzolj olyan trapézt, illetve deltoidot, amelynek négy tükörtengelye van!
- Rajzolj olyan tengelyesen tükrös trapézt, amely nem húrtrapéz!
- Rajzolj olyan deltoidot, illetve húrtrapézt, amelynek van szimmetria-középpontja!
- Rajzolj olyan paralelogrammát, amelynek nincs szimmetria-középpontja!
- Rajzolj meg egy tetszőleges paralelogramma két átlóját. Mit mondhatunk a keletkezett háromszögekről?

11

- A következő állítások közül melyik igaz?
- A:** A középpontos tükrözés síkmozgás. **B:** A tengelyes tükrözés síkmozgás.
- C:** Egy szögnek és középpontos tükörképének szárai párhuzamos és ellentétes irányú félegyenesek.
- D:** Van olyan véges síkidom, amelynek két tükörközéppontja van.
- E:** Van olyan deltoid, amelynek pontosan három tükörtengelye van.
- F:** Minden tengelyesen tükrös négyszög köré kör szerkeszthető.

Fejtörő!



Ödömér szerint a digitális kijelzőn néha tengelyesen vagy középpontosan tükrös számok jelennek meg. Úgy véli, hogy a következő számok ilyenek:

A: 5882 B: 6009 C: 8008 D: 3 1 13 E: 5692

- Melyik az a szám, amelynek képe semelyik módon nem tükrös?
- Melyik az a szám, amelynek képe mindkét módon tükrös?

☉ Írd a kérdés után a helyes válasz betűjelét!

ELTOLÁS

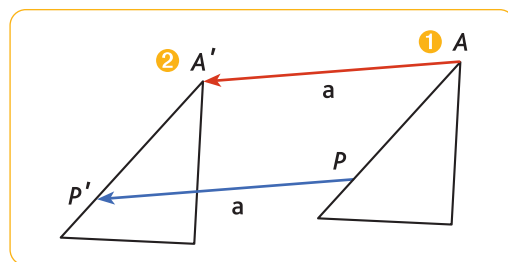
Csendes szellőben siklik a vitorlás a tavon. A vitorla minden pontja egyenes vonalban halad, nem fordul el, nem billen meg.



Egy adott időtartam alatt a vitorla az ① helyzetből a ② helyzetbe jut. Például a vitorla A pontja az $\overrightarrow{AA'}$ vektorral elmozdulva az A' pontba kerül.

Mivel a vitorla alakja és nagysága a mozgás során nem változik, akár-melyik P pontja ugyanolyan irányban mozdul el, és ugyanakkora utat tesz meg, mint az A pontja:

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AA'} = \mathbf{a}$$



Emlékeztető

Ha a síknak vagy a sík egy alakzatának minden pontját ugyanabban az irányban, ugyanakkora távolságra (ugyanazzal a vektorral) mozgatjuk el, akkor minden pontjához egyértelműen pontot rendelünk. Ezt a mozgást **eltolásnak** nevezzük.

Az eltolás egybevágósági transzformáció.

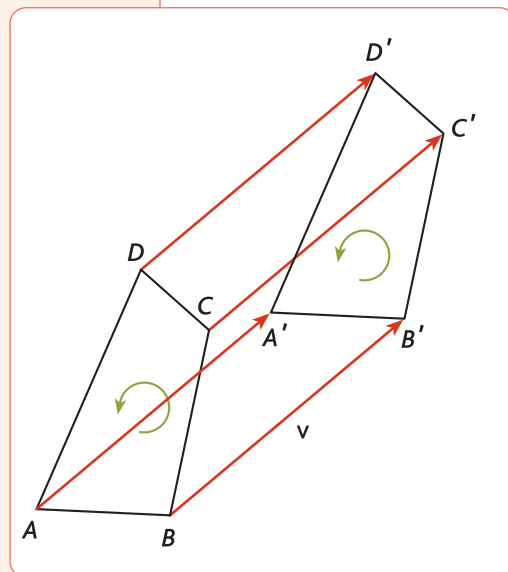
Az eltolást az eltolás vektora **egyértelműen** meghatározza.

Az eltolás nem változtatja meg a síkidom **körüljárási irányát**. Az eltolás **síkmozgás**.

Eltolásnak nevezzük azt a geometriai transzformációt, amely minden P ponthoz úgy rendeli a P' pontot, hogy a $\overrightarrow{PP'}$ megegyezik egy adott $\mathbf{v}$ vektorral.

Megállapodás szerint a **helyben maradást** tekinthetjük olyan eltolásnak, amelyben minden pontnak saját maga a képe. Ennek az eltolásnak a vektora a nullvektor. A **nullvektor** bármilyen irányú lehet, a hosszúsága pedig nulla.

Az eltolást a térben hasonlóan értelmezhetjük.



Képzeld el, hogy ez az ábra a síkon mindenfelé a végtelenségig folytatódik!

- Keress olyan pontokat, amelyekre középpontosan szimmetrikus az ábra!
- Hány olyan (nullvektortól különböző) vektort találsz, amellyel eltolva az ábra önmagába megy át? Rajzolj be ilyen vektorokat!
- Találsz-e más olyan (esetleg több transzformáció egymás utáni végrehajtásával kapott) transzformációt, amelyet végrehajtva az ábra önmagába megy át?

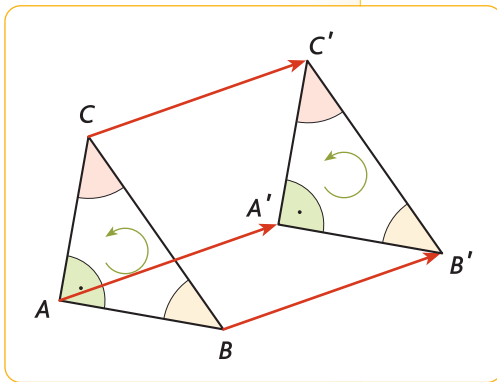
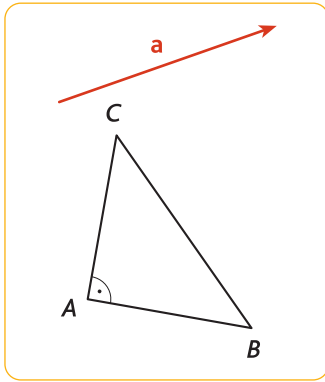
1. példa

Toljuk el a háromszöget a lap síkjában úgy, hogy minden pontja az adott a -ral (olvasd: a vektorral) mozduljon el.

Hasonlítsuk össze az eredeti háromszöget az eltolással kapott háromszöggel.

Soroljuk fel az eltolás tulajdonságait.

Az eltolt kép megrajzolásához az a -ral párhuzamos félegyeneseket kell rajzolnunk. Ezt egy derékszögű vonalzó és egy másik vonalzó segítségével végezhetjük el úgy, hogy a derékszögű vonalzót eltoljuk a másik vonalzó éle mentén.



Megrajzoljuk az $\overrightarrow{AA'}$ -t, a $\overrightarrow{BB'}$ -t, és a $\overrightarrow{CC'}$ -t:

Az $ABC\triangle$ csúcsaiból az a irányában, azzal párhuzamosan félegyeneseket húzunk, és ezekre rámérjük az a hosszát. A kapott pontok az eltolással kapott háromszög csúcspontjai.

A transzformáció tulajdonságai:

1 Minden szakasz ugyanolyan hosszú, mint a képe:

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad AC = A'C'$$

2 Minden szög egyállású az eltolt képével, tehát egyenlők:

$$\angle CAB = \angle C'A'B', \quad \angle ABC = \angle A'B'C', \quad \angle BCA = \angle B'C'A'$$

3 Az eltolás *nem változtatja* meg a háromszög körüljárási irányát.

4 Az eredeti háromszög minden oldala párhuzamos az eltolással kapott képével:

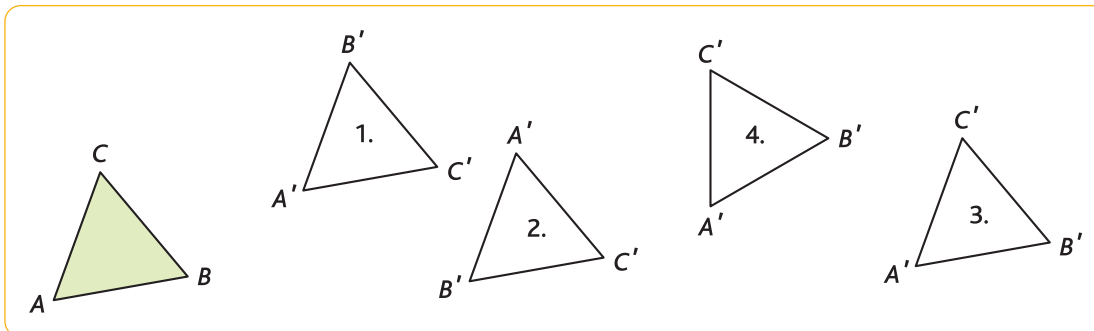
$$AB \parallel A'B', \quad BC \parallel B'C', \quad AC \parallel A'C'$$

5 Az eredeti és az eltolással kapott háromszög egybevágó.

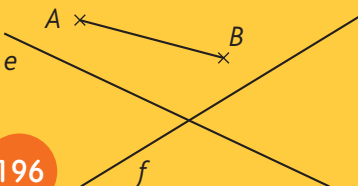
FELADATOK

12

Az ABC szabályos háromszögnek a vesszős betűkkel jelölt háromszögek közül melyik az eltolási képe?



☉ Megfigyelted a háromszögek csúcsainak betűzését?



Adott két egymást metsző egyenes, és egy AB szakasz. Szerkessz paralelogrammát úgy, hogy két szomszédos csúcsa az A és a B pont legyen, másik két csúcsa az e , illetve az f egyenesre illeszkedjék!

13

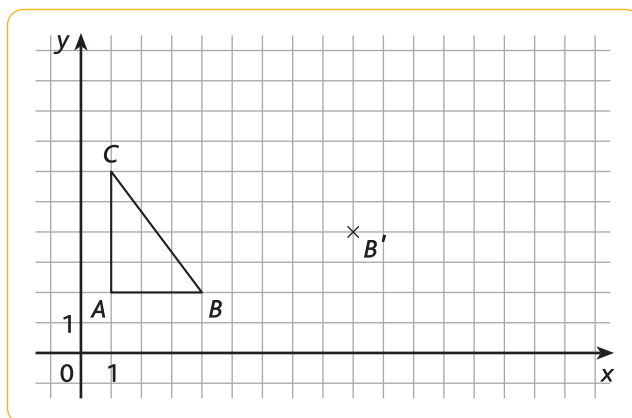
- a) Rajzolj egy négyszöget (jelöld a csúcsokat) és egy vektort! Told el a négyszöget az adott vektorral! Hasonlítsd össze az eredeti négyszögnek és képének oldalait, szögeit, körüljárási irányát!
- b) Szerkessz 3 cm oldalhosszúságú szabályos hatszöget! Húzd meg és irányítsd (nyíllal) egyik rövidebb átlóját! Told el a hatszöget az átlóvektorral! Hányféle megoldás van?
- c) Szerkessz paralelogrammát, amelynek oldalai 5 cm és 4 cm hosszúak, egyik szöge 45° -os! Irányítsd a paralelogramma két szomszédos oldalát! Told el a paralelogrammát az egyik oldal vektorával, majd az eltolt paralelogrammát a másik oldal vektorával! Mely vektorral kell eltolnod a paralelogrammát, ha a két eltolást egygel akarod helyettesíteni?
- d) Oldd meg a c) feladatot úgy is, hogy az egyik oldalvektor irányítását megváltoztatod!
- e) A síkbeli eltolás esetén van-e olyan pont, amelynek a képe önmaga? Van-e olyan egyenes, amelynek képe ugyanaz az egyenes?

☉ A párhuzamos egyenesek megrajzolásához az általános iskolában derékszögű vonalzót is használhatsz.

14

- a) Rajzold le az $ABC\triangle$ -et, majd told el úgy, hogy a B csúcs a B' pontra illeszkedjék!
- b) Rajzold be az eltolás vektorát!
- c) Olvasd le és hasonlítsd össze az eredeti háromszög csúcspontjainak és az eltolt háromszög megfelelő csúcspontjainak jelzőszámait (koordinátáit)! Add meg a hozzárendelés szabályát!

$$P(x; y) \mapsto P'(\text{ } ; \text{ })$$



15

- a) Hányféleképpen lehet egy négyzetet úgy eltolni, hogy az eltolt négyzet egy oldala illeszkedjék az eredeti négyzet egy oldalára?
- b) Hányféleképpen lehet eltolni egy szabályos hatszöget úgy, hogy az eltolással kapott kép egy oldala az eredeti hatszög egyik oldalára illeszkedjék?
- c) Tolj el egy szabályos háromszöget úgy, hogy az eltolással kapott kép egyik oldala az eredeti háromszög egyik oldalára illeszkedjék!
- d) El lehet-e tolni egy szabályos tizenötszöget úgy, hogy az eltolással kapott kép egy oldala az eredeti tizenötszög egyik oldalára illeszkedjék?
- e) Szerkessz O középpontú, 1,5 cm sugarú kört! Told el úgy, hogy az eredeti körnek és a képének egy közös pontja legyen!

☉ Milyen helyzetűek egymáshoz képest a szakasz és az eltolással kapott képe?

☉ Állításodat indokold!

16

- Minden feladatban rajzolj tetszőleges vektort, jelölje $\mathbf{a}$!
- a) Szerkessz olyan vektort, amely azonos hosszúságú az $\mathbf{a}$ -ral és $+30^\circ$ -os szöget zár be vele!
- b) Szerkessz olyan vektort, amelynek a hosszúsága $\frac{3}{4}$ része az $\mathbf{a}$ hosszának és -120° -os szöget zár be vele!

Gyakorló
8.16–8.25.

THALÉSZ TÉTELE

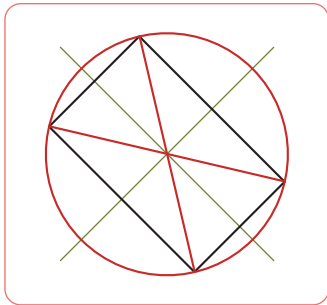
FELADATOK

B1 Szerkesszünk téglalapot, amelynek szomszédos oldalai 3 cm és 4 cm hosszúságúak. Húzzuk meg az átlóit.

Középpontosan tükrös-e a téglalap? Ha igen, akkor mi a tükröközéppont?

Szerkeszthető-e minden téglalap köré kör? Ha igen, akkor hol van ennek a körnek a középpontja?

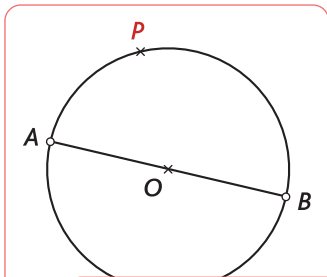
A felismert összefüggésekből kiindulva fogalmazzunk meg sejtéseket a derékszögű háromszög köré írható körrel kapcsolatban.



Emlékeztető

- 1 A téglalap az oldalfelező merőlegeseire tengelyesen tükrös trapéz, tehát húrtrapéz, vagyis mindig szerkeszthető köré kör.
- 2 A tengelyes szimmetriából következik, hogy a téglalap átlói egyenlő hosszúságúak.
- 3 A téglalap paralelogramma, tehát középpontosan tükrös, ezért az átlói felezik egymást.

Az előzőekből következik, hogy a téglalap köré írható kör átmérője a téglalap átlója, középpontja az átlók metszéspontja.

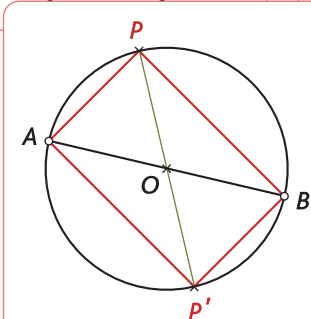


1. Tétel

Ha egy kör átmérőjének A és B végpontját összekötjük a körvonal egy harmadik P pontjával, akkor az $ABP\Delta$ derékszögű, és átfogója az AB .

Bizonyítás

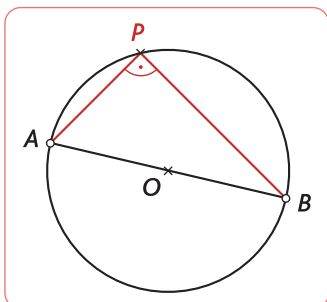
A P pontot úgy vettük fel, hogy rajta legyen az AB átmérőjű körön és különbözzék A -tól és B -től.



Megrajzolva az $ABP\Delta$ -et, majd tükrözve a kör középpontjára, az $AP'BP$ négyszöget kapjuk. Ennek a négyszögnek az átlói egyenlő hosszúságúak és felezik egymást, ugyanis a középpontos tükrözés miatt PP' is átmérője a körnek.

Ezért az $AP'BP$ négyszög téglalap, tehát az $APB\angle$ derékszög.

Tehát az $ABP\Delta$ valóban derékszögű háromszög, és az AB szakasz az átfogója. Ezt kellett bizonyítanunk.



Fogalmazzuk meg az 1. tétel **megfordítását**:

2. Tétel

Ha egy háromszög derékszögű, akkor a köréírható körének középpontja az átfogó felezőpontja.

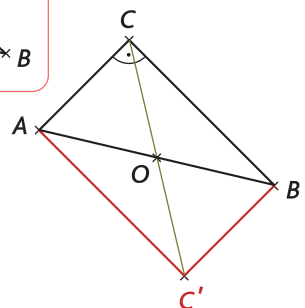
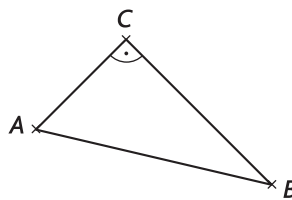
Bizonyítás

Legyen az $ABC\triangle$ derékszögű, és átfogója legyen AB .

Tükrözzük az $ABC\triangle$ -et az átfogó O felezőpontjára. Téglalapot kapunk, amelynek átlói az AB és a CC' .

A téglalap átlói egyenlő hosszúak, és a középpontos szimmetria miatt az O pontban felezik egymást. Az O pont a téglalap köré írható kör középpontja.

A téglalap köré írható kör egyben a $ABC\triangle$ köríráható köre, amelynek középpontja a téglalap átlóinak metszéspontja, azaz valóban az AB szakasz O felezőpontja. (Lásd felülről a harmadik ábrát.)

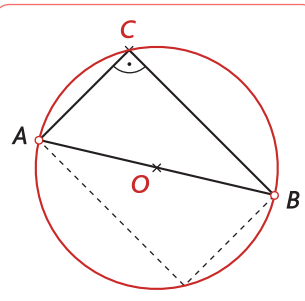


Az 1. és a 2. tételt együtt megfogalmazva **Thalész tételét** kapjuk:

Tétel

Közös AB átfogójú derékszögű háromszögek derékszögű csúcsainak halmaza az AB átmérőjű körvonal, amelyből elhagyjuk az átmérő A és B végpontját.

A szakasz mint átmérő fölé írt teljes körvonalat a szakasz Thalész-körének nevezzük.



Thalész görög matematikus volt (i. e. 624–548).

Megjegyzés: Néhány könyvben az 1. tétel állítását említik Thalész-tételeként. Ekkor a 2. tételt a Thalész-tétel megfordításának mondják.

2. példa

Szerkesszünk adott körhöz külső pontból érintőt.

Készítsünk vázlatot

Rajzoljuk meg az ábrát, mintha már megszerkesztettük volna.

Keressünk az adatok közt összefüggést

A sugár merőleges az érintőre, tehát az $OPE\triangle$ derékszögű.

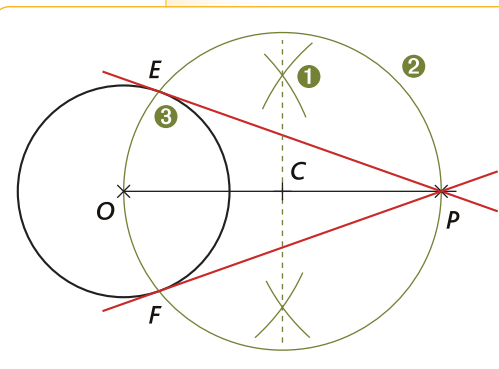
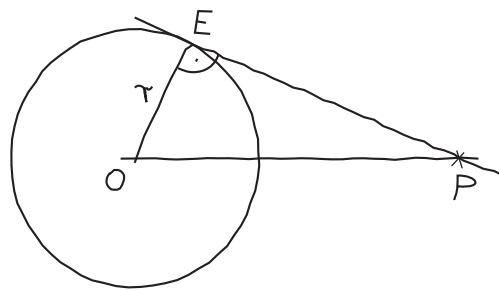
Az E érintési pont az OP szakasz Thalész-körére illeszkedik.

A szerkesztés terve

- 1 Megfelezzük az OP szakaszt, kapjuk a C pontot.
 - 2 Meghúzzuk az OP szakasz Thalész-körét. Ez kimetszi a körvonalból az E és az F pontot.
 - 3 Meghúzzuk a PE és a PF egyenest, ezek a keresett érintők.
- Két metszéspont van, tehát két érintőt tudunk húzni.

A szerkesztés végrehajtása

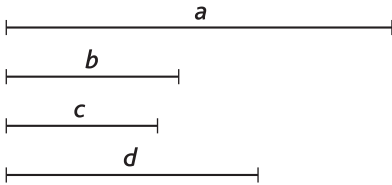
A terv alapján végezzük el önállóan a szerkesztést.



EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK ALKALMAZÁSA

3. példa

Szerkesszünk trapézt, ha ismerjük az oldalait.



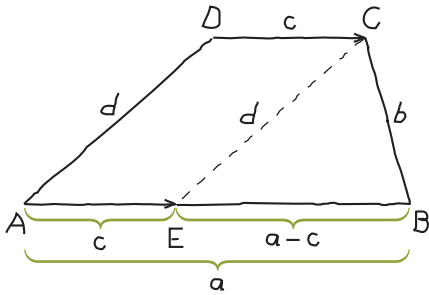
Felvesszük az adatokat

Mivel a feladatban nincsenek megadva az adatok, ezért azokat tetszőlegesen mi adjuk meg.

Vigyázzunk arra, hogy ne speciális eseteket (például itt húrtrapézt vagy paralelogrammát) határozzanak meg az adatok.

Értelmezzük a feladatot

Készítsünk vázlatot. A vázlaton jelöljük a kiindulási adatokat, és „be-tűzzük” a csúcsokat is.



Keressük az összefüggéseket

Ha az AD szakaszt $\overrightarrow{DC}$ -ral **eltoljuk**, akkor a D pont képe a C pont, az A pont képe az E pont lesz.

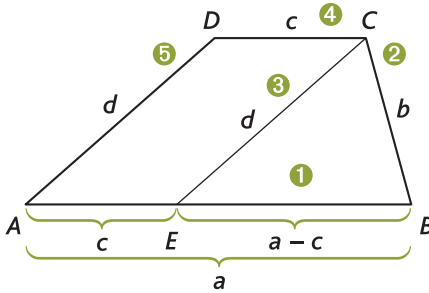
$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AE}; \quad AD \parallel EC$$

A fentiek alapján, ha a C csúcsból a d szárral párhuzamost húzunk, akkor a trapézt egy paralelogrammára és egy háromszögre bontjuk.

A háromszögnek ismerjük mind a három oldalát: $(b, d, a - c)$.

Tervezzük meg a szerkesztést

Először megszerkesztjük az $EBC\Delta$ -et, majd kiegészítjük trapézzá. A szerkesztés lépéseit az ábrán jelöltük.



Szerkesszük meg a trapézt

Igazoljuk a szerkesztés helyességét

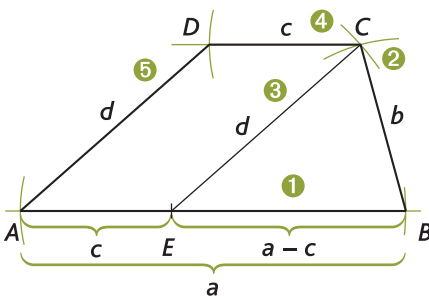
Az $AECD$ négyszög paralelogramma, a paralelogramma szemközti oldalai egyenlők.

Mit mondhatunk még el a feladról?

Az $EBC\Delta$ -ben teljesülnie kell a háromszög-egyenlőtlenségnek. Ezért a trapéz pontosan akkor szerkeszthető meg, ha

a két alap különbsége kisebb a szárak összegénél: $a - c < b + d$;

bármelyik szár kisebb, mint a két alap különbségének és a másik szárnak az összege: $b < (a - c) + d$; $d < (a - c) + b$.



FELADATOK

B2

- Rajzolj egy AB szakaszt! Szerkessz 5-6 derékszögű háromszöget, amelyeknek az AB szakasz a közös átfogójuk! Szemléltesd Thalész tételét!
- Szerkessz háromszöget, ha adott egy oldala és a másik két oldalhoz tartozó magassága!

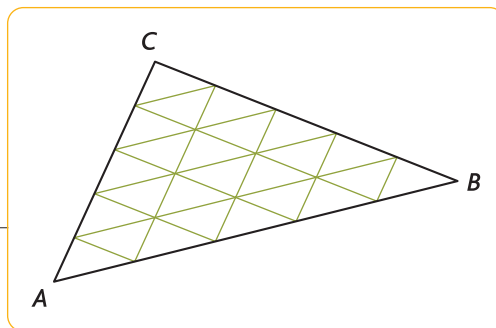
B3

Az a oldalú négyzet átlóinak metszéspontja az O pont. Ezt a négyzetet told el egyik átlóegyenese mentén úgy, hogy az eredeti négyzet egyik csúcsa az O pontra illeszkedjen! A két négyzetnek van közös területrésze. A négyzet területének hányad része ez a terület?

B4

Bizonyítsd be, hogy ha az $ABC\triangle$ oldalait egyenlő részekre osztjuk, és a megfelelő osztópontokat összekötjük, akkor

- egy háromszögrácsot kapunk;
- ennek a rácsnak a vonalai párhuzamosak a megfelelő oldalakkal;
- a kis rácsháromszögek egybevágók egymással!



B5

Szerkessz tengelyesen szimmetrikus trapézt, amelynek alapjai 3 cm, 5 cm hosszúak, szárjai 4 cm-esek!

B6

Tengelyesen szimmetrikus trapéz alapjai a és c ($a > c$), szárjai b hosszúságúak. Bizonyítsd be, hogy $2b > a - c$!

☉ Lásd a 200. oldalon a trapéz szerkesztését.

B7

Szerkessz 2 cm oldalhosszúságú szabályos hatszöget! Told el egyik átlóvektorának felével! Mekkora az eredeti hatszög és az eltolással kapott képe közös részének a területe?

☉ Hányféle (nem egybevágó) közös részt kaptál?

B8

Rajzolj két, egymással párhuzamos egyenest és egy háromszöget. Tükrözd a háromszöget az egyik egyenesre, majd a tükörképet a másikra!

Mi a sejtésed? Milyen egyetlen transzformációval helyettesíthető a két tükrözés?

B9

Szerkessz egy 1 cm és egy 2 cm sugarú kört úgy, hogy középpontjuk távolsága 4 cm legyen! Told el az 1 cm sugarú kört a két középpontot összekötő egyenes mentén a nagyobb kör irányába

☉ Az eltolással kapott körök milyen helyzetűek a nagyobb körhöz viszonyítva?

- 1 cm-rel;
- 3 cm-rel;
- 5 cm-rel!

B10

Adott egy szakasz és két kör. Szerkessz az adott szakasszal párhuzamos, azzal egyenlő hosszú szakaszt, amelynek az egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik körre illeszkedik!

☉ A szakasz és a kör tetszőleges elhelyezése és mérete esetén hány megoldás lehetséges?

B11

a) Adott két párhuzamos egyenes és köztük P és Q pont. Szerkessz trapézt, amelynek alapjai a párhuzamos egyenesekre illeszkednek, szárjai 3 cm-esek, egyik szára a P , a másik a Q ponton halad át!

☉ A speciális trapézokra is gondoltál?

- A P és a Q pont helyének változtatásával megvalósítható-e az, hogy a feladatnak pontosan három; kettő; egy megoldása legyen?



Hány egymástól különböző (nem egybevágó) trapéz állítható össze

- egy 6, egy 8, egy 10 és egy 11 egységnyi hosszúságú szakaszból;
- egy 4, egy 5, egy 6 és egy 7 egységnyi hosszúságú szakaszból?



Létezik-e olyan trapéz, amelynek szárjai 5 cm és 14 cm hosszúak, középvonala 12 cm hosszú, alapjainak aránya $1:2$?

Fejtörő!

☉ Válaszod indokold!

FORGATÁS, FORGÁSSZIMMETRIA



Körpályán játék mozdony köröz. A „jármű” minden pontja a pálya középpontja körüli köríven mozog. A kis mozdony felülről nézve körözhet az óramutató járásával megegyező irányban, illetve ellenkező irányban is.

Megállapodás szerint:

pozitívnak tekintjük az óramutató járásával ellentétes elfordulást;

negatívnak tekintjük az óramutató járásával megegyező elfordulást.

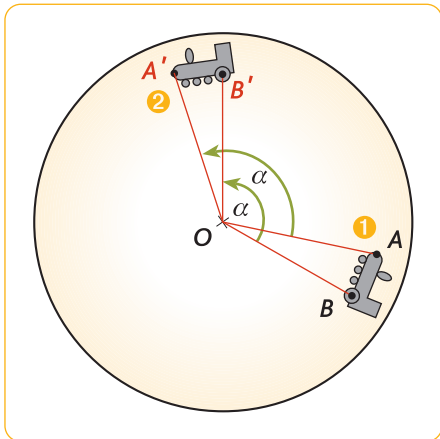
Egy adott időtartam alatt a kis „jármű” az ① helyzetből a ② helyzetbe jut. Mivel a kis „jármű” alakja és mérete nem változik meg a mozgás során, egy-egy pontjának a középponttól mért távolsága állandó.

$$OA = OA'; \quad OB = OB'$$

Ha az alakzat A pontja az α (az ábrán pozitív) középponti szöghöz tartozó köríven mozdul el, akkor az alakzat tetszőleges B pontja szintén α irányított (itt pozitív) középponti szöghöz tartozó köríven mozog a körpálya O középpontja körül.

☉ Milyen korábban már megismert transzformációról van szó, ha

- ① $\alpha = 180^\circ$; ② $\alpha = 0^\circ$; ③ $\alpha = 360^\circ$?



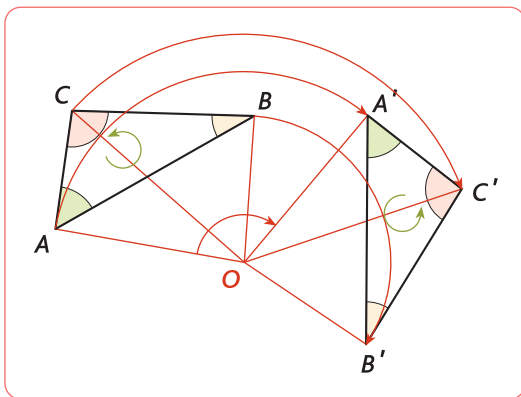
Értelmezések

Ha a síknak vagy a sík egy alakzatának minden pontját egy rögzített O pont körül ugyanabban az irányban, ugyanakkora szöggel elforgatjuk, akkor minden pontjához **egyértelműen** pontot rendelünk. Ezt a mozgást **forgatásnak** nevezzük.

A forgatás **egybevágósági transzformáció**.

A forgatást a középpontja és az elforgatás irányított szöge egyértelműen meghatározza.

A forgatás nem változtatja meg a síkidom **körüljárasi irányát**. A forgatás **síkmozgás**.



Forgatásnak nevezzük azt a geometriai transzformációt, amely a sík egy adott O pontjának önmagát felelteti meg, és a sík minden más P pontjához úgy rendel P' pontot, hogy az $OP = OP'$, és a POP' irányított szög megegyezik egy adott α szöggel.

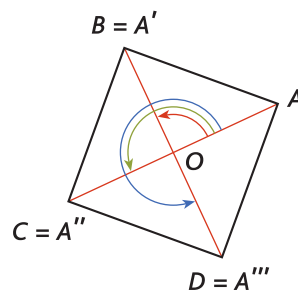
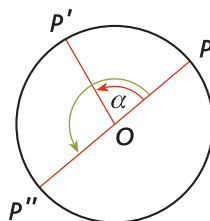
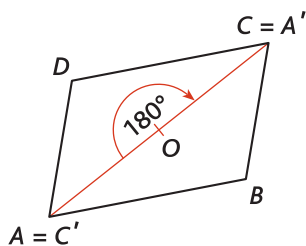
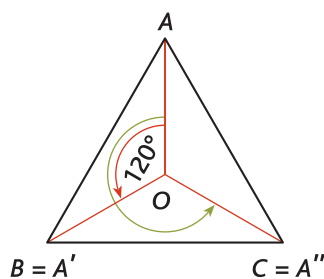
A középpontos tükrözés speciális, 180° -os forgatás.

Egy síkbeli alakzatot **forgásszimmetrikusnak** nevezünk akkor, ha létezik olyan 0° -nál nagyobb, 360° -nál kisebb szögű elforgatás, amely a síkbeli alakzatot önmagába viszi át.

A körlapot, a körgyűrűt a középpontja körüli bármekkora szöggel való elforgatás önmagába viszi át. Az ilyen forgásszimmetrikus alakzatokat **körszimmetrikusnak** nevezzük.

A 0° -os és a 360° -os elforgatás bármely síkbeli alakzatot önmagába viszi át. Ha nem zártuk volna ki ezeket az elforgatásokat, akkor bármely alakzatot forgásszimmetrikusnak kellene tekintenünk.

Például a szabályos sokszögek, a paralelogramma, a kör forgásszimmetrikus alakzatok, (speciálisan a kör körszimmetrikus).



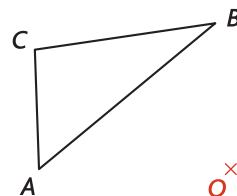
A természetben is megfigyelhetünk forgásszimmetriát. Például az alma és a paradicsom metszete is forgásszimmetrikus alakzat:



4. példa

Forgassuk a háromszöget úgy, hogy minden pontja az adott O pont körül -135° -kal mozduljon el.

Hasonlítsuk össze az eredeti háromszöget a forgatással kapott háromszöggel. Soroljuk fel a forgatás tulajdonságait.



Az elforgatás középpontja, az O pont helyben marad.

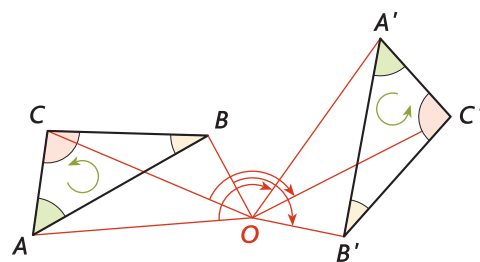
Összekötjük az A, B, C pontokat az O ponttal. Megszerkesztjük az OA', OB', OC' félegyeneseket úgy, hogy

$$\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = -135^\circ$$

Megszerkesztjük az $A', B',$ és a C' pontot:

$$OA = OA'; \quad OB = OB'; \quad OC = OC'$$

Megszerkesztjük az $A'B'C'$ -et.



1 $ABC\Delta$ egybevágó az $A'B'C'\Delta$ -gel: $ABC\Delta \cong A'B'C'\Delta$

Bármely alakzat egybevágó a forgatással kapott képével.

Például az egyenes képe egyenes, a szakasz képe ugyanolyan hosszú szakasz, a szög képe ugyanakkora szög:

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A'$$

$$\angle CAB = \angle C'A'B', \quad \angle ABC = \angle A'B'C', \quad \angle BCA = \angle B'C'A'$$

2 Az $ABC\Delta$ körüljárásának iránya megegyezik az $A'B'C'\Delta$ körüljárásának irányával. A forgatás nem változtatja meg a síkidom körüljárásának irányát. A forgatás síkmozgás.

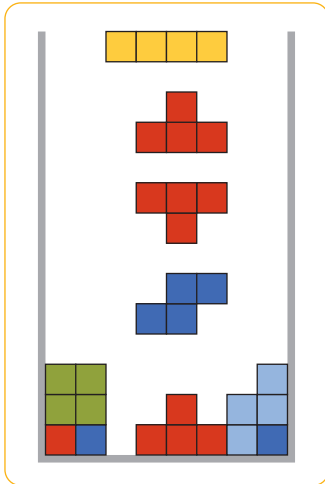
»»

»»

- 3 A forgatást a középpontja és az elfordulás (irányított) szöge egyértelműen meghatározza.
- 4 Az $ABC\triangle$ és az $A'B'C'\triangle$ megfelelő oldalai nem párhuzamosak. Egy egyenes (szakasz, félegyenes) csak akkor párhuzamos a forgatással kapott képével, ha a forgatás szöge 180° vagy annak egész számú többszöröse.

Gyakorló
8.26–8.35.

A Tetris játékban a teljes sor mindig eltűnik. A fentről eső elemet forgathatjuk, és jobbra-balra mozgathatjuk, amíg rá nem esik a már lent lévőkre. Melyik elemet hányszor forgassuk, ha csak $+90^\circ$ -kal lehet, és 3 sort akarunk nyerni?



FELADATOK

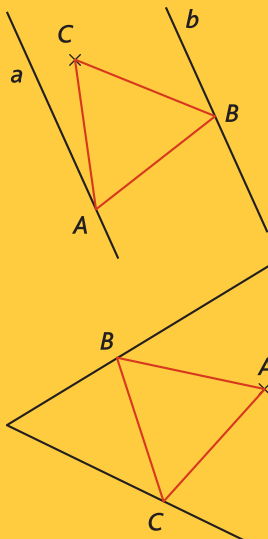
- B12** Rajzolj egy tetszőleges háromszöget, és vedd föl egy O pontot! Forgasd el az O körül -120° -kal a háromszöget!
A 120° -os szöget is szerkeszd!

- B13** A derékszögű koordináta-rendszerben egy téglalap egyik csúcsa az origóval esik egybe, az ezzel szemközti csúcsának koordinátái $(4; 5)$, a másik két csúcsa a tengelyekre illeszkedik.

- a) Rajzold meg ezt a téglalapot a koordináta-rendszerben!
b) Forgasd el az origó körül -90° -kal!
c) Add meg az elforgatott téglalap csúcspontjainak koordinátáit!

- B14** Igazold, hogy a derékszögű koordináta-rendszerben $OA \perp OB$, ha
a) $O(0; 0)$, $A(3; 5)$, $B(-5; 3)$; b) $O(0; 0)$, $A(3; 5)$, $B(5; -3)$!

- B15** Vedd föl tetszőlegesen egy A és egy A' pontot! Hol helyezkedhet el az az O pont, amely körül az A pontot elforgatva az A' -be kerül? Határozd meg a forgatás irányát is!



- Rajzolj egymással párhuzamos a és b egyenest, és jelöld ki köztük egy C pontot! Szerkessz szabályos $ABC\triangle$ -et úgy, hogy az A csúcs az a egyenesre, a B csúcs a b egyenesre illeszkedjék, a harmadik csúcs az adott C pont legyen!



- Rajzolj egy hegyesszöget, és a szögtartományban jelöld ki egy A pontot! Szerkessz szabályos $ABC\triangle$ -et úgy, hogy az egyik csúcsa az A pont, a másik két csúcsa a két szögszáron legyen!

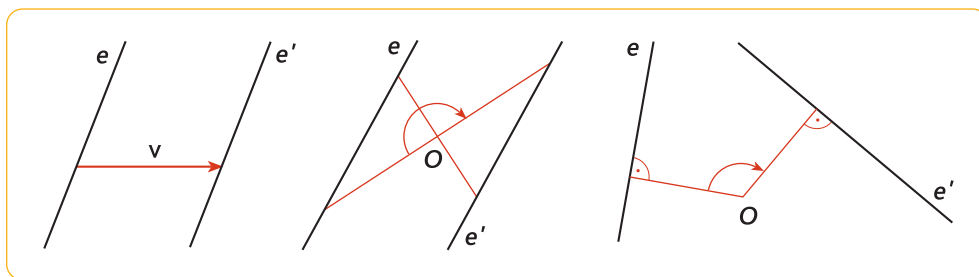
ÖSSZEFOGLALÁS

Az eddig tanult geometriai transzformációk olyan függvények, amelyek a sík pontjaihoz a sík pontjait rendelik hozzá. Hasonlítsuk össze a tengelyes tükrözés, az eltolás, a forgatás (speciálisan a középpontos tükrözés) tulajdonságait.

- Ezek **egybevágósági transzformációk**, bármely alakzat képe egybevágó az eredeti alakzattal ezekben a transzformációkban. Például:
a szakasz képe vele egyenlő hosszúságú szakasz, távolságtartó;
a szög képe vele egyenlő nagyságú szög (szögtartás);
az egyenes képe egyenes (egyenestartás).
- Az eltolás, a forgatás, így a középpontos tükrözés is **síkmozgás**, nem változtatja meg a síkidom körüljárásának irányát.
A tengelyes tükrözés a körüljárás irányát megváltoztatja, ezért a tengelyes tükrözés **nem síkmozgás**.
- Az eltolás és a középpontos tükrözés esetén bármely egyenes (szakasz, félegyenes) párhuzamos a képével.

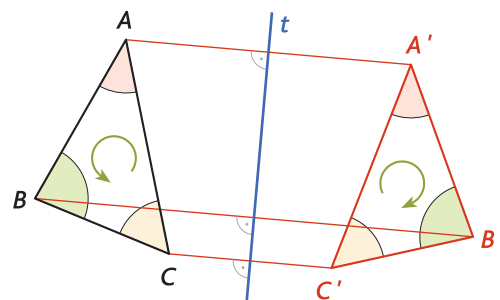
☉ Egybevágó két alakzat, ha „ugyanolyan alakú” és ugyanolyan méretű.

Az elforgatással kapott egyenes csak akkor párhuzamos az eredetivel, ha az elforgatás szöge 0° ; 180° ; 360° ; ... vagyis 180° vagy annak egész számú többszöröse.



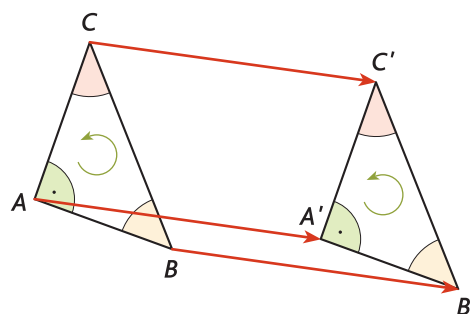
I. TENGELYES TÜKRÖZÉS

- Mozgatással történő végrehajtásához általában ki kell lépni a síkból.
- A tengely egyértelműen meghatározza.
- Egyenes és képe általában nem párhuzamos egymással. (Speciális esetekben az egyenes és a képe lehet párhuzamos egymással.)
- Megváltoztatja a körüljárás irányát.

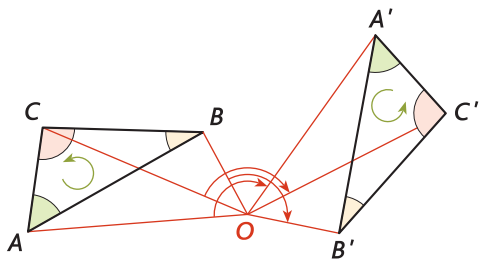


II. ELTOLÁS

- Síkmozgással előállítható (végrehajtásához nem kell kilépni a síkból).
- Az eltolásvektor egyértelműen meghatározza.
- Egyenes és képe párhuzamos egymással.
- A körüljárás irányát nem változtatja meg.

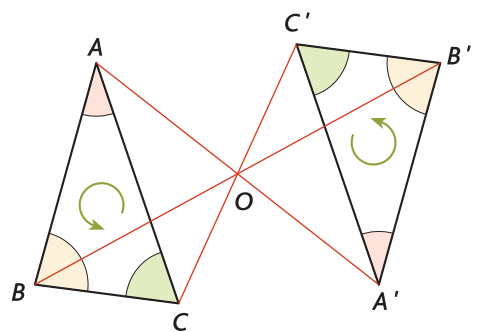


III.



- 1 Síkmozgással előállítható.
- 2 A forgatás irányított α szöge és O centruma egyértelműen meghatározza.
- 3 Egyenes és képe általában nem párhuzamos egymással.
- 4 A körüljárás irányát nem változtatja meg.

IV



- 1 Síkmozgással előállítható.
 - 2 A tükrözés O középpontja egyértelműen meghatározza.
 - 3 Egyenes és képe párhuzamos egymással.
 - 4 A körüljárás irányát nem változtatja meg.
- Mint látható, a középpontos tükrözés a forgatás speciális esete.

v.

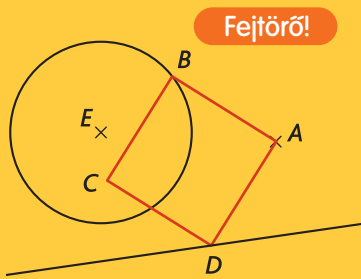
Speciális (nullvektorral történő) eltolás, illetve speciális (0° -kal, $\pm 360^\circ$ -kal, $\pm 720^\circ$ -kal, ... történő) elforgatás.

8.36–8.50.;

Feladatgyűjtemény

4.2.04–11., 4.2.25–28.,
4.4.15–16.

A sík egybevágósági transzformációihoz hasonló módon értelmezhetjük a tér egybevágósági transzformációit. Ilyen például az eltolás, síkra tükrözés, pontra tükrözés, tengely körüli elforgatás.



© Megoldottad a 204. oldal alján lévő fejtörő feladatokat?



Vége fel egy kört, egy egyenest és egy A pontot, amely nincs rajta sem a körön, sem az egyenesen! Szerkessz $ABCD$ négyzetet, amelynek egyik csúcsa az adott pont, az ezzel szomszédos csúcsai pedig a körre, illetve az egyenesre illeszkednek!

© Hány megoldása lehet a feladatnak?



Rajzolj egymással párhuzamos a és b egyenest, és az a egyenesen jelölj ki egy A pontot! Szerkessz szabályos $ABC\triangle$ -et úgy, hogy a B és a C pontok közül az egyik a b egyenesre illeszkedjék, a másik pont a két párhuzamos egyenes között helyezkedjen el!

Hol helyezkedhet el a B , illetve a C pont a b egyenesen?

SZÁMITÁSI ÉS BIZONYÍTÁSI FELADATOK

Tétel

A háromszög két oldalfelező pontját összekötő középvonala fele a harmadik oldalnak és párhuzamos azzal.

Bizonyítás

Az $ABC\triangle$ AC oldalának felezőpontja F , BC oldalának felezőpontja E . Tükrözzük az ABC háromszöget az E pontra. A középpontos tükrözés tulajdonságai alapján:

$FE = EF'$, és egy egyenesbe esik a három pont, ezért

$$1 \quad FE = \frac{1}{2} FF'.$$

Másképp $AF \parallel FC \parallel BF'$, továbbá $AF = FC = BF'$.

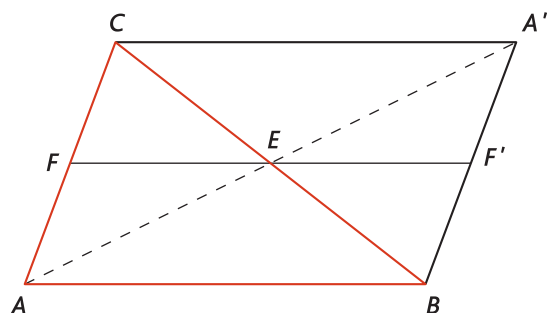
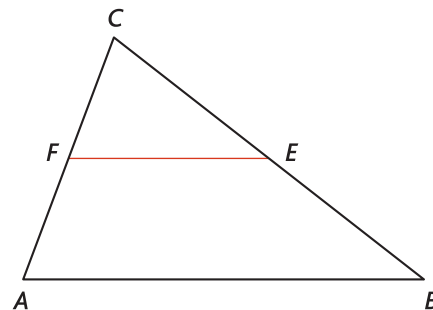
Ezért az $ABF'F$ négyszög paralelogramma, vagyis

$$2 \quad AB \parallel FF' \parallel FE, \text{ és } 3 \quad AB = FF'.$$

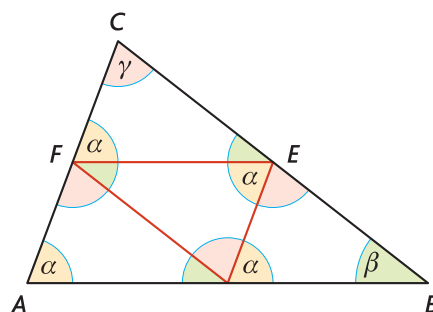
Az 1, 2 és a 3 összefüggést összehasonlítva kapjuk a következőt:

$$FE = \frac{1}{2} AB \text{ és } FE \parallel AB.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.



A tétel bizonyításából az is következik, hogy a háromszöget három középvonala négy olyan kis háromszögre bontja, amelyek megfelelő oldalai egyenlők. Ezért ezek a kis háromszögek egybevágók, és az ábrán egyformán jelölt szögek is megegyeznek.



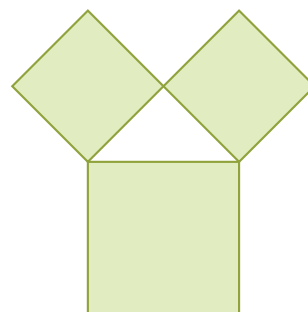
FELADATOK

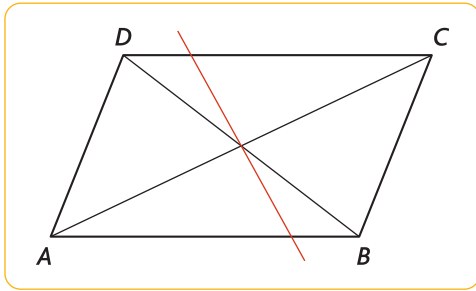
- B16** a) Bizonyítsd be, hogy a körbe írt szabályos nyolcszög területe akkora, mint annak a téglalapnak a területe, amelynek egyik oldala a kör átmérője, másik oldala a körbe írt négyzet oldala!
- b) Írj a körbe egy hegyesszögű háromszöget! Tükrözd a csúcsait a kör középpontjára! Így összesen hat pont lesz, amelyek együtt hatszöget alkotnak. Bizonyítsd be, hogy a hatszög területe kétszerese a háromszög területének!

Feladatgyűjtemény
4.2.12–24., 4.2.29.



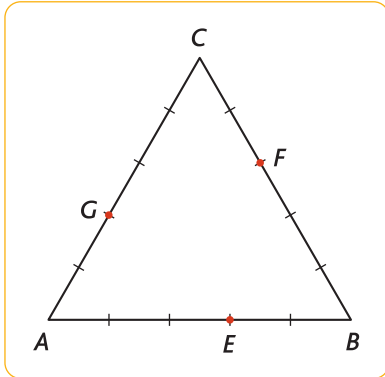
Pitagorasztételének felhasználása nélkül (csak egybevágó háromszögek területére hivatkozva) bizonyítsd be, hogy bármely egyenlő szárú derékszögű háromszög befogói fölé emelt négyzetek területösszege az átfogó fölé emelt négyzet területével egyenlő!





B17

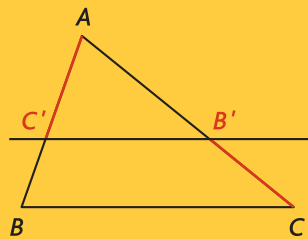
- a) A paralelogramma átlóinak metszéspontján át húzott egyenes a paralelogrammát két részre osztja. Egymáshoz viszonyítva mekkora a két rész területe? Válaszod indokold!



- b) Egy egyenlő oldalú háromszög minden oldalát öt egyenlő részre osztottuk. Igazold, hogy a megjelölt osztópontok egyenlő oldalú háromszög csúcsai! Mekkora a két egyenlő oldalú háromszög területének az aránya?

B18

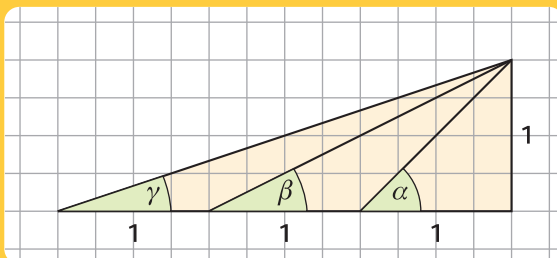
- a) Szabályos-e minden olyan hatszög, amelynek szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak?
b) Bizonyítsd be, hogy a szabályos hatszög csúcsainak megszerkesztésekor alkalmazott eljárás elvileg pontos!
c) Egy r sugarú k kör köré legfeljebb hány olyan r sugarú kör szerkeszthető, amelyek mindegyike érinti a k kört, de amelyek nem metszik egymást?



Rajzolj egy $ABC\triangle$ -et! Szerkessz a BC oldalával párhuzamos egyenest, amely az AC oldalt a B' pontban, az AB oldalt a C' pontban metszi úgy, hogy $AC' = CB'$ teljesüljön!



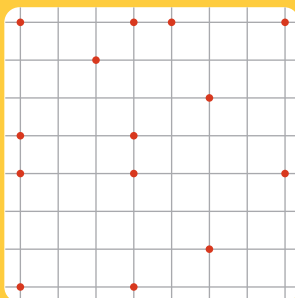
Rajzolj egy négyzetet! Két szemközti csúcsán át húzz két egymással párhuzamos egyenest. A másik két csúcson át is húzz két egyenest úgy, hogy merőlegesek legyenek az előző két egyenesre! Igazold, hogy a négy egyenes négyzetet határol!



Egy derékszögű háromszög hosszmeretei leolvashatók az ábráról.

Határozd meg az $\alpha + \beta + \gamma$ szögösszeget!

☉ Segíthet, ha négyzetrácsra próbálsz meg egymás mellé lerajzolni a szögeket!



Négyzetrácsra pontokat rajzoltunk. Négy-négy pont összekötésével határolj körül négyzeteket!

- a) Mekkora a legnagyobb körülhatárolható négyzet területe?
b) Mekkora a legkisebb körülhatárolható négyzet területe?
Egy kis rácsnégyzet területe a területegység.

> HASONLÓSÁG

A „hasznoló”, „hasznoló”, „hasznoló” szavakat a beszéd közben gyakran használjuk. Jellegzetes példa rá a következő latin közmondás: „similis simili gaudet” (olvasd „szimilis szimili gaudet”; hasonló a hasonlónak örül).

A geometriai értelemben vett **hasznoló** eltér-e a köznap értelemezéstől?

Például ez a két ellipszis „hasznoló egymáshoz” a köznap értelemben. Vajon a geometriában hasonlók-e?



Amikor egy alakzat olyan nagy (vagy olyan kicsi), hogy a szemlélők számára nem tekinthető át, akkor képet, modellt készítenek róla. Ha ez a kép vagy modell mérethű **kicsinyítés** vagy **nagyítás**, akkor megőrzi az eredeti alakzat jellegzetes geometriai tulajdonságait. Az alakzat és a kép, illetve a modell hasonló.

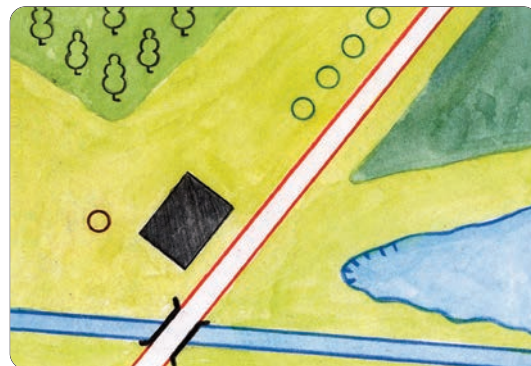
Például egy kisebb területről készült térkép hasonló a síknak tekinthető terephez. Ezen azt értjük, hogy valamely tereptárgy körvonala „ugyanolyan alakú”, mint a térképen.



Ha a terepen egy útvonal egyenes, akkor a térképen is az.

Ha a 100 m-es távolság a térképen 1 cm, akkor a 200 m-es, illetve 300 m-es távolság a térképen is kétszer, illetve háromszor akkora.

Ha a terepen egy út és egy patak 60°-os szögben találkozik, akkor az a térképen is 60°-ot zár be.

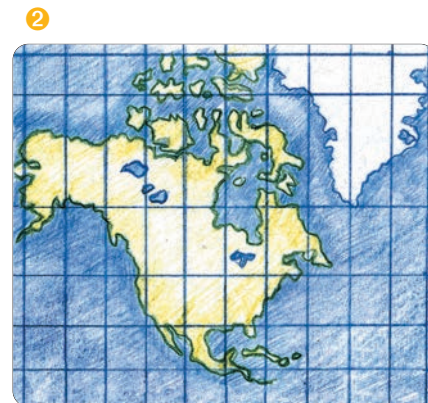
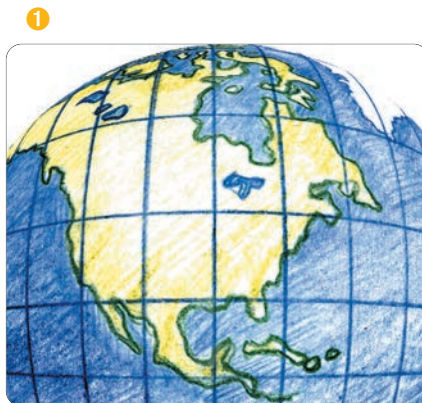


Mivel a gömbfelület egy darabját síkra képezzük le, a nagyobb területekről készült térkép geometriai értelemben nem hasonló a terephez.

Az ❶ mérethű, de nem szögtartó.

A ❷ nem mérethű, de szögtartó:

A gömbfelületre (földgömbre) rajzolt térkép már hasonló a terephez.

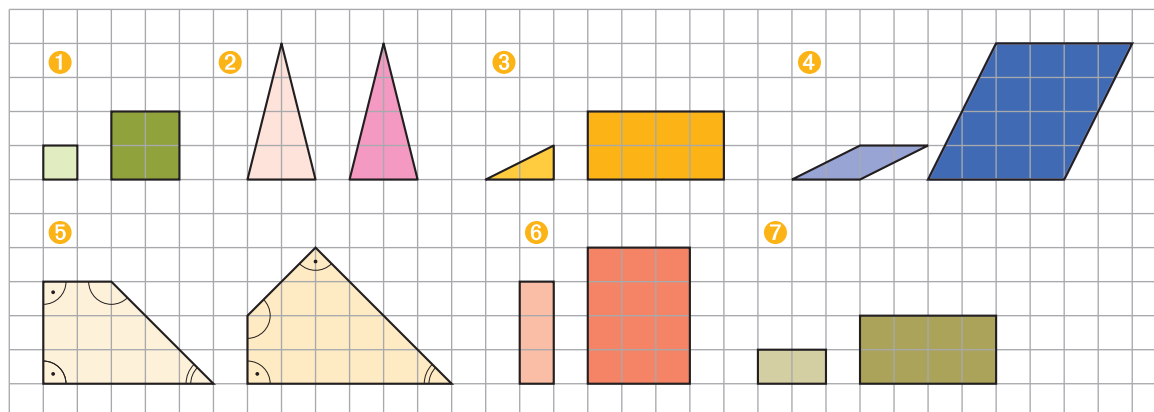


Amikor azt mondjuk, hogy az ikrek a „megszólalásig hasonlítanak egymásra”, akkor azon azt értjük, hogy nem tudjuk őket egymástól megkülönböztetni.

A geometriában ennek az **egybevágóság** felel meg. Mivel az egybevágó alakzatok „ugyanolyan alakúak”, **célszerű úgy értelmeznünk a hasonlóságot, hogy az egybevágó idomokat is hasonlóknak tekintjük.**

1. példa

A párba állított síkbeli alakzatok közül melyek hasonlók?



Megfigyeléseink

- ➊ A két négyzet „ugyanolyan alakú”, *hasonló*. A második négyzet kétszeres nagyságú az elsőnek. A második és az első négyzet oldalainak aránya, azaz a nagyság aránya $2 : 1$.
Azt is mondhatjuk, hogy az első négyzet $\frac{1}{2}$ -szeres kicsinyítése a másodiknak. A kicsinyítés aránya $1 : 2$.
- ➋ A két háromszög is hasonló egymáshoz, mert egybevágók. A megfelelő oldalak aránya $1 : 1$.
- ➌ A sokszögpár szögeinek és oldalainak száma nem egyezik meg, ezek nem hasonlóak egymáshoz.
- ➍ A két paralelogramma megfelelő oldalainak az aránya: $2 : 1$, szögeik nem egyenlők. Megállapodhatunk abban, hogy ha két sokszög megfelelő szögei nem egyenlők, akkor „nem ugyanolyan alakúak”. Ezért ez a két paralelogramma nem hasonló egymáshoz.
- ➎ A négyszögek szögei nem „rendre” egyeznek meg (nem ugyanabban a sorrendben követik egymást), a négyszögek nem hasonlóak egymáshoz.
- ➏ Ha két sokszög szögei rendre megegyeznek, akkor sem biztos, hogy hasonló. Úgy „látjuk”, hogy a nagyobb téglalap viszonylag szélesebb, mint a kisebb, ezért a két téglalap nem ugyanolyan alakú. A második és az első téglalap „szélességeinek” aránya $3 : 1$, „hosszúságainak” aránya $4 : 3$. A megfelelő oldalak aránya nem egyezik meg.
- ➐ A két téglalap megfelelő szögei rendre megegyeznek, és megfelelő oldalaik aránya egyenlő, $2 : 1$. A két téglalap hasonló egymáshoz.

Többet ésszel ...

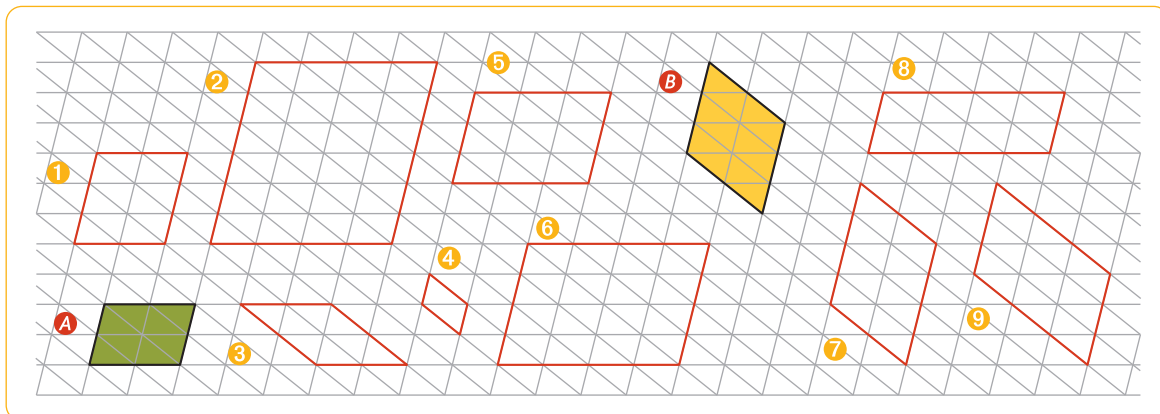


Piktor Péter 2 m x 5 m-es freskót szeretne készíteni. Megfestette a freskó tervét 40 cm x 100 cm-es méretben. Milyen módszerrel másolhatná fel legpontosabban a tervet a falra a megfelelő méretre kinagyítva?

© *Piktor Péter korában még nem találták fel a projektort, sőt még a diavetítőt sem.*

FELADATOK

- 17 a) Válaszd ki azokat a sokszögeket, amelyek az **A** sokszöghöz hasonló!
b) Válaszd ki azokat a sokszögeket, amelyek a **B** sokszöghöz hasonló!



- 18 a) Egy szimmetrikus trapéz egyik alapja 8 cm, másik három oldala 4-4 cm hosszú. Mekkora a trapéz szögei? Szerkeszd meg a trapézt! Számítsd ki a trapéz magasságát!
b) Mekkora az a) feladatban megszerkesztett trapézhoz hasonló, 50 cm kerületű trapéz oldalai és szögei?
c) Határozd meg a két trapéz megfelelő oldalainak arányát, magasságának arányát!

Gyakorló
8.51–8.52.

- 19 a) Szerkessz szabályos hatszögeket 4 cm-es és 2 cm-es oldalakkal! Határozd meg a megfelelő átlók arányát!
b) Szerkessz rombuszt, amelynek átlói: $e = 8$ cm, $f = 6$ cm hosszúak! Szerkessz olyan négyszöget, amely hasonló ehhez a rombuszhoz, és oldala 4 cm-es! Határozd meg a megfelelő oldalak, a megfelelő átlók, a magasságok és a területek arányát!
c) Egy téglalap két oldala 7,2 cm és 4,8 cm hosszú. Mekkora annak a hozzá hasonló téglalapnak az oldalai, amelyek területe 72 cm²?

☉ **Méréssel és számítással is határozd meg a kérdéses szakaszok hosszúságát!**



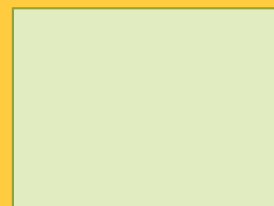
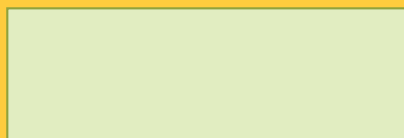
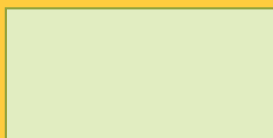
Ödömér egy beltenger szigetei és zátonyai között vitorlással lavírozgat. Az internetről letöltött egy térképet, amelynek méretaránya, 1 : 25 000 lenne, ha 28 cm x 28 cm-es méretben nyomtatná ki. Ödömér, hogy a térkép egy A4-es lapra ráférjen, „vízszintes” irányban „összenyomta” a képet (a „függőleges” méretet megtartva).

- a) Mekkora az így elkészített „térkép” méretaránya?
b) Milyen gondjai lehetnek Ödömérnek, ha ezt a „térképet” használja?

Többet ésszel ...

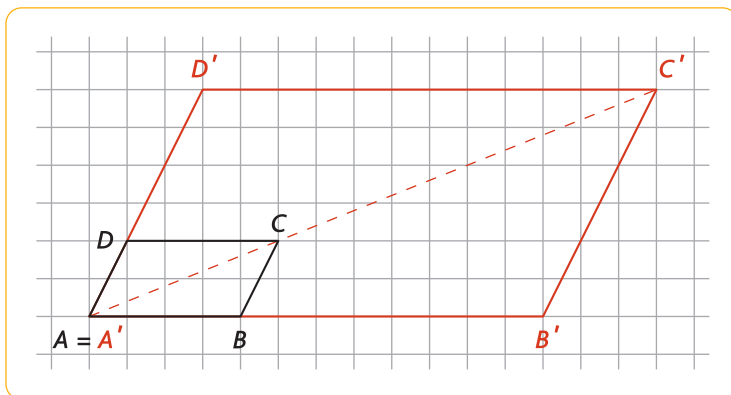


Az adott téglalapokból egy-egy egyenessel vágj le egy-egy hozzájuk hasonló téglalapot!



Megfigyelés

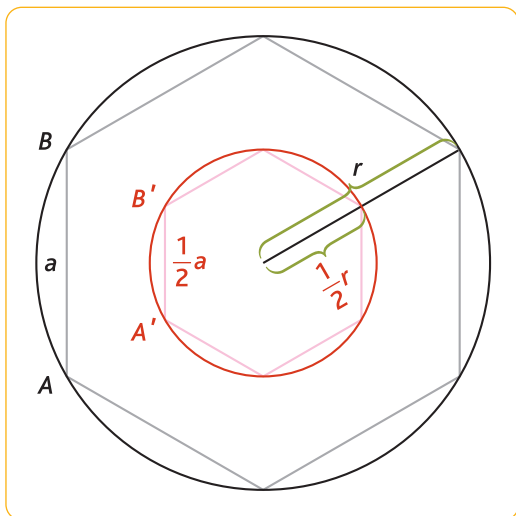
A feladatok megoldása során megfigyelhettük, hogy **ha két alakzat „ugyanolyan alakú”, akkor azok vagy egybevágók, vagy az egyik a másiknak kicsinyített, illetve nagyított képe.** Az ilyen értelemben „ugyanolyan alakú” alakzatokat nevezzük **hasonlóknak**.



Ha egy paralelogrammát háromszorosára **nagyítunk**, akkor a megfelelő oldalai, átlói, magasságai stb. háromszorosára nőnek. A nagyított kép és az eredeti paralelogramma megfelelő szakaszainak aránya állandó.

A **hasonlóság aránya** = $\frac{\text{A szakasz képeinek hossza}}{\text{Az eredeti szakasz hossza}}$

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{1} = 3$$



Ha egy kört $\frac{1}{2}$ -szeresére **kicsinyítünk**, akkor a sugara, átmérője, a beírható hatszög oldala stb. $\frac{1}{2}$ -szeresére változik. A kicsinyített kép és az eredeti alakzat megfelelő szakaszainak aránya állandó.

$$\text{A hasonlóság aránya: } k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$$

Ha a két alakzat egybevágó, akkor a megfelelő szakaszok egyenlők:
 $A'B' = AB$,

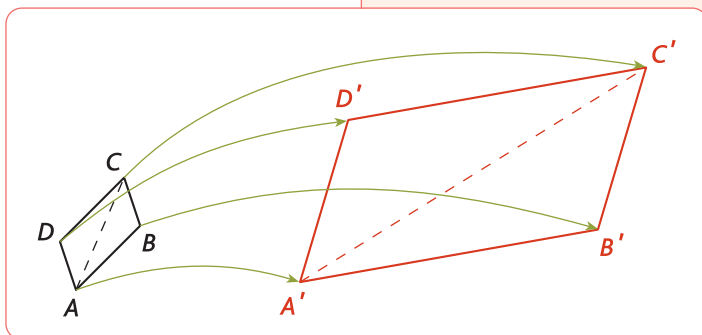
$$\text{A hasonlóság aránya: } k = \frac{A'B'}{AB} = 1$$

© A hasonlóság „aránytartó” transzformáció.

Értelmezések

Ha két alakzat bármely két megfelelő szakaszának aránya állandó, akkor a két alakzatot **hasonlóknak** nevezzük. A **k arányossági tényező** megmutatja, hogy valamely képszakasz a megfelelő eredeti szakasznak hányszorosa.

A hasonlóság jele: $\gg$



A geometriai transzformációt **hasonlóságnak** nevezzük, ha a szakasz képeinek és az eredeti szakasznak az aránya állandó, bárhogyan is választjuk meg a szakaszt.

Ha $k > 1$, akkor **nagyításról** van szó;

ha $k = 1$, akkor a két alakzat **egybevágó**;

ha $0 < k < 1$, akkor **kicsinyítésről** beszélünk.

Az aránytartásból következik, hogy a hasonlóság **szögtartó**.

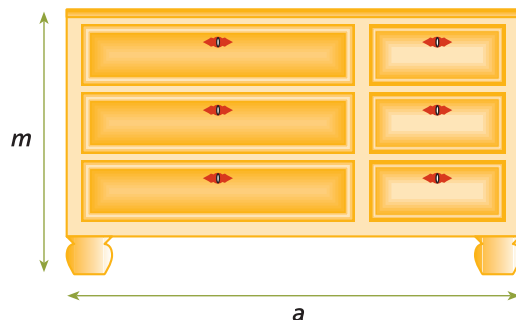
2. példa

Az ábrán egy tárgy előlnézeti képe látható:

a) Mekkora a valódi méretek, ha a tárgy egy komód, és a hasonlóság aránya:

$$k = 1 : 20?$$

b) Mekkora a hasonlóság aránya, ha a tárgy egy 4 cm széles játék bútor? Milyen szélesek a fiókok a valóságban?



a) $k = 1 : 20 = 0,05 < 1$. Az ábra a komód 0,05 részére *kicsinyített* előlnézete.

Ami az ábrán 1 cm, az a valóságban 20-szor akkora. Például:

Az előlázat szélessége: $a' = 6,0$ cm.

A komód szélessége: $a = 20 \cdot 6,0$ cm = 120 cm.

Az előlázeten: $m' = 3,5$ cm.

A komód magassága: $m = 20 \cdot 3,5$ cm = 70 cm.

A fiókok szélessége az előlázeten: 36 mm, illetve 18 mm.

A fiókok szélessége a valóságban: $20 \cdot 36$ mm = 720 mm;

$$20 \cdot 18$$
 mm = 360 mm

b) Az ábra a játék bútor 1,5-szeresére nagyított képe: $k = 6 : 4 = 3 : 2 = 1,5$

A fiókok szélessége az előlázeten: 36 mm, illetve 18 mm.

A fiókok szélessége a valóságban: 36 mm : 1,5 = 24 mm;

$$18$$
 mm : 1,5 = 12 mm

FELADATOK

20 A következő állítások közül melyik igaz?

A: Ha két alakzat egybevágó, akkor hasonló.

B: Ha két alakzat hasonló, akkor egybevágó.

C: Két alakzat pontosan akkor hasonló, ha egybevágó.

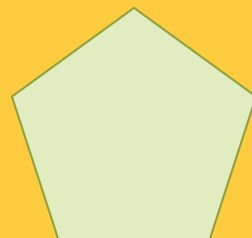
D: Ha két sokszög hasonló, akkor bármely két megfelelő oldalának aránya állandó.

E: Ha két sokszög bármely két megfelelő oldalának aránya állandó, akkor a két sokszög hasonló.



a) Rajzolj ötszöget, amely oldalainak hossza egyenlő a szabályos ötszög oldalai hosszával, mégsem hasonló a szabályos ötszöghöz!

b) Rajzolj ötszöget, amely szögeinek nagysága egyenlő a szabályos ötszög szögei nagyságával, mégsem hasonló a szabályos ötszöghöz!



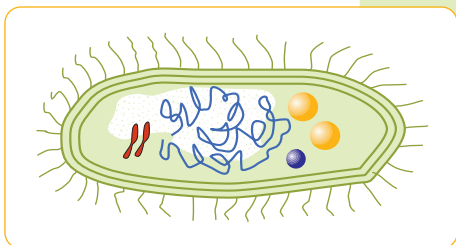
21 Hasonló-e egymáshoz egy 1 cm oldalhosszúságú négyzet és egy

- 1 2 cm-es oldalú négyzet; 2 2 cm-es oldalú rombusz, amely nem négyzet?

A 20. feladat állításai közül melyiket cáfolhatod meg a fenti példákkal?

☉ *Ami a térképen 1 cm, az a valóságban mekkora?*

Gyakorló
8.53–8.66.



22

Egy tervrajzon egy távolság 32 mm. Mekkora távolság ez a valóságban, ha a tervrajz méretaránya

- a) 4 : 1; b) 1 : 250; c) 100 : 1; d) 1 : 10 000; e) 1 : 1?

23

a) Mit jelent az, hogy egy térkép méretaránya 1 : 500 000?

Ami a térképen 2,4 cm, az a valóságban mekkora távolság?

b) Ha egy 1 : 500 000 méretarányú térképre nem férnek újabb tereppontok a zsúfoltság veszélye nélkül, akkor mit kell tennie a térképrajzolónak, hogy mégis feltüntethesse azokat?

c) Az ábrán látható baktérium rajzának méretaránya 12 000 : 1.

Mekkora a valóságban ez a baktérium?

d) A világhálón megtalálod lakóhelyetek műhold által készített képét.

Mit kell tenned, ha a terep részleteit tanulmányozni akarsz?

24

Szerkessz $ABCD$ téglalapot, ha oldalai hossza: $AB = 3$ cm; $AD = 4$ cm.

Szerkeszd meg az AB oldal F felezőpontját is!

a) Szerkessz az előző téglalaphoz hasonló téglalapot úgy, hogy

- 1 $A'B' = 4,5$ cm legyen; 2 $A'B' = 1,5$ cm legyen!

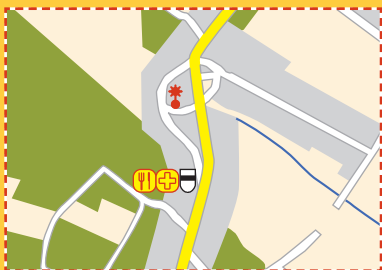
Melyik pont felel meg az $A'B'C'D'$ téglalap esetén az F pontnak?

b) Határozd meg a következő arányokat!

$A'B' : AB$; $A'D' : AD$; $A'C' : AC$; $C'F' : CF$;

c) Határozd meg a téglalapok területének arányát!

Többet észszel ...



Mindkét térkép egy falunak ugyanazt a részletét ábrázolja.

A nagyobb térkép méretaránya 1 : 20 000

Mekkora a kisebb térkép méretaránya?

A: 1 : 16 000; B: 1 : 17 500;

C: 1 : 22 500; D: 1 : 25 000

☉ A helyes válasz betűjével válaszolj!



A képen egy baktérium 20 000 : 1 arányban nagyított képe látható.

Vázold fel a baktérium 15 000 : 1 arányban nagyított képét!

A HASONLÓSÁG ALKALMAZÁSA

FELADATOK

B19 Az $ABC\triangle$ csúcspontjainak koordinátái: $A(2; 2)$, $B(8; 2)$, $C(6; 6)$

Az $ABC\triangle$ -höz hasonló $A'B'C'\triangle$ megfelelő csúcsai közül kettőnek ismertek a koordinátái: $A'(10; 2)$, $B'(13; 2)$

- Határozd meg a C' csúcspont koordinátáit! Hány ilyen pont van?
- Milyen helyzetű a BC és a $B'C'$ oldal egymáshoz viszonyítva?
- Határozd meg a hasonlóság arányát!

B20 Mely $A'B'C'D'$ téglalapok hasonlóak az $ABCD$ téglalaphoz, ha $AB = 4$ cm, $AD = 5$ cm, és

- $A'B' = 2$ cm, $A'D' = 2,5$ cm;
- $A'B' = 4$ cm, $A'D' = 5$ cm;
- $A'B' = 3$ cm, $A'D' = 6$ cm;
- $A'B' = 48$ mm, $A'D' = 60$ mm;
- $A'B' = 2,8$ cm, $A'D' = 3,5$ cm;
- $A'B' = 32$ mm, $A'D' = 45$ mm?

☉ *Összehasonlítottad a megfelelő oldalak arányát?*

B21 a) Egy derékszögű háromszög befogói 5 cm és 12 cm hosszúak. Mekkora az átfogója?

- Egy derékszögű háromszög rövidebb befogója 3,5 cm hosszú. Mekkora a másik két oldala, ha a háromszög hasonló az a) feladatban adott háromszöghöz?
- Sorold fel öt olyan derékszögű háromszög oldalait, amelyek hasonlóak az a) feladatban adott háromszöghöz!

☉ *Emlékszel a Pitagorasz-tételre?*

B22 a) Mekkora az 1 cm-es oldalú négyzet átlója?

b) Mekkora az átlója

az 5 cm-es; az 17 cm-es; a 0,5 cm-es; a 0,3 cm-es oldalú négyzetnek?

c) Mekkora az a oldalú négyzet átlója?

B23 A nyomda olyan téglalap alakú papírlapokra nyomtat, amelyeket ha a hosszabbik oldal felezőpontjánál félbehajtunk, akkor az eredetihez hasonló téglalapot kapunk. Az eljárást megismételve újabb, az eredetihez hasonló papírlapokhoz jutunk. Az A/4-es lap rövidebb oldala 21 cm hosszú.

- Mekkora az A/4-es lap hosszabb oldala?
- Mekkora az eredeti lap?
- Ha a papír 0,1 mm vastag, akkor milyen vastag köteget kapnánk 20 összehajtással? Mekkora lenne egy-egy lap mérete?

☉ *Az A/4 azt jelenti, hogy az eredeti lapot négyszer hajtották félbe.*

B24 Egyetlen vágással hogyan kaphatsz

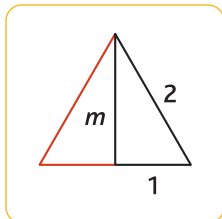
- egy háromszögből hozzá hasonló háromszöget;
- egy paralelogrammából hozzá hasonló paralelogrammát?

Rajzolj olyan paralelogrammát, amelyből egyetlen vágással nem hozható létre hozzá hasonló paralelogramma!

3. példa

Az ábrán egy tárgy előlnézeti képe látható:

- a) Mekkora a 2 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög magassága?
 b) Mekkora az 1 cm; a 3 cm; az $\frac{1}{3}$ cm; a 4,34 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög magassága?
 c) Mekkora az a oldalú szabályos háromszög magassága?



- a) Az m egy olyan derékszögű háromszög egyik befogója, amelynek az átfogója 2 cm hosszú, a másik befogója $\frac{2}{2}$ cm = 1 cm hosszú.

Pitagorasz tételét alkalmazva:

$$m^2 + 1^2 = 2^2$$

$$m^2 = 2^2 - 1^2$$

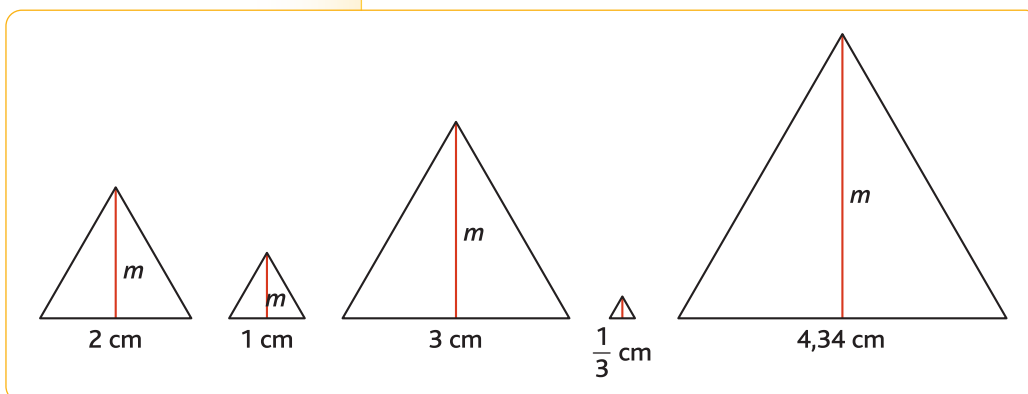
$$m^2 = 3$$

$$m = \sqrt{3}$$

Ebben az esetben csak a pozitív megoldásnak van jelentése ($m > 0$).

A 2 cm-es oldalú szabályos háromszög magassága: $m = \sqrt{3}$ cm $\approx 1,73$ cm

- b) A szabályos háromszögek hasonlóak.



A 2 cm-es oldalú szabályos háromszögből kiindulva, a hasonlóság arányát figyelembe véve bármely szabályos háromszög magasságát meghatározhatjuk:

◎ Megfigyelted?

A 3 cm oldalhosszúságú háromszög magassága 3-szorosa, a 4,34 cm oldalhosszúságú háromszög magassága 4,34-szorosa, az egységnyi oldalú szabályos háromszög magasságának.

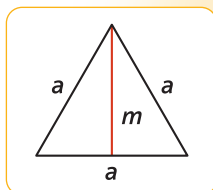
2 cm-es oldalú szabályos háromszög: $m = \sqrt{3}$ cm

1 cm-es oldalú szabályos háromszög: $m = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ cm

3 cm-es oldalú szabályos háromszög: $m = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm

$\frac{1}{3}$ cm-es oldalú szabályos háromszög: $m = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ cm

4,34 cm-es oldalú szabályos háromszög: $m = \frac{4,34}{2}\sqrt{3}$ cm ($= 2,17 \cdot \sqrt{3}$ cm)



- c) Az a oldalú szabályos háromszög oldalának hossza a -szorosa az egységnyi oldalú szabályos háromszög oldalának, ezért a magassága is a -szorosa:

$$m = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

4. példa

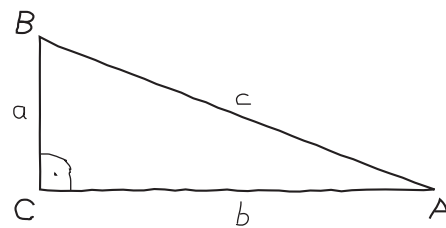
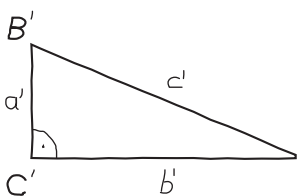
Derékszögű háromszög rövidebb befogója 15 mm, átfogója 39 mm hosszú. A hozzá hasonló háromszög átfogója 32 mm-rel hosszabb a rövidebb befogónál. Határozzuk meg a második háromszög területét.

1. megoldás

Vázlat

A későbbi számítások miatt célszerű eltérni a megszokott jelölésektől.

Eredeti háromszög:



Terv

Kiszámítjuk a második háromszög rövidebb befogóját és átfogóját a megfelelő oldalak arányának egyenlősége alapján.

$$\frac{a}{15} = \frac{c}{39}; \quad c = a + 32$$

A másik befogót Pitagorasz tételének segítségével határozzuk meg:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

A terület: $K = a + b + c$

Az egyenlet felírása és megoldása

$$\frac{a}{15} = \frac{a+32}{39} \quad / \cdot 195$$

A két nevező legkisebb közös többszöröse: 195. Mindkét oldalt szorozzuk 195-tel.

$$13a = 5(a + 32)$$

$$13a = 5a + 160 \quad / -5a$$

Az azonos átalakítás után ismételten alkalmazzuk a mérlegelvet.

$$8a = 160 \quad / : 8$$

$$a = 20$$

A rövidebb befogó: $a = 20$ mm, az átfogó: $c = 52$ mm

Ellenőrzés:

A befogók aránya: $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$; az átfogók aránya: $\frac{52}{39} = \frac{4}{3}$.

A két arány valóban megegyezik.

A háromszög hosszabb befogóját az átfogó és a rövidebb befogó ismeretében a Pitagorasz-tétel alkalmazásával számíthatjuk ki.

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 52^2 - 20^2$$

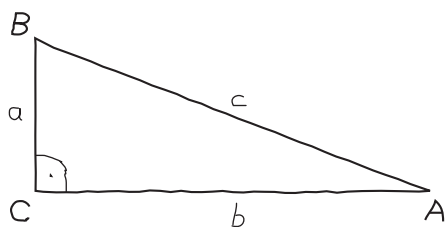
$$b^2 = 2704 - 400$$

$$b^2 = 2304$$

$b = 48$ mm (Csak a pozitív megoldásnak van értelme.)

A terület: $K = a + b + c = 20 \text{ mm} + 48 \text{ mm} + 52 \text{ mm} = 120 \text{ mm}$

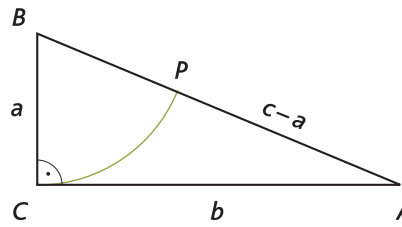
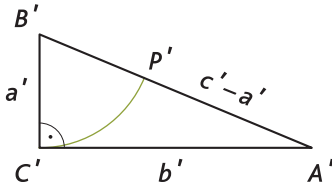
A második háromszög területe 120 mm.



»»

»»

2. megoldás



Hasonló alakzatok bármely két megfelelő szakaszának aránya állandó.

Az első háromszögben:

$$c' - a' = 24 \text{ mm}$$

A második háromszögben:

$$c - a = 32 \text{ mm}$$

Ezek a hosszúsági adatok megfelelnek egymásnak, ezért a hasonlóság aránya:

$$\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

Ha ezt felismertük, akkor felírhatjuk a megfelelő befogók arányát:

$$\frac{a}{15} = \frac{4}{3}$$

$$a = 20$$

A további számítások megegyeznek az 1. megoldásban látottakkal.

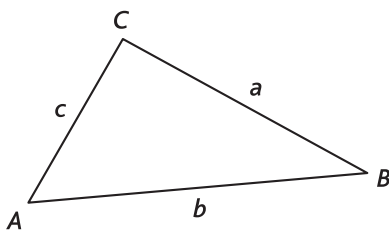
➤ HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGA

FELADATOK

B25 Szerkessz háromszöget, amelynek oldalai: 4 cm; 6 cm; 8 cm hosszúak!

A 8 cm-es oldalt oszd föl 4 egyenlő részre, és az osztópontokon át húzz a másik két oldallal párhuzamos egyeneseket!

Mekkora szakaszokra bontják ezek a párhuzamosok a másik két oldalt?



B26 Szerkeszd meg azt az $A'B'C'$ -et, amelynek szögei rendre megegyeznek az ábrán adott ABC szögeivel, és $c' = 2c$!

Hasonlítsd össze az a és a' , valamint a b és b' oldalt!

☉ Mit tapasztalsz?

Fejtörő!



Egy ABC oldalainak hossza 2 cm; 4 cm; 5 cm. Szerkessz hozzá olyan hasonló háromszöget,

a) amelynek van 6 cm hosszú oldala;

b) amelynek 4-szer akkora a területe, mint az ABC -nek.

☉ Hány megoldás van?

B27

Hasonlítsd össze az $ABCD$ paralelogramma és a $b)$, $c)$, $d)$ feladatokban megrajzolt paralelogrammák átlóit, magasságait, szögeit!

- Szerkessz $ABCD$ paralelogrammát, amelynek oldalai 8 cm és 4 cm hosszúak, a közbezárt szög $\alpha = 60^\circ$ -os! Mekkora a paralelogramma többi szöge?
- Rajzolj az $ABCD$ paralelogrammához hasonló paralelogrammát, ha a hasonlóság aránya 3:4!
- Rajzolj paralelogrammát úgy, hogy a megrajzolt paralelogramma és az $ABCD$ paralelogramma megfelelő oldalainak aránya 3:4 legyen, de a két paralelogramma ne legyen hasonló egymáshoz!
- Rajzolj paralelogrammát úgy, hogy a megrajzolt paralelogramma és az $ABCD$ paralelogramma megfelelő szögei megegyezzenek, de a két paralelogramma ne legyen hasonló egymáshoz!

☉ A 3:4 arány nagyítást vagy kicsinyítést jelent?

☉ A $c)$, illetve a $d)$ feladatban megrajzolt paralelogramma miben különbözik az $ABCD$ paralelogrammától?

B28

a) Szerkessz $ABC\Delta$ -et, amely oldalainak hossza 8 cm és 4 cm, a közbezárt szög $\gamma = 60^\circ$ -os! Mekkora a háromszög többi szöge? Mekkora a háromszög harmadik oldala?

☉ Mindegyik feladatban fogalmazd meg a tapasztaltakat!

- Szerkessz derékszögű háromszöget, amelynek a rövidebb befogója 6 cm hosszú, és az egyik hegyesszöge 60° ! Mekkora a háromszög harmadik szöge, illetve a másik két oldala?

Hasonlítsd össze ennek a háromszögnek a szögeit az $a)$ feladatban szerkesztett háromszög szögeivel! Számítsd ki a megfelelő oldalak arányát!

- Rajzolj az $ABC\Delta$ -höz hasonló háromszöget, ha a hasonlóság aránya 3:4! Hasonlítsd össze a háromszögek megfelelő oldalainak hosszúságát, magasságait, szögeinek nagyságait!
- Rajzolj háromszöget úgy, hogy a megrajzolt háromszög és az $ABC\Delta$ megfelelő oldalainak aránya 3:4 legyen, de a két háromszög ne legyen hasonló egymáshoz!
- Rajzolj háromszöget úgy, hogy a megrajzolt háromszög és az $ABC\Delta$ megfelelő szögei megegyezzenek, de a két háromszög ne legyen hasonló egymáshoz!



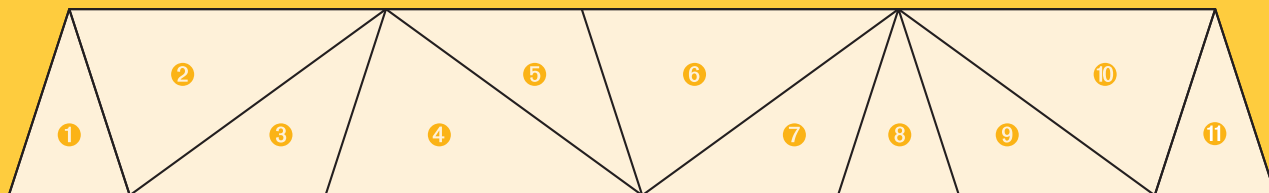
Rajzolj két olyan négyzetet, amelyekre igaz, hogy az egyik négyzet területe 2-szerese a másik négyzet területének!

Többet ésszel ...



Az ábrán látható egyenlő szárú háromszögek közül mindegyiknek van 36° -os szöge. Határozd meg a háromszögek szögeinek nagyságát, és állapítsd meg,

- melyek hasonlók egymáshoz;
- melyek egybevágók egymással!



1. példa

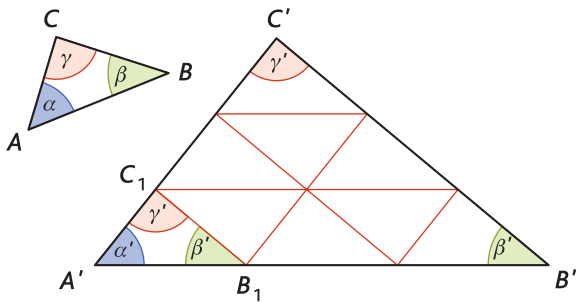
Bizonyítsuk be, hogy ha két háromszög hasonló, és a hasonlóság aránya

- a) $k = 1$; b) $k = 3 : 1$; c) $k = 1 : 3$; d) $k = 5 : 3$,

akkor a háromszögek megfelelő szögei egyenlők.

- a) A két háromszög egybevágó, tehát a megfelelő szögek egyenlők.

- b) Rajzoljunk egy $ABC\triangle$ -et és egy hozzá hasonló $A'B'C'\triangle$ -et. Az $A'B'C'\triangle$ egy-egy oldala 3-szorosa az eredeti háromszög megfelelő oldalának.



Az $A'B'C'\triangle$ oldalait osszuk 3-3 egyenlő részre, és az osztópontokat összekötve rajzoljuk meg a háromszögrácsot. A háromszögrács bármely két kis háromszöge egybevágó.

Egy ilyen kis háromszög (például az $A'B_1C_1\triangle$) minden oldala ugyanakkora, mint az $ABC\triangle$ -é.

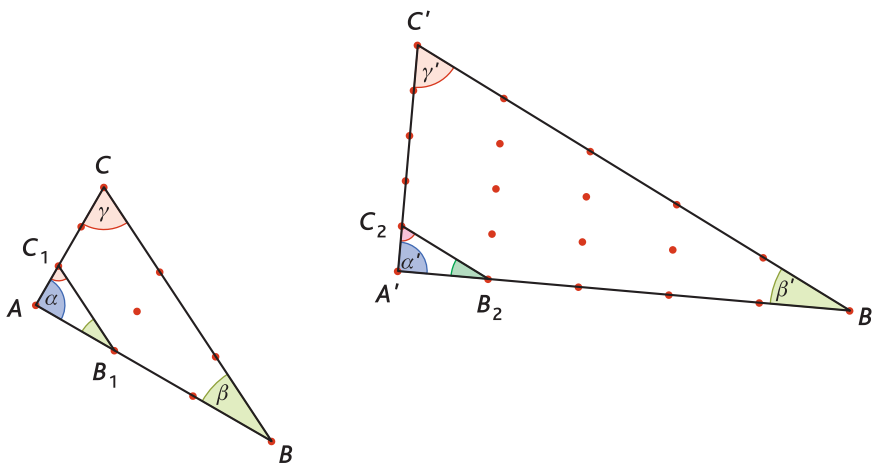
Ezért a háromszögrács kis háromszögei egybevágók az $ABC\triangle$ -gel, a megfelelő szögek egyenlők:

$$\alpha = \alpha'; \quad \beta = \beta'; \quad \gamma = \gamma'$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

- c) Az előző gondolatmenet és ábra alapján, (a hasonlóság „irányát” megfordítva) kicsinyítéssel igazolható az állítás.

- d) Rajzoljunk egy $ABC\triangle$ -et és egy hozzá hasonló $A'B'C'\triangle$ -et. Az $A'B'C'\triangle$ egy-egy oldala $\frac{5}{3}$ -szorosa az eredeti háromszög megfelelő oldalának.



Azt kell bizonyítanunk, hogy az $ABC\triangle$ α ; β ; γ szöge rendre egyenlő az $A'B'C'\triangle$ megfelelő α' ; β' ; γ' szögével.

A hasonlóság aránya $\frac{5}{3}$. Ezért ha az $ABC\triangle$ oldalait 3-3 egyenlő részre, az $A'B'C'\triangle$ oldalait 5-5 egyenlő részre osztjuk, akkor a két háromszög megfelelő oldalain a szomszédos osztópontok távolsága egyenlő.

Az $ABC\triangle$ -ben az A ponthoz legközelebbi osztópontokat összekötve kapjuk az $AB_1C_1\triangle$ -et, hasonlóan az $A'B'C'\triangle$ -ben az $A'B_2C_2\triangle$ -et. A két kis háromszög megfelelő oldalai egyenlők.

»»

① $AB_1C_1\Delta \cong A'B_2C_2\Delta$, a két háromszögben az egyformán jelölt szögek egyenlők.

② A b) példa megoldásának gondolatmenete alapján:

$AB_1C_1\Delta \sim ABC\Delta \left(k = \frac{1}{3}\right)$, mert a két háromszögben az egyformán jelölt szögek egyenlők.

③ $A'B_2C_2\Delta \sim A'B'C'\Delta \left(k = \frac{1}{5}\right)$, a két háromszög egyformán jelölt szögei itt is egyenlők.

Az ①, ② és ③ megállapításból következik, hogy az $ABC\Delta$ és az $A'B'C'\Delta$ egyformán jelölt szögei is egyenlők.

Ezt kellett bizonyítanunk.

A példában megfogalmazott állítás helyességét hasonlóan igazolhatjuk, ha a hasonlóság aránya tetszőleges racionális szám. Ha a hasonlóság aránya irracionális szám, akkor az állítás helyességének bizonyítása racionális arányok közé szorítással történhet.

Az előzők alapján igazak a következő állítások:

A: Ha két háromszög hasonló, akkor megfelelő oldalaik aránya egyenlő.

B: Ha két háromszög hasonló, akkor két-két oldaluk aránya megegyezik, és a két-két oldal által közbezárt szögük egyenlő.

C: Ha két háromszög hasonló, akkor két-két oldaluk aránya megegyezik, és a két-két oldal közül a nagyobbikkal szemközti szögük egyenlő.

D: Ha két háromszög hasonló, akkor a megfelelő szögeik egyenlők.

Mivel bármely sokszög felbontható átlók segítségével háromszögekre, ezért igazak a következő állítások is:

E: Ha két sokszög hasonló, akkor a megfelelő oldalaik aránya egyenlő.

F: Ha két sokszög hasonló, akkor a megfelelő szögeik rendre egyenlők.



E: Ha két sokszög hasonló, akkor a két sokszög megfelelő oldalainak aránya egyenlő.

Ödömér szerint az **E** állításból következik, hogy ez a két sokszög hasonló. Ugyanis:

E': Ha két sokszög megfelelő oldalainak aránya egyenlő, akkor a két sokszög hasonló.

F: Ha két sokszög hasonló, akkor a két sokszög megfelelő szögei rendre egyenlők.

Ödömér szerint az **F** állításból következik, hogy a második ábrán látható két sokszög is hasonló. Hiszen:

F': Ha két sokszög megfelelő szögei rendre egyenlők, akkor a két sokszög hasonló.

Helyesen gondolkodott-e Ödömér? Mit bizonyítanak ezek a „példák”?

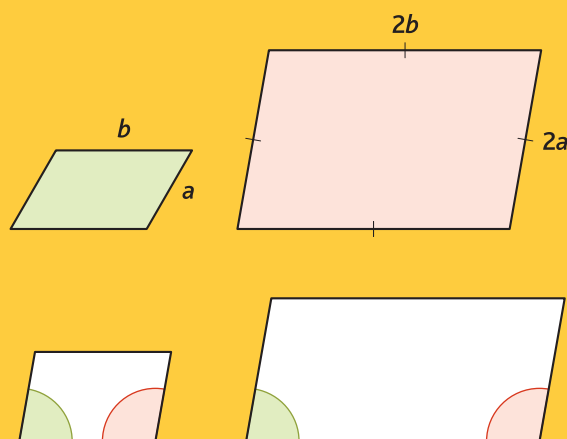


A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

P: Igaz állítás megfordítása mindig igaz állítás.

Q: Igaz állítás megfordítása mindig hamis állítás.

R: Igaz állítás megfordítása lehet igaz állítás, de lehet hamis is.



© Mit jelent az „állítás megfordítása”?

2. példa

Bizonyítsuk be, hogy az **A** állítás **megfordítása** igaz, ha a hasonlóság aránya:

$$k = 3 : 2.$$

A: Ha két háromszög hasonló, akkor megfelelő oldalaik aránya egyenlő.

A: Ha két háromszög hasonló, akkor megfelelő oldalaik aránya egyenlő.

Az **A** állítás **megfordítása**:

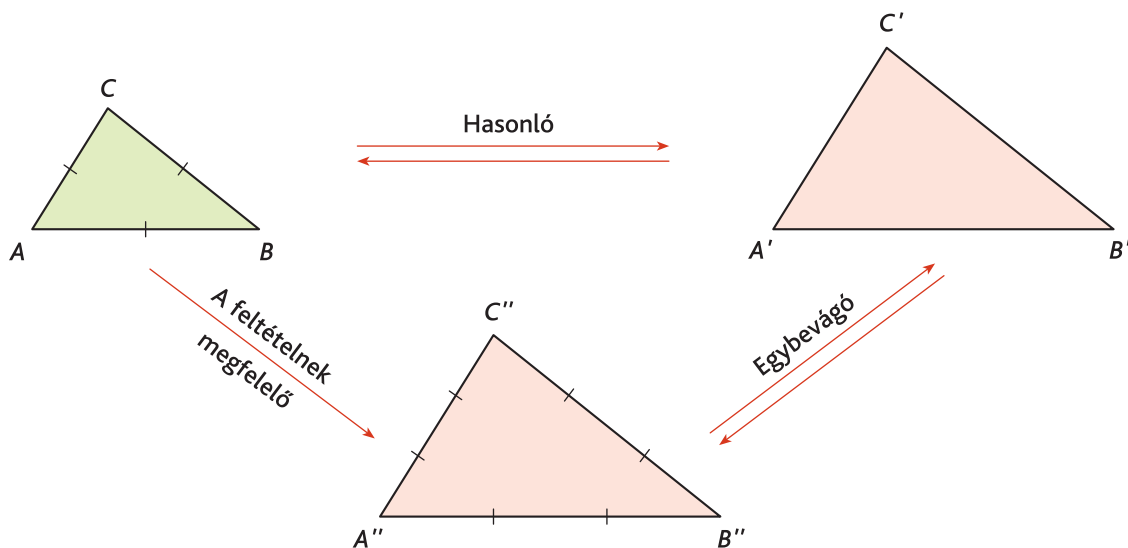
A': Ha megfelelő oldalaik aránya egyenlő, akkor a két háromszög hasonló.

Bizonyítás:

Rajzoljunk (tetszőleges) $ABC\triangle$ -et, és egy hozzá hasonló $A'B'C'\triangle$ -et, a hasonlóság aránya legyen $3 : 2$.

$$\textcircled{1} ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$$

Az **A** alapján az $A'B'C'\triangle$ megfelelő oldalai $\frac{3}{2}$ -szeresei az $ABC\triangle$ oldalainak.



☉ *Most is igaz, hogy ez a gondolatmenet akkor is alkalmazható, ha az arány tetszőleges pozitív racionális szám. (Ha a hasonlóság aránya irracionális szám, akkor az állítás helyessége racionális arányok „közé szorítással” igazolható.)*

Rajzoljunk egy $A''B''C''\triangle$ -et a feltételnek megfelelően úgy, hogy a háromszög oldalai rendre $\frac{3}{2}$ -szeresei az $ABC\triangle$ oldalainak.

A megfelelő oldalak egyenlősége miatt:

$$\textcircled{2} A'B'C'\triangle \cong A''B''C''\triangle$$

Az $\textcircled{1}$ hasonlóságból és $\textcircled{2}$ egybevágóságból következik:

$$A''B''C''\triangle \sim ABC\triangle$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

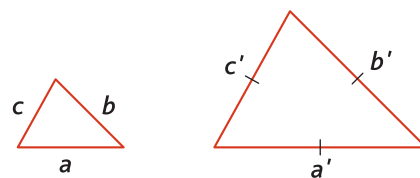
Hasonlóan igazolhatók az előző oldalon megfogalmazott B, C és D állítások is. Így, az előző gondolatmenethez hasonlóan általánosan is bizonyíthatók a háromszögek hasonlóságára vonatkozó következő tételek.

A HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGÁNAK ALAPESETEI

Tétel

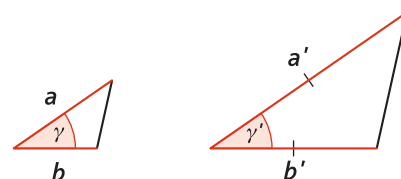
- ① Ha két háromszög megfelelő oldalainak aránya megegyezik, akkor a két háromszög hasonló.

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$



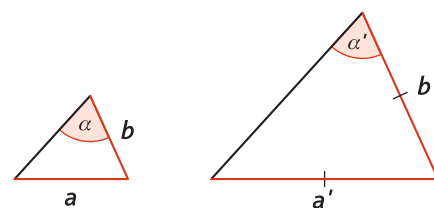
- ② Ha két háromszögben két-két oldal aránya és e két oldal által közbezárt szög egyenlő, akkor a két háromszög hasonló.

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}; \quad \gamma = \gamma'$$



- ③ Ha két háromszögben két-két oldal aránya és e két oldal közül a nagyobbikkal szemközti szög egyenlő, akkor a két háromszög hasonló. ($a > b$ és $a' > b'$)

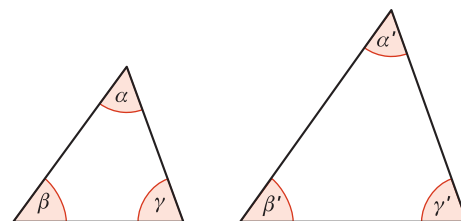
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}; \quad \alpha = \alpha'$$



- ④ Ha két háromszög megfelelő szögei egyenlők, akkor a két háromszög hasonló.

$$\alpha = \alpha'; \quad \beta = \beta'$$

Mivel a háromszög szögeinek összege 180° , elég kikötni, hogy két szögükben megegyeznek. Ekkor a harmadikban is megegyeznek.



Hasonlítsuk össze két háromszög egybevágóságának alapeseteit (191. oldal) a hasonlóság alapeseteivel.

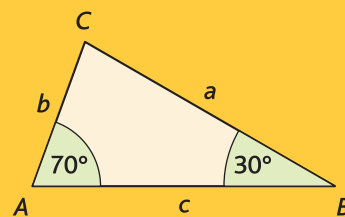
Az egybevágóság esetén a két háromszög alakja és nagysága is megegyezik. Ezt három egyenlőség biztosítja.

A hasonlóság esetén a két háromszög alakja egyezik meg, ennek biztosítására már két egyenlőség elegendő.



Szerkeszd meg az $ABC\triangle$ -et, ha a c oldala 5 cm hosszú! (A 70° -os szöget az ábrán adott szög másolásával szerkesztheted.) Az $ABC\triangle$ egyik oldalához illesz olyan háromszöget, amely az eredetivel együtt az eredeti háromszöghöz hasonló háromszöget alkot!

☉ *Hány megoldást találtál?*



FELADATOK

B29 Bizonyítsd be a háromszögek hasonlóságának alapeseteiben megfogalmazott ➋, ➌ és ➍ állítást! (A hasonlóság arányát tetszőlegesen megválaszthatjuk.)

- B30** a) Szerkessz $ABC\Delta$ -et, amelynek oldalai $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 4$ cm hosszúak!
b) Szerkessz az $ABC\Delta$ -höz hasonló $A'B'C'\Delta$ -et, ha a hasonlóság aránya $\frac{5}{4}$!
c) Szerkessz az $ABC\Delta$ -höz hasonló $A'B'C'\Delta$ -et, ha a c oldalnak megfelelő oldalának hossza $c' = 6$ cm!
d) Mekkora az $A'B'C'\Delta$ oldalai, ha $ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$, és az $A'B'C'\Delta$ kerülete 24 cm?

- B31** a) Szerkessz $ABC\Delta$ -et, amely oldalainak hossza 3 cm és 3,5 cm, a közbezárt szög $\gamma = 60^\circ$ -os! Szerkeszd meg a háromszögnek a 3,5 cm-es oldalához tartozó magasságvonalát! Határozd meg a háromszög területét!
b) Szerkessz az $ABC\Delta$ -höz hasonló $A'B'C'\Delta$ -et, ha a hasonlóság aránya $2 : 1$! Számítsd ki az $A'B'C'\Delta$ és az $ABC\Delta$ területének arányát!
c) Szerkessz háromszöget, amelynek két oldala 5 cm és 6 cm hosszú, a közbezárt szög 60° -os, és a háromszög hasonló az $ABC\Delta$ -höz!
d) Szerkessz háromszöget, amelynek két oldala 6 cm és 7 cm hosszú, a közbezárt szög 60° -os, de a háromszög nem hasonló az $ABC\Delta$ -höz!

- B32** a) Szerkessz $ABC\Delta$ -et, ha $a = 6$ cm, $b = 5$ cm hosszú, $\alpha = 45^\circ$ -os!
b) Szerkessz az $ABC\Delta$ -höz hasonló háromszöget, ha a b' oldal hossza 80%-a a b oldal hosszának!

- B33** a) Szerkessz $ABC\Delta$ -et, ha $a = 7,5$ cm-es, $\beta = 45^\circ$ -os, $\gamma = 60^\circ$ -os!
b) Szerkessz az $ABC\Delta$ -höz hasonló $A'B'C'\Delta$ -et, ha a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$!
c) Szerkessz az $ABC\Delta$ -höz hasonló háromszöget, ha $\beta' = 45^\circ$ -os; $\gamma' = 60^\circ$ -os! Hány ilyen háromszög van?

☉ *Magyarázd meg a tapasztaltakat!*

Gyakorló
8.67–8.72.

Figyelempróba



Az $ABC\Delta$ két oldalának hossza $a = 12$ cm; $b = 6$ cm; és az általuk közbezárt szög nagysága $\gamma = 60^\circ$. Szerkessz $A'B'C'\Delta$ -et, amely hasonló az $ABC\Delta$ -höz, és a hasonlóság aránya $2 : 3$! Melyik helyes a következők közül?

A: A háromszög két oldalát és a közbezárt szöget másfélszeresére nagyítjuk: $a' = 18$ cm; $b' = 9$ cm hosszú; $\gamma' = 90^\circ$ -os.

B: A háromszög két oldalát és a közbezárt szöget kétharmadára kicsinyítjük: $a' = 8$ cm; $b' = 4$ cm hosszú; $\gamma' = 40^\circ$ -os.

C: A háromszög két oldalát másfélszeresére nagyítjuk: $a' = 18$ cm; $b' = 9$ cm hosszú; a szög változatlan, $\gamma' = 60^\circ$ -os.

D: A háromszög két oldalát kétharmadára kicsinyítjük: $a' = 8$ cm; $b' = 4$ cm hosszú; a szög változatlan, $\gamma' = 60^\circ$ -os.

3. példa

Egy vitorlázó repülőgép három város érintésével háromszögrepülést végez. E három város térképen mért távolsága rendre: 4,0 cm, 5,6 cm, 7,2 cm. Mekkora utat tett meg a repülőgép, ha a térkép méretaránya 1 : 1 250 000?



A három város a térképen és a valóságban is egy-egy háromszög csúcsainak tekinthető. A két háromszög hasonló egymáshoz, mert a megfelelő oldalak aránya állandó: 1 : 1 250 000. (A tényleges távolságok 1 250 000-szeresei a térképen mérteknek.) A térképen megrajzolt háromszög kerülete:

$$K = 4,0 \text{ cm} + 5,6 \text{ cm} + 7,2 \text{ cm} = 16,8 \text{ cm}$$

A valóságban megtett út: $s = 1\,250\,000 \cdot 16,8 \text{ cm} = 21\,000\,000 \text{ cm} = 210 \text{ km}$

4. példa

Adott AB szakaszt osszunk föl

- a) öt egyenlő részre; b) 2 : 3 arányban.

- a) Euklideszi szerkesztés esetén csak a körzőt és a vonalzót egy élet használhatjuk, a vonalzót beosztását nem vehetjük figyelembe.

- 1 Vegyük föl az AB szakaszt.

Az A pontból húzzunk egy félegyenest, amely nem párhuzamos az AB szakasszal.

A félegyenestre az A pontból mérjük föl egy tetszőleges hosszúságú szakaszt ötször egymás után, így kapjuk a $P_1, P_2, \dots, P_5$ pontot.

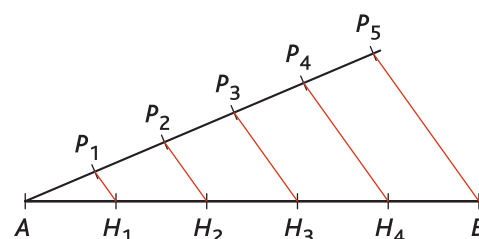
- 2 Húzzuk meg a BP_5 egyenest, és ezzel az egyenessel párhuzamosan húzzunk egyeneseket a $P_1, P_2, \dots, P_5$ pontokon át.

- 3 A párhuzamos egyenesek által kimetszett $H_1, H_2, \dots$ pontok öt egyenlő részre osztják az AB szakaszt, mert:

$$AH_1P_1 \sim AH_2P_2 \sim AH_3P_3 \sim AH_4P_4 \sim ABP_5$$

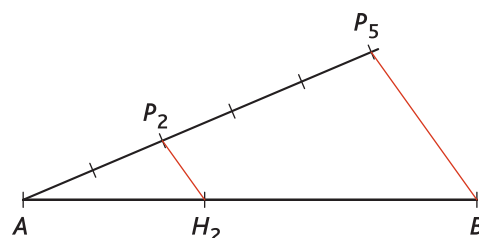
A háromszögek megfelelő szögei egyállásúak, és a megfelelő oldalak aránya

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5$$

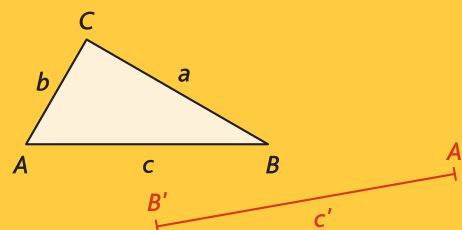


- b) Vegyük föl az AB szakaszt. Az a) példa megoldása annyiban módosul, hogy a BP_5 egyenessel csak a P_2 ponton át húzzunk párhuzamost.

A párhuzamos egyenes által kimetszett H_2 pont 2 : 3 arányban osztja az AB szakaszt.



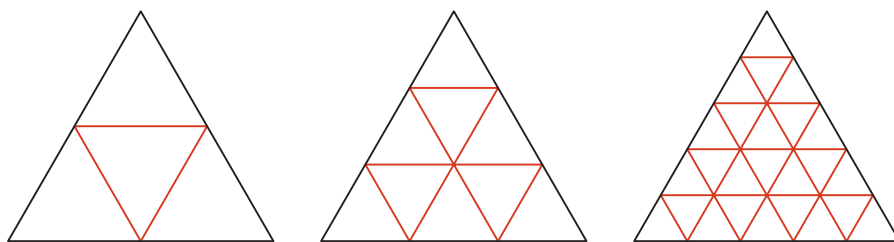
Rajzolj egy $ABC\triangle$ -et és egy $A'B'$ szakaszt az ábrához hasonló elrendezésben! Szerkeszd meg a C' pontot úgy, hogy az $A'B'C'\triangle$ hasonló legyen az $ABC\triangle$ -höz, és az A csúcsnak az A' pont feleljen meg ebben a hasonlóságban!



FELADATOK

B34

Számold meg, hogy a nagy háromszöghöz hány hasonló háromszög található az egyes ábrákon!



☉ Mekkora a hasonlóság aránya?

B35

Egy $ABC\Delta$ oldalainak hossza $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm.

Mekkorák az oldalai az $A'B'C'\Delta$ -nek, ha $ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$, és

a) legrövidebb oldala 9 cm; b) leghosszabb oldala 9 cm; c) egyik oldala 9 cm?

B36

a) Egy $ABC\Delta$ kerülete 20 cm, legrövidebb oldalának hossza 4 cm.

Mekkora a kerülete annak az $A'B'C'\Delta$ -nek, amelynek legrövidebb oldala 10 cm-es, ha $ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$?

b) Egy háromszög oldalai: 4 cm, 7 cm, 8 cm hosszúak. A hozzá hasonló háromszög egyik oldala 56 cm. Mekkora lehet ennek a háromszögnek a kerülete?

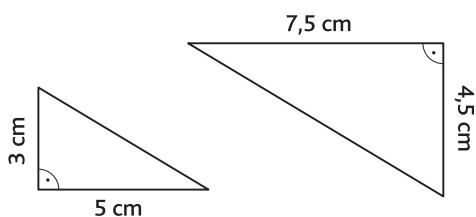
☉ Meg tudod indokolni a válaszod?

B37

a) Hasonló-e egymáshoz két derékszögű háromszög, ha mindkettőnek az egyik hegyesszöge 25° -os?

b) Hasonló-e egymáshoz az ábrán látható két derékszögű háromszög?

c) Egy derékszögű háromszög egyik szöge 70° -os. Egy másik derékszögű háromszög egyik szöge 20° -os. Hasonló-e egymáshoz a két derékszögű háromszög?



B38

a) Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, amelynek alapja 7 cm-es, szárszöge 120° -os!

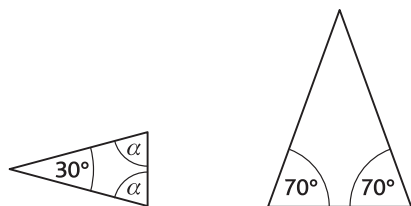
Szerkessz hozzá hasonló háromszöget, amelynek alapja 3,5 cm-es!

b) Hasonló-e egymáshoz az ábrán látható két egyenlő szárú háromszög?

c) Egy háromszögben a szögek aránya $3:4:5$.

Egy másik háromszög szögeinek nagysága: 45° ; 60° ; 75° .

Hasonló-e egymáshoz a két háromszög?



B39

Létezik-e olyan háromszög, amelyből egyetlen – egyik oldalával sem párhuzamos – vágással hozzá hasonló háromszöget hozhatunk létre?

B40 a) Szerkeszd meg egy 8 cm-es szakasz $\frac{1}{3}$ részét!

b) Ossz föl egy 7 cm-es szakaszt 6 egyenlő részre!

c) Ossz föl egy 9 cm-es szakaszt 3 : 4 arányban!

d) Egy háromszög kerülete 16,2 cm, oldalainak aránya 4 : 3 : 2.

Szerkeszd meg a háromszöget!

e) Végezd föl tetszőlegesen egy a és egy b szakaszt!

Ossz föl egy 10 cm-es szakaszt $a : b$ arányban!

B41 a) Egy háromszög oldalainak hossza: 6 cm, 8 cm, 12 cm. Egy hozzá hasonló háromszög egyik oldala 9 cm-es, a másik két oldalának centiméterrel kifejezett mérőszáma pozitív egész szám. Mekkora lehetnek ennek a háromszögnek az oldalai?

b) Egy háromszög oldalainak hossza: 7 cm, 8 cm, 12 cm. Egy hozzá hasonló háromszög egyik oldala 4 cm hosszú. Mekkora lehetnek ennek a háromszögnek az oldalai, ha kerületének centiméterrel mért mérőszáma pozitív egész szám?

Gyakorló
8.73–8.76.;
Feladatgyűjtemény
4.2.30–35.

HASONLÓ SÍKIDOMOK TERÜLETÉNEK ARÁNYA

FELADAT

B42 Egy téglalap oldalainak hossza: 4 cm, 6 cm.
Számítsd ki a téglalap területét!

Hogyan változik a téglalap területe, ha minden oldalát

a) 2-szeresére; b) 4-szeresére; c) 0,5-szeresére változtatod?

© Fogalmazd meg sejtésedet!

1. példa

Az $ABC\triangle$ egyik oldala 6 cm hosszú, a hozzá tartozó magassága 5 cm-es.

Mekkora az $ABC\triangle$ területe?

Mekkora az $ABC\triangle$ -höz hasonló háromszög területe, ha a hasonlóság aránya:

a) 5 : 1; b) 10 : 1; c) 4 : 5 = 0,8?

Az $ABC\triangle$ területe: $T = \frac{am_a}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} \text{ cm}^2 = 15 \text{ cm}^2$

a A háromszög oldala és magassága 5-szörösére változik.

$$T_a = \frac{5a \cdot 5m_a}{2} = 5^2 \cdot \frac{am_a}{2} = 5^2 \cdot T \text{ cm}^2$$

A háromszög területe 5^2 -szorosára változik:

$$T_a = 5^2 \cdot 15 \text{ cm}^2 = 375 \text{ cm}^2$$

- b** A háromszög oldala és magassága 10-szeresére nő, tehát a háromszög területe 10^2 -szorosára változik:

$$T_b = 10^2 \cdot 15 \text{ cm}^2 = 1500 \text{ cm}^2$$

- c** A háromszög oldala és magassága 0,8-szeresére változik, tehát a háromszög területe $0,8^2$ -szorosára változik:

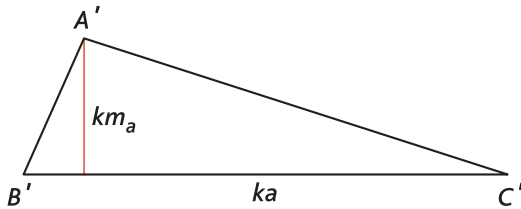
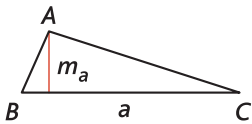
$$T_c = 0,8^2 \cdot 15 \text{ cm}^2 = 9,6 \text{ cm}^2$$

Tétel

Két hasonló síkidom területének aránya egyenlő a hasonlóság arányának négyzetével.

Bizonyítás

Jelölje egy $ABC\triangle$ területét T , a hozzá hasonló háromszög területét T_h . Ha a hasonlóság aránya k , akkor a háromszög bármelyik oldala és a hozzá tartozó magasság is k -szorosára változik.

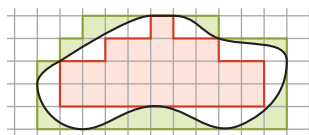
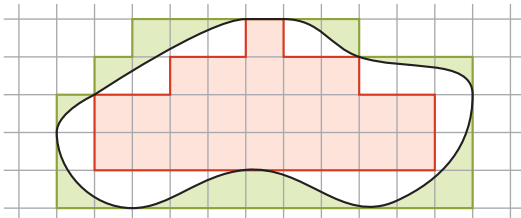


Vizsgáljuk a két háromszög területe közti kapcsolatot:

$$T_h = \frac{ka \cdot km_a}{2} = k^2 \cdot \frac{am_a}{2} = k^2 \cdot T$$

Minden sokszög háromszögekre bontható. Ezért a hasonló háromszögek területének arányára érvényes összefüggés a hasonló sokszögek esetén is fennáll.

A görbe vonalú síkidom területe a bele írható és a köré írható sokszög területe közé „szorítható”.



A hasonló idom területe

Az eredeti idom területe

$$T_h = k^2 \cdot T$$

A hasonlóság arányának négyzete

Ezért (magasabb matematikai eszközökkel) teljes általánosságban is igazolható ez az összefüggés.

FELADATOK

B43 Egészítsd ki a következő egyenlőségeket!

a) $1 \text{ cm} = \boxed{} \text{ mm}$, tehát $1 \text{ cm}^2 = \boxed{} \text{ mm}^2$

b) $1 \text{ m} = \boxed{} \text{ cm} = \boxed{} \text{ mm}$, tehát $1 \text{ m}^2 = \boxed{} \text{ cm}^2 = \boxed{} \text{ mm}^2$

B44 Határozd meg a hasonló síkidomok kerületének és területének arányát!

a) Egy $ABCD$ téglalap oldalainak hossza: 4 cm, 6 cm. Mekkora az oldalai az $ABCD$ téglalaphoz hasonló téglalapoknak, ha a hasonlóság aránya:

- ① 2:1; ② 3:1; ③ 1:2; ④ 3:2; ⑤ 1:10?

Számítsd ki az $ABCD$ és a hozzá hasonló téglalapok kerületét és területét!

b) Egy $ABCD$ deltoid átlóinak hossza: 8 cm, 6 cm. Mekkora az átlói, illetve oldalai az $ABCD$ deltoidhoz hasonló deltoidoknak, ha a hasonlóság aránya:

- ① 2:1; ② 5:1; ③ 1:4; ④ 5:2; ⑤ 1,4?

Számítsd ki az $ABCD$ és a hozzá hasonló deltoidok kerületét és területét!

c) Egy $ABCD$ húrtrapéz alapjainak hossza: 10 cm, 5 cm; magassága 6 cm. Mekkora az $ABCD$ húrtrapézhoz hasonló húrtrapézoknak a megfelelő adatai, ha a hasonlóság aránya:

- ① 1:2; ② 1:5; ③ 5:4; ④ 0,7; ⑤ 1,4?

Számítsd ki az $ABCD$ és a hozzá hasonló húrtrapézok kerületét és területét!

☉ Az átlók segítségével egyértelműen megadható-e az oldalak hosszúsága?

☉ Hogyan számítható ki a szárak hossza?

B45 Számítsd ki az 1 cm; 2 cm; 10 cm sugarú kör kerületét, illetve területét!

Határozd meg, hogy a körök kerülete, illetve területe hogyan aránylik egymáshoz!

☉ Lásd a 121. oldalon.

B46 Gyakoroljuk a terület-mértékegységek átváltását.

a) $0,05 \text{ m}^2 = \boxed{} \text{ dm}^2 = \boxed{} \text{ cm}^2 = \boxed{} \text{ mm}^2$

b) $0,05 \text{ km}^2 = \boxed{} \text{ ha} = \boxed{} \text{ m}^2 = \boxed{} \text{ dm}^2 = \boxed{} \cdot 10^{\boxed{}} \text{ dm}^2$

Gyakorló
8.77–8.79.



Bernát egy $14 \times 7 \text{ m}$ -es téglalap alakú teraszt szeretne kőlapokkal beborítani. A $20 \times 20 \text{ cm}$ -es lapok darabjának ára 50 Ft, az ugyanolyan minőségű $35 \times 35 \text{ cm}$ -es lapoké 150 Ft. Melyik lapot válassza Bernát?



Egy 10 m átmérőjű, kör alakú ágyásba 872 virágpalántát ültettek el. Körülbelül hány palántára lesz szükség egy 14 m átmérőjű, kör alakú ágyás beültetéséhez, ha ugyanolyan sűrűn szeretnék ültetni a palántákat, mint az előző ágyásba? A szükséges palánták száma körülbelül:

- A: 886; B: 1220; C: 1710; D: 3488

Többet ésszel ...

☉ Meg tudod indokolni a választod helyességét?

☉ Jelöld meg a helyes választ!

HASONLÓ TESTEK TÉRFOGATÁNAK ARÁNYA

1. példa

Egy téglatest egy csúcsban találkozó élének hossza 4 cm, 6 cm, 8 cm. Számítsuk ki a téglatest térfogatát. Mekkora az adott téglatesthez hasonló téglatest térfogata, ha a hasonlóság aránya:

- a) $5:1$; b) $4:5=0,8$; c) k ?

A téglatest térfogata: $V = abc = 4 \cdot 6 \cdot 8 \text{ cm}^3 = 192 \text{ cm}^3$

- a) A téglatest minden éle 5-szörösére változik.

$$V_a = 5a \cdot 5b \cdot 5c = 5^3 \cdot abc = 5^3 \cdot V$$

A téglatest térfogata 5^3 -szorosára változik:

$$V_a = 5^3 \cdot 192 \text{ cm}^3 = 24\,000 \text{ cm}^3$$

- b) A téglatest minden éle 0,8-szeresére változik, tehát a téglatest térfogata $0,8^3$ -szorosára változik:

$$V_b = 0,8^3 \cdot 192 \text{ cm}^3 = 98,3 \text{ cm}^3$$

- c) A téglatest minden éle k -szorosára változik, tehát a téglatest térfogata k^3 -szorosára változik:

$$V_a = ka \cdot kb \cdot kc = k^3 \cdot abc = k^3 \cdot V$$

A hasonló test
térfogata

Az eredeti test
térfogata

$$V_h = k^3 \cdot V$$

A hasonlóság
arányának köbe

Tétel

Két hasonló test térfogatának aránya megegyezik a hasonlóság arányának harmadik hatványával (köbével).

☉ A tétel magasabb matematikai ismeretek birtokában általánosan is bizonyítható.

FELADATOK

- B47** Egészítsd ki a következő egyenlőségeket!

a) $1 \text{ cm} = \boxed{} \text{ mm}$, tehát $1 \text{ cm}^3 = \boxed{} \text{ mm}^3$

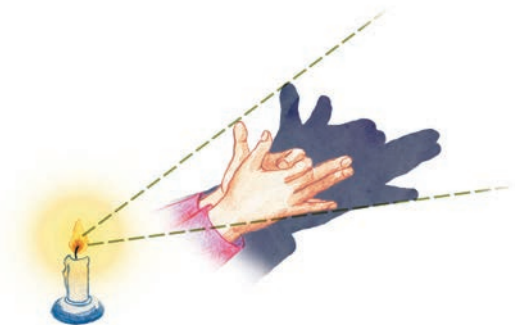
b) $1 \text{ m} = \boxed{} \text{ dm} = \boxed{} \text{ cm}$, tehát $1 \text{ m}^3 = \boxed{} \text{ dm}^3 = \boxed{} \text{ cm}^3$

Gyakorló 8.80–8.81.;
Feladatgyűjtemény
4.3.24–26.

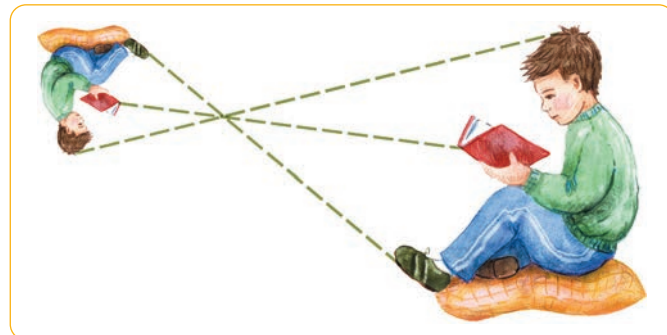
- B48** A Nap sugara 109-szerese a Föld sugarának. Hányszorosa a Nap térfogata a Föld térfogatának?

KÖZÉPPONTOS HASONLÓSÁG

Ha egy pontszerű fényforrás és a fal közé tesszük a kezünket, akkor kezünk körvonalának **egyező állású** nagyított árnyképe jelenik meg a falon.



Ha lencsével vetítünk ki egy átvilágított diát, akkor a lencse középpontján áthaladó vetítősugarak egyenes vonalban haladnak a tárgy (diá) pontjaiból a kép pontjaiba. A diá és a kivetített kép **fordított állású**.



A lencsével a fényt foglalkozik.

FELADATOK

25

Vágj ki keménypapírból valamilyen alakzatot! Tartsd napfényben is és gyertyafényben is kartonlap elé. Figyeld meg az árnyékot!

- Hogyan változik a kép, ha a napsugarak merőlegese a kartonlapra, és az idom párhuzamos, illetve nem párhuzamos a kartonlappal?
- Hogyan változik a kép nagysága, ha a gyertya és a kartonlap távolsága állandó, de az alakzatot a laphoz közelebb helyezed el?
- Hogyan változik a kép nagysága, ha az alakzat és a lap távolsága állandó, de a gyertyát közelíted az alakzathoz?

Kísérletezz!

26

Az $ABC\Delta$ csúcspontjai: $A(3; 2)$, $B(6; 3)$, $C(4; 5)$; az $A'B'C'\Delta$ csúcspontjai: $A'(0; -1)$, $B'(-6; -3)$, $C'(-2; -7)$

- Igazold, hogy a két háromszög hasonló egymáshoz! Határozd meg a hasonlóság arányát!
- Hasonlítsd össze a két háromszög oldalainak helyzetét!
- Húzd meg az AA' és a BB' egyenest, jelöld O -val a metszéspontjukat! Mit állapíthatsz meg a CC' egyenesről?
- A négyzetrács segítségével hasonlítsd össze az OA' és az OA , az OB' és az OB , valamint az OC' és az OC távolságokat!
- Hasonlítsd össze az $\overrightarrow{A'B'}$ és az $\overrightarrow{AB}$, az $\overrightarrow{A'C'}$ és az $\overrightarrow{AC}$, valamint a $\overrightarrow{B'C'}$ és a $\overrightarrow{BC}$ vektorokat!

☉ Figyeld meg, és próbáld megfogalmazni a vizsgált geometriai transzformáció szabályát és tulajdonságait!

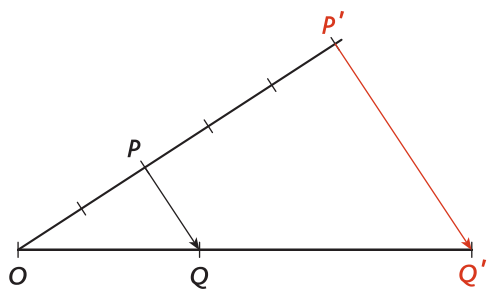
1. példa

Adott a sík egy O pontja, ennek a pontnak a képe saját maga. Minden más P pontnak az a P' pont felel meg, amely az OP egyenesen **ugyanabban az irányban** fölmérve 2,5-szer akkora távolságra van az O ponttól, mint a P pont.

- Szerkesszük meg egy tetszőleges $\overrightarrow{PQ}$ képét ebben a transzformációban.
- Szerkesszük meg egy tetszőleges $ABC\Delta$ képét ebben a transzformációban.

☉ Vizsgáljuk a transzformáció tulajdonságait.

- a Adjuk meg az O középpontot, és vegyük föl tetszőlegesen a $\overrightarrow{PQ}$ -t. Az utasításnak megfelelően például a P' pontot így szerkesztjük meg:



Az O és a P ponton át húzunk egy egyenest, az úgynevezett **vetítősugarat**.

Az O középpont nem esik a P és P' közé, ezért ezt **külső hasonlósági pontnak** nevezzük.

Az $\frac{OP'}{OP} = 2,5 = \frac{5}{2}$, ezért az OP távolságot két egyenlő részre osztjuk, és a felezéssel kapott szakaszt az O pontból kiindulva, a P irányában 5-ször rámérjük a vetítősugarra.

Hasonlóan járunk el a Q' pont megszerkesztésénél.

Két-két oldal aránya és a megfelelő oldalak által közbezárt szög megegyezik:
 $OP' = 2,5 \cdot OP$; $OQ' = 2,5 \cdot OQ$ és $\angle P'OQ' = \angle POQ$

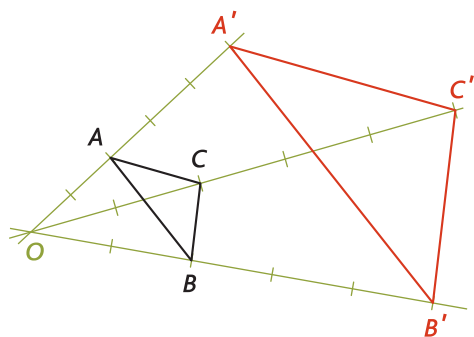
Ezért: $OPQ \triangle \sim OP'Q' \triangle$

A hasonlóság miatt az $OPQ \triangle$ és $OP'Q' \triangle$ megfelelő szögei megegyeznek, ezért $PQ \parallel P'Q'$, továbbá $P'Q' = 2,5 \cdot PQ$.

A $\overrightarrow{PQ}$ és a $\overrightarrow{P'Q'}$ párhuzamos, megegyező irányú, és a $\overrightarrow{P'Q'}$ 2,5-szer olyan hosszú, mint a $\overrightarrow{PQ}$. Ezt röviden így jelöljük:

$$\overrightarrow{P'Q'} = 2,5 \cdot \overrightarrow{PQ}$$

- b Szerkesszük meg az $ABC \triangle$ csúcspontjainak a képét.



Megadjuk az O középpontot, majd meghúzzuk az OA , OB és az OC félegyenest. Megszerkesztjük (kimérjük) az OA távolság 2,5-szeresét. Ezt a távolságot az O pontból, az A pont irányában felmérjük az OA félegyenestre, megkapjuk az A' pontot. Hasonlóan szerkesztjük meg a B' és a C' pontot. Ezt a három pontot összekötve kapjuk az $A'B'C' \triangle$ -et.

Mivel bármely szakasz képe egy 2,5-szer akkora szakasz, ezért:

$$ABC \triangle \sim A'B'C' \triangle$$

Az $ABC \triangle$ és az $A'B'C' \triangle$ megfelelő oldalai párhuzamosak.

Ha az O pontból kiindulva az eredeti pontokat és a megfelelő képpontokat ugyanabban az irányban mérjük föl, akkor a megfelelő oldalak irányításával kapott vektorok egyező irányúak, ezért a háromszög és a képe **egyező állású**.

Megállapodás szerint ezt úgy fejezzük ki, hogy a **hasonlóság arányát pozitívnak tekintjük**:

$$k = 2,5 > 0$$

A két háromszög körüljárásának iránya megegyezik.

2. példa

Adott a sík egy O pontja, ennek a pontnak a képe saját maga. Minden más P pontnak az a P' pont felel meg, amely az OP egyenesen **ellentétes irányban** fölmérve 2,5-szer akkora távolságra van az O ponttól, mint a P pont.

- Szerkesszük meg egy tetszőleges $\overrightarrow{PQ}$ képét ebben a transzformációban.
- Szerkesszük meg egy tetszőleges $ABC\Delta$ képét ebben a transzformációban.

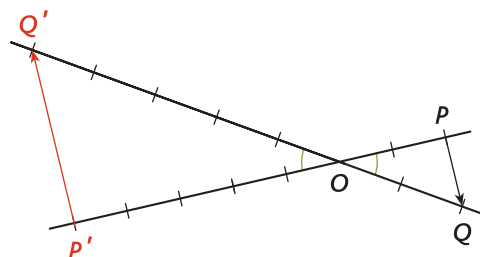
© Vizsgáljuk a transzformáció tulajdonságait.

- Adjuk meg az O **középpontot**, és vegyük föl tetszőlegesen a $\overrightarrow{PQ}$ -t. Az utasításnak megfelelően például a P' és a Q' pontot. Most is igaz, hogy a PQ szakasz képe egy vele párhuzamos, 2,5-szer olyan hosszú $P'Q'$ szakasz:

$OPQ\Delta \sim OP'Q'\Delta$, mert két-két oldal aránya megegyezik, és a megfelelő oldalak által közrezárt szögek csúcsszögek, tehát egyenlők.

A $\overrightarrow{PQ}$ és a $\overrightarrow{P'Q'}$ párhuzamos, ellentétes irányú, és a $\overrightarrow{P'Q'}$ 2,5-szer olyan hosszú, mint a $\overrightarrow{PQ}$. Ezt röviden így jelöljük:

$$\overrightarrow{P'Q'} = -2,5 \cdot \overrightarrow{PQ}$$



Az O középpont a P és P' pont közé esik, ezért ez **belső hasonlósági pont**.

- Szerkesszük meg az $ABC\Delta$ csúcspontjainak a képét.

Megadjuk az O középpontot, majd meghúzzuk az OA , OB és az OC egyenest. Megszerkesztjük (kimérjük) az OA távolság 2,5-szeresét. Ezt a távolságot az O pontból, az A ponttal ellentétes irányában felmérjük az OA egyenesre, megkapjuk az A' pontot. Hasonlóan szerkesztjük meg a B' és a C' pontot. Ezt a három pontot összekötve kapjuk az $A'B'C'\Delta$ -et.

Bármely szakasz képe 2,5-szer olyan hosszú, mint maga a szakasz, ezért:

$$ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$$

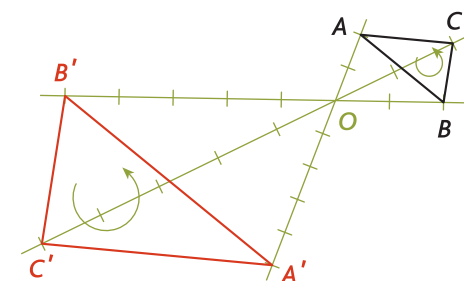
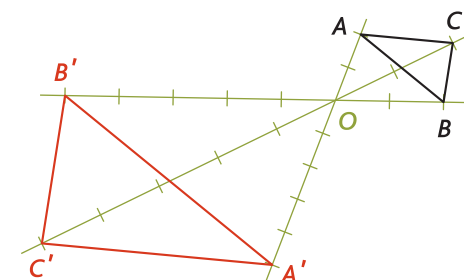
Az $ABC\Delta$ és az $A'B'C'\Delta$ megfelelő oldalai párhuzamosak.

Ha az O pontból kiindulva az eredeti pontokat és a megfelelő képpontokat ellentétes irányban mérjük föl, akkor a megfelelő oldalak irányításával kapott vektorok ellentétes irányúak, ezért a háromszög és képe **fordított állású**.

Megállapodás szerint ezt úgy fejezzük ki, hogy **a hasonlóság arányát negatívnak tekintjük**:

$$k = -2,5 < 0$$

Figyeljük meg, hogy a fordított állás ellenére **a két háromszög körüljárásának iránya megegyezik**.



3. példa



Egy fa magasságát a következőképpen szeretnénk megbecsülni: Vonalzóra rákötünk egy 50 cm hosszú fonalat. A fától 25 m távolságban megállva a fonal egyik végét az arcunkhoz tesszük, a fonalat kifeszítve a vonalzót függőlegesen tartjuk (a vonalzó beosztását ekkor 50 cm távolságból látjuk). Milyen magas a fa, ha a vonalzon a fa tővét a 0 cm, csúcsát a 26 cm irányában látjuk?

A szemünk és a vonalzó két beosztása által meghatározott háromszögnek középpontosan nagyított képe az a háromszög, amelyet a szemünk, a fa töve és csúcsa határoz meg. (A szemünk a hasonlóság középpontja.)

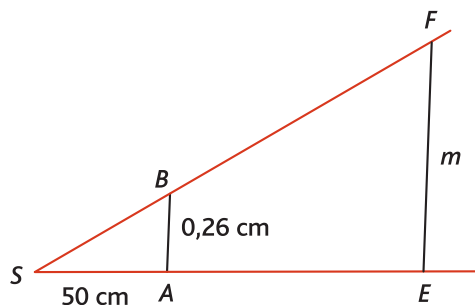
A becslés során a szemünk és a fa tövének távolságát tekinthetjük 25 m-nek; $SE \approx 25$ m (kicsi az eltérés). A hasonlóság miatt a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{0,26}{0,50} = \frac{m}{SE} \approx \frac{m}{25}$$

Az m -et kifejezve:

$$m \approx 25 \cdot 0,26 : 0,50 = 13$$

A fa magassága körülbelül 13 m.



FELADATOK

27

Az $ABC\Delta$ csúcspontjainak koordinátái: $A(4; 4)$, $B(2; 4)$, $C(4; 0)$

Hajtsd végre azt a transzformációt, amelyben minden pont mindkét koordinátáját k -szorosára változtatod: $P(x; y) \mapsto P'(kx; ky)$

Válaszd meg a k értékét úgy, hogy a transzformáció

- középpontos tükrözés legyen;
- $\frac{1}{2}$ -szeres kicsinyítés legyen, és a képháromszög **egyező állású** legyen az eredeti háromszöggel;
- $\frac{1}{2}$ -szeres kicsinyítés legyen, és a képháromszög az eredeti háromszöghöz viszonyítva **fordított állású** legyen;
- $\frac{3}{2}$ -szeres nagyítás legyen! (Hány megoldás van?)

Az a), b), c) és d) transzformációk mindegyike esetén hasonlítsd össze

az $\overrightarrow{OA'}$ és az $\overrightarrow{OA}$, az $\overrightarrow{OB'}$ és az $\overrightarrow{OB}$, az $\overrightarrow{OC'}$ és az $\overrightarrow{OC}$ vektorokat;
az $\overrightarrow{A'B'}$ és az $\overrightarrow{AB}$, az $\overrightarrow{A'C'}$ és az $\overrightarrow{AC}$, az $\overrightarrow{B'C'}$ és az $\overrightarrow{BC}$ vektorokat!

➊ Középpontos tükrözés esetén milyen a tükörkép állása az eredeti háromszöghöz képest?



28

Rajzolj egy négyszöget, és jelöld ki a hasonlóság középpontját a négyszögön kívül! Szerkeszd meg a középpontosan hasonló képet, ha a középpontos hasonlóság aránya a következő:

a) $k = \frac{3}{4}$;

b) $k = -\frac{7}{4}$;

c) $k = -1$

A **vetítőszakaszok** részekre osztását is szerkeszd!

Gyakorló

8.82–8.98.;

Feladatgyűjtemény

6.1.06.

29

Egy 1,5 m hosszú, függőleges helyzetű pálca árnyéka 1,2 m.

Milyen magas az az oszlop, amelynek az árnyéka

a) 0,8 m;

b) 150 cm;

c) 4,2 m;

d) 14,3 m?

☉ A méréseket ugyanabban az időpontban végezzük el.

30

Derékszögű koordináta-rendszerben az $ABC\Delta$ csúcspontjainak koordinátái: $A(2; 3)$; $B(0; 0)$; $C(5; 0)$. Az $ABC\Delta$ háromszög középpontosan hasonló képe az $A'B'C'\Delta$. Határozd meg a C' pont, a hasonlóság középpontjának koordinátáit és a középpontos hasonlóság arányát, ha

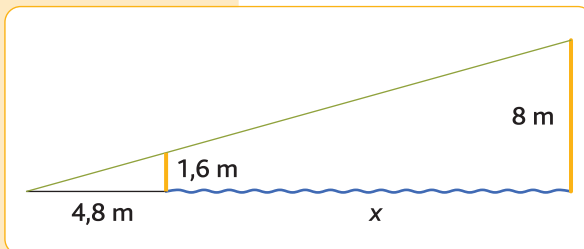
☉ Milyen állású a két háromszög?

a) $A'(8; 3)$; $B'(12; 9)$;

b) $A'(12; 9)$; $B'(8; 3)$!

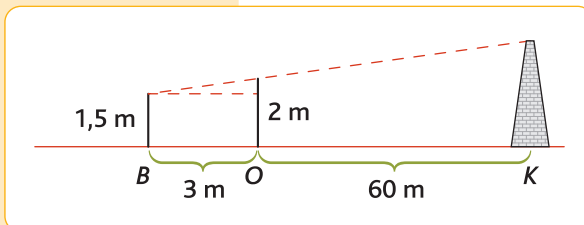
31

a) Andi észreveszi, hogy reggel 6 órakor a patak túlpartján álló, 8 m magas oszlop árnyékának végpontja éppen egybeesik a patak innenső partján álló 1,6 m magas oszlop árnyékának végpontjával. Milyen széles a patak, ha az 1,6 m magas oszlop árnyékának hossza 4,8 m, és a patak északról dél felé folyik?

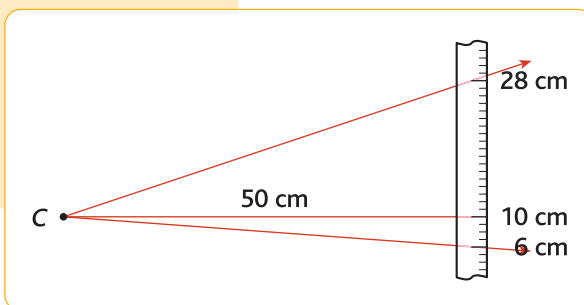


b) Bea egy gyárkémény magasságát egy 2 m hosszú karó segítségével határozza meg az ábrán jelzett mérések elvégzése után. Milyen magas a gyárkémény?

☉ Bea szeme mintegy 1,5 m magas van a talaj felett.



c) Cili egy tó partján álló kilátóból szeretné megmérni, hogy a tó túlsó partján álló sziklafal milyen magas. Az ábra azt mutatja, hogy a 3. példában leírt eszközzel milyen irányban látja a fal alját, illetve tetejét. Milyen magas a sziklafal? A kilátóban álló Cili szeme (C) a víz szintjétől 15 m távolságra van.



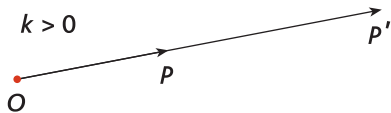
Dani egy 2 m széles ablak mögött, az ablaktól 1 m távolságra ül, amikor az úton, az ablak síkjával párhuzamosan, attól 11 m távolságra, másodpercenként 12 m-t megtéve elhalad egy zárt teherautó. Dani hány másodpercig látja a teherautó 6 m hosszú rakterének ablak felőli oldalát (esetleg az oldalnak csak egy részét)?

Többet ésszel ...

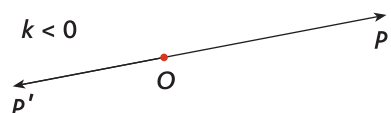
A KÖZÉPPONTOS HASONLÓSÁGRÓL TANULTAK KIEGÉSZÍTÉSE

Értelmezések

Középpontos hasonlóságnak nevezzük a geometriai transzformációt, ha adott O pont és k ($k \neq 0$) valós szám esetén minden P pontnak az a P' pont felel meg, amelyre $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$.



Ha $k > 0$, akkor az OP és az OP' távolságokat ugyanabban az irányban mérjük föl, ezért az O pont nem esik a P pont és a P' pont közé. Ebben az esetben **külső hasonlósági pontról** beszélünk.



Ha $k < 0$, akkor az OP és az OP' távolságokat ellenkező irányban mérjük föl, ezért az O pont a P pont és a P' pont közé esik. Ebben az esetben **belső hasonlósági pontról** beszélünk.

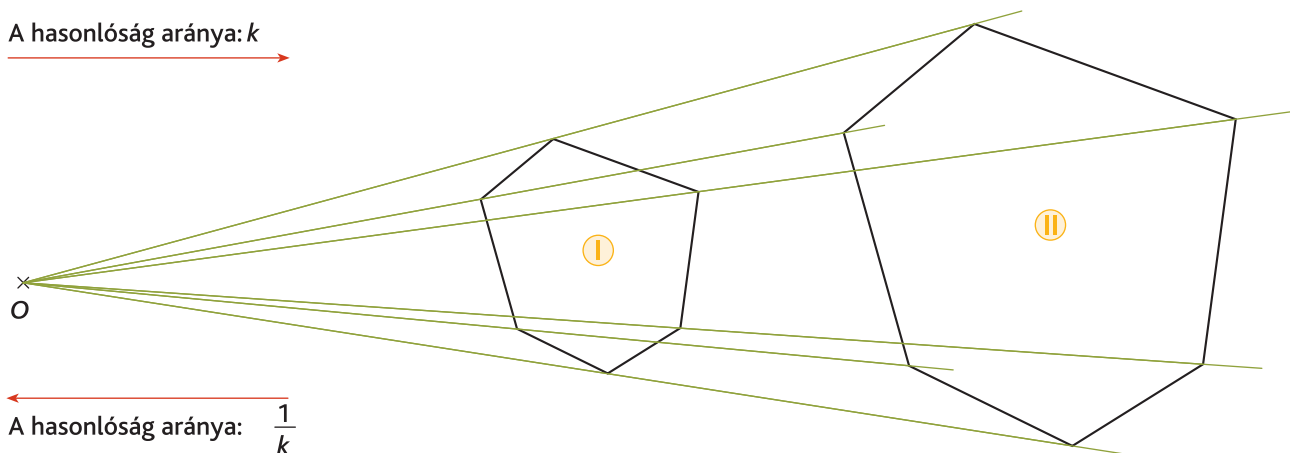
Az OP' szakasz hossza mindkét esetben $OP' = |k| \cdot OP$

A KÖZÉPPONTOS HASONLÓSÁG TULAJDONSÁGAI

- Bármely PQ szakasz esetén $\frac{P'Q'}{PQ} = |k|$, vagyis a megfelelő távolságok aránya állandó. Ez azt jelenti, hogy a középpontos hasonlóság bármely síkidomhoz hozzá hasonló síkidomot rendel.
- Az ábrán adott O középpontú hasonlóság az ❶ alakzatnak a ❷ alakzatot felelteti meg, és a hasonlóság aránya k .
A ❷ alakzatnak az ❶ alakzatot egy olyan O középpontú hasonlóság felelteti meg, amelyben a hasonlóság aránya $\frac{1}{k}$ (az előző hasonlóság arányának a reciproka).

A hasonlóság aránya: k

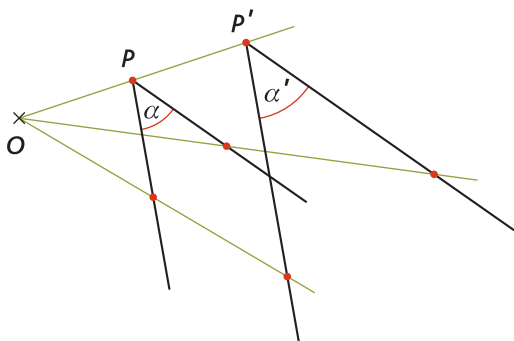
A hasonlóság aránya: $\frac{1}{k}$



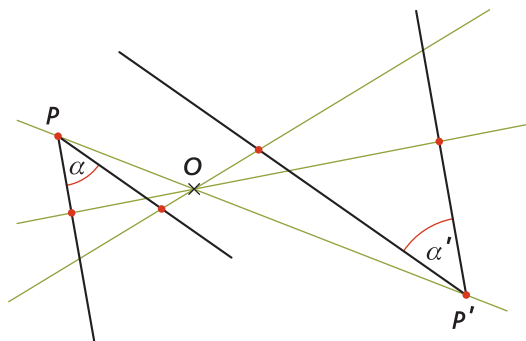
- Az egyenes (a szakasz) képe vele párhuzamos egyenes (szakasz).

- 4 A szög képe vele egyenlő, párhuzamos szárú szög;

ha $k > 0$, akkor egyállású szög;



ha $k < 0$, akkor váltószög.



Tehát a szög nagysága nem változik $|k|$ -szorosára.

- 5 Az alakzatnak és középpontosan hasonló képének viszonya:

$k > 0$; egyező állású kép; az O külső hasonlósági pont.	$k < 0$; fordított állású kép; az O belső hasonlósági pont.
$k > 1$, nagyítás	$k < -1$, nagyítás
$k = 1$, helyben maradás	$k = -1$, középpontos tükrözés
$0 < k < 1$, kicsinyítés	$-1 < k < 0$, kicsinyítés

A KÖZÉPPONTOS HASONLÓSÁGRÓL TANULTAK ALKALMAZÁSA

FELADAT

© Hányféleképp jelölhető ki az a' szakasz B' és C' végpontja?

B49 Szerkessz ABC háromszöget, ha $a = 4$ cm, $b = 5$ cm hosszú, $\gamma = 60^\circ$ -os!

Végül föl az a oldallal párhuzamosan egy a' szakaszt úgy, hogy

- a) $a' > a$; b) $a' < a$; c) $a' = a$ legyen!

Szerkeszd meg az ABC háromszög középpontosan hasonló képét úgy, hogy az a oldal képe az a' szakasz legyen!

Mi a középpontos hasonlóság aránya az egyes transzformációkban?

4. példa

Adott egy $ABCDE$ ötszög és egy szakasz. Szerkesszük meg az $ABCDE$ ötszöghöz hasonló $A'B'C'D'E'$ ötszöget, amelynek $A'B'$ oldala az adott szakasz.

A középpontos hasonlóságban a sokszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, ezért az $A'B'$ oldalt úgy vesszük föl, hogy párhuzamos legyen az AB oldallal (az $A'B'$ szakasz végpontjainak betűzése kétféle lehet!). A két párhuzamos szakasz megfelelő végpontjainak összekötésével szerkesztjük meg az O hasonlósági pontot.

Ha így vesszük föl az $A'B'$ szakaszt, külső hasonlósági pontot kapunk;

$$k > 0.$$

Ha így vesszük föl az $A'B'$ szakaszt, belső hasonlósági pontot kapunk;

$$k < 0.$$

Az OC , OD és OE vetítőegyenesei meghúzása után rendre megszerkesztjük a hiányzó oldalakat úgy, hogy párhuzamosak legyenek az eredeti ötszög megfelelő oldalával, és végpontjaik a megfelelő vetítőegyenésre illeszkedjenek.

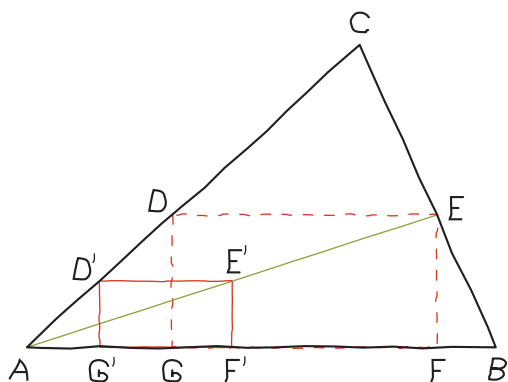
5. példa

Szerkesszünk tetszőleges $ABC\triangle$ -be olyan téglalapot, amelynek egy-egy csúcsa az AC , illetve a BC oldalra, másik két csúcsa az AB oldalra illeszkedik, és amelynek az AB oldalra illeszkedő oldala kétszer olyan hosszú, mint a szomszédos oldala.

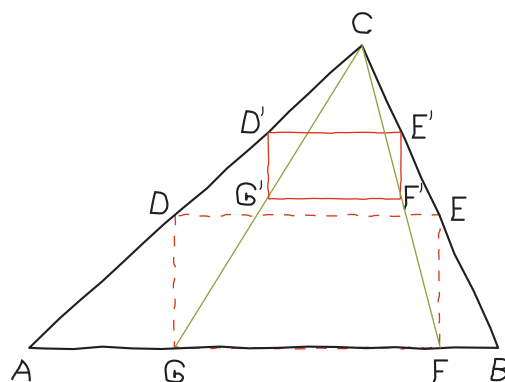
Vázlat

Rajzoljunk az $ABC\triangle$ -be az oldalak arányára vonatkozó feltételnek megfelelő $DEFG$ téglalapot. Ezzel a téglalappal középpontosan hasonló téglalapot tudunk szerkeszteni.

Itt az A csúcs a hasonlósági pont:



Itt a C csúcs a hasonlósági pont:



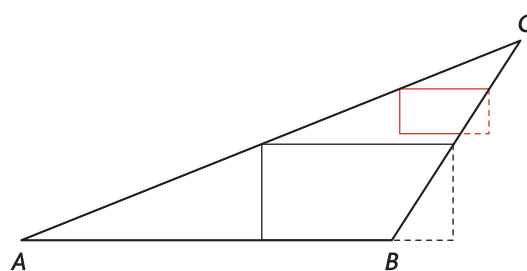
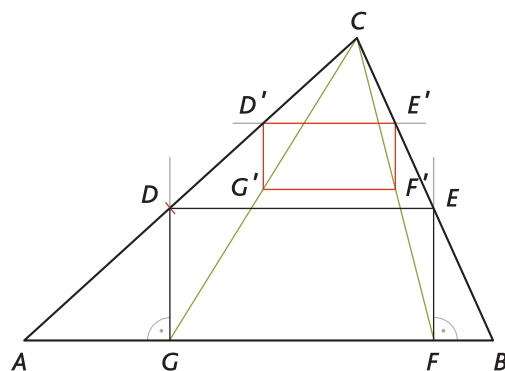
A szerkesztés terve

- 1 Szerkesszünk az AB oldallal párhuzamos egyenest, amely a háromszög másik két oldalát a D' és az E' pontban metszi.
- 2 A $D'E'$ szakaszt a megszerkesztendő téglalaphoz középpontosan hasonló $D'E'F'G'$ téglalap hosszabb oldalának tekintjük. Megszerkesztjük ezt a téglalapot (a téglalap rövidebb oldala fele a hosszabbnak).
- 3 A CG' és CF' vetítőegyenese az AB oldalt a megszerkesztendő téglalap G és F csúcsában metszik.
- 4 A G és F pontból az AB oldalra húzott merőlegek a másik két oldalból kimetszik a megszerkesztendő téglalap hiányzó csúcsait.

Mit mondhatunk még el a feladról?

Hasonló terv alapján dolgozhatunk, ha az A pontot választjuk a hasonlóság középpontjának.

Ha a háromszög AB oldalon fekvő egyik szöge tompaszög, akkor nem oldható meg a feladat.



6. példa

Szerkesszük meg azt a háromszöget, amelynek adott két szöge és a kerülete.

Vegyük fel az adatokat

Készítsünk vázlatot

Keressünk összefüggéseket

A háromszög kerületével megegyező hosszúságú szakasz így szerkeszthető meg a háromszög oldalaiából.

Mivel az $ABC\triangle$ két szögét ismerjük, szerkeszthetünk egy $A'B'C'\triangle$ -et, amely hasonló az $ABC\triangle$ -hez. (Tetszőleges a' oldal végpontjaira rámérjük a β és a γ szöget.)

A hasonlóságból következik, hogy a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = k$$

Emiatt:

$$c' = kc; \quad a' = ka; \quad b' = kb$$

Ebből következik:

$$c' : a' : b' = c : a : b$$

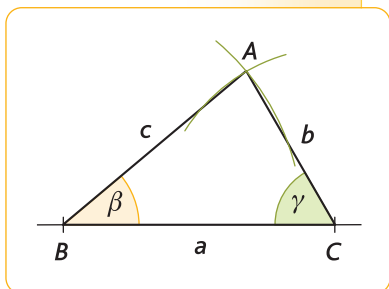
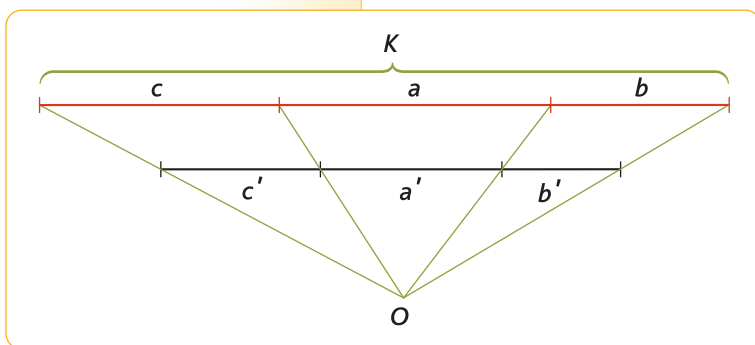
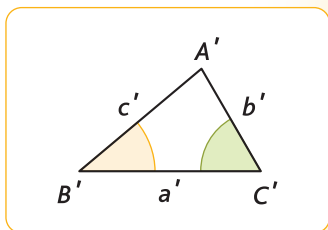
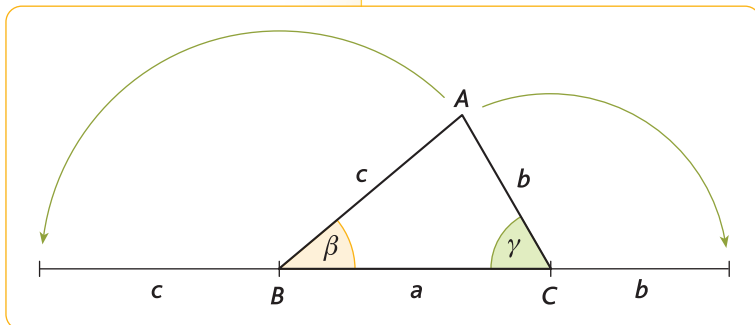
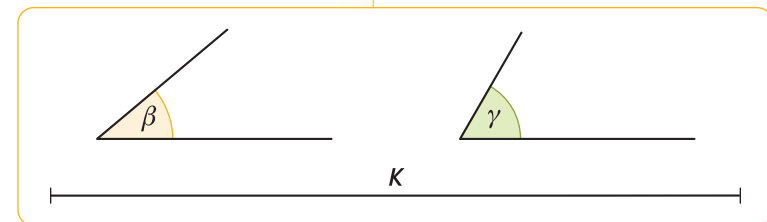
A hasonlóság azt is jelenti, hogy egy sokszög oldalainak az aránya megegyezik a hozzá hasonló sokszög megfelelő oldalainak az arányával.

Ezért ha az $ABC\triangle$ adott K kerületét felosztjuk $c' : a' : b'$ arányban, akkor megkapjuk az $ABC\triangle$ oldalait.

A szerkesztés végrehajtása

A K szakasz arányos felosztását a középpontos hasonlóság alkalmazásával szerkeszthetjük meg.

A háromszög oldalainak és szögeinek ismeretében egyértelműen megszerkeszthetjük a háromszöget, ha az adott két szög összege kisebb 180° -nál.



FELADATOK

B50

Rajzolj egy háromszöget, és jelöld ki a hasonlóság O középpontját a háromszögön ① kívül; ② belül; ③ egy csúcspontban; ④ egy oldalon!

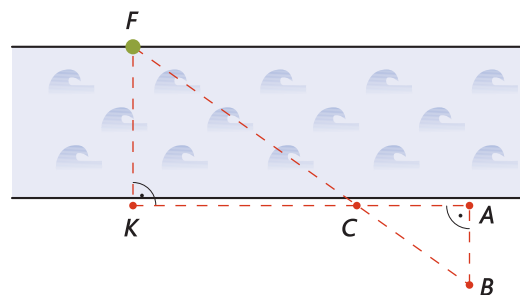
Szerkessz

- egyező állású, háromszorosra nagyított képet;
- fordított állású, kétszeresre nagyított képet;
- egyező állású, $\frac{1}{4}$ részére kicsinyített képet;
- fordított állású, $\frac{1}{2}$ részére kicsinyített képet;
- fordított állású, $\frac{7}{4}$ -szeresre nagyított képet!

Mi a középpontos hasonlóság aránya az egyes transzformációkban?

B51

Dani egy folyó szélességét méri. Kitéz a folyó innenső partján egy K karót, a folyó túlsó partján lévő F fával szemben. Kitéz másik két karót (A és B) úgy, hogy az $FKA \angle = KAB \angle = 90^\circ$ legyen. Végül a KA szakaszon is letéz egy C karót úgy, hogy a B , C és az F pont egy egyenesbe essen. Milyen széles a folyó, ha $KC = 7,2$ m, $CA = 0,6$ m, $AB = 15$ m?



B52

A megfigyelő 4 m távolságra ül egy 75 cm széles ablak mögött. A megfigyelőtől 500 m-re, az ablak síkjával párhuzamosan halad egy kerékpáros. Mekkora a sebessége, ha a kerékpáros feje 15 másodpercig látható az ablaknyíláson?

☉ *A kerékpáros feje ekkora távolságról ponttal modellezhető.*

B53

- Egy háromszög kerülete 10 cm, két szöge 60° -os és 30° -os. Szerkeszd meg ezt a háromszöget!
- Egy háromszög kerülete 15 cm, két szöge 45° -os és 105° -os. Szerkeszd meg ezt a háromszöget!
- Rajzolj egy $ABC\triangle$ -et! Szerkeszd meg azt a háromszöget, amely hasonló az $ABC\triangle$ -hez, és kerülete 10 cm!

☉ *Tanulmányozd a 6. példa megoldását?*



Ödömér négyzetrácsra 6-szor 10 egység oldalhosszúságú téglalapot rajzol, majd belsejében továbbiakat úgy, hogy oldalaik körös-körül egy, illetve két egység távolságra legyenek az eredeti téglalaptól. Szerinte a három téglalap hasonló egymáshoz. Igaza van-e Ödömérnek?

Kísérletezz!

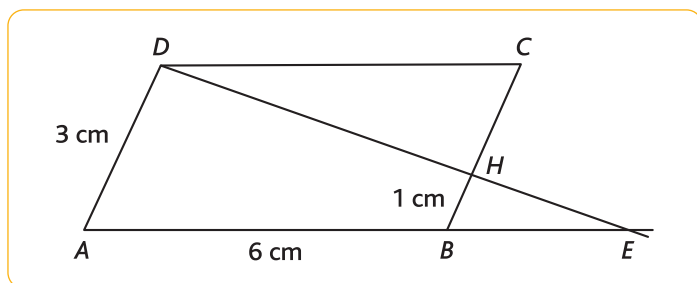


Most egy $ABC\triangle$ -et rajzol Ödömér, majd egy $A'B'C'\triangle$ -et szerkeszt az $ABC\triangle$ köré úgy, hogy oldalaik körös-körül 1 cm távolságra legyenek. Szerinte a két háromszög hasonló. Igaza van-e Ödömérnek?

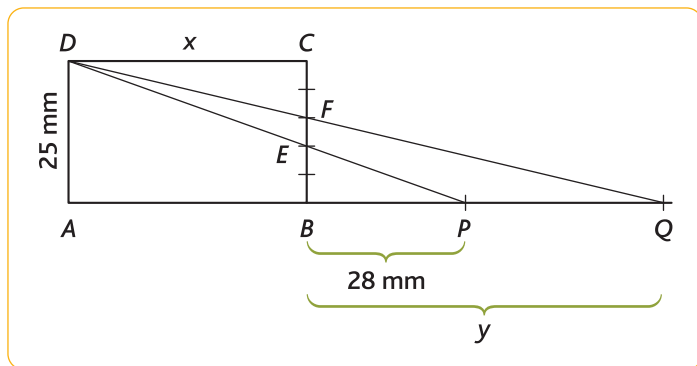
☉ *Magyarázd meg Ödömérnek a tapasztaltakat!*

B54

- a) Egy $ABCD$ paralelogramma oldalai 6 cm és 3 cm. A BC oldalon a B ponttól 1 cm távolságra felvesszünk egy H pontot.



Mekkora a BE távolság, ha a DH egyenes az AB oldalegyenest az E pontban metszi?



- b) Egy $ABCD$ téglalap BC oldalát 5 egyenlő részre osztottuk, a második és harmadik osztópontot jelölje E és F . Húzz a D pontból félegyeneseket az E és F pontokon át! Ezek a félegyenések az AB oldalegyenest a P és Q pontban metszik.

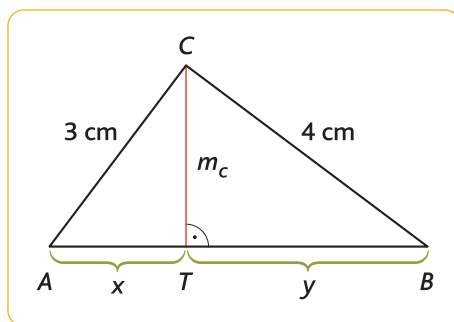
Mekkora a PQ távolság, ha $AD = 25$ mm, $BP = 28$ mm?

B55

- a) Megrajzoltuk egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságát. Keress az ábrán egymáshoz hasonló háromszögeket!

Bizonyítsd a hasonlóságukat!

Számítással határozd meg az m_c , az x és az y értékeket!



- b) Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 3 : 4, átfogója 20 cm hosszú. Mekkora a befogói?

- c) Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 1 : 2, a derékszög csúcsából az átfogóra bocsátott merőleges egyenes (az átfogóhoz tartozó magasság) az átfogót egy 1 cm és egy 4 cm hosszú szakaszra osztja. Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság?

- d) Egy derékszögű háromszög átfogóját a magasságvonala egy 3 cm és egy 27 cm hosszú szakaszra osztja. Mekkora a háromszög területe?

Gyakorló

8.99–8.102.;

Feladatgyűjtemény

4.2.36–43., 4.4.17.

B56

- a) Szerkessz egy $ABC\Delta$ -be szabályos háromszöget úgy, hogy annak három csúcsa az $ABC\Delta$ más-más oldalára illeszkedjék, és egyik oldala legyen párhuzamos az AB oldallal!

- b) Rajzolj kört, és húzd meg két sugarát! Szerkeszd meg azt a húrt, amelyet a két sugár 1 : 2 : 1 arányban oszt fel!

Fejtörő!



Biliárdasztal sarkából egy visszaverő léccel derékszögű háromszöget kerítették el úgy, hogy a háromszög egyik szöge 60° legyen. E szög csúcsából a szögfelező irányában lökünk meg egy pontnak tekinthető golyót, amely ismételtén visszaverődik az asztal oldaláról és a lécről. Visszatér-e a kiindulási pontba ez a golyó?

• Ábrázold a golyó útját!
Megállapításod indokold!

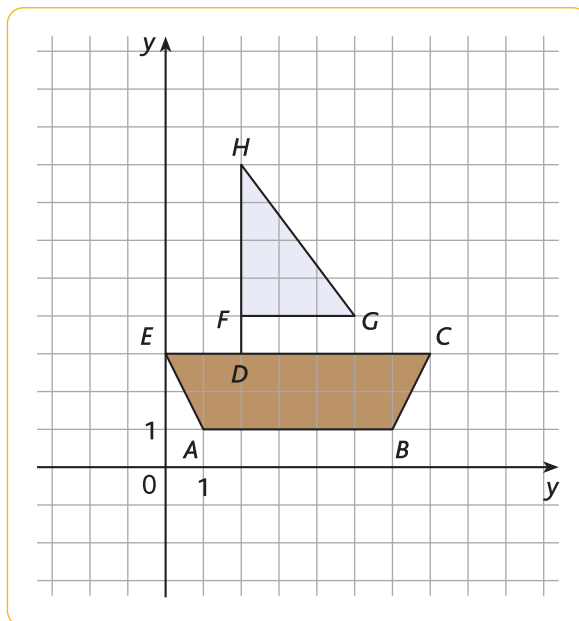
GYAKORLÓ- ÉS FEJTÖRŐ FELADATOK

B57 Add meg az ábrán megjelölt pontok koordinátáit! Rajzold meg azt a kis hajót, amelynek pontjait a következő szabállyal képezzük!

- a) $P(x; y) \mapsto P_1(x; 2y);$ b) $P(x; y) \mapsto P_2(-x; -y);$
 c) $P(x; y) \mapsto P_3(2x; 2y);$ d) $P(x; y) \mapsto P_4\left(\frac{x}{2}; -\frac{y}{2}\right);$
 e) $P(x; y) \mapsto P_5(-2y; 2x);$ f) $P(x; y) \mapsto P_6\left(-x; \frac{y}{2}\right)$

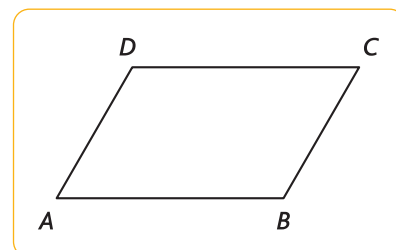
Az előző transzformációk közül

- 1 melyik egybevágósági transzformáció;
- 2 melyik transzformáció kicsinyítés,
- 3 melyik transzformáció nagyítás;
- 4 melyik transzformáció hasonlóság?



B58 Szerkeszd meg az ABCD paralelogrammát, ha szomszédos oldalainak hossza 3 cm és 2 cm, a közbezárt szög 60° !

Told el a paralelogrammát egyik átlóvektorával!
 Hány megoldás van?



B59 a) Add meg a szabályos sokszögek szimmetriatengelyeinek számát!

- b) Melyek a középpontosan szimmetrikus szabályos sokszögek?
- c) Szerkessz egy szabályos háromszöget a füzetedben, és egy vele egybevágó háromszöget átlátszó papíron!
 A tükörtengelyeik metszéspontjába szúrt körzővel rögzítsd egymáshoz a két háromszöget!

Forgasd el a papírlapra szerkesztett szabályos háromszöget

- 1 30° -kal; 2 60° -kal; 3 120° -kal; 4 -240° -kal!

Mit tapasztalsz?

Kísérletezz!

B60 Rajzolj egy háromszöget és két egymást metsző egyenest!

- a) Tükrözd a háromszöget az egyik egyenesre, majd tükröképét a másik egyenesre!
- b) Milyen módon juthattál volna el az eredeti alakzattól a második tükröképhez egyetlen (nem feltétlenül tükrözési) transzformációs lépésben?
- c) Megállapításodat próbáld bebizonyítani!

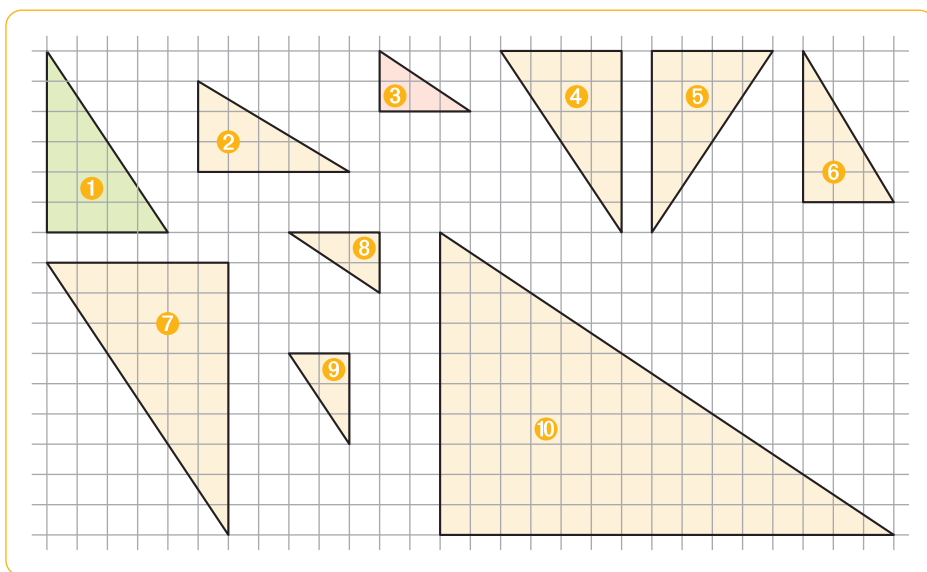
☉ Áttetsző papírlap segítségével kísérletezhetsz.

B61 Forgasd el az $ABCD$ négyzetet átlói metszéspontja körül $+45^\circ$ -kal! Mekkora az eredeti négyzet és az elforgatottja egyesítésével nyert sokszög területe?

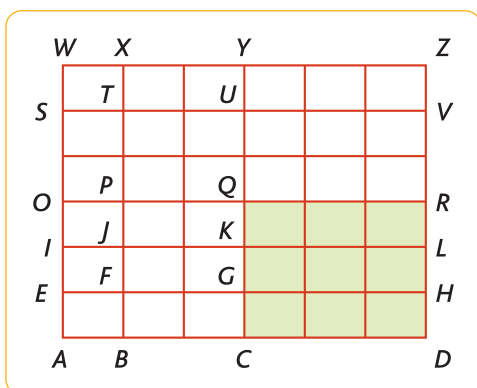
B62 A következı állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

- A: Két derékszögő háromszög mindig hasonló egymáshoz.
 B: Bármely két egyenlő szárú derékszögő háromszög hasonló egymáshoz.
 C: Bármely két egyenlő szárú háromszög hasonló egymáshoz.
 D: Két derékszögő háromszög hasonló egymáshoz, ha átfogóik aránya $1 : 2$.
 E: Két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha a szárszögeik egyenlők.

B63 Válaszd ki a háromszögek közül azokat, amelyek



- a) az 1 háromszöggel egybevágók;
 b) a 3 háromszöggel egybevágók;
 c) az 1 háromszöghöz hasonlók;
 d) a 3 háromszöghöz hasonlók;
 e) az 1 háromszögből középpontos hasonlósági transzformációval előállíthatók.



B64 A színezett sokszög területe 1 egység. A megbetűzött csúcsok segítségével nevez meg olyan sokszögeket, amelyek hasonlóak a színezett sokszöghöz!

Határozd meg a megfelelő oldalak arányát!

Határozd meg a sokszögek területének arányát!

Hasonlítsd össze a hasonlóság arányát és a területek arányát!

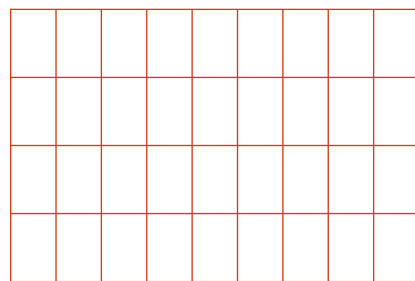
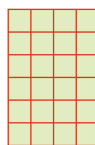
© Keress információkat az interneten az úgynevezett vörös óriásokról.

B65 A Betelgeuze vörös óriáscsillag sugara 400-szorosa a Nap sugarának. A Nap sugara 109-szerese a Föld sugarának. Hányszorosa a Betelgeuze térfogata a Föld térfogatának?

B66

Hány olyan rács téglalap található a jobb oldali ábrán, amely a színezett téglalaphoz hasonló?

Mekkora a kiválasztott rács téglalapok és a színezett téglalap megfelelő oldalainak aránya?



B67

Hasonló-e egymáshoz a két derékszögű háromszög, ha

a) $a = 1,2 \text{ cm}$, $b = 1,6 \text{ cm}$, $a' = 2,1 \text{ cm}$, $c' = 3,5 \text{ cm}$;

b) $a = 1,5 \text{ cm}$, $c = 3,9 \text{ cm}$, $a' = 2,5 \text{ cm}$, $b' = 5,5 \text{ cm}$?

☉ A Pitagorasz-tétel alkalmazása segíthet.

B68

Az $ABC\Delta$ csúcspontjai: $A(6; -3)$, $B(3; 3)$, $C(0; 0)$. Hajtsd végre a következő transzformációt: $P(x; y) \mapsto P'(kx; ky)$. Válaszd meg a k értékét úgy, hogy

☉ Középpontos hasonlóságról van szó.

a) a transzformáció egybevágóság legyen;

b) a transzformáció hasonlóság legyen;

c) a kép az eredeti háromszöghöz viszonyítva nagyított, egyező állású legyen;

d) a kép az eredeti háromszöghöz viszonyítva kicsinyített, fordított állású legyen!

B69

Szerkessz egy 2 cm oldalhosszúságú négyzetet! Végül föl rajta kívül egy O pontot! Szerkeszd meg a négyzet középpontosan hasonló képét az O középpontra vonatkozóan, ha

☉ Megállapodás szerint mikor pozitív, illetve negatív a középpontos hasonlóság aránya?

a) a hasonlóság aránya $\frac{3}{2}$;

b) a hasonlóság aránya $-\frac{3}{2}$;

c) a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$;

d) a hasonlóság aránya $-\frac{2}{3}$!

B70

Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-2; 2)$, $B(-2; 4)$, $C(-4; 2)$, továbbá $A'(0; 5)$. Határozd meg a B' és C' pontok koordinátáit úgy, hogy az $ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$ teljesüljön, a hasonlóság aránya $k = \frac{5}{2}$ legyen, és az A' , B' , C' rácpont legyen.

☉ Nem csak középpontos hasonlóságról van szó.

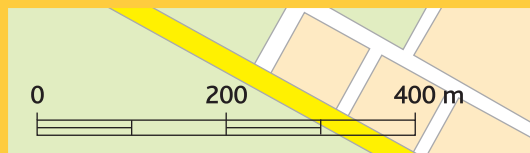
B71

Szerkessz egy $ABC\Delta$ -be rombuszt úgy, hogy annak mind a négy csúcsa háromszögoldalra illeszkedjék, és egyik oldala legyen párhuzamos az $ABC\Delta$ szögfelezőjével!

☉ A 239. oldalon található példa megoldása ötletet adhat.

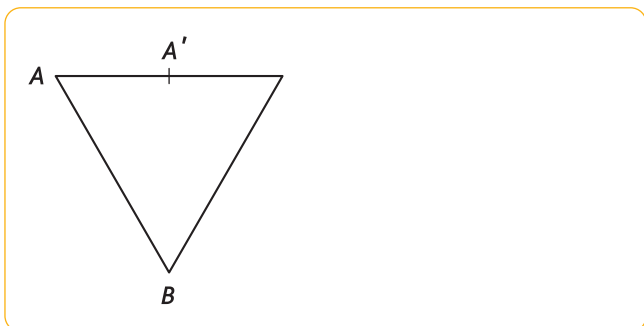


Egy térképen ez a lépték látható. Mekkora a térkép méretaránya?



TUDÁSPRÓBA

32



- 1 Szerkeszd meg az $ABC\triangle$ eltolt képét úgy, hogy az A pont képe az A' legyen!
Rajzold meg az eltolás vektorát!

- 2 a) Szerkessz $ABC\triangle$ -et, ha
 $a = 5\text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 75^\circ$!
b) Szerkessz $ABC\triangle$ -et, ha
 $a = 5\text{ cm}$, $b = 3,5\text{ cm}$, $\gamma = 30^\circ$!
c) Szerkessz $ABC\triangle$ -et, ha
 $a = 6\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$!

- 3 Rajzolj egy $ABC\triangle$ -et! Végül fel egy O hasonlósági középpontot a háromszögön kívül!

Szerkeszd meg az $ABC\triangle$

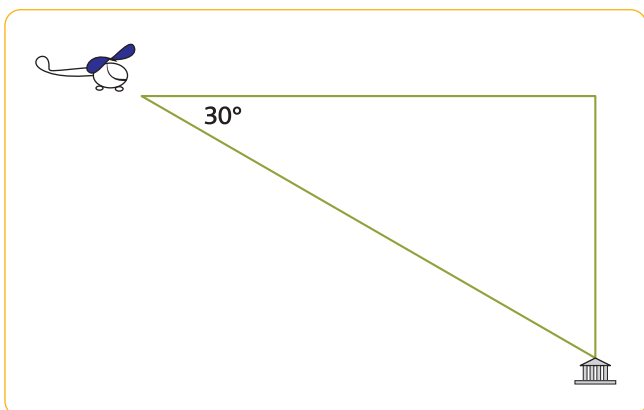
- a) egyező állású, $\frac{5}{2}$ -szeresére nagyított képét;
b) fordított állású, $\frac{3}{4}$ -szeresére kicsinyített képét!

- 4 Egy tervrajzon egy alkatrész átmérője 20 mm. Mekkora az alkatrész átmérője a valóságban, ha a tervrajz méretaránya

- a) 5 : 1; b) 1 : 250?

- 5 Egy 2 m magas oszlop árnyéka (a megfigyelés időpontjában) 1,6 m. Milyen magas az a torony, amelynek árnyéka az adott időpontban (az oszlop közelében) 33,6 m?

- 6 Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(-2; 2)$, $B(-2; 5)$, $C(-4; 2)$. Minden ponthoz rendeljük hozzá azt a pontot, amelynek a koordinátái -2 -szeresei az eredeti pont koordinátáinak. Rajzold meg az így kapott $A'B'C'\triangle$ -et! Jellemezd ezt a geometriai transzformációt!



- 7 Egy helikopter 600 m magasan, vízszintesen repül, amikor a pilóta maga előtt, a vízszintestől lefelé, 30° -os szögben meglát egy épületet.

Légvonalban mekkora távolságban van tőle ez az épület?
Továbbra is vízszintesen repülve hány másodperc múlva ér az épület fölé, ha másodpercenként 65 m-t tesz meg?

5.

RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK, SOROZATOK

Sok olyan példát mondhatunk, amelyben két halmaz elemei kapcsolatban vannak egymással. Az ilyen kapcsolatok matematikai leírására a **reláció** és a **függvény** fogalmát használjuk.



> HOZZÁRENDELÉS, FÜGGVÉNY, SZÁM-SZÁM FÜGGVÉNY

1. példa

Adjuk meg a következő **megfeleltetést** táblázattal, **nyíldiagrammal** és **grafikkal** is. Az **alaphalmaz**: $U = \{4; 5; 6; 7; 8\}$; a **képhalmaz**: $K = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

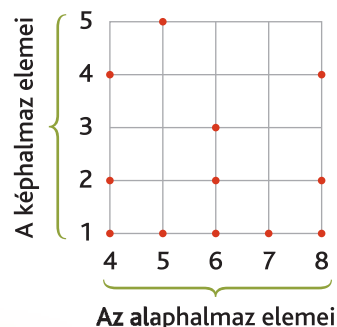
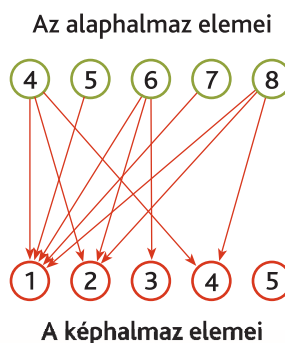
A **hozzárendelés szabálya**: minden számhoz rendeljük hozzá az osztóit.

Vizsgáljuk a megfeleltetés tulajdonságait.

☉ A példák segítségével ismételjük át a korábban tanultakat.

A megfeleltetés **nem egyértelmű**, és így nem függvény, mert az alaphalmaznak vannak olyan elemei, amelyeknek egynél több képük van a képhalmazban.

		A képhalmaz elemei				
		1	2	3	4	5
Az alaphalmaz elemei	4	x	x		x	
	5	x				x
	6	x	x	x		
	7	x				
	8	x	x		x	



2. példa

Rajzoljuk meg a következő megfeleltetés nyíldiagramját.

Az **alaphalmaz**: $U = \{\text{A 10-nél nem nagyobb pozitív egész számok}\}$;

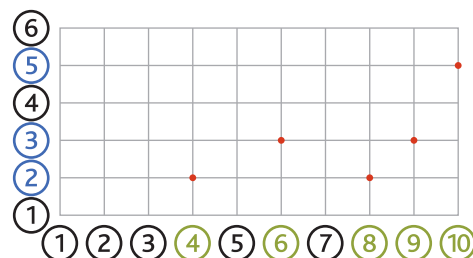
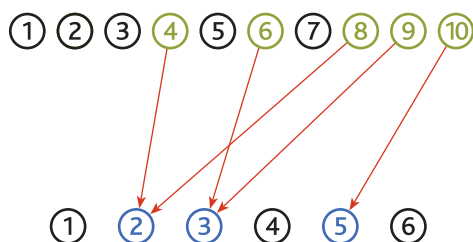
a **képhalmaz**: $K = \{\text{A 6-nál nem nagyobb pozitív egész számok}\}$

Minden összetett számhoz rendeljük hozzá a legnagyobb prímosztóját.

Vizsgáljuk a megfeleltetés tulajdonságait.

☉ Értelmezzük a piros szín-nel kiemelt fogalmakat.

Az U alaphalmaz elemeinek legfeljebb egy képük van a K képhalmazban, a megfeleltetés **egyértelmű**.



»»

»»

Az alaphalmaz elemei közül az összetett számoknak pontosan egy képük van a K -ban. Úgy is mondhatjuk, hogy ezt a megfeleltetést az összetett számokra értelmeztük.

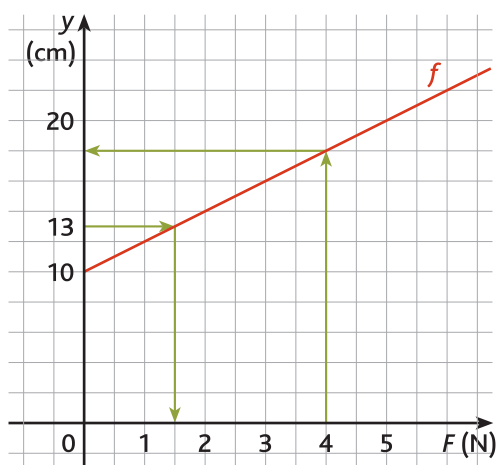
Ez a megfeleltetés olyan **függvény**, amelynek az **értelmezési tartománya**:

$$A = \{4; 6; 8; 9; 10\},$$

a **képelemek halmaza**, vagyis a **függvény értékkészlete**:

$$B = \{2; 3; 5\}$$

3. példa



Grafikonon ábrázoltuk, hogy ha egy 10 cm hosszú, felfüggesztett rugóra különböző súlyokat akasztunk, akkor hogyan változik meg a hosszúsága.

a) Olvassuk le a grafikonról, hogy ha 4 N erő hat, akkor milyen hosszú a rugó.

Mekkora erő hatására lesz 13 cm hosszú a rugó?

b) Adjuk meg a két mennyiség közti összefüggés **matematikai modelljét**.

c) A matematikai modell segítségével határozzuk meg, hogy milyen hosszú lesz a rugó, ha a ráakasztott súly 5,6 N erővel nyújtja.

a) Ha 4 N erő hat, akkor 18 cm hosszú lesz a rugó.
1,5 N hatására lesz 13 cm hosszú a rugó.

b) Táblázatba foglaltunk néhány összetartozó értékpárt.

F (N)	0	1	2	3	4
y (cm)	10	12	14	16	18

A súlyok newtonnal mért mérőszámához rendeltük hozzá a hosszúságok centiméterrel mért mérőszámát.

A kapcsolatot leíró **szám-szám függvény**: $y = 10 + 2F$

Az alaphalmaz és a képhalmaz a pozitív valós számok halmaza.

c) $y = 10 + 2 \cdot 5,6 = 21,2$
5,6 N erő hatására 21,2 cm hosszú lesz a rugó.



Kísérletezz!

© Csoportban dolgozzatok, szervezzétek meg a munkát!



a) Végezzétek el különböző rugók, gumiszalag segítségével az előző példában leírt kísérletet! Adjátok meg az összefüggéseket leíró matematikai modelleket.

b) Centiméter beosztással ellátott (kis emelkedésű) lejtőn gurítsatok le kis autót! Vizsgáljátok az eltelt idő és a megtett út közti kapcsolatot! Változtassátok meg a lejtő meredekségét!

4. példa

Mit jelent a következő kifejezés? $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x}$
Rajzoljuk meg a függvény grafikonját.

☉ **Emlékszel?**

Az $\mathbb{N}$ a természetes számok, az $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

Jelentése: A g függvény szám-szám függvény, a természetes számokhoz valós számokat rendel. Az alaphalmaz az $\mathbb{N}$, a képhalmaz az $\mathbb{R}$.

Minden természetes számnak a négyzetgyöke felel meg: $y = \sqrt{x}$

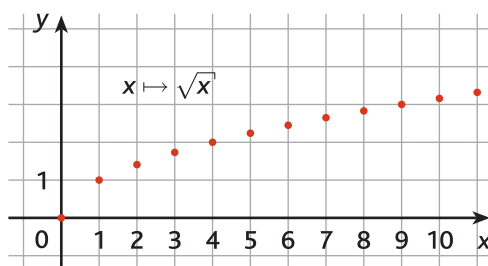
Készítsünk táblázatot.

A függvényértékeket két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3

Rajzoljuk meg a grafikont.

Mivel az alaphalmaz az $\mathbb{N}$, ezért a pontokat nem kötjük össze folytonos vonallal.



FELADATOK

1

Mi lehet az egyes megfeleltetések szabálya? Rajzold meg a grafikonjaikat is!
Döntsd el, hogy melyik megfeleltetés egyértelmű!

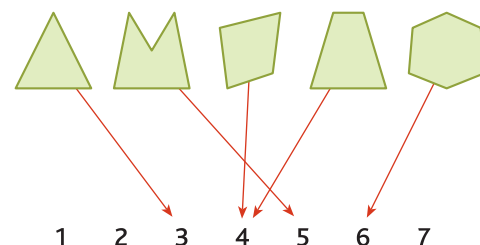
a)

	2	3	4	5	6
0					
1					
2	x				
3	x	x			
4	x	x	x		
5	x	x	x	x	

b)

	0	1	2	3	4
0	x				
1		x			
2		x			
3			x		
4			x		
5				x	

c)



2

A következő megfeleltetések közül melyik függvény? Az alaphalmaz jele legyen U , a képhalmazé K .

a) $U = \{\text{Az osztály tanulói}\}; K = \{\text{Ember}\}$

Minden tanulónak megfeleltetjük a testvérét.

b) $U = \{\text{Sokszögek}\}; K = \mathbb{R}$

Minden sokszöghöz hozzárendeljük területének a mérőszámát.

c) $U = \mathbb{N}; K = \{\text{Prímszámok}\}$

Minden természetes számhoz hozzárendeljük a prímszamosztóit.

☉ **Indokolj!**

Gyakorló
5.01–5.03.



Például célnára kötött csavaranya segítségével készítsetek ingát! Mérjétek meg különböző (1 dm; 2 dm; ...; 10 dm) hosszúságú ingák lengésidejét (10 lengés idejét mérve pontosabb eredményt kaphattok). Foglaljátok táblázatba és ábrázoljátok grafikonon méréseitek eredményét!

Mi a sejtéseitek? Ha elmehetnétek a Holdra vagy a Marsra, akkor ott milyen eredményeket kapnátok?

Kísérletezz!

☉ **Csoportmunkát javasolunk.** Az interneten utánanézhetek a szükséges információknak.

Összefoglalás

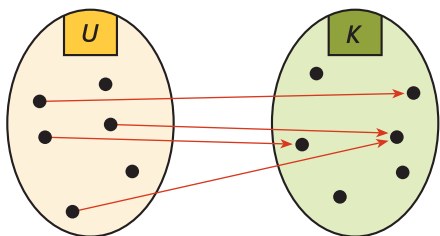
Egy U halmaz elemei és egy K halmaz elemei közti **hozzárendelést, megfeleltetést, kapcsolatot**, idegen szóval **relációt** az általános iskolában alapfogalomnak tekintünk.

Azt az U halmazt, amelynek az elemeihez hozzárendeljük egy K halmaz elemeit, **alaphalmaznak**, a K halmazt **képhalmaznak** nevezzük. (Az alaphalmaz és a képhalmaz lehet ugyanaz a halmaz.)

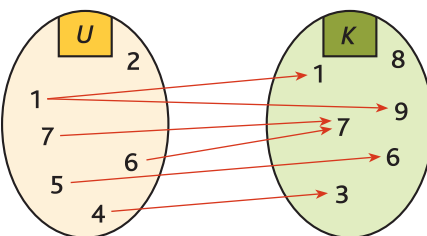
Ha az U alaphalmaz egy x eleméhez hozzárendeljük a K képhalmaz egy y elemét, akkor az y -t az x **képének** nevezzük, és ezt így jelöljük:

$$U \rightarrow K: x \mapsto y$$

Egyértelmű hozzárendelés:

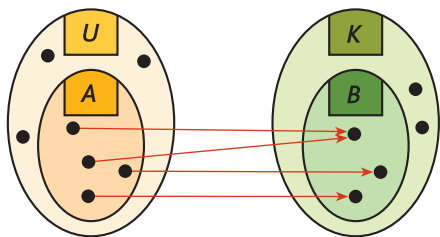


Többértelmű hozzárendelés:



Ha az alaphalmaz elemeinek legfeljebb egy képük van a képhalmazban, akkor egyértelmű hozzárendelésről, ellenkező esetben többértelmű hozzárendelésről beszélünk.

Tekintsük az U alaphalmaz valamely A nem üres részhalmazát (lehet az U halmaz is). Az A halmazon értelmezett függvénynek nevezzük a hozzárendelést, ha az A halmaz minden elemének pontosan egy képe van a K képhalmazban.



Az A halmaz a függvény **értelmezési tartománya**. Az értelmezési tartomány elemei a **független változó** értékei.

A **képelemek**, más szóval **függvényértékek** a képhalmaznak azok az elemei, amelyeket a független változó értékeihez rendelünk. A függvényértékek B halmaza az **értékkészlet** (ez a képhalmaznak egy részhalmaza, lehet maga a képhalmaz is).

Szám-szám függvénynek nevezzük a függvényt, ha az alaphalmaza és a képhalmaza is a valós számok ($\mathbb{R}$) halmaza vagy annak valamely nem üres részhalmaza. Fontosak azok a szám-szám függvények, amelyeknek a szabályát valamilyen **kifejezés** segítségével megfogalmazhatjuk. **Például:**

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3$$

Jelentése:

Az alaphalmaz és a képhalmaz a valós számok halmaza.

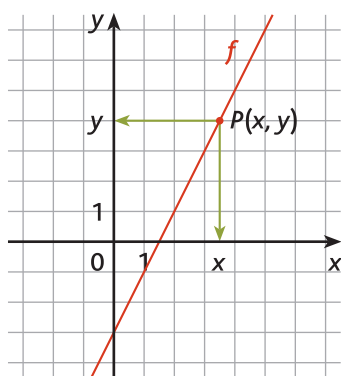
Az f függvény az x valós számnak a $2x - 3$ valós számot felelteti meg.

Használhatjuk a következő jelölésmódokat is:

$$f(x) = 2x - 3; \text{ vagy } y = 2x - 3$$

Ha nem tüntetjük fel, akkor a szám-szám függvény értelmezési tartománya az a **legbővebb számhalmaz**, amelyen a függvény értelmezhető, és a képhalmaz a valós számok halmaza. Ez azt jelenti, hogy ha nincs megadva az értelmezési tartomány, akkor nekünk kell meghatároznunk azt.

A szám-szám hozzárendelés összetartozó értékpárjait ábrázolhatjuk derékszögű koordináta-rendszerben. Így kapjuk a hozzárendelés **grafikonját**. A $P(x, y)$ pont pontosan akkor van rajta a grafikonon, ha az x értékének az y értéke felel meg ebben a hozzárendelésben.



A függvény (és általánosabban a reláció) fogalma viszonylag későn, a 17. és a 18. században alakult ki. Descartes (1596–1650) francia matematikus alkalmazta először ezt a fogalmat különböző kapcsolatok leírására. Leibniz (1646–1716) és Euler (1707–1783) német matematikusok értelmezték és továbbfejlesztették a függvény fogalmát. Ezekre az alapokra építve, sok neves matematikus munkája nyomán teljesedett ki a matematikának a függvényekkel foglalkozó ága. E tudósok közül a legjelentősebb Newton (1642–1727) angol fizikus, csillagász és matematikus. Newton felfedezte a mechanika törvényeit, és az általa kidolgozott függvénytan módszer segítségével le is tudta írni azokat. Módszerének alkalmazásával határozzák meg például egy versenyautó jellemzőit, vagy a Marsra küldött űrhajó pályáját, kezdősebességét, a szükséges üzemanyag mennyiségét stb.



FELADATOK

B1

A következő megfeleltetések közül melyik függvény?

Az alaphalmaz jele legyen U , a képhalmazé K .

Minden természetes számhoz hozzárendeljük a négyzetgyökét.

- a) $U = \mathbb{N}; \quad K = \mathbb{Q};$ b) $U = \mathbb{N}; \quad K = \mathbb{R}$

B2

Fogalmazd meg, hogy mit jelentenek a következő jelölések!

Rajzold meg különböző színnel a megfeleltetések grafikonját!

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto x + 2;$ $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad x \mapsto x - 2$
 b) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad f(x) = 2x;$ $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad g(x) = 2x - 3$
 c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad f(x) = \frac{x}{2};$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x}{4}$
 d) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}; \quad f(x) = x^2;$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^2 + 2$

B3

Legyen az alaphalmaz $U = \mathbb{R}$, a képhalmaz $K = \mathbb{Z}$.

Minden valós számhoz hozzárendeljük az egészre kerekített értékét.

Függvény-e ez a hozzárendelés? Rajzold meg a grafikonját!

☉ Minden természetes szám négyzetgyöke racionális szám?

☉ Ha bizonytalan vagy, a kislexikonban nézd meg a betűk jelentését!

☉ Szükség esetén készíts táblázatot!

Gyakorló

5.04–5.05.;

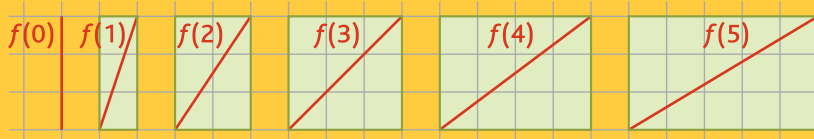
Feladatgyűjtemény
3.1.07–09.

☉ Figyeld fel arra, hogy például 1,5-nek, illetve –1,5-nek mi az egészre kerekített értéke?



A természetes számokhoz rendeljük rendre hozzá az ábrán látható szakaszok hosszát. A rács egy beosztása a hosszúságegység.

- a) Rajzold meg a hozzárendelés grafikonját!
 b) Határozd meg az $f(6)$; $f(7)$; $f(8)$; $f(9)$ függvényértékeket!
 c) Add meg a hozzárendelés szabályát, majd az $f(100)$ értéket!



Fejtőő!

☉ A függvényértékeket a megfigyelhető szabály szerint képezd!

EGYENES ARÁNYOSSÁG, LINEÁRIS FÜGGVÉNY

1. példa

Írjuk le és vizsgáljuk az idő és a hőmérséklet közti kapcsolatot a következő két fizikai folyamatban.

- Egy testet egyenletesen melegítünk úgy, hogy kétpercenként 3°C -kal nő a hőmérséklete.
- Egy testet egyenletesen hűtünk úgy, hogy kétpercenként 3°C -kal csökken a hőmérséklete.

☉ Az időmérés kezdetét megelőző időpontokat negatív számokkal jellemezzük.

t (min)	-3	-2	-1	0	1	2	3
T ($^\circ\text{C}$)	$-\frac{9}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{9}{2}$

- A fizikai folyamat leírására *matematikai modellt* adunk.

A hozzárendelés alaphalmaza az idő mérőszámainak halmaza; képhalmaza a hőmérséklet mérőszámainak halmaza.

Az időmérés kezdőpontjának azt az időpillanatot választjuk, amikor a test hőmérséklete 0°C .

Bármilyen időponthoz tartozik valamilyen hőmérséklet (ha feltételezzük, hogy a testnek bármekkora lehet a hőmérséklete). Ez a hozzárendelés *függvény*, az értelmezési tartománya és az értékkészlete a valós számok halmaza.

1-hez $\frac{3}{2} \cdot 1$; 2-höz $\frac{3}{2} \cdot 2$; 3-hoz $\frac{3}{2} \cdot 3$; ... függvényérték tartozik.

Növekvő időadatokhoz arányosan *növekvő* hőmérsékletek tartoznak. A két mennyiség között **egyenes arányosság** van.

Az összetartozó értékpárok aránya állandó, $\frac{3}{2}$.

A $0:0$ arányt nem értelmezzük.

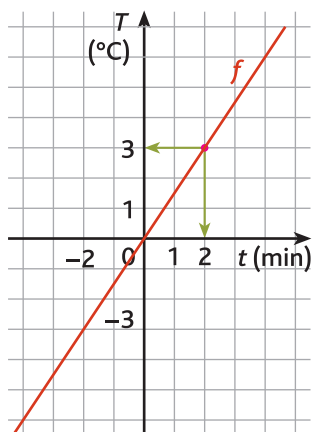
A függvény grafikonja az origón átmenő egyenes, amelynek meredekségét a $\frac{3}{2}$ arány határozza meg.

A t (min) időpillanatban $\frac{3}{2} \cdot t$ $^\circ\text{C}$ a hőmérséklet.

A hozzárendelést leíró kifejezés: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \frac{3}{2}t$

Más alakban: $T = \frac{3}{2}t$ vagy $f(t) = \frac{3}{2}t$

Mivel az idő mérőszámai folytonosan kitöltik az időtengelyt, és bármilyen időponthoz tartozik hőmérséklet, a függvény grafikonjának pontjait folytonos vonallal kötjük össze.



- Ugyanazokból a feltételekből indulunk ki, mint az a) példában.

t (min)	-3	-2	-1	0	1	2	3
T ($^\circ\text{C}$)	$\frac{9}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{9}{2}$

Növekvő időadatokhoz arányosan *csökkenő* hőmérsékletek tartoznak. A két mennyiség között most is egyenes arányosság van.

»»

A nullától különböző összetartozó értékpárok aránya $-\frac{3}{2}$.

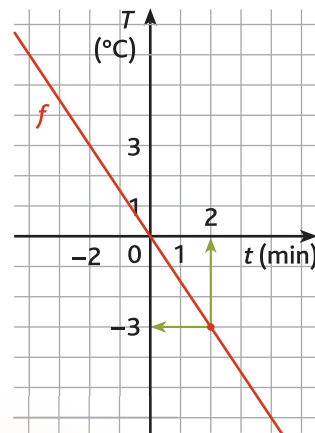
A függvény grafikonjának meredeksége: $-\frac{3}{2}$

A t (min) időpillanatban $-\frac{3}{2} \cdot t$ °C a hőmérséklet.

A hozzárendelés szabálya: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto -\frac{3}{2}t$

Más alakban: $T = -\frac{3}{2}t$ vagy $f(t) = -\frac{3}{2}t$

A hozzárendelés grafikonját folytonos vonallal húzzuk meg.



2. példa

Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonját közös koordináta-rendszerben:

$$e(x) = 2,5x; \quad f(x) = 2,5x + 2; \quad g(x) = 2,5x - 2$$

Az alaphalmaz és a képhalmaz az $\mathbb{R}$.

Írjuk közös táblázatba a három függvény néhány összetartozó értékpárját:

x	-1	0	1	2	3
$e(x) = 2,5x$	-2,5	0	2,5	5	7,5
$f(x) = 2,5x + 2$	-0,5	2	4,5	7	9,5
$g(x) = 2,5x - 2$	-4,5	-2	0,5	3	5,5

Az $e(x) = 2,5x$ függvény egyenes arányosság.

Összetartozó értékpárjainak aránya 2,5. A függvény grafikonja olyan egyenes, amely átmegy az origón, és amelynek a meredeksége 2,5.

Az $f(x) = 2,5x + 2$ függvény nem egyenes arányosság.

Ez a függvény minden x értékhez 2-vel nagyobb számot rendel, mint az $e(x)$ egyenes arányosság, ezért grafikonja párhuzamos az $e(x)$ függvény grafikonjával, és az y tengelyt a 2 pontban metszi.

A $g(x) = 2,5x - 2$ függvény sem egyenes arányosság.

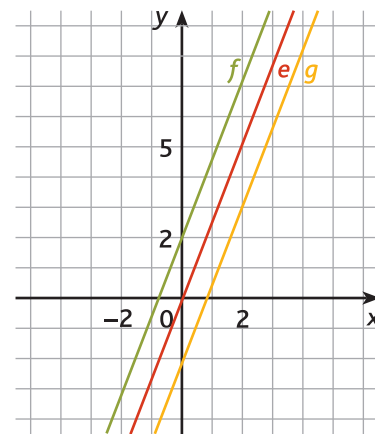
Ez a függvény minden x értékhez 2-vel kisebb számot rendel, mint az $e(x)$ egyenes arányosság, ezért grafikonja párhuzamos az $e(x)$ függvény grafikonjával, és az y tengelyt a -2 pontban metszi.

Mindhárom függvény képe egyenes, ezért ezeket **lineáris függvényeknek** nevezzük (linea = egyenes vonal).

Ezek a függvények felírhatók olyan alakban is, amelyben az x^1 szerepel:

$$e(x) = 2,5 \cdot x^1; \quad f(x) = 2,5 \cdot x^1 + 2; \quad g(x) = 2,5 \cdot x^1 - 2$$

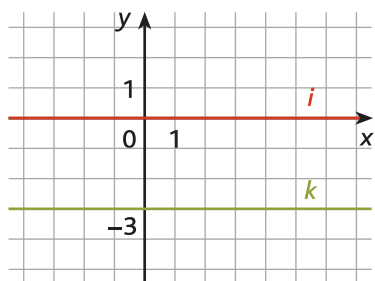
Ezért ezeket a függvényeket **elsőfokú függvényeknek** is nevezzük.



3. példa

Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonját közös koordináta-rendszerben:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; i(x) = 0; \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; k(x) = -3$$


Az i függvény minden x értékhez 0-t rendel hozzá.

Ez a függvény felírható a következő alakban:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; i(x) = 0 \cdot x$$

Ezért ez a függvény egyenes arányosság, az arányossági tényező 0.

Az i függvény képe egy olyan egyenes, amely átmegy az origón, és amelynek a meredeksége 0. **Ez az egyenes az x tengely.**

A k függvény minden x értékhez -3 -at rendel hozzá.

Felírható a következő alakban: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; k(x) = 0 \cdot x - 3$

Ezért ez lineáris függvény, de nem egyenes arányosság.

A függvény képe olyan egyenes, amely az y tengelyt a -3 pontban metszi, és amelynek a meredeksége 0. Ez az egyenes **párhuzamos az x tengellyel.**

Az i és a k függvény minden x értékhez ugyanazt a számot rendeli hozzá, ezért ezeket a függvényeket **konstans függvényeknek** is nevezzük (konstans = állandó).

Ezek a függvények felírhatók a következő alakban is (mivel $x^0 = 1$, ha $x \neq 0$):

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; i(x) = 0 \cdot x^0;$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; k(x) = -3 \cdot x^0$$

Ezért ezeket a függvényeket **nulladfokú függvényeknek** is nevezzük.

☉ Mivel a 0^0 hatványt nem értelmezzük, ennél a felírásnál az $x = 0$ értéket ki kell zárunk.

☉ Mit tudtok a hőmérséklet mérésének történetéről? A tudományos életben mi a hőmérséklet mértékegysége?


Ma az országok többségében a hőmérséklet mérésére (a mindennapi életben) a Celsius-skálát használjuk. Az Egyesült Államokban (és még néhány országban) a Fahrenheit-skála használatos. A Celsius-fokban mért hőmérsékletet (C) a következő szabály szerint számíthatjuk át Fahrenheit-fokba (F):

$$F = 1,8C + 32$$

a) Hány $^{\circ}F$ -on fagy meg, illetve forr fel a víz?

b) Jack hőmérséklete $100^{\circ}F$.

Mennyi ez $^{\circ}C$ -ban kifejezve?


☉ Megfigyelted? A két változó szerepet cserélt!



Amos Dolbear amerikai fizikus és feltaláló 1897-ben a Tücsök mint hőmérő című cikkében tette közzé a megfigyeléseire alapozott összefüggést a tücsök cripeléseinek száma és a hőmérséklet között:

$$T = 10 + \frac{N - 40}{7}$$

ahol T a hőmérséklet $^{\circ}C$ -ban kifejezve, N pedig a tücsökcripelések száma 1 perc alatt.

Ábrázold a képlet alapján a hőmérséklet függvényében a tücsökcripelések percenkénti számát $5^{\circ}C$ -tól $20^{\circ}C$ -ig, egész fokoknál! Ennek a függvénynek is add meg kifejezéssel a hozzárendelési szabályát!

Értelmezések

Két változó mennyiséget **egyenesen arányosnak** mondunk, ha valahányszorosára változik az egyik mennyiség, ugyanannyiszorosára változik a másik mennyiség is.

Ha egyenes arányosság van egy A és egy B számhalmaz elemei között, akkor az összetartozó értékpárok aránya (a $0:0$ arány kivételével) állandó:

$$\frac{y}{x} = a \quad (x \neq 0)$$

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy az A halmaz bármelyik x értékéhez az ax érték tartozik a B halmazból. Ezért az egyenes arányosságot így is definiálhatjuk:

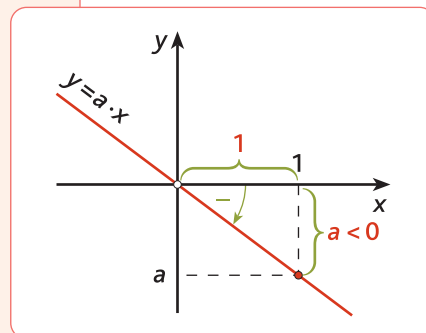
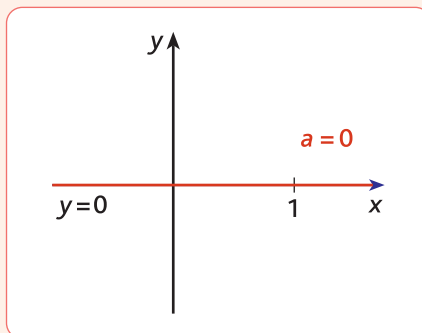
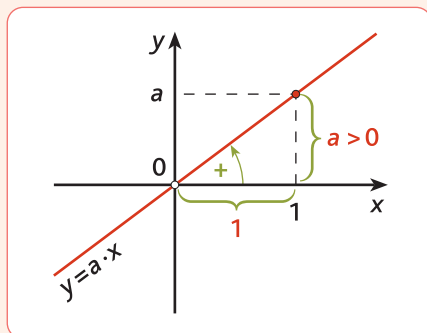
A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán (vagy valamely részhalmazán) értelmezett

$$e: x \mapsto ax$$

függvényt egyenes arányosságnak nevezünk.

Az egyenes arányosság grafikonja a kezdőponton (origón) átmenő egyenes.

Az egyenes „állása” az a aránytól függ, ezért az a -t **meredekségnek** vagy **irány-tényezőnek** nevezünk.



Ha $a > 0$, akkor növekvő x értékekhez növekvő y értékek tartoznak, a függvény **növekvő**. Az x tengelyt pozitív hegyesszöggel elforgatva az origó körül, kapjuk meg a grafikont.

Ha $a = 0$, akkor növekvő x értékekhez ugyanakkora (0) y értékek tartoznak, a függvény **konstans**. Az x tengely a grafikon.

Ha $a < 0$, akkor növekvő x értékekhez csökkenő y értékek tartoznak, a függvény **csökkenő**. Az x tengelyt negatív hegyesszöggel elforgatva az origó körül, kapjuk meg a grafikont.

A valós számok halmazán (vagy valamely részhalmazán) értelmezett

$$f: x \mapsto ax + b, \text{ másképpen } f(x) = ax + b$$

függvényt lineáris függvénynek nevezünk.

A lineáris függvény grafikonja egy olyan egyenes, amely párhuzamos az

$$e: x \mapsto ax, \text{ másképpen } e(x) = ax$$

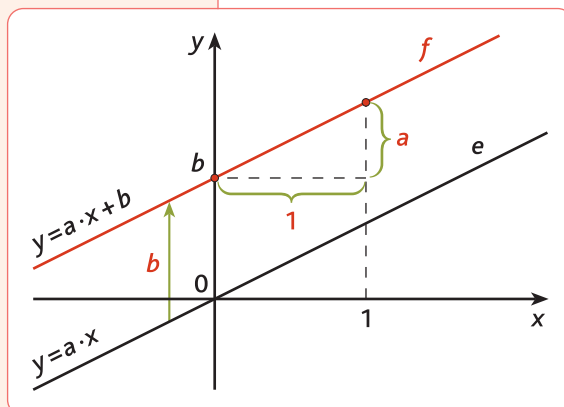
egyenese arányosság grafikonjával, és az y tengelyt a b pontban metszi.

Ha $a \neq 0$, akkor ezt a speciális lineáris függvényt **elsőfokú függvénynek** nevezzük. Az elsőfokú függvény grafikonja *nem párhuzamos* az x tengellyel.

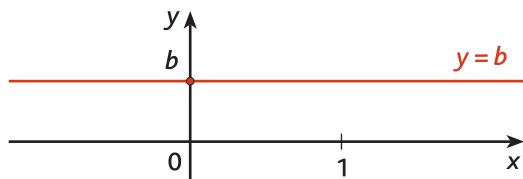
© A tankönyv 53. oldalán már foglalkoztunk az egyenes arányossággal. Most függvényteni vizsgálatokkal egészítjük ki a korábban tanultakat.

© Megfigyelted, hogy $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$ esetén hogyan helyezkedik el a grafikon?

© A „konstans” szó magyar jelentése: állandó.



»



Ha $a = 0$, akkor ezt a speciális lineáris függvényt nulladfokú vagy konstans függvénynek nevezzük:

$$x \mapsto b, \text{ másképpen } f(x) = b$$

A konstans függvény minden x értékhez a b számot rendeli hozzá, ezért a függvény grafikonja párhuzamos az x tengellyel.

Az egyenes arányosság olyan lineáris függvény, amelyben $b = 0$.

Ha az $a = 0$ és $b = 0$, akkor a következő lineáris függvényt kapjuk:

$$x \mapsto 0, \text{ másképpen } f(x) = 0$$

Ez konstans függvény és egyenes arányosság. Grafikonja az x tengely.

FELADATOK

3

Az egyes feladatokban a függvények grafikonjait közös koordináta-rendszerben, különböző színnel rajzold meg!

Határozd meg az értelmezési tartományt és az értékkészletet!

Melyik egyenes arányosság?

Melyik elsőfokú, melyik nulladfokú (konstans) függvény?

Egy-egy feladatban hasonlítsd össze a grafikonokat!

Melyik növekvő melyik csökkenő függvény?

© Ha az x változó értéke növekszik, akkor hogyan változik a függvény értéke?

a) $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; e(x) = x;$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 3x;$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = -3x;$ $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = 4x$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{3}{2}x;$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{3}{2}x + 2;$

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{3}{2}x - 3;$ $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -\frac{3}{2}x + 3$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2,4x + 3;$ $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}; x \mapsto -0,6x + 5;$

$h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}; x \mapsto -1,5x - 5;$ $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}; i(x) = -5$

Fejtörő!



Egy négyzet alakú park egyik csúcsában szobor áll. A park egy-egy oldala 100 m hosszú. Tódor a szobortól indulva, egyenletes sebességgel 8 perc alatt körülmegy a parkot. Mekkora távolságra van Tódor a szobortól az indulástól számított 1, 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8. perc végén?

a) Vázold fel (esetleg kisebb pontatlansággal) azt a grafikont, amely szemlélteti, hogyan változott a séta ideje alatt Tódor távolsága a szobortól!

b) Mely időtartamokban van és melyekben nincs lineáris függvénykapcsolat a szobortól való távolság és az eltelt idő között? Méréssel vagy számítással hogyan ellenőrizheted sejtésed helyességét?

© Szerkessz négyzetet! Mérj, de számolhatsz is, ha eszedbe jut Pitagorasz tétele!

4

A valós számokon értelmezett függvények grafikonját látod az alábbi ábrákon. Add meg a hozzárendelések szabályát kifejezéssel!

1 Melyik elsőfokú függvény?

2 Melyik nulladfokú függvény?

3 Melyik egyenes arányosság?

4 Melyik konstans függvény?

5 Melyik lineáris függvény?

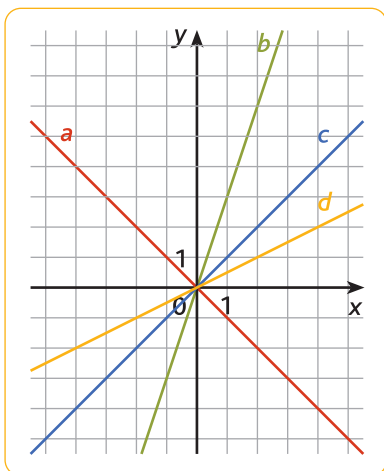
Gyakorló

5.06–5.15.;

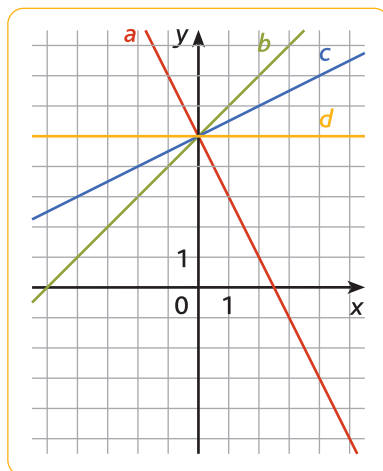
Feladatgyűjtemény

3.2.01–06.

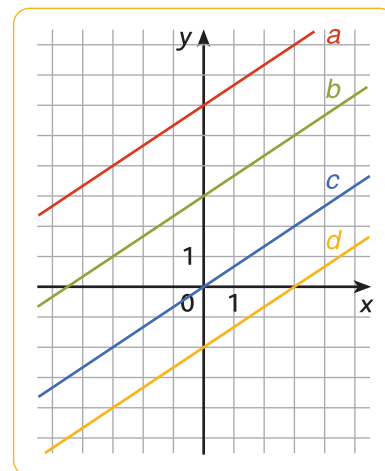
a)



b)



c)



5

Írd le függvénnyel az összetartozó értékpárok közti összefüggést!

Add meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

Rajzold meg a függvény grafikonját!

a) Ha Lotte egy szál szegfűt 1,5 €-ért árul, akkor mennyibe kerül

az 1; 2; 3; 15; x számból álló csokor;

az 1; 2; 3; 15; x számból álló csokor, ha 2 €-ért becsomagoltatjuk azt?

b) Ha Ingrid 1 €-ért 4 db paprikát ad, akkor mennyibe kerül

1 db; 2 db; 10 db; 16 db; x db paprika?

Mennyit fizetünk 1 db; 2 db; 10 db; 16 db; x db paprikáért, ha 0,5 €-ért zacskót is kérünk hozzá?

c) Egy 0 °C-os testet hűteni kezdenek úgy, hogy 2 percenként 5 °C-kal csökken a hőmérséklete.

Mekkora a hőmérséklete 1 perc; 2 perc; 10 perc; t perc múlva?

d) Egy 7,5 cm hosszú gyertyát meggyújtanak, és percenként 0,2 cm hosszú darab ég el belőle. Milyen hosszú lesz a gyertya a t -edik percben?



Egy természetkolónia a talajszinttől indulva az első évben 4 m magas várat épített, majd minden évben feleakkorával növelik a vár magasságát, mint amennyit az előző évben építettek. A vártól nem messze egy ciprus növekedik, amely az első év elején 4 m magas volt, és négyévenként további 3 m-rel nő a magassága.

a) Ábrázold közös koordináta-rendszerben a természetvár, illetve a ciprus magasságának változását!

b) A vár vagy a ciprus volt-e magasabb 4, illetve 5 év elteltével? Mennyivel?

c) Hányadik év végére lesz a természetvár magasabb 8 m-nél?

Figyelempróba

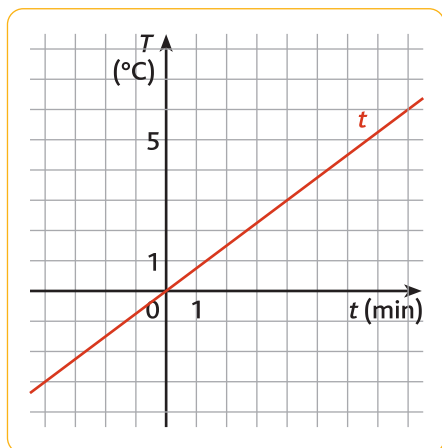


MENNYISÉGEK KÖZTI KAPCSOLATOK ÁBRÁZOLÁSA GRAFIKONNAL

HŐMÉRSÉKLET-VÁLTOZÁS

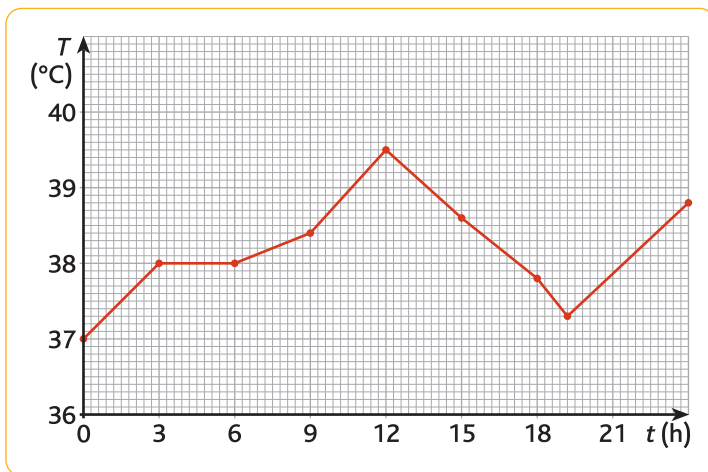
FELADATOK

- 6 6 dl $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os alkoholt melegítettünk főzőlapon. A hőmérséklet változását szemlélteti a grafikon.



- a) Add meg kifejezéssel a hőmérséklet-változást leíró függvényt!
 b) Hogyan változna a hőmérséklet, ha 6 dl
 ① $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os; ② $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os; ③ $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os
 alkoholt melegítenénk ugyanilyen körülmények közt?
 Mindhárom esetben írd le függvényel a hőmérséklet változását!
 Rajzold meg közös koordináta-rendszerben a grafikonokat!
 c) Hogyan változna a hőmérséklet, ha
 ① 1 dl; ② 2 dl; ③ 3 dl; ④ 12 dl; ⑤ 5 dl
 $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os alkoholt melegítenénk ugyanilyen körülmények közt?
 Mindegyik esetben írd le függvényel a hőmérséklet változását!
 Rajzold meg közös koordináta-rendszerben a grafikonokat!

- 7 Egy beteg hőmérsékletének változását ábrázolja a grafikon.



- a) Mikor volt a legmagasabb a hőmérséklete?
 b) Mely időszakban nem változott a hőmérséklete?
 Hány fokot mutatott ekkor a hőmérő?
 c) Mely időszakban csökkent a hőmérséklete?
 Óráként átlagosan mennyit?
 d) Mely időszakban volt $38\text{ }^{\circ}\text{C}$ alatt a hőmérséklete?

- 8 Ábrázold grafikonon a hőmérséklet-változást, és válaszolj a kérdésekre!

Gyakorló 5.16–5.23.;
 Feladatgyűjtemény
 3.1.04–06. 3.2.09.

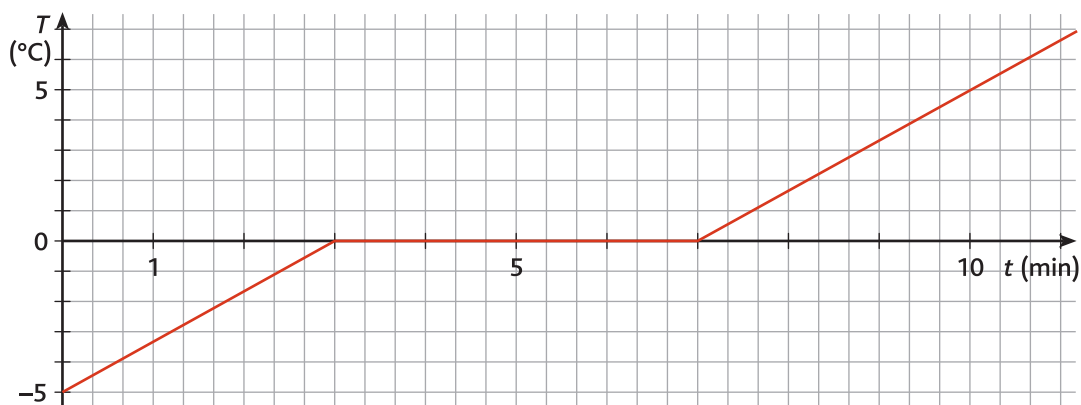
Mikor Leia hercegnő Csubakkával elmegy Jabba palotájába, hogy kiszabadítsa Han Solot, először kiolvastja a karbonitból. A karbonit hőmérséklete $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ volt, amikor az óra elindult, és 3 perc alatt emelkedett $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra. Mekkora a hőmérséklete, egyenletes melegedés mellett, amikor

- ① $t = 1\text{ min}$; ② $t = 2\text{ min}$; ③ $t = 8\text{ min}$; ④ $t = -2\text{ min}$ (mit jelent ez)?
 Mekkora a hőmérséklete a t -edik perc végén? Mennyi idő alatt melegszik fel $36,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra?

9 -5 °C-os jeget melegítünk.

Olvasd le a grafikonról az állapotváltozás folyamatát!

Mi történt a 3. és a 7. perc között?



MOZGÁSGRAFIKONOK

1. példa

Anna és Bea egyenletes sebességgel egyszerre indul egy közös cél felé. Anna másodpercenként 0,5 m utat tesz meg. Bea háromszor olyan gyorsan halad, mint Anna. Csilla ugyanakkor indul, ugyanakkora sebességgel megy, mint Anna, de ellenkező irányba tart. Írjuk le függvényekkel az eltelt idő és a megtett elmozdulások közti összefüggéseket.

Készítsünk közös táblázatot. Rajzoljuk meg a függvények grafikonját.

Idő (s)	0	1	2	3	4
A: elmozdulás (m)	0	0,5	1	1,5	2
B: elmozdulás (m)	0	1,5	3	4,5	6
C: elmozdulás (m)	0	-0,5	-1	-1,5	-2

Az egyenletes mozgás során a megtett út és az eltelt idő összetartozó értékeinek hányadosa, a mozgó test v sebessége állandó:

$$v_{\text{Anna}} = \frac{s}{t} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Az Anna mozgását leíró függvény: $a: t \mapsto 0,5t$

Bea sebessége háromszorosa Anna sebességének, ezért minden időpillanathoz háromszor akkora elmozdulás tartozik, mint Anna esetén.

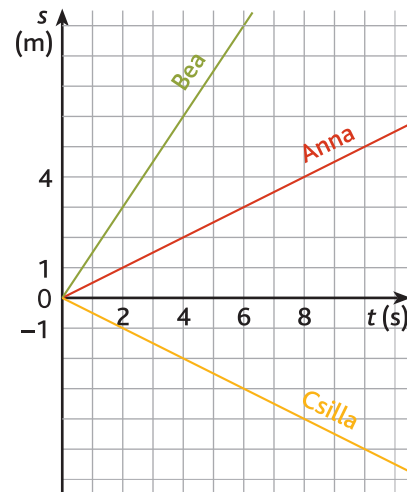
A Bea mozgását leíró függvény: $b: t \mapsto 1,5t$

Bea mozgásgrafikonja meredekebb Anna mozgásgrafikonjánál.

Csilla sebessége ellentettje Annáénak, ezért Csilla elmozdulásának mérőszámai ellentettjei az Anna elmozdulását jellemző adatoknak.

A Csilla mozgását leíró függvény: $c: t \mapsto -0,5t$

A grafikon meredeksége ellentétes értelmű, mint az előző függvényeké.



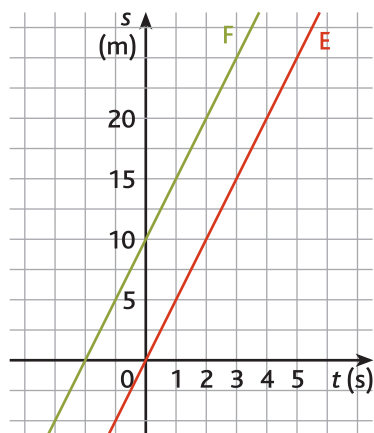
☉ Ha a test a megfigyelési pontból indul, akkor az eltelt idő (t) és a megfigyelési ponttól mért elmozdulás (s) összetartozó értékei között egyenes arányosság van: $s = vt$

2. példa

Endre és Feri $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel, egyenletes mozgással haladva kerékpároznak. Amikor a megfigyelést elkezdjük, akkor Endre éppen elhalad a megfigyelőpont előtt. Feri már 10 m-rel előrébb jár. Írjuk le és jellemezzük az eltelt idő és a megtett elmozdulások közti összefüggéseket.

Idő (s)	0	1	2	3	4
E: elmozdulás (m)	0	5	10	15	20
F: elmozdulás (m)	10	15	20	25	30

Készítsünk közös táblázatot.



Rajzoljuk meg a függvények grafikonját.

Endre akkor ér a megfigyelőponthoz, amikor az időt mérni kezdjük. Az ő esetében az elmozdulás nagysága egyenesen arányos az idővel:

$$e: t \mapsto 5t$$

Feri minden időpillanatban 10 m-rel nagyobb távolságra van a megfigyelőponttól, mint Endre. Az összefüggést lineáris függvénnyel írhatjuk le:

$$f: t \mapsto 5t + 10$$

A függvény grafikonja egyenes, amely a kezdőponttól 10 egység távolságban metszi az y tengelyt, itt olvasható le, hogy a mérés kezdetén hol volt Feri.

A két kerékpáros sebessége egyenlő, ezért a két grafikon párhuzamos.

3. példa

Kálmán elindul Boncidáról Hencidára, és egyenletes sebességgel óránként 3 km utat tesz meg. 45 perccel ezután Miklós is elindul Kálmánnal szemben Hencidáról Boncidára, az ő sebessége $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Hencida és Boncida távolsága 11 km.

Írjuk le az idő és a megtett elmozdulások közti összefüggéseket.

Rajzoljuk meg a függvények grafikonját.

Egy órával Kálmán indulása után milyen távolságra lesznek egymástól?

Mikor és hol találkoznak? Melyikük ér hamarabb célba?

Legyen a megfigyelőpont Hencidán.

A t (idő) tengelyen egy beosztás 10 percet jelent.

Kálmán 11 km-ről indulva közeledik Hencidához, ezért az elmozdulását így írhatjuk le az idő függvényeként:

$$k: t \mapsto -3t + 11$$

Miklós $\frac{3}{4}$ óra múlva indul, tehát ennyivel rövidebb idő óta van úton, mint Kálmán:

$$m: t \mapsto 4\left(t - \frac{3}{4}\right)$$

»»

»»

A grafikonról leolvasható:

1 órával Kálmán indulása után 7 km-re vannak egymástól.

2 órával Kálmán indulása után találkoznak, Hencidától 5 km-re.

Kálmán 3 óra 40 perc alatt ér célba, Miklós 10 perccel előtte már megérkezett.

Algebrai megoldás:

A találkozás időpontja:

$$-3t + 11 = 4\left(t - \frac{3}{4}\right)$$

$$-3t + 11 = 4t - 3 \quad / + 3$$

$$-3t + 14 = 4t \quad / + 3t$$

$$14 = 7t \quad / : 7$$

$$2 = t$$

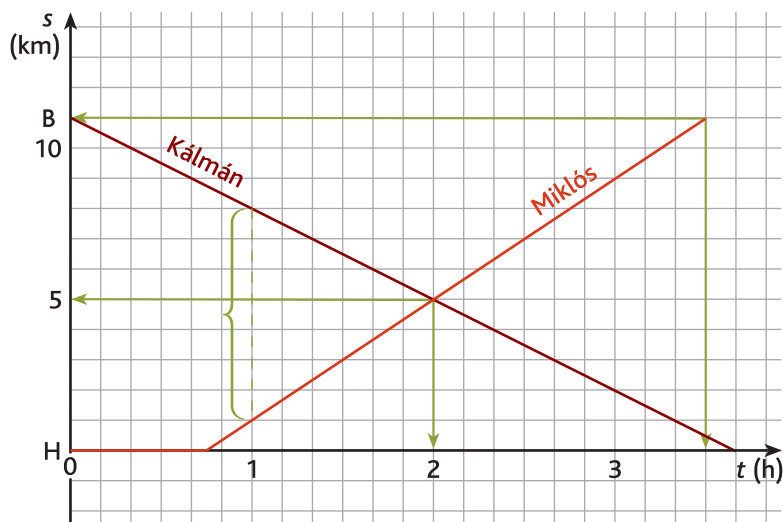
$t = 2$ óra.

A találkozás távolsága

Hencidától:

$$s = -3t + 11$$

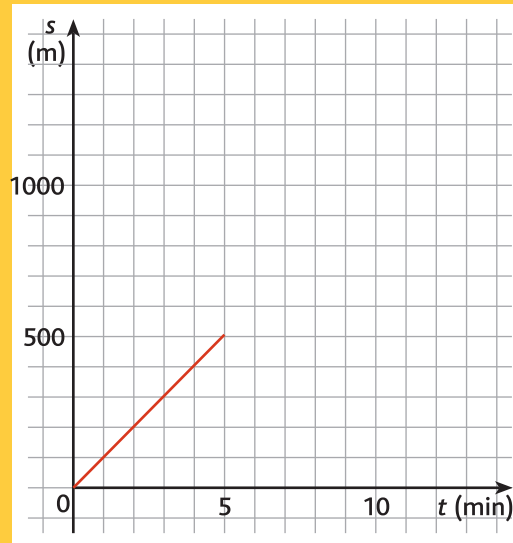
$$s = -3 \cdot 2 + 11 = 5 \text{ (km)}$$



Andor és Bíbor lakása 1400 m távolságra van egymástól. Egy este egyenletes sebességgel egyszerre elindulnak egymás felé. Andor mozgásának első 5 percét szemlélteti a grafikon. Andorral egy kutya is van, amely az indulás pillanatától kezdve előreszalad háromszor akkora sebességgel, mint Andor. Amikor a kutya találkozik Bíborral, azonnal visszafut Andorhoz, majd a találkozás után azonnal vissza Bíborhoz. Az utolsó métereket már Bíborral együtt teszi meg Andorig. Bíbor sebessége a kutyával való találkozás előtt feleakkora volt, mint Andoré, de utána ő is akkora sebességgel haladt, mint Andor.

- Rajzold meg hármójuk mozgásgrafikonját!
- Mekkora távolságra vannak egymástól a kutyával való találkozások időpontjaiban?
- Mikor és hol találkoznak egymással?

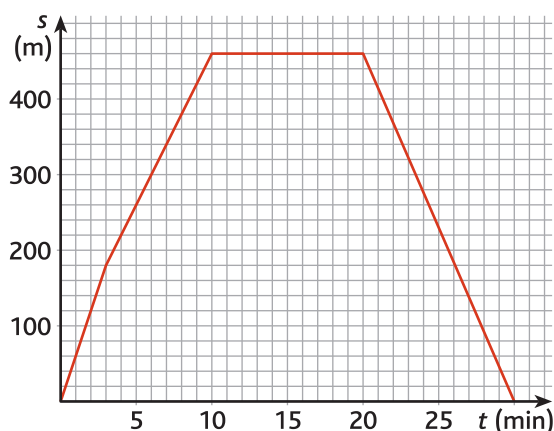
Figyelempróba



Rajzoljuk le egy hatemeletes ház liftjének idő-út grafikonját, ha a sebessége $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, és az egyes szintek közti távolság 3 m. A liftet a következő emeletekre hívják: 0 (földszint), 5., 4., 6., 4. –1. (mélygarázs), 3., 0. A lift minden „megállóban” 3 másodpercig várakozik, és csak azután indul el a következő hívás helyére.

© A négyzetrácsos füzet egy beosztását 3 s-nak, illetve 3 m-nek célszerű választanunk.

4. példa



Egy sétálgató ember mozgásáról készült ez a grafikon. Írjuk le a grafikon segítségével ezt a sétát.

Az első 3 percben percenként 60 m-t megtéve egyenletes sebességgel távolodott a kiindulási ponttól.

Ezután lassabban (kisebb a grafikon meredeksége), $40 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ sebességgel ment 7 percig.

A 10. perc végén 460 m távolságra volt a kiindulási ponttól.

A 10. perctől a 20. percig nem változott a kiindulási ponttól mért távolsága (a grafikonnak ez a szakasza párhuzamos az időtengellyel), tehát megállt a megfigyelt személy.

A 20. percben visszafordult, egyenletesen közeledett a kiindulási ponthoz, és 10 perc alatt visszaért, $46 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ sebességgel haladt.

FELADATOK

10

Készíts néhány összetartozó értékpárral táblázatot! Írd le függvénnyel az idő-út összefüggést! Rajzold meg a függvény grafikonját!

- a) Egy jármű a megfigyelési pontból indul, sebessége $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A négyzetrácsos füzet egy beosztását 1 s-nak, illetve 20 m-nek válasszuk.

- b) Egy jármű a megfigyelési ponttól 500 m távolságra lévő pontból indul a megfigyelési pont felé. A sebessége $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A négyzetrácsos füzet egy beosztása legyen 2 s, illetve 50 m.

- c) Egy jármű a megfigyelési ponttól 20 m távolságra lévő pontból indul. A sebessége $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **A négyzetrácsos füzet három beosztását válasszuk 1 s-nak és 1 beosztását 5 m-nek.**

Gyakorló

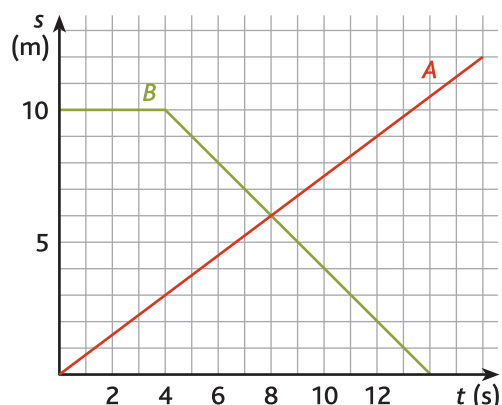
5.24–5.30.;

Feladatgyűjtemény

3.1.01–03., 3.1.07–08.,

3.2.10.

• Merre mehet ez a jármű?



11

Anna és Bea egymással szemben állnak egy úton.

Előbb Anna, később Bea elindul a másik felé.

A két lány mozgásának a grafikonját elemezve válaszolj a következő kérdésekre:

- Mennyivel később indult Bea, mint Anna?
- Milyen távol álltak egymástól az elindulás előtt?
- Mikor és hol találkoztak?
- Hány métert tett meg Anna, illetve Bea 1 másodperc alatt?

> A SZOROZAT MINT FÜGGVÉNY

1. példa

Egy sorozat első eleme: $a_1 = 5$. Minden további elem 2-vel nagyobb, mint az előző. Adjuk meg a sorozat néhány további elemét, majd a 100. elemét.

Keressünk összefüggést az elem sorszáma és az elem között.

A sorozat

első eleme: $a_1 = 5 + 0 \cdot 2 = 5$;

második eleme: $a_2 = 5 + 1 \cdot 2 = 7$;

harmadik eleme: $a_3 = 5 + 2 \cdot 2 = 9$;

negyedik eleme: $a_4 = 5 + 3 \cdot 2 = 11$;

$\vdots$

századik eleme: $a_{100} = 5 + 99 \cdot 2 = 203$;

$\vdots$

n -edik eleme: $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 2$

A sorozatot olyan függvénynek is tekinthetjük, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. Az 1-hez rendeljük a sorozat első elemét, a 2-höz a sorozat második elemét stb.

A hozzárendelés szabályát megadhatjuk például a következő alakban is:

$$n \mapsto 5 + (n - 1) \cdot 2; \quad f(n) = 5 + (n - 1) \cdot 2$$

Megfigyelted a szabályt?

1. elem: $a_1 = 5 + (1 - 1) \cdot 2$

2. elem: $a_2 = 5 + (2 - 1) \cdot 2$

3. elem: $a_3 = 5 + (3 - 1) \cdot 2$

4. elem: $a_4 = 5 + (4 - 1) \cdot 2$

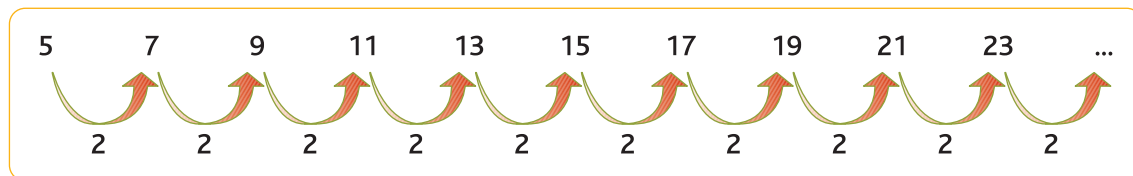
$\vdots$

100. elem: $a_{100} = 5 + (100 - 1) \cdot 2$

A második elemtől kezdve mindegyik elem 2-vel nagyobb az előzőnél.

Sokszor érdekes eredményt kapunk, ha vizsgáljuk a sorozat **különbségsorozatát**, vagyis a szomszédos elemek különbségéből álló sorozatot.

A különbséget mindig úgy képezzük, hogy az elemből az előtte lévő elemet vonjuk ki. Például az előző feladatban:



A különbségsorozat minden eleme 2, vagyis csupa egyenlő elemből áll.

Értelmezések

A pozitív egész számok halmazán értelmezett függvényt **sorozatnak** nevezzük. Számtani sorozatnak nevezzük a sorozatot, ha a szomszédos elemek különbsége állandó.

Gyakorló
5.31–5.35.



Tekintsük az 1. példában adott sorozat hatodik elemét: $a_6 = 15$

Számítsd ki az ① a_5 és az a_7 ; ② az a_4 és az a_8 ; ③ az a_3 és az a_9 számtani átlagát! Magyarázd meg a tapasztaltakat!

Fejtörő!

2. példa

Egy sorozat első eleme: $a_1 = 3$. Minden további elem 2-szerese az előzőnek. Adjuk meg a sorozat néhány további elemét, majd a 10. elemét.

Keressünk összefüggést az elem sorszáma és az elem között.

Megfigyelted a szabályt?

1. elem: $a_1 = 3 \cdot 2^{(1-1)}$

2. elem: $a_2 = 3 \cdot 2^{(2-1)}$

3. elem: $a_3 = 3 \cdot 2^{(3-1)}$

4. elem: $a_4 = 3 \cdot 2^{(4-1)}$

⋮

10. elem: $a_{10} = 3 \cdot 2^{(10-1)}$

A második elemtől kezdve mindegyik elem 2-szerese az előzőnek.

A sorozat

első eleme: $a_1 = 3 \cdot 2^0 = 3 \cdot 1 = 3$;

második eleme: $a_2 = 3 \cdot 2^1 = 3 \cdot 2 = 6$;

harmadik eleme: $a_3 = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$;

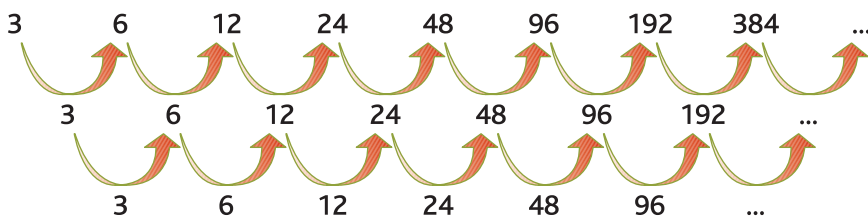
negyedik eleme: $a_4 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$;

⋮

tizedik eleme: $a_{10} = 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$;

⋮

n -edik eleme: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

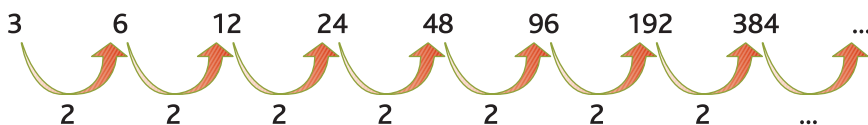


Képezzük és vizsgáljuk a sorozat különbségsorozatát, majd a különbségsorozat különbségsorozatát stb.

Mindegyik különbségsorozat megegyezik az eredeti sorozattal.

Vizsgálhatjuk a sorozat **hányadossorozatát**, vagyis a szomszédos elemek hányadosából álló sorozatot.

A hányadost mindig úgy képezzük, hogy az elemet az előtte lévő elemmel osztjuk.



A hányadossorozat minden eleme 2, vagyis csupa egyenlő elemből áll.

Értelmezés

Mértani sorozatnak nevezzük a sorozatot, ha a szomszédos elemek hányadosa állandó.

FELADATOK

© A különbségsorozat vagy a hányadossorozat megadása segíthet a szabály megtalálásában.

12

Megadtuk a sorozat néhány elemét. Keress szabályt, majd írd fel a sorozat következő öt elemét!

A szabály alkalmazásával számítsd ki a sorozat 15. elemét!

a) 1; 4; 7; 10; 13; ...;

b) 2; 4; 6; 8; 10; ...;

c) 2; 4; 8; 16; 32; ...;

d) 8; 5; 2; -1; -4; ...;

e) 1; -1; 1; -1; 1; ...;

f) 1; 4; 9; 16; 25; ...

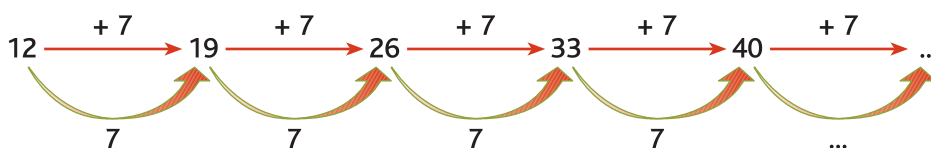
3. példa

Egy trapéz alakú virágágyásba 75 sor virágot ültettek. Az első sorban 12 szál virág van, minden további sorban 7 szállal több, mint az előző sorban.

- Hány szál virág van a 2.; 3.; ...; n . sorban? Hány szál virág van a 15. sorban?
- Hány szál virág van az első 9 sorban összesen?
- Hány szál virág van a 75 sorban összesen?

- Képezzük a sorozat néhány elemét:

A különbségsorozatnak minden eleme 7.



Vizsgáljuk meg, hogy hogyan kaphatjuk meg a sorozat valamelyik tagját az első tag és a szomszédos tagok közti *különbség* ismeretében.

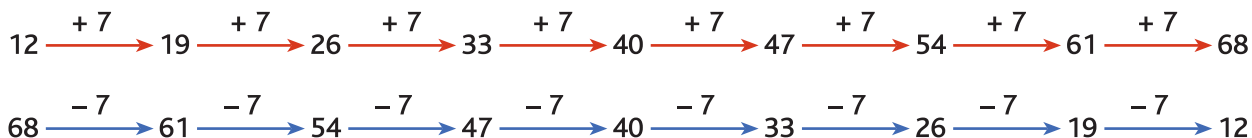
- A sorozat
1. tagja: $a_1 = 12$;
 2. tagja: $a_2 = 12 + 1 \cdot 7 = 19$;
 3. tagja: $a_3 = 12 + 2 \cdot 7 = 26$;
 4. tagja: $a_4 = 12 + 3 \cdot 7 = 33$;
 - $\vdots$
 - n . tagja: $a_n = 12 + (n - 1) \cdot 7$

Az összefüggés alkalmazásával a sorozat

$$15. \text{ tagja: } a_{15} = 12 + (15 - 1) \cdot 7 = 110$$

A 15. sorban 110 szál virág van.

- Írjuk föl a sorozat első 9 elemének képzési sémáját az *első elemből*, majd az *utolsó*, a *kilencedik elemből* kiindulva:



A sorozat képzési szabályából következik, hogy például az „előlről” harmadik elem annnyival nagyobb az első elemnél, mint amennyivel a „hátról” harmadik kisebb az utolsó (a kilencedik) elemnél. Ezért ha a sorozat elemeinek az összegét az eredeti sorrendben, illetve fordított sorrendben egymás alá leírjuk, és a két sort tagonként összeadjuk, akkor az egymás alatt levő tagok összege mindig ugyanaz a szám (az első 9 elem összegét jelölje S_9):

$$\begin{array}{r} S_9 = 12 + 19 + 26 + 33 + 40 + 47 + 54 + 61 + 68 \\ + S_9 = + 68 + 61 + 54 + 47 + 40 + 33 + 26 + 19 + 12 \\ \hline 2S_9 = 80 + 80 + 80 + 80 + 80 + 80 + 80 + 80 + 80 \end{array}$$

Ebből az összeg kétszerese: $2S_9 = 80 \cdot 9$

»»



A szájhagyomány szerint Gauss (1777–1855), német matematikus kisiskolás korában azt a feladatot kapta, hogy 1-től 100-ig adja össze a számokat. A fiú néhány másodperc alatt elkészült.

Hogyan számolt?

Gauss még diák volt, amikor első jelentős felfedezéseit elérte.

Végül az összeg:

$$S_9 = \frac{80}{2} \cdot 9 = 360$$

Az első 9 sorban összesen 360 virág van.

c Hasonlóan gondolkozhatunk, mint a **b**) példa megoldása során.

Ha a sorozat elemeinek az összegét az eredeti sorrendben, illetve fordított sorrendben egymás alá leírjuk, és a két sort tagonként összeadjuk, akkor az egymás alatt lévő tagok összege mindig az első és a 75. elem összege lesz. Ezért a sorozat összegének 2-szerese:

$$2 \cdot S_{75} = (a_1 + a_{75}) \cdot 75$$

A sorozat első 75 elemének összege:

$$S_{75} = \frac{a_1 + a_{75}}{2} \cdot 75$$

Az **a**) példában észrevett összefüggés alapján kiszámíthatjuk a sorozat 75. elemét:

$$a_{75} = 12 + (75 - 1) \cdot 7 = 530$$

Az összeg:

$$S_{75} = \frac{12 + 530}{2} \cdot 75 = 20\,325$$

Az első 75 sorban összesen 20 325 virág van.

FELADATOK

B4

- a) Számítsd ki a 3-mal osztható számok összegét 3-tól 99-ig!
b) Számítsd ki a 25-tel osztható számok összegét 25-től 1000-ig!

B5

Egy számtani sorozat első tagja $a_1 = 8$.
Adj meg olyan d különbséget, hogy a sorozat

- a) növekvő legyen; b) csökkenő legyen; c) minden tagja 8 legyen!

B6

Mariska és Pepin 16 perc alatt másztak fel a sörgyár kéményére. Az első percben 40 lépcsőfokot haladtak, majd minden további percben 2 fokkal kevesebbet, mint az előző percben.

- a) Hány lépcsőfokot másztak meg a 16. percben?
b) Hány lépcsőfok vezet a sörgyár kéményére?

4. példa

Egy 7 m mély kutat akarunk kiásatni. Melyik ajánlatot fogadjuk el?

- a)** A felvonulási költség 2500 Ft, a kút kiásása méterenként 3500 Ft.
b) Az első méter kiásása 1500 Ft. Minden további méter kiásása 800 Ft-tal többbe kerül, mint az előző méteré, de nincs felvonulási költség.
c) Az első méter kiásása 5 Ft. Minden további méter kiásása négyszer annyiba kerül, mint az előző méteré.

Gyakorló 5.36–5.37.;
Feladatgyűjtemény
3.4.01–15.

a Az ajánlat szerint fizetendő összeg: $2500 \text{ Ft} + 7 \cdot 3500 \text{ Ft} = 27\,000 \text{ Ft}$

b Az ajánlat szerint a méterenként fizetendő összegek *számtani sorozatot* alkotnak.

Az első tag: $b_1 = 1500$, a szomszédos tagok különbsége: $d = 800$

1. m $\rightarrow 1500 \text{ Ft}$;

2. m $\rightarrow 1500 \text{ Ft} + 1 \cdot 800 \text{ Ft} = 2300 \text{ Ft}$;

3. m $\rightarrow 1500 \text{ Ft} + 2 \cdot 800 \text{ Ft} = 3100 \text{ Ft}$;

$\vdots$

7. m $\rightarrow 1500 \text{ Ft} + 6 \cdot 800 \text{ Ft} = 6300 \text{ Ft}$

A méterenként átlagosan fizetendő összeg az első és az utolsó tag számtani közepe. Ha ezt 7-tel szorozzuk, akkor megkapjuk a teljes költséget:

$$S_7 = 7 \cdot \frac{1500 + 6300}{2} = 27\,300$$

A **b**) ajánlat szerint 27 300 Ft-ba kerül a kútásás.

c Az ajánlat szerint a méterenként fizetendő összegek olyan sorozatot alkotnak, amelynek az *első tagja*: $c_1 = 5$, és a szomszédos tagok *hányadosa*: $q = 4$

1. m $\rightarrow 5 \text{ Ft}$;

2. m $\rightarrow 5 \cdot 4^1 \text{ Ft} = 20 \text{ Ft}$;

3. m $\rightarrow 5 \cdot 4^2 \text{ Ft} = 80 \text{ Ft}$;

$\vdots$

7. m $\rightarrow 5 \cdot 4^6 \text{ Ft} = 20\,480 \text{ Ft}$

Ésszerűsítsük az összeg kiszámítását! Írjuk fel az összeget, majd tagonként szorozva az összeg négyszeresét is. Vonjuk ki az első sort a másodikból!

Ha úgy írjuk föl a két sort, hogy egymás alá kerüljenek az azonos tagok, akkor könnyen elvégezhető a kivonás.

$$\begin{array}{r} S_7 = 5 \cdot 1 + 5 \cdot 4^1 + 5 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^4 + 5 \cdot 4^5 + 5 \cdot 4^6 \\ 4S_7 = \quad + 5 \cdot 4^1 + 5 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^4 + 5 \cdot 4^5 + 5 \cdot 4^6 + 5 \cdot 4^7 \\ \hline 4S_7 - S_7 = 5 \cdot 4^7 - 5 \cdot 1 \end{array}$$

Az egyenlet mindkét oldalát írjuk föl szorzatalakban:

$$S_7 \cdot (4 - 1) = 5 \cdot (4^7 - 1)$$

Mindkét oldalt osszuk $(4 - 1)$ -gyel:

$$S_7 = 5 \cdot \frac{4^7 - 1}{4 - 1}$$

Számológéppel kiszámíthatjuk 4^7 értékét:

$$S_7 = 5 \cdot \frac{16\,384 - 1}{4 - 1} = 27\,305$$

A **c**) ajánlat szerint 27 305 Ft-ba kerül a kútásás.



☉ *Lásd az előző példa b) részének megoldását!*

☉ *A hányadost úgy kapjuk, hogy az elemet az előtte lévő elemmel osztjuk.*

A monda szerint a sakkjáték feltalálója jutalmul a sakk-tábla első mezőjére 1 búzaszem kért a sahtól, a másodikra 2-t, a harmadikra 4-et és így tovább, minden további mezőre kétszer annyi búzaszemet, mint az előzőre.

Teljesíthető volt ez a kívánság?

Körülbelül 16 búzaszem tömege 1 g. A Földön jelenleg évente legfeljebb 700 millió tonna búza terem.



FELADATOK

B7 Írd föl a sorozatok 3. és 4. elemét úgy, hogy a szomszédos elemek

1 különbsége (d) állandó legyen; 2 hányadosa (q) állandó legyen!

- a) 4; 8; ...; b) 32; 16; ...; c) 6; 6; ...; d) -4; -8; ...;
e) 4; -8; ...; f) 4; 0; ...; g) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; ...; h) $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; ...;

© Vizsgálod a különbség-sorozatot, illetve a hányadossorozatot?

B8

A következő sorozatok közül válaszd ki azokat, amelyek számtani sorozatok, illetve amelyek mértani sorozatok lehetnek!

Add meg ezeknek a sorozatoknak a 9. elemét!

Határozd meg az első 9 elem összegét!

- a) 2; 6; 18; 54; ...; b) 2; 6; 11; 17; ...; c) -0,5; -0,2; 0,1; 0,4; ...;
d) 2; 6; 10; 14; ...; e) 25; 5; 1; 0,2; ...; f) -0,5; -1; -1,5; -2; ...

B9

- a) Egy kereskedő egy év alatt négyszer 5%-kal emeli egy eredetileg 1500 €-s áru árát. Mennyibe kerül az év végén az áru?
b) 20 000 €-ért évi 10%-ot kamatozó letéti jegyet vásárolunk. Három év múlva hány eurót kaphatunk vissza?
c) Egy 24 000 € árú gép értéke évenként 30%-kal csökken. Mennyit ér ez a gép 4 év múlva?

Gyakorló 5.38–5.41.;
Feladatgyűjtemény
3.4.16–32.

B10

A 2 és a 162 közé iktassunk három számot úgy, hogy az öt szám együtt

- a) egy számtani; b) egy mértani sorozat

egymást követő öt eleme legyen!

Többet ésszel ...



A számegyenes fölé 1 középpontú, egység sugarú félkörívet rajzolunk. Folytatásként a számegyenes alá felényi sugárral rajzoljuk meg a körívet.

Ezután az előzőhöz képest mindig felényi sugárral, felváltva a számegyenes fölé, illetve alá rajzolunk félköríveket. Így a félköríveknek egy sorozatát kapjuk.

- a) Írd föl a félkörív hosszak sorozatának első öt elemét!

Milyen hosszú a 10. görbe?

- b) Milyen sorozatot kaptál? Mekkora az n -edik körív hossza?

- c) Képezzük az „összefűzött” görbék sorozatát is: Az első elem az első félkörív, a második az első két félkörív együtt, például az ötödik az első öt félkörív együtt. (Lásd az ábrát!) Számítsd ki az első, a második, ..., az ötödik összefűzött görbe hosszúságát! Keres szabályt!

- d) Vajon hányadik összefűzött görbe hossza lesz nagyobb 2π -nél?



© A kör kerülete: $K = 2\pi r$

> NÉHÁNY NEMLINEÁRIS FÜGGVÉNY

AZ ABSZOLÚTÉRTÉK-FÜGGVÉNY

1. példa

Rajzoljuk meg az $x \mapsto |x|$ **abszolútérték-függvény** grafikonját. Mi az abszolútérték-függvény értékkészlete, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza?

Feleltessük meg minden valós számnak az abszolútértékét:

$$x \mapsto |x|$$

Minden valós számnak van abszolútértéke, ezért a függvény értelmezési tartománya: $\mathbb{R}$.

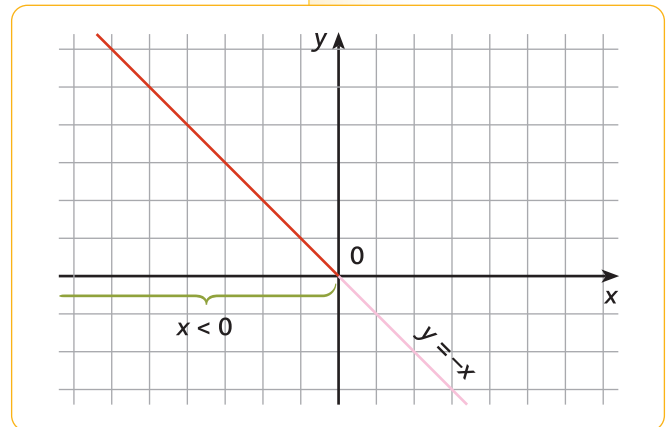
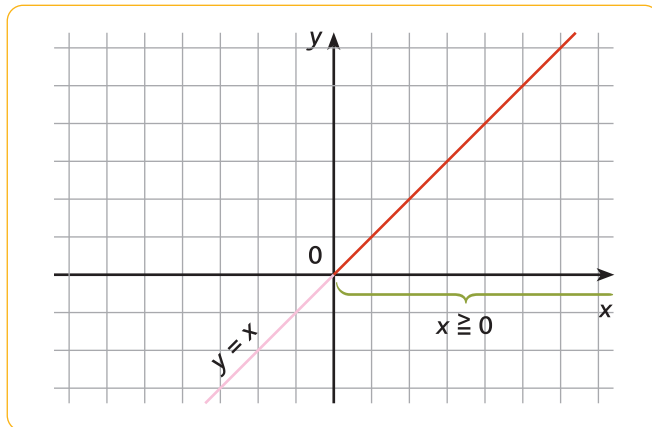
Az abszolútérték definíciója szerint:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0; \\ -x & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Ezért az abszolútérték-függvény grafikonja

- 1 a nemnegatív számokra ugyanaz, mint az $x \mapsto x$ függvény grafikonja,
- 2 a negatív számokra ugyanaz, mint az $x \mapsto -x$ függvény grafikonja.

☉ Emlékszel? Egy szám abszolútértéke a számnak a 0-tól való távolsága.

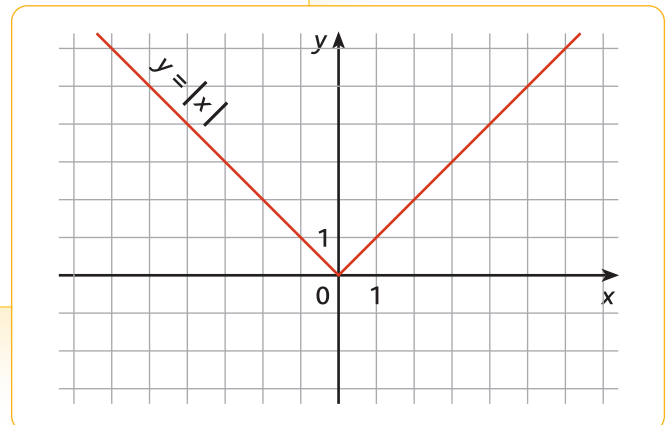


Végeredményben:

Bármely szám abszolútértéke nemnegatív szám. Ezért a függvény értékkészlete a nemnegatív számok halmaza.

Az abszolútérték-függvény a valós számok halmazán nemlineáris függvény.

☉ Emlékszel? A lineáris függvény képe egyenes.



AZ $f(x) = x^2$ FÜGGVÉNY

2. példa

Feleltessük meg minden valós számnak a négyzetét: $x \mapsto x^2$

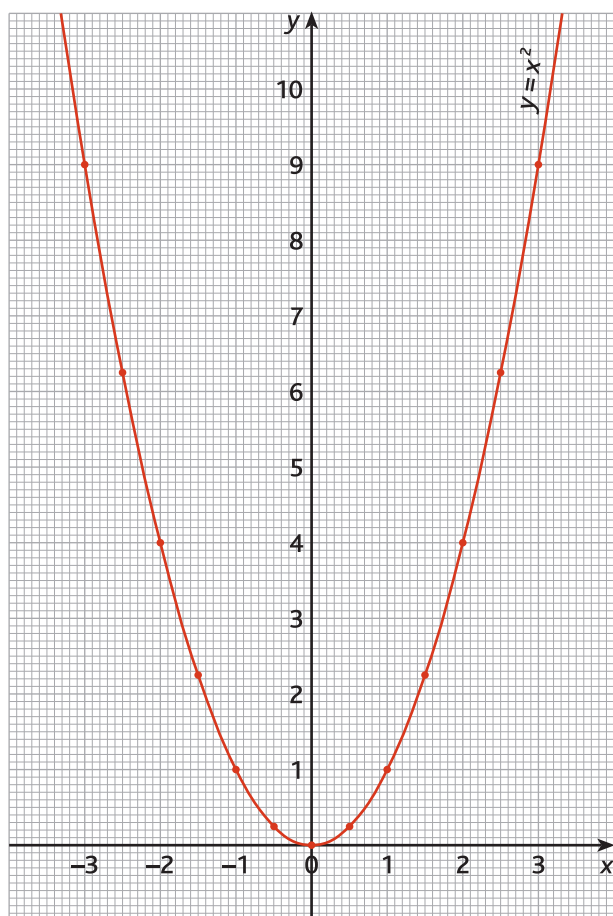
Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.

Rajzoljuk meg a függvény grafikonját. Vizsgáljuk a függvény menetét.

Írjunk be az értéktáblázatba néhány összetartozó értékpárt:

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az összetartozó értékpárokat.



Az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben **parabola**.

Minden valós számnak van négyzete, ezért a függvény *értelmezési tartománya* az $\mathbb{R}$.

Bármely valós szám négyzete nemnegatív, ezért a függvény *értékkészlete*:

$$K = \{\text{Nemnegatív valós számok}\}$$

A függvény **csökkenő**, ha

$$x \leq 0.$$

Növekvő x értékekhez csökkenő függvényértékek tartoznak. Például:

$$-3 < -2; (-3)^2 > (-2)^2; \quad -2 < -1; (-2)^2 > (-1)^2$$

A függvénynek **minimuma** van, ha

$$x = 0.$$

A függvény itt veszi fel a legkisebb értéket ($y = 0$).

A függvény **növekvő**, ha

$$x \geq 0.$$

Növekvő x értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak. Például:

$$1 < 2; 1^2 < 2^2; \quad 2 < 3; 2^2 < 3^2$$

Gyűjtőmunka



© „Amikor kosárra dobok, tudom, hogy a labda tökéletesen szimmetrikus parabolapályán fog szállni, amit a kosár megtör.”

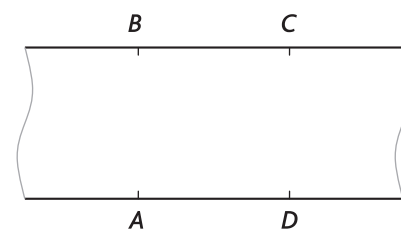
(Michael Jordan)

- a) Megfigyelted már egy ferdén felfelé eldobott labda pályáját, vagy ferdén felfelé irányított locsolócsőből kiömlő vízszög útját?
- b) A Földön a szabadon eső test által (lefelé) megtett út méterben kifejezett nagyságát az $s \approx 5 \cdot t^2$ képlettel számíthatjuk ki, ahol t az elengedés pillanatától eltelt, másodperccel mért időtartamot jelenti. Hány métert zuhan egy szabadon eső test 1 s; 1,5 s; 2 s; 2,5 s; 3 s alatt?

3. példa

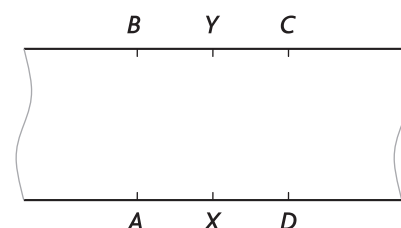
Vágjunk ki egy 2 cm széles papírcsíkot. Szerkesszünk meg rá egy $ABCD$ négyzetet az ábrának megfelelően.

A papírcsíkot szélénél valamely X pontján át az AB oldallal párhuzamosan elvágjuk. A D ponttól mekkora távolságra vegyük fel az X pontot úgy, hogy a levágott $DXYC$ téglalap hasonló legyen az $AXYB$ téglalaphoz?



Ha az X pont felezi az AD szakaszt, akkor két egybevágó, tehát két hasonló téglalap keletkezik.

Ez az eset megoldást szolgáltat.



Másképp is megfeleltethetjük egymásnak a téglalapok oldalait úgy, hogy a megfelelő oldalak aránya megegyezzek:

$$AB : DX = AX : DC$$

$$\frac{2}{x} = \frac{2+x}{2} \quad (x \neq 0)$$

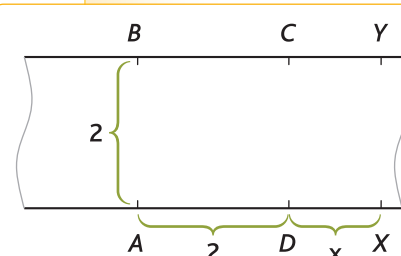
$$4 = x(2+x)$$

$$4 = 2x + x^2 \quad / -2x$$

$$-2x + 4 = x^2$$

A törtek közös nevezője: $2x$.
Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát a közös nevezővel.

A zárójel felbontása után mindkét oldalból elveszünk $2x$ -et, kifejezzük az x^2 -et.



A kapott egyenlet megoldását **grafikus módszerrel** keressük.

Az egyenlet két oldalán álló kifejezésekkel egy-egy függvényt értelmezhetünk.

Az egyenlet bal oldalán álló kifejezéssel egy lineáris függvény értelmezhető: $b(x) = -2x + 4$

Az egyenlet jobb oldalán álló kifejezéssel a $j(x) = x^2$ függvény.

Ábrázoljuk mindkét függvény grafikonját.

$$b: x \mapsto -2x + 4$$

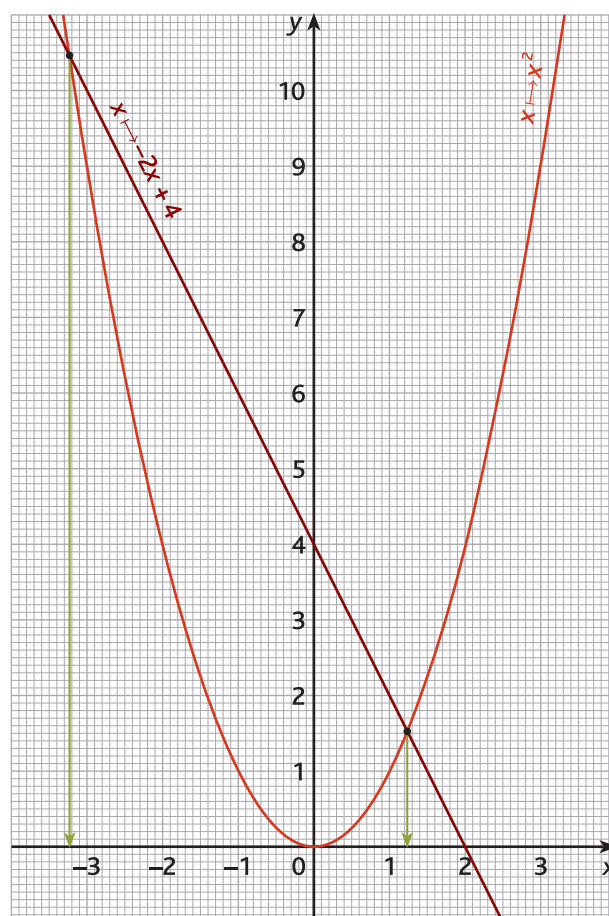
$$j: x \mapsto x^2$$

Azokat az x értékeket keressük, amelyeket behelyettesítve a függvényeinkbe, a függvényértékek (y) megegyeznek.

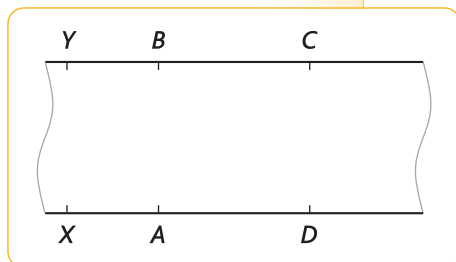
Két megoldást találunk:

$$x_1 \approx 1,2; \quad x_2 \approx -3,2$$

»»



x	1,2	1,23	1,24	1,25
$\frac{2}{x}$	1,67	1,63	1,61	1,60
$\frac{2+x}{2}$	1,60	1,62	1,62	1,63



Próbálgatással pontosíthatjuk az eredményt, egyúttal ellenőrizzük is a megoldást:

Az $x = 1,23$ -ot behelyettesítve a bal oldal nagyobb, mint a jobb oldal.

Az $x = 1,24$ -ot behelyettesítve a jobb oldal nagyobb, mint a bal oldal.

Az egyenlet pozitív gyöke e két érték között van:

$$1,23 < x < 1,24$$

Vizsgáljuk, hogy a negatív megoldásnak van-e geometriai jelentése.

Ha az $x \approx 3,2$ cm-t a D ponttól ellenkező irányban mérjük föl, mint az előbb, akkor is kapunk megoldást.

Az előző megoldással egybevágó téglalapot kapunk.

AZ $f(x) = \sqrt{x}$ FÜGGVÉNY

4. példa

Feltessük meg minden nemnegatív valós számnak a négyzetgyökét:

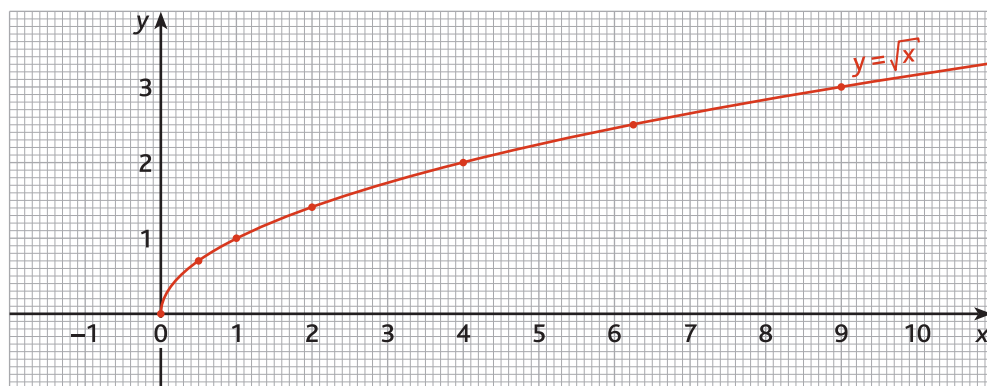
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.

Rajzoljuk meg a függvény grafikonját.

Vizsgáljuk a függvény menetét.

A nemnegatív valós x szám négyzetgyöke az a nemnegatív valós y szám, amelynek a négyzete x .



Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az összetartozó érték-párokat.

Az $x \mapsto \sqrt{x}$ grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben egy **parabolaív**.

Csak a *nemnegatív* valós számoknak van négyzetgyöke, ezért a függvény értelmezési tartománya:

$$A = \{\text{Nemnegatív valós számok}\}$$

Bármely nemnegatív valós szám négyzetgyöke is nemnegatív valós szám, ezért a függvény értékkészlete:

$$K = \{\text{Nemnegatív valós számok}\}$$

• Lásd az 50. oldalon lévő értelmezést és a 249. oldal 4. példájának táblázatát.

»»

A függvény nincs értelmezve, ha $x < 0$.

A függvénynek minimuma van, ha $x = 0$.

A függvény növekvő, ha $x \geq 0$, azaz a teljes értelmezési tartományán.

Növekvő x értékekhez növekvő függvényértékek tartoznak.

FORDÍTOTT ARÁNYOSSÁG

5. példa

Két valós szám szorzata 12. Hogyan változik a szorzat második tényezője az első tényező változásának függvényében?

Írjuk föl a hozzárendelés szabályát. Rajzoljuk meg a függvény grafikonját.

☉ Lásd az 55. oldalt!

Az első tényezőt jelölje x , a másodikat y . $x \cdot y = 12$; $y = \frac{12}{x}$

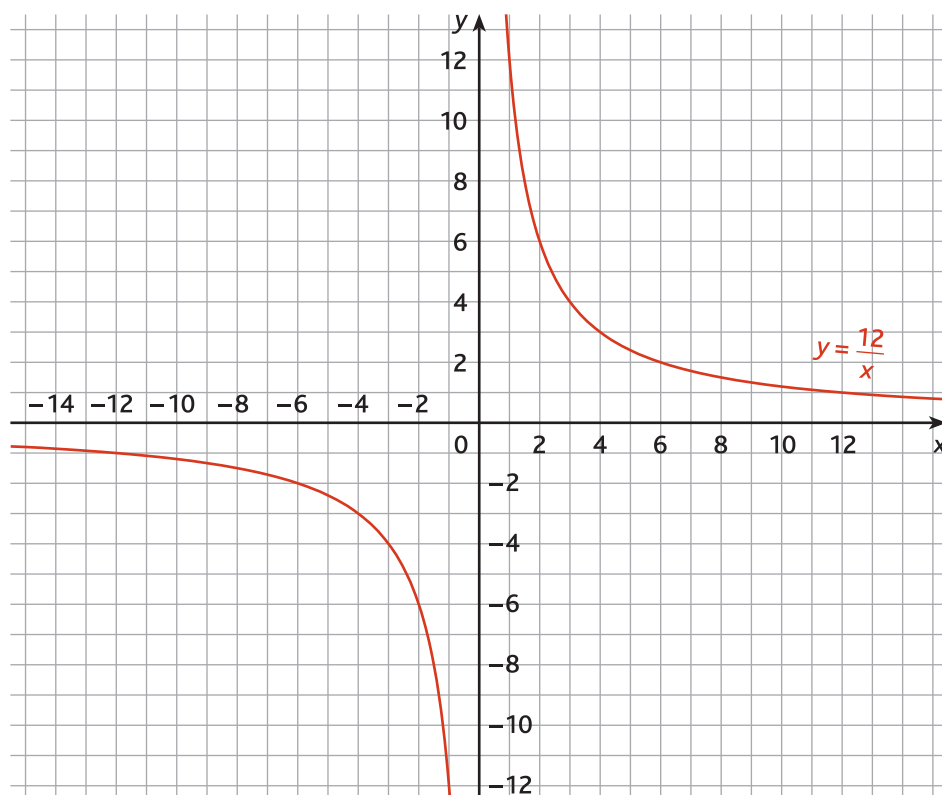
Egyik tényező sem lehet 0; $x \neq 0$, $y \neq 0$.

A függvény az $x = 0$ érték esetén **nem értelmezhető**. A függvény értékészlete és értelmezési tartománya a nullától különböző valós számok halmaza.

Foglaljunk táblázatba néhány összetartozó számpárt:

x	-12	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	12
y	-1	-2	-3	-4	-6	-12	12	6	4	3	2	1

A függvény grafikonja két részből álló görbe: **hiperbola**.



Értelmezések

Két változó mennyiséget **fordítottan arányosnak** mondunk, ha valahányszorosára változik az egyik mennyiség, annak reciprokszorosára változik a másik mennyiség.

Ha az A és a B számhalmaz elemei között fordított arányosság van, akkor az összetartozó értékpárok szorzata nullától különböző állandó. (A 0-hoz nem tartozik érték.)

$$y \cdot x = a; \quad x \neq 0; \quad y \neq 0; \quad a \neq 0$$

Más alakban: $y = \frac{a}{x}; \quad x \neq 0; \quad a \neq 0$

Ezért a fordított arányosságot így is definiálhatjuk:

A 0-tól különböző valós számok halmazán (vagy annak egy részhalmazán) értelmezett

$$f: x \mapsto \frac{a}{x}; \quad (x \neq 0, \quad a \neq 0)$$

függvényt fordított arányosságnak nevezünk.

A fordított arányosság grafikonja **hiperbola**.

© Mindkét feladatban hasonlítsd össze az f függvény értékeit a g és a h függvények által felvett értékekkel!

FELADATOK

13

Feleltess meg a valós számoknak egy-egy valós számot az adott szabályok szerint!

Készíts függvénytáblázatokat, és hasonlítsd azokat össze!

Feladatonként közös koordináta-rendszerben rajzold meg a grafikonokat!

Add meg a függvények értékkészletét! Vizsgáld a függvények menetét!

a) $f: x \mapsto |x|;$ $g: x \mapsto |x| + 2;$ $h: x \mapsto |x| - 4$

b) $f: x \mapsto x^2;$ $g: x \mapsto x^2 + 2;$ $h: x \mapsto x^2 - 4$



A fényképezőgépen a fényérzékenységet fokozatosan lehet állítani:

ISO 50 • 100 • 200 • 400 • 800 • 1600,

ahol az értékek mértani sorozatot alkotnak, de csak minden második tag egész szám, ezért a többi pöttyök jelölik.

Add meg a pöttyök egészre kerekített értékét!



A 254. oldalon szerepel, hogyan számítható át pontosan a Celsius-fokban mért hőmérséklet Fahrenheit-fokba. Sokszor azonban az egyszerűség kedvéért úgy számolnak, hogy a Celsius-fokban mért érték dupláját veszik, és ehhez adnak 30-at. Keress olyan értékpárokat, amikor ugyanakkora a tévedés nagysága!

Készíts táblázatot -15°C -tól $+35^\circ\text{C}$ -ig 5°C -onként arról, milyen nagy az egyszerűsített módszer tévedése ($^\circ\text{C}$ -ban). Milyen érték esetén pontos ez a számítási mód? Ábrázold a táblázat értékeit koordináta-rendszerben!

14

Írd le függvénnnyel az összetartozó értékpárok közti összefüggést!

Állapítsd meg a függvény értelmezési tartományát, értékkészletét! Rajzold meg a függvény grafikonját!

- Két valós szám összege 4. Milyen összefüggés van a két tag között?
- Két egész szám szorzata 60. Milyen összefüggés van a két tényező között?
- 2 kg cukrot egyenlő részekre osztunk. Hogyan függ egy rész tömege attól, hogy hány egyenlő részre osztottuk a cukrot?
- 20 cm hosszúságú zsinórral téglalapot kerítünk körül. Milyen összefüggés van a téglalap szomszédos oldalai között?
- 36 egybevágó négyzetlapból téglalapot építünk. Milyen összefüggés van a téglalap szomszédos oldalai között?
- 5 l űrtartalmú edényt töltünk meg egy csapból kifolyó vízzel. Milyen összefüggés van a másodpercenként kifolyó víz mennyisége és a megtöltés időtartama között?

Gyakorló

5.42–5.48.;

Feladatgyűjtemény

3.3.12–15., 2.4.19.

> EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK GRAFIKUS MEGOLDÁSA

1. példa

Grafikus úton vizsgáljuk a következő egyenletek megoldhatóságát.

a) $2x - 5 = -\frac{2}{3}x + 3$; **b)** $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{3}(2x + 9)$; **c)** $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{3}(2x - 12)$

☉ *Mivel nem mondtunk mást, az alaphalmaz a valós számok halmaza.*

a) $2x - 5 = -\frac{2}{3}x + 3$;

Az egyenlet bal, illetve jobb oldalán álló kifejezéssel értelmezhető lineáris függvények:

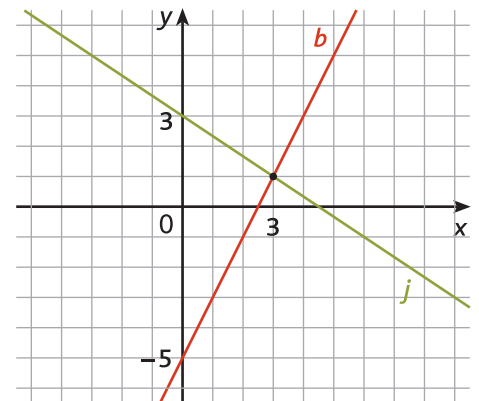
$b: x \mapsto 2x - 5$; $j: x \mapsto -\frac{2}{3}x + 3$

Ezeknek a lineáris függvényeknek a grafikonja két olyan egyenes, amelyek az $x=3$ helyen metszik egymást.

Ennek **az egyenletnek egy megoldása van**: $x=3$

Ellenőrzés: $b: 2 \cdot 3 - 5 = 1$; $j: -\frac{2}{3} \cdot 3 + 3 = 1$

A függvényértékek megegyeznek.



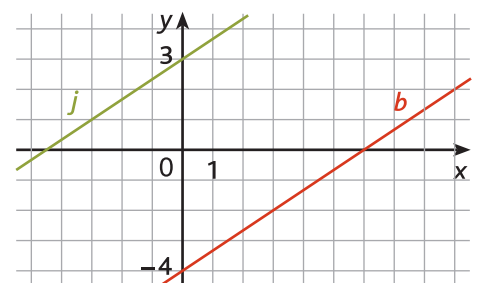
b) $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{3}(2x + 9)$;

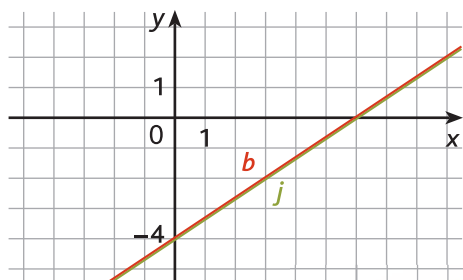
Az egyenlet bal, illetve jobb oldalán álló kifejezéssel értelmezhető lineáris függvények:

$b: x \mapsto \frac{2}{3}x - 4$; $j: x \mapsto \frac{2}{3}x + 3$

Ezeknek a lineáris függvényeknek a grafikonja két egymással párhuzamos egyenes. Nincs közös pontjuk.

Ennek **az egyenletnek nincs megoldása**.





C $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{3}(2x - 12)$

A jobb oldalon elvégezzük a szorzást:

$$b: x \mapsto \frac{2}{3}x - 4; \quad j: x \mapsto \frac{2}{3}x - 4$$

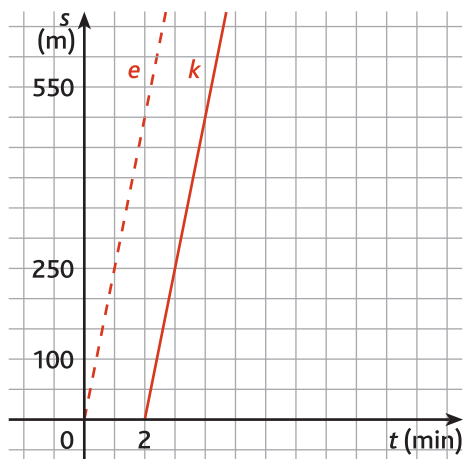
Az egyenlet bal és jobb oldalán azonos kifejezés áll. A két egyenes egybeesik. Ez az egyenlet azonosság, **minden valós szám megoldása az egyenletnek.**

2. példa

Egy gyalogos indul a kilátótól az 550 m-re lévő parkoló felé, és egyenletes sebességgel haladva percenként 50 m utat tesz meg.

2 min (perc) múlva, vele szemben a parkolóból a kilátó felé indul egy kerékpáros, és $250 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ egyenletes sebességgel hajt.

Mikor és a parkolótól milyen távolságra találkoznak?



A parkolót tekintjük kezdőpontnak, a gyalogos elindulásától indítsuk az órát.

Mindkét mozgás esetében lineáris függvénnyel írhatjuk le a parkolótól mért távolságot.

Ha a kerékpáros a megfigyelés kezdetén indulna, akkor az

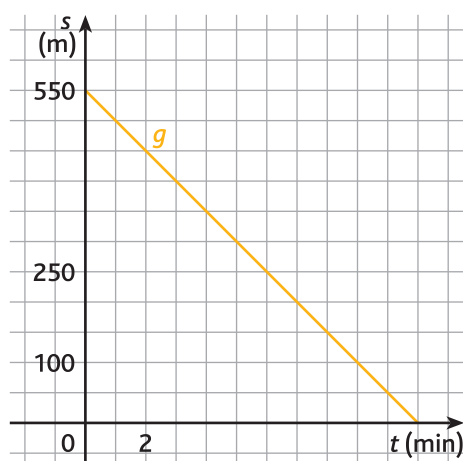
$$e: t \mapsto 250t$$

függvény írta le, hogy hány méter távolságra van a parkolótól.

2 perccel később indul, ezért a mozgást leíró függvény:

$$k: t \mapsto 250(t - 2)$$

Az e egyenes arányosság grafikonját az x tengellyel párhuzamosan $+2$ egységgel eltolva megkapjuk a k függvény grafikonját.



A gyalogos a parkolótól 550 m távolságból indul, ellenkező irányban halad, mint a kerékpáros.

A mozgását leíró lineáris függvény:

$$g: t \mapsto -50t + 550$$

Ha a k és a g függvény grafikonját közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk, akkor a két grafikon metszéspontjának koordinátáit leolvassva válaszolhatunk a feladatban feltett kérdésre.

»»

»»

Amikor találkoznak, akkor egyenlő távolságra vannak a parkolótól, vagyis azt kell vizsgálnunk, hogy mely t értékhez rendel azonos függvényértéket a k és a g függvény:

$$-50t + 550 = 250(t - 2)$$

A grafikonról leolvashatjuk, hogy a gyalogos indulása után 3 és fél perc múlva, a parkolótól 375 m távolságra találkoznak.

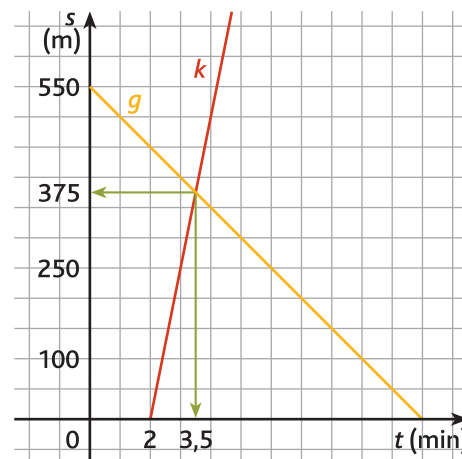
Ellenőrzés:

A gyalogos $(3,5 \cdot 50 =)$ 175 m utat tesz meg, és

$(550 - 175 =)$ 375 m-re lesz a parkolótól.

A kerékpáros 2 perccel később indul, és $(1,5 \cdot 250 =)$ 375 m távolságra jut.

Valóban találkoznak.



FELADATOK

15 Vizsgáld grafikusan a következő egyenletek megoldhatóságát!

- a) $3x - 4 = -2x + 11$; b) $\frac{3}{4}x + 2 = \frac{1}{2}$; c) $2x + 5 = 2x - 5$;
 d) $\frac{1}{3}(x - 3) = \frac{1}{3}x - 1$; e) $-2x + 6 = 3x$; f) $2x - 0,5 = -0,5x + 12$

16 Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

- a) $2x - 3 = x + 1$; b) $\frac{1}{2}x = -x + 3$; c) $|x| \leq 3$;
 d) $-x - 1 > x + 1$; e) $\frac{3}{2}x - 2 = -2x + 5$; f) $-3x < 6$;
 g) $x^2 = -x + 2$; h) $-2x - 3 < x^2$; i) $x - 1 \geq |x|$

☉ *Algebrai megoldással ellenőrizték, majd vitasátok meg az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldását!*



Egy gepárd, testhőmérsékletének emelkedése miatt csak 30 másodpercen át képes üldözni a prédát, másodpercenként átlagosan 25 m-t megtéve. A gazella erejét megfeszítve, rövid távon, másodpercenként 20 m-t tud megtenni. Szemléltesd grafikonon, hogy a gepárdnak legfeljebb mekkora távolságra lévő gazellát érdemes üldözőbe vennie!

☉ *A „vízszintes” (idő-) tengelyen egy-egy beosztás 2 másodpercet, a másik (elmozdulás-) tengelyen 50 m-t jelentsen.*



Kétéves korukig a kutyák jóval gyorsabban öregednek, mint később. Az egyik típusú közelítő számítás szerint, az első két kutya-év 12,5-12,5 emberi évnek felel meg. Innentől kezdve az öregedés üteme jelentősen lelassul, a kisméretű kutyáknál minden kutya-év 5 emberi évnek számít.

Nóra 55 éves, amikor kap egy pincsikölyköt. Hány éves lesz Nóra, amikor a kutyája „olyan idős” lesz, mint ő?

Fejttörő!



☉ *Ábrázold közös koordináta-rendszerben Nóra, illetve kutyája „emberi éveinek” múlását!*

17

Grafikonok segítségével, majd algebrai úton is keresd a megoldást!

- a) Miklós és Nándor egyszerre indul egy 24 km-es túraútvonal két végpontjáról. Mennyi idő múlva találkoznak, ha megállás nélkül, egyenletes tempóban mennek, és Miklós 3 km-t, Nándor 5 km-t tesz meg óránként?
- b) Jancsi kerékpárral 8 órákor indul egy túrára, és $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ egyenletes sebességgel halad. Juliska kismotorral másfél órával később indul utána, az ő sebessége $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mikor éri utol Juliska Jancsit?
- c) Egy teherautó $0,9 \frac{\text{km}}{\text{min}}$ sebességgel, 60 m-rel egy személyautó előtt halad, amikor a személyautó $1,5 \frac{\text{km}}{\text{min}}$ sebességgel előzésbe kezd. Mennyi idő múlva éri utol a személyautó a tehergépkocsit?

◎ Célszerű $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ egységgel

számolnunk. Például:

$$0,9 \frac{\text{km}}{\text{min}} = \frac{900}{60} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Gyakorló
5.49–5.52.;

Feladatgyűjtemény
3.2.11., 3.3.11.

18

A szöveg alapján írd fel, majd algebrai úton és grafikusan is oldd meg az egyenletet!

100 cm³ 4 °C-os vizet melegítenek, percenként 4 °C-kal növekszik a hőmérséklete. Ugyanakkor kezdik el 200 cm³ 46 °C-os olaj hűtését, ennek a hőmérséklete percenként 3 °C-kal csökken. Meddig lesz a víz hőmérséklete alacsonyabb, mint az olajé?

19

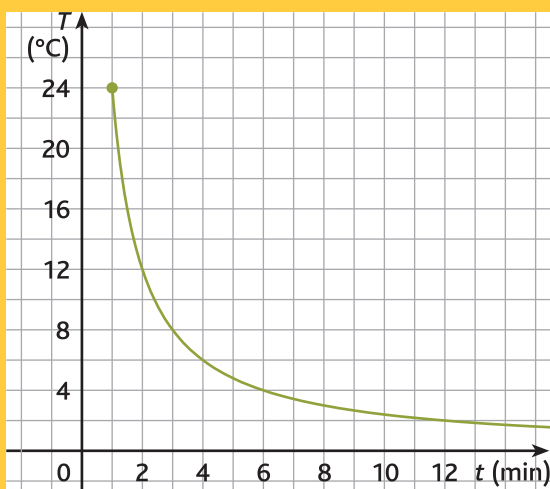
Grafikon készítésével, majd algebrai úton is keresd a megoldást!

Andi és Bea egyszerre indulnak egymással szemben egy 13 km-es túraútvonal két végpontjáról. Mennyi idő múlva és hol találkoznak, ha megállás nélkül egyenletes tempóban mennek, és Andi 3,5 km-t, Bea 3 km-t tesz meg óránként?

Többet ésszel ...



Egy menedékház udvarán, 0 °C-on Réka egy bográcsban 2 °C-os vizet kezd melegíteni. A víz hőmérséklete percenként 1 °C-kal nő.



A melegítés elkezdése után 1 perc múlva Réka kihoz a 24 °C-os szobából egy baltát, hogy tüzelőt aprítson a bogrács alá.

- a) Ábrázold a víz hőmérsékletének emelkedését szemléltető grafikont! Add meg kifejezéssel is a víz hőmérsékletének változását leíró függvény szabályát!

◎ *Ügyelj a tengelyeken felvett beosztásokra!*

- b) Hányadik perctől lesz alacsonyabb a balta hőmérséklete a bográcsban melegedő víz hőmérsékleténél, ha az ábrán látható grafikon a balta hőmérsékletváltozását szemlélteti? Add meg a balta hőmérsékletének változását leíró függvény szabályát $t \geq 1$ min esetén!

3. példa

Oldjuk meg grafikusán a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{2}x + 3 > |x|$$

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezéssel értelmezhető

$$b: x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$$

lineáris függvény grafikonját. A lineáris függvény képe egyenes.

Ábrázoljuk ugyanabban a koordináta-rendszerben az egyenlőtlenség jobb oldalán lévő kifejezéssel értelmezhető

$$j: x \mapsto |x|$$

abszolútértékfüggvény grafikonját is.

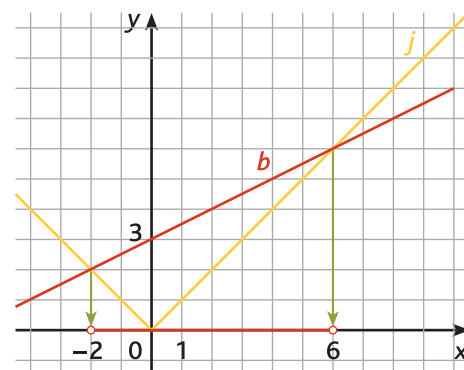
A b és a j függvény grafikonja két pontban metszi egymást:

$$A(-2; 2), B(6; 6)$$

Ez azt jelenti, hogy az $x_1 = -2$ számhoz is és az $x_2 = 6$ számhoz is ugyanazt az értéket rendeli a két függvény.

Ha $-2 < x < 6$, akkor a b függvény grafikonja a j függvény grafikonja „fölött” húzódik, vagyis a -2 -nél nagyobb, de 6 -nál kisebb számokhoz a b függvény nagyobb értéket rendel, mint a j függvény.

Az egyenlőtlenség megoldása: $-2 < x < 6$



© Vajon hogyan oldható meg algebrai úton ez az egyenlőtlenség?

> LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

A nyolcadik évfolyamon a lineáris egyenletrendszerek csak a hatosztályos gimnáziumokban tananyag. 9. osztályban ezt a témakört újra feldolgozzuk.

1. példa

Ákos egy kétserpenyős mérleg egyik serpenyőjébe 5 egyforma rézgolyót és 3 egyforma vasgolyót helyez, amit a másik serpenyőben 17 dkg tömegű súllyal tud kiegyensúlyozni. Viszont, ha az egyik serpenyőbe 2 rézgolyót, a másikba 4 vasgolyót helyez, akkor a rézgolyók mellé még 1 dkg tömegű súlyt is kell raknia, hogy a mérleg egyensúlyban legyen. Hány dekagramm egy rézgolyó, illetve egy vasgolyó tömege?

Ha a rézgolyó tömegének mérőszámát x , a vasgolyóét y jelöli ($x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$), akkor az első mérlegelést a következő egyenlettel tudjuk leírni:

$$5x + 3y = 17$$

A második mérlegelésnek megfelelő egyenlet

$$2x + 1 = 4y$$

»»

>>>

A két egyenletet külön-külön végtelen sok $(x; y)$ **rendezett számpár** kielégíti. Például az első egyenletnek megoldása az $(1,3; 3,5)$, $(1,9; 2,5)$, $(2,5; 1,5)$, $(3,7; -0,5)$ számpár, a második egyenleté az $(1,5; 1)$, $(-0,5; 0)$, $(3,5; 2)$, $(12,5; 6,5)$ számpár. Viszont nekünk olyan $(x; y)$ rendezett valós számpárt (számpárokat) kell keresnünk, amely mindkét egyenletet kielégíti.

Kapcsos zárójellel és aláhúzással jelöljük, hogy **egyenletrendszer**ről van szó (és nem két egymástól független, különálló egyenletről):

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 17 \\ 2x + 1 = 4y \end{array} \right\}$$

A két egyenlet együtt **kétszerűtlenes elsőfokú**, más szóval **lineáris egyenletrendszer**. A két egyenletet egyidejűleg kielégítő $(x; y)$ számpárt az **egyenletrendszer megoldásának** nevezzük.

BEHELYETTESÍTŐ MÓDSZER

Fejezzük ki például az x -et például a második egyenletből:

$$x = 2y - 0,5$$

Helyettesítsük be az így kapott **$(2y - 0,5)$** kifejezést az első egyenletbe, az x helyére:

$$5 \cdot (2y - 0,5) + 3y = 17$$

$$10y - 2,5 + 3y = 17$$

$$13y - 2,5 = 17$$

$$13y = 19,5$$

$$y = 1,5$$

Elvégezzük a beszorzást és az egynemű tagok összevonását, majd a két oldal egyenlővé alakításával megoldjuk az egyenletet.

Helyettesítsük be az így kapott $y = 1,5$ értéket a második egyenlet átrendezésével kapott $x = 2y - 0,5$ egyenletbe:

$$x = 2y - 0,5 = 2 \cdot 1,5 - 0,5 = 2,5$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 2,5$; $y = 1,5$

Ellenőrzés

Az egyenletrendszer mindkét egyenletébe behelyettesítjük a kapott értékeket:

$$5 \cdot 2,5 + 3 \cdot 1,5 = 17$$

$$12,5 + 4,5 = 17$$

$$17 = 17$$

$$2 \cdot 2,5 + 1 = 4 \cdot 1,5$$

$$6 = 6$$

A **$(2,5; 1,5)$ valós számpár mindkét egyenletet kielégíti.**

A $(2,5; 1,5)$ valós számpár megoldása az egyenletrendszernek.

EGYENLŐ (ELLENTETT) EGYÜTTHATÓK MÓDSZERE

Szorozzuk meg az egyenletek mindkét oldalát olyan számmal, hogy a két változó valamelyikének mindkét egyenletben ugyanaz a szám legyen az együtthatója (vagy az együtthatók egymás ellentettjei legyenek).

$$5x + 3y = 17 \quad / \cdot 2$$

$$2x - 4y = -1 \quad / \cdot (-5)$$

$$10x + 6y = 34$$

$$-10x + 20y = -5$$

$$26y = 29$$

$$y = 1,5$$

Ekkor az x együtthatói egymás ellentettjei lesznek a két egyenletben.

Adjuk össze a két egyenlet megfelelő oldalait.

Innen kezdve úgy dolgozunk, mint az előző módszer esetén.

☉ Ezzel visszavezettük az egyenletrendszer megoldását a korábban tanult lineáris egyenletek megoldására.

☉ A második egyenletet célszerűen átrendeztük.

☉ Az együtthatók miatt az x -et tartalmazó tagok algebrai összege 0.

»»

ÖSSZEHASONLÍTÓ MÓDSZER

$$\begin{cases} 5x + 3y = 17 \\ 2x + 1 = 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{17-3y}{5} \\ x = 2y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{17-3y}{5} = 2y - \frac{1}{2} \quad / \cdot 10$$

$$34 - 6y = 20y - 5$$

$$39 = 26y$$

$$y = 1,5; \quad x = 2,5$$

Fejezzük ki valamelyik (például az x) ismeretlent a másik segítségével mindkét egyenletből.

A két egyenlet bal oldala azonos, ezért a jobb oldaluk is egyenlő.

A felírható egyenletből meghatározható az y értéke.

A kapott y értéket behelyettesítve például a második egyenletbe, a behelyettesítő módszernél látható módon kiszámíthatjuk az x értékét.

© A bemutatott módszerek közül mindig azt célszerű alkalmaznunk, amellyikkel a legegyszerűbben tudjuk megoldani a feladatot.

Lapozzunk vissza a 276–277. oldalra. Figyeljük meg, hogy a 2. példa tulajdonképpen egyenletrendszerrel írható le, hiszen két ismeretlent kell meghatároznunk, a találkozás időpontjának t mérőszámát és a találkozási hely parkolótól mért távolságának s mérőszámát.

$$\begin{cases} s = 250(t - 2) \\ 3 = -50t + 550 \end{cases}$$

Ezt az egyenletrendszert a 277. oldalon **grafikusan** oldottuk meg. **Algebrai megoldásként** például az összehasonlító módszert alkalmazhatjuk:

$$250(t - 2) = -50t + 550$$

$$300t = 1050$$

$$t = 3,5$$

Ezt behelyettesítve például a második egyenletbe:

$$s = -50t + 550 = -50 \cdot 3,5 + 550 = -175 + 550 = 375; \quad s = 375$$

Az ellenőrzés a 277. oldalon megtalálható.

© Gyakorlásképpen alkalmazzuk az egyenlő (illetve ellentett) együtthatók módszerét is. Hasonlítsunk össze többféle lehetséges megoldásmenetet!

2. példa

Ödömér két természetes számra gondolt, amelyekről a következőket jelenti ki:

Ha az első szám ötszöröséből kivonjuk a második szám négyszeresét, akkor 16-ot kapunk. Viszont ha az első számhoz hozzáadjuk a második szám négyszeresét, akkor az eredmény 20. Melyik ez a két szám?

A szöveg alapján felírható egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 5x - 4y = 16 \\ x + 4y = 20 \end{cases} \quad x \in \mathbb{N}; \quad y \in \mathbb{N}$$

© Az ellentett együtthatók módszerével megkapjuk az eredményt. Adjuk össze a két egyenlet megfelelő oldalait.

»

A kapott egyenletből kiszámítjuk az x értékét.

$$6x = 36$$

$$x = 6$$

Az $x = 6$ értéket behelyettesítve a második egyenletbe:

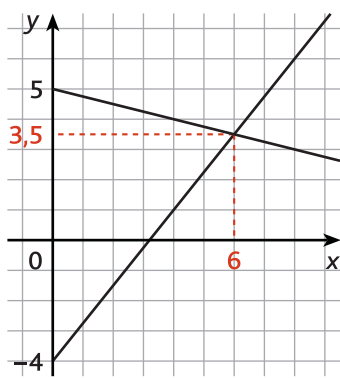
$$6 + 4y = 20$$

$$4y = 14$$

$$y = 3,5$$

A kapott $(6; 3,5)$ számpár nem felel meg annak a feltételnek, hogy mindkét szám természetes szám. Az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Ha az egyenleteket célszerűen átrendezzük, akkor megrajzolhatjuk az egyenletekkel értelmezhető lineáris függvények grafikonját:



$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{5}{4}x - 4 \\ y = -\frac{1}{4}x + 5 \end{array} \right.$$

A grafikonok $(6; 3,5)$ metszéspontjának koordinátái szolgáltatják a felírt egyenletrendszer megoldását.

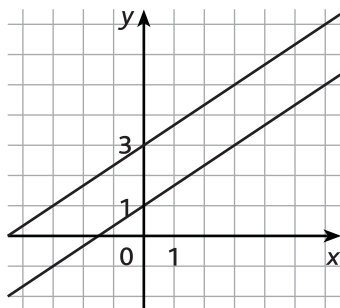
Mivel a 3,5 nem természetes szám, a szövegben adott problémának nincs megoldása. **Módosítsuk úgy a feladatot, hogy legyen megoldása.**

3. példa

Oldjuk meg algebrai úton és grafikusán is a következő egyenletrendszert:

$$\left\{ \begin{array}{l} y - \frac{2x+3}{3} = 0 \\ 2x - 3y = -9 \end{array} \right. \quad x \in \mathbb{Q}; \quad y \in \mathbb{Q}$$

© Az együtthatók miatt az x -et tartalmazó tagok algebrai összege 0.



Átrendezzük az egyenleteket, mindkettőből kifejezzük az y -t:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ y = \frac{2}{3}x + 3 \end{array} \right.$$

Az összehasonlító módszert alkalmazva a következőt kapjuk:

$$\frac{2}{3}x + 1 = \frac{2}{3}x + 3$$

$$1 = 3 \dots\dots$$

Amiből:

Ellentmondásra jutottunk.

A két egyenlet grafikonjai párhuzamosak egymással (de nem esnek egybe). Nincs közös pontjuk. **Az egyenletrendszernek nincs megoldása.**

4. példa

Oldjuk meg algebrai úton és grafikusan is a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} y - 1 = \frac{2x}{3} \\ 2x + 3 = 3y \end{cases} \quad x \in \mathbb{Q}; \quad y \in \mathbb{Q}$$

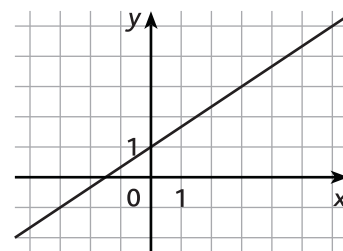
Átrendezzük az egyenleteket, mindkettőből kifejezzük az y -t:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ y = \frac{2}{3}x + 1 \end{cases}$$

Az összehasonlító módszert alkalmazva a következőt kapjuk:

$$0 = 0$$

A két egyenlet grafikonjai egybeesnek. Minden pontjuk közös. **Az egyenletrendszert végtelen sok számpár elégíti ki, végtelen sok megoldása van.**



FELADAT

B11 Oldjuk meg algebrai úton és grafikusan is a következő egyenletrendszereket, $x \in \mathbb{Q}; y \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 8y + 6x = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} 6x - 2y = 22 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

☉ A 306. oldalon egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok találhatók.

FÜGGVÉNYEK ÖSSZEKAPCSOLÁSA

ÚJ FÜGGVÉNYEK ELŐÁLLÍTÁSA VALÓS SZÁM HOZZÁADÁSÁVAL

Egy szám kivonása ugyanazt jelenti, mint a szám ellentettjének hozzáadása, ezért az „összeadás” szó itt kivonást is jelenthet.

FELADAT

B12 Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(0; 2)$, $B(6; 0)$, $C(4; 5)$.

Rajzold meg az adott transzformációkkal előállított háromszögeket!

Jellemezd a geometriai transzformációkat!

- Adj a pontok második jelzőszámához 8-at!
- Adj a pontok második jelzőszámához -7 -et!
- Adj a pontok első jelzőszámához 7-et!
- Adj a pontok első jelzőszámához -6 -ot!

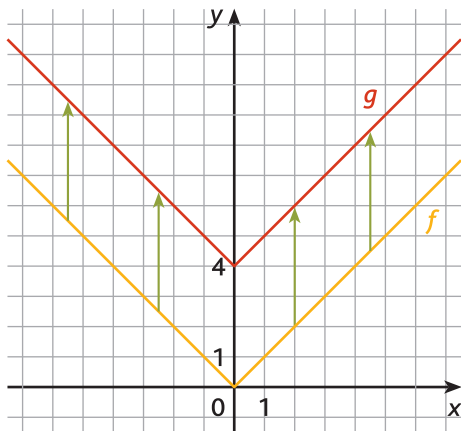
☉ Fogalmazd meg a tapasztaltakat!

1. példa

Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben a függvények grafikonját.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x|; \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x| + 4$$

Hasonlítsuk össze a két grafikont.


A f függvény minden számhoz hozzárendeli az abszolútértékét.

A g függvényt úgy kaphatjuk, hogy az f függvényhez hozzákapcsolunk egy olyan függvényt, amely minden számhoz hozzáad 4-et:

$$x \xrightarrow{|\Delta|} |x| \xrightarrow{+4} |x| + 4$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x $	3	2	1	0	1	2	3
$ x + 4$	7	6	5	4	5	6	7

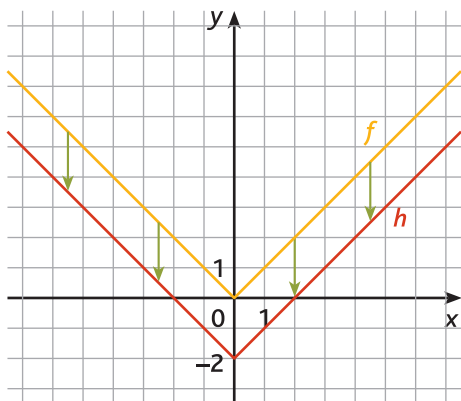
Ha az f függvény grafikonját az y tengellyel párhuzamosan eltoljuk +4 egységgel, akkor a g függvény grafikonját kapjuk.

2. példa

Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben a függvények grafikonját.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x|; \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x| - 2$$

Hasonlítsuk össze a két grafikont.


A h függvényt úgy kaphatjuk, hogy az f függvényhez hozzákapcsolunk egy függvényt, amely minden számhoz hozzáad -2-t:

$$x \xrightarrow{|\Delta|} |x| \xrightarrow{-2} |x| - 2$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x $	3	2	1	0	1	2	3
$ x - 2$	1	0	-1	-2	-1	0	1

Ha az f függvény grafikonját az y tengellyel párhuzamosan eltoljuk -2 egységgel, akkor a h függvény grafikonját kapjuk.

3. példa

Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben a függvények grafikonját.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x|; \quad i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x + 2|$$

Hasonlítsuk össze a két grafikont.

Néhány elempárral írjuk fel az f függvény táblázatát:

Az i függvényt úgy származtathatjuk, hogy először minden számhoz hozzárendeljük a 2-vel nagyobb számot, majd ehhez a függvényhez kapcsoljuk hozzá az f függvényt.

$$x \xrightarrow{\Delta + 2} x + 2 \xrightarrow{|\cdot|} |x + 2|$$

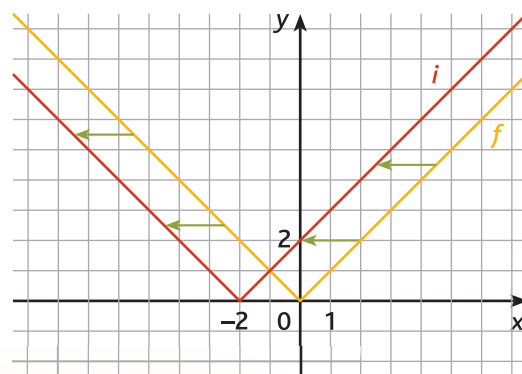
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x $	3	2	1	0	1	2	3

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$x + 2$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x + 2 $	3	2	1	0	1	2	3

Az i függvény 2-vel kisebb számokhoz rendeli hozzá ugyanazokat az értékeket, mint az f függvény.

Ezért ha az f függvény grafikonját az **x tengellyel párhuzamosan** -2 egységgel **eltoljuk**, akkor az i függvény grafikonját kapjuk.

Megfigyelted? Mivel az x változót 2-vel növeljük, az eredeti függvénynek megfelelő értékeket 2-vel korábban veszi fel az i függvény, a grafikon negatív irányban tolódik el.



4. példa

Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben a függvények grafikonját.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto |x|; \quad j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto |x - 2|$$

Hasonlítsuk össze a két grafikont.

Néhány elempárral most is írjuk fel az f függvény táblázatát:

A j függvényt úgy származtathatjuk, hogy először minden számhoz hozzárendeljük a 2-vel kisebb számot, majd ehhez a függvényhez kapcsoljuk hozzá az f függvényt.

$$x \xrightarrow{\Delta - 2} x - 2 \xrightarrow{|\cdot|} |x - 2|$$

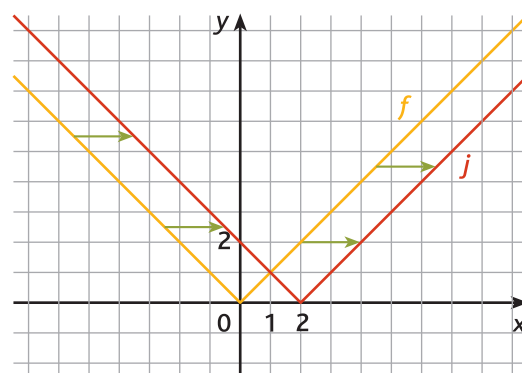
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$ x $	4	3	2	1	0	1	2

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$x - 2$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$ x - 2 $	4	3	2	1	0	1	2

A j függvény 2-vel nagyobb számokhoz rendeli hozzá ugyanazokat az értékeket, mint az f függvény.

Ezért ha az f függvény grafikonját $+2$ egységgel **az x tengellyel párhuzamosan eltoljuk**, a j függvény grafikonját kapjuk.

Megfigyelted? Ha az x változót 2-vel csökkentjük, akkor mi történik az eredeti függvény grafikonjával?

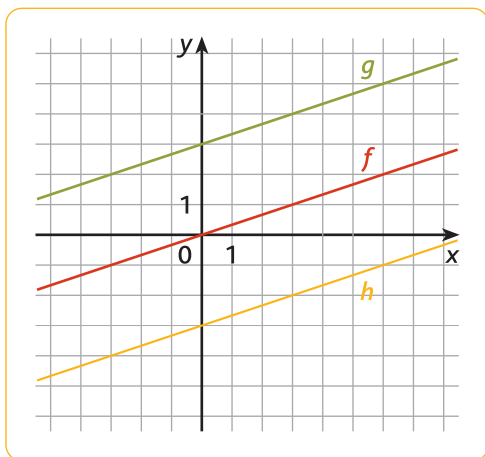


FELADATOK

☉ Ezeknek a feladatoknak a megoldásában alkalmazhatók-e az előző példákban látottak? (Az $x \neq 0$.)

B13 Rajzold meg közös koordináta-rendszerben a függvények grafikonját!

- a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$; b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 + 4$; c) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 - 3$;
d) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$; e) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x} + 4$; f) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x} - 3$

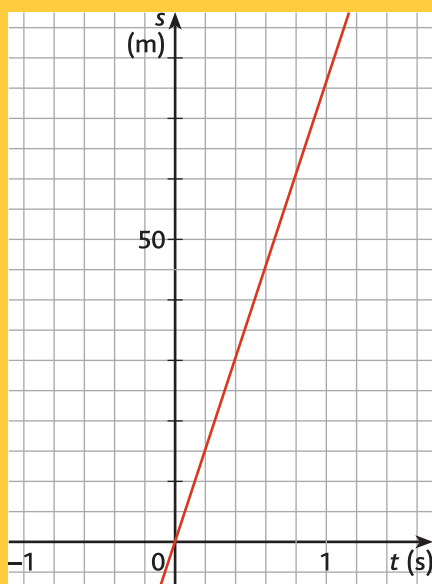


B14 Megrajzoltuk három lineáris függvény grafikonját.

Írd le kifejezéssel ezeket a függvényeket, ha az alaphalmaz és a képhalmaz az $\mathbb{R}$!

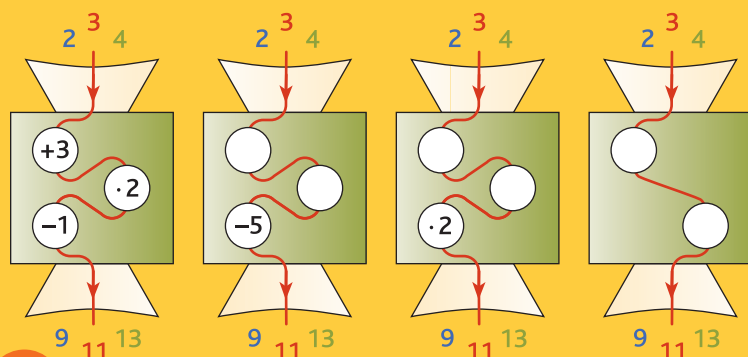
Miben különböznek a függvényeket leíró kifejezések?

Többet ésszel ...



Egy forma 1-es versenyautó idő-út grafikonja látható az ábrán. Az autó a megfigyelési pont előtt pillanatnyilag állandó sebességgel suhant el.

- a) Egy másik autó 0,6 másodperccel korábban, ugyanekkora sebességgel haladt el a megfigyelési pont előtt. Rajzold le ennek az autónak az idő-út grafikonját!
b) Egy harmadik autó 0,4 másodperccel később, ám ugyanekkora sebességgel haladt el a megfigyelési pont előtt. Rajzold le ennek az autónak is az idő-út grafikonját!
c) Írd fel mindhárom autó esetén az idő és a megfigyelési ponthoz viszonyított helyzet közti hozzárendelés szabályát!



Írj az üres helyekre olyan műveleteket, hogy mind a négy számátalakító-gép egyformán működjön!

Az azonos színű számok tartoznak össze.

Milyen függvénnyel írható le a gépek működése?

☉ Az első „gép” átalakításai:

$$2 \mapsto 9; \quad 3 \mapsto 11; \quad 4 \mapsto 13$$

B15 Rajzold meg közös koordináta-rendszerben a függvények grafikonját!

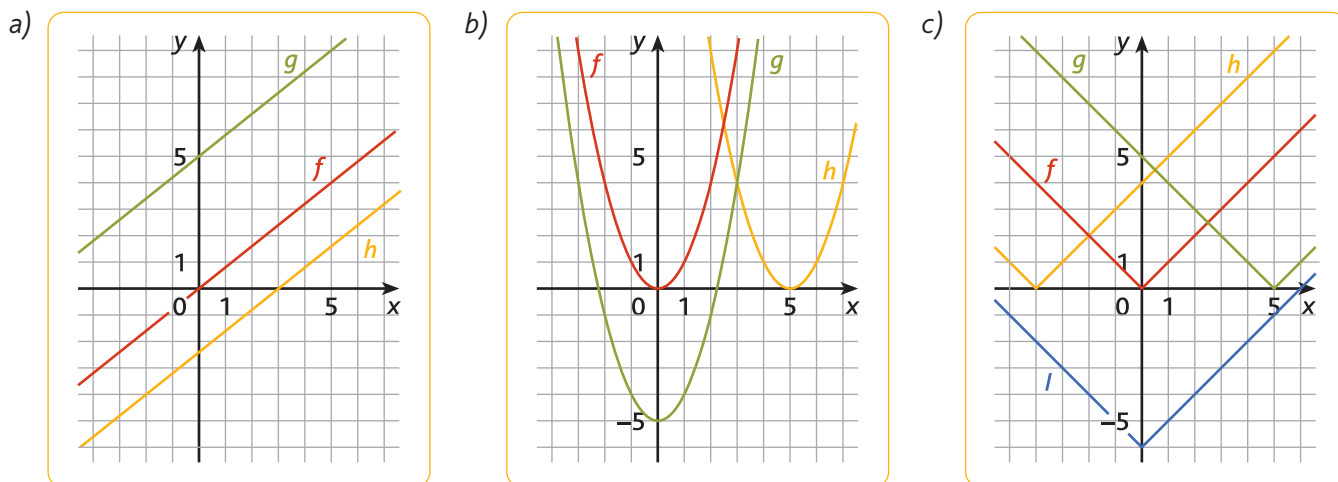
Az alaphalmaz és a képhalmaz az $\mathbb{R}$. Az f függvény grafikonjából hogyan kapható meg a g , illetve a h függvény grafikonja?

- a) $f(x) = 2x$; $g(x) = 2x + 3,5$; $h(x) = 2(x + 3,5)$;
 b) $f(x) = 2x$; $g(x) = 2x - 3,5$; $h(x) = 2(x - 3,5)$;
 c) $f(x) = |x|$; $g(x) = |x| + 6$; $h(x) = |x + 6|$;
 d) $f(x) = |x|$; $g(x) = |x| - 6$; $h(x) = |x - 6|$

☉ *Mi a különbség a g , illetve a h függvény esetén adott transzformációk között?*

B16 Több függvény grafikonját ábráztuk közös koordináta-rendszerben. Add meg a hozzárendelések szabályát!

☉ *Az f függvény szabályát add meg először!*



B17 Rajzold meg közös koordináta-rendszerben a két-két függvény grafikonját, majd ezek segítségével válaszolj a kérdésekre!

Az alaphalmaz és a képhalmaz az $\mathbb{R}$.

- a) $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = 9$; b) $f(x) = (x - 1)^2$, $g(x) = x + 5$;
 c) $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = |x|$; d) $f(x) = (x + 2)^2$, $g(x) = -2$

Mely számokra egyezik meg az f és a g függvény értéke?

Mely számok esetén kisebb az f függvény értéke a g függvény értékénél?

☉ *Tanulmányozd a 279. oldalon a 3. példa megoldását?*

ÚJ FÜGGVÉNYEK ELŐÁLLÍTÁSA VALÓS SZÁMMAL SZORZÁSSAL

FELADAT

B18 Egy négyszög csúcsainak koordinátái: $A(0; 2)$, $B(4; 0)$, $C(6; 0)$, $D(4; 4)$

Rajzold meg az $ABCD$ négyszöget! Minden esetben rajzold meg a számítás után kapott pontokkal is az alakzatot! Hasonlítsd össze a megrajzolt képet az $ABCD$ négyszöggel!

Szorozd meg a pontok

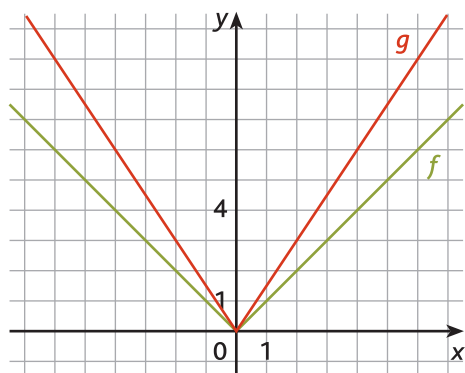
- a) második koordinátáját 2-vel; b) első koordinátáját 2-vel;
 c) második koordinátáját -1 -gyel; d) első koordinátáját -1 -gyel;
 e) második koordinátáját $0,5$ -del; f) első koordinátáját $0,5$ -del!

☉ *Fogalmazd meg a tapasztaltakat!*

5. példa

Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben a függvények grafikonját.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto |x|; \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto 1,5 \cdot |x|$$



Foglaljuk közös táblázatba a két függvény néhány értékét.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f: x $	3	2	1	0	1	2	3
$g: 1,5 \cdot x $	4,5	3	1,5	0	1,5	3	4,5

Az f függvény minden számhoz hozzárendeli az abszolútértékét. A g függvényt úgy kaphatjuk, hogy az f függvényhez hozzákapcsolunk egy olyan függvényt, amely minden számot megszoroz 1,5-del:

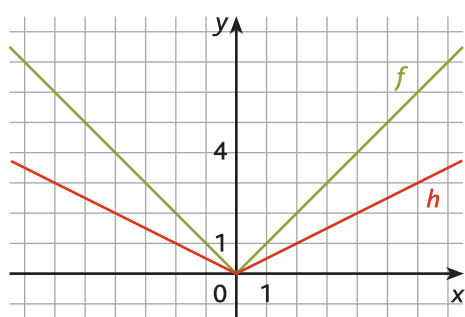
$$x \xrightarrow{|\Delta|} |x| \xrightarrow{1,5 \cdot \blacksquare} 1,5 \cdot |x|$$

Az eredeti függvényértékek 1,5-szeresükre változnak, az f függvény grafikonja az **y tengely irányában** 1,5-szeresére **megnyúlik**.

6. példa

Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben a függvények grafikonját.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto |x|; \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto 0,5 \cdot |x|$$



Foglaljuk közös táblázatba a két függvény néhány értékét.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f: x $	3	2	1	0	1	2	3
$h: 0,5 \cdot x $	1,5	1	0,5	0	0,5	1	1,5

Az f függvény minden számhoz hozzárendeli az abszolútértékét. A h függvényt úgy kaphatjuk, hogy az f függvényhez hozzákapcsolunk egy olyan függvényt, amely minden számot megszoroz 0,5-del:

$$x \xrightarrow{|\Delta|} |x| \xrightarrow{0,5 \cdot \blacksquare} 0,5 \cdot |x|$$

Az eredeti függvényértékek 0,5-szeresükre változnak, az f függvény grafikonja az **y tengely irányában** 1,5-szeresére **zsugorodik**.

• Ha egy 0-tól különböző számmal (például 2-vel) osztunk, illetve a szám reciprokával (0,5-tel) szorzunk, akkor ugyanazt az eredményt kapjuk.

7. példa

Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben a függvények grafikonját.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto |x|; \quad i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto -|x| \quad (= -1 \cdot |x|)$$

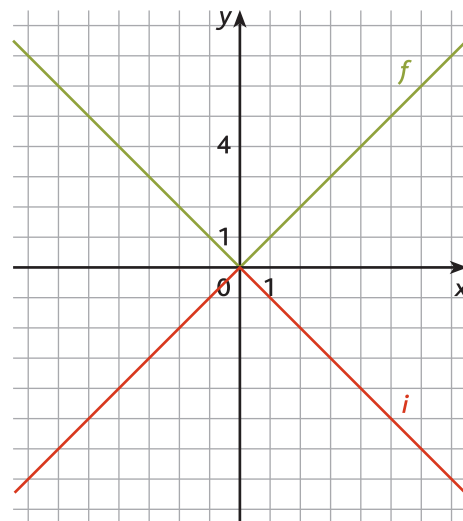
Foglaljuk közös táblázatba a két függvény néhány értékét.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f: x $	3	2	1	0	1	2	3
$i: - x $	-3	-2	-1	0	-1	-2	-3

Az f függvény minden számhoz hozzárendeli az abszolútértékét. Az i függvényt úgy kaphatjuk, hogy az f függvényhez hozzákapcsolunk egy olyan függvényt, amely minden számot megszoroz (-1) -gyel:

$$x \xrightarrow{|\Delta|} |x| \xrightarrow{-1 \cdot \blacksquare} -1 \cdot |x|$$

Az eredeti függvényértékek (-1) -szeresükre változnak, az f függvény grafikonját **tükrözzük az x tengelyre**.



FELADATOK

- B19** Rajzold meg közös koordináta-rendszerben a függvények grafikonját!
Az alaphalmaz és a képhalmaz az $\mathbb{R}$.

Feladatgyűjtemény
3.3.01–10., 3.3.15.

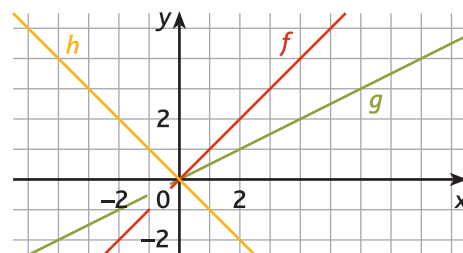
Az f függvény grafikonjából hogyan kapható meg a többi függvény grafikonja?

- a) $f(x) = x$; $g(x) = 2x$; $h(x) = 2,5x$; $i(x) = -2x$
 b) $f(x) = |x|$; $g(x) = 2|x|$; $h(x) = 2,5|x|$; $i(x) = -2|x|$
 c) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 2\sqrt{x}$; $h(x) = 2,5\sqrt{x}$; $i(x) = -2\sqrt{x}$

- B20** Megrajzoltuk három egyenes arányosság grafikonját.

Írd le kifejezéssel ezeket a függvényeket, ha az alaphalmaz és a képhalmaz az $\mathbb{R}$!

Miben különböznek a függvényeket leíró kifejezések?



Egy úrvándor a Holdon felmászik egy magas toronyba, és csúzlival, vízszintesen kilő egy kavicsot.

A kavics pályáját piros vonal jelzi. Vázold fel, milyen lenne a kavics pályája, ha ugyanilyen magasról, vízszintesen, ugyanilyen erővel a Földön lőnének ki azt! Az idő (t) és az elmozdulás függőlegesen lefelé tartó összetevője (s) között

a Földön: $s = 5 \cdot t^2$; a Holdon: $s = \frac{5}{6} \cdot t^2$ kapcsolat van.

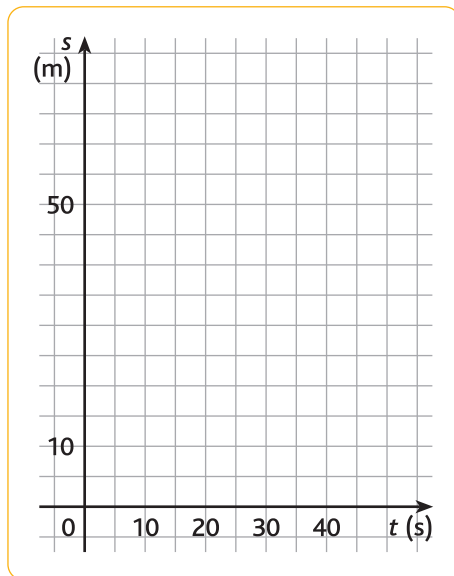


GYAKORLÓ- ÉS FEJTÖRŐ FELADATOK

☉ Mikor nevezünk egy hozzárendelést függvénynek?

B21 A sokszögek halmazához hozzárendeljük az $\mathbb{N}$ halmazt úgy, hogy minden sokszöghöz hozzárendeljük átlóinak számát.

Mi felel meg ebben a hozzárendelésben egy háromszögnek; négyszögnek; ötszögnek; nyolcszögnek; n -szögnek? Függvény-e ez a hozzárendelés?



B22 Cili tőlünk 60 m-re van, amikor elindul felénk. Ugyanakkor Dóra, aki mellettünk áll, szintén elindul Cili felé. Dóra 2 s alatt 1 m utat tesz meg, Cili 2 s alatt 3 m-t.

a) Melyik összefüggés alapján határozható meg, hogy Cili hány méter távolságra (s) van tőlünk az indulás után t másodperc múlva?

☉ Jelöld meg a helyes egyenletet!

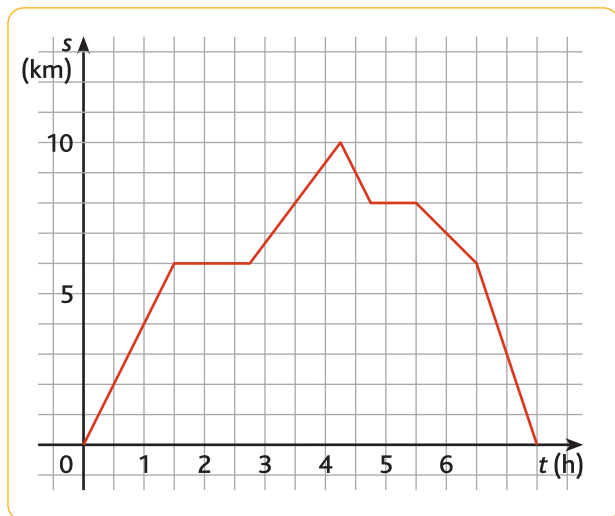
A: $s = 60 + \frac{3}{2}t$; B: $s = 60 - \frac{3}{2}t$; C: $s = 60 + \frac{2}{3}t$; D: $s = 60 - \frac{2}{3}t$

b) Mekkora távolságra volt tőlünk Dóra az indulás után 15 másodperc múlva?

A: 7,5 m-re; B: 13 m-re; C: 15 m-re; D: 30 m-re

c) Hány másodperc múlva és hol találkoznak?

☉ Rajzold meg a két lány mozgásának grafikonját, és onnan olvasd le a választ!



B23 Egy természetjáró szakkör kirándulásáról készült ez a grafikon.

- Hány kilométert tettek meg az indulást követő másfél órában? Mennyi volt ekkor a sebességük?
- Mikor álltak meg először pihenni? Milyen távolságra voltak ekkor a kiindulási ponttól?
- Mennyi ideig tartott az első pihenőjük?
- Mikor fordultak vissza? Milyen távolságra voltak ekkor a kiindulási ponttól?
- Milyen távolságra volt egymástól az első és a második pihenőhely, ha ugyanazon az útvonalon jöttek hazafelé?
- Mekkora volt a sebességük a kirándulás utolsó órájában?

☉ Az adott függvények grafikonját külön koordináta-rendszerben rajzold meg!

B24 Rajzold meg a következő lineáris függvények grafikonját!

1 $y = 3x$; 2 $y = -2x$; 3 $y = \frac{2}{3}x$; 4 $y = \frac{2}{3}x + 4$

A megrajzolt egyeneseket

- tükrözd az x tengelyre;
- tükrözd az $e(x) = x$ függvény grafikonjára;
- tükrözd az origóra;
- forgasd el $+90^\circ$ -kal az origó körül!

Add meg az így kapott egyenesek egyenletét is!

B25

Válaszd ki az összefüggések közül az egyenes, illetve a fordított arányosságokat!

- a) Derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 10° ; 20° ; 30° ; 40° ; ...
Mekkora a másik hegyesszöge?
- b) 60 cm^2 területű téglalap egyik oldala 1 cm , 2 cm , 3 cm ;
Mekkora a téglalap másik oldala?
- c) Mekkora az 1 cm ; 2 cm ; 3 cm ; ... sugarú kör kerülete?
- d) Mekkora az 1 cm ; 2 cm ; 3 cm ; ... sugarú kör területe?
- e) Mekkora az 5 cm sugarú kör 45° -os; 60° -os; 270° -os középponti szögéhez tartozó körcikk területe?

© Jelöld a változókat! Próbáld felírni a köztük lévő hozzárendelés szabályát! Például, ha a derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α , akkor mekkora a β , a másik hegyesszög?

B26

Néhány tagjukkal megadtunk sorozatokat.

Keress szabályt, majd folytasd 5-5 taggal a sorozatot!

A szabály alkalmazásával számítsd ki a sorozatok 20. elemét!

- a) $-5; -2; 1; 4; 7; \dots$; b) $12; 10; 8; 6; 4; \dots$;
c) $7; 14; 28; 56; 112; \dots$; d) $125; 25; 5; 1; 0,2; \dots$;
e) $8; 9; 11; 14; 18; \dots$; f) $2; 10; 26; 58; 122; \dots$

Az előző sorozatok közül melyik számtani, melyik mértani sorozat?

© Szükség esetén használjátok a számológépet.

B27

Megadtuk a sorozat első két elemét: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$

- a) Add meg a sorozat szabályát úgy, hogy a sorozat számtani sorozat legyen!
A szabály alkalmazásával számítsd ki a sorozat 3.; 4.; 10. elemét!
Határozd meg a sorozat első 10 elemének az összegét!
- b) Add meg a sorozat szabályát úgy, hogy a sorozat mértani sorozat legyen!
A szabály alkalmazásával számítsd ki a sorozat 3.; 4.; 10. elemét!
- c) Keress további szabályokat! Alkalmazásukkal számítsd ki a 3.; 4. elemet!

B28

Add meg a következő sorozatok 40. tagját!

- a) $a_n = 5 + 2n$; b) $b_n = n^2$; c) $c_n = 100 - 3n$; d) $d_n = 5 \cdot (-2)^n$

© Mit helyettesítesz be az n helyére?



Akhilleusz, az ókori görög hős versenyt fut egy teknőssel. Mondjuk, tízszer akkora sebességgel fut, mint a teknős, ezért száz láb előnyt ad neki. Akhilleusz egy időegység alatt odaér, ahonnan a teknős kezdett. Ez alatt az idő alatt azonban a teknős is halad tíz lábnyit. Akhilleusz egy tized időegység alatt ott terem, ám ez alatt a teknős ismét halad egy lábnyit, és még mindig vezet. Akármilyen gyorsan is ér Akhilleusz oda, ahol a teknős egy pillanattal korábban volt, az állat mindig egy kicsit előrébb lesz. Ez a végtelenségig így folytatódik, tehát Akhilleusz sohasem fogja megelőzni, de még csak utolérni sem a teknőst.

Határozd meg tíz ilyen „menet” időtartamainak az összegét!

© A 44. oldalon lévő 2. példa további ötletet adhat!

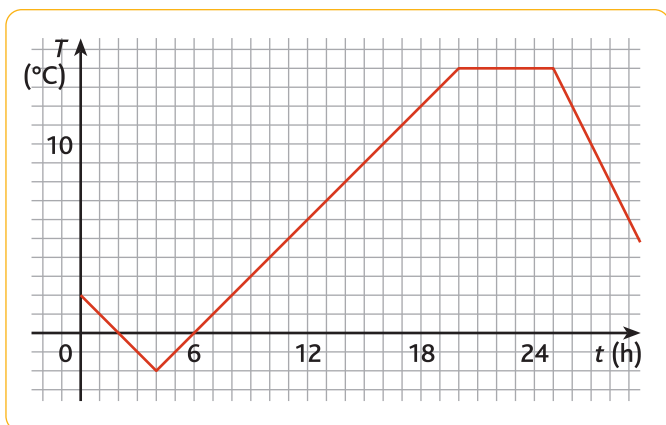
Nézz utána!

© Zénón, ókori görög filozófus (i. e. 490–460 körül) ezzel a példával is azt kívánta igazolni, hogy a mozgás csak illúzió, valójában nem létezik. Ismered Zénón többi paradoxonját? Keresd meg a világhálón!



TUDÁSPRÓBA

20



1 Grafikkonnal adtuk meg a hőmérséklet változását.

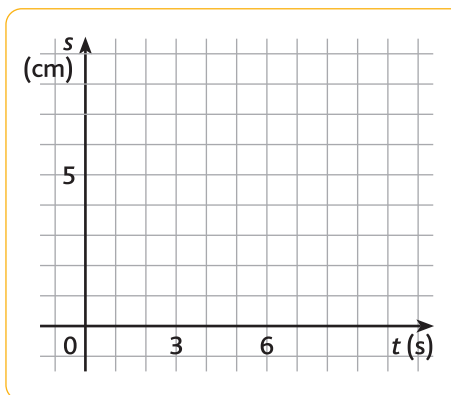
A hőmérséklet

a) mikor volt 12 °C;

b) mikor volt a legmagasabb;

c) mettől meddig emelkedett;

d) mettől meddig volt 8 °C fölött?



2 Áron egyenletesen haladva 3 másodperc alatt 5 m utat tesz meg.

a) Mekkora utat tesz meg 1 s; 15 s; 2 min; 1 h alatt?

b) Rajzold meg Áron mozgásának idő-út grafikonját!

c) Írd le kifejezéssel az idő és az út közti összefüggést!

d) A következő szavak közül melyik jellemző leginkább Áron mozgására?

A: sétál; B: siet; C: kocog; D: rohan

☉ A helyes válasz betűjelével válaszolj!

3

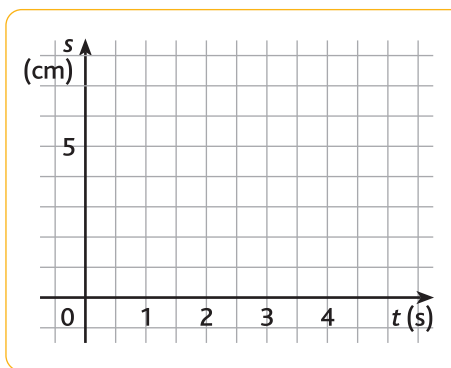
Egy sorozat első két eleme: $a_1 = 3$; $a_2 = 12$

Írd föl a sorozat következő három elemét úgy, hogy

a) a szomszédos tagok különbsége állandó legyen;

b) a szomszédos tagok hányadosa állandó legyen;

c) minden további tag az előző két tag szorzata legyen!



4 Egy golyó a lejtőn egyenletesen gyorsulva gurul le. Táblázatba foglaltuk, hogy 1 s, 2s, 3 s, ... alatt mekkora utat tesz meg:

t (s)	0	1	2	3	4	5	10
s (cm)	0	0,5	2	4,5	8		

Rajzold meg a mozgás idő-út grafikonját!

Írd fel az idő és a megtett út közti összefüggés egyenletét, majd egészítsd ki a táblázatot!

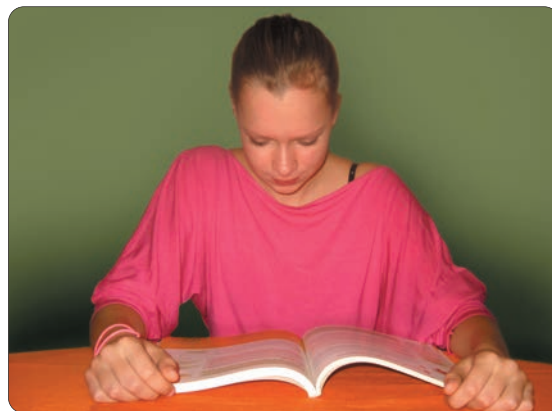
5

Oldd meg grafikusan és algebrai úton is a következő egyenlőtlenséget!

$$2x - 4 < -\frac{2}{3}x + 4$$

6. KÉPESSÉGPRÓBA

GYAKORLATI ALKALMAZÁSOK



- 1 Hédi a cukrászdában ötféle süteményből (pogácsa, rétes, sósrúd, túrófánk és vargabéles) két különbözőt szeretne rendelni. Hányféleképpen választhatja ki Hédi a két süteményt?

A: 6-féleképpen; B: 8-féleképpen; C: 10-féleképpen; D: 20-féleképpen

☉ A helyes válasz betűjelének megjelölésével válaszolja kérdésekre!

- 2 Egy kertész háromféle diót termelt. A diótermés 45%-át a milotai, 25%-át az alsószentiváni fajta szolgáltatta. A tiszacsécsi fajtából 60 kg termett. A szedés, a szárítás, majd a raktározás során a háromfajta dió egyenletesen összekeveredett. Ha egy zsák dió közül véletlenszerűen kiveszünk egyet, akkor mi a valószínűsége annak, hogy az tiszacsécsi fajtájú lesz?

A: 0,60; B: 0,40; C: 0,33; D: 0,30

☉ A tiszacsécsi fajta a össztermés hány százalékát adta?



- 3 Két dobókockával dobva mi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik kockán páros számú pont lesz felül?

A: $\frac{35}{36}$; B: $\frac{11}{12}$; C: $\frac{5}{6}$; D: $\frac{3}{4}$

☉ Össze tudod számlálni a „kedvezőtlen eseteket”?

- 4 Az ábrán egy szabályos ötszög alakú medence látható, amelynek minden oldalánál egy-egy szabályos háromszög alakú virágágyást alakítottak ki.

- a) Ambrus ötféle virágot szeretne az ágyásokba ültetni úgy, hogy mindegyik ágyásba csak egyféle virág kerüljön. Hányféleképpen választhatja ki, hogy melyik ágyásba mely virágokat ültesse?

A: 120-féleképpen; B: 24-féleképpen;
C: 12-féleképpen; D: 6-féleképpen

- b) Elered az eső. A következő két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége?

M: A medencébe esik az első csepp eső.

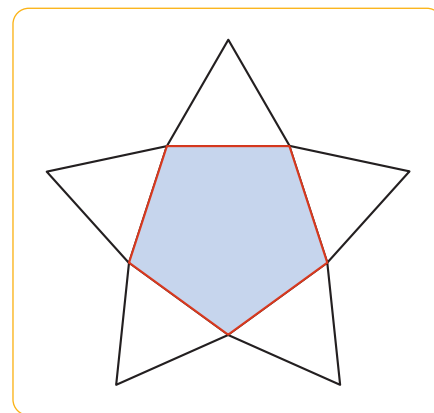
V: A virágágyások valamelyikére esik az első csepp eső.

A: Az M esemény valószínűsége nagyobb.

B: A V esemény valószínűsége nagyobb.

C: Az M és a V esemény valószínűsége ugyanakkora.

D: Nem dönthető el, hogy melyik esemény valószínűsége a nagyobb.



© Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!



© Mely mértékegységgel célszerű megadni az egyes mennyiségeket?

© Az előkészített deszkák és lécek már nem szabdalhatók.

5

Régészek egy ásatáson a mérések alapján megállapították, hogy a régmúltban élt népességben a testmagasságból (m) a koponya körmérete (k) jó közelítéssel megbecsülhető a következő képlet segítségével:

$$k \approx \frac{m}{6} + 26$$

Az ásatáson olyan koponyát találtak, amelynek a körmérete $k = 54$ cm volt.

a) A következő összefüggések közül melyikkel becsülhető meg ennek a régmúltban élt embernek a magassága?

A: $m \approx 54 \cdot 6 - 26$; B: $m \approx (54 - 26) : 6$;

C: $m \approx (54 - 26) \cdot 6$; D: $m \approx 54 + 26 \cdot 6$

b) Körülbelül milyen magas volt az az ember, akinek a koponyáját megtalálták?

A: $m \approx 124$ cm; B: $m \approx 168$ cm; C: $m \approx 176$ cm; D: $m \approx 210$ cm

6

Tasziló megbecsülte néhány élőlény tömegét.
Melyik becslés lehet helyes?

A: Tasziló 15 éves barátja, Arisztid tömege körülbelül 0,06 t.

B: Egy átlagos ló tömege körülbelül 60 000 g.

C: Egy átlagos kékcinke tömege körülbelül 60 dkg (dag).

D: Egy nagy testű kutya tömege körülbelül 60 000 dkg (dag).

7

Egy műhelyben megrendelésre adott méretű ládákat gyártanak. A ládákhoz szükséges anyagot már előzőleg elkészítették.

A következő mennyiségeket használhatják így föl:

330 db 15 cm széles és 100 cm hosszú deszka;

320 db 15 cm széles és 45 cm hosszú deszka;

140 db 3 cm-szer 3 cm keresztmetszetű, 60 cm hosszú lécz.

Legfeljebb hány láda készíthető el a készletből, ha egy-egy ládához 11 db hosszú deszkára, 8 db rövid deszkára és 4 db lécre van szükség?

A: 40 láda; B: 35 láda; C: 30 láda; D: 25 láda készíthető el.

8

Ferdinánd egy szállodában szállt meg, ahol a szállásdíjat a mellékelt táblázat szerint határozták meg.

A szállodában töltött éjszaka	EUR/éjszaka
1., 2.	65,50
3.-tól 7.-ig	40,20
8.-tól	30,00

a) Mennyibe került Ferdinánd szállása, ha 13 éjszakát töltött a szállodában?

A: 618,00 €-ba; B: 512,00 €-ba;

C: 435,80 €-ba; D: 390,00 €-ba

b) Ferdinánd a bankkártyájával egyenlítette ki a szállásdíjat.

Hány forintba került neki a szállás, ha a bank 1 €-ért 280 Ft-ot számított?

A: 143 360 Ft-ba; B: 122 024 Ft-ba; C: 109 200 Ft-ba; D: 173 040 Ft-ba

9 Egy traktor első kerekének átmérője a hátsó kerék átmérőjének 70%-a,

a) A traktor egyenes vonalú haladása közben a hátsó kereke 140-et fordul. Hányat fordul az első kereke?

A: 70-et; B: 98-at; C: 168-at; D: 200-at

b) A traktor első kerekének átmérője 84 cm. Körülbelül mekkora a hátsó kerék átmérője?

A: ≈ 60 cm; B: ≈ 70 cm; C: ≈ 120 cm; D: ≈ 140 cm

c) Egyenes vonalú mozgással mekkora távolságra jut a traktor, miközben a hátsó kereke 140-szer körülfordul?

A: ≈ 528 m-re; B: ≈ 264 m-re; C: ≈ 168 m-re; D: ≈ 150 m-re

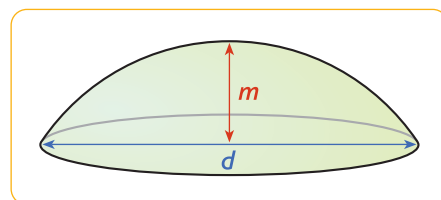


© Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!

10 Egy kör alaplapú domb térfogatát a következő képlet segítségével tudjuk megbecsülni:

$$V \approx m \cdot \frac{d^2}{2}$$

A domb magasságát m , az alaplapjának átmérőjét d jelöli.



a) Körülbelül hány köbméter földet tartalmaz egy 1,5 m magas, 8 m átmérőjű domb?

A: $V \approx 72 \text{ m}^3$ -t; B: $V \approx 48 \text{ m}^3$ -t; C: $V \approx 36 \text{ m}^3$ -t; D: $V \approx 24 \text{ m}^3$ -t

b) 80 t földből 10 m átmérőjű, 1 m magas dombot hordtak össze. Hány tonna földből hordható össze egy 5 m átmérőjű, 1 m magas domb?

A: 20 t földből; B: 40 t földből; C: 60 t földből; D: 75 t földből

c) Egy ligetben 3 m magas, kör alaplapú dombot szeretnének összehordani, hogy rajta sziklakertet létesíthessenek. Mekkora a válasszák az alapkör átmérőjét, ha 216 m^3 föld áll rendelkezésükre?

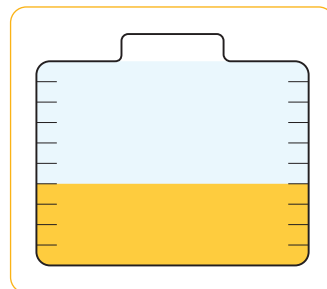
Az alábbi összefüggések közül melyikkel számítható ki az alapkör átmérője?

A: $d \approx m \cdot \frac{V}{2}$; B: $d \approx \left(2 \cdot \frac{V}{m}\right)^2$; C: $d \approx \sqrt{2 \cdot \frac{V}{m}}$; D: $d \approx \frac{\sqrt{2 \cdot V}}{m}$

11 Az ábrán egy befőttesüveg vázlatos képe látható, amelynek sárgára színezett részében méz van.

Mennyi méz van az üvegben, ha az üveg űrtartalma („nyakig” megtöltve) $\frac{5}{8}$ l?

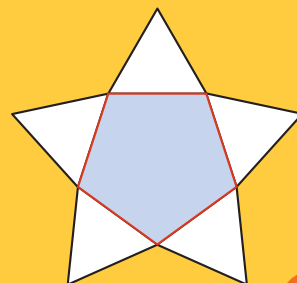
A: 2 dl; B: 25 cl; C: 80 ml; D: 250 cl



Blanka csillag alakú terítőket készít úgy, hogy egy szabályos ötszög alakú kék vászondarab minden oldalához különböző (barna, lila, sárga, piros és zöld) színű, szabályos háromszög alakú vászondarabot varr. (Lásd az ábrát.) A terítők átfordítva is használhatók.

Hányféle sorrendben következhetnek a különböző színű „csillagágak” az ötszög alakú kék vászon oldalai mentén?

A: 60-féle; B: 24-féle; C: 12-féle; D: 5-féle



12

Magyarországon a XIX. század végén és a XX. század első felében négyszögöllel mérték a kertek, szántóföldek stb. területét. A négyszögöl az 1 öl oldalhosszúságú négyzet területe. $1 \text{ öl} = 1896 \text{ mm} \approx 1,9 \text{ m}$ volt.

Ebben az időben kialakítottak egy 500 négyszögöl területű gyümölcsöst.

Körülbelül hány négyzetméter a területe ennek a gyümölcsösnek?

A: $\approx 750 \text{ m}^2$; B: $\approx 950 \text{ m}^2$; C: $\approx 1540 \text{ m}^2$; D: $\approx 1800 \text{ m}^2$

13

Egy turistaház (T) a tőle 2800 m távolságra lévő kilátóval (K) egyenes ösvényt köt össze. A térkép ezt az ösvényt ekkora szakasszal szemlélteti:



☉ Jelöld meg a helyes méretarány betűjelét!

a) Mekkora a térkép méretaránya?

A: 1 : 50 000; B: 1 : 20 000; C: 1 : 5000; D: 1 : 2000

b) Mekkora távolságra van a turistaházról a térképen F-jelölt forrás?

A: 225 m-re; B: 550 m-re; C: 775 m-re; D: 1100 m-re

c) Bernát egyenletes sebességgel 42 perc alatt sétál el a turistaházról a kilátóig. Az indulása után számított 15. és 21. perc közötti időtartam alatt a térképen nagybetűkkel jelölt tereptárgyak közül melyek mellett halad el?

A: Csak az F-jelölt forrás mellett.
 B: Az E-vel jelölt erdészház és az F-jelölt forrás mellett.
 C: Az F-jelölt forrás és a G-vel jelölt gázló mellett.
 D: A G-vel jelölt gázló és a H-vel jelölt halom mellett.

☉ Feltételezzük, hogy a percenként kifolyó vízmennyiség állandó.

14

Egy uszoda 25 m hosszú, 8 m széles, téglalap alapú medencéjében 180 cm mély víz van.

Ha megnyitják a lefolyó csapját, akkor 1 és fél óra alatt ürül ki a medence.

a) Hány hektoliter víz van a teljesen megtöltött medencében?

A: 36 hl; B: 360 hl; C: 3600 hl; D: 36 000 hl

b) A lefolyó csapjának megnyitása után hány perc múlva lesz 150 cm mély a víz a medencében?

A: 45 perc múlva; B: 30 perc múlva;
 C: 20 perc múlva; D: 15 perc múlva

15

Egy kiránduláson Ubul, Vendel és Zóra közösen rendeltek egy grillcsirkét 1020 Ft-ért, egy-egy adag köretet adagonként 480 Ft-ért, végül egy kancsó narancslevet 870 Ft-ért.

A közösen elfogyasztott uzsonna árát egyenlően osztották el egymás között. Az egy főre eső költség többféleképpen kiszámítható. Az alábbi számítási tervek közül melyik hibás?

A: $k = 1020 : 3 + 480 + 870 : 3$; B: $k = 1020 + 480 : 3 + 870 : 3$;
 C: $k = (1020 + 480 \cdot 3 + 870) : 3$; D: $k = (1020 + 870) : 3 + 480$

☉ A hibás terv betűjelét jelöld meg!

16

Noel Sárospatakról Győrbe autózott. Induláskor a kilométer-számláló 35 878 km-t mutatott, érkezéskor 36 253 km-t.

A képen látható műszerről leolvasható, hogy a gépkocsi 60 literes tankjának mekkora részében volt még üzemanyag, amikor Noel megérkezett Győrbe.

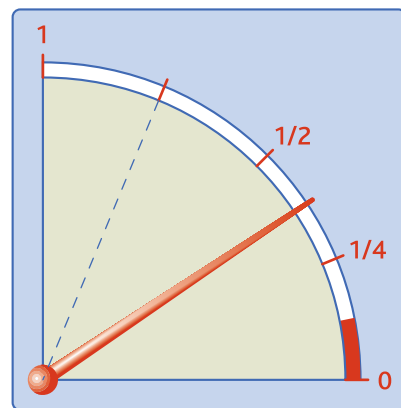
Kék szaggatott vonal jelzi, hogy induláskor hol állt a műszer mutatója.

a) Hány liter üzemanyagot fogyasztott Noel gépkocsija a Sárospataktól Győrig tartó úton?

A: 17,5 litert; B: 22,5 litert; C: 37,5 litert; D: 42,5 litert

b) 100 kilométerenként átlagosan hány litert fogyasztott ez a gépkocsi?

A: 11,3 litert; B: 10 litert; C: 7,5 litert; D: 6 litert



17

Ernő gépkocsival utazott az 1150 km távolságra lakó hannoveri barátjához. Induláskor otthon 15 360 Ft-ért teletankolta a gépkocsi 65 literes tankját. Az üzemanyag literenkénti ára (akkor) otthon 384 Ft volt.

Ernő 150 km-t magyar autópályán haladva elérte az osztrák–magyar határt, ezután az osztrák autópályákon, lakóhelyétől 450 km távolságra az osztrák–német határt. Eddig gépkocsija 100 kilométerenként átlagosan 8 liter üzemanyagot fogyasztott. A német autópályákon nagyobb sebességgel haladhatott tovább, így az átlagos fogyasztása 100 kilométerenként 2 literrel több volt, mint korábban. Németországban, az osztrák–német határtól 150 km távolságra egy benzinkútnál újra teletöltötte a gépkocsi tankját, amiért 76,50 €-t kellett fizetnie.

a) Hány liter üzemanyag volt Ernő kocsjában, mielőtt otthon teletankolta azt?

A: 10 liter; B: 25 liter; C: 35 liter; D: 40 liter

b) Mennyit tankolhatott Ernő a németországi benzinkútnál?

A: 51 litert; B: 63 litert; C: 47,6 litert; D: 59,5 litert

c) Mennyibe került 1 liter üzemanyag a németországi benzinkútnál?

A: 1,39 €-ba; B: 1,40 €-ba; C: 1,50 €-ba; D: 1,58 €-ba

d) Elég volt-e Hannoverig az üzemanyag a németországi tankolás után? (A németországi autópályákon nem változott a gépkocsi fogyasztása.)

A: Nem volt elég. Ernőnek Hannover előtt újra kellett tankolnia.

B: Elég volt, de Hannoverbe érve tankolnia kellett, mert teljesen kiürült a tankja.

C: Elég volt. Hannoverbe érve még mintegy 5 liter üzemanyag volt a tankjában.

D: Elég volt. Hannoverbe érve még mintegy 10 liter üzemanyag volt a tankjában.

Figyelempróba

© Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!

18

Andor 30%-os áreszállítás után 126 000 Ft-ért vásárolt egy kajakot. Mennyi volt a kajak eredeti ára?

A: 189 000 Ft; B: 180 000 Ft;

C: 168 000 Ft; D: 163 800 Ft



Figyelempróba

19

Egy üdülőhelyen két szálloda, a Forrás Szálló és a Gyöngyszem Hotel versenyez a vendégek kegyeiért. A két szálloda egyforma színvonalon és áron nyújtja a szolgáltatásait.

Egy kétágyas szobában, két személy számára a szállásdíj félpanzióval naponta 12 000 Ft, a svédasztalos főétkezés egy fő számára naponta 3000 Ft.

Gábornak és feleségének a Forrás Szállóban törzsvendégtárgyja van, amelynek felmutatásával a szállás és az étkezés díjából 20% kedvezményt kapnak.

A Gyöngyszem Hotel ezzel szemben kedvezményes turnusokat ajánl. 3 éjszakára elengedi a szállásdíj és a félpanzió ellenértékének 50%-át, de a főétkezés árát változatlanul hagyja. A három napon túli tartózkodásra viszont a teljes szállásdíjat ki kell fizetni.

- a) A kedvezmény beszámítása után mennyibe kerül naponta Gáboréknak a szállás és az étkezés a Forrás Szállóban?

A: 12 000 Ft-ba; B: 14 000 Ft-ba; C: 14 400 Ft-ba; D: 24 000 Ft-ba

- b) Gáborék 5 napra szeretnének megszállni valamelyik szállodában. Melyik szállodában kell kevesebbet fizetniük az 5 napi szállásért és étkezésért?

A: A két szállodában 5 napra ugyanannyit kell fizetniük.

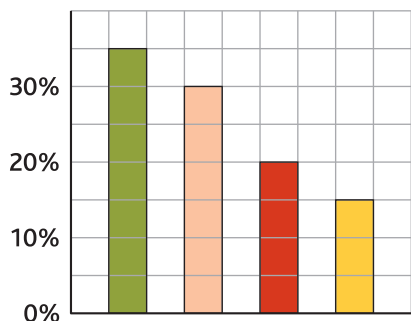
B: 5 napra a Forrás Szállóban kell kevesebbet fizetniük.

C: 5 napra a Gyöngyszem Hotelben kell kevesebbet fizetniük.

- c) Gáborék úgy döntenek, hogy az ötnapos nyaralás során nem ragaszkodnak a Forrás Szállóhoz, hanem kihasználják mindkét szálloda kedvezményeit. Hány forintot nyerhetnek így Gáborék?

☉ Jelöld meg a helyes választ betűjelét!

☉ Válaszodat számítással igazold!



20

Egy farmon állattenyésztéssel és növénytermesztéssel is foglalkoztak, búzát, kukoricát és repcét termesztettek. A növénytermesztés adta az összjövedelem 65%-át. A növénytermesztésben a legnagyobb jövedelmet a kukorica hozta, a repce viszont csupán az összjövedelem egyötödét szolgáltatta.

- a) Írd a jövedelem megoszlását szemléltető diagram oszlopai alá az a , b , k és r kezdőbetűk közül a megfelelőt!

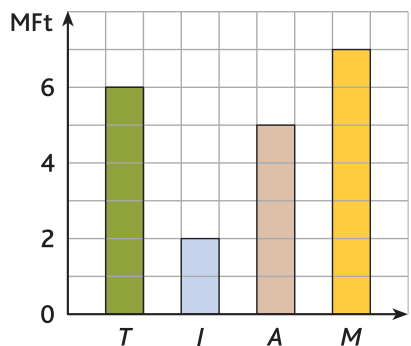
- b) A búzatermesztés 12 millió forint jövedelmet hozott. Hány forint jövedelem származott az állattenyésztésből?

A: 8 millió forint;

B: 16 millió forint;

C: 24 millió forint;

D: 28 millió forint



21

Nagyék építkezési költségeinek megoszlását szemlélteti a diagram. A költségeket millió forintba (jele MFt) kerekítve adtuk meg.

A diagramon a telek árát T , a járulékos költségeket J , az anyagköltséget A , míg a munkabéreket M jelöli.

- a) Az összköltség mekkora részét tette ki a telekár?

A: $\frac{3}{10}$ részét;

B: $\frac{1}{3}$ részét;

C: $\frac{3}{5}$ részét;

D: $\frac{1}{4}$ részét

- b) Az összköltség hány százalékát fordították munkabére?

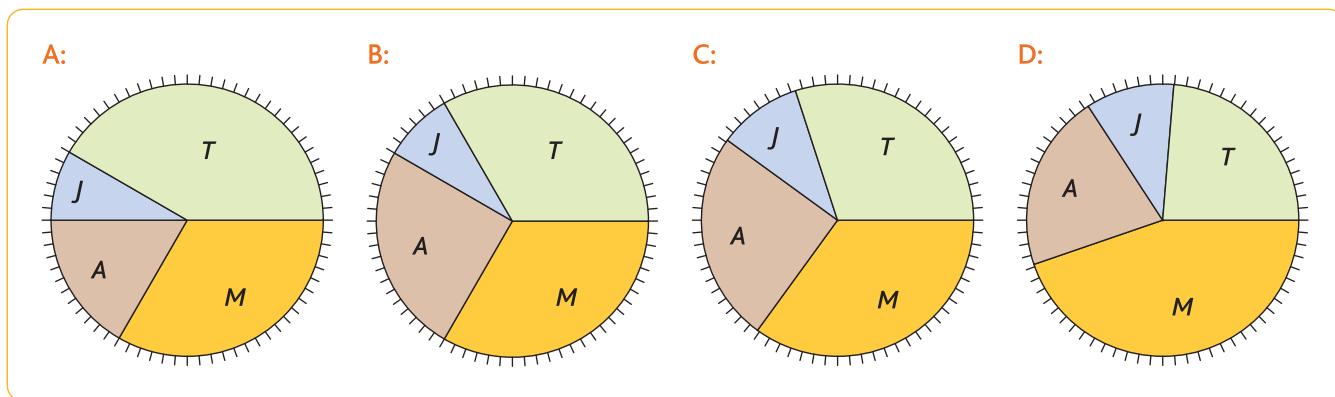
A: 27%-át;

B: 33%-át;

C: 35%-át;

D: 70%-át

c) A következő kördiagramok közül melyik szemlélteti ugyanazt az eloszlást, mint az előző oldal alján lévő oszlopdiagram?



22

Ignác 5 doboz festéket vásárolt a kerítés befestésére, de ez csak a kerítés 30%-ára volt elegendő. Legalább hány doboz festéket kell még vásárolnia, ha az egész kerítést be szeretné festeni?

A: 15-öt;

B: 12-t;

C: 11-et;

D: 10-et

23

A Neptunusz óriásbolygó átlagos pályasugara $R \approx 4500$ millió kilométer. Az alábbiak közül melyik egyenlő ezzel az értékkel?

A: $R \approx 4,5 \cdot 10^6$ km;

B: $R \approx 4,5 \cdot 10^7$ km;

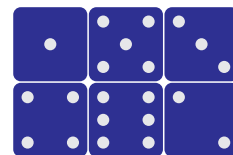
C: $R \approx 4,5 \cdot 10^8$ km;

D: $R \approx 4,5 \cdot 10^9$ km

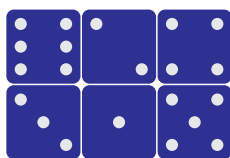
24

6 szabályos dobókockát szorosan egymás mellé olyan dobozba csomagoltak be, amelynek minden lapja átlátszó. Ilyen dobozt látunk az ábrán. A kockák szemközti lapjain a pontszámok összege mindig 7.

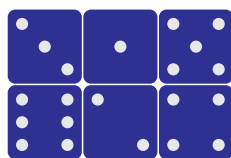
Az alábbiak közül melyiket láthatjuk, ha átfordítjuk a dobozt?



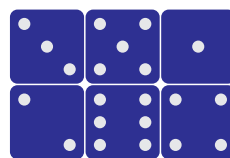
A:



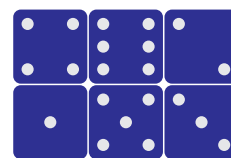
B:



C:



D:

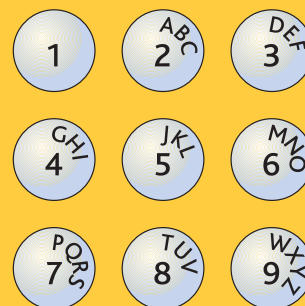


Elsősorban az Egyesült Államokban nagy divat, hogy a könnyebb megjegyezhetőség kedvéért a telefongombokhoz számok mellett betűket is rendelnek, így fel lehet hívni például a TELEFON – SZAM telefonszámot, ami 8353366 – 7926.

Függvény-e az ábrán látható megfeleltetés:

$U = \{\text{ábécé betűi}\}$; $K = \{2-9 \text{ számjegyekből képzett telefonszámok}\}$

Függvény-e fordított irányú megfeleltetés, azaz egy telefonszám egyértelműen meghatároz-e egy szót?

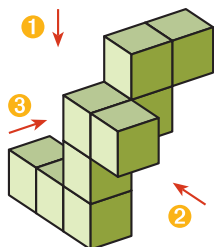


25

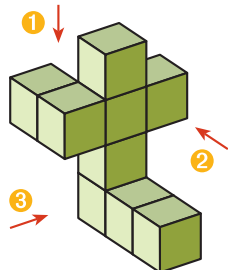
Egységkockákból 4 egység élhosszúságú kockákat ragasztottunk össze. Az így összeállított nagy kockákból néhány egységkocka elvételével a következő testeket kaptuk.

Jelölések: 1: a felülnézet iránya; 2: az előlnézet iránya; 3: az oldalnézet iránya.

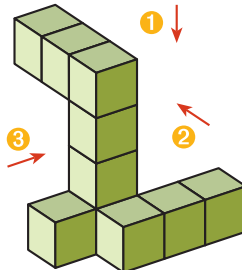
I.



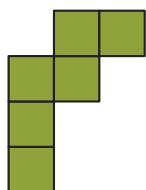
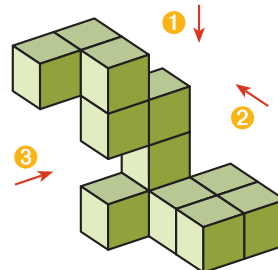
II.



III.



IV.



a) Mennyi a **IV.** test és a 4 egység élhosszúságú kocka térfogatának aránya?

A: 3 : 16; **B:** 1 : 4; **C:** 3 : 10; **D:** 12 : 16

b) A fent ábrázolt testek közül melyiknek előlnézete az itt látható alakzat?

A: A fenti testek közül egyiknek sem előlnézete ez az alakzat.

B: Csak az **I.** testnek előlnézete ez az alakzat.

C: Csak a **IV.** testnek előlnézete ez az alakzat.

D: Az **I.** és a **IV.** testnek előlnézete ez az alakzat.

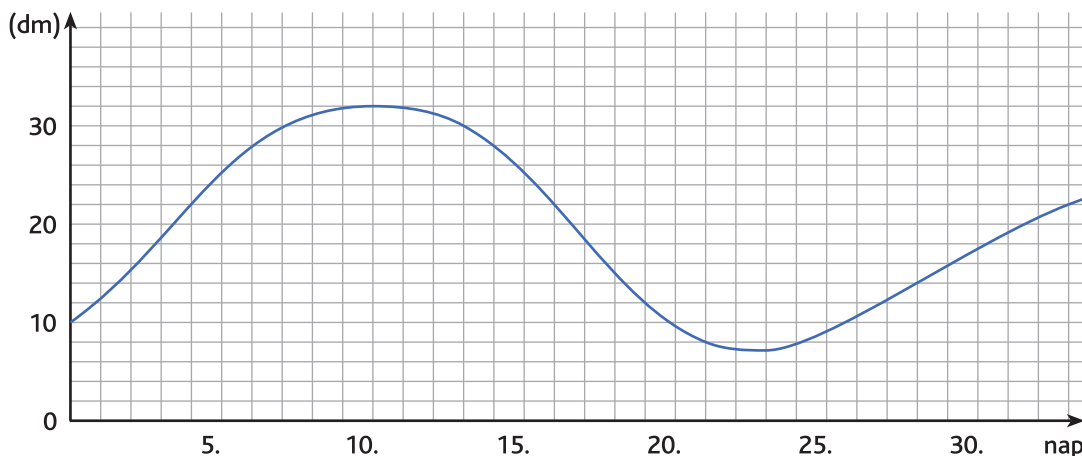
c) Legfeljebb hány egységkocka ragasztható a **II.** testre úgy, hogy a felülnézete ne változzék, és az előlnézetének a magassága is megmaradjon?

A: 4; **B:** 6; **C:** 8; **D:** 15

26

Egy folyó vízszintjének júniusi ingadozása olvasható le a grafikonról.

Ha a vízszint 8 dm alá süllyed, akkor a zátonyok miatt, ha 30 dm fölé emelkedik, akkor a balesetveszély miatt nem közlekedhet a kirándulóhajó.



a) Melyik napon volt a legmagasabb a vízállás?

b) Júniusban hány napig nem közlekedhetett a kirándulóhajó?

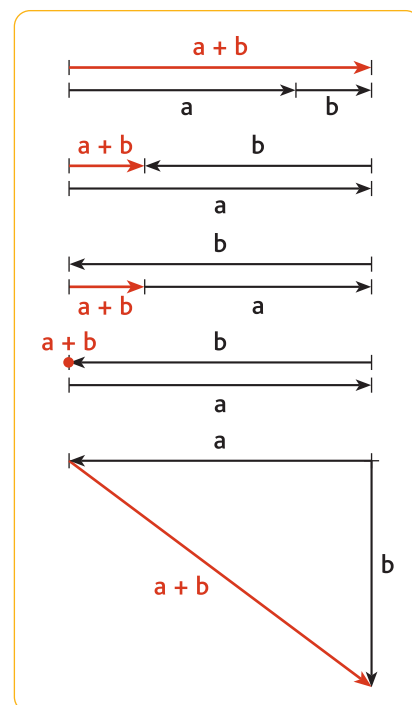
VEKTOROK ALKALMAZÁSA

FELADAT

27 A kiindulási pontjától mekkora távolságra és milyen irányban van az a görkorcsolyázó, aki.

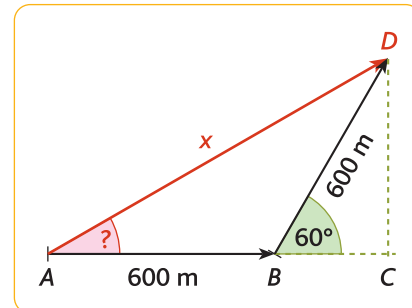
- először keleti irányban gurul 30 m-t, majd keleti irányban 10 m-t;
- először keleti irányban gurul 40 m-t, majd nyugati irányban 30 m-t;
- először keleti irányban gurul 30 m-t, majd nyugati irányban 40 m-t;
- először keleti irányban gurul 40 m-t, majd nyugati irányban 40 m-t;
- először keleti irányban gurul 40 m-t, majd déli irányban 30 m-t?
(A szög nagyságát szögmérővel mérd meg!)

A feladat segítségével figyeljétek meg az elmozdulás vektorok összegzésének a szabályát!



28 Egy kajakos az A pontból kiindulva, keleti irányban 600 m-t evezve eljut a B pontba. Ott 60° -kal észak felé elfordul, majd ismét 600 m-t evezve a D pontba ér.

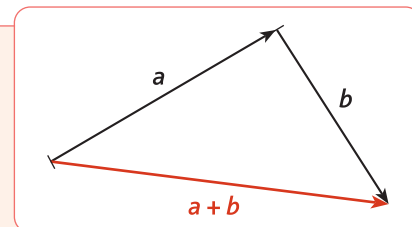
A D pont mekkora távolságra és a keleti irányhoz viszonyítva milyen irányban van a kiindulási A ponttól?



Értelmezés

Két vektor összege más szóval eredője az a vektor, amelyet úgy kapunk, hogy az első vektor végpontjára felmásoljuk a második vektort. Az első vektor kezdőpontjából a második vektor végpontjába mutató vektor a két vektor összege.

Jelölés: $a + b$



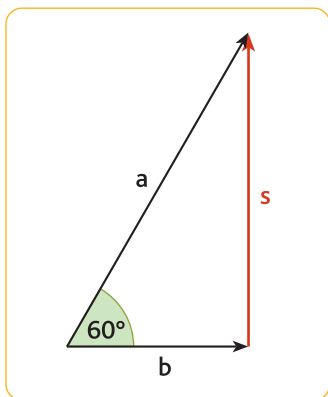
FELADAT

29 Két vitorlás indul el közös kiindulási pontból. Az első először a -ral (olvasd a vektorral), majd folytatva az utat, b -ral mozdul el.

A második vitorlás először b -ral, majd a -ral mozdul el.

Szerkeszd meg közös ábrán mindkét hajó elmozdulását.

Fogalmazd meg a tapasztaltakat.



- 30** Egy motoros sárkányrepülőt a motorja $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel, keleti irányba mozgatná, ha nem fújna a szél. Így viszont 60° -kal észak felé eltér a kelet iránytól, és mintegy $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad.

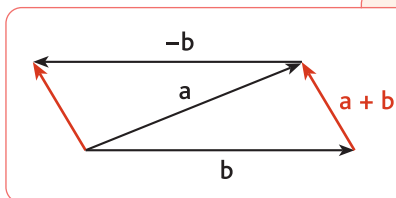
Milyen irányú szél fúj, és mekkora a szél sebessége?

Jelölje a repülő tényleges sebességvektorát a , a motor sebességét szélcsendben b , a szél ismeretlen sebességvektorát s . Vegyük észre:

$$b + s = a$$

$$s = a - b$$

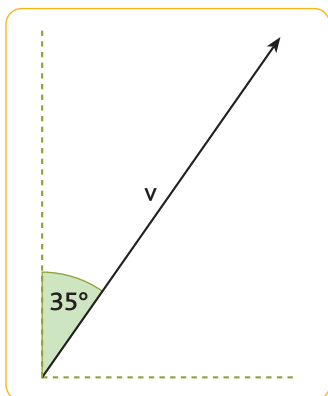
Értelmezés



Két vektor, az a és a b **különbsége** az a vektor, amelyet úgy kapunk, hogy a két vektort közös kezdőpontból felmérjük.

Ekkor az $a - b$ **különbségvektor** a kivonandó végpontjából a kisebbítendő végpontjába mutató vektor.

Belátható: $a - b = a + (-b)$



© A v -t adott irányú össze-
tevékre bontjuk.

- 31** Egy motoros sárkányrepülő az északi iránytól 35° -kal kelet felé eltérve halad, a tényleges sebessége $11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ha nem fújna a nyugati szél, akkor pontosan északi irányba tartana.

Szélcsendben (ugyanilyen motorteljesítmény mellett) mekkora sebességgel haladna a sárkányrepülő, és körülbelül mekkora a szél sebessége? Szerkesszük meg az ismeretlen sebességvektorok arányosan kicsinyített képét. Méréssel (és számítással) határozzuk meg az ismeretlen sebességek közelítő értékét.

Jelölje a repülő tényleges sebességvektorát v , a repülő sebességét szélcsendben r , a szél ismeretlen sebességvektorát s . Figyeld meg: $v = r + s$

- 32** Egy, $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel észak felé tartó sárkányrepülő sebességvektora v , amely a délnyugati szél s sebességvektorának és a repülő motorja által szélcsendben megfigyelhető r sebességvektornak az eredője: $v = r + s$

Ha nem fújna a délnyugati szél, akkor a sárkányrepülő az északi iránytól nyugat felé 30° -kal eltérő irányban repülne. Szélcsendben (ugyanilyen motorteljesítmény mellett) mekkora sebességgel haladna a sárkányrepülő, és körülbelül mekkora a szél sebessége? Szerkesszük meg a sebességvektorok arányosan kicsinyített képét, a köztük lévő összefüggést is szemléltetve. Méréssel (és számítással) határozzuk meg az ismeretlen sebességek közelítő értékét.

- 33** Rajzolj egy a vektort, amelynek nagysága $|a| = 6$.

Szerkeszd meg az u -t és a v -t úgy, hogy $a = u + v$, továbbá $|u| = 4$ és $u \perp v$ teljesüljön!

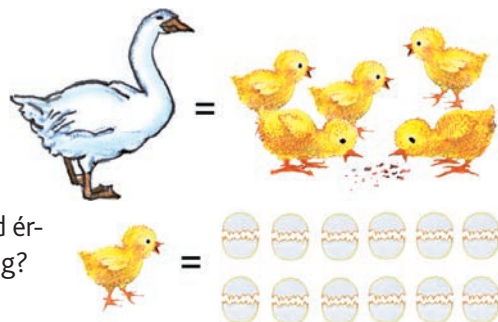
FEJTÖRŐ FELADATOK

B1

Seholsincs országban nem ismerik a pénzt. Ludas Linda egy mérő búzát akar vásárolni, amelynek az értéke 204 tojás.

Lindának viszont 4 csirkéjén kívül csak libái vannak.

Kifizetheti-e ezekkel maradéktalanul a mérő búzát, ha tudjuk, hogy egy lúd értéke 5 csirke értékével egyenlő, egy csirke ára pedig 12 tojásnak felel meg?



A: Nem fizethető ki, mert 204 tojás többet ér, mint 4 csirke.

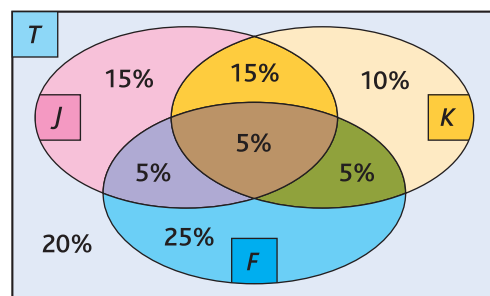
B: Nem fizethető ki, mert egy lúd ára 60 tojás árának felel meg, a 204 pedig nem osztható 60-nal.

C: Kifizethető, mert 204 tojás értéke megegyezik 3 lúd és 2 csirke értékével.

D: Kifizethető, mert 204 tojás értéke megegyezik 2 lúd és 3 csirke értékével.

B2

120 tanulótl megkérdezték, hogy szokott-e jégchokizni, kézilabdázni vagy focizni. A válaszok százalékos megoszlását ezen a halmazábrán rögzítették. Az egyes halmazokat a sportág nevének kezdőbetűjével jelöltük.



a) Hány tanuló szokott kézilabdázni?

A: 42; **B:** 35; **C:** 12; **D:** 10

b) A megkérdezettek hány százaléka szokott jégchokizni, de kézilabdázni nem?

A: 15%-a; **B:** 20%-a; **C:** 25%-a; **D:** 40%-a

c) Hány olyan tanuló van, aki legfeljebb egy sportágat űz a felsorolt három közül?

A: 50; **B:** 60; **C:** 70; **D:** 84

☉ Az ábra alapján válaszolj a kérdésekre!

B3

Egy strandon a vendégek belépőjegy helyett karkötőt kapnak. Ennek a vonalkódja érzékelő segítségével leolvasható, így ellenőrizhető, hogy az egyes vendégek melyik szolgáltatásra jogosultak.

Az alapszolgáltatáson kívül be lehet fizetni külön-külön az élményfürdő, a gyógycentrum, illetve a szauna igénybevételére is. Fehér karkötőt kap az, aki csak az alapszolgáltatásokra fizet be. Van olyan, aki az alapszolgáltatásokon kívül a felsorolt három szolgáltatásból egyet, kettőt vagy akár hármat is igénybe vesz. Az egyes lehetőségeket különböző színű karkötőkkel különböztetik meg. A fehérrel együtt hányféle színű karkötőt kellett készíteniük?

A: 4-félét; **B:** 6-félét; **C:** 8-félét; **D:** 12-félét

Figyelempróba



B4

Egy birkózóversenyen azonos súlycsoportban 35 versenyző indul. A verseny kieséses, tehát mindig csak a győztes mehet tovább.

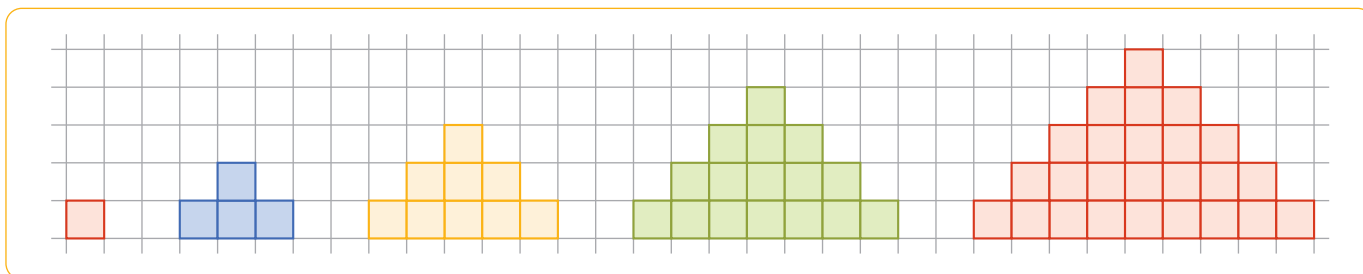
(Döntetlen esetén kisorsolják a továbbjutót.) Ha valamely fordulóra páratlan számú versenyző jut be, kisorsolják, hogy ki megy mérkőzés nélkül a következő fordulóra. Összesen hány mérkőzés után hirdethetnek bajnokot ebben a súlycsoportban?

A: 34; **B:** 32; **C:** 18; **D:** 16

Többet ésszel ...

B5

A síkidomok végtelen sorozatában az alakzatok az ábrán megfigyelhető szabály szerint növekedve követik egymást.



- a) Milyen színű a 39. alakzat, ha a sorozatban a síkidomok színezésére mindig ezt a négy színt, mindig ugyanebben a sorrendben használtuk fel?

A: Piros; B: kék; C: sárga; D: zöld

- b) Mekkora a sorozat 39. alakzatának kerülete, ha a hosszúságegység egy kis rácsnégyzet oldalhosszúsága: --- ?

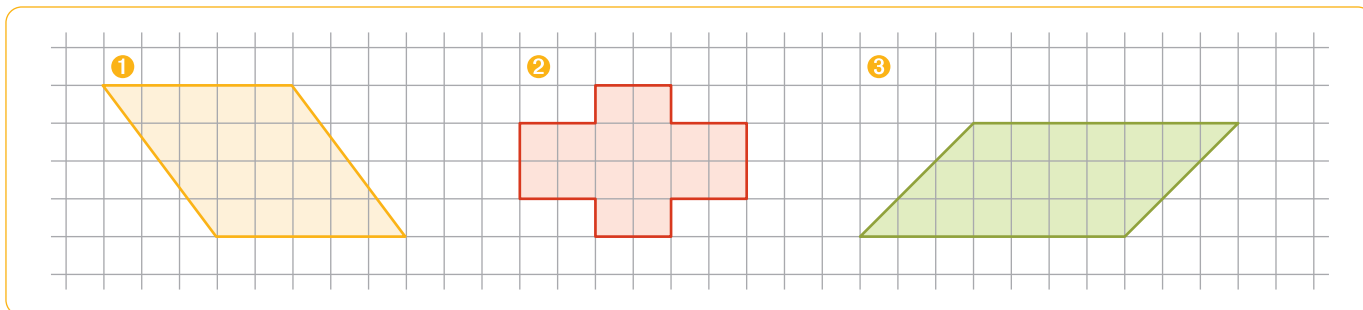
A: $K = 158$ --- B: $K = 184$ --- C: $K = 206$ --- D: $K = 232$ ---

- c) Mekkora a sorozat 39. alakzatának területe, ha a területegység egy kis rácsnégyzet területe: $\square$?

A: $T = 1599$ $\square$ B: $T = 1521$ $\square$ C: $T = 1560$ $\square$ D: $T = 3042$ $\square$

B6

- a) Melyik síkidomnak 20 hosszúságegység (---) a kerülete?



© Eszedbe jutott a Pitagorasz-tétel?

- A: Csak az 1 alakzaté. B: Csak a 2 alakzaté.
C: Az 1 és a 2 alakzaté. D: Mindhárom alakzaté.

- b) Az előző síkidomok közül melyiknek 20 területegység ($\square$) a területe?

- A: Csak az 1 alakzaté. B: Csak a 3 alakzaté.
C: Az 1 és a 2 alakzaté. D: Az 1 és a 3 alakzaté.

Többet ésszel ...

B7

Amikor Budapesten déli 12 óra van, akkor Tokióban este 8-at mutat az óra, New Yorkban hajnali 6 órát.

Milyen nap és hány óra van Tokióban, amikor New Yorkban hétfő este 8 óra van?

- A: Vasárnap reggel 6 óra van. B: Kedden reggel 6 óra van.
C: Hétfőn délelőtt 10 óra van. D: Kedden délelőtt 10 óra van.

© Egy ügyesen elkészített táblázat segíthet.

B8

Andor leírt néhány természetes számot, majd ezekről a számokról állításokat fogalmazott meg.

Írj *I* betűt az állítás után, ha biztosan (bármilyen számot is írt le Andor) igaz, *H* betűt, ha biztosan hamis! Ha az állítás lehet igaz, de lehet hamis is (attól függően, hogy mely számot írt le Andor), akkor írd utána *L* betűt!

A: A három legkisebb prímszám szorzataként előálló szám osztható 10-zel. ☐

B: Egy páros szám és egy páratlan szám szorzata páratlan szám. ☐

C: Egy páros szám és egy páratlan szám összege páratlan szám. ☐

D: Ha egy páros számot 5 hatványaként előálló számmal osztok, akkor végtelen szakaszos tizedestörtet kapok. ☐

B9

- Egy várost a végállomással összekötő vasútvonal hossza 175 km. Hány kilométerre van a vonat a végállomástól, ha megtette a távolság 68%-át?
- Év végén kilenc hetedik osztályos tanuló, a tanulók 18%-a kapott jelest matematikából, 32%-uk jót. Hányan kaptak jót matematikából?
- Egy asztalos 24 000 Ft-ért adott el egy szekrényt. A felhasznált anyag 6480 Ft-ba került. Hány százaléka az anyagköltség a szekrény árának?
- Péter gépkocsival megtette az út három nyolcadát, amikor egy benzinkútnál tankolt. A hátralévő út 40%-ának megtétele után egy parkolóhelyre behajtva megpihent. Ekkor még 96 km volt hátra az útjából. Milyen hosszú volt a teljes út?
- Egy ing árát növelték 25%-kal, majd a növelt összeget is növelték annak 10%-ával. Mennyi most az ára, ha eredetileg 60 €-ba került? Hány százalékkal nőtt az eredeti ár?

B10

Számítsd ki a 2652 – 1987 különbséget! A számítás elvégzése nélkül határozd meg a következő műveletek eredményét!

- $2652 - (1987 + 35);$
- $2652 - (1987 - 35);$
- $2652 - (1987 + 65);$
- $2652 - (1987 - 65);$

B11

- Egy gépkocsi egyenletes sebességgel haladva 90 km-t tesz meg óránként. Mekkora utat tesz meg 4 óra alatt? Mennyi idő alatt tesz meg 315 km-t?
- Mennyi idő alatt ássa fel 6 munkás azt a kertet, amelyet 5 munkás (ugyanolyan munkatempót feltételezve) 12 óra alatt ás fel?
- Egy térképen két tereptárgy távolsága 3,2 cm. Hány kilométer ez a távolság a valóságban, ha a térkép méretaránya 1 : 25 000?

B12

Nagyi vegyes savanyúságot készített. Összesen 30 kg káposztát, hagymát, zöldpaprikát és uborkát használt fel, amelyeket (a fenti sorrendben) 3 : 4 : 5 : 8 arányban kevert össze. Hány kilogrammot használt fel nagyi az egyes összetevőkből?

B13

Egy szerencsekerékben számok vannak. A nyeréshez két esemény közül választhatunk:

- A számjegyek összege 7, vagy a szám osztható 5-tel.
- A szám osztható 6-tal vagy 9-cel.

Melyik eseményre fogadnál, ha a szerencsekerékben a számok

- 1-től 50-ig;
- 1–100-ig;
- 1–1000-ig vannak?

☉ *Megfigyelted? Andor az általa leírt (de általad nem ismert) számokról mond állításokat. Ezek között nem biztos, hogy előfordul az a szám, amelyre te gondolsz!*

☉ *Készíts többféle megoldási tervet! Rajzos terv is segíthet az értelmezésben.*



© Az egyenletrendszerek megoldása 8. évfolyamon csak a hatosztályos gimnáziumokban követelmény.

© Az alaphalmazt feladatként határozd meg! A megoldás ellenőrzésénél vedd figyelembe az alaphalmazt is!



Írjuk fel egyenletrendszerrel az adatok közti összefüggéseket. Oldjuk meg a feladatot.

- Ha egy kétjegyű számhoz hozzáadjuk a számjegyei felcserélésével kapott számot, akkor 99-et kapunk. Ha az első számjegy 20-szorosához hozzáadjuk a második számjegy 30-szorosát, akkor 200 az eredmény. Mi volt az eredeti szám?
- Ha egy üres tartályba beleöntünk 8 vödör és 10 kanna vizet, akkor 176 l víz lesz benne. Ha ebben a tartályban 80 l víz van, és beleöntünk 10 vödör vizet, de közben kimerünk belőle 15 kannával, akkor végül 80 l víz lesz benne. Hány liter víz fér egy kannába, illetve egy vödörbe?
- Áginak 5000 Ft-tal több pénze van Balázs pénzének a felénél. Hány forintjuk van külön-külön, ha Áginak 7500 Ft-tal több pénze van, mint Balásznak?
- Egy tört számlálójához is, nevezőjéhez is 1-et adunk, a tört értéke (egyszerűsítés után) $\frac{2}{3}$ lesz. Ha a számlálót is, a nevezőt is 3-mal csökkentjük, a tört értéke $\frac{3}{5}$ lesz. Melyik ez a tört?
- Ha egy kétjegyű szám első számjegyének 8-szorosához hozzáadjuk a második számjegy 4-szeresét, akkor az eredeti számnál 9-cel nagyobb számot kapunk. Ha az eredeti szám első számjegyét 6-tal szorozzuk, majd a szorzatból elvesszük a második számjegynél 1-gyel kisebb szám kétszeresét, akkor az eredeti szám egyharmadát kapjuk. Mi volt az eredeti szám?
- Kétféle oldatból 14 kg-ot, illetve 6 kg-ot kevertek össze, így 66%-os oldatot kaptak. Ha az első oldatból 8 kg-ot, a másodikból 12 kg-ot vettek volna, akkor 72%-os oldatot kaptak volna. Határozzuk meg az oldatok töménységét.
- Összekevertek valahány kilogramm 60%-os, illetve 45%-os sóoldatot és még 1 kg sót. Így 58%-os sóoldatot kaptak. Ha 1 kg-mal kevesebbet vettek volna a 60%-os oldatból, és 2 kg-mal többet a másikkól, de nem öntöttek volna hozzá sót, akkor 51%-os oldatot kaptak volna. Hány kilogrammot használtak fel az első keverékhez az egyes oldatokból?
- 10 kg ismeretlen töménységű sóoldathoz hozzáöntöttek valamennyi vizet, így 50%-os sóoldatot kaptak. Ha az ismeretlen töménységű sóoldat 6 kg-jához 1 kg-mal kevesebb vizet öntöttek volna, mint az előbb, akkor 45%-os töménységű oldatot kaptak volna. Milyen töménységű az ismeretlen oldat? Az első keverékhez összesen hány kilogramm vizet használtak fel?
- Kétféle oldatból 4 kg-ot, illetve 6 kg-ot kevertek össze, így 65%-os oldatot kaptak. Ha az első oldatból 6 kg-ot, a másodikból 14 kg-ot vettek volna, akkor 55%-os oldatot kaptak volna. Határozzuk meg az oldatok töménységét.
- Egy kerékpáros egyenletes sebességgel 10 percen át kerékpározott, majd 8 percen át tolta tovább kerékpárját, így 3600 m távolságra jutott a kiindulási helyétől. Másnap 15 percen át ugyanakkora sebességgel kerékpározott, ezután leszállt a kerékpárjáról, és visszafordulva gyalogosan szintén az előző napi sebességgel 12 percen át tolta a kerékpárt. Így végül ugyanarra a helyre jutott, mint az előző alkalommal. Mekkora volt a kerékpáros sebessége, amikor kerékpározott, és mekkora volt akkor, amikor gyalogosan haladt?
- Éva most 24 éves, kétszer olyan idős, mint Kati volt akkor, amikor Éva olyan idős volt, mint Kati most. Hány éves most Kati?

7.

KISLEXIKON

A dőlt betűvel szedett fogalmak külön szócikkben is megtalálhatók.

Zárójelben, zöld számjegyekkel szedve utalunk azokra az oldalakra, ahol az adott fogalmat értelmezzük, illetve ahol az adott fogalmat más fogalmak értelmezésére alkalmazzuk.

Abszolútérték: (34. oldal); abszolútérték-függvény (269. oldal).

Alap: 1. *hatványalap* (20. oldal), 2. egyenlő szárú *háromszög* oldalai az alap és a két egyenlő hosszúságú szár (94. oldal), 3. *trapéz* alapjai a trapéz *párhuzamos* oldalpárja (114. oldal). 4. *százalékszámítás* esetén a 100%-nyi érték (56. oldal).

Alapfogalom: (12., 82. oldal).

Alaphalmaz: a vizsgálatban szóbaeső elemek összessége (10. oldal). → *Egyenlet* (160. oldal), *reláció*, → *függvény* (247., 250. oldal), → *algebrai kifejezés* (151. oldal).

Alaplap: → *Hasáb* (124. oldal), → *henger* (127. oldal), → *gúla* (132. oldal), → *kúp* (138. oldal).

Alaptétel: → *Axióma* (83. oldal).

Algebrai kifejezés: (151. oldal). Algebrai egész kifejezés, algebrai törtkifejezés (152. oldal).

Alkotó: → *Henger* (127. oldal) → *kúp* (137–139. oldal).

Ár: A földterület mérésének Magyarországon nem használatos egysége, a 10 m oldalú *négyszeg* területe. Jele: a.

Arány: két szám (mennyiség) *hányadosa* (52. oldal).

Asszociatív művelet: → *Csoportosíthatóság* (16., 154. oldal).

Átfogó: derékszögű háromszögben a derékszöggel szemközti oldal. → *Háromszög* (94. oldal).

Átló: a sokszög vagy sokszöglapokkal határolt test két nem szomszédos csúcsát összekötő szakasz (92. oldal).

Átmérő: körben, gömbben a középponton átmenő húr. → *Kör* (121. oldal).

Axióma: Olyan alapvető matematikai állítás, *alaptétel*, amelyet bizonyítás nélkül igaznak fogadunk el, és felhasználunk más matematikai állítások bizonyítására. (83. oldal).

Azonosság (azonos egyenlőség): olyan *egyenlet*, amely az *alaphalmaz* minden megengedett elemére igaz (160. oldal). A műveleti tulajdonságokat azonosságokkal is leírhatjuk (152–154. oldal). Nevezetes azonosságok (157. oldal).

Azonos egyenlőtlenség: olyan *egyenlőtlenség*, amely az *alaphalmaz* minden elemére igaz (161. oldal).

Befogó: derékszögű háromszögben a derékszöget közrezáró két oldal neve. → *Háromszög* (94. oldal).

Belső szög: a háromszög belső szögeinek összege 180° (95. oldal). → *Sokszög*.

Biztos esemény: a kísérlet vagy megfigyelés során minden esetben bekövetkező esemény. → *Valószínűség*.

Csoportosíthatóság: (asszociativitás) műveleti tulajdonság, több szám összeadása, illetve szorzása esetén tet-szőlegesen helyezhetjük el a zárójeleket, az eredmény nem változik (16., 154. oldal).

Csúcs: 1. A szög csúcsa (84. oldal). 2. Sokszög oldalai csúcsokban találkoznak (92. oldal). 3. Sokszöglapokkal határolt test élei csúcsokban találkoznak.

Csúcspont: $\rightarrow$ gúláé (132. oldal), $\rightarrow$ kúpé (138. oldal).

Csúcsszögek: (85. oldal).

Definíció: valamely fogalom meghatározása, értelmezése (82. oldal).

Deltoid: olyan négyszög, amelynek két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú. A négyzet és a többi rombusz is deltoid (115. oldal), területe (120. oldal).

Diagram: szalagdiagram, oszlopdiagram, töröttvonal-diagram, kördiagram (69. oldal).

Disztributivitás: az összeg, különbség tagonként szorozható. (16., 154. oldal).

Dodekaéder: szabályos test, 12 szabályos ötszöglap határolja, 30 éle, 20 csúcsa van.

Dőféspont: egyenes és sík metszéspontja.

Egész kifejezés, algebrai: (151. oldal).

Egész számok halmaza: $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ (34. oldal).

Egyállású szögek: $\rightarrow$ Szögpárok (85. oldal).

Egybevágó: két alakzat, ha valamilyen mozgatással vagy tükrözéssel (egybevágósági transzformációval) kölcsönösen átvihetők egymásba (190. oldal).

Háromszögek egybevágóságának alapesetei: (191. oldal).

Egybevágósági transzformációk: (190. oldal).

Egyenes arányosság: (53. oldal); az egyenes arányosság mint speciális lineáris függvény (255–256. oldal).

Egyenes hasáb: (124. oldal) $\rightarrow$ Hasáb.

Egyenes henger: (130. oldal)

Egyenlet: (160–161. oldal); megoldása, mérlegelv (163–165. oldal) grafikus megoldás (271., 276–279. oldal).

Egyenletrendszer: (280. oldal)

Egyenlőtlenség: (160–161. oldal); megoldása, mérlegelv (163–165. oldal).

Egyértelmű hozzárendelés: $\rightarrow$ Hozzárendelés (247., 250. oldal).

Egynemű: $\rightarrow$ Algebrai kifejezés (152. oldal).

Egyszerű sokszög, egyszerű sokszögvonala $\rightarrow$ Sokszög (92. oldal).

Egytagú algebrai kifejezés: változókból és számokból csupán szorzással (hatványozással, osztással) előál-lítható (154. oldal) $\rightarrow$ Algebrai kifejezés.

Együttható: Egy- vagy többváltozós *egytagú algebrai kifejezésnek* változókat nem tartalmazó tényezője (151. oldal).

Él: síkfelületek metszésvonala. → *Sokszöglapokkal határolt test lapjai* élekben találkoznak. → *Hasáb* oldalélei, alapélei (124. oldal). → *Gúla* oldalélei, alapélei (132. oldal).

Elem: → *Halmaz* (12. oldal).

Elemi esemény: a valószínűségi kísérlet vagy megfigyelés egy konkrét kimenetele (65. oldal).

Ellentett: (34. oldal).

Elsőfokú: elsőfokú függvény (253., 255. oldal), elsőfokú algebrai egyenletben, egyenlőtlenségben (163–165. oldal) a változó, illetve az ismeretlen első fokon szerepel.

Eltolás: (195. oldal); tulajdonságai (196., 206. oldal).

Értelmezési tartomány: → *Függvény* (248., 250. oldal).

Értékkészlet: → *Függvény* (248., 250. oldal).

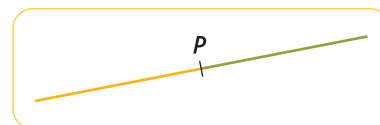
Esemény: egy kísérlet vagy megfigyelés valamilyen meghatározott kimeneteleinek az összessége. → *Valószínűség* (64. oldal).

Fagráf: (60. oldal).

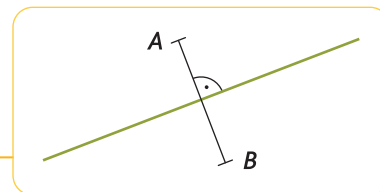
Faktoriális: (60., 77. oldal).

Felcserélhetőség: (kommutativitás) műveleti tulajdonság, két vagy több szám összeadása, illetve szorzása esetén a tagokat, illetve a tényezőket felcserélhetjük, az eredmény nem változik meg (16. oldal).

Félegyenes: Egy egyenest egy P pontja két félegyenesre bontja. A P pont mindkét félegyenes kezdőpontja (83. oldal).



Felezőmerőleges: Az AB szakasz felezőmerőlegese azoknak a pontoknak a halmaza a síkban, amelyek az A és a B ponttól egyenlő távolságra vannak. A felezőmerőleges az AB szakasz szimmetriatengelye (91. oldal).



Félsík: (83. oldal).

Féltér: (83. oldal).

Felszín: jele A . Bizonyos testeknek értelmezhetjük a felszínét. Például a sokszöglapokkal határolt test felszínét úgy számítjuk ki, hogy a testet határoló lapok területét összegezzük. → *Cömb* (143. oldal); → *gúla* (133., 134. oldal); → *hasáb* (124. oldal); → *henger* (127. oldal); → *kúp* (140. oldal).

Fordított arányosság: (54., 274. oldal).

Forgatás: (202., 206. oldal), **forgásszimmetria:** (202. oldal).

Független események: Két (vagy több) esemény független, ha egyikük bekövetkezése vagy be nem következése a kísérlet vagy megfigyelés során a másik esemény valószínűségét nem változtatja meg. → *Valószínűség* (65. oldal).

Függvény: független változó, függvényérték (248., 250. oldal).

Geometriai transzformáció: (189. oldal) → *Transzformáció*.

Gömb; gömbfelület: egy (adott) ponttól, a gömb középpontjától adott (nem nulla) távolságra lévő pontok halmaza a térben; gömbtest: egy (adott) ponttól, a gömb középpontjától egy adott (nullától különböző) távolságnál nem nagyobb távolságra lévő pontok halmaza a térben (142–143. oldal).

Görög ábécé kisbetűi: α (alfa), β (béta), γ (gamma), δ (delta), ε (epszilon), ζ (zéta), η (éta), ϑ (théta), ι (iota), κ (kappa), λ (lambda), μ (mü), ν (nü), ξ (kszi), $\omicron$ (omikron), π (pi), ρ (ró), σ (szigma), τ (tau), υ (üpszilon), φ (fi), χ (khi), ψ (pszi), ω (omega).

Gráf: Pontokból és bizonyos pontokat összekötő vonaldarabokból álló alakzat. A pontok a gráf csúcsai, a vonaldarabok a gráf élei. Az egymáshoz csatlakozó élek kört alkotnak, ha egy pontból kiindulva az élek mentén visszajuthatunk a kiindulópontba.

Fagráf: kört nem tartalmazó, összefüggő gráf (60. oldal).

Grafikon: (247., 250., 258–262. oldal).

Grafikus megoldás: → *Egyenlet, egyenlőtlenség* (272., 275–279. oldal).

Gúla, gúlafelület: (132–135. oldal).

Gyakoriság: → *Valószínűség* (64. oldal).

Halmaz, elem, eleme a halmaznak: a matematika olyan *alfogalmi*, amelyeket nem vezetünk vissza egyszerűbb fogalmakra (12. oldal).

Üres halmaz: olyan halmaz, amelynek egy eleme sincs, jele: $\emptyset$ (10., 12. oldal).

Részhalmaz: az A halmaz egy részhalmaza csak olyan elemeket tartalmaz, amelyek az A -nak is elemei. Az A halmaz részhalmazai közé tartozik maga az A halmaz és az üres halmaz is (10., 13. oldal).

Kiegészítő halmaz, más szóval **komplementer:** (10., 13. oldal).

Közös rész, két (vagy több) halmaz **metszete:** (10., 13. oldal).

Unió: két (vagy több) halmaz uniója, más szóval **egyesítettje:** (10., 13. oldal).

Hányados: egész számok osztása (38. oldal); egyenlő *alapú hatványok* osztása (23. oldal); törtek osztása (42. oldal).

Háromszög: Csoportosítása: hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű; egyenlő *szárú* vagy szimmetrikus (tükrös) háromszög; egyenlő *oldalú* vagy szabályos háromszög (94. oldal). Területe (121. oldal).

Háromszög belső szögeinek összege: 180° (95. oldal).

Háromszögek egybevágóságának alapesetei: (191. oldal).

Háromszög-egyenlőtlenség: A háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál (94. oldal).

Háromszög középvonala (101., 207. oldal).

Háromszög magasságvonala, magasságpontja (100. oldal).

Háromszög oldalfelező merőlegese, köré írható köre (97., 98. oldal).

Háromszög szögfelezője, beírható köre (99. oldal).

Háromszög súlyvonala, súlypontja (102. oldal).

Hasáb: (124. oldal); hálója, felszíne (124. oldal); térfogata (125. oldal).

Hasonlóság, hasonlósági transzformáció: (212. oldal).

Háromszög hasonlóságának alapesetei: (223. oldal).

Középpontos hasonlóság: (232–237. oldal).

Hatvány: (20. oldal); műveletek hatványokkal (2–24. oldal).

Negatív egész kitevőjű hatvány: (78. oldal).

Hektár: A földterület mérésének egyik egysége, a 100 m oldalú négyzet területe. Jele: ha. (120. oldal)

Helyettesítési érték: (152. oldal) → *Algebrai kifejezés*.

Henger; hengerfelület; egyenes körhenger: hálója, felszíne, térfogata (127. oldal).

Hexaéder: (kocka) szabályos test, 6 szabályos négyszöglap (négyzet) határolja, 12 éle, 8 csúcsa van (124., 125. oldal).

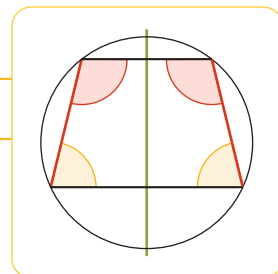
Hiperbola: (274. oldal).

Hozzárendelés: reláció, megfeleltetés (247., 250. oldal).

Húrtrapéz: az alap felezőmerőlegesére tengelyesen szimmetrikus trapéz. A húrtrapéz két szára egyenlő hosszúságú (115. oldal). → *Trapéz*.

Identitás: (206. oldal).

Igazsághalmaz: Megoldjuk az egyenletet (egyenlőtlenséget), ha megkeressük az adott alaphalmaznak azokat az elemeit, amelyeket behelyettesítve az egyenletbe (egyenlőtlenségbe), igaz állításokat kapunk. Ezek az elemek az egyenlet (egyenlőtlenség) megoldásai. A megoldások összessége az egyenlet (egyenlőtlenség) igazsághalmaza (160. oldal).



Ikozaéder: szabályos test, 20 szabályos háromszöglap határolja, 30 éle, 12 csúcsa van.

Íránytényező: (255–256. oldal) → *Meredekség*.

Irracionális szám: (43. oldal).

Kamat: a pénz használata után fizetendő használati díj. Az egy évre szóló kamatot a százalékosan adott kamatláb határozza meg. Nem teljes évre az évi kamat időarányos részét kell fizetni.

Kamatos kamat: Több évi pénzhasználat esetén, ha az esedékes kamatot nem veszik ki (vagy nem fizetik meg), akkor a kamatot az eredeti pénzösszeghez hozzászámítják, és a következő évben már ez a megnövekedett összeg kamatozik.

Kedvező eset, kedvező kimenetel: → *Valószínűség* (65–66. oldal).

Kép, képelem: → 1. Reláció (250. oldal), függvény (248., 250. oldal). 2. Geometriai transzformáció (189. oldal).

Képhalmaz: → Reláció (247., 250. oldal), függvény (248., 250. oldal).

Kerület: Bizonyos síkidomoknak értelmezhetjük a kerületét. A sokszög kerülete a sokszöget határoló töröttvonal hossza (92. oldal). A kör kerülete: $K = 2r \cdot \pi$ (121. oldal). → Kör.

Kicsinyítés: (212. oldal) → Hasonlóság.

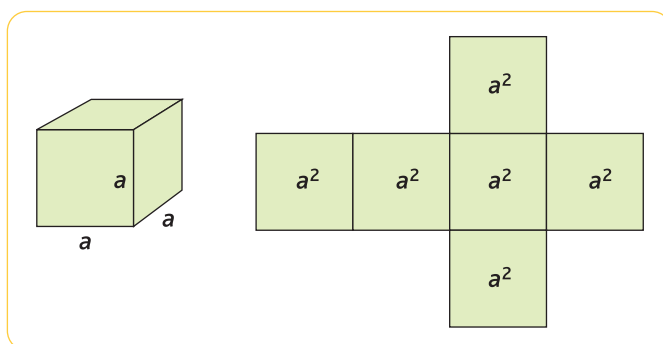
Kiegészítő szögek: (86. oldal).

Kiemelés: többtagú algebrai kifejezés szorzattá alakítása (154. oldal).

Kísérlet: A valószínűség-számításban a szokásostól eltérő értelemben használjuk ezt a kifejezést. Olyan jelenség megfigyelését nevezzük kísérletnek, amelynek lefolyása a véletlentől függ, függetlenül attól, hogy a jelenséget mesterségesen idéztük elő (kockafeldobás), vagy sem (időjárás). (65. oldal).

Kitérő egyenesek: (82. oldal).

Kitevő: Például az a^3 hatvány kitevője a 3. → Hatvány (20. oldal).



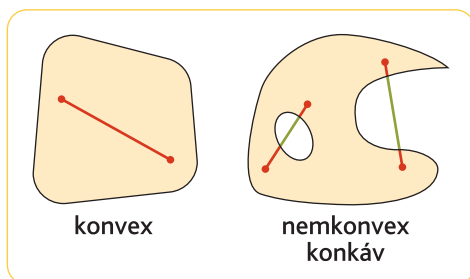
Kocka: olyan téglatest, amelynek minden lapja négyzet.

Az a élű kocka felszíne: $A = 6 \cdot a^2$,
térfogata: $V = a \cdot a \cdot a = a^3$. → Hexaéder.

Kommutatív művelet: → Felcserélhetőség (16. oldal).

Konkáv: nem konvex síkidom, test (92. oldal).

Konstans függvény: (254–256. oldal)



Konvex: síkidom, test (92. oldal)

Konvex sokszög: minden szöge konvex.

Konvex szög: 180° -nál nem nagyobb szög.

Nemkonvex szög: homorúszög.

Kör: (91. oldal); a kör kerülete: $K = 2r \cdot \pi$, ahol $\pi \approx 3,14159$; területe $T = r^2 \cdot \pi$ (121–122. oldal).

Körvonal: azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek a sík egy (adott) pontjától, a kör középpontjától, ugyanakkora (nem nulla) távolságra vannak.

Körlap: azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek a sík egy (adott) pontjától, a kör középpontjától, egy adott (nullától különböző) távolságnál nem nagyobb távolságra vannak.

Átmérő: a kör középpontján átmenő húr, a sugár kétszerese.

Érintő: az e egyenes a kör érintője, ha egy közös pontja van a körrel.

Húr: a körvonal két pontját összekötő szakasz.

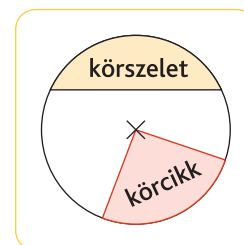
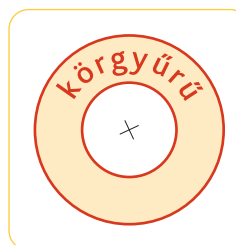
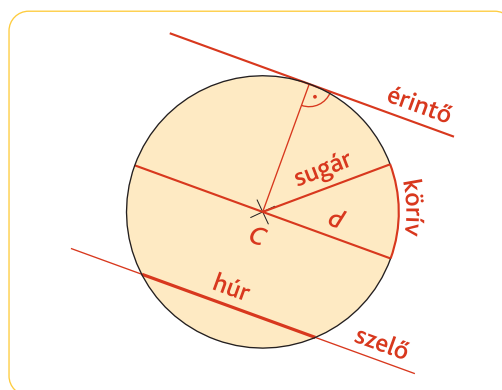
Körcikk: a körlapot a kör két sugara két körcikkre osztja.

Körgyűrű: két közös középpontú (koncentrikus) kör által határolt síkidom.

Körselet: a körlapot a kör egy húra két körseletre osztja.

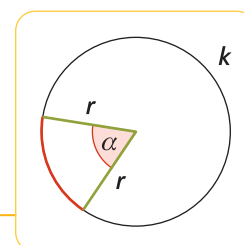
Sugár: a kör középpontját a körvonal egy pontjával összekötő szakasz.

Szelő: olyan egyenes, amelynek két közös pontja van a körrel. A középponton átmenő bármely szelő a körnek szimmetriatengelye.



Kördiagram: (69. oldal)

Középponti szög: Olyan szög, amelynek csúcsa a kör középpontjában van. A körnek azt az ívét, amelyik a szög belsejébe esik, a középponti szöghöz tartozó körívnek nevezzük. A középponti szög és a hozzá tartozó körív egymást kölcsönösen meghatározza.



Középpontos hasonlóság: (232–237. oldal).

Középpontos tükrözés: középpontos szimmetria (193., 206. oldal).

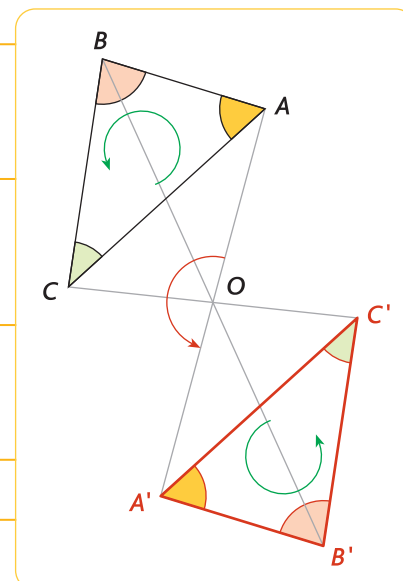
Középvonal: → Háromszög középvonala (101., 207. oldal). → A trapéz két szárának felezőpontját összekötő szakasz a trapéz középvonala, amely a trapéz alapjaival párhuzamos (114. oldal).

Kúp, kúpfelület: (138. oldal).

Egyenes körkúp: forgáskúp (138. oldal), felszíne (140. oldal), térfogata (140. oldal).

Különbség: egész számok kivonása (36. oldal), törtek kivonása (42. oldal); két halmaz különbsége (10., 13. oldal); különbségsorozat (263. oldal).

Különnemű: algebrai kifejezések (152. oldal).

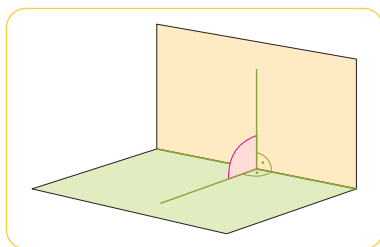


Külső szög: Konvex sokszög belső szögeinek mellékszögeit a sokszög külső szögeinek nevezzük. A háromszög külső szögeinek összege 360° (95. oldal).

Lap: 1. A síknak vonallal (vonalakkal) határolt része, tartománya. Sokszöglap (92. oldal); körlap (91. oldal).

2. Testet határoló sík felület. Sokszöglapokkal határolt testek, hasáb alaplapjai, oldallapjai (124. oldal); henger alaplapjai (127. oldal);

Lapátló: sokszöglapokkal határolt testek valamely határoló lapjának átlója → Átló.



Lapszög: Egy egyenesből kiinduló két *fő sík* a teret két lapszögre bontja. A lapszöget azzal a *szöggel* mérjük, amelynek *csúcsa* a lapszög élén van, *szárjai* a lapszög lapjaira illeszkednek és a lapszög élére merőlegesek (87. oldal).

Legkisebb közös többszörös: (32. oldal). → Osztó; többszörös.

Legnagyobb közös osztó: (32. oldal). → Osztó; többszörös.

Lehetetlen esemény: olyan esemény, amely a kísérlet vagy megfigyelés során sohasem következhet be. → Valószínűség.

Lineáris függvény: elsőfokú és nulladfokú függvény közös neve; az egyenes arányosság is lineáris függvény. A lineáris függvény grafikonja egyenes (253., 255. oldal).

Magasság: a háromszög magassága (100. oldal); trapézé (114. oldal); paralelogrammáé (114. oldal); hasábé (124. oldal); hengeré (127. oldal); gúláé (132. oldal); kúpé (138. oldal).

Medián: → Mennyiségi sor középső értéke (68. oldal).

Megoldás: → Egyenlet, egyenlőtlenség (161. oldal).

Mellékszögek: (85. oldal).

Mennyiségi sor: növekvő sorrendbe rendezett adatsor.

Meredekség: (255–256. oldal).

Mérlegelv: egyenlet, egyenlőtlenség megoldása (163–165. oldal).

Mértani sorozat: (264. oldal). → Sorozat.

Metszéspont, metszéspont: (82. oldal).

Módusz: A legtöbbször előforduló adat (valamely statisztikai vizsgálatban) (68. oldal).

Nagyítás: (212. oldal) → Hasonlóság.

Nagy számok törvénye: nagy számú kísérlet esetén nagy a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriság jól megközelíti a valószínűséget.

Negatív szám: negatív egész számok (34. oldal), negatív számok összeadása, kivonása (36. oldal); szorzása, osztása (38. oldal). → Racionális számok.

Négyyszög: olyan sokszög, amelynek négy oldala van. A négyyszög belső szögeinek összege 360° (114–116. oldal).

Négyzet: (speciális téglalap, így speciális húrtrapéz, illetve speciális rombusz, így speciális deltoid) szabályos négyyszög (115., 116. oldal); minden oldala és minden szöge egyenlő. Az a oldalú négyzet kerülete: $K = 4a$; területe: $T = a^2 \rightarrow$ Szabályos sokszög.

Számok négyzete: (24. oldal); $f(x) = x^2$ függvény (270. oldal).

Négyzetgyök: (50. oldal), négyzetgyök függvény (272. oldal).

Normálalak: (25., 27. oldal).

Nulladfokú függvény: konstans függvény (254., 256. oldal). $\rightarrow$ Lineáris függvény.

Nyíldiagram: (247. oldal).

Nyitott mondat: (161. oldal).

Oктаéder: szabályos test, 8 szabályos háromszöglap határolja, 12 éle, 6 csúcsa van.

Oldal: $\rightarrow$ Sokszög (92. oldal).

Oldalél, oldallap: $\rightarrow$ Hasáb (124. oldal), $\rightarrow$ Gúla (132. oldal).

Oszlopdiagram: más néven gyakorisági diagram (69. oldal).

Osztó: egy természetes szám osztója, többszöröse (29. oldal). $\rightarrow$ Összetett szám; $\rightarrow$ prímszám vagy törzsszám. $\rightarrow$ Legnagyobb közös osztó.

Osztópár: (29. oldal).

Összetett szám: Kettőnél több osztója van (30. oldal). $\rightarrow$ Osztó.

Összevonás: (36. oldal); algebrai kifejezések összevonása (153–154. oldal).

Palást: hasábé (124. oldal), hengeré (127. oldal), gúláé (133. oldal); kúpé (139. oldal).

Parabola: (270. oldal).

Paralelogramma: (speciális trapéz) olyan négyyszög, amelynek két-két szemközti oldala párhuzamos (paralel = párhuzamos). A négyzet, a többi téglalap és a többi rombusz is paralelogramma (114–115. oldal); területe (120. oldal).

Párhuzamos: 1. Két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk, vagy egybeesnek, 2. Két sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk, vagy egybeesnek, 3. Egy egyenes és egy sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk, vagy az egyenes illeszkedik a síkra (82. oldal).

Párhuzamos szárú szögek: egyállású szögek, társszögek, mellékszögek, váltószögek, csúcpszögek (85–86. oldal).

Pitagorasz-tétel: (103–104. oldal).

Pont-pont függvény: $\rightarrow$ Geometriai transzformáció (189. oldal).

Pótszögek: (86. oldal).

Prímszám vagy törzsszám: Pontosan két osztója van (30. oldal). → *Osztó*.

Prímtényezős felbontás: Törzstényezős alak (30. oldal).

Racionális számok: felírhatók két egész szám *hányadosaként*, illetve *véges tizedestört* vagy *végtelen szakaszos tizedestört* alakban (42–44. oldal). Végtelen sok nem racionális (irracionális) szám van. A racionális számok *halmazának* jele: $\mathbb{Q}$.

Reciprok: (42. oldal). A 0-nak nincs reciproka.

Reláció: két *halmaz elemei* közti kapcsolat, *hozzárendelés*, megfeleltetés (250. oldal), az általános iskolában *alapfogalomnak* tekintjük.

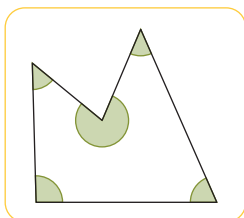
Relatív gyakoriság: Egy *esemény* relatív gyakorisága azt mutatja meg, hogy az összes megfigyelt esetnek hányad részében következett be az esemény. Például, ha egy *valószínűségi kísérletben* 50-szer dobunk egy kockával és az az esemény, hogy hármast dobunk, 11-szer következik be, akkor ennek az eseménynek a relatív gyakorisága ebben a kísérletben $\frac{11}{50}$. (64. oldal).

Rombusz: (speciális *paralelogramma*, illetve speciális *deltoid*) olyan *négyszög*, amelynek mind a négy *oldala* egyenlő. A *négyszet* is *rombusz*. Tulajdonságai (115. oldal), területe (120. oldal).

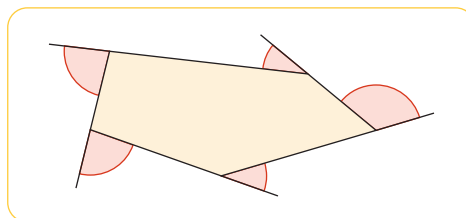
Síkidom: (92. oldal).

Sokszög: sokszögvonal, sokszöglap; egyszerű sokszög (92. oldal); területe (121. oldal).

A sokszög *belső szögei*:



A sokszög *külső szögei*:



Sorozat: (263. oldal).

Hányadossorozat: (264. oldal).

Különbségsorozat: (263. oldal).

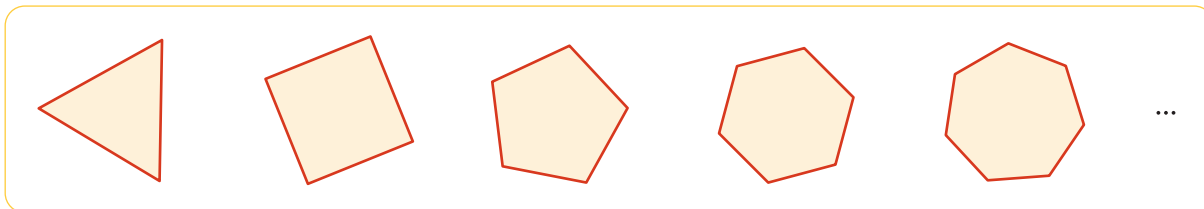
Mértani sorozat: (264. oldal).

Számtani sorozat: (263. oldal).

Statisztika: 1. Megfigyelhető vagy mérhető adatok feldolgozása. 2. Azok az adatgyűjtemények, amelyeket a statisztikai feldolgozás során kapnak. 3. Az a tudomány, amely az adatgyűjtés és -feldolgozás elméletével foglalkozik (68–70. oldal).

Sugár: → Kör (121. oldal).

Szabályos sokszög: minden *oldala* és minden *szöge* egyenlő (92. oldal).



Szakasz: Az AB szakasz az egyenesnek az a része, amelyik az A és a B pont közé esik. Az A és a B pont az AB szakasz végpontjai.

Szalagdiagram: (69. oldal).

Szám-szám függvény: (248., 250. oldal).

Számtani átlag: (68. oldal).

Számtani sorozat: (263. oldal).

Szár: → Háromszög, Egyenlő szárú háromszög (94. oldal), trapéz (114. oldal).

Százalék: alap; százalékték; százalékláb (56. oldal).

Szelő: → Kör (121. oldal).

Szóródás: az adatok közti eltérések *statistikai* jellemzésére szolgáló érték (68. oldal).

Szóródás terjedelme: a legnagyobb adat és a legkisebb adat különbsége.

Szorzat: egyenlő *alapú hatványok* szorzása (23. oldal), egész számok szorzása (38. oldal), törtek szorzása (42. oldal), *algebrai kifejezések* szorzása (154. oldal).

Szög: szögvonal, szögtartomány (84–85. oldal).

A szögmérés egyik egysége az 1° (fok), a teljesszög $\frac{1}{360}$ része.

A szöget tekinthetjük egy egységsugarú kör középponti szögének. Ekkor a szög nagyságát jellemezhetjük a középponti szöghöz tartozó körív nagyságával is. Egységsugarú körben az egyenesszöghöz tartozó körív hosszúsága éppen π .

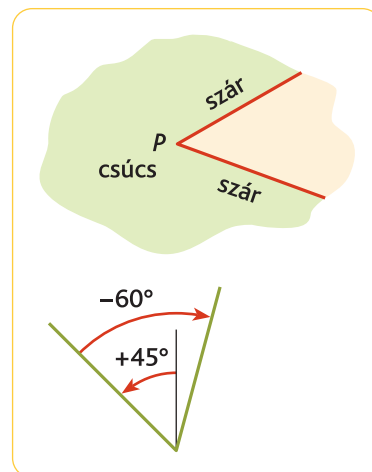
Ezért például a 60° -os szög nagysága $\frac{1}{6}\pi$.

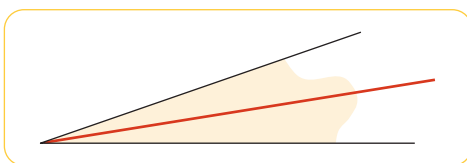
Hajlásszög: egyenes és sík hajlásszöge (86. oldal).

A szögek fajtái: nullszög ($\alpha = 0^\circ$), hegyesszög ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), derékszög ($\alpha = 90^\circ$), tompaszög ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), homorúszög ($180^\circ < \alpha < 360^\circ$) és teljesszög ($\alpha = 360^\circ$).

Forgásszög: Az elfordulásokat irányított szöggel jellemezzük. A pozitív elfordulás az óramutató járásával ellentétes irányú. Az elfordulás *abszolútértéke* a *teljesszögnél* nagyobb is lehet (85. oldal).

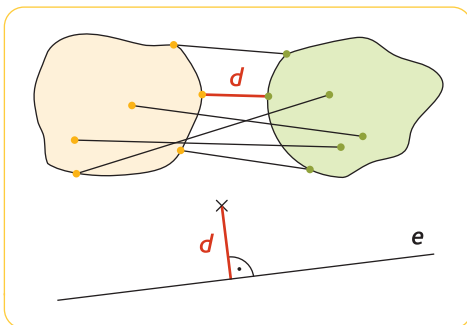
Szögpárok: (85–86. oldal).





Szögfelező: A szögfelező a szög csúcsából induló olyan félegyenes, amely a szögtartományt két egyenlő részre osztja; a szögtartomány szimmetriatengelyének a szögtartományba eső félegyenes. Konvex szögeknél azoknak a pontoknak a *halmaza*, amelyek a szög két szárától egyenlő távolságra vannak a szögtartományban (91. oldal).

Társszögek: (85. oldal).

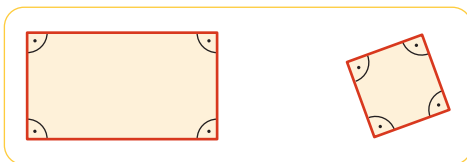


Távolság: Az A és a B pont távolsága a síkban és a térben az AB szakasz hossza. Jele: d_{AB} (distancia = távolság).

Két alakzat távolsága egy-egy pontjuk között húzható legrövidebb szakasz hossza (83. oldal).

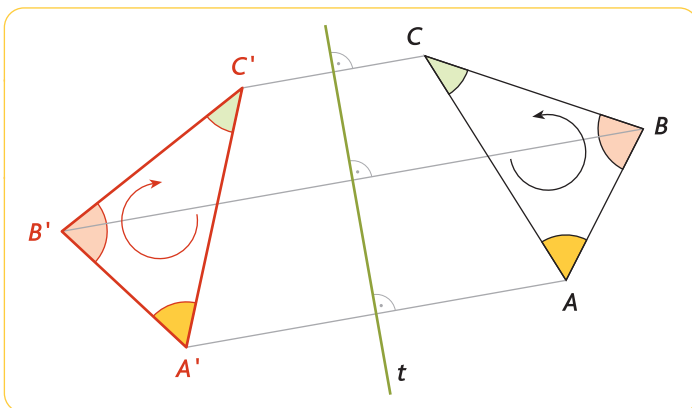
Egyenes és pont távolsága: a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza.

Távolságtartás: → Egybevágóság (190. oldal).



Téglalap: (speciális *paralelogramma*, illetve *húrtrapéz*) olyan négyszög, amelynek minden szöge egyenlő (derékszög). A négyzet is téglalap. Területe (120. oldal); tulajdonságai (115. oldal).

Téglatest: (speciális *hasáb*) olyan test, amelyet hat téglalap határol. A kocka is téglatest. Felszíne (124. oldal); térfogata (125. oldal).



Tengelyes tükrözés, tengelyes szimmetria: (192., 205. oldal).

Tételek: pont, vonal, egyenes, felület, sík (82. oldal).

Térfogatmérés: (125. oldal). A térfogatot V -vel jelöljük (volumen = térfogat, terjedelem). Téglatest, hasáb térfogata (125. oldal), egyenes körhenger térfogata (127. oldal), gúla térfogata (135. oldal), kúp térfogata (140. oldal), a gömb térfogata (143. oldal).

Természetes számok: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$. (Megállapodhatunk úgy is, hogy a 0-t nem tekintjük természetes számnak.) (16. oldal).

Területmérés: (120. oldal). A területet általában T -vel jelöljük. Téglalap területe, *paralelogramma* területe (120. oldal), trapéz területe (120. oldal), deltoid területe (120. oldal), háromszög területe (121. oldal), kör területe (121. oldal), sokszög területe (121. oldal).

Test: Ha a teret felületekkel feldaraboljuk, akkor testeket kapunk. A *kocka*, a *hasáb*, a *henger*, a *gömb* stb. testek.

Testátló: sokszöglapokkal határolt *test* olyan átlója, amely nem lapátló. → Átló; lapátló.

Tetraéder: Négy *háromszöglap* által határolt *test*, 6 éle, 4 csúcsa van. (133. oldal).

Szabályos tetraéder: szabályos *test*, 4 szabályos *háromszöglap* határolja.

Thalész-tétel: (198–199. oldal).

Tizedestört: *racióális számok* véges, illetve végtelen szakaszos tizedestört alakja (42–44. oldal).

Tovább nem egyszerűsíthető tört: (40. oldal).

Többszörös: (29. oldal). → Osztó; legkisebb közös többszörös.

Töröttvonal: → Sokszög (92. oldal).

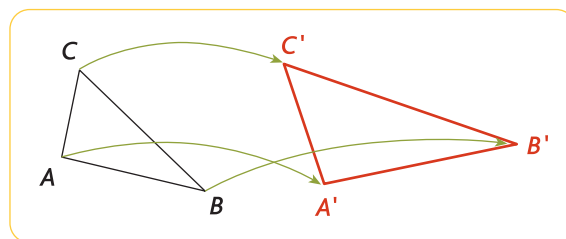
Töröttvonal-diagram: (69. oldal).

Tört: tört egyszerűsítése, a tört tovább nem egyszerűsíthető alakja (40. oldal); összeadása, kivonása (42. oldal); szorzása, osztása (42. oldal); törtrész (55. oldal).

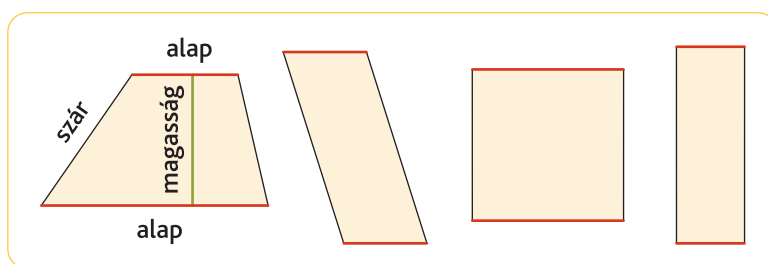
Törtkifejezés, algebrai: (152. oldal).

Törzsszám vagy prímszám: pontosan két osztója van a *természetes számok* körében (30. oldal). → Osztó.

Transzformáció: (geometriai) (189. oldal).



Trapéz: Olyan *négyszög*, amelynek van *párhuzamos* oldalpárja. A *négyzet*, a többi *téglalap* és a többi *paralelogramma* is trapéz (114. oldal); a trapéz magassága a két *alap*jának távolsága; területe (120. oldal).



Üres halmaz: → Halmaz (10., 12. oldal).

Valós számok: (43. oldal). A valós számok halmazának jele: $\mathbb{R}$.

Valószínűség: Minden véletlen *esemény*hez hozzárendelhető egy 0 és 1 közé eső szám, az *esemény* valószínűsége, amely azt fejezi ki, hogy sok *kísérlet* végrehajtása során az eseteknek körülbelül mekkora hányadában következik be a megfigyelt *esemény*. A *lehetetlen esemény* valószínűsége 0, a *biztos esemény* valószínűsége 1 (65. oldal).

Váltószőgek: (85. oldal).

Változó: → *Algebrai kifejezés* (151. oldal); → *függvény független változója* (250. oldal).

Véges tizedestört: (43–44. oldal). → *Racionális számok*.

Végtelen szakaszos tizedestört: (43–44. oldal). → *Racionális számok*.

Vegyesszám: törtek vegyesszám alakja (40. oldal).

Vektor: (37., 109., 195., 232–233., 236. oldal).

Vektor felbontása: (302. oldal).

Vektor különbsége: (109., 302. oldal).

Vektor összege: (109., 301. oldal).

Vektor szorzása valós számmal: (232–233. oldal).

Vesszős tört: (78. oldal).

Zárójel: Zárójelek használata (16. oldal) → *Csoportosíthatóság* (16., 154. oldal). Összeg, különbség szorzása (16., 154. oldal). A zárójel módosíthatja a műveletek elvégzésének sorrendjét. A törtvonal zárójelet helyettesít (164. oldal).
