

8

Matematika

azonosság egyenlet logika
valószínűség test sorozat
százalék grafikon függvény
Pithagorasz racionális



MATEMATIKA 8.

Eszterházy Károly Egyetem
Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet

A kiadvány 2018. 02. 12-től tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/97-3/2018. számú határozattal.

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet: 2. sz. melléklet: Kerettanterv az általános iskolák 5–8. évfolyama számára 2.2.03. előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők: KÓNYA ISTVÁN, ZARUBAY ATTILA

Tananyagfejlesztő: GEDEON VERONIKA, PARÓCZAY ESZTER, SZÁMADÓ LÁSZLÓ,
TAMÁS BEÁTA, DR. WINTSCHE GERGELY

Alkotószerkesztő: DR. WINTSCHE GERGELY

Vezetőszerkesztő: TÓTHNÉ SZALONTAY ANNA

Tudományos szakmai szakértő: RÓZSAHEGYINÉ DR. VÁSÁRHELYI ÉVA

Pedagógiai szakértő: ILLÉS JÁNOS

Olvasószerkesztő: DARCSINÉ MOLNÁR EDINA, CZOTTER LÍVIA

Fedélterv: OROSZ ADÉL

Látvány- és tipográfiai terv: GADOS LÁSZLÓ, OROSZ ADÉL

Illusztráció: LÉTAI MÁRTON

Szakábra: SZALÓKI DEZSŐ

Fotók: Pixabay; WikimediaCommons; Kováts Borbála; Wikipédia; Flickr; Laura Lauragais; MorgueFile; Léti Márton; dr. Wintscse Gergely, Márton Tünde

A tankönyv szerkesztői ezúton is köszönetet mondanak mindazoknak a tudós és tanár szerzőknek, akik az elmúlt évtizedek során olyan módszertani kultúrát teremtettek, amely a kísérleti tankönyvek készítőinek is ösztönzést és példát adott. Ugyancsak köszönetet mondunk azoknak az íróknak, költőknek, képzőművészeknek, akiknek alkotásai tankönyveinket gazdagítják.

© Eszterházy Károly Egyetem, 2017

ISBN 978-963-436-104-6

Az újgenerációs tankönyvek az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001. számú, „A Nemzeti alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Az új matematikakönyvedet tartod a kezvedben.
Ha korábban már találkoztál ennek a sorozatnak a könyveivel,
akkor találsz néhány ismerős dolgot, de lesznek újdonságok is.

1. Rajzolj a füzetedbe egy négyzetet! Forgasd el 90° -kal az egyik oldalának felezőpontja körül! Milyen sikídom lesz az eredeti és a képként kapott négyzet közös része?
2. Rajzolj a füzetedbe egy rombuszt! Forgasd el az átlók metszéspontja körül -90° -kal! Milyen sikídom lesz az eredeti és a képként kapott rombusz közös része?
3. Egy rombuszt az átlóinak metszéspontja körül 90° -kal elforgattak. Az eredeti és a képként kapott rombusz közös része szabályos sokszög. Milyen sokszög?
4. Add meg azokat a 0° és 360° közé eső szögeket, amelyekkel egy szabályos
- a) hatszöget;
b) nyolcszöget
a középpontja körül elforgatva az eredeti és a képként kapott sokszögek egybeesnek!
5. Rajzolj egy kört a füzetedbe! Forgasd el ezt a kört a körvonal valamely K pontja körül 60° -kal, 120° -kal, -60° -kal és -120° -kal! Végeztül tükrözd az eredeti kört a K pontra! Vizsgáld meg az így kapott ábrát! Tengelyesen szimmetrikus? Középpontosan szimmetrikus?

A feladatokat nehézségük szerint
három csoportba soroltuk:

1  könnyű 2  közepes 3  kicsit nehéz



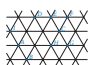
A fejezet elején található képregény néhány a témához kapcsolódó foglalkozást villant fel.

Gyakorló feladatsorok felvételire

6. Egy szabályos háromszögíráson bejelöltünk néhány pontot. Ezek segítségével adj meg egy olyan sokszöget, amelyik

a) egyenlő szárú, de nem szabályos háromszög; c) deltoid;

b) tépázúszó háromszög; d) körbeírt



7. Egy 2012-es tanulmány szerint, amikor a Föld népessége 7 milliárd főt volt, akkor a világvallások követőinek eloszlása a következőképpen alakult:

a) Ugyanzen tanulmány szerint, 400 millió ember hűkölt a hagyományos, törzsi vallás követője. Hány százalékkal szorult ki ő az „egyéb” kategóriának?

b) Hány muszlim és hindu buddhista ember él a földön 2012-ben?

c) Milyen arányban voltak a négy világvallás valamelyikének követői.



Vallás	Arány (%)
Kereszténység	32%
Iszlám	23%
Hinduizmus	13%
Egyéb	23%
Buddhizmus	1%

	Tarnis	Ági
Szifók (0 km)	9,00	17,45
Fenyőd (60 km)	7,45	15,10
Kezvárthy (100 km)	11,50	13,50
Révfüzöl (135 km)	12,30	11,15
Balatonföred (165 km)	14,15	9,20
Szifók (210 km)	15,30	7,60

[illegible]

219

Az eltérő feladattípusokat jól megkülönböztethető keretbe foglaltuk és felirattal láttuk el.

Az új ismereteket játékkal, csoportokban végezhető feladatokkal, illetve érdekes példákkal vezetjük be.

Otthoni kutatómunkának ajánlott feladatokat is
 találsz a könyvben.

Négy feladatsorral
készülhetsz
a középiskolai
felvételire.

A könyvhöz tartozó munkafüzet példái és néhány könnyed, játékos feladat is segít a gyakorlásban.

A leckékben egy jellemző feladat megoldását is közöljük, lépésről lépésre.

A játékos feladatok segítenek szórakoztatóbbá tenni a tananyagot.

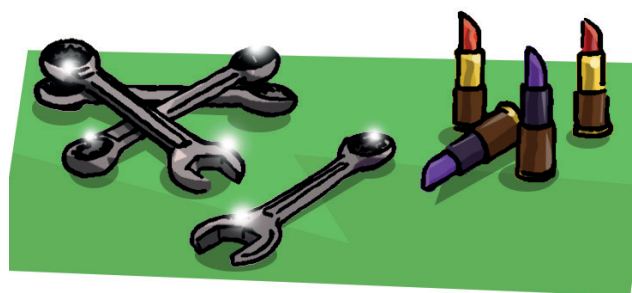
SIKERES TOVÁBBTANULÁST!

TARTALOM

Bevezetés	3
-----------------	---

I. SZÁMOK ÉS BETŰK

1. Mit tudunk a halmazokról?	8
2. Mit tudunk a racionális számokról?	12
3. Racionális számok úton-útfélen	14
4. A racionális számokon túl, a négyzetgyök fogalma	17
5. Számok négyzetgyöke	20
6. Hatványozás nemnegatív kitevő esetén	22
7. Hatványozás egész kitevővel	25
8. Pozitív számok normálalakja	28
9. Algebrai alapfogalmak	30
10. Egytagú kifejezések szorzása	33
11. Többtagú kifejezések szorzása, kiemelés	35
12. Többtagú kifejezések szorzata	38
13. Összefoglalás	40



II. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

1. Egybevágósági transzformációk	46
2. Vektorok	49
3. Eltolás	52
4. Forgassuk el!	55
5. Középpontos hasonlóság	58
6. Szerkesztések	61
7. Hasonlóság	64
8. Összefoglalás	68



III. A PITAGORASZ-TÉTEL

1. Szerkesztések, mérések	72
2. A Pitagorasz-tétel	74
3. Számítások síkban	79
4. Számítások térben	81
5. Szabályos háromszög, négyzet, kocka ...	83
6. Nevezetes derékszögű háromszögek	87
7. A kör és a derékszögű háromszög	90
8. Összefoglalás	93



TARTALOM

V. FÜGGVÉNYEK, VALÓSZÍNŰSÉGEK, SOROZATOK

1. Egyenes arányosság	132
2. Lineáris függvények	136
3. Lineáris függvények vizsgálata	140
4. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása	143
5. Fordított arányosság	148
6. Példák nemlineáris függvényekre	151
7. Olvassunk a grafikonról!	156
8. Készítsünk grafikont szabály alapján! ...	160
9. Gyakoriság, relatív gyakoriság, átlag ...	164
10. Játék	169
11. Valószínűség	170
12. Valószínűségyszámítási feladatok	174
13. Keressünk összefüggéseket!	177
14. Sorozatok	180
15. Számítási sorozat	184
16. Összefoglalás	187



VI. FELSZÍN, TÉRFOGAT

1. Mit tanultunk eddig?	196
2. Gúlán	198
3. Kúpok	201
4. A gömb	206
5. Alkalmazások	209
6. Összefoglalás	211

GYAKORLÓ FELADATSOROK FELVÉTELIRE

.....	214
-------	-----

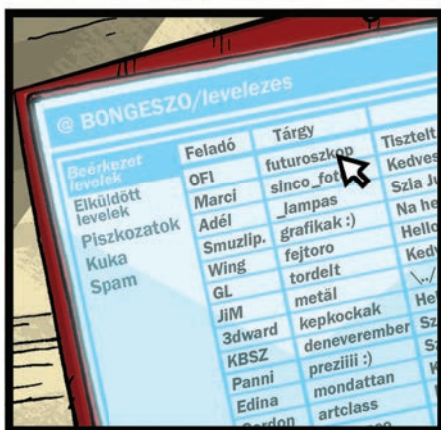
IV. EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

1. Egyenletek	98
2. Egyenlőtlenségek	102
3. Szöveges feladatok számokról, életkorokról	106
4. Szöveges feladatok összekeverésről	110
5. Szöveges feladatok mozgásról, munkáról ..	114
6. Szöveges feladatok a geometria köréből ...	118
7. Vegyes feladatok	121
8. Pénzügyi feladatok	123
9. Összefoglalás	127



PROLÓGUS

Pár héttel az évrnyitó előtt:



feladó: OFI_Steinmann
e-mail: hasteinmann@ofi.hu
tárgy: futuroszkop
érkezett: 08:29



csatolmányok



összes
letöltése



Tisztelt Kolléganő!

Örömmel értesítjük, hogy iskolájuk lehetőséget nyert, hogy részt vegyen az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet által kifejlesztett FS X10-es futuroszkop tesztprogramjában. A készülék lehetséges valószínűség-mátrixok alapján Smith-féle algoritmusokkal generál lehetséges jövőképet, melyet az új Zeiss holo-kivetítő segítségével 3 dimenziós vetületeként jelenít meg. A képek az alany tudatával összhangban változnak, így létrejöhet a jelen és a jövő közötti kommunikáció!

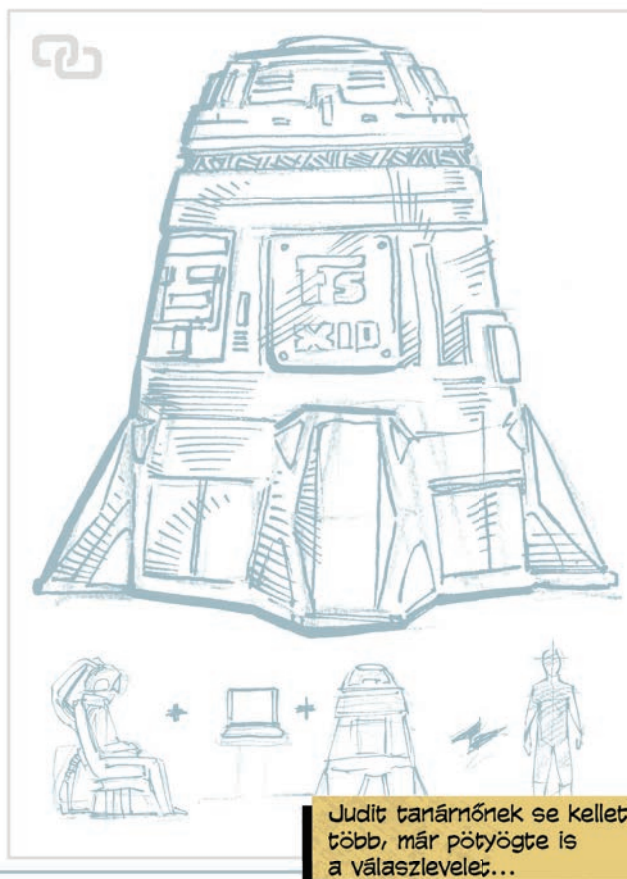
Amennyiben részt kíván venni a programban, kérem, jelezze irányunkba mielőbb, hogy a készülék telepítését még a tanévkezdés előtt lebonyolíthassuk, és a használati bemutatót, valamint az operátori oktatást megszervezhessük.

Érdeklődését előre is köszönjük, együttműködésére számítunk!

Üdvözlettel:

Prof. H. A. Steinmann
tudományos munkatárs

Ui.: a mellékletben megtalálja a berendezés technikai adatait, egy rövid használati utasítást, valamint az eddigi kutatási eredmények elemzéseit és statisztikáit.



Az első matekórát a laborban tartották. Az osztály már meg sem lepődött, hogy nyáron újabb fura szerkezet került a terembe.

Az osztályunk újra bekerült egy kísérleti programba.

Mi kipróbáljuk az eszközöket, elmondjuk a véleményünket, és aztán a visszajelzések alapján használják majd ezeket az iskolákban.

Ennek a pályaválasztási tanácsadó programnak a része ez a futuroszkóp is, amit eddig nézegettetek.

Mik a következő lottószámok?

Futur? Valamiféle jövőnéző?

Kicsérélhetnénk Zsombit egy pár évvel későbbi változatra?

Hátha kicsit jobb, mint ez.

1. Számok és betűk

Mikor jutunk fel a Marsra?

Én művészeti gimibe szeretnék menni! Felvesznek? Megnézhetem?

Csak úgy tudjuk meg, ha kipróbáljuk! Ki lesz az első?

Mindenki sorra kerül ...

...de hölgyeké az elsőbbség!

A tanárő ráadta Bertára a gondolati sisakot és bekalibrálta a gépet.

Csak beállítjuk az időt, lekérjük az elérhetőségi adatokat, jóváhagyatom a rendszerrel...

...őő ...Tanárő, tuti, hogy ez a futur-izé teljesen biztonságos?

...és mehet!

Folytatjuk...

1. PÉLDA

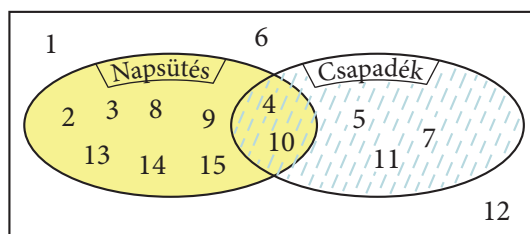
A nyári iskolai tábor két turnusból állt augusztus 1–15. között. Az időjárás az alábbiak szerint alakult: Napsütés volt: augusztus 2; 3; 4; 8; 9; 10; 13; 14; 15.

Esett valamennyi csapadék: augusztus 4; 5; 7; 10; 11.

- Készítsünk Venn-diagramot a tábori napok időjárásáról!
- Mely napokon esett az eső vagy sütött a nap?
- Mely napokon esett az eső és sütött a nap?
- Hány olyan nap volt, amikor sütött a nap, de nem volt eső?
- Mely napokon se nem sütött a nap, se nem esett az eső?

Megoldás

- A Venn-diagram segítségével jól láthatóvá tehetjük az egyes napok helyzetét időjárás szempontjából. Az ábrázolás után könnyebben válaszolhatunk a kérdésekre.



- Esett az eső vagy sütött a nap: 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 13; 14; 15.
- Sütött a nap és esett az eső 4-én és 10-én. Két ilyen nap volt.
- Sütött a nap, de nem esett az eső: 2; 3; 8; 9; 13; 14; 15. Hét ilyen nap volt.
- Három olyan nap volt, amikor se nem esett az eső, se nem sütött a nap: 1; 6; 12-én.

Emlékszel?

Halmaznak nevezzük az olyan dolgok összességét, amelyek egy jól meghatározott tulajdonsággal rendelkeznek. Minden dologról egyértelműen eldönthető, hogy beletartozik-e a halmazba vagy nem. Halmazt alkotnak például a táborban azok a napok, amikor esett az eső, de nem alkotnak halmazt a táborozás szép pillanatai.

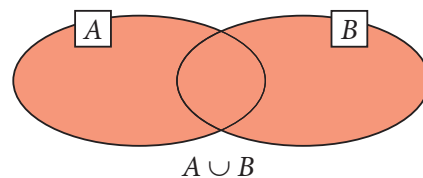
A halmazokat többféle módon megadhatjuk:

- szöveges módon, a tulajdonság megfogalmazásával, például: azok a napok, amikor sütött a nap;
- elemei felsorolásával: augusztus 2; 3; 4; 8; 9; 10; 13; 14; 15;
- a halmazok ábrázolásával, azaz Venn-diagrammal: az első példában ilyen módon ábrázoltuk a halmazokat, de a megoldásokat felsorolással is megadtuk.

A halmazok jelölésére nagybetűket használunk. Ha az elemeket felsoroljuk, akkor az elemeket kapcsos zárójelbe tesszük: $A = \{2; 3; 4; 8; 9; 10; 13; 14; 15\}$.

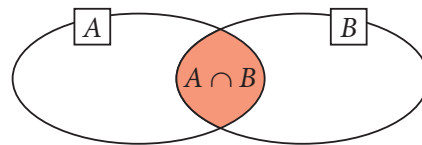
A és B halmaz egyesítésének – más szóval uniójának – azt a halmazt nevezzük, amely minden olyan elemet tartalmaz, amely az A vagy a B halmazban benne van. Az első példában az a) kérdésre adott válasz adja meg a két halmaz unióját.

Jelölése: $A \cup B$



Az A és B halmaz közös részének – más szóval metszetének – nevezzük azt a halmazt, amely azokat az elemeket tartalmazza, amelyek mindkét halmazban megtalálhatók. A példában azoknak a napoknak a halmaza, amikor sütött a nap és esett az eső.

Jelölése: $A \cap B$



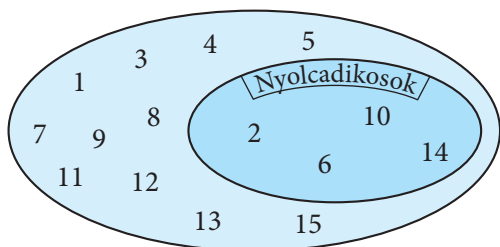
2. PÉLDA

Az első példában leírt táborban minden éjszaka őrségben voltak a tábor lakói a tábortűznél. A nyolcadikosok augusztus 2-án voltak először őrségben, és minden negyedik éjszaka újra rájuk került a sor.

- Ábrázoljuk Venn-diagramon az adatokat.
- Mely napokon kellett őrségben lenniük a nyolcadikosoknak?

Megoldás

a)



- A nyolcadikosok 2-án, 6-án, 10-én és 14-én voltak őrségben. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a $\{2; 6; 10; 14\}$ halmaz a táborozás napjainak részhalmaza.

Egy halmaz bizonyos elemeinek halmazát az adott halmaz **rész-halmazának** nevezzük. Például B részhalmaza A -nak.

Jelölése: $B \subset A$.

Az A és B halmaz különbségének nevezzük azt a halmazt, amely azokat az elemeket tartalmazza, amelyek elemei A -nak és nem elemei B -nek.

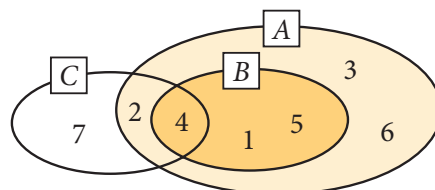
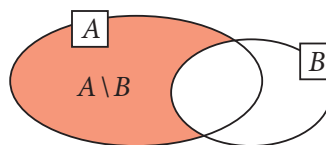
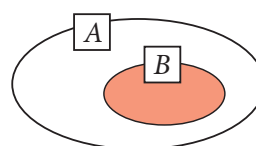
Jelölése: $A \setminus B$.

Például: Az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{1; 4; 5\}$, $C = \{2; 4; 7\}$ halmazok esetében a B halmaz részhalmaza az A -nak, de a C halmaz nem.

Jelöléseket használva: $B \subset A$, de $C \not\subset A$.

Az A és B , illetve az A és C halmazok különbsége:

$A \setminus B = \{2; 3; 6\}$ és $C \setminus A = \{7\}$.



Gyakoriak az olyan feladatok, amikor nem vagyunk kíváncsiak egy halmaz összes elemére, nem akarjuk felsorolni azokat, hanem számunkra csak az az érdekes, hogy hány eleme van a halmaznak.

3. PÉLDA

A tábori reggelinél szombaton 148, hétfőn pedig 127 adag rántotta fogyott el. Sajtot vagy szalonnát lehetett kérni hozzá, és mindenki kért legalább az egyikből. Sajttal 161-en kérték, szalonnával pedig 145-en.

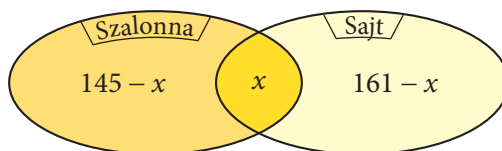
- Hány olyan rántotta fogyott, amelyiken sajt és szalonna is volt?
- Hány olyan rántotta fogyott, amelyiken csak sajt volt?

**Megoldás**

- A reggelinél a két napon összesen $148 + 127 = 275$ adag rántotta fogyott el, amelyeken sajt vagy szalonna volt.

Mivel volt olyan rántotta, amelyiken sajt és szalonna is volt, ezért ezeket az adagokat kétszer számoltuk.

Jelöljük x -szel azoknak a rántottáknak a számát, amelyeken sajt és szalonna is volt.



Sajt vagy szalonna $161 + 145 - x$ adag rántottán volt.

Így $161 + 145 - x = 127 + 148$

$$306 + x = 275$$

$$x = 31$$

31 adag olyan rántottát készítettek, amelyen sajt és szalonna is volt.

Megjegyzés: A feladatot nem csak egyenlet segítségével lehet megoldani. A megoldáshoz szükséges lényeges gondolat az volt, hogy azokat a rántottákat, amelyeken sajt és szalonna is volt, kétszer számoltuk.

- $161 - 31 = 130$ adag rántottán csak sajt volt.

Halmazok **metszetének, uniójának elemszámát** általában úgy határozhatjuk meg legkönnyebben, ha Venn-diagramot készítünk, amelybe beleírjuk a részhalmazainak elemszámát.



A hosszú nyári szünet után folytatjuk a matematikaórák sorát. Szedjük össze közösen, mi mindent tanultunk eddig a számokról! Rendszerezzük ezeket az ismereteket!

A legismertebb számok a pozitív egészek, ide tartoznak az 1; 2; 3; 4; 5; ..., és $\mathbb{Z}^+$ -szal jelöljük.



Ehhez az indiaiak hozzávették a nullát (0; 1; 2; 3; ...), így született meg a természetes számok halmaza, jele: $\mathbb{N}$.

A vagyon és az adósság megjelenésével megszülettek a negatív egész számok, a -1; -2; -3; -4; -5; ..., ezeket a számokat szoktuk $\mathbb{Z}$ -szal jelölni.



Az egész számok halmazába a pozitív és negatív egészek és a nulla is beletartozik, jele: $\mathbb{Z}$.



A racionális számok jele $\mathbb{Q}$, és azok a számok tartoznak ide, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.

Egy csomó racionális számot ismerek. Pl.: 10; -7; 2,4; 5/3; -0,3; ...



CSOPORTMUNKA

A feladatok megoldásán keresztül ismételjétek át az eddig tanultakat! 3-4 fős csoportokban dolgozzatok! Osszátok el a csoport tagjai között a munkát úgy, hogy mindenkinek jusson legalább egy megoldandó feladat! Ha elkészültetek, beszéljétek meg a feladatot és a megoldásokat a csoport többi tagjával!

A csoport

1. Jelöld a felsorolt számok helyét a szám-egyenesen!

$$\frac{5}{4}; \quad 2,5; \quad -\frac{4}{3}; \quad \frac{11}{3}; \quad -\frac{7,2}{2}$$

2. Írj a betűk helyére két-két számot úgy, hogy teljesüljön a megadott reláció!

a) $1\frac{3}{5} < a < 2,1$

b) $-3,6 < b < -2,8$

c) $\frac{1}{11} < c < \frac{1}{10}$

3. Lehet-e két racionális szám szorzata egész szám?

4. Add meg a felsorolt számok két-két tört alakját!

$$\frac{10}{4}; \quad 2,5; \quad -3; \quad 1\frac{3}{4}$$

5. Végezd el a műveleteket!

a) $-8 + [-25 - (-16)]$

b) $\frac{4}{25} + 4,67 - \frac{3}{100}$

c) $1,5 - \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{5}{7} \right] : 0,5$



B csoport

1. Jelöld a felsorolt számok helyét a szám-egyenesen!

$$\frac{13}{4}; \quad -\frac{7}{3}; \quad -1,5; \quad \frac{5,2}{4}; \quad \frac{9}{4}$$

2. Írj a betűk helyére két-két számot úgy, hogy teljesüljön a megadott reláció!

a) $2\frac{2}{5} < a < 2,7$ b) $-1,6 < b < -1\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{9} < c < \frac{1}{8}$

3. Lehet-e két racionális szám hányadosa egész szám?

4. Add meg az alábbi számok két-két tört alakját!

$$\frac{7}{4}; \quad 4; \quad -2,2; \quad 2\frac{5}{7}$$

5. Végezd el a műveleteket!

a) $8 + [-23 + (-56)]$ b) $8,6 - 3,7 + \frac{11}{20}$

c) $3\frac{2}{9} + \left(\frac{1}{3} : \frac{2}{3} - 1\frac{5}{6}\right)$



C csoport

1. Jelöld a felsorolt számok helyét a szám-egyenesen!

$$1,8; \quad -\frac{5}{2}; \quad \frac{11}{4}; \quad -\frac{3,6}{2}; \quad \frac{7}{4}$$

2. Írj a betűk helyére két-két számot úgy, hogy teljesüljön a megadott reláció!

a) $4\frac{3}{7} < a < 4,8$ b) $-2,8 < b < -2\frac{2}{5}$

c) $\frac{2}{101} < c < \frac{2}{100}$

3. Mit nevezünk egy szám reciprokának?

4. Add meg az alábbi számok két-két tört alakját!

$$\frac{12}{4}; \quad -5; \quad 3,5; \quad -1\frac{3}{8}$$

5. Végezd el a műveleteket!

a) $5 + [-7 + (-11)]$

b) $\frac{3}{8} - 0,125 + \frac{7}{2}$

c) $\left(1,5 - \left(-\frac{3}{4}\right)\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$



D csoport

1. Jelöld a felsorolt számok helyét a szám-egyenesen!

$$-\frac{7}{5}; \quad 1,6; \quad \frac{9}{4}; \quad -\frac{7,2}{4}; \quad \frac{20}{6}$$

2. Írj a betűk helyére két-két számot úgy, hogy teljesüljön a megadott reláció!

a) $8\frac{3}{11} < a < 8,4$ b) $-5,7 < b < -5\frac{6}{20}$

c) $\frac{9}{10} < c < \frac{10}{11}$

3. Mit nevezünk egy racionális szám abszolút értékének?

4. Add meg a felsorolt számok két-két tört alakját!

$$\frac{11}{3}; \quad 6,8; \quad -14; \quad 2\frac{5}{8}$$

5. Végezd el a műveleteket!

a) $-7 + [-15 + (-42)]$

b) $9 + \frac{7}{10} - \left(-\frac{11}{5}\right)$

c) $\frac{72}{49} \cdot \frac{21}{54} - \frac{36}{28} : \frac{27}{14}$



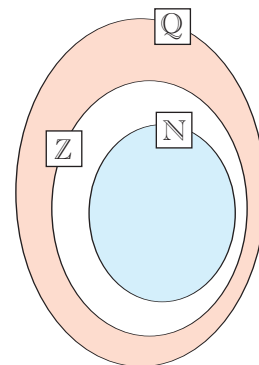
PÁROS MUNKA

1. Rajzoljátok le a halmazt a füzetetekbe, majd írátok a megfelelő helyre az alábbi számokat! Egyeztess a padtársaddal, hogy jól dolgoztál-e!

3; -6; $\frac{4}{7}$; -9,12; 0; 3,6; $\frac{-29}{11}$; $\frac{12}{4}$; $-1\frac{2}{5}$; 1,7

2. Döntsétek el az alábbi állításokról, melyik igaz és melyik hamis! Válaszokat minden esetben indokoljátok!

- Minden egész szám egyben természetes szám is.
- Az egész számok halmazában benne van a 0 is.
- A pozitív és a negatív egész számok együtt az egész számok halmazát alkotják.
- Minden természetes szám egyben racionális szám is.
- Az 1 nem racionális szám, mert nem írható fel két egész szám hányadosaként.
- A -2 egész szám, de nem természetes szám.
- Minden racionális szám egyben egész szám is.



A racionális számokkal végzett műveletek teszik lehetővé, hogy a mindennapjainkban felmerülő számítási feladatokat elvégezzük. Sokszor használjuk ezeket mértékegység-átváltásoknál, tört rész kiszámításakor vagy százalékszámításnál.

PÁROS MUNKA

Felváltva válaszoljátok meg az 1. és 2. kérdést! A 3. feladatot először egyedül oldjátok meg, majd egyeztessétek az eredményt!

- Soroljátok fel az általatok ismert mennyiségeket és ezek mértékegységeit!
- Rendezzétek növekvő sorrendbe az egy mennyiséghez tartozó tanult mértékegységeket, majd írátok közéjük az átváltási számokat!
- Végezzétek el az alábbi átváltásokat!

a) Hány kg, illetve dkg 5650 g?	b) Hány dm, illetve méter 4250 cm?
c) Hány liter 82,4 dl?	d) Hány m^2 750 dm^2 ?
e) Hány nap a 168 óra?	f) Hány liter 1,44 m^3 ?
- Az angolok és az amerikaiak még ma is sokszor a hagyományos mértékegységeiket használják. 1 yard = 3 láb = 36 hüvelyk, azaz 1 láb = 12 hüvelyk.

a) Hány hüvelyk 2 yard?	b) Hány yard 2 hüvelyk?
c) Hány hüvelyk $8\frac{1}{3}$ láb?	d) Hány láb 2,4 hüvelyk?

FELADATOK

1. Fogalmazzd meg, mit nevezünk racionális számnak!
2. Keres több olyan tört alakú számot, amelynek tizedes tört alakja végtelen szakaszos tizedes tört alakú!
3. Vannak-e nem racionális számok?
4. Mely racionális számok tizedes tört alakja lesz véges tizedes tört alakú?
5. Igaz-e, hogy a racionális számok tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört?
6. Igaz-e, hogy két racionális szám összege is racionális szám?
7. Csoportosítsd a racionális számokat tizedes tört alakjuk szerint!
8. Adj meg egy olyan tizedes törtet, amely nem szakaszos!
9. A Föld időzónákra osztható. Az alábbi városok különböző időzónákban találhatók. Az ábrán látható órák a helyi időt mutatják az adott városokban. A feladat megoldásához használhatod a földrajzi atlaszodat is.



BUDAPEST



LONDON



LOS ANGELES



HELSINKI



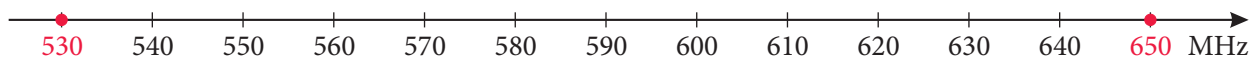
BANGKOK

- a) Anna budapesti idő szerint éjjel 11-kor hívja fel Bangkokban élő barátnőjét. Hány óra van ekkor Bangkokban?
- b) Thomas Londonban él. Reggel 7:45-kor hívja fel Los Angelesben élő barátját. Hány óra van ekkor Los Angelesben?
- c) A Helsinkiben élő Aino délután fél 4-kor hívja fel a budapesti Grétit. Hány óra van ekkor Budapesten?
- d) Milyen nap és hány óra van a fenti városokban akkor, amikor Budapesten hétfő reggel 8 óra van?



10. Panni a december havi zsebpénzének $\frac{3}{7}$ részéből ajándékokat vesz, negyedrészt elköltsi az iskolai büfében. A maradék pénz felét félreteszi, másik felét pedig kölcsönadja kisöccsének.
 - a) A pénzének hányadrészét teszi félre Panni?
 - b) Mennyi pénze volt decemberben, ha az iskolai büfében 1400 Ft-ot költött el?
 - c) Mennyi pénzt adott a kisöccsének?

11. Egy kábeltévé-szolgáltató cég szeretne néhány új tv-csatornát indítani, a két már foglalt tv-csatorna között. A szomszédos adások között legalább 8 MHz sávszélességnek kell lennie, hogy az adások ne zavarják egymást. Az alábbi ábrán pontokkal jelöltük a jelenleg foglalt frekvenciákat.



- Legfeljebb hány szabad csatornahely van?
- Milyen sávszélességre kerül a tizedik új csatorna, ha 530 MHz után minden lehetséges helyre kerül egy adó?

12. Tóni bácsi egyik nap délután 2-ig értékesítette az összes eladásra szánt epret. Reggel egy vendéglő tulajdonosa a teljes mennyiség kétötöd részét vásárolta meg, a délelőtt további részében a maradék egyharmadát vitték el, délután, az utolsó vevő érkezése előtt elfogyott a még meglévő készlet háromnegyede, így az utolsó vevő már csak 6 kg-ot tudott venni a befőzéshez.



- Az összes eper hányadrésze fogyott el a délelőtti folyamán?
- Hány kg epret vitt a piacra Tóni bácsi?
- Hány kg-ot vitt el a vendéglős?
- Hányszor több eper fogyott el délelőtt az utolsó vevő által megvásárolt mennyiségnél?

13. a) Volt 24,6 euró spórolt pénzem, de a 60%-át elköltöttem a bécsi karácsonyi vásárban. Hány euróm maradt?

- 52 600 Ft-ból 18 410 Ft-ot költöttünk utazásra. A pénz hány százalékát költöttük el?
- Az iskola tanulóinak 42%-a, 714 fő volt már idén színházban. Hány diák jár a suliba?

14. a) Egy görkori árát a tavasz folyamán 20%-kal emelték. Mennyibe kerül a 14 400 Ft-os korcsolya az áremelés után?



- Egy görkorizáshoz használt bukósisak ára a 20%-os áremelés után 3300 Ft-ba került. Mennyi volt az eredeti ára?
- Egy 4000 Ft-os széldzseki árát először 20%-kal megemelték, majd az ősz folyamán 15%-kal csökkentették. Mennyibe került a széldzseki a kétszeri árváltozás után?
- Mennyibe került eredetileg az a görkorizáshoz ajánlott kesztyű, melynek az eredeti árát 30%-kal felemelték, majd a későbbiek során 20%-kal csökkentették, és ekkor 2080 Ft-ot kellett fizetni érte?

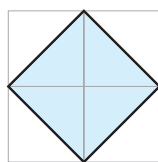
1. PÉLDA

Rajzoljatok a füzetetekbe olyan négyzeteket, amelyek területe 1; 4; 9; 2; 5; 10 területegység! 1 terület-egység a füzetben egy kis rácsnégyzet területe legyen.

Megoldás

Az első három esetben könnyű dolgunk van, mert a négyzetrács oldalaival párhuzamosan rajzolhatunk négyzeteket.

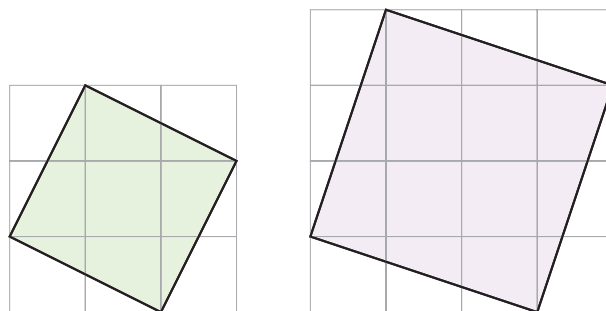
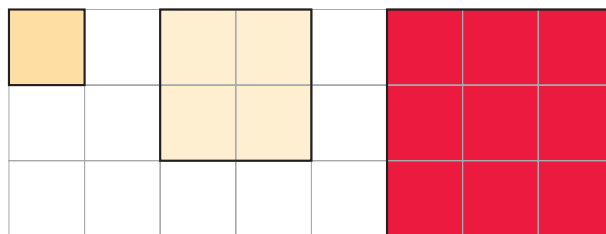
A 2 egység területű négyzet megrajzolása már egy kis ötletet kíván. Ha csak a négyzetrács oldalaival párhuzamos oldalakat akarunk hasz-



nálni, akkor nem boldogulunk a feladattal. Használjuk fel azt, hogy az egységnégyzet átlója 0,5 területegységű háromszögekre bontja a négyzetet! Négy ilyen háromszög megfelelő össze-

illesztésével megkaphatjuk a 2 egység területű négyzetet.

Az előző ötletet felhasználva megrajzolhatjuk az 5, illetve 10 egység területű négyzetet is.



2. PÉLDA

Határozzuk meg az első példában megrajzolt négyzetek oldalhosszát!

Megoldás

Az első három esetben az ábra alapján gyorsan válaszolhatunk a kérdésekre.

Terület: $t_1 = 1$ területegység,
 oldalhossz: $a_1 = 1$ egység
 Terület: $t_2 = 4$ területegység,
 oldalhossz: $a_2 = 2$ egység
 Terület: $t_3 = 9$ területegység,
 oldalhossz: $a_3 = 3$ egység

A 2 egység területű négyzet esetében csak mérésen alapuló becsléssel, közelítőleg tudjuk megmondani a négyzet oldalhosszát. A mérés eredményeként azt kapjuk, hogy a 2 egység területű négyzet oldalhossza $\approx 1,4$ egység. Természetesen ez nem pontos érték, mert így az 1,4 oldalú négyzet területe $t = 1,96$ területű lenne.

Ugyanígy méréssel, közelítő értékkel határozhatjuk meg az 5, illetve 10 területegységnyi négyzet oldalhosszát is.

Ha $t = 5$, akkor az oldalhossz $\approx 2,2$,
 ha $t = 10$, akkor az oldalhossz $\approx 3,2$.

A pontos érték jelölésére bevezetünk egy új jelet.

$\sqrt{2}$ -vel jelöljük, és négyzetgyök kettőnek mondjuk a 2 egység területű négyzet oldalának hosszát.

A négyzet területe tehát: $t = (\sqrt{2})^2 = 2$.

$\sqrt{5}$ -tel jelöljük, és négyzetgyök ötnek mondjuk az 5 egység területű négyzet oldalának hosszát. A négyzet területe tehát: $t = (\sqrt{5})^2 = 5$.

A fogalmat általánosíthatjuk:

Ha $a \geq 0$, akkor $\sqrt{a}$ (négyzetgyök a) jelenti azt a nemnegatív számot, amelynek négyzete a -val egyenlő. Ha nem okoz félreértést, akkor négyzetgyök a helyett gyakran csak gyök a -t mondunk.

Például:

$$\sqrt{4} = 2, \quad \text{mert} \quad 2^2 = 4;$$

$$\sqrt{9} = 3, \quad \text{mert} \quad 3^2 = 9;$$

$$\sqrt{1} = 1, \quad \text{mert} \quad 1^2 = 1;$$

$$\sqrt{0} = 0, \quad \text{mert} \quad 0^2 = 0;$$

$$\sqrt{0,16} = 0,4, \quad \text{mert} \quad 0,4^2 = 0,16;$$

$$\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}, \quad \text{mert} \quad \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

3. PÉLDA

Van-e a -9 -nek négyzetgyöke?

Megoldás

Nincs, mert bármilyen számot négyzetre emelve (önmagával megszorozva) csak nemnegatív számot kaphatunk. **Tehát negatív számoknak nincs négyzetgyöke!**

Megmondható-e, hogy hol helyezkedik el a $\sqrt{2}$ a számegyenesen?

Igen. Rajzoljunk egy számegyenest! Vegyük körzőnyílásba a 2 egység területű négyzet oldalát (az egység területű négyzet átlóját), majd mérjük fel az origóból ennek a szakasznak a hosszát! Vigyázzunk, a számegyenesen ugyanakkora egységet vegyünk fel, mint a négyzet rajzolásakor!

Meghatározható-e pontosan a $\sqrt{2}$ értéke tizedes tört alakban?

Próbáljuk meg kiszámítani $\sqrt{2}$ néhány tizedesjegyét!

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5, \quad \text{mert} \quad 1,4^2 < 2 < 1,5^2$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42, \quad \text{mert} \quad 1,41^2 < 2 < 1,42^2$$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415, \quad \text{mert} \quad 1,414^2 < 2 < 1,415^2$$

Ezt a közelítést tetszőlegesen sok tizedesjegy esetén elvégezhetjük, de pontos értéket nem kapunk.

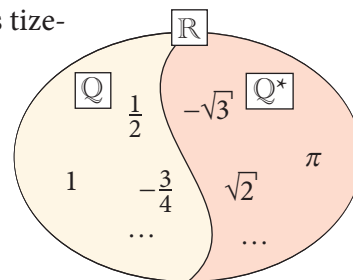
Például a $\sqrt{2}$ hét tizedesjegyre kerekített értéke: $\sqrt{2} \approx 1,4142136$; 18 tizedesjegyre kerekített értéke.

$\sqrt{2} \approx 1,414213562373095049$. A $\sqrt{2}$ tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos tizedes tört.

Azokat a számokat, amelyeknek tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos tizedes tört, **irracionális számok**nak nevezzük.

Az eddig tanult számokat most egy új számhalmazzal egészítettük ki, ez az irracionális számok halmaza. Jele: $\mathbb{Q}^*$.

A racionális és az irracionális számok együttesen alkotják a valós számok halmazát. Jele: $\mathbb{R}$.



FELADATOK

1. Rajzolj egy a fentihez hasonló halmazábrát a füzetedbe! Írd a felsorolt racionális és irracionális számokat a megfelelő helyre a halmazábrában!

0,7; $\frac{1}{3}$; $\sqrt{2}$; $-0,006006006\dots$; $\sqrt{4}$; 0,12345678...; 0,5; $-\frac{3}{4}$

2. Döntsd el az alábbi állításokról, melyik igaz, melyik hamis! Válaszodat indokold!

- A véges tizedes törtek racionális számok.
- A végtelen szakaszos tizedes törtek irracionális számok.
- A végtelen, nem szakaszos tizedes törtek irracionális számok.
- A racionális és irracionális számok együtt a természetes számok halmazát alkotják.
- Ha egy pozitív egész számból gyököt vonunk, irracionális számot kapunk.

3. Válaszd ki azokat a számokat, amelyek valamely egész szám négyzetei! Számold ki, mely számok négyzetei! Vigyázz, több megoldás is létezik, hiszen pl.: $100 = 10^2 = (-10)^2$.

81; 36; 54; -49 ; 9; 0,5; 144; 18; 169; 8

4. Számold ki a négyzetgyökök értékét! Vigyázz, ide csak pozitív számot írhatsz!

- | | | | |
|------------------|------------------|-------------------------|----------------------------|
| a) $\sqrt{100}$ | b) $\sqrt{49}$ | c) $\sqrt{1,21}$ | d) $\sqrt{0,36}$ |
| e) $\sqrt{0,01}$ | f) $\sqrt{1,69}$ | g) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ | h) $\sqrt{\frac{81}{625}}$ |

5. Adott a négyzet területe. Határozd meg a négyzet oldalának hosszát és a kerületét!

- | | | | |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------------------|
| a) $T = 49 \text{ cm}^2$ | b) $T = 81 \text{ dm}^2$ | c) $T = 1,69 \text{ m}^2$ | d) $T = \frac{36}{144} \text{ mm}^2$ |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------------------|

6. Adottak a téglalap oldalai.

I. Számold ki a téglalap területét!

II. Add meg a vele egyező területű négyzet oldalának hosszát!

III. Hasonlítsd össze a téglalap és a négyzet kerületét!

- | | |
|--|---|
| a) $a = 5 \text{ m}$, $b = 20 \text{ m}$ | b) $a = 3 \text{ dm}$, $b = 27 \text{ dm}$ |
| c) $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3,2 \text{ dm}$ | d) $a = 4 \text{ cm}$, $b = 36 \text{ cm}$ |

FEJSZÁMOLÁS

Soroljátok fel a természetes számok négyzetét 1-től 20-ig!

Azokat a természetes számokat, amelyeknek a négyzetgyöke természetes szám, négyzetszámoknak nevezzük.

A többi természetes szám négyzetgyökét az előző leckében tanult eljárással csak közelítőleg tudjuk meghatározni. Ez nagyon hosszadalmas munka. Évtizedekkel ezelőtt még négyzetgyöktáblázatot használtak a számolás meggyorsítására, de ezt a feladatot ma már a számológépek sokkal gyorsabban elvégzik helyettünk. Van olyan számológép, ahol egyetlen gomb és a szám beírása után kaphatunk eredményt, de létezik olyan is, amelyiknél egy adott szám négyzetgyökének meghatározásához egy úgynevezett „második funkció” (2ndF vagy SHIFT) használata szükséges. Fontos, hogy jól ismerd az általad használt számológépet, hogy használata gyors és megbízható legyen.

PÁROS MUNKA

Keressétek meg a gyökjelet a saját számológépeteken és a társatokén is! Segítsétek egymást a számológép használatában!

Határozzátok meg számológéppel az alábbi számok három tizedesjegyre kerekített közelítő értékét! Alkalmazzátok a kerekítés szabályait! Egyeztessétek a kapott eredményeket!

a) $\sqrt{24}$

b) $\sqrt{1000}$

c) $\sqrt{0,05}$

d) $\sqrt{\frac{2}{9}}$

e) $\sqrt{0,00000000015}$

A négyzetgyökvonás a mobiltelefonok nagy részén is elvégezhető. A legtöbb okostelefon számológép-alkalmazása elsőre nem kínálja fel a négyzetgyökvonás funkciót, de a telefon elforgatásával olyan tudományos számológép hívható elő, amellyel már lehet gyököt vonni.



Az elmúlt évtizedek gyors informatikai fejlődése teremtette meg annak a lehetőségét, hogy valamilyen eszköz kiszámolja helyettünk a számok négyzetgyökét. Nemrégén – talán még a nagyszületeik diákkorában is – táblázatra volt szükség a számok négyzetgyökének meghatározásához.

KUTATÓMUNKA

1. Nézzetek utána, hogyan használták a függvénytáblázatot a négyzetgyökvonás elvégzésére!
2. Keressétek az interneten módszert arra, hogyan lehet a négy alpművelet segítségével négyzetgyököt vonni!
3. Készítsetek egy 3-4 diából álló prezentációt, és mutassátok be az olvasott eljárást osztálytársaitoknak is!

FELADATOK

1. Írd a füzetedbe a helyes állítások betűjelét!

- a) $\sqrt{144} = 12$ b) $\sqrt{200} = 20$ c) $\sqrt{189} = 13$ d) $\sqrt{256} = 16$
 e) $\sqrt{625} = 25$ f) $\sqrt{289} = 17$ g) $\sqrt{100\,000} = 100$ h) $\sqrt{361} = 19$

2. Számold ki a felsorolt négyzetgyökök értékét! Használhatod a zsebszámológépedet!

- a) $\sqrt{0,16}$ b) $\sqrt{2,25}$ c) $\sqrt{1,96}$ d) $\sqrt{324}$
 e) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ f) $\sqrt{\frac{25}{81}}$ g) $\sqrt{\frac{9}{49}}$ h) $\sqrt{\frac{64}{10\,000}}$

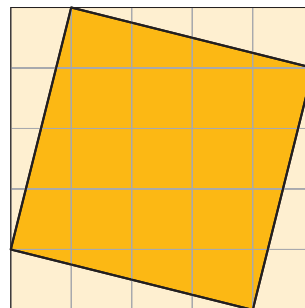
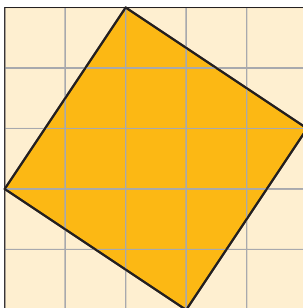
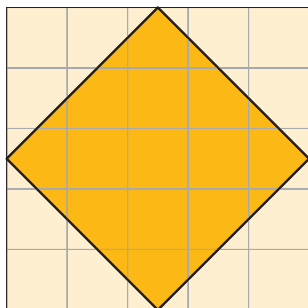
3. Az alábbiakban néhány kör területét adtuk meg cm^2 -ben. Számold ki a kör sugarának és kerületének hosszát!

- a) $T = 100 \cdot \pi$ b) $T = 121 \cdot \pi$ c) $T = 225 \cdot \pi$ d) $T = 289 \cdot \pi$
 e) $T = 144 \cdot \pi$ f) $T = 361 \cdot \pi$

4. Kisebb, nagyobb vagy egyenlő? Tedd ki a megfelelő relációs jelet! A füzetedben dolgozz!

- a) $\sqrt{5^2}$ $\sqrt{25}$ b) $\sqrt{1}$ $\sqrt{0}$
 c) $\sqrt{81}$ $(\sqrt{9})^2$ d) $\sqrt{2^6}$ $\sqrt{4^2}$
 e) $\sqrt{0,16}$ $(-2)^2$ f) $\sqrt{36}$ $(\sqrt{4^2})^2$

5. Számítsd ki az alábbi négyzetek területét és oldalának hosszúságát, ha egy négyzetrács oldalának hosszúsága 1 egység!



6. Egy négyzet területe 144 cm^2 .

- a) Mekkora a négyzet oldala?
 b) Hányszorosára változik a területe, ha az oldalát a kétszeresére növeljük?
 c) Hányszorosára változik az oldalak hosszúsága, ha a területét az ötszörösére növeljük?
 d) Mekkora lesz annak a négyzetnek az oldala, amelynek területe feleakkora, mint az eredeti négyzet területe?

A hatvány fogalmát nagy számok leírásához, a pozitív egész számok prímtényezős alakjának felírásához használtuk.

A hatvány az azonos tényezőkből álló szorzat rövidebb leírása:

Ismételjük át az elnevezéseket!

Például az 5^3 esetében:

- a hatványalap az 5,
- a hatványkitevő, vagy röviden kitevő a 3,
- a hatványérték az $5^3 = 125$.

Megállapítottuk, hogy minden szám első hatványa önmaga, és bármely 0-tól különböző szám nulladik hatványa 1.

$$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

PÁROS MUNKA

Először oldjátok meg a feladatot önállóan, majd cseréljétek füzetet, és ellenőrizzék a társatok munkáját! Ne írd a társad füzetébe, először beszéljétek meg az eltéréseket!

Írd fel a megadott hatványokat, majd számítsd ki az értéküket!

- a) Egy olyan hatvány, melynek alapja 5, kitevője 2.
- b) Egy olyan hatvány, melynek alapja -2 , kitevője 3.
- c) Egy olyan hatvány, melynek alapja $\frac{1}{2}$, kitevője 3.
- d) Egy olyan hatvány, melynek alapja $\left(-\frac{3}{4}\right)$, kitevője 2.
- e) Egy olyan hatvány, melynek alapja 0, kitevője 11.
- f) Egy olyan hatvány, melynek alapja $\left(\frac{42}{45}\right)$, kitevője 0.

Hatványok szorzása és osztása alkalmával – megfelelő feltételek teljesülése mellett – megfigyelhettünk olyan azonosságokat, amelyek egyszerűsítik a műveletek elvégzését. Az alábbiakban felsoroljuk, milyen azonosságokat ismertünk meg, és minden szabályra mutatunk példát.

Első szabály: Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére emeljük: $3^5 \cdot 3^4 = 3^9$.

Második szabály: Azonos alapú hatványok osztásánál,

ha a számláló kitevője nagyobb, mint a nevező kitevője, akkor az osztást úgy is elvégezhetjük, hogy a számláló kitevőjéből kivonjuk a nevező kitevőjét, és a közös alapot erre a kitevőre emeljük:

$$\frac{4^8}{4^3} = 4^5.$$

ha a számláló kitevője kisebb, mint a nevező kitevője, akkor annyi tényezővel tudunk egyszerűsíteni, amennyi a számlálóban van:

$$\frac{5^3}{5^7} = \frac{1}{5^4}.$$

ha a számláló és a nevező kitevője egyenlő, akkor a tört értéke 1:

$$\frac{2^5}{2^5} = 1.$$

Harmadik szabály: Hatványt úgy hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük: $(2^4)^3 = 2^{12}$.

Negyedik szabály: Azonos kitevőjű hatványokat úgy is összeszorozhatunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük: $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4$.

Visszafelé alkalmazva: Szorzatot úgy is hatványozhatunk, hogy az egyes tényezőket hatványozzuk, és a hatványokat összeszorozzuk: $6^4 = (2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$.

Ötödik szabály: Azonos kitevőjű hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapokat elosztjuk, és a kapott hányadost a közös kitevőre emeljük:

$$\frac{7^5}{2^5} = \left(\frac{7}{2}\right)^5.$$

Visszafelé alkalmazva: Hányados hatványozásakor a számláló és a nevező megfelelő hatványát osztjuk el egymással:

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{6^3}{5^3}.$$

CSOPORTMUNKA

Válasszatok a szabályok közül egyet, beszéljétek meg, ki melyiket választotta! Írjatok rá példát, és igazoljátok az azonosságot a felírt példán keresztül! Mondja el mindenki a saját példáját és indoklását a többieknek! A csoport többi tagja véleményezze a hallottakat!

Figyeld meg!

A hatványértékek nagyon gyorsan növekednek.

$$2^{10} = 1024$$

$$3^{10} = 59\,049$$

$$5^{10} = 9\,765\,625$$

$$2^{20} = 1\,048\,576$$

$$3^{20} = 3\,486\,784\,401$$

$$5^{20} = 95\,367\,431\,640\,625$$

Olvassátok ki a számokat!

A sakk egy több mint ezeréves játék, amelynek eredetéről mesék, legendák szólnak. Az egyik legerősebb történet szerint egy brahmin (az indiai kasztrendszerben főpap, főminiszter) találta fel, hogy a rádzsát (uralkodót) szórakoztassa. Szerény jutalmat kért magának. A sakktábla első mezejére 1, a következőre 2, a harmadikra 4, és így tovább, minden mezőre kétszer annyi búzaszemet, mint az előzőn volt. A rádzsát igencsak szórakoztatta a játék, ezért megígérte, hogy azonnal teljesíti a brahmin kérését. Nagy volt a meglepetése, mikor jelentették neki, hogy egész birodalmában nem termett ennyi búza.

A sakktáblára összesen $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$ darab búzaszemet kellett volna tenni. Számítsuk ki, mennyi búza ez:

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 1,84 \cdot 10^{19}$ db búzaszem, ami kb. $7 \cdot 10^{11}$ tonna. Még ez is hatalmas szám. Ha vasúton szeretnénk ennyi búzát elszállítani, akkor kicsit tovább kell számolnunk. Egy gabonaszállító vasúti kocsi 16 m hosszú és 60 tonna teherbírású, tehát a szerelvény hossza kb. 5000-szer érne körül a Földet.



FELADATOK

Keresd meg a helyes válaszokat! Lehet, hogy egy feladatnál több helyes megoldást is találsz.

1. Hány darab hármas kitevőjű hatványt találsz a felsoroltak között?

$$7^3; \quad 3^7; \quad \left(\frac{7}{5}\right)^3; \quad 0,64^5; \quad 3^3; \quad (-2,1)^3; \quad 3$$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) egyet sem

2. Számold ki a 2^{10} értékét!

- a) 2 b) 10 c) 100 d) 512 e) 1024

3. Mennyi az alapja annak a hatványnak, melynek a kitevője 2, a hatványértéke 144?

- a) 2 b) 12 c) 72 d) 144 e) 20 736

4. Mennyi a kitevője annak a hatványnak, melynek az alapja $\left(-\frac{2}{5}\right)$, a hatványértéke $\frac{16}{625}$?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 8 e) 16

5. Mennyivel egyenlő a $8^6 \cdot 8^3$ szorzat?

- a) 8^{6+3} b) $8^{6 \cdot 3}$ c) 8^9 d) 8^3 e) 8^{6-3}

6. Melyik egyenlő az $\left(\frac{1}{2}\right)^7$ hatvánnyal?

- a) $0,5^3$ b) $\frac{1^7}{2}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^7$ d) $\left(\frac{13}{26}\right)^{12}$ e) $\frac{1}{2^7}$ f) $(-0,5)^4$

7. Melyik osztás eredményeképp kaphatjuk meg a 4^3 hatványt?

- a) $\frac{4^4}{3^3}$ b) $\frac{4^3}{4^3}$ c) $\frac{4^9}{4^6}$ d) $\frac{3^4}{3^3}$ e) $\frac{4^3}{4^0}$

8. Válaszd ki a helyes állítást!

- a) $\frac{4^8}{4^3} = \frac{4^5}{4}$ b) $\frac{7^{10}}{7^4} = 7^6$ c) $\frac{3^5}{3^9} = \frac{3}{3^4}$ d) $\frac{5^7}{5^9} = \frac{1}{5^2}$ e) $\frac{6^9}{6^9} = 6^0$

9. Válaszd ki, mennyivel egyenlő a $(2^2)^3$ hatvány!

- a) 2^5 b) 2^6 c) 26 d) 32 e) 64

10. Válaszd ki a hamis állításokat!

- a) Minden szám nulladik hatványa önmaga.
b) Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös alapot a kitevők szorzatára emeljük.
c) Hatványt úgy hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.
d) Azonos kitevőjű hatványokat úgy is összeszorozhatunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.
e) Azonos kitevőjű hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapokat elosztjuk, és a kapott hányadost a kitevők hányadosára emeljük.

PÁROS MUNKA

Fogalmazzatok meg, mit jelent egy szám

- ellentettje;
- reciproka!

1. PÉLDA

Írjuk fel 10 hatványainak segítségével az alábbi számokat!

	1 000 000	10^6
:10	100 000	10^5
:10	10 000	10^4
:10	1000	10^3
:10	100	10^2
:10	10	10^1
:10	1	10^0

Folytassuk az átalakítást 1-nél kisebb pozitív számokkal is! A bal oldali oszlopban minden eddigi sor 10-ed része volt a felette lévőnek, a jobb oldali oszlopban a 10 kitevője soronként eggyel csökkent.

	$0,1 = \frac{1}{10}$	10^{-1}
:10	$0,01 = \frac{1}{100}$	10^{-2}
:10	$0,001 = \frac{1}{1000}$	10^{-3}
:10	$0,0001 = \frac{1}{10\,000}$	10^{-4}
:10	$0,00001 = \frac{1}{100\,000}$	10^{-5}

Ezzel a gondolatmenettel a hatvány fogalmát bővíthetjük, és értelmezhetjük negatív egész kitevőre is.

A táblázatból leolvashatjuk például, hogy:

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$$

Ez a meghatározás más hatványalap esetén is értelmezhető:

negatív kitevő

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

ellentett kitevő

Megfigyeléseinket szavakkal is megfogalmazhatjuk: **A negatív egész kitevőjű hatvány egyenlő az ellentett kitevőjű hatvány reciprokával, feltéve, hogy a hatványalap nem nulla.** (A 0-nak nincs reciproka!)

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{11}\right)^0 = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$$

2. PÉLDA

Írjuk át a megadott hatványokat negatív kitevő használata nélkül! Számítsd ki a hatvány értékét!

a) 3^{-4}

b) 2^{-1}

c) $(-4)^{-2}$

d) $(-2)^{-3}$

Megoldás

a) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

b) $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

c) $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$

d) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

Ez a meghatározás az azonos alapú hatványok osztására vonatkozó azonosság megfogalmazását is egyszerűsíti. A számláló és nevező nagyságrendjének viszonyától függetlenül megfogalmazható az alábbi szabály:

Azonos alapú hatványokat úgy is eloszthatunk egymással, hogy a számláló kitevőjéből kivonjuk a nevező kitevőjét, és az alapot erre a különbségre emeljük.

Nézzünk erre példát!

3. PÉLDA

Írjuk fel az alábbi osztásokat egyetlen hatvánnyal!

a) $\frac{2^6}{2^2}$

b) $\frac{23^4}{23^7}$

c) $\frac{11^6}{11^6}$

Megoldás

Alkalmazzuk mindhárom esetben az előzőekben megfogalmazott azonosságot!

a) $\frac{2^6}{2^2} = 2^{6-2} = 2^4$

b) $\frac{23^4}{23^7} = 23^{4-7} = 23^{-3}$

c) $\frac{11^6}{11^6} = 11^{6-6} = 11^0 = 1$

FELADATOK

1. Írd fel az alábbi hatványokat negatív kitevő használata nélkül!

a) 2^{-3}

b) 3^{-2}

c) 10^{-1}

d) 11^{-4}

e) $(-4)^{-3}$

f) $(-6)^{-2}$

2. Írd át az alábbi hatványokat tört nélküli alakban! Alkalmazd a negatív kitevőjű hatványokat!

a) $\frac{1}{4^2}$

b) $\frac{1}{5^3}$

c) $\frac{1}{49^2}$

d) $\frac{1}{10^4}$

e) 0,001

f) 0,1

3. 🎧 Döntsd el, melyik egyenlőség igaz!

$$\begin{array}{ll} a) \frac{8^9}{8^{23}} = 8^{-14} & b) \frac{(-2)^7}{(-2)^{11}} = (-2)^4 \\ c) \frac{10^{88}}{10^{88}} = 10^0 & d) \frac{0^3}{0^5} = 0 \\ e) \frac{5^{20}}{5^{31}} = 5^{-11} & f) \frac{(-9)^{12}}{(-9)^{27}} = -9^{-15} \end{array}$$

4. 🎧 Keresd meg az egyenlő kifejezéseket!

$$\begin{array}{ll} a) 5^{-3} & A) \frac{1}{32} \\ b) 2^{-5} & B) \frac{1}{1\,000\,000} \\ c) 11^{-2} & C) \frac{1}{64} \\ d) 10^{-6} & D) \frac{1}{125} \\ e) 4^{-3} & E) \frac{1}{121} \end{array}$$

5. 🎧 Végezd el az alábbi műveleteket, majd állapítsd meg, melyik művelet sor eredménye kisebb, mint 10^{-6} !

$$\begin{array}{lll} a) \frac{2^3}{2^9} & b) \frac{4^5}{4^9} & c) \frac{7^{10}}{7^{10}} \\ d) \frac{8^2}{8^8} & e) \frac{11^7}{11^{15}} & f) \frac{13^4}{13^{10}} \end{array}$$

6. 🎧 Írd át a megadott hatványokat negatív kitevő használata nélkül, és számítsd ki a hatványok értékét!

$$\begin{array}{ll} a) 3^{-4} & b) 8^{-2} \\ c) 2^{-9} & d) 6^{-3} \\ e) (-10)^{-5} & f) (-2)^{-7} \\ g) 5^{-3} & h) (-5)^{-3} \end{array}$$

7. 🎧 Válaszd ki, melyik felírás azonos a $(-4 \cdot 7)^6$ hatvánnyal!

$$\begin{array}{ll} a) 4^6 \cdot 7 & b) 4 \cdot 7^6 \\ c) -4^6 \cdot 7^6 & d) 11^6 \\ e) 28^6 & f) -28^6 \end{array}$$

8. 🎧 Hasonlítsd össze az alábbi kifejezéseket, és keresd meg a nagyobbat! Ha jól dolgoztál, a helyesen kiválasztott kifejezésekhez tartozó betűkből egy értelmes magyar szót tudsz kirakni. Melyik ez a szó?

$$\begin{array}{ll} a) K \ 5^{-9} & E \ \frac{1}{1000} \\ b) A \ \frac{4^5}{4^8} & E \ 3^{-3} \\ c) R \ \frac{1}{25} & T \ \frac{2^3}{2^{10}} \\ d) M \ 11^{-6} & A \ \frac{1}{22^6} \\ e) D \ \frac{6^3}{6^7} & S \ 6^{-5} \\ f) A \ \frac{1}{2016} & E \ \frac{1}{5^4} \\ g) G \ \frac{(-7)^5}{(-7)^{12}} & K \ (-2)^{-8} \end{array}$$

9. 🎧 Válaszd ki a helyes állítást!

$$\begin{array}{ll} a) \frac{9^5}{7^3} = \left(\frac{9}{7}\right)^2 & b) \frac{9^2}{7^3} = \left(-\frac{9}{7}\right)^6 \\ c) \frac{9^4}{7^4} = \left(\frac{9}{7}\right)^1 & d) \frac{9^8}{7^8} = \left(-\frac{9}{7}\right)^8 \\ e) \frac{9^5}{7^5} = \left(\frac{9}{7}\right)^{10} & f) \frac{9^7}{7^9} = \frac{(-9)^7}{7^9} \end{array}$$

10. 🎧 Számold ki a hatványok értékét!

$$\begin{array}{ll} a) \left(\frac{2}{3}\right)^2 & b) \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \\ c) \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} & d) \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \\ e) (0,1)^{-3} & f) (-0,1)^{-3} \\ g) (0,2)^{-2} & h) (0,2)^2 \\ i) (0,5)^{-8} & j) (0,5)^3 \\ k) (0,01)^{-3} & l) (0,01)^3 \end{array}$$

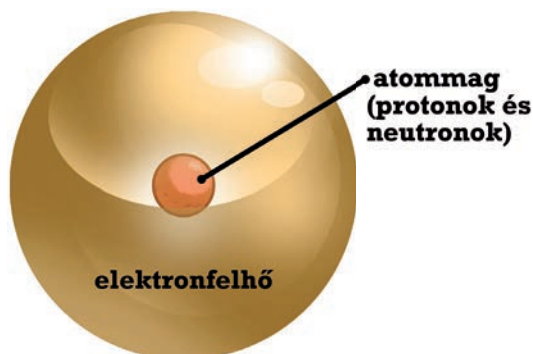
Hetedik osztályban megismertük, hogyan írhatjuk fel a nagyon nagy pozitív számokat rövidebb alakban. Például a 250 000 felírható $2,5 \cdot 10^5$ alakban. Ezt a szám normálalakjának nevezzük. Tíznél nagyobb számok normálalakja olyan kéttényezős szorzat, amelynek első tényezője egy 1 és 10 közé eső szám, második tényezője pedig 10 pozitív egész kitevőjű hatványa.

PÁROS MUNKA

Először önállóan oldjátok meg a feladatot, majd egyeztetsetek az eredményeket! Válasszatok ki, melyek a normálalakban megadott számok az alábbiak közül!

- a) $25 \cdot 10^2$ b) $3,254 \cdot 10^2$ c) $6,230 \cdot 10^3$ d) $0,857 \cdot 10^5$ e) $0,01 \cdot 10^3$

Sok másik tanórán is találkozhatok normálalakban felírt számokkal. A csillagászat nagyon távol lévő, hatalmas galaxisokkal és csillagokkal foglalkozik, a fizika, kémia, biokémia pedig a parányi méretű részecskék természetét vizsgálja.



Egy tudományos cikkben az atom méretéről az alábbiakat olvashatjuk:

A hidrogénatom a legegyszerűbb felépítésű atom. A hétköznapiakban megszokott méretekhez képest a hidrogénatom mérete nagyon kicsi, 10^{-9} m nagyságrendű, de az atommag mérete még ennél is sokkal kisebb, 10^{-15} m. A méretviszonyokat úgy képzelhetjük el, hogyha gondolatban az atommagot egy 10 cm sugarú gömbbé nagyítanánk fel – ami elérne a kezünkben –, akkor az atom mérete egy 100 km sugarú gömb lenne.

Nézz körül a környezetemben! Keresz iskoládtól, lakóhelyedtől kb. 100 km-re lévő nagyobb településeket, esetleg nevezetes földrajzi tájegységeket!

Ha nem használnánk normálalakot, akkor például az atom vagy az atommag méretét sok 0 felhasználásával tudnánk csak felírni, ami elíráshoz vezethet. Normálalak használata nélkül az atom mérete így írható: 0,000000001 m, az atommag mérete pedig 0,000000000000001 m. A negatív egész kitevő bevezetése lehetővé teszi az 1-nél kisebb számok normálalakjának felírását.

Egy pozitív szám normálalakja olyan kéttényezős szorzat, amelynek egyik tényezője egy 1 és 10 közé eső szám, a másik tényezője pedig a 10 egész kitevőjű hatványa.

1. PÉLDA

Írjuk fel normálalakban az alábbi számokat!

- a) 0,028 b) 0,001003 c) 1 d) $\frac{13}{25}$

Megoldás

- a) $0,028 = 2,8 \cdot 10^{-2}$ b) $0,001003 = 1,003 \cdot 10^{-3}$ c) $1 = 1 \cdot 10^0$ d) $\frac{13}{25} = 0,52 = 5,2 \cdot 10^{-1}$

2. PÉLDA

Számítsuk ki a műveletek eredményét!

a) $(5,5 \cdot 10^{-3}) \cdot 2000$ b) $(1,6 \cdot 10^{-6}) \cdot (2,5 \cdot 10^8)$ c) $(2,07 \cdot 10^{-3}) : (3 \cdot 10^{-4})$

Megoldás

a) $(5,5 \cdot 10^{-3}) \cdot 2000 = (5,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (2 \cdot 10^3) = 5,5 \cdot 2 \cdot 10^0 = 11$

b) $(1,6 \cdot 10^{-6}) \cdot (2,5 \cdot 10^8) = 1,6 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 = 4 \cdot 10^2 = 400$

c) $(2,07 \cdot 10^{-3}) : (3 \cdot 10^{-4}) = \frac{2,07 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-4}} = 0,69 \cdot 10^{-3+4} = 0,69 \cdot 10^1 = 6,9$

FELADATOK

1. Írd fel a következő számokat 10 hatványként!

a) 1 000 000 b) 10 000 000 000 c) $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$ d) $\frac{1}{100\,000\,000\,000\,000}$

2. Írd fel a következő számokat normálalakban!

a) 275 000 b) 82 976 293 c) 0,0036842 d) 0,000000000071

3. Írd át a normálalakban megadott számokat helyiértékes alakba!

a) $5 \cdot 10^{-2}$ b) $6,2 \cdot 10^{-3}$ c) $1,11 \cdot 10^{-5}$ d) $4,045 \cdot 10^{-6}$

4. Számítsd ki a műveleteket! Az eredményt normálalakban add meg!

a) $(4,6 \cdot 10^5) \cdot (0,5 \cdot 10^7)$; $(4,6 \cdot 10^3) \cdot (0,5 \cdot 10^{28})$; $(4,6 \cdot 10^9) \cdot (0,5 \cdot 10^{-2})$;

$(4,6 \cdot 10^0) \cdot (0,5 \cdot 10^{-6})$; $(4,6 \cdot 10^{-4}) \cdot (0,5 \cdot 10^{-9})$

b) $(14,8 \cdot 10^9) : (3,7 \cdot 10^4)$; $(14,8 \cdot 10^3) : (3,7 \cdot 10^7)$; $(14,8 \cdot 10^5) : (3,7 \cdot 10^{-2})$;

$(14,8 \cdot 10^{-6}) : (3,7 \cdot 10^{-1})$; $(14,8 \cdot 10^{-8}) : (3,7 \cdot 10^3)$

5. Egy fényév az a távolság, amelyet a fény légüres térben egy év alatt megtesz. Egy fényév körülbelül $9,46 \cdot 10^{15}$ méter. A fényév meghatározásához hasonlóan beszélhetünk fényóráról, fénypercről és fénymásodpercről is; ahány métert tesz meg a fény egy óra, egy perc, illetve egy másodperc alatt.

a) Számold ki, hány métert tesz meg a fény egy óra alatt!

b) A Nap–Föld-távolság körülbelül 8,3 fényperc. Fejezd ki ezt a távolságot méterben is!

c) A Föld–Hold-távolság 1,3 fénymásodperc. Fejezd ki ezt a távolságot méterben is!

6. Végezd el a műveleteket! Az eredményt normálalakban add meg!

a) $(1,1 \cdot 10^3) \cdot (2,6 \cdot 10^5)$ b) $(3,4 \cdot 10^8) \cdot (5,3 \cdot 10^{-5})$ c) $(4,2 \cdot 10^{-8}) \cdot (1,9 \cdot 10^{13})$

d) $(7,8 \cdot 10^6) : (3 \cdot 10^3)$ e) $(10,5 \cdot 10^{-5}) : (1,5 \cdot 10^2)$ f) $(9,1 \cdot 10^{-9}) : (1,3 \cdot 10^{-7})$

CSOPORTMUNKA

A csoport minden tagja önállóan gondolja végig az első feladatot, majd a csoport egy-egy tagja mondja el ismereteit a többieknek! Ha szükséges, egészítsétek ki vagy helyesbítsétek a válaszokat!

1. Ismételjétek át a következő fogalmakat:

a) algebrai kifejezés; b) egytagú kifejezés; c) együttható!

A csoport tagjai felváltva oldják meg a 2. feladatot! A többiek ellenőrizték a hallottakat, és szükség esetén javítsák ki a hibás válaszokat!

2. Válasszátok ki az egytagú algebrai kifejezéseket, és állapítsátok meg az együtthatóikat!

- a) $6,5y^2z^3$ b) $-5a^2b + 3$ c) $\frac{7}{2}ab$ d) $a^3 - 1$
 e) $\frac{x}{6}$ f) $8xy - 2x^2y$ g) $\frac{12x^4}{5}$ h) x^6

1. PÉLDA

Számítsuk ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét, ha $a = -1$; $b = 2$!

a) $3a + 6b + 2a - 2b - 5a$

b) $3(a - 2) + 2(b + 3) - 5(a - b)$

c) $\frac{4}{5}ab^2 - \frac{5}{3}a^2b - \frac{3}{2}ab^2 + \frac{7}{4}a^2b$



Megoldás

a) Kétféle módon járhatunk el. Ha a megadott értékeket behelyettesítjük a kifejezésekbe, akkor csak számokkal kell műveleteket végeznünk:

$$3 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 - 5(-1) = -3 + 12 - 2 - 4 + 5 = 8$$

Ha azonban alkalmazzuk algebrai tudásunkat, és összevonjuk az egyenmű tagokat, akkor sokkal kevesebb számolást kell végeznünk:

$$3a + 6b + 2a - 2b - 5a = 4b$$

$$4b = 4 \cdot 2 = 8$$

b) A gyorsabb számolás érdekében először bontsuk fel a zárójeleket, majd vonjuk össze az egyenmű tagokat! A zárójelfelbontás során figyelni kell arra, hogy a zárójelben lévő tagok mindegyikét megszorozzuk a zárójel előtti számmal. Emellett különös gondot kell fordítanunk a zárójel előtti mínusz előjelre! Ebben az esetben a beszorzás alkalmával minden zárójelben lévő tag előjele ellentétesre változik:

$$3(a - 2) + 2(b + 3) - 5(a - b) = 3a - 6 + 2b + 6 - 5a + 5b = -2a + 7b$$

Ha összevonás után helyettesítünk be a betűk helyére, akkor kevés számolással megkapjuk a kifejezés helyettesítési értékét:

$$-2a + 7b = 16$$

c) Az egy színnel jelölt egytagúak összevonhatók:

$$\begin{aligned} \frac{4}{5}ab^2 - \frac{5}{3}a^2b - \frac{3}{2}ab^2 + \frac{7}{4}a^2b &= \frac{4}{5}ab^2 - \frac{3}{2}ab^2 - \frac{5}{3}a^2b + \frac{7}{4}a^2b = \\ &= \frac{8}{10}ab^2 - \frac{15}{10}ab^2 - \frac{20}{12}a^2b + \frac{21}{12}a^2b = -\frac{7}{10}ab^2 + \frac{1}{12}a^2b = \\ &= -\frac{7}{10}(-1) \cdot 4 + \frac{1}{12}(-1)^2 \cdot 2 = \frac{14}{5} + \frac{1}{6} = \frac{89}{30} \end{aligned}$$

Jegyezd meg!

Az algebrai kifejezések közül csak az olyan egytagú kifejezések vonhatók össze, amelyek egymeműek. Egymeműeknek nevezzük azokat az egytagú kifejezéseket, amelyek csak számszorozókban (együtt-hatókban) különböznek.

2. PÉLDA

Írjuk fel betűkifejezések segítségével az alábbi szöveges összefüggéseket!

- Egy számnál kettővel nagyobb szám háromszorosa.
- A szám négyzeténél öttel kisebb szám harmada.
- Írjuk fel két szám összegének és különbségének az összegét, majd az összegnek vegyük a felét!
- Egy szám háromszorosából kivonjuk egy másik szám négyszeresét. A kapott különbséget hozzáadjuk a két szám összegéhez.

Megoldás

A számot x -szel jelöljük.

a) $(x + 2) \cdot 3$ b) $(x^2 - 5) \cdot \frac{1}{3}$

Legyen a két szám a és b .

c) $\frac{(a + b) + (a - b)}{2}$ d) $(3a - 4b) + (a + b)$



FELADATOK

1. Írd fel algebrai kifejezésekkel!

- x és y összegének az ötszöröse
- x és y különbségének a fele
- x és y szorzatának a négyszerese
- x és y hányadosának a háromszorosa
- x és y összegének a $\frac{4}{5}$ része

- x háromszorosának és y négyszeresének az összege
- x kétszeresének és y hatszorosának a hányadosa
- az x -nél hárommal nagyobb szám kétszerese
- az y -nél öttel kisebb szám negyede
- x és y különbségének az abszolút értéke

2. Fogalmazd meg szövegesen az alábbi algebrai kifejezéseket!

- a) $2a + b$ b) $(a + b) \cdot 7$ c) $3a - 8b$
 d) $2ab$ e) $\frac{a}{3} + 3b$ f) $\frac{a+1}{b+1}$

3. Számítsd ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét!

- a) $2(5 - 3x)$, ha $x = 4$
 b) $4x(x - 7)$, ha $x = \frac{3}{2}$
 c) $\frac{12x - 11}{8 - 2x}$, ha $x = -\frac{1}{6}$
 d) $x^2 + 3x - 2$, ha $x = -1,2$

4. Válaszd ki azokat az algebrai kifejezéseket, amelyek együtthatója 8! Számítsd ki a helyettesítési értéküket, ha $a = -2$; $b = \frac{1}{2}$!

- a) $2a4b$ b) $-8ab^2$
 c) $\frac{8a}{3}$ d) $\frac{8}{ab}$
 e) $2(2a^2 2b^2)$ f) $\frac{24b}{a^2}$
 g) $(8ab)^2$ h) $2(2a)^2$

5. Számítsd ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét az a és b megadott értékeivel!

I. $4a + 12b + 3a - 17a + 9b + a - 3b$

- a) $a = 5,2$; $b = -9,3$
 b) $a = -\frac{2}{3}$; $b = \frac{5}{9}$

II. $23 - (3a - 5) + 5(4 - 2b) - 2(a - 3b)$

- a) $a = 3$; $b = -2$
 b) $a = -\frac{2}{5}$; $b = \frac{11}{2}$

III. $\frac{3}{2}ab - \frac{1}{4}ab^2 + \frac{5}{3}a^2b$

- a) $a = 2$; $b = -3$
 b) $a = \frac{2}{3}$; $b = -\frac{1}{6}$

6. a) A nyolcadik osztályba 32 tanuló jár. A nyolcadikosok átlagsúlya x kg. November közepén érkezik az osztályukba Pista, aki 56 kg. Fejzd ki az így már 33 főből álló osztály tanulóinak átlagsúlyát!

b) Pankának hétvégére k órányi tanulnivalója volt. Szombat délelőtt megtanulta a harmadát, délután a maradék negyedét. Hány órányi tanulnivalója maradt Pankának vasárnapra?

7. Gergő rengeteg fényképet készített az iskolai farsangon. Szeretné kiszámolni, hány megabyte helyet foglal, ha mindet feltölti a gépére. A fájl méretét a következő képlettel tudja meghatározni:

$$M = \frac{x \cdot y \cdot Szm}{8 \cdot 1024 \cdot 1024}, \text{ ahol}$$

M : a fájl mérete megabyte-ban,

x : a kép szélessége,

y : a kép hosszúsága,

Szm : a kép színmélysége. (Ez a szám mutatja meg, hány bit határozza meg egy adott pont színét. Minél nagyobb a színmélység, annál szebb a kép, viszont annál nagyobb helyet foglal.)

a) Mekkora méretű fájl kap Gergő, ha 50 darab 3888×2592 felbontású képet készített, melyek színmélységét 24 bitre állította?

b) Hogyan változik a fájl mérete, ha a felbontást 1936×1288 -ra csökkenti?

c) Hogyan változik a fájl mérete, ha a színmélységet 32 bitre állítja?



1. PÉLDA

Egy a oldalú négyzet egyik oldalát háromszorosára, másik oldalát kétszeresére növeltük, s így egy téglalapot kaptunk. Hányszorosa lesz a téglalap területe a négyzet területének?

Megoldás

A négyzet területe: $T_{\text{négyzet}} = a^2$.

A téglalap oldalainak hossza: $2 \cdot a$ és $3 \cdot a$; területe a két különböző hosszúságú oldal szorzata:

$$T_{\text{téglalap}} = 2a \cdot 3a = 6a^2.$$

Tehát a téglalap területe hatszorosa lesz a négyzet területének.

Emlékszel?

A tavalyi évben megtanultuk, hogy vannak ki nem írt, úgynevezett láthatatlan szorzásjelek.

Például: $2a = 2 \cdot a$

A számítás során felhasználtuk a szorzásnak azt a tulajdonságát, hogy a szorzótényezők felcserélhetők. Alkalmaztuk továbbá a hatványozás egyik szabályát:

$$2a \cdot 3a = 2 \cdot a \cdot 3 \cdot a = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a = 6a^2$$

PÁROS MUNKA

Beszélgétek meg, hogy melyik azonosságot használtuk fel az egyes feladatoknál! Mutassátok meg, hogy igazak az egyenlőségek! Felváltva mondjátok el a megoldásaitokat!

a) $5^7 \cdot 5^4 = 5^{11}$

b) $\frac{9^7}{9^4} = 9^3$

c) $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5$

d) $(2^6)^4 = 2^{6 \cdot 4} = 2^{24}$

2. PÉLDA

Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $a^4 \cdot a^3$

b) $2b^2 \cdot 3b^3 \cdot b^4$

c) $\frac{2}{3}x \cdot (2x \cdot 3y^2) \cdot \left(\frac{6}{7}x^3 \cdot y^4\right)$

Megoldás

a) Alkalmazzuk az azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó szabályt!

$$a^4 \cdot a^3 = a^7$$

b) Az előzőekben leírt módon először a számokat, majd a betűket szorozzuk össze:

$$2b^2 \cdot 3b^3 \cdot b^4 = 6 \cdot b^9$$

c) $\frac{2}{3}x \cdot (2x \cdot 3y^2) \cdot \left(\frac{6}{7}x^3 \cdot y^4\right) = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{6}{7} \cdot x^5 \cdot y^6 = \frac{24}{7}x^5y^6$

Fontos!

Egytagú kifejezéseket egytagúval úgy szorzunk, hogy az együtthatókat összeszorozzuk, majd az azonos betűk összeszorozásakor az azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó szabályt alkalmazzuk.

$$2x^2y \cdot 15x^4y^6 = 2 \cdot 15 \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot y \cdot y^6 = 30 \cdot x^6y^7$$

3. PÉLDA

Végezzük el a műveleteket! A lehető legegyszerűbb alakot adjuk meg!

$$a) \frac{2ab}{10} \cdot \frac{15a^2b}{6}$$

$$b) \frac{3k \cdot l}{77m} \cdot \frac{14 \cdot m \cdot k^2}{6 \cdot l^2}$$

Megoldás

Alkalmazzuk a törtek és az egytagú kifejezések szorzására vonatkozó ismereteinket!

$$a) \frac{2ab}{10} \cdot \frac{15a^2b}{6} = \frac{a^3 \cdot b^2}{2}$$

$$b) \frac{3k \cdot l}{77m} \cdot \frac{14 \cdot m \cdot k^2}{6 \cdot l^2} = \frac{k^3}{11 \cdot l}$$

FELADATOK

1. Végezd el az alábbi műveleteket!

$$a) a^5 \cdot a^7$$

$$b) 2b^3 \cdot 5b^8$$

$$c) 3c^4 \cdot 4c^7 \cdot 6c^8$$

$$d) -7d^3 \cdot (-9)d^6$$

$$e) 11e^4 \cdot (-5)e^9 \cdot (-2)e^{13}$$

2. Végezd el az alábbi műveleteket!

$$a) 5x^3 \cdot 7y^4 \cdot 3x \cdot 2y^5$$

$$b) 8x^6 \cdot (-3)y^2 \cdot 2x^0 \cdot (-5)y^7$$

$$c) 4x^{10} \cdot y^5 \cdot (-2x^6 \cdot 3y^8)$$

$$d) \frac{2}{5}x^4 \cdot \frac{1}{3}y^6 \cdot 15x^9 \cdot (-6)y^7$$

$$e) 6x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^3 \cdot 3y^5\right) \left(\frac{3}{7}x^8 \cdot 14y^9\right)$$

3. Páros munka: Alkoss padtársadnak minél több algebrai kifejezést az alábbi számok és betűk felhasználásával! A különböző értékeket szorzással kapcsold össze! Oldjátok meg egymás feladatait, majd javítsátok is ki társatok megoldásait!

2; 2; 3; 5; a; b

4. Végezd el az alábbi műveleteket! Add meg a legegyszerűbb alakot!

$$a) \frac{3xy}{15} \cdot \frac{4xy^2}{2}$$

$$b) \frac{12x^3}{14x^2y} \cdot \frac{21xy^4}{6y^2}$$

$$c) \frac{13x^2y^2}{25x^3} \cdot \frac{10xy^4}{26x^2y^5}$$

$$d) \frac{9xy}{24x^6} \cdot \frac{18x^4y^7}{27y^4}$$

5. Keresd meg, melyik feladathoz melyik megoldás tartozik! Írj feladatot a fel nem használt megoldáshoz!

$$a) \frac{5}{6}xy \cdot (3x^4y^5) \cdot \left(\frac{2}{7}x^2y^3\right)$$

$$A) \frac{1}{4}xy^5$$

$$b) \left(-\frac{4}{9}x^5y^7\right) \cdot x^7y^4 \cdot \left(-\frac{15}{6}\right)$$

$$B) \frac{35x^9}{2y^3}$$

$$c) \frac{3x^3}{8} \cdot \frac{10y^6}{15x^2y}$$

$$C) \frac{10}{9}x^{12}y^{11}$$

$$d) \frac{63xy^5}{6y^8} \cdot \frac{15x^9y}{9xy}$$

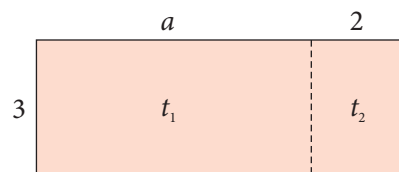
$$D) \frac{7x^{11}}{4y^{15}}$$

$$E) \frac{10}{7}x^7y^9$$

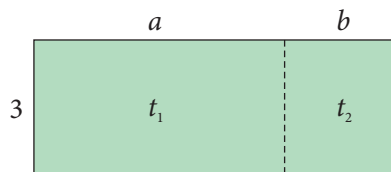
1. PÉLDA

Írjuk fel mindegyik téglalap területét kétféle alakban!

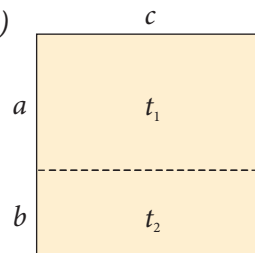
a)



b)



c)



Megoldás

A nagy téglalap területe mindhárom esetben egyenlő a résztéglalapok területének összegével:

a) $t = 3 \cdot (a + 2)$; $t_1 + t_2 = 3 \cdot a + 3 \cdot 2$, azaz $3 \cdot (a + 2) = 3 \cdot a + 3 \cdot 2$

b) $t = 3 \cdot (a + b)$; $t_1 + t_2 = 3 \cdot a + 3 \cdot b$, azaz $3 \cdot (a + b) = 3 \cdot a + 3 \cdot b$

c) $t = c \cdot (a + b)$; $t_1 + t_2 = c \cdot a + c \cdot b$, azaz $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$

A példa megoldása során átismételtük a tavalyi tanévben tanultakat: Zárójelfelbontáskor a zárójelben lévő összes kifejezést meg kell szoroznunk a szorzótényezővel, és az így kapott tagokat kell összeadni.
Másként fogalmazva: Töbhtagú kifejezést egytagúval úgy szorzunk, hogy a töbhtagú kifejezés minden tagját megszorozzuk az egytagú kifejezéssel.

PÁROS MUNKA

Készítsetek a példában látotthoz hasonló téglalapokat az alábbi műveletek szemléltetéséhez! Számítsátok ki a téglalapok területeit kétféle módon! Ha végeztetek egy feladatrésszel, cseréljeteek füzetet, és ellenőrizzeteek társatok munkáját! Ne írd a társad füzetébe! Beszél meg vele, hogy te hogyan gondoltad a megoldást!

a) $2(a + b + 5)$

b) $3a \cdot (a + b + c)$

c) $\frac{3}{2}x \cdot (x + 5)$

Az 1. példa megoldása során fogalmazhattunk volna úgy is, hogy a részterületek összege megadja a nagy téglalap területét, azaz:

a) $3 \cdot a + 6 = 3 \cdot (a + 2)$ b) $3 \cdot a + 3 \cdot b = 3 \cdot (a + b)$ c) $c \cdot a + c \cdot b = c \cdot (a + b)$

Ezt az eljárást a matematikában **kiemelésnek** nevezzük. Ha egy összeg minden tagjában szerepel ugyanaz a szorzótényező (ez lehet szám vagy betű), akkor ezt az összeget úgy írhatjuk fel szorzat alakban, hogy a közös szorzótényezőt kiemeljük a zárójel elé. Ez a módszer tulajdonképpen a zárójelfelbontás fordítottja.

Összefoglalva:

Zárójelfelbontáskor szorzatot összeggé alakítunk:

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

Kiemeléskor összeget szorzattá alakítunk:

$$c \cdot a + c \cdot b = c \cdot (a + b)$$

2. PÉLDA

Írjuk át szorzat alakba az alábbi összegeket!

a) $4a + 6b + 16$

b) $ab + b^2$

c) $3x + 5x^2$

d) $4xy + 6x^2y$

Megoldás

a) $4a + 6b + 16 = 2 \cdot 2a + 2 \cdot 3b + 2 \cdot 8 = 2 \cdot (2a + 3b + 8)$

b) $ab + b^2 = a \cdot b + b \cdot b = b \cdot (a + b)$

c) $3x + 5x^2 = 3 \cdot x + 5 \cdot x \cdot x = x \cdot (3 + 5x)$

d) $4xy + 6x^2y = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot y + 3 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot y = 2xy \cdot (2 + 3x)$

3. PÉLDA

Egyszerűsítsük a törtet!

a) $\frac{3a+6}{12}$

b) $\frac{5x+10y}{20}$

c) $\frac{2a^2+14a}{10a}$

Megoldás

A törtvonal zárójelet helyettesít, ezért minden esetben egy összeget osztottunk el. Az osztás során minden tagot el kell osztanunk a nevezővel. Ezt úgy tehetjük egyszerűbbé, hogy a számlálót szorzattá alakítjuk.

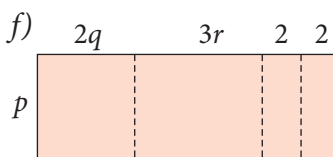
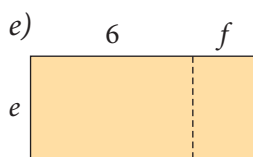
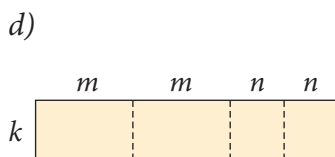
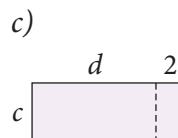
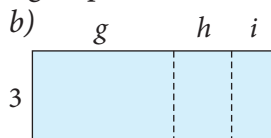
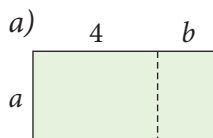
a) $\frac{3a+6}{12} = \frac{3(a+2)}{12} = \frac{a+2}{4}$

b) $\frac{5x+10y}{20} = \frac{5(x+2y)}{20} = \frac{x+2y}{4}$

c) $\frac{2a^2+14a}{10a} = \frac{2a(a+7)}{10a} = \frac{a+7}{5}$, feltéve, hogy a nevező nem 0, azaz $a \neq 0$.

FELADATOK

1. Írd fel kétféleképpen az alábbi téglalapok területét!



2. A nyári szünetben az iskola egy részén kicserélik a járólapokat.

- a) Írd fel az alaprajz segítségével, melyik helyiségbe hány m^2 járólap kerüljön!
b) Írd fel szorzat alakban, hány m^2 járólapra van szükség a felújítás során! Hányféle felírást találtál?

	a	b	c	
9	8. b	természettudományi terem	informatika-terem	9
6	d folyosó		e tanári	9
10	f 7. c	g 8. a	h nyelvi labor	e szertár 7

3. Sok a cm élű kockánk van. Ezekből a kockákból téglatesteket építettünk. Írd fel a téglatestek felszínét és térfogatát!

a)



b)



c)



d)



4. Írd át szorzat alakba az alábbi összegeket!

a) $3a + 3b$

b) $2x - 2y$

c) $ac + bc + dc$

d) $2bd - 3bg$

e) $14a + 6ab - 10ac$

f) $8ab + 12ab^2$

5. Keresd az egyenlő algebrai kifejezéseket! Amelyiknek nincs párja, ahhoz írd te egyet!

a) $7x(5 - 4y)$

b) $20x^2y - 4xy^2$

c) $6xy + 3y$

d) $5x(4 - y)$

e) $6xy(2y - 3x)$

f) $6x^2 + 3xy$

g) $4xy(5x - y)$

h) $20x - 5xy$

i) $4y(5x - 2)$

j) $35x - 28xy$

k) $3y(2x + 1)$

l) $12xy^2 - 18x^2y$

6. Egyszerűsítsd az alábbi törtet!

a) $\frac{5a + 15}{30}$

b) $\frac{14 - 21b}{35}$

c) $\frac{12c - 9d}{6e}$

d) $\frac{3ab + 2a^2}{4a}$

e) $\frac{8a^2b + 10ab^2}{6ab}$

f) $\frac{33ab - 55a^2}{11ab^2}$

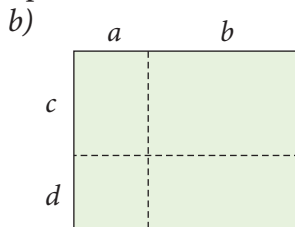
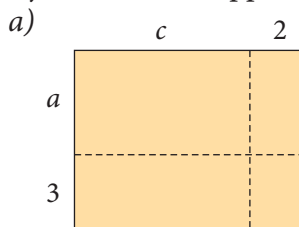
7. Igazold az a) és b) állításokat algebrai kifejezések felhasználásával!

a) Ha egy 15-tel osztható számhoz egy 10-zel osztható számot adunk, akkor az összeg mindig osztható 5-tel.

b) Ha egy 27-tel osztható számból elveszünk egy 18-cal osztható számot, akkor a különbség osztható 9-cel.

1. PÉLDA

Írjuk fel kétféleképpen az ábrán látható téglalapok területét!

**Megoldás**

- a) A nagy téglalap területe: $T = (a + 3) \cdot (c + 2)$, ami egyenlő a kis téglalapok területeinek összegével: $a \cdot c + a \cdot 2 + 3 \cdot c + 3 \cdot 2$.

Így tehát: $(a + 3) \cdot (c + 2) = a \cdot c + a \cdot 2 + 3 \cdot c + 3 \cdot 2$.

Vizsgáljuk meg az egyenlőséget!

$$(a + 3) \cdot (c + 2) = a \cdot c + a \cdot 2 + 3 \cdot c + 3 \cdot 2$$

Megfigyelhető, hogy az első zárójelben lévő mindkét tagot beszoroztuk a második zárójelben lévő mindkét taggal, és a szorzatokat összeadtuk.

- b) Hasonlóan járunk el, mint a példa a) részében!

A nagy téglalap területe: $(a + b) \cdot (c + d)$.

A kis téglalapok területeinek összege: $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.

A kétféle módon felírt területek egyenlők: $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.

Itt is jól látható a példa a) részénél tett megállapítás: az első zárójelben lévő tagokat beszoroztuk a második zárójelben lévőkkel.

Fontos!

Többtagú kifejezések szorzásakor az egyik tényező minden tagját megszorozzuk a másik tényező minden tagjával, és az egyenmű kifejezéseket összevonjuk.

2. PÉLDA

Egy téglalap oldalait a -val, illetve b -vel jelöltük. A téglalap a oldalát 10 egységgel csökkentettük, a b oldalát viszont 8 egységgel növeltük. Készítsünk ábrát az oldalak változásáról, és írjuk fel az egyes lépések során keletkezett téglalapok területét!

Megoldás

$$T' = (a - 10) \cdot b$$

$$T_{\text{vég}} = (a - 10) \cdot (b + 8),$$

másként felírva:

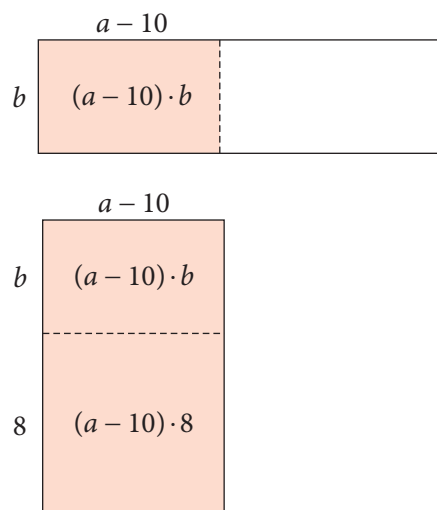
$$T_{\text{vég}} = (a - 10) \cdot b + (a - 10) \cdot 8$$

Bontsuk fel a zárójeleket!

$$T_{\text{vég}} = (a - 10) \cdot b + (a - 10) \cdot 8 = ab - 10b + 8a - 80$$

A kétféleképpen felírt kifejezéseket összehasonlítva megkapjuk, hogy:

$$(a - 10) \cdot (b + 8) = ab - 10b + 8a - 80$$



FELADATOK

1. Írd fel a téglalapok területét kétféleképpen!

Vízszintes oldalak: Függőleges oldalak:

- | | |
|------------|------------|
| a) $a + 2$ | b) $b + 3$ |
| b) $4 + x$ | c) $x + 2$ |
| c) $a + b$ | d) $c + 3$ |
| d) $a + b$ | e) $a + b$ |
| e) $a - 3$ | f) $b - 2$ |

2. Szorozd össze az alábbi kifejezéseket! Ahol tudsz, végezz összevonásokat!

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| a) $(a + 1)(a + 2)$ | b) $(a - 2)(a + 3)$ |
| c) $(2a + 1)(a + 1)$ | d) $(2a - 1)(a - 1)$ |
| e) $(2a - 1)(2a + 1)$ | f) $(a + b)(a + 2)$ |
| g) $(a + 2b)(a + 2b)$ | h) $(2a - 5b)(5a - 2b)$ |
| i) $(a + b)(3a - 2b)$ | j) $(a^2b - ab^2)(a - 1)$ |

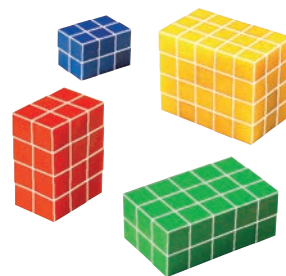
3. Egy e oldalú négyzet egyik oldalát 3 egységgel csökkentettük, a másik oldalát 5 egységgel növeltük.

- a) Szemléltesd egy ábrán a négyzet oldalhosszainak változását!
- b) Írd fel kétféleképpen az így nyert téglalap területét!

4. Az alábbi téglatestek a élű kockákból épültek.

a) Írd fel a téglatestek felszínét és térfogatát!

b) Rajzolj egy akkora téglatestet a füzetbe, amelyik annyi kockából áll, mint az a) részben látható négy téglatest összesen! Írd fel a térfogatát kétféleképpen!



5. Alkoss a kifejezésekből négy darab hármas csoportot úgy, hogy egy csoportban két kifejezés szorzata a harmadikat adja!

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) $(3x + 1)$ | b) $(2x - 4)$ |
| c) $(3 - x)$ | d) $9x^2 + 3x - 6$ |
| e) $(3x - 2)$ | f) $2x^2 - 10x + 12$ |
| g) $(3x - 1)$ | h) $(x - 3)$ |
| i) $-2x^2 + 2x + 12$ | j) $(2x + 4)$ |
| k) $9x^2 - 1$ | l) $(3x + 3)$ |

CSOPORTMUNKA

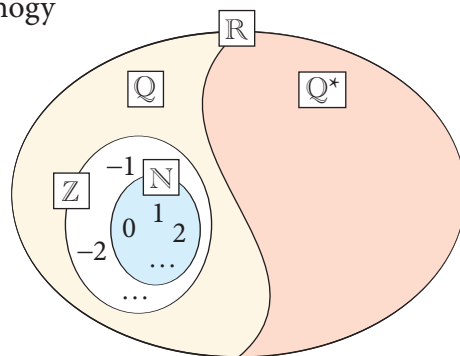
Tekintsük át a tanult számhalmazokat! Olvassátok fel egyesével az $A, B, C, \dots$ pontokban foglaltakat úgy, hogy a csoport többi tagja is értse, majd csukjátok be a tankönyveteket! Az lesz a feladatotok, hogy minél több állítást helyesen megismételjete.

A verseny irányításához válasszatok egy vezetőt, aki elbírálja, hogy jó választ adtatok-e!

Minden jó válasz egy pontot ér. Ha az állítások mellett helyes példákat is felsoroltok, akkor két pontot kaphattok. Az győz, aki a legtöbb pontot szerzi.

Vigyázzatok! Fogalmazzatok pontosan, mert csak akkor fogadható el a választotok.

- A) Leggyakrabban a pozitív egész számokat használjuk. Jele: $\mathbb{Z}^+$ vagy $\mathbb{N}^+$.
- B) A pozitív egész számokat a 0-val kiegészítve a természetes számokat kapjuk. Jele: $\mathbb{N}$.
- C) Két természetes szám összege, illetve szorzata természetes szám.
- D) A kivonás nem mindig végezhető el a természetes számok körében. A természetes számok halmazát a negatív egész számokkal bővítve az egész számok halmazát kapjuk. Jele: $\mathbb{Z}$.
- E) Két egész szám összege, szorzata, illetve különbsége is egész szám lesz. Az előjeles számokkal nagyon körültekintően kell műveleteket végezni.
- F) Az egész számok körében az osztás műveletének eredménye nem mindig lesz egész szám. Ez vezetett el a racionális számokhoz. Jele: $\mathbb{Q}$.
- G) Racionális szám az, amely felírható két egész szám hányadosaként.
- H) A racionális számok tizedes tört alakjáról megmutattuk, hogy
- egész, vagy
 - véges tizedes tört, vagy
 - végtelen szakaszos tizedes tört.
- I) Vannak végtelen nem szakaszos tizedes törtek is. Ezek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, ezért nem racionális számok. Az ilyen tulajdonságú számokat irracionális számoknak nevezzük. Ilyen például a $\sqrt{2}$ vagy a π . Az irracionális számok jele: $\mathbb{Q}^*$.
- J) A racionális és irracionális számok együttesen a valós számok halmazát alkotják. Jele: $\mathbb{R}$.



PÁROS MUNKA

A hatvány fogalmának bevezetése sok előnnyel járt. A számokat a szorzás és az osztás szempontjából áttekinthetőbb módon írhattuk fel prímszámok hatványainak szorzataként, a normálalak pedig lehetővé tette a nagyon nagy és nagyon kicsi pozitív számok rövidebb felírását, illetve a műveletek könnyebb elvégzését. Válaszoljatok a feltett kérdésekre! A társatok véleményezze a választotokat!

A B) pontra adandó válaszokat felváltva mondjátok el egymásnak!

A) Hogyan értelmeztük egy pozitív szám negatív egész kitevőjű hatványát?

B) Ismételjétek át a hatványozásra érvényes azonosságokat!

C) Mit jelent egy szám normálalakja?

EGYÉNI MUNKA

A betűk használatának bevezetése az egyenletek, szöveges feladatok megoldásánál nagyon hasznos. Lapozzatok vissza az algebrai alapfogalmakhoz! Ismételjétek át ezeket! Írj példát az alábbiakra!

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| A) Egynemű algebrai kifejezés | B) Egytagú algebrai kifejezés |
| C) Többtagú algebrai kifejezés | D) Két egytagú szorzása |
| E) Két többtagú szorzása | F) Több egytagú szorzása |

Az utolsó három műveletet a tanult szabályoknak megfelelően végezd el!

FELADATOK

1. Adott az A és B halmaz.

$A = \{14\text{-nél kisebb, } 5\text{-tel nem osztható természetes számok}\}$

$B = \{16\text{-nál nem nagyobb, } 3\text{-mal osztható pozitív egész számok}\}$

- Ábrázold Venn-diagramon a két halmazt!
- Add meg az $A \cap B$ halmazt az elemei felsorolásával!
- Hány elemű az $A \cup B$ halmaz?

2. Legyen $A = \{\text{trapézok}\}$; $B = \{\text{deltoidok}\}$; $C = \{\text{húrnégyszögek}\}$ halmaza. Határozd meg az alábbi halmazokat!

- $A \cap B$
- $B \cap C$
- $A \cap C$

3. Egy osztálykiránduláson mindenki kapott egy kétgombócos fagyit a kirándulásra beszedett osztálypénzből. A 35 fős osztályból 12-en kértek vaníliát, 7-en epret és 20-an se vaníliát, se epret nem kértek.

- Hányan kértek olyan fagyit, amelyik vaníliát vagy epret tartalmazott?
- Hányan kértek vanília-eper összetételű fagyit?

4. Egy iskolában 152-en tudnak úszni, korcsolyázni pedig 88 tanuló tud. 45-en úszni és korcsolyázni is tudnak.

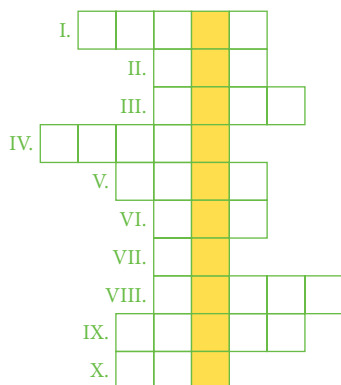
- Hányan tudnak úszni, de korcsolyázni nem.
- Az iskola tanulói közül 142-en se korcsolyázni, se úszni nem tudnak. Hányan járnak az iskolába?

5. Egy iskolai táborban zenefelismerő (audiokvíz), illetve filmfelismerő (videokvíz) vetélkedőt tartottak. Minden jó válaszáért egy pont járt. A nyolcadikosok csapata 18 pontot, a hetedikesek csapata 16 pontot szerzett. Mindkét csapat 8 kérdésre adott jó választ. Hány kérdés volt a vetélkedőn?

6. Végezd el az alábbi műveleteket!

- | | |
|--|--|
| a) $-13 - [-27 + (-41)]$ | b) $(-5) \cdot [12 - (-18)] + (-96) : (-8)$ |
| c) $21\frac{1}{4} + 32\frac{3}{10} - 16\frac{3}{4} + 29\frac{7}{10}$ | d) $\frac{16}{25} + 3,92 - \frac{53}{100}$ |
| e) $1,2 - \left[\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{6}{5}\right] : 1,5$ | f) $3\frac{2}{15} + \frac{1}{9} : 1\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$ |

7. Töltsd ki az alábbi keresztrejtvényt, és add meg a megfejtést! Dolgozz a füzetedben!



- I. Az első öt természetes szám.
- II. A -917 ellentettje.
- III. $8983 + (-517)$
- IV. 111^2
- V. Az első négy prímszám.
- VI. Ennek a számnak a 27-szerese a 15 984.
- VII. Ahányadik hatványa a 2-nek a 4096.
- VIII. Az a szám, melynek a normálalakja $2,6943 \cdot 10^4$.
- IX. A 13^4 szám értéke.
- X. A $\left(\frac{3^6 \cdot 3^2}{3^7}\right)^5$ kifejezés értéke.

A megoldáshoz kapcsolódik Szász Pál matematikus 1952-ben írt verse is. Vajon hogyan? Nézz utána az interneten!

„Nem a régi s durva közelítés,
Mi szótól szóig így kijön
Betűiket számlálva.
Ludolph eredménye már,

Ha itt végezzük húsz jegyen.
De rendre kijő még tíz pontosan,
Azt is bizvást ígérhetem.”

8. Melyik a nagyobb:

- a) $\frac{5}{7}$ -nek a fele vagy $\frac{5}{7}$ -nek az $\frac{1}{2}$ -szerese?
- b) a 0,125-nél $\frac{5}{8}$ -dal nagyobb szám vagy a $\frac{15}{4}$ -nek a harmada?
- c) $2\frac{1}{3}$ reciproka vagy $\frac{2}{9}$ és $\frac{4}{3}$ hányadosa?

9. Igaz-e, hogy két racionális szám

- a) összege; b) különbsége; c) szorzata d) hányadosa

is racionális szám? Melyik esetben kell valamilyen kikötést tenned?

10. Számold ki! Ha az eredmény nem egész szám, akkor kerekítsd két tizedes jegyre!

- a) $\sqrt{1}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{4}$ e) $\sqrt{9}$ f) $\sqrt{16}$
- g) $\sqrt{25}$ h) $\sqrt{36}$ i) $\sqrt{81}$ j) $\sqrt{121}$ k) $\sqrt{12321}$ l) $\sqrt{1234321}$

11. Számold ki! Ha az eredmény nem egész szám, akkor kerekítsd úgy, hogy három nem nulla tizedesjegy legyen a számban!

- a) $\sqrt{10\,000}$ b) $\sqrt{1000}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{10}$ e) $\sqrt{1}$
- f) $\sqrt{0,1}$ g) $\sqrt{0,01}$ h) $\sqrt{0,001}$ i) $\sqrt{0,0001}$ j) $\sqrt{0,00001}$

12. 📡 Mekkora a kocka éle, ha a felszíne

- a) 96 cm^2 ; b) 726 m^2 ; c) 1014 dm^2 ; d) $2,94 \text{ km}^2$; e) $13,5 \text{ m}^2$; f) $0,06 \text{ mm}^2$?

13. 📡 Írd fel az alábbi kifejezéseket egyetlen szám hatványaként!

- a) $9^4 \cdot 9^7$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^9$ c) $\frac{6^{15}}{6^7}$ d) $\left(\frac{5}{7}\right)^8 : \left(\frac{5}{7}\right)^2$ e) $(8^{10})^5$
 f) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)^7$ g) $8^6 \cdot 9^6$ h) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$ i) $\frac{14^6}{7^6}$ j) $\frac{65^0}{19^0}$

14. 📡 Írd fel a felsorolt bolygók Naptól mért átlagos távolságát normálalakban!

- a) Föld: 149 600 000 km b) Mars: 227 900 000 km
 c) Vénusz: 108 200 000 km d) Jupiter: 778 300 000 km
 e) Neptunusz: 4 496 600 000 km f) Plútó: 5 900 000 000 km

15. 📡 Írd át tört alakba a megadott hatványokat, majd számítsd is ki az értéküket! Állítsd a számokat csökkenő sorrendbe!

- a) 2^{-6} b) 4^{-3} c) $(-5)^{-2}$ d) $(-3)^{-4}$

16. 📡 Keresd meg a párokat!

a)

Az összegük 100			
11,1	0,9	48,1	10,1
59,6	48,2	9,9	51,8
89,9	49,4	40,4	88,9
99,1	51,9	90,1	50,6

b)

Egyenlők			
100	125	64	6^3
3^4	8^3	1^{10}	81
2^6	1	5^3	1024
512	10^2	2^{10}	216

c)

Szorzatuk 1			
10^{-3}	2^{-3}	25	27
7^{-1}	2^3	5^3	0,125
0,008	7	5^{-2}	10
1000	3^{-3}	2^3	10^{-1}

d)

Összegük 1			
10^{-1}	0,8	0,5	0,45
0,54	0,99	10^{-2}	0,55
0,999	0,46	0,5	0,9
2^{-1}	0,5	10^{-3}	5^{-1}

e)

Egyenlők			
10 000	12 500 000	$1,25 \cdot 10^8$	125 000
10^4	10^8	10 000 000	10^9
1 250 000	100 000 000	1 000 000 000	$1,25 \cdot 10^5$
10^7	$1,25 \cdot 10^6$	$1,25 \cdot 10^7$	125 000 000

f)

Egyenlők			
$2a \cdot (a + 1)$	$a^2 - 2a + 1$	$a \cdot a$	$2a \cdot (3a + 8)$
a^2	$2a^2 + 2a$	$(a - 1)(a - 1)$	$(a + 2)(a + 2)$
$(a - 1)(a + 1)$	$a^2 + 4a + 4$	$a^2 + 8a + 15$	$16a + 6a^2$
$(a - 3)(a - 3)$	$(a + 3)(a + 5)$	$a^2 - 6a + 9$	$a^2 - 1$

17. Végezd el a műveleteket! Használd a számok normálalakját! Következtess az a) feladat eredményéből a többire!

- a) $0,0056 \cdot 263\,000$; b) $0,000\,056 \cdot 2630$; c) $0,000\,000\,056 \cdot 263$; d) $0,56 \cdot 263\,000\,000$;
e) $147\,280 : 26\,300$; f) $147\,280\,000 : 263$; g) $147\,280 : 56\,000\,000$; h) $14\,728\,000 : 263\,000\,000$.

18. Egy kocka élének hossza a egység. Számold ki a felszínét és a térfogatát! Add meg az eredményeket normálalakban!

- a) $a = 4,13 \cdot 10^7$ b) $a = 3,92 \cdot 10^{-7}$

19. Végezd el a felsorolt műveleteket, add meg a legegyszerűbb alakot, majd számítsd ki a ki-fejezések helyettesítési értékét, ha

$$x = \frac{1}{2} \text{ és } y = -1!$$

- a) $4x^2 \cdot 2y^4 \cdot 7x \cdot 5y^3$ b) $6x^3 \cdot y^4 \cdot 8y^9 \cdot 3x$
c) $\frac{18x^2y}{7x} \cdot \frac{21y^4}{6xy}$ d) $\frac{5xy^3}{4x^3} \cdot \frac{12x^6y^2}{10xy^4}$

20. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket!

- a) $\frac{5a}{15ab}$ b) $\frac{14a - 21b}{7}$ c) $\frac{3a + 9}{a + 3}$
d) $\frac{9a + 12ab}{3ab}$ e) $\frac{6a - 2a^2}{10a^2 - 8a}$ f) $\frac{10ab + 5b}{20a^2 + 10a}$

21. Igaz vagy hamis? Javítsd ki a hibásakat a füzetedben!

- a) $(a + 1)(2a + 1) = 2a^2 + 2a + 1$ b) $(3a + 2)(3 - a) = 7a - 3a^2 + 6$
c) $(2 - a)(a - 2) = -4 - a^2$ d) $(a + 2b)(a - b) = a^2 - ab + 2b^2$
e) $(e + 3)(e - 3) = e^2 - 9$ f) $(f + 1)(f + 2) = f^2 + 3$
g) $\left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} + x + x^2$ h) $\left(1 + \frac{x}{2}\right)(2 + x) = 2 + 2x + 0,5x^2$

Miután Judit tanárnő lenyomta az entert, a szkóp áramkörei működésbe léptek, s a gyerekek előtt egy emberalak hologramja körvonalazódott.

Sziasztok!

Örülök, hogy fogadtad hívásunkat!

Gyerekek, ő itt Berta 25 év múlva.

Nyilvánvaló volt...

Később mindenki kérdezhet, de én kezdem: használsz a matematikát a munkád során?

Természetesen.

25 év, mi?

II. Geometriai transzformációk

Belsőépítésként át kell látnom a tervrajzokat, még akkor is, ha azok csak vázlatosak, skiccek. Éreznem kell az arányokat, és kalkulációkat is kell készítenem. Persze mindezt virtuálisan is át kell látnom és be kell mutatnom a megrendelőnek.

Tényleg belsőépítész leszek?

Igen, de először mást tanultam. Ott is volt egy csomó matek, főleg táblázatkezelés és statisztika, de aztán megismerkedtem az egyetemen egy fiúval, és sok minden megváltozott.

Ki az?

Majd meglátod!

De mikor?

Légy türelemmel!

Megéri? Ő az?

Idővel kiderül...

CSOPORTMUNKA



Tervezzetek padtársaddal egy szép síkidomot egy írólapra! Tegyetek az írólap alá egy másik lapot, és a kettőből egyszerre vágjátok ki a megtervezett síkidomot! Illesszétek össze a két kivágott darabot úgy, hogy először tengelyesen tükrös, aztán középpontosan tükrös ábrát kapjatok! A látottak alapján gyűjtsétek össze a füzetetekbe a tengelyes és a középpontos tükrözés előző években tanult tulajdonságait!

A tengelyes és a középpontos tükrözés esetén a sík minden pontjához hozzárendeltünk egy pontot a megadott utasítással. Az ilyen hozzárendeléseket **geometriai transzformációknak** nevezzük. A **transzformáció** átalakítást, átváltoztatást jelent.

A síkon átalakítást végzünk, hiszen a pontok helyét egy utasítással megváltoztatjuk. A transzformáció a sík egy tetszőleges P pontjához a P' pontot rendeli. Ekkor a P' pontot P képének mondjuk.

1. PÉLDA

Elevenítsük fel a tengelyes és a középpontos tükrözés kivitelezését! Adjuk meg egy tetszőleges $ABCDE$ ötszög képét, ha

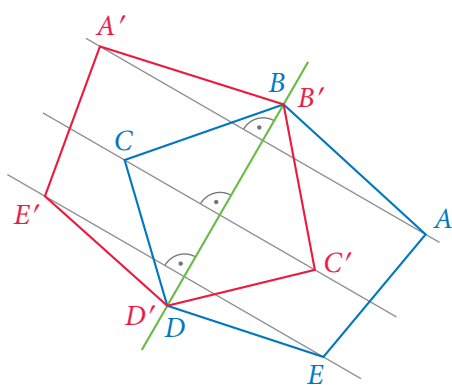
a) a BD átlóegyenésre;

b) a CD oldal K felezőpontjára tükrözzük!

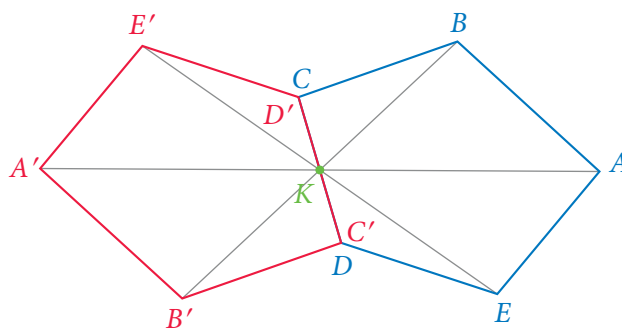
Megoldás

A két ábra mutatja a tetszőlegesen felvett ötszög megfelelő képét.

a)



b)



A tengelyes és a középpontos tükrözésről tavaly tanultuk, hogy távolságtartó transzformációk, azaz bármely szakasznak és képének hossza megegyezik. Az ilyen transzformáció neve egybevágósági transzformáció, röviden **egybevágóság**. Az egybevágóság jele: $\cong$.

A tengelyes és a középpontos tükrözés is egybevágósági transzformáció.

Az előző példában a két sokszög egybevágó, ezt így írhatjuk: $ABCDE \cong A'B'C'D'E'$.

Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy két síkidom akkor egybevágó, ha egymásra fektetve tökéletesen fednék egymást.

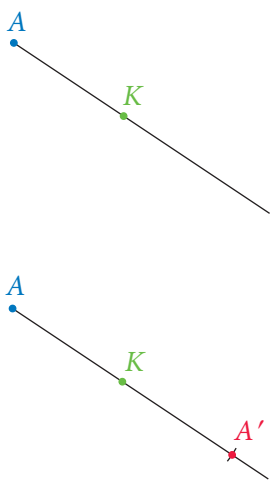
A tengelyes tükrözés és a középpontos tükrözés megadása nagyon hasonlít egymáshoz. Vizsgáljuk meg a két transzformáció kapcsolatát!

Középpontos tükrözés:

Rögzítenünk kell egy K pontot. Ez lesz a tükrözés középpontja.

Egy tetszőleges A pont képét úgy kapjuk, ha az A pontot összekötjük a K középponttal, és az AK szakaszt felmérjük az összekötő egyenes túloldalára (A').

Középpontos tükrözésnél a K pont képe önmaga, és további olyan pontok nem léteznek, amelyek egybeesnének a képükkel.

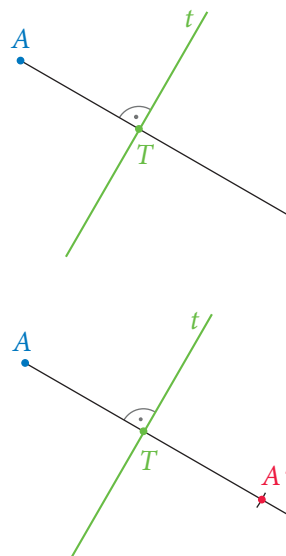


Tengelyes tükrözés:

Rögzítenünk kell egy t egyenest. Ez lesz a tükrözés tengelye.

Egy tetszőleges A pont képét úgy kapjuk, ha az A pontból merőlegest állítunk a t tengelyre, és az AT szakaszt felmérjük a merőleges egyenes túloldalára (A').

Tengelyes tükrözésnél a tengely bármely pontjának képe önmaga, és további olyan pontok nem léteznek, amelyek egybeesnének a képükkel.



Transzformációkat a koordináta-rendszerben is meg tudunk adni.

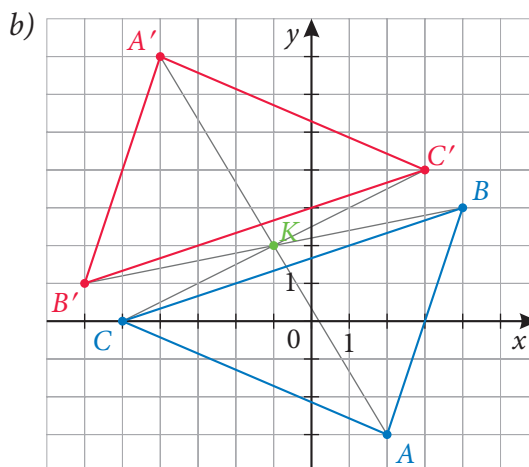
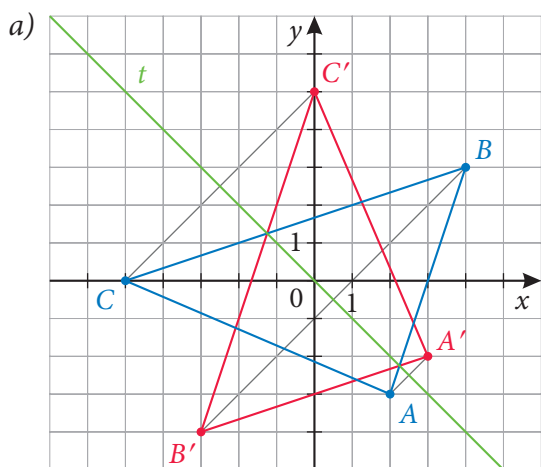
2. PÉLDA

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az $A(2; -3)$, $B(4; 3)$, $C(-5; 0)$ koordinátákkal megadott háromszöget! Adjuk meg az ABC háromszög képét, ha tükrözzük

a) a második negyed szögfelezőjére;

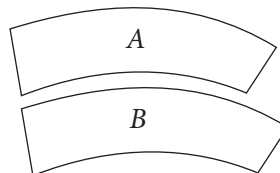
b) a $K(-1; 2)$ pontra!

Megoldás

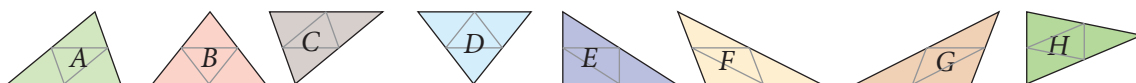


FELADATOK

1. Egybevágók-e a képen látható síkidomok?



2. Válogasd ki a tükros háromszögpárokat!



3. Rajzolj vonalzóval egy négyszöget a füzetedbe! Válaszd ki az egyik oldalát tengelynek, az egyik csúcsát középpontnak. Szerkeszd meg a négyszög tengelyes és középpontos tükörképét!

4. Ábrázold koordináta-rendszerben az $A(-2; -2)$, $B(4; 2)$, $C(3; 4)$, $D(-3; 2)$ koordinátákkal megadott négyszöget! Add meg az $ABCD$ négyszög

a) x tengelyre vett $A'B'C'D'$ tükörképét;

b) y tengelyre vett $A''B''C''D''$ tükörképét!

5. Használd az előző feladat pontjait! Milyen négyszög

a) a $BCC'B'$;

b) a $CD''DC''$;

c) az $ABCB''$?

6. Ábrázold koordináta-rendszerben a $P(1; -3)$, $Q(5; 1)$, $R(-1; 4)$, $S(-3; 0)$ koordinátákkal megadott négyszöget! Add meg a $PQRS$ négyszög

a) origóra vett $P'Q'R'S'$ tükörképét;

b) $K(2; 1)$ pontra vett $P''Q''R''S''$ tükörképét!

7. Használd az előző feladat pontjait! Milyen négyszög

a) a $PQP'Q'$;

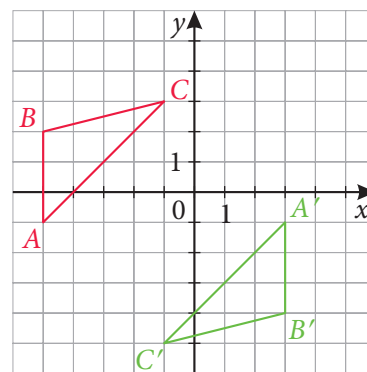
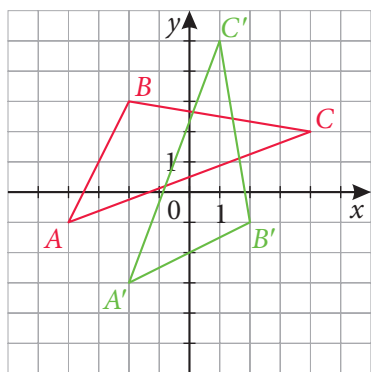
b) az $SQS''Q''$;

c) a $KQS''P''$?

8. Az első ábrán látható ABC és $A'B'C'$ háromszög tengelyesen tükros, a második ábrán középpontosan tükros.

a) Add meg a tükörtengely és a koordináta-rendszer tengelyeinek metszéspontját!

b) Add meg a középpontos tükrözés középpontjának koordinátáit!



1. PÉLDA

Kössük össze szakaszokkal az ábra pontjait! Az összekötés utasításait ilyen mondatokkal adjuk meg: Kösd össze a P pontot a Q ponttal!

Ezt a mondatot röviden így fogjuk írni: $\overrightarrow{PQ}$, az ábrán pedig így rajzoljuk le:



Hogyan néz ki az ábra a következő utasítások végrehajtása után?

a) $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{FI}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{JG}$, $\overrightarrow{GC}$

b) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{GJ}$, $\overrightarrow{JF}$

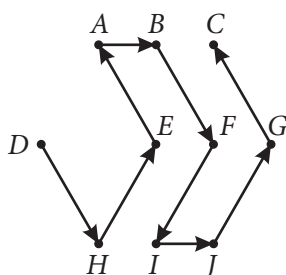
A B C

D E F G

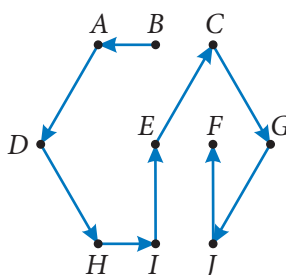
H I J

Megoldás

a)



b)



Az ábrán bejelölt szakaszoknak irányítása is van. A szakasz egyik végét **kezdőpont**nak, a másikat **végpont**nak mondjuk. A PQ irányított szakasszal **vektor**t szemléltetünk, és így jelöljük: $\overrightarrow{PQ}$. A vektorokat általában kisbetűvel szoktuk jelölni: $\mathbf{a}$, $\vec{a}$, $\underline{a}$.

Két irányított szakaszt egyenlőnek mondunk, ha egyenlő hosszúságúak, párhuzamosak és egyirányúak. Ha két irányított szakasz párhuzamos, és hosszuk egyenlő, de irányuk ellentétes, akkor ellentett vektorokat szemléltető irányított szakaszokról beszélünk. Például a $\overrightarrow{PQ}$ ellentettje a $\overrightarrow{QP}$. Ezt írásban így jelöljük: $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.

2. PÉLDA

Hasonlítsuk össze páronként az ábrán szemléltetett vektorokat!

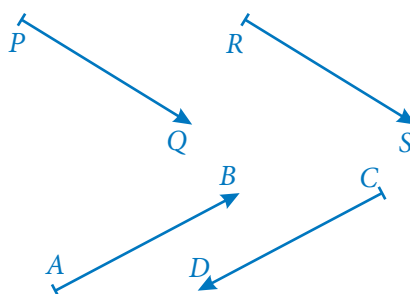
Megoldás

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, mert egyirányúak, párhuzamosak és a hosszuk is egyenlő.

$\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{AB}$, mert a hosszuk ugyan egyenlő, de nem párhuzamosak.

Ugyanezzel az indoklással: $\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{RS} \neq \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{RS} \neq \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ (vagyis $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ egymás ellentettje), mivel párhuzamosak, hosszuk egyenlő, de irányuk ellentétes.



3. PÉLDA

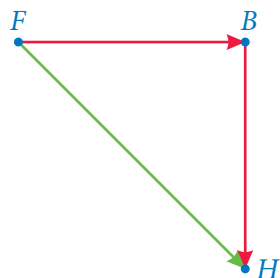
Sík terepen egy fa mellett állunk. Szemléltessük vektorokkal a következő utasításokat ugyanazon az ábrán!

- 5 métert keletre haladva egy bokorhoz jutunk, ahonnan 5 métert délre haladva eljutunk egy házikóhoz.
- A fától egyenesen a házikóhoz megyünk.

Megoldás

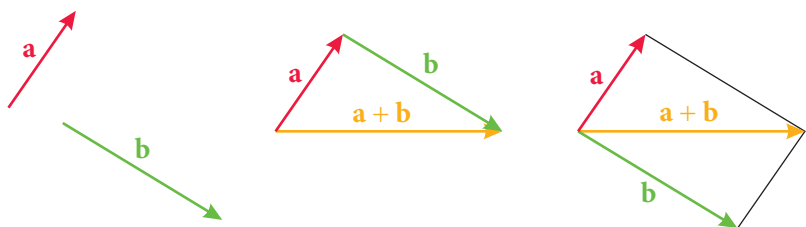
Legyen a fa helye a rajzunkon az F pont, a bokoré a B , a házikóé a H .

- Az utasítást a két piros vektor szemlélteti.
- Az utasítást a zöld vektor szemlélteti.



Az előző példa adja az ötletet, hogy **két vektor összegéről** beszéljünk. A látottakat röviden így írhatjuk le: $\vec{FB} + \vec{BH} = \vec{FH}$.

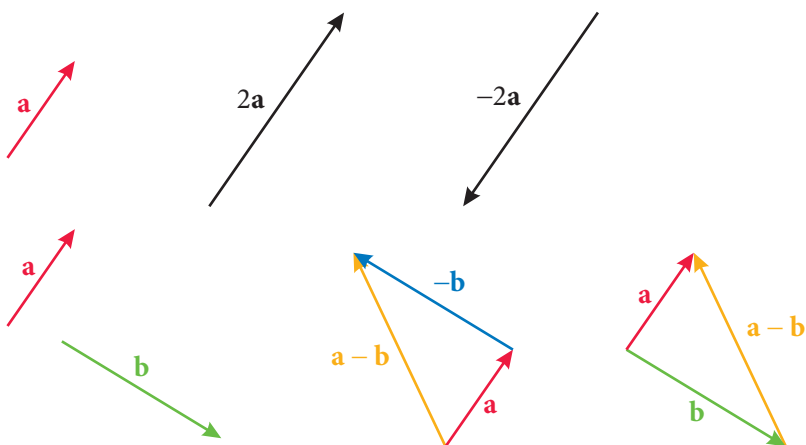
Az ábrák mutatják, hogyan kaphatjuk meg két tetszőleges vektor összegét.



Nézzük a következő összegeket:

$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, $\mathbf{a} + \mathbf{a}$, $(-\mathbf{a}) + (-\mathbf{a})$.

Ezeket röviden $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a}$, $-2\mathbf{a}$ alakban is írhatjuk.



Ilyen módon beszélhetünk vektorok kivonásáról és vektorok számmal való szorzásáról is.

Az ábrák mutatják, hogyan kaphatjuk meg két tetszőleges vektor különbségét:

Az $\mathbf{a} - \mathbf{a}$ különbség miatt szükségünk van a nullvektorra is. Jelölése: $\mathbf{0}$, $\vec{0}$, $\mathbf{0}$.

A nullvektor hossza 0, és egyenlő az ellentettjével. A nullvektor minden vektorral párhuzamos és minden vektorra merőleges.

A fentiek alapján beláthatók a következő összefüggések: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Játék

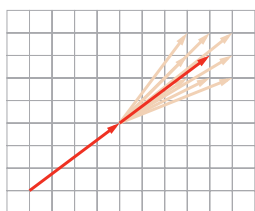
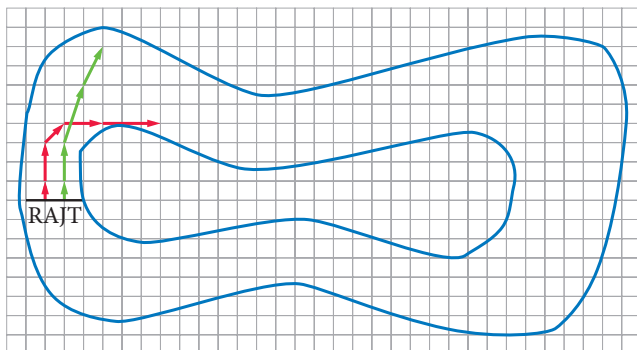
Rajzoljatok egy autópályát a füzetetekbe! Tűntessétek fel rajta a rajtvonalat, amely egyben a cél is lesz! A két versenyautó tartózkodási helyét az ábra rajtvonalánál a két színes, egység hosszúságú vektor végpontja szemlélteti.

A versenyzők felváltva lépnek a pályán. Egy lépésnél kilenc rácspont közül választhatunk úgy, hogy az utolsónak rajzolt vektorunkat még egyszer az előzőhöz fűzzük, s ennek a végpontja, illetve a körülötte lévő bármelyik nyolc pont lehet az új vektor végpontja.

Ezek valamelyikét megrajzoljuk - ennek a vektornak a végpontja fogja mutatni az autónk helyét.

Ha valaki kisodródott a pályáról, akkor egyszer kimarad a lépésből, és a kisodródás helyétől ismét egy egység hosszúságú vektorral folytathatja a versenyt. Menet közben nem szabad a másik játékos tartózkodási helyére lépni. Az ábrán a piros autó első öt és a zöld autó első négy lépését látjuk. A zöld autó biztosan kisodródik a következő lépésnél.

Próbáljátok ki a játékot!



FELADATOK

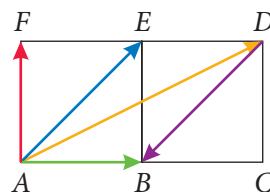
- Rajzolj a füzetedbe két-két vektort, amelyek
 - egyenlő hosszúak, de nem egyenlők;
 - párhuzamosak és nem egyenlők;
 - párhuzamosak, egyenlő hosszúak, de nem egyenlők;
 - egyenlők!

- Rajzolj a füzetedbe két tetszőleges **a** és **b** vektort! Szerkeszd meg a következő vektorokat:
 - $\mathbf{a} + \mathbf{b}$;
 - $\mathbf{a} - \mathbf{b}$;
 - $\mathbf{b} - \mathbf{a}$;
 - $3\mathbf{a}$;
 - $-2\mathbf{b}$;
 - $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$!

- Rajzold meg koordináta-rendszerben a $\overrightarrow{PQ}$ -t, ha $P(2; 3)$, $Q(4; 6)$! Hol van a $\overrightarrow{PQ}$ -val egyenlő vektor
 - B végpontja, ha kezdőpontja $A(-3; 1)$;
 - C kezdőpontja, ha végpontja $D(4; 1)$?

- Rajzold meg koordináta-rendszerben az $\overrightarrow{AB}$ -t, ha $A(3; 2)$, $B(-1; 4)$! Hol van az $\overrightarrow{AB}$ ellenített vektorának
 - P végpontja, ha kezdőpontja $Q(-4; 3)$;
 - R kezdőpontja, ha végpontja $S(2; -1)$?

- Írj összefüggéseket a megadott vektorok között az ábra alapján!



- Rajzolj egy ABCD paralelogrammát! Igaz-e, hogy
 - $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;
 - $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;
 - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$;
 - $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB}$?

Ez a szó mindenkinek ismerős, hiszen a mindennapokban is használjuk. Odébb tolhatunk például egy talicskát, egy autót vagy egy szekrényt.



Azt, hogy honnan hová szeretnénk eltolni a tárgyakat, vektorokkal tudjuk megadni.

A **$\mathbf{v}$ vektorral megadott eltolás**nál bármely A ponthoz azt az A' pontot rendeljük, amelyre $\mathbf{v} = \overrightarrow{AA'}$. Ha az eltolás vektora a nullvektor, akkor a sík minden pontja helyben marad.

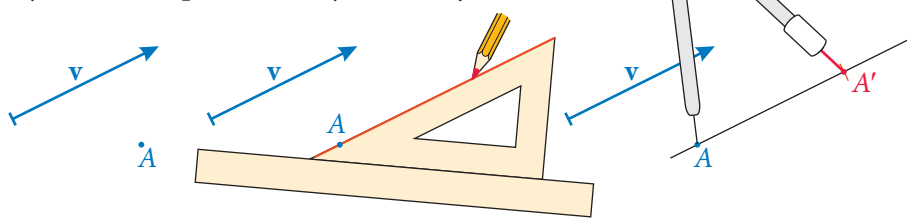
Ezzel megadtunk egy új egybevágósági transzformációt, az eltolást. Bár a transzformációt térben is értelmezhetnénk, most csak síkban fogunk vizsgálni.

1. PÉLDA

Rajzoljuk meg az A pont eltolt képét, ha az eltolás $\mathbf{v}$ vektorát szemléltető irányított szakasz $\overrightarrow{PP'}$! A rajzoláshoz használjuk a derékszögű vonalzóunkat is!

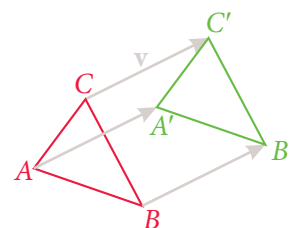
Megoldás

Rajzoljuk meg a derékszögű vonalzó csúsztatásával az A pontra illeszkedő, $\mathbf{v}$ -vel párhuzamos egyenest! Vegyük körzőnyílásba az adott vektor hosszát, és mérjük fel az A pontból a kijelölt irányba! Ekkor kapjuk az A' pontot, ami az A pont eltolt képe lesz.



A leírtak alapján egy ABC háromszög csúcsait is eltolhatjuk egy megadott $\mathbf{v}$ vektorral. Az így kapott pontok összekötésével az ABC háromszög eltolt képét kapjuk.

Figyeljük meg az ábrát, és fogalmazzuk meg az eltolás legfontosabb tulajdonságait!



Az eltolás

- egyenestartó, távolságtartó, szögtartó transzformáció,
- a körüljárási irányt megtartja,
- hatására bármely egyenes (félegyenes, szakasz) párhuzamos lesz a képével,
- nem rendelkezik helyben maradó, azaz fixponttal, ha az eltolás vektora nem a nullvektor.

Eltolással készített mintákat megfigyelhetünk a környezetünkben is.

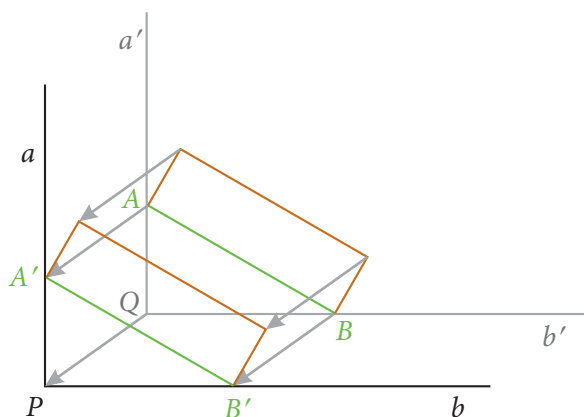
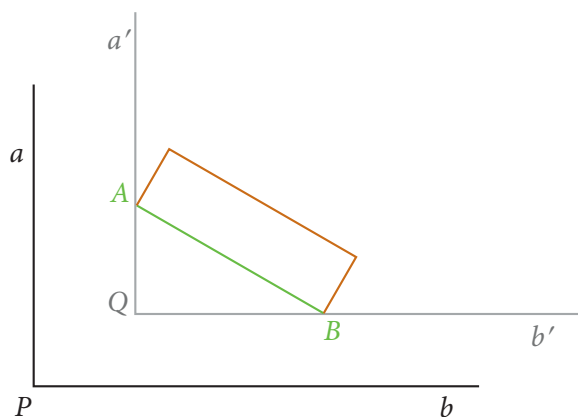
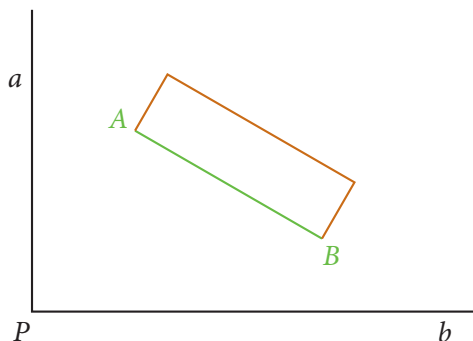


2. PÉLDA

A rajz felülnézetben mutatja egy szoba sarkát és azt a szekrényt, amelyet ebben a helyzetben kellene betolni a sarokba. Adjuk meg az eltolás vektorát szemléltető irányított szakaszt!

Megoldás

Az eltolás után az A pont A' képe az a egyenesre, a B pont B' képe a b egyenesre kellene kerüljön. Szerkesszünk az A ponton át egy a -val, a B ponton át egy b -vel párhuzamos egyenest! Ezek metszéspontja legyen Q . A $\overrightarrow{QP}$ segítségével mindent a helyére tolhatunk, ahogyan ezt az ábra is mutatja.



FELADATOK

1. Rajzolj egy ABC háromszöget a füzetedbe! Told el a háromszöget úgy, hogy az eltolás vektorát szemléltető irányított szakasz legyen

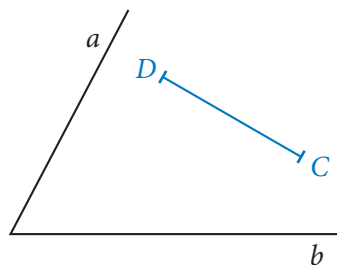
- a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{BA}$;
c) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$; d) $2 \cdot \overrightarrow{AB}$!

2. Rajzolj egy $ABCD$ paralelogrammát a füzetedbe! Az átlók metszéspontja legyen K . Told el a paralelogrammát úgy, hogy az eltolás vektorát az alábbi irányított szakaszok szemléltessék:

- a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{AC}$;
c) $\overrightarrow{AK}$; d) $\overrightarrow{KB}$!

3. Rajzolj egy szakaszt és egy rá nem illeszkedő pontot! Told el a szakaszt úgy, hogy a felezőpontja az adott pontba kerüljön!

4. Adva van az $ABCD$ paralelogramma C és D csúcsa. Az A csúcsa az a , a B csúcsa a b félegyenesre illeszkedik. Szerkeszd meg a paralelogrammát!

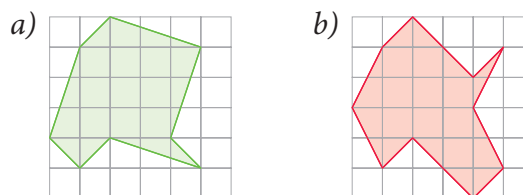


5. Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza 10 cm és 3 cm, szárainak hossza pedig 6,5 cm és 7,5 cm. Szerkeszd meg a trapézt!

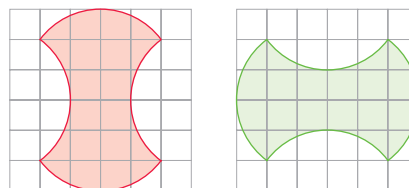
6. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög középpontja legyen K , a területe pedig 747 cm^2 . Told el a hatszöget az $\overrightarrow{AK}$ -val!

- a) Milyen síkidom lesz az eredeti és a képként kapott hatszög közös része?
b) Mekkora a közös rész területe?
c) Mekkora a két hatszög egyesítésével kapott síkidom területe?

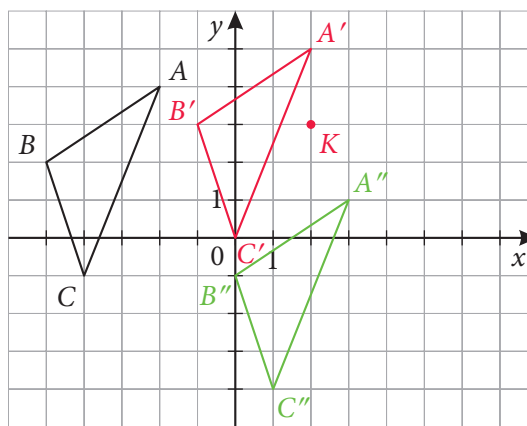
7. Készíts mintát eltolással a füzetedben lévő négyzethálóra a megadott minták segítségével!



8. Készíts mintát a füzetedben lévő négyzethálóra a két különböző színű csempe felhasználásával! A minta eltolás segítségével alakuljon ki! Az ábrádon jelöld az eltolás vektorát!



9. Az ABC , az $A'B'C'$ és az $A''B''C''$ háromszögek egymás eltoljtjai.



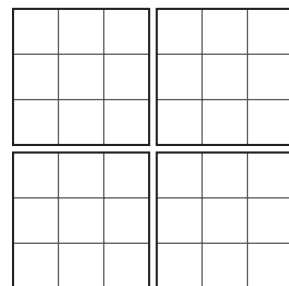
- a) Add meg annak a K kezdőpontú vektornak a P végpontját, amely az ABC háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe tolja!
b) Add meg annak a K végpontú vektornak a Q kezdőpontját, amely az $A''B''C''$ háromszöget az ABC háromszögbe tolja!

Játék

A következő játékban fontos szerephez jut a forgatás.

Négy egyforma, háromszor hármass négyzetrácsra van szükség, amelyeket az ábrán látható módon kell egymás mellé helyezni. A játékot ketten játszhatjátok. Az lesz a győztes, aki eléri, hogy valamelyik sorban, oszlopban vagy átlóban a saját jeléből ($\times$ vagy $\bigcirc$) négy legyen egymás mellett.

Miután valaki elhelyezte a saját jelét a játéktáblán, valamelyik háromszor hármass négyzetet el kell forgatnia a középpontja körül úgy, hogy a forgatás után a játéktábla alakja nem változhat meg!



A bevezető játékban alkalmaznunk kellett a forgatást. A mindennapokban is sok helyen találkozunk ezzel a fogalommal.



Forgószék



Forgódobos mosógép

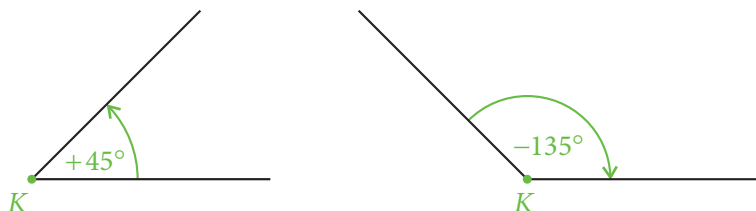


Szélforgó



Forgó óriáskerék

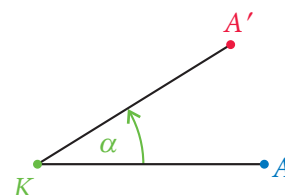
Adjunk meg egy K pontot a síkban, és adjunk meg egy α szöget az irányával együtt! Az óramutató járásával ellentétes irányú szöget pozitívnak, az óramutató járásával megegyező irányút negatívnak nevezzük.



Egy K pont körüli α szögű elforgatás esetén a K pont helyben marad.

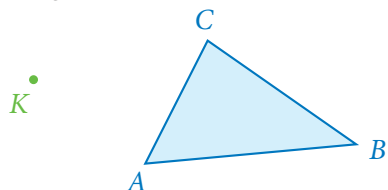
Egy K pontra nem illeszkedő A pont képe az az A' pont lesz, amelyre $KA = KA'$, és $\angle AKA'$ szög nagysága és iránya egyenlő az elforgatás α szögének nagyságával és irányával.

Ezzel megadtunk a síkban egy **adott pont körüli forgatást**, amely szintén egybevágósági transzformáció.



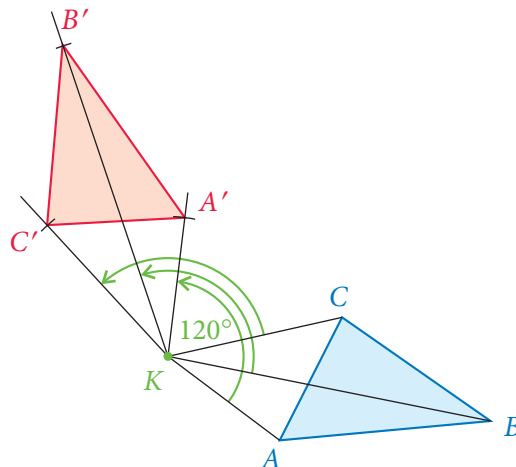
1. PÉLDA

Forgassuk el az ABC háromszöget a K pont körül $+120^\circ$ -kal!



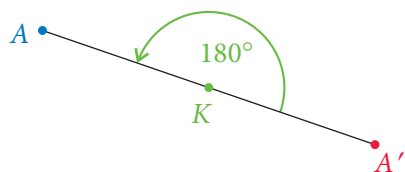
Megoldás

A KA , KB , KC félegyenesekhez megszerkesztjük a 120° -os szög hiányzó szárát. Ezekre a K -ból felmérjük a KA , KB , illetve KC szakaszokat. Így kapjuk az A' , B' , C' pontokat.



Tapasztalataink alapján felsoroljuk a pont körüli elforgatás legfontosabb tulajdonságait:

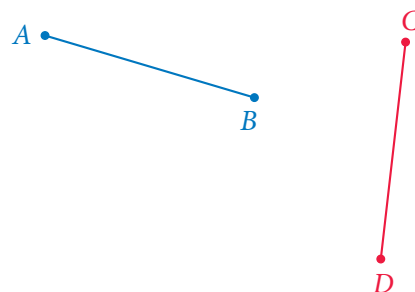
- Egyenestartó, távolságtartó, szögtartó transzformáció.
- A körüljárási irányt megtartja.
- A forgatás csak a K pont helyét nem változtatja meg, vagyis a forgatásnak egy fixpontja van.
- Az egyenes és a képe által bezárt szög a forgatás szögével egyenlő.



Figyeld meg, hogy a 180° -os forgatás a már korábban tanult középpontos tükrözéssel megegyező transzformáció lesz!

2. PÉLDA

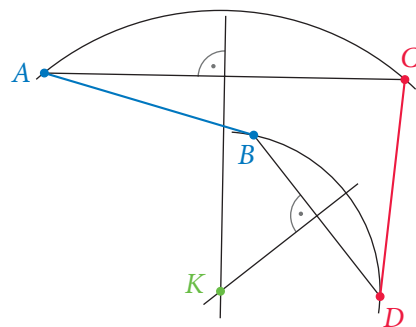
Két egyenlő hosszúságú, egymással nem párhuzamos szakaszt rajzoltunk a lapunkra. Szerkesszük meg azt a K pontot, amely körül az egyik szakaszt úgy forgathatjuk a másikba, hogy az A pont a C pontba, a B pont a D pontba kerül!



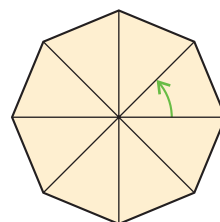
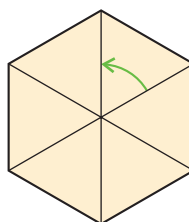
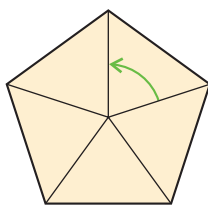
Megoldás

Az A pont az ismeretlen K középpontú körvonalon át fog fordulni a C pontba. Ezek szerint AC egy húr lesz az ismeretlen körben. A húr felezőmerőlegesén rajta van a kör K középpontja. Hasonlóan BD is húr lesz egy másik ismeretlen körben, amelynek szintén K a középpontja. Vagyis BD felezőmerőlegesére is illeszkedik a K pont.

A két felezőmerőleges metszéspontja adja a keresett K pontot.



Vannak olyan síkbeli alakzatok, amelyekhez megadhatunk egy olyan forgatási középpontot, hogy a (nem 360° -os) forgatás után az alakzat önmagába forduljon. Ezeket az alakzatokat **for-gásszimmetrikusnak** mondjuk. Ilyen forgásszimmetrikus alakzatok például a szabályos sokszögek is.



A forgásszimmetriát megtaláljuk a természetben, illetve tárgyaink díszítésénél is.

FELADATOK

1. Rajzolj a füzetedbe egy négyzetet! Forgasd el 90° -kal az egyik oldalának felezőpontja körül! Milyen síkidom lesz az eredeti és a képként kapott négyzet közös része?

2. Rajzolj a füzetedbe egy rombuszt! Forgasd el az átlók metszéspontja körül -90° -kal! Milyen síkidom lesz az eredeti és a képként kapott rombusz közös része?

3. Egy rombuszt az átlóinak metszéspontja körül 90° -kal elforgattak. Az eredeti és a képként kapott rombusz közös része szabályos nyolcszög lett. Mekkora az eredeti rombusz szögei?

4. Add meg azokat a 0° és 360° közé eső szögeket, amelyekkel egy szabályos

a) hatszöget;

b) nyolcszöget

a középpontja körül elforgatva az eredeti és a képként kapott sokszögek egybeesnek!

5. Rajzolj egy kört a füzetedbe! Forgasd el ezt a kört a körvonal valamely K pontja körül 60° -kal, 120° -kal, -60° -kal és -120° -kal is! Végezetül tükrözd az eredeti kört a K pontra! Vizsgáld meg az így kapott ábrát! Tengelyesen szimmetrikus? Középpontosan szimmetrikus? Forgásszimmetrikus?

A *hasonló* és a *hasonlít* szavakat rendszeresen használjuk a mindennapjainkban, de ilyenkor nem feltétlenül a matematikai értelemben. Megtalálhatók magyar szólásokban és közmondásokban is:

Hasonló a hasonlóval hamar összebarátkozik.

Hasonlít, mint egyik tojás a másikhoz.

Szúnyogot a bikához ne hasonlítsd!

Megismerkedünk egy új transzformációval, a hasonlósággal. Nézzük először a hasonlóság egy speciális változatát!



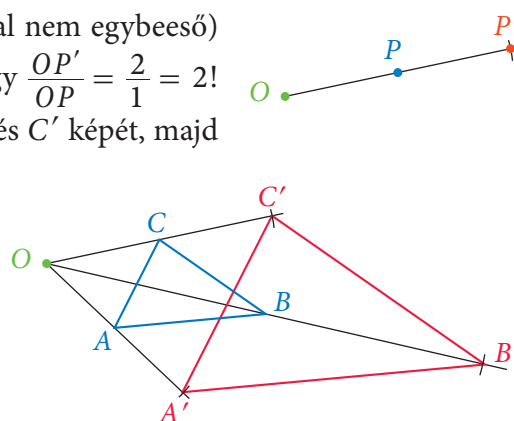
1. PÉLDA

Rögzítsünk a síkon egy O pontot! Egy tetszőleges (O -val nem egybeeső) P pont P' képe illeszkedjen az OP félegyenesre úgy, hogy $\frac{OP'}{OP} = \frac{2}{1} = 2$!

Szerkesszük meg az ABC háromszög csúcsainak A' , B' és C' képét, majd rajzoljuk meg az $A'B'C'$ háromszöget!

Megoldás

Megrajzoljuk az OA , OB , OC félegyeneseket. Az O -ból felmérjük kétszer az OA , OB , OC szakaszok hosszát. Így megkapjuk az A' , B' , C' pontokat. Összekötve látható az $A'B'C'$ háromszög.



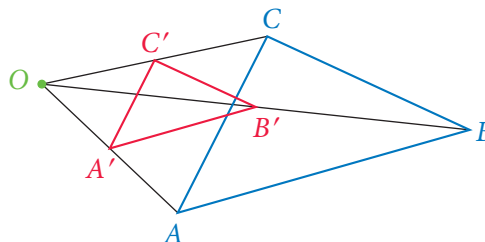
A példában szereplő transzformációt kétszeres **középpontos nagyítás**nak nevezzük. Az ABC háromszögnek az $A'B'C'$ háromszög a kétszeres középpontosan nagyított képe.

2. PÉLDA

Rögzítsünk a síkon egy O pontot! Egy tetszőleges (O -val nem egybeeső) P pont P' képe illeszkedjen az OP félegyenesre úgy, hogy $\frac{OP'}{OP} = \frac{1}{2}$! Szerkesszük meg az ABC háromszög csúcsainak az A' , B' és C' képét, majd rajzoljuk meg az $A'B'C'$ háromszöget!

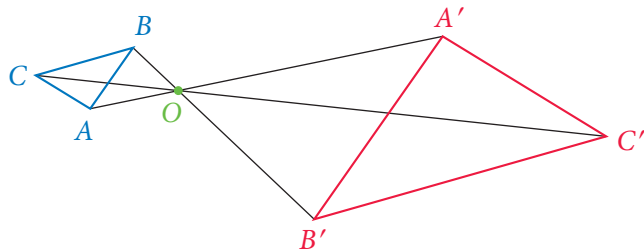
Megoldás

Megrajzoljuk az OA , OB , OC félegyeneseket. Az O -ból felmérjük az OA , OB , OC szakaszok hosszának a felét. Az így kapott A' , B' , C' pontokat összekötve kapjuk a kívánt háromszöget.

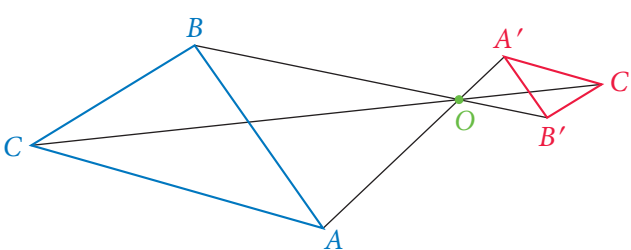


A példában szereplő transzformációt $\frac{1}{2}$ -szeres **középpontos kicsinyítés**nek nevezzük. Az ABC háromszögnek az $A'B'C'$ háromszög az $\frac{1}{2}$ -szeres középpontosan kicsinyített képe.

A nagyításhoz vagy a kicsinyítéshez az előzőektől eltérő, λ (ejtsd: lambda) arányt is választhatunk. Negatív arány esetén a kép az O másik oldalán, a félegyenes meghosszabbításán található. Az O pont minden esetben fixpont.



Az ABC háromszög képe $\lambda = -3$ -as arányhoz



Az ABC háromszög képe $\lambda = -\frac{1}{3}$ -os arányhoz

Gondoljuk meg!

Ha az arányszám $\lambda = 1$, akkor minden pont helyben marad.

Ha az arányszám $\lambda = -1$, akkor középpontos tükrözést kapunk.

Ha az arányszám $\lambda = 0$, akkor a sík minden pontjának a képe a O pont lesz. Ez a transzformáció nem hasonlóság.



A középpontos nagyítást és kicsinyítést összefoglalóan **középpontos hasonlósági transzformáció**nak nevezzük.

A középpontos hasonlósági transzformációról a példák alapján a következő tulajdonságokat fogalmazzuk meg:

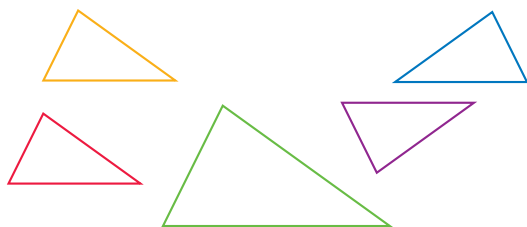
- Egyenestartó, szögtartó, a körüljárási irányt megtartó transzformáció.
- Bármely két pont esetén a képtávolság és az eredeti két pont távolságának aránya ugyanannyi, vagyis aránytartó.
- A középpontos hasonlóság középpontján áthaladó egyenes képe önmaga.
- A középpontos hasonlóság középpontján át nem haladó egyenes képe az eredeti egyenessel párhuzamos egyenes.

Mi csak síkban vizsgáltunk, de beszélhetünk középpontos hasonlóságról a térben is.



FELADATOK

1. Rajzolj egy négyszöget a füzetedbe!
 - a) Nagyítsd az egyik csúcsából a kétszeresére!
 - b) Kicsinyítsd a felére az egyik oldal felezőpontjából!
2. Rajzolj egy kört a füzetedbe!
 - a) Nagyítsd a körvonalat az egyik pontjából a háromszorosára!
 - b) Kicsinyítsd a felére a középpontjából!
3. Válaszd ki azokat a háromszögpárokat, amelyek középpontosan hasonló!

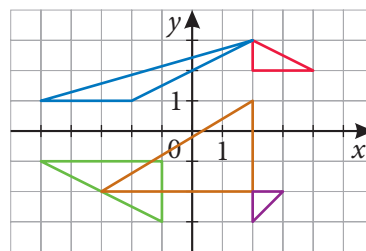


4. Rajzolj a füzetedbe két pontot! Az egyik legyen A , a másik pedig A' . Szerkeszd meg az O középpontot, ha a középpontos hasonlóság aránya
 - a) $\lambda = 3$; b) $\lambda = -3$;
 - c) $\lambda = \frac{2}{3}$; d) $\lambda = \frac{4}{3}$!

5. Rajzolj egy háromszöget és
 - a) nagyítsd az egyik csúcsából $\frac{3}{2}$ -szeresére;
 - b) nagyítsd egy belső pontjából -3 -szorosára;
 - c) kicsinyítsd egy külső pontjából $\frac{3}{4}$ -szeresére;
 - d) kicsinyítsd egy oldal felezőpontjából a $-\frac{1}{4}$ -szeresére!

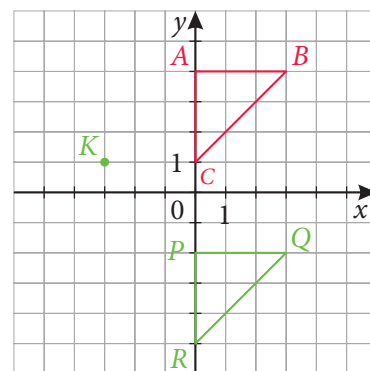
6. Nagyítsd az origóból a kétszeresére az $A(1; 2)$, $B(2; 3)$, $C(4; 1)$, $D(2; -1)$ csúcsokkal megadott négyszöget! Add meg a képként kapott négyszög csúcsainak koordinátáit!

7. Az $A(3; 1)$, $B(1; 3)$, $C(3; 5)$, $D(7; 5)$ csúcsokkal megadott négyszöget középpontosan kicsinyítettük egy negatív aránnyal. Tudjuk, hogy $A'(-3; -2)$, $B'(-2; -3)$. Add meg a középpont és a hiányzó képpontok koordinátáit!



8. Keresd meg az ábrán a két középpontosan hasonló háromszöget! Add meg a középpontos hasonlóság középpontjának koordinátáit! Add meg a középpontos hasonlóság arányát!

9. Rajzold meg az ábrát a füzetedben is!



- a) Rajzold meg az ABC háromszög K középpontra vonatkozó $\frac{4}{3}$ arányú képét! Add meg az így kapott $A'B'C'$ háromszög csúcsainak koordinátáit!
- b) Rajzold meg a PQR háromszög K középpontra vonatkozó $-\frac{1}{3}$ arányú képét! Add meg az így kapott $P'Q'R'$ háromszög csúcsainak koordinátáit!
- c) Milyen kapcsolat van az ABC és a PQR háromszögek között?

Az eddigi szerkesztésekben a középpontos hasonlóság arányát egy számmal adtuk meg. A következőkben olyan szerkesztéseket láthatsz, ahol ezt a számot nem ismerjük.

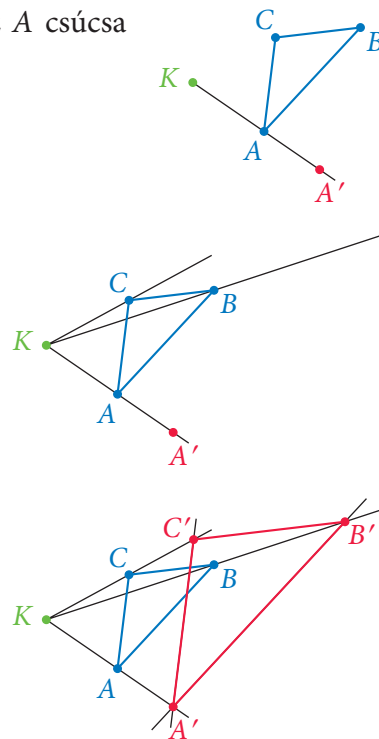
1. PÉLDA

Az adott K pontból nagyítsuk az ABC háromszöget úgy, hogy az A csúcsa a megadott A' pontba kerüljön!

Megoldás

Már összegyűjtöttük a középpontos hasonlóság legfontosabb tulajdonságait. Tudjuk, hogy a középpontos hasonlóság K középpontja, az eredeti pont (a tárgy pont) és a képe egy egyenesre illeszkedik. Ezt felhasználva megrajzoljuk a KB egyenest (mert erre illeszkedik a B' pont) és a KC egyenest (mert erre illeszkedik a C' pont).

Azt is tudjuk, hogy a K középpontra nem illeszkedő egyenes és a képe párhuzamos egymással. Ezért az AB egyenessel párhuzamos, A' pontra illeszkedő egyenesen van a B' pont, és az AC egyenessel párhuzamos, A' pontra illeszkedő egyenesen van a C' pont. Így megkaptuk a háromszög hiányzó csúcsait.

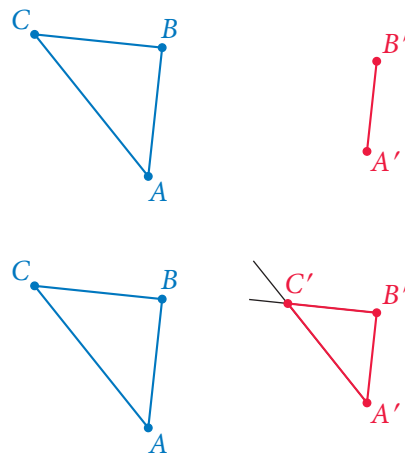


2. PÉLDA

Kicsinyítsük az adott ABC háromszöget a középpontos hasonlóság K középpontjának megszerkesztése nélkül úgy, hogy az A csúcsa az adott A' , a B csúcsa az adott B' pontba kerüljön!

Megoldás

Alkalmazzuk a középpontos hasonlóságnak azt a tulajdonságát, hogy a K középpontra nem illeszkedő egyenes és a képe párhuzamos egymással. Ezért a megszerkesztendő C' pont rajta van az A' -n átmenő AC -vel párhuzamos és a B' -n átmenő BC -vel párhuzamos egyenesen is, tehát C' ezen egyenesek metszéspontja.



Megjegyzések:

- A kivitelezés csak akkor hajtható végre, ha a kiinduló ábrán az AB és az $A'B'$ párhuzamos.
- A középpontos hasonlóság K középpontját nem kellett megszerkesztenünk, de tudjuk, hogy az AA' és BB' egyenesek metszéspontjában van.

Mivel tudunk szakaszt másolni és felezni, ezért ha a középpontos hasonlóság arányát egy egész számmal vagy 2, 4, 8, ... nevezőjű törttel adjuk meg, akkor a középpont ismeretében a kép megszerkesztése egyszerű feladat. Az előző leckében már találkoztál ilyen helyzetekkel. Mi a teendő ezektől eltérő arányszámok esetén?

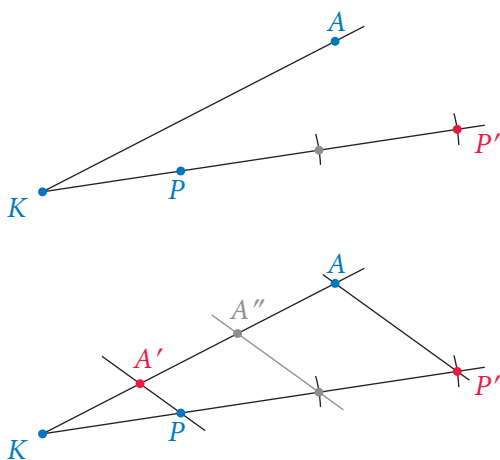
Megfigyelhettük, hogy például a $\lambda = 2$ arányú és a $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóság szoros kapcsolatban van egymással. Ami az egyikben képpont, az a másikban tárgypont lesz, és fordítva. Ez minden λ és $\frac{1}{\lambda}$ esetén is elmondható.

Ezt felhasználva kivitelezhetjük például a $\lambda = \frac{1}{3}$ arányú középpontos hasonló kép szerkesztését, mert a 3-szoros nagyítás képét tudjuk, hogyan kell megszerkeszteni.

3. PÉLDA

Szerkesszük meg egy tetszőleges A pont A' képét egy adott K középpontú, $\lambda = \frac{1}{3}$ arányú középpontos hasonlóság esetén!

Megoldás



A K középpontú, $\lambda = 3$ arányú középpontos hasonlóságban egy tetszőleges P pont képe a P' lesz. Ezt a szerkesztést szakaszmásolással meg tudjuk valósítani.

Ha gondolatban felcseréljük az összetartozó két pont szerepét, akkor az adott A pont keresett A' képét már meg tudjuk szerkeszteni.

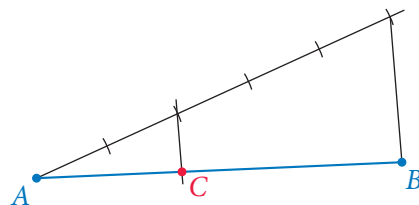
Ezzel a módszerrel az is látható, hogyan kell egy tetszőleges A pont képét megszerkeszteni egy adott K középpontú, $\lambda = \frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlóság esetén. Az ábránkon ez az A'' pont. Ezt a módszert alkalmazzuk akkor is, amikor egy szakaszt adott arányban szeretnénk kettévágni.

4. PÉLDA

Szerkesszük meg a C pontot egy adott AB szakaszhoz úgy, hogy $AC : CB = 2 : 3$ legyen!

Megoldás

Húzzunk egy tetszőleges félegyenest az A pontból kiindulva, majd A -ból mérjünk fel öt $(2 + 3)$ egyenlő szakaszt a körzőnkkal! Az ötödik szakasz végpontját összekötjük a B ponttal, majd az így kapott egyenessel párhuzamost húzunk a második szakasz végpontján át, ahogyan ezt az ábra mutatja. Ez az egyenes a megfelelő C pontban metszi az AB szakaszt.



FELADATOK

1. Kicsinyítsd a $KLMN$ téglalapot a K középpontból úgy, hogy az M csúcsa a KM szakasz egy előre adott, tetszőleges pontja legyen!

2. Adott az $ABCD$ trapéz. Tudjuk, hogy egy középpontos hasonlóság az AB szakaszt a CD szakaszba transzformálja. Szerkeszd meg egy tetszőleges E pont képét!

3. Szerkeszd meg egy tetszőleges AB szakasz képét, ha adott a középpontos hasonlóság K középpontja és

- | | |
|---------------------|-------------------------------|
| a) $\lambda = 4$; | b) $\lambda = \frac{1}{4}$; |
| c) $\lambda = 8$; | d) $\lambda = \frac{5}{8}$; |
| e) $\lambda = -4$; | f) $\lambda = -\frac{1}{4}$; |
| g) $\lambda = -8$; | h) $\lambda = -\frac{5}{8}$! |

4. Szerkeszd meg egy tetszőleges ABC háromszög képét, ha adott a középpontos hasonlóság K középpontja és

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| a) $\lambda = \frac{1}{5}$; | b) $\lambda = \frac{2}{5}$; |
| c) $\lambda = \frac{8}{5}$; | d) $\lambda = -\frac{3}{5}$; |

e) $\lambda = \frac{1}{7}$;

f) $\lambda = \frac{4}{7}$;

g) $\lambda = \frac{9}{7}$;

h) $\lambda = -\frac{5}{7}$!

5. Az adott AB szakaszt vágd két részre egy C ponttal úgy, hogy

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $AC : CB = 1 : 5$; | b) $AC : CB = 5 : 1$; |
| c) $AC : CB = 4 : 5$; | d) $AC : CB = 2 : 7$! |

6. Az adott AB szakasz B ponton túli meghosszabbításán szerkeszd meg azt a D pontot, amelyre

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $AD : DB = 4 : 1$; | b) $AD : DB = 5 : 2$; |
| c) $AD : DB = 6 : 1$; | d) $AD : DB = 8 : 3$! |

7. Egy oszlop teljes hosszán 1 óra alatt mászik végig egy csiga. Szerkesztéssel jelöld be a tartózkodási helyét 8 perc, 12 perc és 40 perc mászás után!

8. Képzeld el, hogy az $ABCD$ négyzet kerületén egy cérna fut körbe. Az A csúcst rögzítettük. Ezek után a cérnából létrehozzuk a négyzettel azonos területű AEF szabályos háromszöget. Szerkesztéssel jelöld a négyzet ábráján, hogy a cérna mely pontjai adják majd a háromszög csúcsait!

Az előző leckékben a középpontos hasonlósággal foglalkoztunk. A mindennapi beszédünkben általában nem használjuk a *középpontos* jelzőt. Az ikekről azt mondhatjuk, hogy hasonlóak, de mondhatjuk azt is, hogy nagyon hasonlítanak egymásra. A matematikában nem fogalmazhatunk ilyen változatosan, a geometriai hasonlóság eltér a mindennapi értelmezéstől.



1. PÉLDA

Az $ABCD$ deltoidnak AC egyenes a szimmetriatengelye. A D csúcsából nagyítsuk háromszorosára az ABC háromszöget! Figyeljük meg az így kapott $A'B'C'$ és ADC háromszög alakját, az oldalak hosszának és a szögek nagyságának változását!

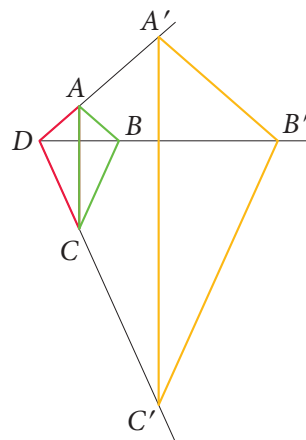
Megoldás

Mivel az $ABCD$ deltoidban AC egyenes a szimmetriatengely, ezért az ABC háromszög egybevágó az ADC háromszöggel. Rövid jelöléssel: $ADC \triangle \cong ABC \triangle$.

Az egybevágóság tulajdonságai miatt a megfelelő oldalak hossza és a megfelelő szögek nagysága egyenlő:

$AD = AB$, $CD = CB$, az AC pedig közös oldal, $ADC \sphericalangle = ABC \sphericalangle$, $BAC \sphericalangle = DAC \sphericalangle$, $ACD \sphericalangle = ACB \sphericalangle$.

A háromszoros nagyítás hatására az $A'B'C'$ háromszög minden oldalának hossza az ABC háromszög oldalhosszainak háromszorosa lesz, a szögek nagysága azonban nem változik.



Az előző példa ADC és $A'B'C'$ háromszögét **hasonló**nak mondjuk: nincs hasonlósági középpontjuk, ezért nem középpontosan hasonlóak. Röviden így jelöljük: $ADC \triangle \sim A'B'C' \triangle$.

Egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció egymás utáni végrehajtását hasonlósági transzformációnak nevezzük.

A **hasonlóság aránya** a középpontos hasonlóságban szereplő arányszám abszolút értéke lesz.

Az eddig tanultak alapján a hasonlóság legfontosabb tulajdonságai:

- egyenestartó (egy egyenes képe egyenes lesz);
- körtartó (egy kör képe kör lesz);
- szögtartó;
- aránytartó (a λ arányú hasonlóságban minden szakasz hossza λ -szorosára változik).

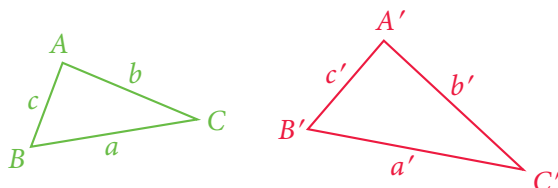
Igaz a következő megállapítás is: Ha egy transzformáció minden szakasz hosszát λ -szorosára változtatja (ahol $\lambda > 0$), akkor az egy hasonlósági transzformáció.

Ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másik alakzatba viszi, akkor **a két alakzatot hasonlónak** mondjuk.

Két alakzat hasonlóságának megmutatása ilyen módon nehézkes és hosszadalmas. Megkönnyítik azonban a munkánkat a háromszögekre vonatkozó állítások, amelyeket most bizonyítás nélkül elfogadunk. Az állításokat röviden a szokásos jelölésekkel is felírjuk.

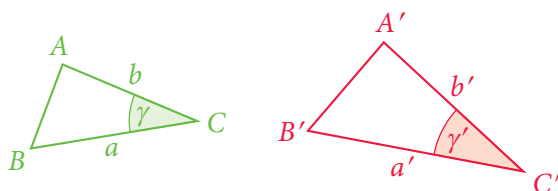
Ha két háromszögben a megfelelő oldalhosszak aránya egyenlő, akkor a két háromszög hasonló.

Ha $a : a' = b : b' = c : c'$, akkor $ABC \triangle \sim A'B'C' \triangle$.



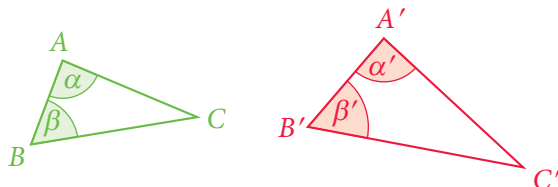
Ha két háromszögben két-két megfelelő oldalhossz aránya egyenlő, és az ezek által közrefogott szögek is egyenlők, akkor a két háromszög hasonló.

Ha $a : a' = b : b'$ és $\gamma = \gamma'$, akkor $ABC \triangle \sim A'B'C' \triangle$.



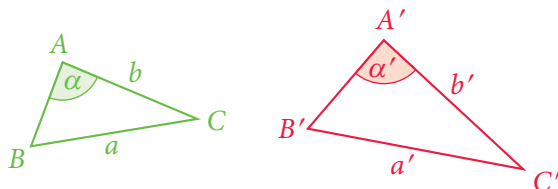
Ha két háromszögben két-két szög egyenlő, akkor a két háromszög hasonló.

Ha $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, akkor $ABC \triangle \sim A'B'C' \triangle$.



Ha két háromszögben két-két megfelelő oldalhossz aránya egyenlő és e két-két oldal közül a hosszabbal szemközt szögek is egyenlők, akkor a két háromszög hasonló.

Ha $a : a' = b : b'$, $a > b$ és $\alpha = \alpha'$, akkor $ABC \triangle \sim A'B'C' \triangle$.

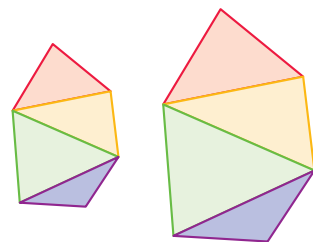


Ha a fenti négy feltétel közül bármelyik teljesül, akkor a két háromszög minden megfelelő szakaszának aránya, illetve megfelelő szögei is egyenlők.

A sokszögeket az átlóikkal háromszögekre vágjuk, és ezek hasonlóságából következtethetünk a sokszögek hasonlóságára.

Sokszögek hasonlóságának megállapításakor a következő állítások is használhatók: Két sokszög hasonló, ha a megfelelő oldalhosszaik aránya és a megfelelő átlóhosszaik aránya is egyenlő.

Két sokszög hasonló, ha a megfelelő oldalhosszaik aránya és a megfelelő szögek nagysága is páronként egyenlő.



2. PÉLDA



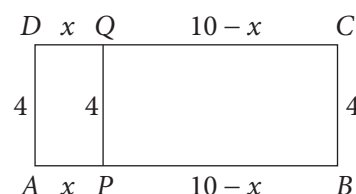
Jancsi tányérján egy olyan téglatest alakú tortaszelet van, amelynek a teteje 4 cm-szer 10 cm-es. Juliska szeretné megkóstolni, de neki a felénél kevesebb is elég. Jancsi egy függőleges vágással két olyan téglatestre vágja a süteményt, amelyeknek a teteje hasonló egymáshoz. Hol kell vágnia, ha tudjuk, hogy a sütemények tetején az élhosszak centiméterben kifejezve egész számok?

Megoldás

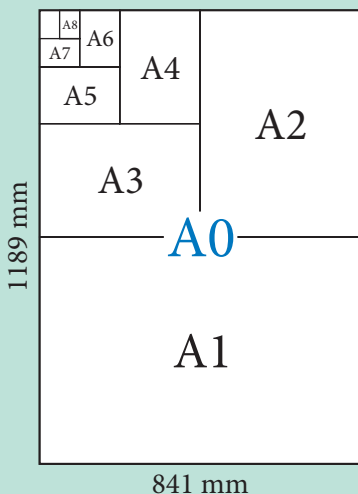
Először megrajzoljuk a tortaszelet képét felülnézetből. Jelöljük x -szel Jancsi vágásának távolságát a sütemény szélétől.

Mivel az $APQD$ és a $QPBC$ téglalapok hasonlóak, ezért a megfelelő oldalak aránya egyenlő: $\frac{AD}{PB} = \frac{AP}{PQ}$, azaz $\frac{4}{10-x} = \frac{x}{4}$.

A feladat feltételei szerint az x lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4. Ezek mindegyikének behelyettesítésével kapjuk, hogy $x = 2$. Vagyis a rövid éltől 2 cm-re kell vágni, hogy a feltételeket teljesítsük.



Tudtad?



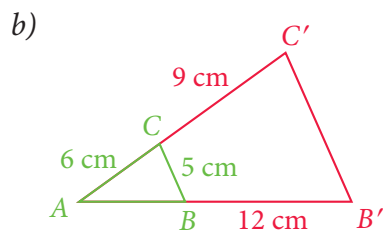
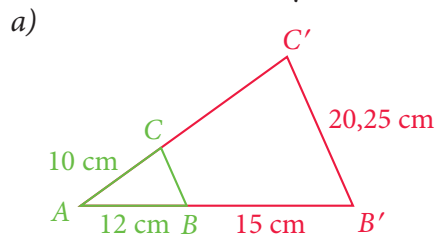
Hazánkban 1936 óta a nemzetközi szabvány szerinti papírméreteket használjuk. Ezek mindegyike olyan téglalap, amelyben az oldalak aránya $1:\sqrt{2}$. (Majd látni fogjuk, hogy ez az arány pontosan egy négyzet oldalhosszának és átlóhosszának arányával egyenlő.) A megadott arány nagy előnye, hogy ahányszor csak félbehajtsuk az eredeti lapot, a kapott téglalap oldalainak aránya mindig ugyanaz marad, vagyis a téglalapok mindig hasonlóak lesznek egymással. Ez a magyarázata annak, hogy a másológépeken például az A3-as lap könnyen A4-esre kicsinyíthető. A papírvék között többféle alpméret van. Az A0-s méretű lap területe 1 m^2 . Ha a fent leírt arányt figyelembe vesszük, akkor ennek mérete milliméterben körülbelül 841-szer 1189. Az „A” betűjelzés utáni szám azt mutatja, hogy hányszor felezték az A0-s alpméretet.

FELADATOK

1. 📏 Rajzolj egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget, és felezd el az átfogóhoz tartozó magasság mentén! Mutasd meg, hogy az így kapott háromszögek hasonlóak az eredetihez!

2. 📏 Rajzolj egy derékszögű háromszöget! Rajzold meg az átfogóhoz tartozó magasságot! Mutasd meg, hogy az így kapott háromszögek és az eredeti háromszög hasonló!

3. 📏 Számítsd ki a hiányzó szakaszok hosszát!



4. 📏 Egy zöld háromszög oldalainak aránya $6 : 6 : 11$. Egy hozzá hasonló piros háromszög területe $285,2$ cm. Mekkora a piros háromszög oldalainak hossza?

5. 📏 Egy térképen az $1 : 2\,500\,000$ arányszámot látjuk. Ez azt jelenti, hogy ami a térképen 1 cm, az a valóságban $2\,500\,000$ cm. Ezen a térképen Miskolc és Nyíregyháza $2,9$ cm-re, Nyíregyháza és Debrecen $1,9$ cm-re, Debrecen és Miskolc pedig $3,6$ cm-re van egymástól. Határozd meg a városok egymástól való távolságát légvonalon!

6. 📏 Két település távolsága légvonalon 145 km, de a térképen csak $2,9$ cm. Add meg a térkép léptékét!

7. 📏 Egy háromszögben az oldalhosszak: 11 cm, 16 cm, 24 cm. Képzeld el azt a hozzá hasonló háromszöget, amelyben a leghosszabb és a legrövidebb oldal hossza közötti eltérés $29,9$ cm! Mekkora ennek a háromszögnek a középső oldala?

8. 📏 Melyik igaz, melyik hamis?

- Két különböző négyzet mindig hasonló.
- Két különböző téglalap mindig hasonló.
- Két különböző paralelogramma mindig hasonló.
- Két különböző félkör mindig hasonló.
- Két különböző negyedkör mindig hasonló.
- Két különböző körcikk mindig hasonló.
- Két különböző szabályos hatszög mindig hasonló.

9. 📏 Két négyzet hasonlóságának aránya $\frac{3}{4}$. Egy-egy oldaluk hosszának összege $66,5$ m.

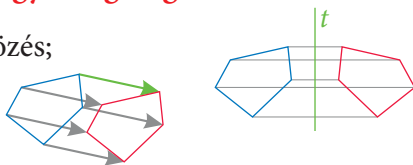
- Milyen hosszúak az oldalak?
- Add meg a két négyzet területének arányát! Milyen viszonyban van ez az arány a hasonlóság arányával?
- Mekkora a négyzetek területe?
- Add meg a két négyzet területének arányát! Milyen viszonyban van ez az arány a hasonlóság arányával?

10. 📏 Olvasd el a lecke végén lévő *Tudtad?* részt, majd a szöveg alapján oldd meg a következő feladatokat!

- Add meg az A3-as papír méreteit milliméter pontossággal!
- Mekkora a területe az A5-ös papírnak?
- Hányad részét adja az A0-s papírnak egy A1-es és egy A3-as papírlap együtt?
- Melyik két különböző méretű lap területe lesz összesen 1875 cm²?
- Oszd a „Tudtad?” részben megkezdett módon 11 darabra az ott lévő ábrát! Milyen méretű papírból lesz két darab?

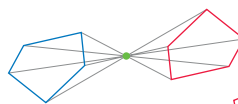
Az eddig tanult egybevágósági transzformációk síkban:

- tengelyes tükrözés;

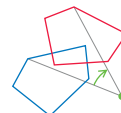


- eltolás;

- középpontos tükrözés;

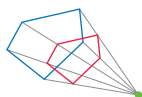


- pont körüli forgatás.



Nem egybevágósági transzformációk:

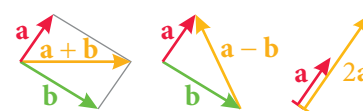
- középpontos hasonlóság;



- hasonlóság.



Az eltolások megadása vektorok segítségével történik. Értelmeztük két vektor összegét, különbségét és a vektor számmal vett szorzatát.



FELADATOK

1. Adott a tükrözés tengelye. A sík mely egyenesi esnek egybe a tengelyes tükörképükkel?

2. Nevezd meg olyan síkbeli alakzatokat, amelyeknek végtelen sok szimmetriatengelye van!

3. Húzz egy egyenest a paralelogramma átlói-nak metszéspontján át! Mutasd meg, hogy ez az egyenes a paralelogrammát két egybevágó síkidomra vágja!

4. Az $ABCDE$ szabályos ötszög AB oldalát milyen forgatás viszi a CD oldalba?

5. Az $ABCD$ húrtrapéz egyik szárát forgatással a másik szárba akarjuk transzformálni.

a) Hol lesz a forgatás középpontja?

b) Mekkora lehet a forgatás szöge, ha a trapéz egyik szöge 70° ?

6. Egy egyenlő szárú háromszögnek van 30° -os szöge. Milyen forgatással lehetne az egyik szárát a másikba transzformálni?

7. Rajzolj egy AB szakaszt! Oszd fel olyan részekre, amelyek aránya

a) $2 : 5$; b) $3 : 2$; c) $1,5 : 8$; d) $2 : 3,5$!

8. Legyen adott az $ABCD$ négyszög AB oldalának B -n túli meghosszabbításán egy B' pont. Rajzold meg az $ABCD$ négyszög A középpontú nagyított képét úgy, hogy a B képe B' legyen!

9. Az előző feladat jelöléseit használva legyen az $ABCD$ négyszög kerülete 26 cm, az AB oldal 8 cm, az $A'B'$ oldal pedig $10,2$ cm hosszú. Mekkora az $A'B'C'D'$ négyszög kerülete?

10. Legyen adott az $ABCD$ trapéz AB alapján egy B' pont. Kicsinyítsd a trapézt az A csúcsából úgy, hogy a B képe B' legyen! Milyen négyszög a $B'BDD'$ négyszög?

11. Adott egy deltoid és egy téglalap. Szerkessz az adott deltoidhoz hasonló deltoidot úgy, hogy kerülete az adott téglalap területével legyen egyenlő!

12. Egy tervrajzon a 12 méter hosszú folyosót a mérnök $7,2$ cm-nek, szélességét pedig $1,5$ cm-nek rajzolta. Milyen széles a folyosó?

13. Egy hatszög oldalainak hossza: 2 cm, $2,4$ cm, 3 cm, $2,8$ cm, $3,5$ cm, $5,2$ cm. A hozzá hasonló hatszög leghosszabb oldala $23,4$ cm. Mekkora ennek a hatszögnek a kerülete?

14. Egy téglalapot az egyik középvonala az eredetihez hasonló két téglalapra vág. Határozd meg a két oldal arányát az eredeti téglalapban!

15. Rajzolj 2 cm-es oldalhosszal egy négyzetet és mellé egy 2 cm-es átmérőjű kört. Add meg azt a vektort, amivel úgy tolhatod el a kört, hogy a középpontja a négyzet átlóinak metszéspontjába kerül! Végezd el az eltolást!

16. Egy paralelogramma kerülete 42 cm, a rövidebb oldalának a hossza 8 cm. Milyen hosszú annak az eltolásnak a vektora, amelyik az egyik rövid oldalt a másikba tolja?

17. Rajzolj egy $ABCD$ téglalapot! A téglalap ábráján jelöld a $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ vektorokat!
Döntsd el, hogy melyik igaz, melyik hamis a következő állítások közül!

- a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$.
- b) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ és $\overrightarrow{DC}$ párhuzamos egymással.
- c) A $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ mindegyike nem lehet azonos hosszúságú.
- d) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$.
- e) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ és $\overrightarrow{DC}$ egyenlő hosszú.
- f) Lehet olyan eset, hogy $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ és $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$ merőleges egymásra.

18. Ha a PA szócskát egy vízszintes vektorral eltoljuk, akkor az eredeti és a kép összeolvasásával értelmes szót kapunk: PAPA.

Adj meg néhány ilyen szócskát! Gondolhatsz több betűből állóra is!

19. Ha egy kétjegyű számot egy vízszintes vektorral eltolunk, akkor az eredeti és a kép összeolvasásával négyjegyű számot kapunk. Például ha a 13 a kiinduló szám, akkor 1313 lesz az összeolvasás eredménye.

- a) Milyen – a számokon értelmezett – művelet hozza létre ugyanezt a számot egy kétjegyű szám esetén.
- b) Mi a helyzet, ha háromjegyű számból indultunk ki?

20. A képen látható nyomtatott betűket rajzold le a füzetedbe, és a bejelölt pont körül forgasd el 90° -kal, 180° -kal és -90° -kal!

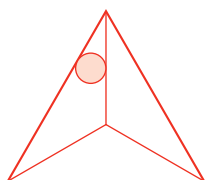
a) B

b) E

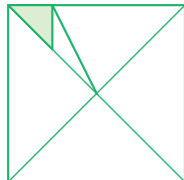
c) A

21. Rajzold le a füzetedbe a képen látható szabályos sokszögeket! Fejezd be a rajz mintázatát úgy, hogy mindegyik grafikád forgásszimmetrikus legyen!

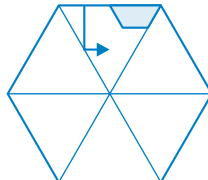
a)



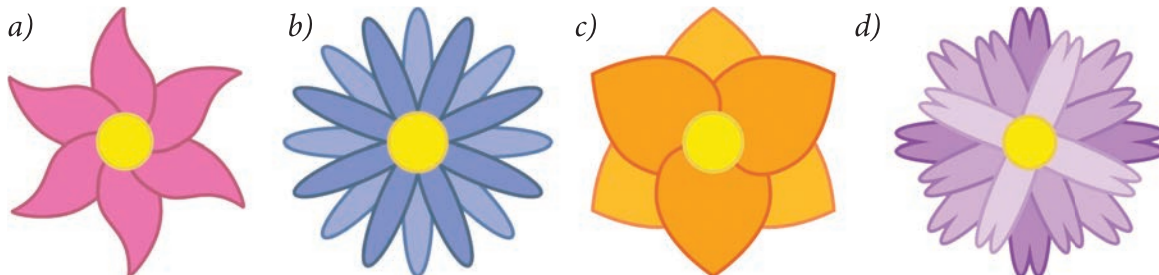
b)



c)



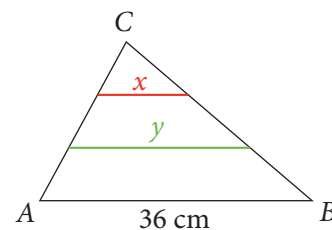
22. A képen látható virágokat úgy tekinthetjük, hogy forgásszimmetrikusak. Hány fokos forgásszimmetriáról beszélhetünk? Add meg a legkisebb szöget!



23. Egy szabályos hatszög egyik oldalát milyen transzformációk viszik át a szemközti oldalba?

24. Egy szabályos nyolcszög két nem párhuzamos oldalát milyen szögű forgatás viszi át egymásba?

25. Az ABC háromszög AB oldala 36 cm hosszú. A BC oldalt három egyenlő részre vágjuk, és az osztópontokon át az AB oldallal párhuzamos egyeneseket rajzolunk. Milyen hosszúságú szakaszai lesznek ezeknek az egyeneseknek a háromszög belsejében?



26. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza 28 cm, 45 cm, 53 cm. Mekkora darabokra vágja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót?

27. Mindkét fényképen a Duna Aréna látható. A nagyobb képen az épület magasságát bal oldalon 1,6 cm-nek, a tetejének az éleit pedig 5,2 cm-nek és 1,7 cm-nek mértük. A másik képen



0,9 cm az épület magassága. Határozd meg mérés nélkül, hogy mekkorának látszanak az épület tetejének élei ezen a képen!



28. A képen látható csokoládéból annyit szabad letörnöd és megened, hogy a megmaradt darab alakja felülnézetben hasonló legyen az eredetihez.

Hányadrészét eheted meg a csokoládénak?



A következő órán a gyerekek egy nagy zacskóval fogadták a tanármőt.

Nem tudtuk eldönteni, hogy ki legyen a következő, úgyhogy aki akarta, annak beletettük a nevét a tasakba.

Tessék húzni!



Akkor ma Zozó és Kristóf következnek!

Igggen!

Ezazz!



III. Pitagorasz-tétel

A bányászat komoly dolog. Főként az űrben! Rengeteg előzetes számításra van szükség, hogy melyik aszteroidát érdemes befogni. Ha megkapjuk a koordinátákat, akkor a pilóta beállítja a bányászhatót, aztán uzsgyi felfelé!

A számítások, a repülés és a finomlandolás a pilóta feladata.

A mi dolgunk, hogy az alatt a pár nap alatt, amíg földközélsben vagyunk, a lehető legtöbb értékes ásványt bányásszuk ki...



Nagyon sok munkát a számítógépek végeznek el, persze csak akkor, ha megfelelően állították be őket. A legjobb bányászok ma már a letehetségebb programozók közül kerülnek ki, szóval nem elég a tesiórán májerkedni, matekból is villantani kell hozzá.



Zozókám, hinnéd vagy sem, de fodrász leszel!

Ohh, hellóka!



Bizony ám!

Képzeld, a múltkor bejött egy punk fazon a szalonba, és azt kérte, hogy vágjam körbe a haját, oldalt 90°-os szögben álljon a felnyírt pajesza, a szakállá pedig mindenütt legyen hegyesszögben.

Nem hittem, hogy fodrászként valaha is hasznát veszem a geoházinak, aztán nézd már...! Így pont olyan lett, ahogy megálmodta a srác.



CSOPORTMUNKA

1. Hogyan határoznátok meg egy körbekerített, téglalap alakú kert átlójának hosszát, ha a kerítésen nem tudtok átjutni, de az oldalainak hosszát meg tudjátok mérni?
2. Hogyan határoznátok meg egy téglatest alakú doboz két legtávolabbi csúcsának távolságát, ha meg tudjátok mérni az élek hosszát?



Mindkét esetben gondoljatok arra, hogy mérhettek, szerkeszthettek is!

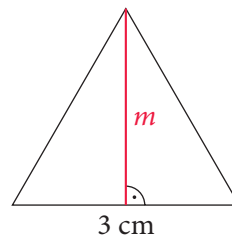
1. PÉLDA

Mekkora egy 3 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög területe?

Megoldás

A háromszög területét az a oldalhossz és a hozzá tartozó m_a magassághossz segítségével határozzuk meg: $t = \frac{a \cdot m_a}{2}$. Mivel az oldalhoz tartozó magasság hosszát most nem ismerjük, ezért szerkesszük meg a háromszöget, és mérjük meg ezt a hosszt!

Mérésünk eredménye: $m_a \approx 2,6$ cm. Vagyis $t \approx \frac{3 \cdot 2,6}{2} = 3,9$ (cm²).



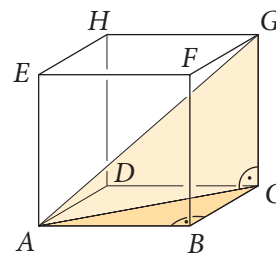
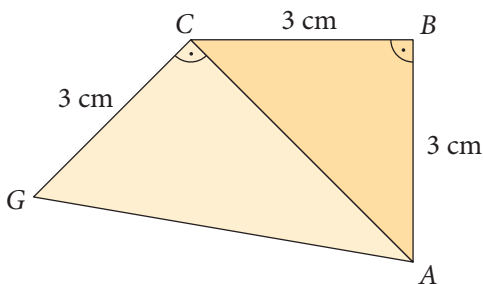
2. PÉLDA

Mekkora a 3 cm élhosszúságú kocka két legtávolabbi csúcsának távolsága?

Megoldás

Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög befogói 3 cm hosszúak. Szerkesszük meg ezt a háromszöget! Az ACG derékszögű háromszög egyik befogója 3 cm hosszú, a másik befogója az előbb említett ABC háromszög AC átfogójának hosszával egyenlő, vagyis ezt a háromszöget is meg tudjuk szerkeszteni. A keresett szakasz ennek a háromszögnek az átfogójával azonos hosszúságú.

A megszerkesztett ábrán meg tudjuk mérni a kocka két legtávolabbi csúcsának távolságát. A kocka testátlójának hossza kb. 5,2 cm.



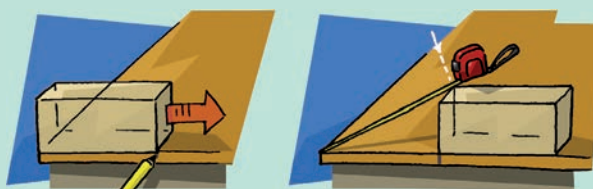
A példákban látott megoldások segítségével a bevezető kérdésekre is válaszolni lehet. A megmért adatok alapján hasonló alakzatokat szerkesztünk a füzetünkbe. A megszerkesztett ábrán megmérjük a kérdéses szakasz hosszát. Természetesen a válasznál figyelniünk kell arra, hogy milyen aránnyal kicsinyítettünk.

A lecke kérdéseinek megválaszolásánál számítanunk kell a mérésből és a szerkesztésből adódó hibákra.

Hogyan lehetne mérések helyett számolással választ adni a fenti kérdésekre? A következő leckékben erre keressük a választ.

Érdekesség

Egy téglatest alakú doboz testátlójának hosszát egy téglalap alakú asztalon is megmérheted. Az ábra mutatja a kivitelezést!



FELADATOK

1. Egy négyzet oldala 3,5 cm hosszú.

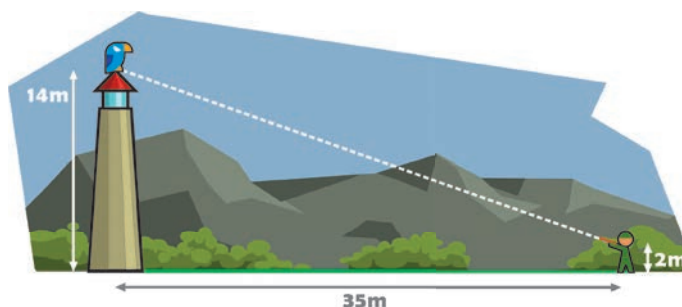
- Szerkesztéssel és méréssel határozd meg, hogy hány milliméter hosszú az átlója!
- Add meg számolással az átlójának hosszát! (Gondolj arra, hogy a négyzet egy deltoid, így a területét kétféleképpen is meg tudod határozni!)

2. Egy szabályos háromszög oldala 4 cm hosszú.

- Hány milliméter hosszú a magassága?
- Mekkora a területe?

3. Egy derékszögű háromszög befogói 27 cm és 63 cm hosszúak. Mekkora a háromszög átfogójának a hossza? Mekkora a kisebb hegyesszöge? Szerkessz és mérd! A kivitelezés előtt gondoldj a hasonlóságra!

4. Egy dühös madár ül a 14 méter magas torony tetején. A vadász a torony lábától 35 méterre van, és a puskacsövét 2 méter magasra emeli. Hány métert kell megtennie a golyónak, míg elér a dühös madárig? Mérd az ábra alapján!



5. Egy rombusz minden oldalának és az egyik átlójának a hossza is 16 cm. Mekkora a másik átló hossza?

6. Egy tanterem hossza 8 méter, szélessége 6 méter, magassága 3 méter. Milyen hosszú zsinórt lehet kifeszíteni a terem két legtávolabbi csúcsa között? Szerkessz 1 : 200 arányú segédábrákat!

7. Egy kocka alakú kamra élei 3 méter hosszúak. A mennyezet közepén egy plafonba simuló világítótest van. Milyen messze van ez a világítótest a kamra csúcsaitól?

8. Egy padlástéri szoba egyik függőleges fala húrtrapéz alakú, melynek méretei 5 m, 3 m, 3 m és 3 m. Milyen magas a szoba?

1. PÉLDA

Egy négyzet alakú szobában úgy terítettünk le egy kisebb négyzet alakú szőnyeget, hogy minden csúcsa a szoba egy-egy szélénél található. A szoba oldalai 34 deciméter szélesek. Minden sarokban egy-egy egybevágó derékszögű háromszög maradt takaratlanul, melynek befogói 24 deciméter és 10 deciméter hosszúságúak. Mekkora a szőnyeg területe? Mekkora a szőnyeg egy-egy oldalának hossza?

Megoldás

Készítsünk vázlatrajzot a szöveg alapján!

A szoba minden oldala 34 deciméter hosszú, ezért a területe:

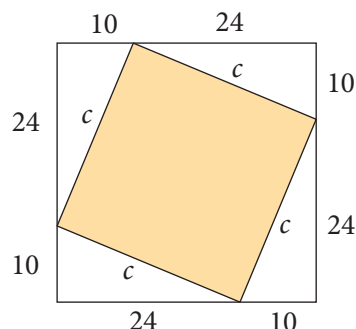
$$T = 34^2 = 1156 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Minden sarokban van egy-egy derékszögű háromszög alakú rész, amelyet nem fed a szőnyeg. Mivel ismerjük a befogók hosszát, ezért

egy ilyen rész területe: $t = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ (dm}^2\text{)}$. Ezek alapján a

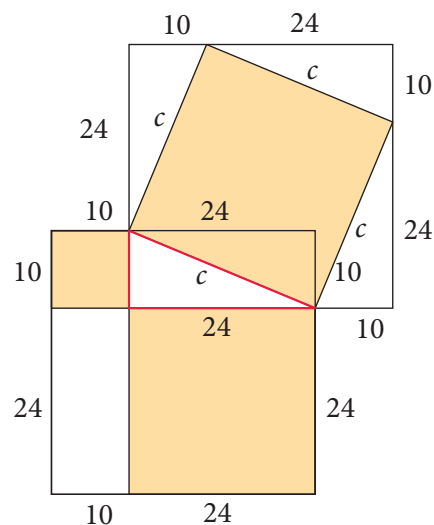
szőnyeg területe: $T - 4 \cdot t = 1156 - 4 \cdot 120 = 676 \text{ (dm}^2\text{)}$.

A négyzet alakú szőnyeg oldalhosszát jelölje c . Ebből következik, hogy a területe: $c^2 = 676$. Tehát a szőnyeg oldalhossza: $c = 26 \text{ dm}$.



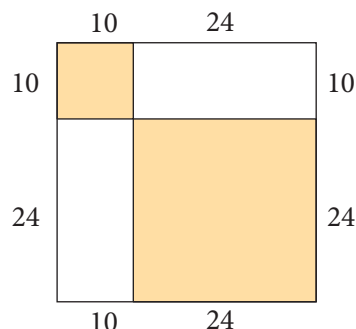
2. PÉLDA

Egy 34 deciméter oldalhosszúságú, négyzet alakú szobában két négyzet alakú szőnyeget terítettünk le az ábrán látható módon. A két téglalap alakú lefedetlen padló rész oldalai 24 deciméter és 10 deciméter hosszúságúak. Mekkora a két szőnyeg területe összesen? Hasonlítsuk össze ezt az előző példában látott nagy szőnyeg területével!

**Megoldás**

A négyzet alakú szőnyegek oldalhosszait ismerjük, ezért kiszámolhatjuk az együttes területüket: $10^2 + 24^2 = 676 \text{ (dm}^2\text{)}$. Megfigyelhető, hogy a kapott terület egyenlő az előző példában látott nagy szőnyeg területével.

Ez azonban nem meglepő! A szoba területéből két téglalap nincs szőnyeggel takarva. Ezek területe pontosan akkora, mint az előző példában látott négy derékszögű háromszög együttes területe. Vagyis mindkét esetben ugyanakkora részt takartunk le szőnyeggel.



Gondold végig! Az előző két példában látottakat bármilyen a és b befogójú derékszögű háromszöggel és $a + b$ oldalú négyzettel megvalósíthatod.

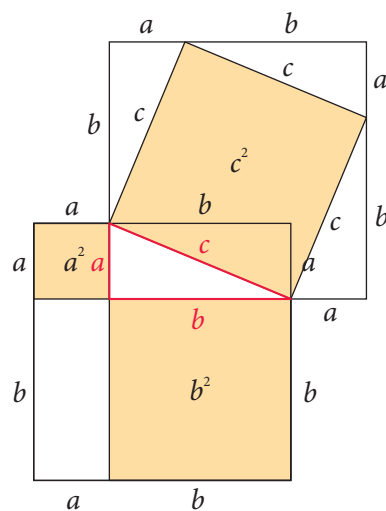
Tedd a két ábrát egymásra, és olvasd le a tapasztalt összefüggést:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Nagyon fontos eredményre jutottunk. Tapasztalatainkat szavakkal is megfogalmazzuk:

A derékszögű háromszög két befogójára rajzolt négyzet területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével.

Ez az állítás a **Pitagorasz-tétel**.

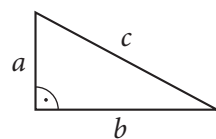


3. PÉLDA

Számítsuk ki a derékszögű háromszög hiányzó oldalhosszát!

Használjuk a Pitagorasz-tételt!

- a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm b) $a = 5$ cm, $b = 7$ cm
c) $a = 5$ cm, $c = 13$ cm d) $a = 10$ cm, $c = 21$ cm



Megoldás

- a) Mivel $c^2 = a^2 + b^2$, ezért $c^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Vagyis $c = \sqrt{25} = 5$ (cm).
b) Mivel $c^2 = a^2 + b^2$, ezért $c^2 = 5^2 + 7^2 = 74$. Vagyis $c = \sqrt{74} \approx 8,6$ (cm).
c) Mivel $c^2 = a^2 + b^2$, ezért $b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 5^2 = 144$. Vagyis $c = \sqrt{144} = 12$ (cm).
d) Mivel $c^2 = a^2 + b^2$, ezért $b^2 = c^2 - a^2 = 21^2 - 10^2 = 341$. Vagyis $c = \sqrt{341} \approx 18,5$ (cm).

Püthagorasz, görög filozófus Szamosz szigetén született a Kr. e. VI. században. (Helyesírásunk szabályai szerint nevét *Püthagorasz*nak írjuk, a róla elnevezett tételt viszont *Pitagorasz-tétel*nek.) Utazásai és tanulmányai után visszatért szülőföldjére, ahol tanítani kezdett. Későbbi útjait követően egy titkos társulatot alapított, ahol a matematika mellett vallási és politikai kérdésekkel is foglalkozott. Hamarosan azonban összeütközésbe került Szamosz-sziget uralkodójával, ezért *Krotónban* folytatta a munkáját.

Nagyon jó előadó volt, de előadásait nem jegyezte le. Eredményei összekeveredtek tanítványaiéval, így amikor Püthagoraszt említjük, akkor leg-

inkább Püthagorasz követőire, a *püthagóreusokra* kell gondolnunk. A szövetség tagjai egy istenben hittek, aki a világot a számok közötti kapcsolatoknak megfelelően teremtette. Szerintük az ember igazi hivatása annak a boldogságot jelentő harmóniának a megtalálása, amelyhez leginkább a matematika művelése segít hozzá.

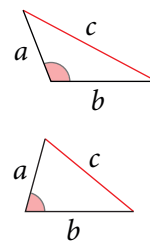
Tudjuk, hogy a róla elnevezett tételt az emberiség már őt megelőzően is ismerte, de valamelyik bizonyítás biztosan tőle származik. Nézz utána, hogy körülbelül hányféle bizonyítása ismert a Pitagorasz-tételnek! Keress olyan híres embert, aki bizonyította ezt a tételt! A világhálón további érdekességeket is találhatsz a témával kapcsolatban.

Igaz a **Pitagorasz-tétel megfordítása** is:

Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

Nagyon hasznos a következő két észrevétel is. (Használjuk a háromszögre a szokásos jelöléseket, és legyen a leghosszabb oldal a c .)

- **Ha $a^2 + b^2 < c^2$, akkor a háromszög tompaszögű.**
(A leghosszabb oldallal szemben lévő szöge lesz a tompaszög.)
- **Ha $a^2 + b^2 > c^2$, akkor a háromszög hegyesszögű.**
(A leghosszabb oldallal szemben lévő szöge is hegyesszög.)



A fenti állítások igazolásától eltekintünk, de figyeljük meg őket a gyakorlatban!

4. PÉLDA

Milyen háromszögeket határoznak meg a következő oldalhosszak?

- $a = 11$ cm, $b = 13$ cm, $c = 25$ cm
- $a = 28$ cm, $b = 45$ cm, $c = 53$ cm
- $a = 12$ cm, $b = 17$ cm, $c = 21$ cm
- $a = 14$ cm, $b = 23$ cm, $c = 25$ cm

Megoldás

Először mind a négy esetben meg kell vizsgálnunk, hogy egyáltalán létrejönnek-e a háromszögek. Ehhez a háromszög-egyenlőtlenséget használjuk.

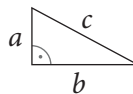
Csak az *a*) feladatrészben megadott adatok nem határoznak meg háromszöget, ezért itt nem lehet válaszolni a feltett kérdésre.

- Ilyen háromszög nincs, mert $11 + 13 < 25$, tehát nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.
- $28^2 + 45^2 = 784 + 2025 = 2809$ és $53^2 = 2809$.
Mivel $28^2 + 45^2 = 53^2$, ezért ez a háromszög a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján derékszögű.
- $12^2 + 17^2 = 144 + 289 = 433$ és $21^2 = 441$.
Mivel $12^2 + 17^2 < 21^2$, ezért ez a háromszög tompaszögű.
- $14^2 + 23^2 = 196 + 529 = 725$ és $25^2 = 625$.
Mivel $14^2 + 23^2 > 25^2$, ezért ez a háromszög hegyesszögű.



FELADATOK

1. Számítsd ki a derékszögű háromszög hiányzó oldalhosszát! Használd a Pitagorasz-tételt!



- | | | | |
|-----------------|-------------|-----------------|-------------|
| a) $a = 8$ cm, | $b = 15$ cm | b) $a = 12$ cm, | $b = 35$ cm |
| c) $a = 10$ dm, | $b = 27$ dm | d) $a = 21$ dm, | $b = 34$ dm |
| e) $a = 16$ cm, | $c = 65$ cm | f) $b = 72$ cm, | $c = 97$ cm |
| g) $a = 17$ m, | $c = 66$ m | h) $b = 53$ m, | $c = 98$ m |

2. Létezik-e olyan háromszög, amelynek oldalhosszai az alábbiak? Ha igen, akkor állapítsd meg, milyen háromszögről van szó!

- | | |
|---|--|
| a) $a = 16$ cm, $b = 23$ cm, $c = 40$ cm | b) $a = 5,6$ mm, $b = 9$ mm, $c = 10,5$ mm |
| c) $a = 7,8$ dm, $b = 16$ dm, $c = 17,8$ dm | d) $a = 28$ m, $b = 39$ m, $c = 49$ m |

3. Egy kétágú létra zárt állapotban 2,4 méter magas. Ha kinyitjuk, akkor lábai 1,2 méterre vannak egymástól. Milyen távolságra van a vízszintes talajtól a kinyitott létra legmagasabb pontja?



4. 3 méteres távolságot áthidaló, 3,5 méter hosszú, egyenes csúszdát építettek. Milyen magasról indul a csúszda?

5. Milyen messze van a 9,6 cm és 11 cm befogójú derékszögű háromszög derékszögű csúcsa az átfogótól?

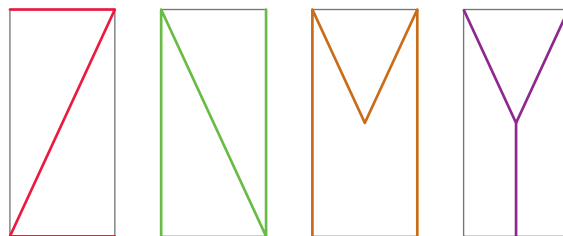
6. Egy padlástéri szoba egyik függőleges fala húrtrapéz alakú, méretei pedig 5 m, 3 m, 3 m és 3 m. Számítsd ki a szoba ezen falának területét!

7. Egy fészker ajtaja 90 cm széles és 210 cm magas. Egy átlós vaspánttal szeretnénk megerősíteni. Milyen hosszúságú ez a vaspánt?

8. Maximum milyen hosszúságú lehet annak a szakasznak a hossza, amelyet egy 21 cm-szer 15 cm-es téglalap alakú papírlapra rajzoltunk?

9. Egy homlokzatra készülő felirathoz betűket festenek. A betűk 39 cm széles és 80 cm magas téglalakra kerülnek. A rajz mutat néhány vázlatot.

- Milyen hosszú vonalból áll a Z betű?
- Mennyivel hosszabb vonal szükséges az N betűhöz, mint a Z betűhöz?
- Hasonlítsd össze az M és az N betű vonalának hosszát!
- Hány százaléka az Y megrajzolásához szükséges vonal hossza a Z megrajzolásához szükséges vonal hosszának?



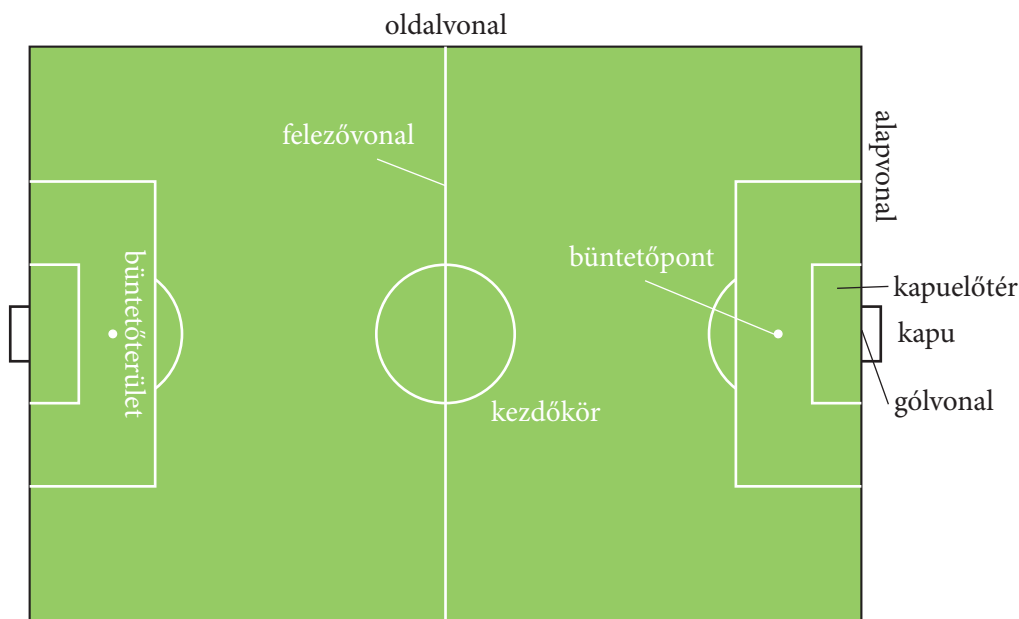
10. 📡 Az ABC háromszög oldalainak hossza $a = 6$, $b = 8$ és $c = 10$ egység.

- Milyen hosszú a c oldalhoz tartozó magasság?
- Milyen hosszú az a oldalhoz tartozó súlyvonal?
- Milyen hosszú a b oldalhoz tartozó súlyvonal?
- Milyen hosszú a c oldalhoz tartozó súlyvonal?

11. 📡 A parkban, ahol Barbara futni szokott, van egy téglalap alakú sétány, amelynek rövidebb oldala 36 méter. Az egyik átlója mentén is kiépítették az utat, ez 85 méter hosszú.

- Készíts vázlatrajzot a parkról! Az átlós szakasz legyen AB , a téglalap másik két csúcsa pedig Q és R .
- Tegnap délután Barbara bemelegítésként a $B - A - R - B - A - R - A$ útvonalat futotta végig. Hány métert futott összesen?

12. 📡 A képen egy futballpálya vázlata látható. Ez a pálya 110 méter hosszú és 76 méter széles.



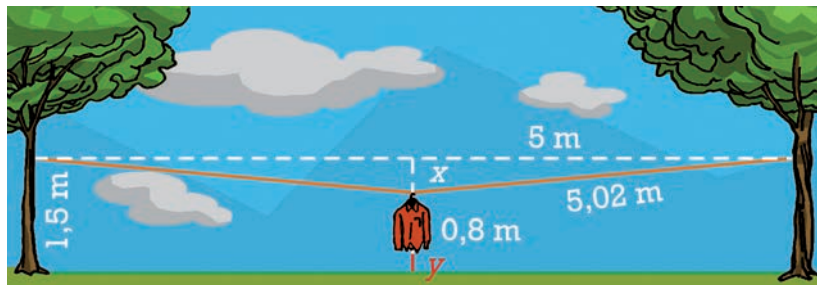
- Milyen messze van a kezdőkör közepe a pálya oldalvonalától és a gólvonaltól?
- Milyen messze van a pálya két legtávolabbi pontja egymástól?
- Mekkora a felezővonal által kialakított félpálya átlójának hossza?
- Milyen messze van a kezdőkör közepe a pálya csúcsaitól?

KUTATÓMUNKA

Keress az interneten bizonyításokat a Pitagorasz-tételre. Hányféleképpen találtál? Beszéljete meg a következő órán néhányat ezek közül.

1. PÉLDA

Két fa között 1,5 méter magasságban vízszintesen kifeszítettünk egy 10 méter hosszú ruhaszárító kötelet. A közepére ráakasztottunk egy száradó inget, amely 80 cm-re lóg le a kötel szintjétől. A kötel a ráakasztott vizes ing súlya miatt 4 cm-t megnyúlt. Milyen magasan lesz ekkor a száradó ing alja a talajtól?



Megoldás

A szöveg alapján vázlatrajzot készítünk.

Alkalmazzuk az ábra derékszögű háromszögére a Pitagorasz-tételt: $x = \sqrt{5,02^2 - 5^2} \approx 0,45$ (m).

A száradó ing aljának távolsága a talajtól: $y = 1,5 - 0,45 - 0,8 = 0,25$ (m). Vagyis az ing alja 25 cm-re van a talajtól.

2. PÉLDA

Egy ingaóra fadoboza belül 18 cm széles. Ha az óra ingáját félretoljuk a falig, akkor éppen 1 cm-rel van magasabban, mint függőleges helyzetben. Milyen hosszú az óra ingája?

Megoldás

Rajzoljunk ábrát a szöveg alapján! Az inga hosszát jelöljük x -szel.

Mivel az óra doboza 18 cm széles, ezért az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 9 cm. Tudjuk, hogy szélső helyzetben az inga alsó vége 1 cm-rel magasabban van, mint függőleges helyzetben, ezért az AC befogó hossza $x - 1$.

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt: $x^2 = (x - 1)^2 + 9^2$.

Mit is jelent az $(x - 1)^2$?

$$(x - 1)^2 = (x - 1) \cdot (x - 1)$$

Végezzük el a szorzást!

$$(x - 1) \cdot (x - 1) = (x - 1) \cdot x - (x - 1) \cdot 1 = x^2 - x - x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

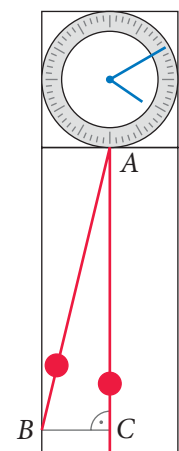
Tehát a Pitagorasz-tételnél kapott egyenletet ilyen alakban is írhatjuk:

$$x^2 = x^2 - 2x + 1 + 81$$

$$2x = 82$$

$$x = 41$$

Vagyis az inga 41 cm hosszú.



3. PÉLDA

A dominó felülnézetben olyan téglalap, amely két négyzetre vágható. Tudjuk, hogy a téglalap átlója 3 cm-rel hosszabb, mint a rövidebb oldala. Mekkora felülnézetben a dominó rövidebb oldala? Adjuk meg milliméter pontossággal!

Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!

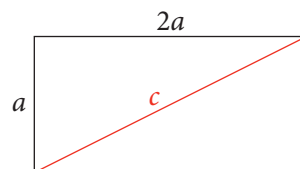
A Pitagorasz-tétel alapján: $c^2 = a^2 + (2a)^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$.

Vagyis $c = a\sqrt{5}$.

Tudjuk a szöveg alapján, hogy $a + 3 = a\sqrt{5}$. Vagyis: $a\sqrt{5} - a = 3$.

Kiemeléssel: $a(\sqrt{5} - 1) = 3$, azaz $a = \frac{3}{\sqrt{5} - 1} \approx 2,4$ (cm).

Felülnézetben a dominó rövidebb oldala 24 mm-es.



FELADATOK

1. Képzeld el, hogy egy 2 km hosszú egyenes út két végén rögzítettek egy 2001 m hosszú kötelet! Milyen magasra kellene emelni középen a kötelet, hogy feszes legyen? Számolás előtt tippelj!

2. Boldizsár egy 33 méter hosszú és 16 méter széles medencében 18 hosszt úszott a 33 méteres pályán. Gáspár gyorsabb, és azt gondolta, vicces, ha átlósan úszik, ezért ugyanannyi idő alatt ő 18-szor tette meg a medence két szemközti csúcsa közötti távolságot. Hány méterrel úszott többet Gáspár, mint Boldizsár?

3. Két, egymástól 20 méterre lévő épület között kifeszítettek egy huzalt, amelynek két végét azonos magasságban rögzítették. Közepén egy tábla lóg, ezért a huzal közepe 40 cm-rel alacsonyabban van, mint a rögzítési pontok. Milyen hosszú a huzal?

4. Be lehet-e tolni egy 90 cm széles és 2 m magas ajtón egy 2,2 m oldalhosszúságú, négyzet alakú bútorlapot?

5. A gyerekek deltoid alakú sárkányt készítenek, melynek két átlója egy 60 cm és egy 42 cm hosszú nádszál. A rövidebb átló harmadolja a hosszabbat. A nád végeit egy vékony huzallal kötik össze. Milyen hosszú ennek a huzalnak a hossza, ha a kötésekre plusz 18 cm-t fognak elhasználni?

6. Egy téglalap alakú telek egyik oldalának hossza 28 méter, a két szemközti csúcsának távolsága pedig 53 méter. Mekkora a telek kerülete, illetve területe?

7. Kerítést szeretnénk készíteni az 1386 m² területű, derékszögű háromszög alakú zöldséskertünk köré. A kert 42 méter hosszúságú befogója mentén már elkészültünk vele. Milyen hosszú kerítést kell még készíteni, ha teljesen körbe akarjuk keríteni a kertet?

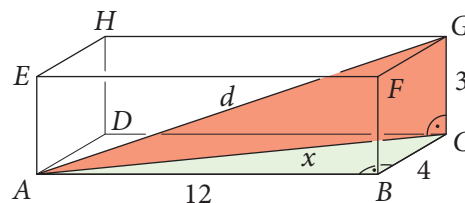
8. Add meg a derékszögű háromszög befogóihoz tartozó súlyvonalak hosszára vonatkozó képleteket, ha a befogók hossza a és b !

1. PÉLDA

Andris egy 3-szor 4-szer 12 cm-es, téglatest alakú dobozba szeretne beletenni egy mindkét végén kihegyezett, 13 cm hosszú ceruzát. Sikerrel járhat-e a próbálkozása?

Megoldás

A téglatest alakú doboz két legtávolabbi csúcsának távolságát kellene meghatároznunk, vagyis a téglatest testátlójának hosszát. Az ábránkon az AG egy ilyen testátló.



Az ABC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $x^2 = 12^2 + 4^2$.

Az ACG derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $d^2 = x^2 + 3^2$.

Helyettesítsük be az x^2 értékét: $d^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2$, azaz: $d^2 = 169$.

Ezek alapján a testátló hossza: $d = \sqrt{169} = 13$.

Tehát a 13 cm hosszú ceruza átlósan éppen elférhet a dobozban.

A látottak alapján az a , b és c élhosszúságú téglatest testátlójának hossza: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2. PÉLDA

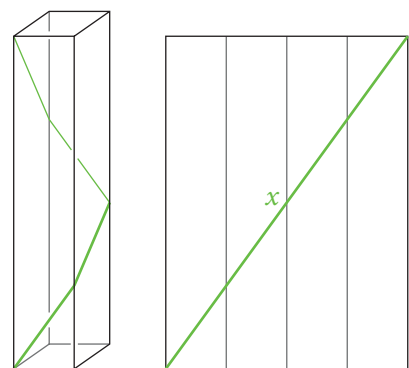
Egy 20 cm-szer 20 cm-es keresztmetszetű, 110 cm magas négyzetes oszlopon mászik egy hangya. Az útvonalát az ábra mutatja. Tudjuk, hogy útjának a vízszintessel bezárt szöge mindig ugyanakkora. Milyen hosszú utat tett meg, amíg az aljától feljutott az oszlop tetejéig?

Megoldás

Ha az oszlop négy oldalapját egymás mellé kiterítjük, akkor a hangya útvonala egy szakaszt alkot, mivel tudjuk, hogy útjának a vízszintessel bezárt szöge mindig ugyanakkora. Jelöljük a hangya útjának, azaz az ábrán zölddel jelölt szakasznak a hosszát x -szel. Az oszlop adatait felhasználva felírható a Pitagorasz-tétel: $x^2 = 80^2 + 110^2$.

Ezek szerint a hangya útjának hossza:

$$x = \sqrt{6400 + 12100} = \sqrt{18500} \approx 136 \text{ (cm)}.$$

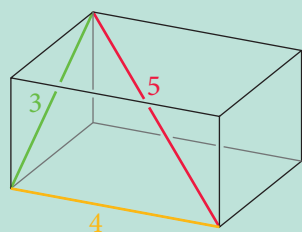


Érdekesség

A 3, 4 és 5 egység hosszú oldalakból kialakított háromszögről már láttuk, hogy derékszögű. Ennek a háromszögnek a segítségével a mindennapi életben könnyen kijelölhető a derékszög.

Egy hosszú zsinórra, egymástól egyenlő távolságokra csomókat kötünk. Az első és a tizenharmadik csomó összeillesztésével a zsinórt háromszög alakúra feszítjük úgy, hogy a háromszög csúcsai az első, a negyedik és a nyolcadik csomónál legyenek. Így derékszögű háromszöget kapunk.

Ennek a háromszögnek az ókori egyiptomiak és az ázsiai



népek is évezredek óta ismerték a gyakorlati jelentőségét. A régészek ezeket a hosszúságokat faragott köveken is megtalálták, sőt Kheopsz fáraó piramisában, a királysobában is megtalálható ez a háromszög. A szoba átlója 5, a leghosszabb fal éle 4, a legkisebb fal átlója pedig 3 egység hosszúságú.

Az ókorban ezt az alakzatot mágikus síkidomnak tartották. *Plutarkhosz* szerint ez a legszebb háromszög.

FELADATOK

1. Megadtuk egy téglatest három oldalának hosszát. Milyen hosszúak a téglatest lapátloi és a testátlója?
a) $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ b) $a = 5$, $b = 7$, $c = 10$
2. Egy téglatest alakú szoba egyik alsó sarkából el kellene jutni a szoba legtávolabbi csúcsába. A használható útvonalak a következők: a testátló; egy lapátló és utána egy él; három él valamilyen sorrendben. Hányféle útvonal van összesen?
3. Egy téglatest alakú szoba méretei 5 m, 4 m és 2,4 m. Hány különböző hosszúságú útvonal van az előző feladatban leírt útvonalak között? Add meg ezeket!
4. Egy téglatest testátlója 10 cm. Lehet-e a téglatest minden élhossza centiméterben mérve egész szám?
5. Egy 16 cm-szer 16 cm-es keresztmetszetű, 2 m magas, függőlegesen álló négyzetes oszlopon négy hangya mászik. Mindegyik az alsó alaplap egy-egy csúcsából indult. Tudjuk, hogy a hangyák egyenes útvonalának a vízszintessel bezárt szöge mindig ugyanannyi. Milyen hosszú utat tesznek meg, amíg az oszlop aljától feljutnak az oszlop tetején lévő csúcsig, ha
a) az első hangya csak egy lapon;
b) a második hangya két lapon;
c) a harmadik hangya három lapon;
d) a negyedik hangya négy lapon mászott?
6. Egy téglatest három különböző lapján 5 cm, $\sqrt{153}$ cm és $\sqrt{160}$ cm a lapátlók hossza. Milyen hosszú a testátló?

1. PÉLDA

Határozzuk meg az $a = 14$ cm oldalhosszúságú szabályos háromszög magasságának hosszát!

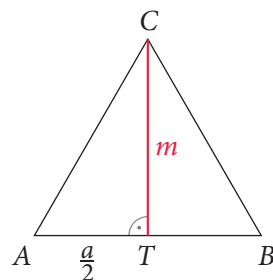
Megoldás

Az ATC derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt alkalmazzuk:

$$m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2.$$

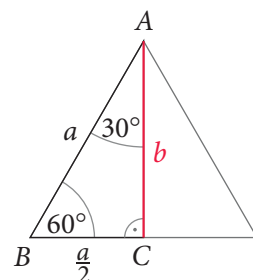
Kifejezzük az m -et, és behelyettesítjük az a értékét:

$$m = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 14 = 7 \cdot \sqrt{3} \approx 12,12 \text{ (cm)}.$$



Vagyis az a oldalú szabályos háromszög magasságának hossza az oldal $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -szeresével egyenlő, azaz $m = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ez az összefüggés akkor is alkalmazható, ha az a átfogójú 30° -os hegyesszöggel rendelkező derékszögű háromszög hosszabbik befogójának a hosszát szeretnénk meghatározni. A rövidebb befogó ekkor $\frac{a}{2}$.



2. PÉLDA

Mekkora az $a = 14$ cm oldalhosszúságú szabályos háromszög területe?

Megoldás

A háromszög területe az oldal és a hozzá tartozó magassághossz ismeretében kiszámolható. Tudjuk, hogy az a oldalú szabályos háromszög magassága: $m = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{ezért a területe: } t = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{14^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 49 \cdot \sqrt{3} \approx 84,9 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vagyis az a oldalú szabályos háromszög területe az oldalhossz négyzetének a $\frac{\sqrt{3}}{4}$ -szeresével egyenlő, azaz $t = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. PÉLDA

Kivágtunk papírból egy 10 cm oldalhosszúságú négyzetlapot. Hány milliméter lesz az oldalhosszúsága a vele azonos területű, szabályos háromszög alakú papírlapnak?

Megoldás

A négyzet területe: $a^2 = 10^2 = 100 \text{ (cm}^2\text{)}.$

A szabályos háromszög ismeretlen oldala legyen b , ekkor a területe: $b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$

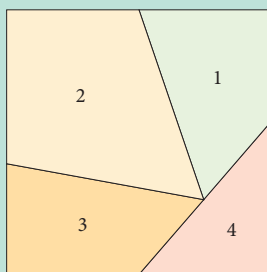
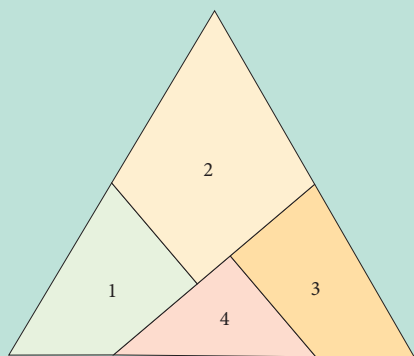
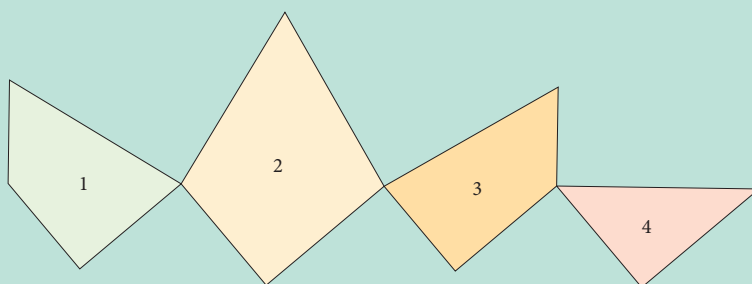
A két síkidom területe egyenlő: $b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 100.$ Vagyis: $b = \sqrt{\frac{400}{\sqrt{3}}} \approx 15,2 \text{ (cm)}.$

A szabályos háromszög oldalhossza körülbelül 152 mm lesz.

Érdekesség

Ha az előző példában látott négyzetet megfelelő sokszögekre vágod, akkor a négyzetet átdarabolhatod a vele egyenlő területű szabályos háromszögbe.

Másold le az ábrán egymáshoz kapcsolódó négy sokszöget! Használj átlátszó papírt! A négy szabálytalan sokszög alkotta láncot négyzetté és szabályos háromszöggé is összecsukszhatod.



Bolyai Farkas (1775–1856) bizonyította, hogy az egyenlő területű sokszögek átdarabolhatók egymásba. Bolyai Farkas a matematika mellett más tudományterületekkel és művészetekkel is foglalkozott. Matematika-, fizika- és kémiaprofesszorként dolgozott Marosvásárhelyen, és rengeteget tett a korszerű természettudományos ismeretek elterjesztése érdekében. Leghíresebb tanítványa fia, Bolyai János (1802–1860) volt, aki az egyik legismertebb magyar matematikus. A szakirodalomban és a világhálón további érdekességeket is találhatsz róluk.

4. PÉLDA

Mekkora az $a = 12$ cm élhosszúságú kocka lapátlója és testátlója?

Megoldás

Az ABC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt alkalmazva:

$$e^2 = a^2 + a^2.$$

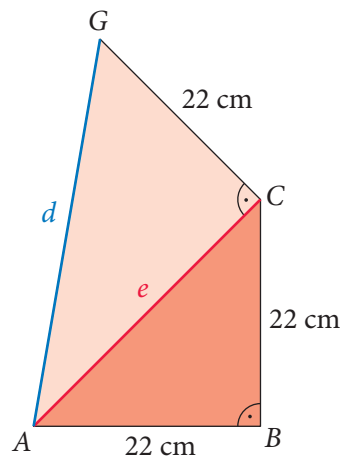
Vagyis a lapátló hossza: $e = \sqrt{2 \cdot a^2} = a \cdot \sqrt{2} = 12 \cdot \sqrt{2} \approx 17,0$ (cm).

Az ACG derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt alkalmazva:

$$d^2 = e^2 + a^2.$$

Vagyis a testátló hossza:

$$d = \sqrt{2 \cdot a^2 + a^2} = \sqrt{3 \cdot a^2} = a \cdot \sqrt{3} = 12 \cdot \sqrt{3} \approx 20,8$$
 (cm).



Természetesen a kocka testátlójának hosszát közvetlenül a téglatest testátlójának képletével is meghatározhattuk volna.

A példa alapján megfogalmazunk két fontos állítást.

Az a oldalú négyzet átlójának hossza az oldal hosszának $\sqrt{2}$ -szeresével egyenlő, azaz $a \cdot \sqrt{2}$.

Az a élű kocka testátlójának hossza az él hosszának a $\sqrt{3}$ -szorosával egyenlő, azaz $a \cdot \sqrt{3}$.

Ebben a leckében négy összefüggést foglaltunk meg a példák alapján. Ezeket a Pitagorasz-tétel ismeretében bármikor újra tudjuk alkotni, ha szükségünk lesz rá.

FELADATOK

1. Mekkora a szabályos háromszög magassága és területe, ha az oldalhossza

- a) 26 cm; b) 52 cm;
c) $\sqrt{3}$ cm; d) $\sqrt{12}$ cm?

2. Megadtuk a négyzet átlójának hosszát. Milyen hosszú az oldala?

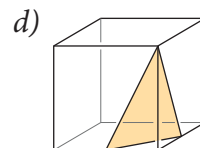
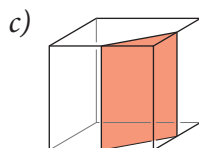
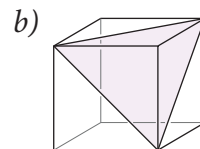
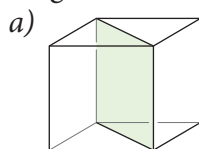
- a) $\sqrt{2}$ dm b) $\sqrt{3}$ dm
c) 6 dm d) 1,4 dm

3. Add meg a szabályos háromszög oldalának és magasságának a hosszát, ha a területe

- a) 100 m^2 ; b) 400 m^2 ;
c) $9\sqrt{3} \text{ m}^2$; d) $81\sqrt{3} \text{ m}^2$!

4. Mennyivel hosszabb a kocka testátlója, mint a lapátlója, ha az éle 22 cm hosszú?

5. Mekkora az ábrákon látható színes sokszögek területe, ha a kockák éle 8 cm hosszú?



6. Az „Elsőbbségadás kötelező!” tábla egy 450 mm oldalhosszúságú szabályos háromszög. Körben egy 6 cm széles piros sáv van rajta.

- a) Mekkora az oldalhossza a belső fehér szabályos háromszögnek?
b) Mekkora a piros rész területe?



7. Egy 5 méter széles és 2,5 méter magas falat szabályos hatszögletű burkolólapokkal szeretnénk befedni. A lapok oldalainak hossza 14 cm. A burkolólapokat tizenkét darabos csomagokban lehet megvásárolni. Hány csomaggal kell venni, ha a szabások miatt a burkolandó felületnél 5%-kal többet kell számolnunk?



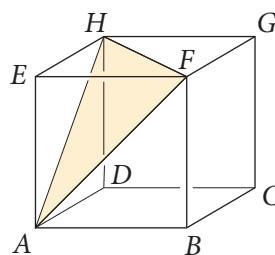
8. Egy szabályos hatszögletű faládika belseje 5,5 cm magas. A szemközti oldallapjai a doboz belsejében 9,5 cm-re vannak egymástól. Mekkora a doboz térfogata?



9. Mekkora a kocka felszíne és térfogata, ha a
a) lapátlója; b) testátlója
15 cm hosszú?

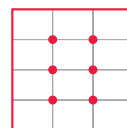
10. Egy téglatest két élének hossza 11 cm és 12 cm, a testátlója pedig 133 cm hosszú. Milyen hosszú a harmadik él?

11. Az $ABCDEFGH$ kockát szétvágtuk az AFH sík mentén. A kisebb test felszíne 300 cm^2 . Mekkora a kocka éle?

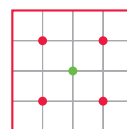


12. Képzeld el a nyolc darab egyforma, 1 cm élű kockából elkészíthető összes lehetséges téglatestet! Add meg az így kapott téglatestek lapátlóinak és testátlóinak hosszát!

13. Egy 2,4 cm élű dobókocka egyik lapján hat pötty helyezkedik el az ábrán látható módon. Milyen messze vannak ezek a szemközti lap közepén található pöttytől?



14. Egy átlátszó dobókocka tetején négy piros pötty van, de az ábrán a kocka átláthatósága miatt a szemközti lap három pöttyéből a középső is látszik. Mekkora a kocka éle, ha ez a középső pötty a fentieként pontosan $\sqrt{4,5}$ cm-re van?

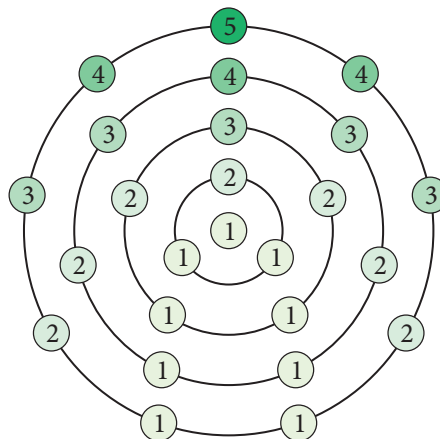


CSOPORTMUNKA

Alakítsatok két-három fős csoportokat, és vizsgáljátok meg a mellékelt ábrát!

Adjátok össze a körvonalak mentén elhelyezkedő számokat! Rajzoljatok néhány további kört a megkezdett szabályszerűség alapján, és írjátok a kis körökbe a megfelelő számokat! Adjátok meg ezek összegét is! Mi a sejtésetek az így kapott összegekről? Próbáljátok magyarázatot adni a sejtésre!

Nem tudjuk biztosan, de lehetséges, hogy a számoknak ez az elrendezési ötlete Püthagoraszról származik. Ezért ezeket a köröket Pitagorasz-köröknek nevezzük.



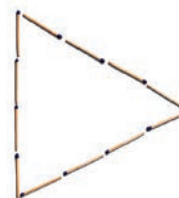
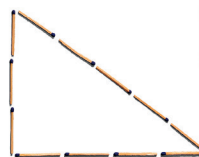
1. PÉLDA

Hányféle háromszöget készíthetünk tizenkét gyufaszál felhasználásával? A kapott háromszögeket csoportosítsuk (hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű)!

Megoldás

Bontsuk a 12-t három egész szám összegére! A sorrend most nem számít.

$1 + 1 + 10$ $2 + 2 + 8$ $3 + 3 + 6$ $4 + 4 + 4$
 $1 + 2 + 9$ $2 + 3 + 7$ $3 + 4 + 5$
 $1 + 3 + 8$ $2 + 4 + 6$
 $1 + 4 + 7$ $2 + 5 + 5$
 $1 + 5 + 6$



A háromszög-egyenlőtlenség miatt csak a színessel kiemelt összegek megfelelőek.

Mivel $2^2 + 5^2 > 5^2$, $4^2 + 4^2 > 4^2$, $3^2 + 4^2 = 5^2$,

ezért az első két számhármaz hegyesszögű, a harmadik pedig derékszögű háromszöget határoz meg.

A 3, 4 és 5 egység oldalhosszúságú háromszöggel már korábban is találkoztunk. Tudjuk, hogy – a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt – ez a háromszög derékszögű, és az elmúlt ezredévekben fontos szerepe volt a terepen való mérésekben. Vannak-e további olyan derékszögű háromszögek, amelyeknek minden oldalhossza egész szám? Némi próbálkozás után sok ilyen tulajdonságú háromszöget lehet találni. Az ilyen háromszögeket **Pitagorasz-féle háromszögeknek**, a három oldal hosszának mérőszámát pedig **pitagorasi számhármaznak** nevezzük.

A következő táblázat néhány pitagorasi számhármast tartalmaz:

a	3	5	7	8	9	11	12	13	16	20
b	4	12	24	15	40	60	35	84	63	21
c	5	13	25	17	41	61	37	85	65	29

Ha egy pitagoraszai számhármast minden tagját ugyanazzal az egész számmal szorozzuk meg, akkor is pitagoraszai számhármast kapunk. Az így kapott számhármashoz tartozó háromszög hasonló lesz az eredetihez, az oldalhosszak pedig ebből adódóan egész számok maradnak. A táblázatban csak olyan számhármastok szerepelnek, amelyek legnagyobb közös osztója az 1.

Hogyan tudnánk ilyen számhármastokat alkotni?

Az óra elején a csoportmunkában sejtésként négyzetszámokra gondolhattatok. Írjuk le egymás mellé a négyzetszámokat! Írjuk két szomszédos négyzetszám alá a különbségüket!

1 4 9 **16 25** 36 49 64 81 100 121 **144 169** 196 225 256 289 324 361 ...
 3 5 7 **9** 11 13 15 17 19 21 23 **25** 27 29 31 33 35 37 ...

Igazolható, hogy az alsó sorban a páratlan számok szerepelnek, növekedő sorrendben. Bejelöltük közülük a négyzetszámokat, illetve a felettük lévő két négyzetszámot is. Ezek szerint:

$25 - 16 = 9$, azaz: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Ez a 3, 4, 5 számhármast adja.

$169 - 144 = 25$, azaz: $5^2 + 12^2 = 13^2$. Ez az 5, 12, 13 számhármast adja.

Az alsó sor végtelen sok négyzetszámot tartalmaz, ezért végtelen sok pitagoraszai számhármast létezik. Ilyen módon azonban nem tudjuk az összes számhármast elkészíteni. A táblázatunkban is szerepel olyan, amelyik nem ebből az eljárásból származik (például: 8, 15, 17).

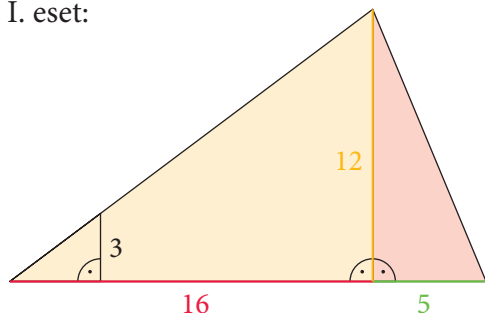
2. PÉLDA

A 3, 4, 5 egység oldalhosszúságú Pitagorasz-féle háromszöget nagyítsuk akkora Pitagorasz-féle háromszöggé, hogy az 5, 12, 13 egység oldalhosszúságú háromszöggel egy-egy befogójuk mentén összeillesztve egy új háromszöget kapjunk! Mekkora lesz az így kapott háromszög területe?

Megoldás

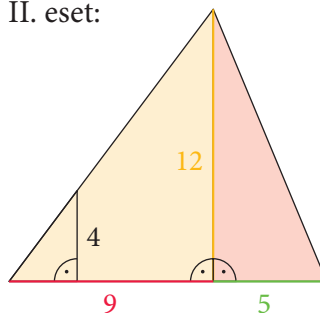
A 3-nak és a 4-nek az 5 nem a többszöröse. A megadott befogók hosszát figyelve a 3-nak és a 4-nek csak a 12 lehet a többszöröse. Vagyis két eset lehetséges. Az első esetben 4, a második esetben 3 a nagyítás aránya.

I. eset:



$$t = \frac{(16 + 5) \cdot 12}{2} = 126$$

II. eset:



$$t = \frac{(9 + 5) \cdot 12}{2} = 84$$

Az előző példában látott két háromszög oldalainak hossza és területük mérőszáma is egész szám. Érdeklődésként megemlíjtük, hogy az ilyen háromszögeket Hérón-féle háromszögeknek nevezzük.

Hérón matematikus és fizikus volt, aki a Kr. u. I. században élt. Nagyon keveset tudunk róla. Írásai gyűjteményes jellegűek, fellelhető bennük egyiptomi, hindu és babiloni hatás is. Többek között a síkidomok területszámításával és a testek térfogatszámításával is nagyon részletesen foglalkozott.

FELADATOK

1. Megadtuk a derékszögű háromszög befogóinak hosszát. Pitagorasz-féle háromszöget alkotnak-e?

- a) $a = 28, b = 45$ b) $a = 33, b = 56$
c) $a = 34, b = 79$ d) $a = 36, b = 77$

2. Egy háromszög minden oldalhosszának mérőszáma egész szám, a kerülete pedig 8 egység. Mutasd meg, hogy egy ilyen háromszög nem lehet derékszögű!

3. Három egymást követő pozitív egész szám lehet-e pitagorasz-i számhármass?

4. A 37, 48, 55 egy pitagorasz-i számhármass – állítja Előd. Aztán észreveszi, hogy valamelyik számban a két számjegyet felcserélte. Segíts megtalálni a hibát!

5. Két Pitagorasz-féle háromszög összeillesztésével készíts olyan háromszöget, amelyben az oldalhosszak mérőszáma és a terület mérőszáma is egész szám (vagyis készíts Hérón-féle háromszöget)!

6. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója azonos hosszúságú egy félbevágott szabályos háromszögből kapott derékszögű háromszöghosszabb befogójával. A két háromszög összeillesztésével is „nevezetes” háromszöget kapsz. Határozd meg a szögeinek az arányát! Ugye látod a háromszög „nevezetességét”?

7. Határozd meg azokat a Pitagorasz-féle háromszögeket, amelyek területe 30 egység!

8. A koordináta-rendszerben a $K(3; 2)$ középpontú körre illeszkedik a

- a) $P(5; 3)$ pont;
b) $Q(15; 7)$ pont.

Add meg a körvonalra illeszkedő további rácspontokat!

9. A következő állításokat a leckében szereplő tíz Pitagorasz-féle háromszögről fogalmaztuk meg. Döntsd el, hogy erre a tíz háromszögre vonatkozóan melyik kijelentés igaz, illetve melyik hamis!

- a) Az átfogó hosszának mérőszáma mindig páratlan szám.
b) A számhármass valamelyik tagja osztható öttel.
c) Van közöttük olyan, amelyben mindkét befogó hosszának mérőszáma páratlan szám.
d) Mindegyik háromszög területének mérőszáma egész szám.
e) Van közöttük olyan számhármass, amelyben nincs hárommal osztható szám.
f) Van olyan, amelyikben az átfogó hosszának mérőszáma osztható hárommal.

(Annak megválaszolása, hogy ezek a kijelentések *minden* Pitagorasz-féle háromszögre érvényesek-e, nem könnyű feladat, ezért ezt nem is szerepeltetjük feladatként.)

Egyéni megfigyelés

Jelölj ki a füzetben egy K pontot! Rajzolj egy K középpontú, tetszőleges sugarú kört! Rajzold meg egy átmérőjét, amelynek két vége legyen A és B ! Válassz a körvonalról néhány C pontot, és mindegyik esetében mérd meg az ACB szöget! Mi a sejtésed?

Hasonlóan a BKC is egyenlő szárú háromszög, amelyben a B és a C csúcsnál van egyenlő szög. Ezt jelöltük β -val.

Mivel a háromszögek belső szögeinek összege 180° , ezért az ABC háromszögben:

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, azaz $\alpha + \beta = 90^\circ$. Ezek szerint a C csúcsnál derékszög van.

A bebizonyított állítást **Thalész-tétel**nek nevezzük:

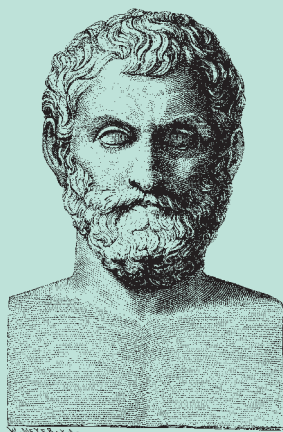
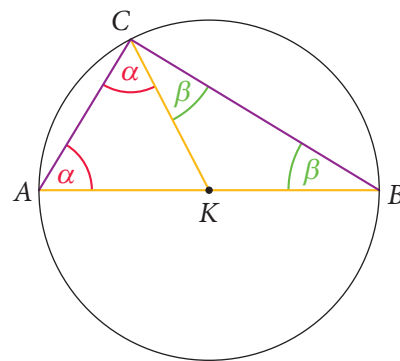
Ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk. (A kör átmérője a derékszögű háromszög átfogója lesz.)

Az is igazolható, hogy a körlap egy belső P pontja esetén az APB szög tompaszög, egy külső Q pont esetén (ami nem illeszkedik az AB egyenesre) pedig az AQB szög hegyesszög lesz.

Igaz a **Thalész-tétel megfordítása** is:

Ha egy AB szakasz valamely C pontból derékszögben látszik (azaz ACB szög derékszög), akkor az AB átmérőjű körnek C az egyik pontja.

Az AB átmérőjű kört az AB szakasz Thalész-körének nevezzük. Az AB átmérő a Thalész-kör minden pontjából (kivéve az A és B pontok) derékszögben látszik.



Thalész, görög filozófus és matematikus Kr. e. VI. században élt, 590 körül. Elemi geometriai állítások megfogalmazása, és többek között a szög fogalmának tisztázása is a nevéhez fűződik.

Megállapította, hogy az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők. Felismerte, hogy a kört az átmérője felezi. Emellett olyan csillagászati ismeretekkel is rendelkezett, amelyek segítségével előre ki tudta számítani egy napfogyatkozás pontos idejét.

Ő volt az első a görögök között, aki a természet egységének racionális magyarázatával is foglalkozott.

1. PÉLDA

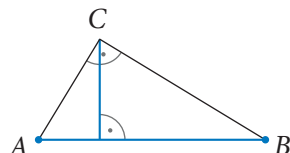
Ismert egy derékszögű háromszög c átfogója és az átfogóhoz tartozó m_c magassága. Szerkesszük meg a háromszöget!

Adatok:



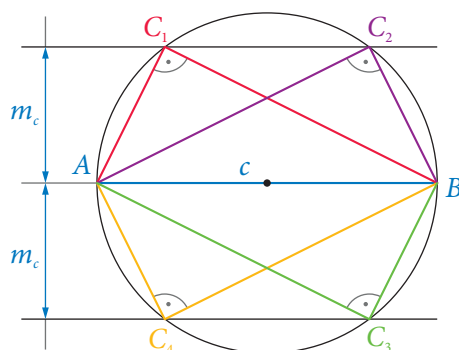
Megoldás

Vázlat:



Vegyük fel az ismert AB szakaszt! A megszerkesztendő C pont illeszkedik az AB -től m_c távolságra lévő párhuzamos egyenesre. Két ilyen egyenes van. A C pont az AB Thalész-körére is illeszkedik. A két egyenesnek és a körnek a megadott adatok esetén négy metszéspontja van. A négy megoldás háromszögei egybevágók egymással, így azt mondhatjuk, hogy egyféle megfelelő háromszöget tudunk szerkeszteni.

Kivitelezés a leírás alapján:

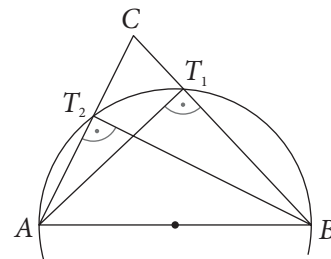


2. PÉLDA

Az ABC hegyesszögű háromszögben megrajzoljuk az A csúcsra illeszkedő magasságvonalat. Ez a szemközti oldalt a T_1 pontban metszi. Megrajzoljuk a B csúcsra illeszkedő magasságvonalat is. Ez a szemközti oldalt a T_2 pontban metszi. Igazoljuk, hogy az A, B, T_1 és T_2 pontok egy körvonalra illeszkednek!

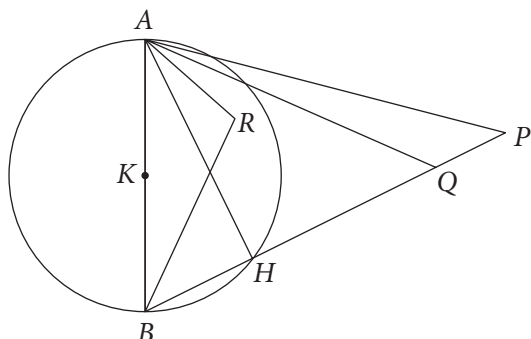
Megoldás

Mivel a magasságvonalak merőlegesek a szemközti oldalra, ezért az AB szakasz a T_1 és a T_2 pontokból is derékszögben látszik. Vagyis a T_1 és a T_2 pontok rajta vannak az AB Thalész-körén. Mivel ennek a körnek AB az átmérője, ezért a négy pont valóban egy körre illeszkedik.



FELADATOK

1. Rakd növekedő sorrendbe az ábrán látható AQB , APB , ARB , AKB , AHB szögeket!

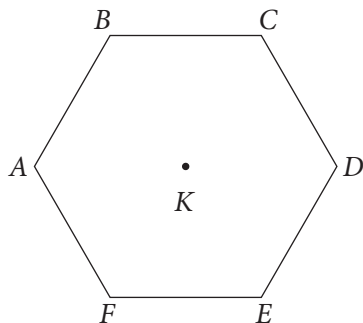


2. Az ABC hegyesszögű háromszögben a magasságok talppontjai legyenek P , Q és R , a magasságpont pedig legyen M . A megadott hét pontból az összes lehetséges módon válaszd ki azokat a pontnégyeseket, amelyek egy körre illeszkednek!

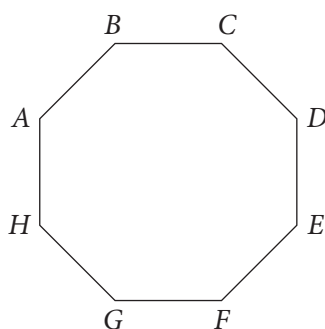
3. Egy kör alakú medence szélén hárman üldögélnek. Bendegúzzal szemben (a medence legtávolabbi pontjánál), tőle 15 méter távolságra Dömötör ücsörög, akitől Ferdinánd csak 4 méterre van. Milyen messze van Ferdinánd Bendegúztól?

4. Egy derékszögű háromszögnek adott az átfogója és az egyik befogója. Szerkeszd meg a háromszöget!

5. Hány darab derékszögű háromszöget határoz meg az ábrán látható hét pont? Sorold fel a háromszögeket!



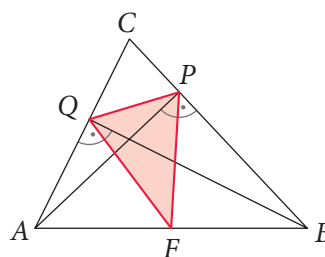
6. Hány darab derékszögű háromszöget határoz meg az ábrán látható nyolc pont?



7. Igaz-e a következő állítás? Válaszodat indokold!

Ha egy háromszög két rövidebb oldalára mint átmérőre egy-egy kört rajzolunk, akkor a két kör a harmadik oldalon metszi egymást.

8. Magyarázd el, hogy miért egyenlő szárú az ábrán látható PQF háromszög!



9. Igazak-e a következő állítások?

- A derékszögű háromszög átfogójának hossza kétszer akkora, mint az átfogóhoz tartozó súlyvonal hossza.
- A szabályos hatszög bármely két szomszédos csúcsához található egy olyan harmadik csúcs, amivel derékszögű háromszöget alkotnak.
- A szabályos ötszög csúcsaiból kiválasztható három olyan, amelyek derékszögű háromszöget határoznak meg.

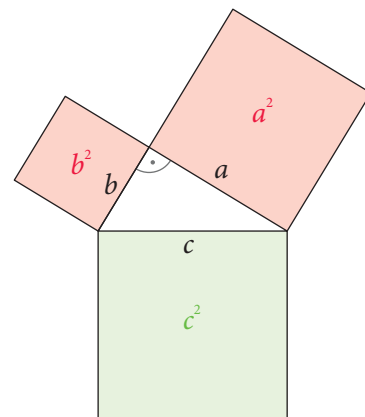
Ebben a fejezetben megismerkedtél a Pitagorasz-tétellel, amely síkban és térben is nagy segítség lehet ismeretlen szakaszok hosszának meghatározásában. Az eddig csak szerkesztéssel és méréssel meghatározható szakasz hosszakat most már ki is tudjuk számítani.

Derékszögű háromszög esetén a két befogóra rajzolt négyzet terület-összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével.

Ez az állítás a **Pitagorasz-tétel**.

Az ábra mutatja a szövegben megfogalmazott állítást:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



A **Pitagorasz-tétel megfordítása** is igaz:

Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

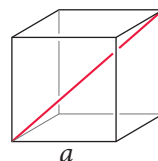
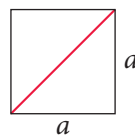
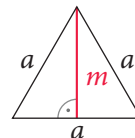
A Pitagorasz-tétel segítségével a számításokban nagyon jól használható összefüggésekhez jutottunk.

Az a oldalú szabályos háromszög magasságának hossza: $m = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Az a oldalú szabályos háromszög területe: $t = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Az a oldalú négyzet átlójának hossza: $a \cdot \sqrt{2}$.

Az a élű kocka testátlójának hossza: $a \cdot \sqrt{3}$.



FELADATOK

1. Melyik vonal hosszabb? Először tippelj, aztán számolj!



2. Egy fáskamra ajtaja 95 cm széles és 2 méter magas. Szeretnénk átlósan rászerezni egy vaspántot, hogy erősebb szerkezetű legyen. Milyen hosszú lehet ez a pánt maximálisan?

3. Az 1 : 200-as arányú felülnézeti tervrajzon az AB szakasz hossza 5 cm. A szakasz két vége között a valóságban 3 méter szintkülönbség van. Milyen hosszú a szakasz valójában?

4. Egy 12 méter széles, téglalap alakú kert egyik sarkában egy kerti csap található. Egy 25,5 méteres locsolócső pontosan átér a kert legtávolabbi sarkába.

a) Mekkora a kert területe?

b) A kert köré kerítést szeretnénk építeni. Mennyi dróthálót kell vásárolnunk a kerítéshez, ha a 3 méter széles bejárati kaput már elkészítettük?



5. Egy 4 cm oldalhosszúságú négyzetbe a lehető legnagyobb méretű nyomtatott Z betűt írtuk. Milyen hosszú vonalat húztunk?

6. Rajzolj a négyzethálóra egy

a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{10}$;

c) $\sqrt{13}$; d) $\sqrt{18}$

egység hosszúságú szakaszt!

7. Szabályos háromszöget szeretnénk rajzolni a koordináta-rendszerbe. Két csúcs koordinátái ismertek: $A(2; 1)$, $B(8; 1)$. Add meg a harmadik csúcs koordinátáit!

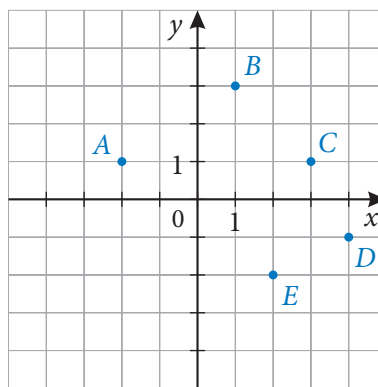
8. Egy négyzet alakú szobát parkettáznak. A négyzet átlója 3,8 méteres. Mekkora felületet kell parkettázni? Milyen hosszú lesz a szoba falai mentén futó szegőléc?

9. Egy 2,5 méter magas kétágú létrát úgy nyitottak ki, hogy a lábai a vízszintes talajon 90 cm-re vannak egymástól. Milyen távolságra van a talajtól a létra legmagasabb pontja?

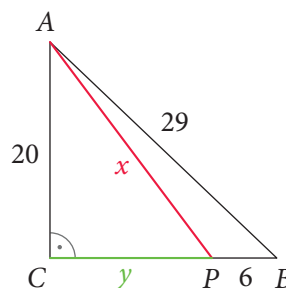
10. Van egy-egy 7 cm, 10 cm, 24 cm, 25 cm és 26 cm hosszúságú pálcánk. Hányféle háromszög állítható össze három pálcából? Van-e közöttük derékszögű?

11. Melyik hosszabb: a 12 cm élű kocka vagy a 8 cm, 12 cm és 16 cm élű téglatest testátlója? Tippelj, majd számolj!

12. Hány darab szakaszt határoz meg az ábrán látható öt pont? Keresd meg az egyenlő hosszúságú szakaszpárokat!



13. Milyen hosszúak az ábra színes szakaszai?



14. Egy dühös madár ül a 14 méter magas torony tetején. A vadász a torony lábától 35 méterre van, és a puskacsövét 2 méter magasra emeli. Hány métert kell megtennie a golyónak, míg elér a dühös madárig? Használd a Pitagorasz-tételt!

Az ezen az oldalon található, 15–22. tesztkérdésekhez mindig egy helyes válasz tartozik.

15. Egy kör 65 cm és 72 cm hosszúságú húrja merőleges egymásra, és egyik végpontjuk közös. Mekkora a kör sugara?

- A: 68,5 cm; B: 97 cm;
C: 48,5 cm; D: 194 cm;
E: Ilyen kör nem létezik.

16. Hány darab igaz a következő négy állítás közül?

- Ha egy háromszög minden oldalának hossza méterben kifejezve páratlan szám, akkor az nem lehet derékszögű háromszög.
- Három egymást követő egész szám nem lehet egy derékszögű háromszög oldalainak hossza.
- Ha egy háromszögnek van egység hosszúságú oldala, akkor az nem lehet Pitagorasz-féle háromszög.
- Van olyan Pitagorasz-féle háromszög, amelynek az átfogója 13 egység hosszúságú.

- A: 0; B: 1;
C: 2; D: 3;
E: 4.

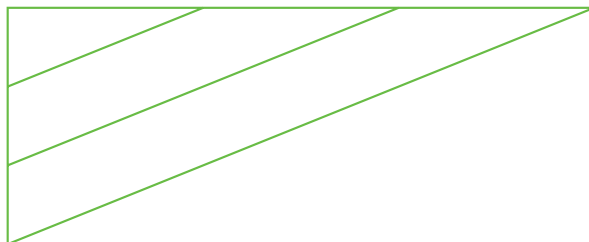
17. Egy 5 egység hosszúságú szakasz mindkét végpontja illeszkedik egy-egy tengelyre, és mindkét koordinátája egész szám. A szakasz nem illeszkedik egyik tengelyre sem. Milyen messze van az origó a szakasztól?

- A: 3; B: 4;
C: 5; D: 2,4;
E: Az előzőek egyike sem.

18. Egy deltoidnak 5 cm és 12 cm hosszúságú oldalai vannak, és csúcsai egy körre illeszkedik. Mekkora annak a körnek a sugara?

- A: 6 cm; B: 6,5 cm;
C: 8,5 cm; D: 9 cm;
E: Ilyen kör nem minden esetben létezik.

19. A képen látható 150-szer 60 cm-es törölközőn három párhuzamos csík van. Melyik állítás igaz?



- A: A három szakaszból lehetne háromszöget szerkeszteni.
B: Egy $0,9 \text{ m}^2$ tetejű asztalt ezzel a törölközővel pontosan le lehetne fedni.
C: A párhuzamos csíkok távolsága 20 cm.
D: A legrövidebb csík nem éri el az 50 cm-t.
E: A leghosszabb csík hossza milliméter pontossággal 161,6 cm.

20. Egy 20 cm magasságú szabályos háromszög oldalának hossza melyik megadott mennyiséghez van a legközelebb?

- A: 35 cm; B: 17 cm;
C: 18 cm; D: 23 cm;
E: 24 cm.

21. Két különböző kocka testátlóinak különbsége 3 cm. Mekkora az oldalai különbsége?

- A: Ennyi adatból nem mondható meg;
B: 3 cm; C: $3\sqrt{3}$ cm;
D: $\sqrt{3}$ cm; E: $\sqrt{2}$ cm.

22. Két egyenlő hosszúságú 6 cm hosszúságú szakaszból T betűt alakítottunk ki. Milyen messze van a betű vízszintes szárának egyik vége a függőleges szár aljától?

- A: $\sqrt{12}$ cm; B: 12 cm;
C: $\sqrt{45}$ cm; D: $\sqrt{72}$ cm;
E: 9 cm.

23. Attila és Bálint az iskola egyenes kerítéséhez rögzítette egy 25 méter hosszúságú kötél mindkét végét. A rögzítési pontok egymástól 24 méterre vannak. Cili megfogta a kötélt középtől és addig távolodott a kerítéstől, amíg a kötélt feszes nem lett. Milyen távolra került ekkor a kötélt közepe a kerítéstől?

24. Egy derékszög alakú képtámasz asztalon fekvő része 8 cm hosszú, a ferde része pedig 16 cm-es.

- Hány fokban áll a vízszintes asztalhoz képest a kép?
- Mekkora a képtámasz függőleges oldala?

25. Az asztalon öt különböző hosszúságú hurkapálca van. A hosszuk 7 cm, 15 cm, 20 cm, 24 cm és 25 cm.

- Hányféleképpen választhatunk közülük hármat úgy, hogy egy háromszöget lehessen összeállítani a három szakaszból, mint oldalból?
- Melyek lesznek derékszögű háromszögek az előzőek közül?

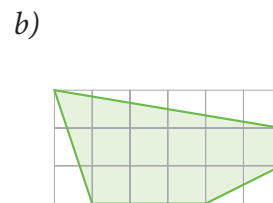
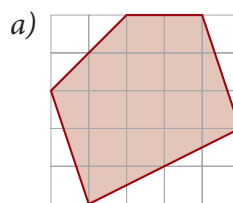
26. A szoba sarkából elindult egy hangya. Az útja egy vízszintes, egyenes szakasznak tekinthető a padlón. Amikor megállt, akkor az egyik faltól 39 mm-re, a másiktól pedig 80 mm-re volt. Mennyire távolodott el a saroktól?

27. Mekkora a területe a következő, oldalaikkal megadott háromszögeknek?

- 16 cm, 63 cm, 65 cm;
- 28 cm, 45 cm, 53 cm;
- 32 cm, 63 cm, 63 cm;
- 53 cm, 53 cm, 56 cm.

28. Tudjuk, hogy az $ABCD$ deltoidnak csak az A csúcsánál van derékszög. Az AB és az AD oldalak hossza 6 cm, a másik két oldal pedig 10 cm hosszú. Milyen hosszúak az átlók?

29. Mekkora a területe a rácsra rajzolt sokszögeknek? A szomszédos párhuzamos egyenesek 5 mm-re vannak egymástól.



30. Adjunk képletet a rombusz oldalhosszára, ha az átlói e és f egység hosszúak!

31. Megmértük egy fiók belső részét: szélessége 40 cm, hosszúsága 60 cm, mélysége 12 cm. Elfér benne egy 73 cm-es vékony, egyenes fémrúd?

32. Van három darab egyforma zsömlénk, amelyek félgömbnek tekinthetők. A körlapjaik sugara 6 cm. Úgy tettük körlapjaikkal egy tányérra a zsömléket, hogy páronként egymáshoz érnek. Milyen messze van egy zsömle teteje,

- egy másiknak a tányéron lévő közepétől;
- a másik kettőnek az érintkezési pontjától?



Ahogy egyre többen nyertek bepillantást jövőbeli önmaguk életébe, egyre izgatottabban várták a következő matekórai bemutatót...

Ezúttal számítógéppel sorsoltattam azt a három diákot, akik a mai órán használhatják a szkópot. Szépen egymás után jöhet...



Helén

A cég, amit képviselek, szervopótlással foglalkozik. Nagyon szép feladatnak érzem, hogy sérült vagy beteg embereket segítünk hozzá egy teljesebb élethez.

Az én feladatom marketingesként az, hogy összesítsem a kutatási eredményeket, illetve hogy bemutatásokat készítssek az orvosok és a betegek számára.

Nap mint nap rengeteg adat fut át a kezemben, melyeket mások által értelmezhetővé kell tegyek.

IV. Egyenletek, egyenlőtlenségek



Panni

Nekem még fogalmam sincs, mit csinálok majd...

Emlékszem, ennyi idősen valóban nem tudtam, mi érdekel. Pontosabban szólva ezernyi dolog érdekelt: a matek, számítástechnika, a torna...nó meg a fiúk.

Most éppen hullámvasutat tervezünk egy vidámparknak.

y

x

Rengeteg számításra van szükség, de ami mindennél fontosabb az, hogy képes vagyok felismerni a problémákat, majd logikusan végig is tudom gondolni őket, egészen a megoldásig...
Mémóként szinte bármit meg tudok tervezni.



és végül Matyi.

Helló, srácok!

Nagyrészt a látványtervek és a makettek nyerik meg a megrendelőt...

Az elején azt reméltem, hogy formatervezőként csak rajzolni és modellezgetnem kell majd.

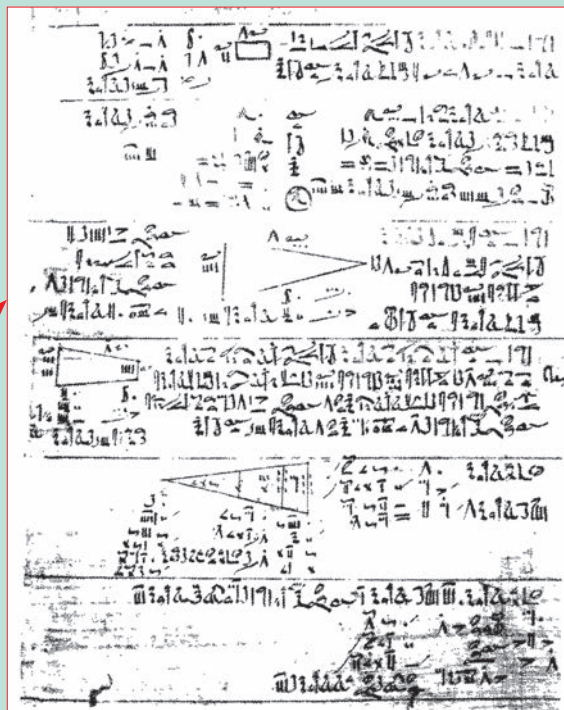
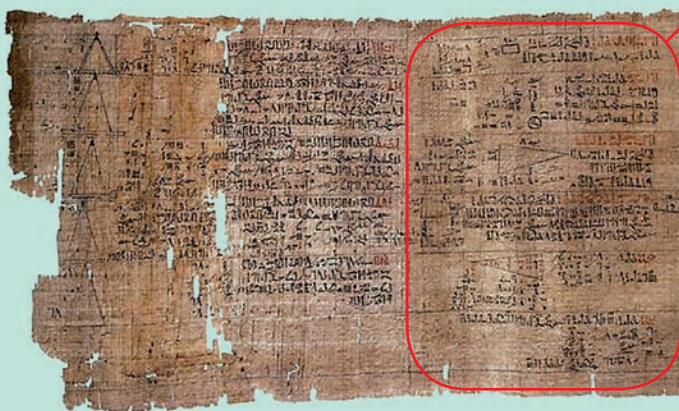
Már az egyetemen kiderült, hogy nem egészen így van...

...de ezután rengeteg statikai számítás, a tervek pontos méretezése, anyag- és gyártási költségkalkulációk következnek. Ezek mind elengedhetetlenek egy formatervező hétköznapijaiban.



Az egyenletmegoldás kezdetei

Az írásos agyagtáblák tanúsága szerint az ókori Mezopotámiában (Kr. e. 2000) már tudtak szorozni, négyzetre emelni, ki tudták számolni a számok reciprokát, valamint meg tudtak oldani egyszerű egyenleteket és egyenletrendszereket is. Képleteket azonban még nem használtak, a megoldást szavakba öntött utasításokkal adták meg. Az egyiptomi algebra nem volt annyira fejlett, mint a mezopotámiai, de hasznos számítások elvégzésére alkalmas volt. Ezt bizonyítja a híres óegyiptomi, számtannal és mértannal foglalkozó Rhind-papiirusz is, amelyet Jahmesz (Ahmesz) írnok készített Kr. e. 1850 táján. Az iratot gyakran Ahmesz-papiirusznak is szokták nevezni. A tekercsen 85 darab, hétköznapi élettel összefüggő egyszerű matematikai probléma és azok megoldása található. Van köztük szorzás, osztás, egyenletmegoldás és terület-, illetve térfogatszámítási példa is.



1. PÉLDA

Gondoltam egy számra. A szám négyszeresénél 66-tal nagyobb szám fele éppen 100. Melyik számra gondoltam?

Megoldás

Jelöljük a számot x -szel. A szöveg alapján felírt összefüggés:

$$(4x + 66) : 2 = 100.$$

Oldjuk meg az egyenletet a **lebontogatás módszerével!**

A szám négyyszeresénél 66-tal nagyobb szám egyenlő 200-zal, ebből a szám négyszerese 66-tal kevesebb, azaz 134, így a gondolt szám ennek a negyede: 33,5.

A kapott eredményt mindig az eredeti szövegbe helyettesítve ellenőrizzük!

2. PÉLDA

Egy születésnapi partin minden résztvevő kezét fogott mindenkivel, így 136 kézfogás történt. Hányan vettek részt a születésnapi partin?

Megoldás

A megoldást a pozitív egész számok halmazán keressük. Jelöljük a résztvevők számát x -szel. 1 résztvevő $x - 1$ emberrel fogott kezét, hiszen saját magával senki sem fog kezét. Ez mindenkiről elmondható, azaz mind az x résztvevő $x - 1$ emberrel fogott kezét. Ez összesen $x \cdot (x - 1)$ kézfogás, de így minden kézfogást kétszer számoltunk. Például Mátyás és Jakab kézfogását megszámláltuk akkor is, amikor Mátyás kézfogásait számoltuk össze, és akkor is, amikor Jakab kézfogásait vettük számba.

Ezek alapján felírható a következő egyenlet: $\frac{x(x-1)}{2} = 136$, ebből
 $x(x-1) = 272$.

Ezt az egyenletet **próbálgatással** tudjuk megoldani.

Mivel x pozitív egész szám, ezért néhány esetet kipróbálva eljutunk a megoldáshoz.

x	5	10	15	16	17
$x(x-1)$	20	90	210	240	272

A megoldás tehát a 17. Több lehetőség nincsen, mert nagyobb szám választása esetén az $x(x-1)$ szorzat nagyobb lesz az előző szorzat értékénél. Tehát a születésnapi partin 17 résztvevő volt.

Ellenőrzés: 17 résztvevő esetén $\frac{17 \cdot 16}{2} = 136$ kézfogás történt.

3. PÉLDA

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az egész számok halmazán!

a) $8(x+2) + 3(x+5) = x + 121$

b) $x + 15 = 2 \cdot (x + 10) - (x + 5)$

c) $2(x+4) + x - 10 = 5(x+4) - 2(x+6)$

Megoldás

a) Bontsuk fel a zárójeleket, majd összevonás után alkalmazzuk a **mérlegelvet**!

$$8x + 16 + 3x + 15 = x + 121$$

$$11x + 31 = x + 121 \quad / -31$$

$$11x = x + 90 \quad / -x$$

$$10x = 90 \quad / : 10$$

$$x = 9$$

Ellenőrzés: $8 \cdot (9 + 2) + 3 \cdot (9 + 5) = 8 \cdot 11 + 3 \cdot 14 = 130$. Tehát az egyenlet megoldása a 9.

- b) Bontsuk fel a zárójeleket, majd összevonás után alkalmazzuk a mérlegelevet!

$$x + 15 = 2x + 20 - x - 5$$

$$x + 15 = x + 15 \quad / -x$$

$$15 = 15$$

Mit jelent ez az eredmény? Ez egy igaz egyenlőség, ami azt jelenti, hogy az egyenletnek minden egész szám megoldása. Ezt **azonosságnak** nevezzük.

Mivel a megoldást az egész számok halmazán kerestük, ezért ebben az esetben az egyenletnek végtelen sok megoldása van. Ellenőrzésképpen helyettesítsünk az egyenletbe egy-két találmányra választott értéket!

- c) Oldjuk meg az a) példához hasonló módon!

$$2x + 8 + x - 10 = 5x + 20 - 2x - 12$$

$$3x - 2 = 3x + 8 \quad / -3x$$

$$-2 = 8$$

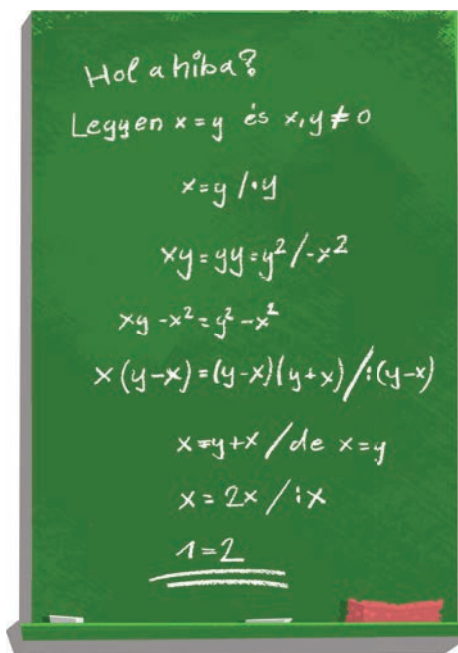
Ez az egyenlőség nem igaz. **Ellentmondásra** jutottunk. Ennek az egyenletnek semmilyen számhalmazon nincs megoldása.

Azt a számhalmazt, amelyben a megoldást keressük, **alaphalmaznak** nevezzük. Ha nem teszünk semmilyen megkötést, akkor mindig a lehető legbővebb számhalmazra szoktunk gondolni. Az első példában ez az eset áll fenn, az alaphalmaz a tanult számok halmaza. A második példában az alaphalmaz a szöveg értelmezése alapján a pozitív egész számok halmaza, a harmadik példában pedig az egész számok halmaza volt. A kapott megoldások alkotják az egyenlet igazsághalmazát.

CSOPORTMUNKA

Alkossatok négyfős csoportokat. Osszátok szét egymás között a felsorolt négy kérdést, és mindenki írjon egy lapra egy gondolatot a saját kérdésével kapcsolatban. Ha készen vagytok, adjátok tovább a lapot a tőletek balra ülőnek, aki hozzáír valamit a már leírt gondolathoz, majd újra továbbadja. Közösén beszéljétek meg a leírtakat, amikor a négy lap körbejárt!

1. Mit értünk az egyenlet alaphalmazán?
2. Mely számok alkotják az egyenlet igazsághalmazát?
3. Mit jelentenek az alábbi egyenletmegoldási módszerek? Mikor melyiket célszerű alkalmazni?
 - mérlegelev
 - lebontogatás módszere
 - próbálgatás módszere



FELADATOK

1. Oldd meg az egyenleteket az egész számok halmazán!

- a) $5x - 10 = 25$
- b) $4 \cdot (3x - 2) = 28$
- c) $12x + 22 = 8x - 6$
- d) $5x + 21 - 3x = -8 + 3x$

2. Oldd meg az egyenleteket a racionális számok halmazán a lebontogatás módszerével!

- a) $(3x + 6) : 8 - 7 = 2$
- b) $\left(\frac{x}{2} + 4\right) \cdot 9 = 27$
- c) $\frac{(x + 3) \cdot 4}{5} = 6$
- d) $\frac{-2,1(x - 53)}{1,4} = 63$
- e) $\left(\frac{5}{2}x - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{9}{5} = 7,8$

3. Oldd meg az egyenleteket a racionális számok halmazán!

- a) $8x - 3(x + 4) = 3x - 26$
- b) $4(2x - 9) = 5(6 + x)$
- c) $-3(8 - 7x) + 6 = 4 - 4(2x - 9)$
- d) $x - 7 + 6(2x - 8) = 9 - 2(5 - 4x) + x$
- e) $5(x - 3) + \frac{3}{5} = \frac{3}{4}(8x + 6)$
- f) $\frac{7}{6}(-9 - x) = \frac{3}{2}(5x - 7)$
- g) $1,7(7x - 2,6) = 3,1(2x + 0,7) - 0,89$
- h) $\frac{2}{3}(4,3 - x) + 5,9 = \frac{9}{10}\left(0,4x - \frac{5}{3}\right)$

4. a) Gondoltam egy számra. Hozzáadtam a háromszorosát, így 54,8-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

b) Gondoltam egy számra. Hozzáadtam a felét, így 74,7-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

5. a) Egy szám és a számnál 5-tel kisebb szám összege 23,3. Melyik ez a két szám?

b) Egy szám és a nála 9-cel nagyobb szám összege 47,8. Melyik ez a két szám?

6. Kristófnak és Eszternek összesen 15 000 Ft zsebpénze van. Amikor mindkettőjük zsebpénze megkétszereződik, Kristófnak annyi zsebpénze lesz, mint Eszternek most.

- a) Mennyi pénze van most Kristófnak?
- b) Mennyivel volt több pénze Eszternek?

7. – A jégkásának elfogyott a negyede, meg még 6 liter – jegyezte meg Panni.

– Én úgy látom, a 60%-a maradt meg – mondta Jerry.

Mennyi jégkása volt eredetileg a gépben, ha mindkét gyereknek igaza volt?



8. a) Két szám különbsége 7, összege 17. Melyik ez a két szám?

b) Két szám különbsége 8, összege 4. Melyik ez a két szám?

c) Két egész szám különbsége 3, szorzata 70. Melyik ez a két szám?

9. a) Egy számnak és a kétszeresének a szorzata 32. Melyik ez a két szám?

b) Egy számnak és a háromszorosának a szorzata $\frac{3}{4}$. Melyik ez a két szám?

10. Ali, Bali és Cili életkora egész szám. Hány éves Ali, Bali és Cili? Keresd meg az összes megoldást, ha a következő négy állítás közül pontosan az egyik hamis!

- a) Ali és Bali együtt 22 évesek.
- b) Bali és Cili együtt 33 évesek.
- c) Ali és Cili együtt 26 évesek.
- d) Ali, Bali és Cili együtt 39 évesek.

CSOPORTMUNKA

Írjátok le a füzetetekbe az alábbi egyenlőtlenségeket, és beszéljétek meg közösen, hogy melyik igaz és melyik hamis! Javítsátok ki a hibásakat!

a) $3 < 5$ b) $\frac{7}{12} < \frac{6}{11}$ c) $-2 < 7$ d) $-\frac{6}{5} < -\frac{3}{4}$ e) $-8 < -15$

Az alábbi feladatokat osszátok el úgy, hogy mindenkinek jusson legalább egy! Figyeljétek meg, hogyan változik az egyenlőtlenségek igazságtartama a megadott művelet elvégzése után!

- A) Minden egyenlőtlenséghez adj hozzá 4-et!
 B) Minden egyenlőtlenségből vonj ki 2-t!
 C) Minden egyenlőtlenséget szorozz meg 3-mal!
 D) Minden egyenlőtlenséget szorozz meg (-3) -mal!
 E) Minden egyenlőtlenséget szorozz meg $\frac{1}{2}$ -del!
 F) Minden egyenlőtlenséget ossz el 2-vel!
 G) Minden egyenlőtlenséget ossz el (-2) -vel!



Foglaljuk össze a csoportban szerzett tapasztalatokat!

Egyenlőtlenség esetén	
Nem változik a relációs jel állása, ha	Megfordul a relációs jel állása, ha
– ugyanannyival növeljük mindkét oldalt; – ugyanannyival csökkentjük mindkét oldalt; – pozitív számmal szorzunk; – pozitív számmal osztunk.	– negatív számmal szorzunk; – negatív számmal osztunk.

Ezeket a megfigyeléseket az egyenlőtlenségek megoldásakor hasznosíthatjuk.

1. PÉLDA

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget: $(-2)[x \cdot (-3) + 10] \leq 40$!

Megoldás

Jelöljük az egyenletmegoldásnál tanult ferde vonal mögött, hogy milyen műveletet végzünk!

$$(-2)[x \cdot (-3) + 10] \leq 40 \quad / : (-2) \quad \text{Negatív számmal osztunk, így a relációjel megfordul.}$$

$$x \cdot (-3) + 10 \geq -20 \quad / -10 \quad \text{Kivonásnál a relációjel állása nem változik.}$$

$$x \cdot (-3) \geq -30 \quad / : (-3) \quad \text{Negatív számmal osztunk, így a relációjel megfordul.}$$

$$x \leq 10$$

Számegyenesen ábrázolva:



2. PÉLDA

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a mérlegelev felhasználásával!

$$a) 3(1 - 2x) - (4 - 5x) \geq 3 + 2(4 - 2x)$$

$$b) 2x - 3 - \frac{5-x}{3} < 8 - \frac{2x-1}{9}$$

Megoldás

$$a) 3(1 - 2x) - (4 - 5x) \geq 3 + 2(4 - 2x)$$

/zárójelfelbontás

$$3 - 6x - 4 + 5x \geq 3 + 8 - 4x$$

/összevonás

$$-x - 1 \geq 11 - 4x$$

/+4x; +1

$$3x \geq 12$$

/:3

$$x \geq 4$$

Számegyenesen ábrázolva:



$$b) 2x - 3 - \frac{5-x}{3} < 8 - \frac{2x-1}{9}$$

/·9

$$18x - 27 - 3(5 - x) < 72 - (2x - 1)$$

/zárójelfelbontás

$$18x - 27 - 15 + 3x < 72 - 2x + 1$$

/összevonás

$$21x - 42 < 73 - 2x$$

/+ 2x; + 42

$$23x < 115$$

/: 23

$$x < 5$$

Számegyenesen ábrázolva:



Ellenőrzés: Egyenlőtlenségek megoldása után általában nincs lehetőségünk minden megoldást visszahelyettesíteni az eredeti egyenletbe. Ilyenkor választunk egy tetszőleges számot az igazsághalmazból, és azt helyettesítjük vissza.

Ha megfelelő eredményt kapunk, az nem biztosítja azt, hogy jól számoltunk, csak valószínűbbé teszi.

Ha ellentmondást kapunk, akkor viszont biztosak lehetünk abban, hogy valamit eltévesztettünk a megoldás vagy az ellenőrzés során.

Például a 2. példa a) részében egy szóba jövő érték az 5. Behelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$3(1 - 2 \cdot 5) - (4 - 5 \cdot 5) \geq 3 + 2(4 - 2 \cdot 5)$$

$$3(-9) - (-21) \geq 3 + 2(-6)$$

$$-6 \geq -9 \text{ teljesül.}$$

A hétköznapi életben gyakran nem egyenlőségekkel találkozunk. Sokszor előfordul, hogy két kifejezés között egyenlőtlenséget tudunk felírni.

3. PÉLDA

Dorkának négyszer annyi pénze volt, mint Rózának. Ketten együtt egy 4000 Ft-os ajándékot szerettek volna megvenni édesanyjuknak. Kaptak a bátyjuktól 600 Ft-ot, de még így sem volt elegendő pénzük. Hány forintja lehetett Dorkának és Rózának?

Megoldás

Jelöljük Róza pénzét x -szel, ekkor Dorkának $4x$ pénze van. A bátyjuktól kapott 600 Ft-tal együtt $x + 4x + 600$ forintjuk lett, ami még nem elegendő. Ez alapján a következő összefüggés írható fel:

$$\begin{aligned} x + 4x + 600 &< 4000 \\ 5x + 600 &< 4000 & / -600 \\ 5x &< 3400 & / :5 \\ x &< 680 \end{aligned}$$

Azt nem tudjuk pontosan meghatározni, hogy mennyi pénzük volt a lányoknak, csak annyit állíthatunk, hogy Rózának 680 Ft-nál, Dorkának $4 \cdot 680 = 2720$ Ft-nál kevesebb pénze volt.

Összefoglalás:

A mérlegelvet az egyenlőtlenségek megoldása során is alkalmazhatjuk, de figyelniük kell az alábbiakra:

- **Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a pozitív számmal szorozzuk vagy osztjuk, akkor a relációs jel állása nem változik meg.**
- **Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk, akkor a relációs jel állása ellenkezőjére változik.**

FELADATOK

1. 📡 Igaz vagy hamis?

- Ha egy egyenlőtlenség mindkét oldalát negatív számmal szorozzuk, a relációs jel megfordul.
- Ha egy egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanannyival csökkentjük, a relációs jel megfordul.
- Ha egy egyenlőtlenség mindkét oldalát pozitív számmal szorozzuk, a relációs jel nem fordul meg.
- Ha egy egyenlőtlenség mindkét oldalát negatív számmal osztjuk, megfordul a relációs jel.

2. 📡 Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán! Ábrázold a megoldásokat számegyenesen!

- $3x - 7 > 8 - x$
- $8 + 3x \geq -4x - 6$
- $-4x - 4 \geq -3 - 3x$
- $2,5x - 4,3 < 10,7 + 1,5x$
- $-2,9 + 3,1x \geq -5,4x - 62,4$

3. 📡 Add meg azokat az egészeket, amelyekre

- $-9 < 3a \leq 9$
- $0 \leq 4b < 12$
- $-12 < 5c \leq 12$
- $-13 < 4d < 12$

4. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán! Ábrázold a megoldásokat számegyenesen!

- a) $2(x - 3) > 5x + 9$
- b) $3(5 - 2x) \leq 4(-4x - 6)$
- c) $1 - 5(6 - x) > 3(3x + 5)$
- d) $2(1,8x - 3,7) \leq 6 - (1,9x - 8,6)$
- e) $-5,2 - 2(1,1x - 0,4) < (-3,2 - 1,6x) \cdot (-5)$

5. a) Ha $-2 \leq x \leq 2$, akkor mennyi lehet az x^2 ? Add meg a választ algebrai alakban és ábrázold számegyenesen is!

b) Ha $-2 \leq x \leq 2$, akkor mennyi lehet az $|x|$? Add meg a választ algebrai alakban, és ábrázold számegyenesen is!

6. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket a racionális számok halmazán! Ábrázold a megoldásokat számegyenesen!

- a) $\frac{x+3}{2} < 4x - 7$
- b) $\frac{2x+5}{4} - 3 \geq -5 - 4x$
- c) $3 - \frac{2x+31}{5} \leq \frac{3x+5}{2}$
- d) $7x + 6 - \frac{x}{2} < \frac{4x+1}{6}$

7. Ha az $a < b$ egyenlőtlenség nem igaz, az azt jelenti, hogy $a \geq b$.

Milyen relációs jelet használnál, ha

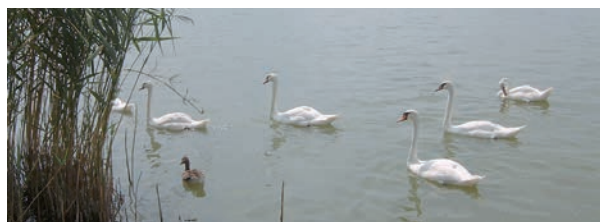
- a) nem igaz, hogy $a > b$;
- b) nem igaz, hogy $a \leq b$;
- c) nem igaz, hogy $a \geq b$.

8. Péter 15 kg-mal nehezebb, mint Kata, de 5 kg-mal könnyebb, mint Zoli. Ági 37 kg. Legfeljebb hány kg lehet Péter, ha egyszerre négyen beszállhatnak egy 200 kg teherbírású liftbe?

9. Apa háromszor olyan nehéz, mint Jancsika, és 18 kg-mal nehezebb, mint anya.

- a) Legfeljebb hány kg lehet apa, ha egy 160 kg-ot elbíró tandembiciklire még épp ráülhetnek hárman?
- b) Legfeljebb hány kiló lehet Jancsika, ha mindhármauk súlya egész szám?

10. Ha a kádban fürdést egy ember egyetlen hónapra zuhanyzásra cseréli, akkor körülbelül $2,5 \text{ m}^3$ vizet takaríthat meg. Legalább hány napon kellene 10 000 000 embernek fürdés helyett zuhanyoznia, hogy egy Velencei-tónak megfelelő vízmennyiséget spórolhassanak meg? (A Velencei-tó vízkészlete kb. 41 millió m^3 .)



11. Egy erdőben háromszor annyi tölgyfa van, mint bükkfa, ezek száma együttesen kevesebb, mint 1000.

Ha a tölgyfákhoz ültetnének még 100 db fiatal tölgyfát, akkor a tölgyek száma 700-nál több lenne.

- a) Legfeljebb hány bükkfa van az erdőben?
- b) Mennyi tölgyfa lehet az erdőben?

12. Anna és Bori szeretnének megvenni egy kirakót 2500 Ft-ért. Anna összegyűjtött pénze Bori pénzének kétszeresénél 100 Ft-tal több. Anyától kaptak még 250 Ft-ot, és még így sem tudták megvenni a játékot.

a) Mennyi pénze lehet Annának és Borinak külön-külön?

Nagyi megszánta őket, és mindegyiknek adott 100 Ft-ot, így már elegendő pénzüik volt, sőt a vásárlás után maradt is.

b) Mennyi pénzüik lehetett a lányoknak, ha tudjuk, hogy pénzüik értéke 10-zel osztható?

1. PÉLDA

Gondoltam egy számra. A gondolt szám $\frac{3}{8}$ részénél 8-cal nagyobb szám ugyanakkora, mint a gondolt szám kétszeresénél 5-tel kisebb. Melyik számra gondoltam?

Megoldás

Jelöljük a számot x -szel. A szöveg alapján felírhatjuk az alábbi algebrai kifejezéseket:

A gondolt szám $\frac{3}{8}$ részénél 8-cal nagyobb szám: $\frac{3}{8}x + 8$.

A gondolt szám kétszeresénél 5-tel kisebb szám: $2x - 5$.

A szövegből kiderül, hogy a két kifejezés egyenlő:

$$\frac{3}{8}x + 8 = 2x - 5$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy a gondolt szám a 8.

Az eredmény szövegbe történő helyettesítésével meggyőződhetünk annak helyességéről.

PÁROS MUNKA

Mindketten válasszatok egy háromjegyű természetes számot, és mondjátok el, mit jelent a szám alakí, helyi és valódi értéke! Felváltva fogalmazzatok meg a felsorolt fogalmakat!

2. PÉLDA

- Egy kétjegyű számban 3-as és 5-ös számjegy van. Melyik számokról lehet szó?
- Egy kétjegyű szám tízes helyi értékén álló számjegye 3. Írjuk fel a számot általános alakban!
- Írjuk fel az összes olyan kétjegyű számot, amelyben a számjegyek összege 12!
- Írjuk fel általános alakban azokat a kétjegyű számokat, amely jegyeinek összege 12!

Megoldás

- Ha 3 áll a tízes helyi értéken, akkor 5-ös van az egyes helyi értéken.
Ekkor a szám: $35 = 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1$.
Ha 5 áll a tízes helyi értéken, akkor 3-as van az egyes helyi értéken.
Ekkor a szám: $53 = 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1$.
- Az egyes helyi értéken álló ismeretlen számot jelöljük x -szel. (Ha le akarjuk írni ezt a számot, akkor $3x$ alakú lenne, ami könnyen összekeverhető az x szám 3-szorosával. Ezért általában a szám fölé húzott vonallal jelöljük, ha egy többjegyű számról beszélünk. Jelentése: $\overline{3x} = 3 \cdot 10 + x$.)
Ekkor az x értéke 0; 1; ... ; 9 lehet, azaz 10 db ilyen szám van.

- c) Az egyes és tízes helyi értéken csak egyjegyű szám állhat, ezért a 0, 1, 2 számjegyeket nem választhatjuk. A felírható számok a következők:

Tízes helyi érték	Egyes helyi érték	A kétjegyű szám
3	9	39
4	8	48
5	7	57
6	6	66
7	5	75
8	4	84
9	3	93

- d) A tízes helyi értéken lévő számot jelöljük x -szel. Ekkor az egyes helyi értéken $12 - x$ áll. A kétjegyű szám $\overline{x(12-x)}$ alakban írható fel. A felülvonás most is azt jelenti, hogy egy kétjegyű számról van szó, nem pedig az x és a $12 - x$ szorzatáról. Az x nem lehet a 0, 1, 2 számjegyek valamelyike, azaz x csak 3, 4, 5, 6, 7, 8 vagy 9 lehet.

Az $\overline{x(12-x)}$ kétjegyű számot átírhatjuk $\overline{x(12-x)} = x \cdot 10 + (12 - x) \cdot 1$ alakba.

Az itt felírt műveleteket már könnyen elvégezhetjük, ha szükséges.

3. PÉLDA

Egy kétjegyű szám második számjegye 3-mal nagyobb, mint az első. Ha a számjegyeit felcseréljük, akkor a kapott kétjegyű számot az eredeti számhoz hozzáadva 77-et kapunk. Melyik számra gondoltunk?

Megoldás

Készítsünk táblázatot az adatok alapján, amelyben felhasználjuk a számok alaki értékét és valódi értékét!

	Tízes	Egyes	A szám valódi értéke
Eredeti szám	x	$x + 3$	$x \cdot 10 + x + 3 = 11x + 3$
Felcserélt szám	$x + 3$	x	$(x + 3) \cdot 10 + x = 11x + 30$

Az összefüggést mindig a feladat szövegéből olvassuk ki, és ezek alapján írjuk fel az egyenletet:

$$11x + 3 + 11x + 30 = 77$$

$$22x + 33 = 77$$

$$22x = 44$$

$$x = 2$$

Tehát a keresett szám a 25, a számjegyek felcserélésével kapott szám az 52. A két szám összege valóban 77.

A feladat megoldható próbálgatással is, hiszen a lehetőségek száma nem túl nagy. Az egyenlettel való felírás viszont többjegyű szám esetén is sikerre vezet.

Életkorral kapcsolatos feladatok

4. PÉLDA

Dani édesanyja ötször annyi idős, mint Dani, az édesapja pedig 7 évvel idősebb az édesanyjánál. Hány évesek a család tagjai, ha a három családtag életkorának összege 84 év?


 x

 $5x$

 $5x+7$
Megoldás

Jelöljük Dani életkorát x -szel. Dani édesanyja $5x$ éves. Dani édesapja $5x + 7$.

Az így felírható egyenlet: $x + 5x + 5x + 7 = 84$, amelyből adódik, hogy $x = 7$.

Tehát Dani 7 éves, édesanyja 35 éves, édesapja pedig 42 éves. $7 + 35 + 42 = 84$, azaz megfelel a feladatban leírtaknak.

5. PÉLDA

Peti négy évvel ezelőtt negyedannyi idős volt, mint az édesapja most. Életkoruk összege most 64 év. Hány éves Peti és hány éves az édesapja?

Megoldás

	Életkoruk 4 évvel ezelőtt	Életkoruk jelenleg
Peti	x	$x + 4$
Édesapja	$4x - 4$	$4x$

A szöveg alapján felírható az alábbi egyenlet:

$$x + 4 + 4x = 64$$

$$5x + 4 = 64$$

$$x = 12$$

Tehát négy évvel ezelőtt Peti 12, édesapja pedig 44 éves volt, azaz Peti most 16, édesapja pedig 48 éves, és életkoruk összege 64 év.

FELADATOK

1. Anna 14 éves, apukája 42. Hány év múlva lesznek ketten együtt 100 évesek?

2. Gergő 25 éves, anyukája 52.

- Hány évvel ezelőtt volt Gergő negyedannyi idős, mint az anyukája?
- Hány éves volt akkor Gergő?

3. Simi és Samu ikrek, kishúguk, Janka 4 évvel fiatalabb náluk. Hárman együtt 29 évesek. Hány éve volt Janka feleannyi idős, mint Samu?

4. Amikor Ádám született, édesanyja 24 éves volt. Hány év múlva lett az édesanya

- 25-ször annyi idős, mint Ádám;
- 13-szor annyi idős, mint Ádám;
- 3-szor annyi idős, mint Ádám;
- 2-szer annyi idős, mint Ádám?

5. Hány éves most az az ember, aki 16 év múlva ötször annyi idős lesz, mint amennyi 8 évvel ezelőtt volt?

6. Dávid nagypapája 10 évvel idősebb, mint Dávid életkorának háromszorosa. 15 évvel ezelőtt nagypapa még 11-szer annyi éves volt, mint Dávid. Melyikük hány éves jelenleg?

7. Bence éppen hetedannyi idős, mint szülei életkorának az összege. Tavaly apukája még négyszer annyi idős volt, mint Bence, és 5 évvel volt idősebb az anyukájánál. Melyikük hány éves?

8. Egy kétjegyű szám egyik számjegye a másik kétszerese. Ha a számhoz hozzáadjuk a számjegyei felcserélésével kapott számot, akkor egy olyan kétjegyű számot kapunk eredményül, melynek számjegyei megegyeznek.

- Melyik ez a szám?
- Hány ilyen számot találtál?

9. Sorold fel azokat a kétjegyű

- számokat, ahol a számjegyek összege 17;
- páratlan számokat, ahol a számjegyek összege 15;
- páros számokat, ahol a számjegyek összege 10!

10. Egy kétjegyű szám első számjegye 6-tal kisebb, mint a második. Ha ezt a számot kivonjuk a számjegyei felcserélésével kapott számból, akkor 54-et kapunk. Melyik ez a szám?

11. Egy kétjegyű szám első számjegye 5-tel nagyobb, mint a második. Ha ennek a számnak a kétszeresét hozzáadjuk a számjegyek felcserélésével kapott számhoz, eredményül 171-et kapunk. Melyik ez a szám?

12. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 11. Ha a szám négyszereséhez hozzáadjuk a számjegyek felcserélésével kapott szám hat-szorosát, 650-et kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

13. Edit, Emil, Enikő és Elemér testvérek. Elemér két év híján kétszer annyi idős, mint Edit. Emil 10 évvel fiatalabb, mint Elemér. Enikő épp feleannyi idős, mint testvérei életkorának az összege. Négyen együtt 69 évesek. Hogy hívják az ikreket?

14. Gazsi levelet írt az édesapjának. A levélben ennyi állt:



Apa megfejtette a rejtvényt, jót mosolygott és átutalta a pénzt.

Mennyi pénzre volt szüksége Gazsinak, ha a különböző betűk különböző számokat jelölnek az összeadásban?

Az élelmiszerek többségén megtalálható az adott élelmiszer összetétele, amit sok esetben %-ban adnak meg. Nézzünk néhány példát!

Narancslé kalciummal
Narancslé sűrítményből készült
Hozzáadott kalciummal.
Gyümölcsstartalom: 100% **1L**

Összetevők: Joghurt 85%, cukor, áfonya 9%, módosított keményítő, sűrítőanyag: pektin, természetes aroma.
Átlagos tápérték 100 g termékben: energia 428 KJ/102 kcal; zsír 3,1 g, amelyből telített zsírsavak 2,1 g; szénhidrát 14,5 g, amelyből cukrok 14,0 g; fehérje 3,7 g; só 0,13 g.
Fogyasztható (nap, hónap, év): a fedőfólián jelzett időpontig, 2-8 °C között tárolva.

KÜLÖNLEGES MINŐSÉGŰ SZILVALEKVÁR

Gyümölcsstartalom: 350%
Összes cukortartalom: 55 g/100g
Készült: 350 g gyümölcs/100 g termék
Összetevők: szilva (350 g/100 g)
A gyümölcsök gondos válogatása ellenére elvértve magtöretet tartalmazhat.

Van olyan címke, amely alapján egyszerűnek tűnik eldönteni, hogy mi van a dobozban.

Van olyan címke, amelyik alapján ki lehet számolni, hogy melyik összetevőből mennyi van a termékben.

Van olyan címke, amelyik marketingszempontból érthető ugyan, de megmosolyogtatja az emberek nagy részét.
Észreveszitek a turpisságot?

1. PÉLDA

Egy lekvárkészítéssel foglalkozó cég kétféle eperlekvárt készít. Az egyik fajta hagyományos módszerrel készül, így sok benne a hozzáadott cukor (40%), a másik cukorszegény, csak minimális mennyiségű hozzáadott cukrot tartalmaz (10%). Egyik alkalommal véletlenül összeöntötték a kétféle lekvárt: 25 kg-ot a 40%-os és 15 kg-ot a 10%-os cukortartalmúból.

- Mennyi cukor volt az összekevert lekvárban?
- Hány százalékos volt a keverék cukortartalma?

Megoldás

Készítsünk táblázatot!

	Lekvár mennyisége (kg)	Cukor (%)	Cukor mennyisége (kg)
Hagyományos készítésű	25	40	$25 \cdot \frac{40}{100} = 25 \cdot 0,4 = 10$
Light típusú	15	10	$15 \cdot \frac{10}{100} = 15 \cdot 0,1 = 1,5$
Keverék	40	28,75%	11,5

Az összeöntés után az egyes lekvárfajtákban lévő cukormennyiség összeadódik. Ezt használjuk fel a megoldás során.

A táblázatból kiolvasható, hogy összesen $10 + 1,5 = 11,5$ kg cukor van 40 kg keverékben, tehát a cukor százalékos aránya $\frac{11,5}{40} \cdot 100 = \frac{115}{4} = 28,75\%$.

Tehát a kétfajta lekvár összeöntése után kapott keverék 28,75%-os cukortartalmú.



2. PÉLDA

A boltban 10%-os és 20%-os ecetet is lehet kapni. Mennyi vizet kell önteni 1 liter 20%-os ecethez, hogy 10%-os ecetet kapjunk?

Megoldás

10% éppen fele a 20%-nak, tehát ha 1 liter vizet adunk az 1 liter 20%-os ecethez, akkor éppen 10%-os ecetet kapunk.

Formálisan is felírhatjuk, de úgy sokkal bonyolultabb. 1 liter 20%-os ecetben 0,2 liter ecetsav van.

Jelöljük x -szel a hozzáadott víz mennyiségét. A kapott oldat töménysége: $\frac{0,2}{1+x} \cdot 100 = 10$.

Az egyenletet megoldva most is az $x = 1$ liter eredményre jutunk.

3. PÉLDA

Pista bácsi permetezőszert kevert. Tegnapról maradt neki 20 liter 1,5%-os oldata. Ma kevesebb vízzel hígította a kis tasak növényvédő szert, és így 3,6%-os oldatot kapott. Mennyit öntsön a mai 3,6%-os oldatból a tegnapi 20 literhez, ha 2,8%-os oldatot akar kapni?

Megoldás

Jelöljük a hozzáöntött 3,6%-os oldat mennyiségét x literrel. Készítsünk az adatainkról táblázatot!

	Mennyiség (liter)	Töménység (%)	Növényvédő szer
1,5%-os oldat	20	1,5	$20 \cdot 0,015$
3,6%-os oldat	x	3,6	$x \cdot 0,036$
2,8%-os oldat (keverék)	$20 + x$	2,8	$(20 + x) \cdot 0,028$

A táblázat első két oszlopát a megadott adatok alapján ki tudjuk tölteni. A harmadik oszlop értékét úgy kapjuk meg, hogy a megadott mennyiséget megszorozzuk a százalékláb századrészeivel. Színessel jelöltük azokat a kifejezéseket, amelyeket az adatok alapján számoltunk, illetve fejeztünk ki. Az egyenlet felírásánál azt használjuk fel, hogy az összeöntés után a növényvédő szer mennyisége összeadódik:

$$\begin{aligned}
 20 \cdot 0,015 + x \cdot 0,036 &= (20 + x) \cdot 0,028 & / \cdot 1000 \\
 20 \cdot 15 + x \cdot 36 &= (20 + x) \cdot 28 \\
 300 + 36x &= 560 + 28x \\
 x &= 32,5
 \end{aligned}$$

A 3,6%-os oldatból 32,5 litert kell az 1,5%-oshoz önteni, hogy 2,8%-os permetszert kapjunk.

Ellenőrzés: A tiszta növényvédő szer mennyisége:

A 1,5%-osban 0,3 liter. }
 A keverékben: 1,47 liter. } Összesen: 1,47 l. A 3,6%-osban 1,17 liter.



4. PÉLDA

A karácsonyi vásárrban egy viszonteladó kétféle áron vásárolt diót: 35 kg-ot $2400 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ -os és 45 kg-ot $2000 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ -os áron. A kétfajta megvásárolt diót összeöntötte.

- a) Átlagosan mennyibe került 1 kg dió?
 b) Hány kg-ot vásároljon még a $2000 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ egységárúból, hogy a keverék $2100 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ egységárú legyen?

Megoldás

- a) Összesen $35 \cdot 2400 + 45 \cdot 2000 = 174\,000$ Ft-ot fizetett ki a dióért.

Tehát 1 kg keverék ára: $\frac{174\,000}{80} = 2175$ Ft.

- b) Jelöljük x -szel a további megvásárolt 2000 Ft-os dió mennyiségét.

	Mennyiség (kg)	Egységár $\left(\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}\right)$	Érték (Ft)
$2175 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ -os dió	80	2175	174 000
$2000 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ -os dió	x	2000	$x \cdot 2000$
Keverék	$80 + x$	2100	$(80 + x) \cdot 2100$

Ebben az esetben a dióért kifizetett összegek felhasználásával írhatunk fel egyenletet:

$$174\,000 + x \cdot 2000 = (80 + x) \cdot 2100$$

$$174\,000 + 2000x = 168\,000 + 2100x$$

$$6000 = 100x$$

$$x = 60$$

Tehát 60 kg 2000 Ft-os diót kell még vásárolni.

Megjegyzés: A feladatot kicsit átgondolva rájöhethetünk, hogy más megoldási módszerrel is eljuthatunk a megoldáshoz. A viszonteladó kezdetben 35 kg 2400 Ft-os diót vett. Ha 35 kg 2000 Ft-os diót venne, akkor az átlagár nyilván középen lenne, 2200 Ft-nál felezné a különbséget.

Ha kétszer annyi, azaz 70 kg 2000 Ft-os diót venne, akkor az átlagár harmadolná a különbséget, azaz 2133,3 Ft lenne.

Ha háromszor annyi, azaz 105 kg diót vesz, akkor az átlagár a negyedelő pontban lesz, azaz éppen 2100 Ft. Mivel kezdetben már vett 45 kg-ot, ezért még 60 kg-ot kell vásárolnia az olcsóbb dióból.



FELADATOK

1. Számítsd ki az alábbi mennyiségeket!

- Mennyi az epertartalma 2 dl 6%-os epres joghurtnak?
- Mennyi a gyümölcstartalma 4 liter 25%-os almalének?
- Mennyi a kakaótartalma 25 dkg 70%-os csokoládénak?

2. Határozd meg, hány gramm cukrot tartalmaznak az alábbi élelmiszerek, majd számold ki, hány darab kockacukornak felel meg ez a mennyiség! Egy kockacukor tömege kb. 3,3 g. Figyeld az általad fogyasztott ételek cukortartalmára!



- 28 grammos, 29,6%-os cukortartalmú tejszelet
- 160 grammos, 17,5%-os cukortartalmú ketchup
- 20 grammos, 9%-os cukortartalmú müzliszelet
- 300 grammos, 12,2%-os cukortartalmú, meggy ízű joghurt
- 500 ml-es, 13,2%-os cukortartalmú, szén-savas üdítőital
- 190 grammos, 9,7%-os cukortartalmú, gyümölcsös bÉbiétel

3. Hány százalék a kakaótartalma annak a tábla csokoládénak, amelyik 200 grammos, és 76 gramm kakaó van benne?

- 15 liter 3,4%-os sótartalmú tengervízhez 5 liter édesvizet öntünk. Hány százalékosra változott így a tengervíz sótartalma? Feltételezzük, hogy 1 l tengervíz kb. 1 kg.
- Hány liter édesvizet kell önteni 15 liter 3,4%-os sótartalmú tengervízhez, hogy 1,5%-os sós vizet kapjunk?

5. Az egyes országokban igen különböző a megítélése annak, hogy mekkora klórkoncentrációra van szükség a strandok medencéinek fertőtlenítéséhez. Ez az érték $0,3 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ -tól $1,2 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ -ig változhat.

- Számold ki, hány gramm klórt tartalmaz egy $20 \times 10 \times 2$ méteres úszómedence a két szélsőséges esetben!
- Hány százalék a klórtartalma a medencében lévő víznek?

6. Mennyi vizet öntsünk 2 liter 100%-os alma-lehez, hogy 65%-os almalevet kapjunk?

7. Összeöntünk 3 liter 20%-os és 2 liter 100%-os gyümölcslevet. Hány százalékos lesz az így nyert ital?

8. Mennyi vizet kell elpárologtatni 85 kg 6%-os sóoldatból, hogy 8%-os sóoldatot kapjunk?

9. Egy kereskedő két termelőtől vásárolt barackot. Az egyiktől kilónként 200 Ft-ért 80 kg-ot, a másiktól kilónként 140 Ft-ért 120 kg-ot. Az összes barackot összeöntötte.

- Átlagosan hány Ft-ba került a barack kg-onként?
- Hány kg-ot kellene még vásárolnia az olcsóbb fajtából, hogy a kilónkénti ára 160 Ft legyen?

10. Két hordó áll a pincében. Az egyikben 100 liter víz van, a másikban pedig 100 liter alkohol. Zsiga egy pohár vizet átmer az alkoholos hordóba. Megkeveri, majd ebből a keverékből merít át egy pohárnyit a vizeshordóba. A vizeshordóban lesz több alkohol, vagy az alkoholos hordóban lesz több víz?

Mozgásos feladatok

KUTATÓMUNKA

Nézz utána, hogy

- a) mekkora a legnagyobb sebessége a teniszezők adogatásainak (szerváinak);
- b) melyik a leglassúbb állat a világon;
- c) mekkora sebességgel mennek a vonatok Japánban;
- d) mekkora a sebessége a 100 méteres síkfutás győzteseinek!



A mozgásos feladatoknál célszerű felhasználnunk más órákon szerzett ismereteinket is. Ismételjük át, milyen összefüggés van a megtett út és a megtételéhez szükséges idő között! Írjuk fel, hogyan számolható ki a sebesség ezek segítségével! A példák és a feladatok megoldása során mindig feltételezzük, hogy a mozgó testek sebessége állandó, és így kétszer annyi idő alatt pont kétszer akkora utat tesznek meg.

A fizikában a sebességet v -vel, az utat s -sel, az időt t -vel szoktuk jelölni. A feladatok megoldása során használjuk a $v = \frac{s}{t}$ képletet, illetve két másik alakját, az $s = v \cdot t$ és a $t = \frac{s}{v}$ képleteket is.

PÁROS MUNKA

Beszélgétek meg, mit jelentenek a $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ és a $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ mértékegységek! Ismételjétek át azt is, hogyan kell az egyik mértékegységet átváltani a másikra!

1. PÉLDA

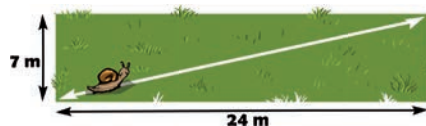
Nagyi 24×7 méteres kiskertjének a sarkában van egy nedves zug, ahonnan egy csiga elindult világgá. Elérhet-e estére a kert legtávolabbi sarkába, ha az éticsiga sebessége $3 \frac{\text{m}}{\text{h}}$?

**Megoldás**

A Pitagorasz-tétel segítségével kiszámoljuk a legtávolabbi sarok távolságát.

$$\sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25 \text{ (m)}.$$

A csiga 25 métert $\frac{25}{3} = 8 \frac{1}{3} = 8$ óra 20 perc alatt tesz meg, ha egész nap siet. A Nap nyáron több mint 12 óra hosszát van fenn, tehát a csiga napnyugtáig elérhet a kiskert átlellenes sarkába.



2. PÉLDA

Gáspár és Vince kitalálták, hogy körbeciklizik a Velencei-tavat (32 km). Délelőtt 10 órakor indultak el ellentétes irányban. Vince óránként 18 km-t, Gáspár 22 km-t tett meg.

- a) Mikor találkozott a két gyerek?
b) A kiindulási ponttól milyen messze találkoztak a fiúk?

Megoldás

- a) Mivel a fiúk egyszerre indultak, ezért mindketten ugyanannyi ideig bicikliztek a találkozásig. Jelöljük ezt x -szel. Írjuk a táblázatba az adatokat, használjuk a megtett út felírásához az $s = v \cdot t$ képletet!

	v - sebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	t - eltelt idő (h)	s - megtett út (km)
Gáspár	22	x	$22x$
Vince	18	x	$18x$

Az egyenlet felírásához felhasználjuk, hogy a két fiú által együttesen megtett út 32 km:

$$22x + 18x = 32$$

$$x = 0,8$$

Tehát a találkozásig eltelt idő 0,8 óra, azaz a fiúk 10:48-kor találkoztak.

- b) Tudjuk, hogy a fiúk 0,8 órát bicikliztek a találkozásig.
Ennyi idő alatt Gáspár $22 \cdot 0,8 = 17,6$ km-t, Vince pedig $18 \cdot 0,8 = 14,4$ km-t tett meg.
Ellenőrzés: $17,6 + 14,4 = 32$ km.

Együttes munkavégzés

Az ilyen típusú feladatok során mindig feltételezzük, hogy a munkában részt vevő felek ugyanolyan sebességgel dolgoznak külön-külön, mint együtt. Ha együtt dolgoznak, mindig rövidebb idő alatt végeznek, mint ha külön dolgoznának.

3. PÉLDA



A Kovács család a hétvégi nagytakarításnál a ház minden ablakát megpucolta. Anya egyedül 2 óra alatt, apa 3 óra alatt végzett volna az összes ablakkal, de inkább együtt dolgoztak.

- a) Hány óra alatt végeztek együtt az ablakok megtisztításával?
b) Hány óra alatt végezne egyedül a fiuk, Bálint, ha apával együtt 2 óra alatt lennének készen?

Megoldás

- a) Tekintsük az összes ablak lemosásához szükséges munkát 1 egésznek. Jelöljük x -szel azt az időtartamot, amennyi alatt együtt végeznek a munkával. Foglaljuk táblázatba az adatokat!

	A munka elvégzéséhez szükséges idő	Az 1 óra alatt elvégzett munka hányada	Az x óra alatt elvégzett munka mennyisége
Anya	2 óra	$\frac{1}{2}$ rész	$\frac{x}{2}$ rész
Apa	3 óra	$\frac{1}{3}$ rész	$\frac{x}{3}$ rész

Ezek alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1 \quad / \cdot 6$$

$$3x + 2x = 6$$

$$x = 1,2$$

Tehát ketten együtt 1,2 óra alatt végeznek az összes ablak lemosásával.

$$\text{Ellenőrzés: } \frac{1,2}{2} + \frac{1,2}{3} = \frac{12}{20} + \frac{12}{30} = \frac{60}{60} = 1$$



- b) Jelöljük y -nal azt az időt, amennyi alatt Bálint egyedül végezne az ablakpucolással.

	A munka elvégzéséhez szükséges idő	Az 1 óra alatt elvégzett munka hányada	A 2 óra alatt elvégzett munka mennyisége
Apa	3 óra	$\frac{1}{3}$ rész	$\frac{2}{3}$ rész
Bálint	y óra	$\frac{1}{y}$ rész	$\frac{2}{y}$ rész

Ketten együtt 2 óra alatt végeznek az egész munkával, így felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{y} = 1 \quad / - \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{3} \quad / \cdot 3y$$

$$y = 6$$

Tehát Bálint egyedül 6 óra alatt végezne az ablakpucolással.

$$\text{Ellenőrzés: } \frac{2}{3} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$



FELADATOK

1. 📡 Dóri és Dani, az egyéves ikrek négykézláb mászva közlekednek a lakásban. Amikor délután meghallják, hogy megérkezett apa, közös szobájukból teljes gőzzel a bejárat felé indulnak. Dóri 2 mp alatt 1 métert, Dani pedig 5 mp alatt 3 métert tesz meg.

- Ki a gyorsabb?
- Ki mennyi idő alatt teszi meg a szükséges 12 métert?

2. 📡 – *Én $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val szoktam hazafelé biciklizni*
– dicsekszik Imi.

– *Az semmi* – válaszol Laci. – *Én a múltkor úgy száguldoztam, hogy 4 métert tettem meg másodpercenként.*

- Ki a gyorsabb?
- Ki hány km-t tesz meg a 20 perces hazaút alatt?

3. 📡 Szili és Boti 12 km-re laknak egymástól. Délelőtt 10 órakor elindultak egymás felé, mert megbeszélték, hogy a Botiétól 4 km-re lévő parkban találkoznak. Szili biciklivel ment, Boti görkorival. Szili átlagsebessége $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- Hány órakor találkoztak?
- Mekkora volt Boti átlagsebessége?
- Fél órát beszélgettek a parkban, aztán Szili biciklivel hazavitte Botit, majd hazakerekelt. Hány órára ért haza Szili?

4. 📡 Alabárból Balabárba 9 órakor elindult egy terepjáró, 10:25-kor pedig egy motor. A terepjáró 11 órakor negyed órára félreállt tankolni, majd folytatta az útját. A két jármű 12:45-kor egyszerre érkezett meg Balabárba. A motoros fél perc alatt tett meg 1 km-t.

- Milyen messze van Alabártól Balabár?
- Mekkora a terepjáró és a motoros átlagsebessége?

5. 📡 Latouret őrmester kivezenyi Galamb közlegényt, hogy ásson egy 0,5 m széles, 6 m hosszú, 1,5 m mély lövészárkot a sivatag szélén. Egyedül 24 óra alatt végezze az ásással.

- Galamb barátja, Troppauer Hümér, a költő, szintén 24 óra alatt ásná ki egyedül a lövészárkot. Mennyi idő alatt ásnák ki ketten együtt?
- Közös barátjuk, Minkusz is 24 óra alatt végezne a munkával egyedül. Mennyi idő alatt ásnák ki hárman együtt?
- Ha az ezred minden katonája 24 óra alatt ásná ki a lövészárkot, akkor igaz-e, hogy ezer katona 86,4 másodperc alatt ásná ki az árkot együtt?

6. 📡 – *Én egy óra alatt összepakolom a lakást, neked viszont másfél óráig tart. Csináljuk meg együtt!* – javasolja Judit az öccsének. Hány perc alatt végeznek, ha közösen raknak rendet?

7. 📡 A vegetáriánus vámpír 20 perc alatt hámoz meg egy tál vérnarancsot. Felesége 30 perc alatt készül el vele. Hány perc alatt végeznek, ha együtt dolgoznak?

8. 📡 Aladár 2,5 óra alatt tölti fel egyedül az összes farsangi képet és videót a netre. Ha Kriszta is segít neki, akkor 87,5 perc alatt végeznek. Mennyi idő alatt végezne Kriszta egyedül a feltöltésekkel?

9. 📡 A városi sportpályának három különböző teljesítményű és márkájú fűnyíró robotja van. Az Atolosz 3 óra alatt, a Portolosz 4 óra alatt, az Aramosz 6 óra alatt nyírja le a fűvet a focipályán.

- Hány perc alatt végez a fűnyírással az Atolosz és a Portolosz, ha együtt dolgoznak?
- Hány perc alatt vágja le a fűvet a Portolosz és az Aramosz?
- Mennyi idő kell a három robotnak, ha egyszerre dolgoznak?

A geometriai feladatok megoldása közben is előfordulhat, hogy egyenleteket kell megoldani. Általában **célszerű ábrát készíteni** a feladat szövegéhez – ez ötletet adhat a megoldáshoz. Gondoljuk végig, milyen ismeretekkel rendelkezünk a feladat szövegével kapcsolatban! Ha egyenlettel oldjuk meg a feladatot, mindig **írjuk fel, mit választottunk ismeretlennek**, és **ne feledkezzünk meg az ellenőrzésről** sem!

Emlékeztető a feladatok sikeres megoldásához:

A háromszög belső szögeinek összege 180° .

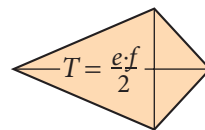
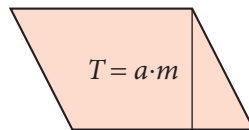
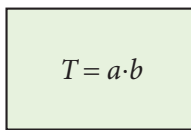
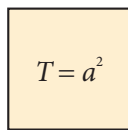
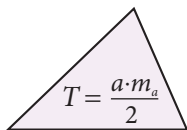
A háromszög bármely oldalának hossza kisebb a másik két oldal hosszának összegénél.

A sokszögek (háromszög, négyszög...) területét megkapjuk, ha az oldalainak hosszát összeadjuk.

Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\frac{n(n - 3)}{2}$.

Sok feladat esetén szükség van síkidomok területének a kiszámítására. Ismétlésként leírunk néhány korábban tanult képletet.



1. PÉLDA

Mekkora az egyenlő szárú háromszög szögei, ha az egyik szöge 54° -kal nagyobb egy másik szögénél?

Megoldás

Tudjuk, hogy a belső szögek összege 180° . Az egyenlő szárú háromszögnek két különböző nagyságú szöge lehet. Így két esetet kell megkülönböztetnünk.

1. eset: Ha az alapon fekvő szögek a nagyobbak.

Az alapon fekvő szögeket jelöljük α -val, így a szárak által bezárt szög:

$\alpha - 54^\circ$. A belső szögek összegét ekkor a következőképpen írhatjuk fel:

$$\alpha + \alpha + (\alpha - 54^\circ) = 180^\circ$$

$$3\alpha - 54^\circ = 180^\circ$$

$$3\alpha = 234^\circ$$

$$\alpha = 78^\circ, \text{ és } \alpha - 54^\circ = 24^\circ.$$

Tehát a háromszög belső szögei: 78° ; 78° ; 24° .

Az eredmény megfelel a szövegben megfogalmazott feltételeknek, és a kapott szögek összege 180° .

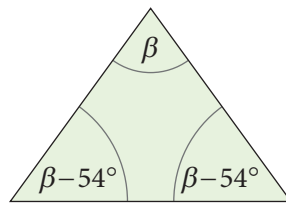
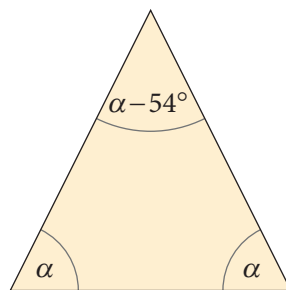
2. eset: Ha a szárak által bezárt szög a nagyobb.

A szárak által bezárt szöget β -val jelöljük. Ekkor az alapon levő szögek

$\beta - 54^\circ$ -kal egyenlők. A belső szögek összegét így írhatjuk fel:

$$\beta + 2(\beta - 54^\circ) = 180^\circ$$

$$3\beta - 108^\circ = 180^\circ$$



Az egyenlet alapján a szárak által bezárt szög: $\beta = 96^\circ$. Az alapon levő szögek: $\beta - 54^\circ = 42^\circ$ -osak. Tehát a háromszög belső szögei: 42° ; 42° ; 96° .

Ez az eredmény is megfelel a szövegben megfogalmazott feltételeknek.

2. PÉLDA

Egy háromszög legrövidebb oldala 1 cm-rel nagyobb a középső oldal felénél. A leghosszabb oldal a középső 125%-a. Mekkora a háromszög oldalai, ha a területe 23 cm²?

Megoldás

Jelöljük a középső oldal hosszát x -szel. Ekkor a háromszög másik két oldalának hossza: $\frac{x}{2} + 1$ és $1,25 \cdot x$.

Írjuk fel az oldalak összegét, amiről tudjuk, hogy 23 cm:

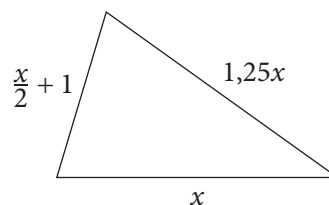
$$x + \frac{x}{2} + 1 + 1,25x = 23$$

$$2,75x + 1 = 23$$

$$2,75x = 22$$

$$x = 8$$

Tehát a háromszög oldalai: 5 cm, 8 cm és 10 cm.



3. PÉLDA

Egy téglalap egyik oldala 5 cm-rel hosszabb, mint a másik oldala. Ha mind a két oldalt 2-2 cm-rel megnöveljük, akkor a téglalap területe 42 cm²-rel nő. Mekkora a téglalap oldalai? Készítsünk ábrát a feladathoz!

Megoldás

A feladatot kétféleképpen is megoldjuk.

Jelöljük a téglalap oldalainak hosszát x -szel és $x + 5$ -tel.

1. megoldás

Felírjuk a növeléssel kapott területeket, amit az ábrán zölddel jelöltünk:

$$(x + 5) \cdot 2 + 2 \cdot 2 + x \cdot 2 = 42$$

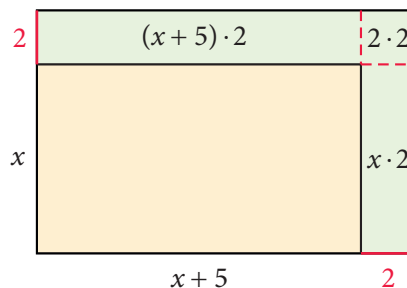
$$4x + 14 = 42$$

$$x = 7$$

Tehát a téglalap oldalainak hossza: 7 cm és 12 cm.

Ellenőrzés: Eredeti terület: $7 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 84 \text{ cm}^2$.

Új terület: $(7 + 2) \text{ cm} \cdot (12 + 2) \text{ cm} = 126 \text{ cm}^2$. A terület növekedése 42 cm^2 .



2. megoldás

Írjuk fel a nagy téglalap területét kétféleképpen:

$$T = x(x + 5) + 42, \text{ illetve } T = (x + 2)(x + 5 + 2).$$

Ezek egyenlősége miatt: $x(x + 5) + 42 = (x + 2)(x + 7)$

Figyeljünk a többszörös kifejezések szorzására!

$$x^2 + 5x + 42 = x^2 + 7x + 2x + 14$$

$$5x + 42 = 9x + 14$$

$$28 = 4x$$

$$7 = x$$

A megoldás ugyanúgy fejezhető be, mint az előző esetben.

FELADATOK

1. Egy háromszögben az oldalak aránya $1:4:7$, kerülete pedig 108 cm . Mekkora az oldalai?

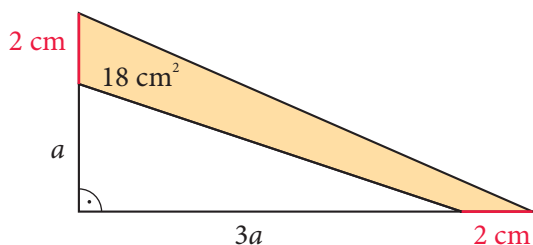
2. Egy háromszögben a szögek aránya $2:3:5$.

a) Lehet-e a háromszög egyenlő szárú?

b) Mekkora a szögei?

3. Egy egyenlő szárú háromszög két oldalának aránya $3:7$, kerülete pedig 221 cm . Mekkora a háromszög oldalai?

4. Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza a másik befogó harmada. Ha a befogókat $2\text{-}2 \text{ cm}$ -rel növeljük, a háromszög területe 18 cm^2 -rel nő. Mekkora az eredeti háromszög területe?



5. Egy szabályos sokszög belső szögeinek összege 2160° . Hány oldalú a sokszög?

6. Két négyzet oldalainak aránya $4:5$, kerületük összege 108 cm .

a) Mekkora a négyzetek oldalai?

b) Mekkora annak a négyzetnek az oldalai, amelynek területe megegyezik a fenti négyzetek területének összegével?

7. Egy konvex sokszögnek összesen 90 átlója van. Hány oldalú a sokszög?

8. Egy derékszögű háromszög belső szögeinek aránya $1:2:3$. Hány fokos szöget zár be egymással a derékszögű csúsból induló magasságvonal és a belső szögfelező?

9. Egy konvex sokszögnek kétszer annyi átlója van, mint oldala. Hány oldalú a sokszög?

10. A paralelogramma egyik oldala 5 cm -rel nagyobb, mint a másik oldal kétszerese, kerülete pedig 283 cm .

a) Mekkora a paralelogramma oldalai?

b) Mekkora a területe, ha a hosszabbik oldalhoz tartozó magassága egyenlő a két oldal különbségének ötödével?

Az alábbi feladatok a szöveges feladatok gyakorlását segítik.

Dolgozzatok együtt, beszéljétek és oldjátok meg közösen a feladatokat! Az ellenőrzést csoportban végezzétek, és a feladatok végén található utolsó kérdést/kérdéseket már együtt gondoljátok végig, hogy minél több szempontot figyelembe véve válaszolhassatok!

Szükség esetén használjátok az internetet!

FELADATOK

1. Kicsit csöpög a csap, így óránként másfél liter víz csöpög el feleslegesen. A vízdíj területenként igen változó, egy országon belül többszörös díjkülönbség is előfordulhat. Például míg Budapesten $218 \frac{\text{Ft}}{\text{m}^3}$, addig Pécsen $425 \frac{\text{Ft}}{\text{m}^3}$ a vízdíj.

- Mennyi víz folyik el így feleslegesen egy év alatt?
- Körülbelül mekkora lenne annak a kockának az éle, amelyikbe ez a vízmennyiség pontosan belefér? (Használj számológépet!)
- Egy gyerek átlagosan 1,5 liter vizet iszik naponta. Hány gyereknek lenne meg az egy napra szükséges ivóvíze az egy hónap alatt elcsöpögő vízből?
- Hányszor tudnál belőle lezuhanyozni? (Nézz utána, átlagosan mennyi vizet használ el egy ember zuhanyáskor!)
- Mennyivel fizet többet a feleslegesen elfolyt vízért egy pécsi lakos, mint egy budapesti?
- Nézz utána, mennyibe kerül nálatok 1 m^3 víz, és számold ki, hogy hasonló helyzetben mennyi pénzt pazarolnátok el!
- Nézz utána, hol a legdrágább a víz a világon!

2. Az ötfős Kertész család síelni megy Ausztriába. Együtt készülődik apa, anya, a 4,5 éves Geri, a 9 éves Alma és a 11 éves Dia. A sípályát már kiválasztották, a sítérleteket pedig interneten keresztül előre kifizették, mert így olcsóbb volt. Most szállást keresnek. Az egyik lehetőség, hogy megszállnak Magyarországon, és napi 100 km-t autóznak (50 km-t a sípályáig, majd ugyanennyit vissza a szállodáig). A másik lehetőség, hogy megszállnak egy osztrák szállodában a sípálya mellett. Az árakat táblázatba foglaltuk:



	Felnőtt	0-4 éves gyerek	4-8 éves gyerek	8-14 éves gyerek
Magyar szálloda	7500 Ft/fő/éj (félpanzióval)	ingyenes	a felnőtt ár 50%-a	a felnőtt ár 70%-a
Osztrák szálloda	30 euró/fő/éj (félpanzióval)	ingyenes	a felnőtt ár 40%-a	a felnőtt ár 75%-a

- a) Számold át forintba az euróban megadott osztrák árakat! (Nézz utána az interneten, hány Ft-ért tudsz eurót váltani!)
- b) Számold ki, melyik szállodában mennyibe kerül 1 éjszaka az 5 fős családnak!
- c) Mennyibe kerül a napi 100 km megtétele, ha az autó 7,6 liter benzint fogyaszt 100 km-en? (Nézz utána az aktuális benzináraknak!)
- d) Számold ki, mennyibe kerülne egy 5 napos, 4 éjszakás szállás a Kertész családnak Magyarországon és Ausztriában! A magyarországi szállás esetén a plusz benzinköltséget is add hozzá a költségekhez!
- e) Mennyibe kerülne ez a túra a te családnak?
- f) Hány forinttal kell kevesebbet fizetni az osztrák szállodában, ha a szállás félpanzió nélkül csak 22 euró/fő/éj egy felnőttnek?
- g) Ha a Kertész család az árat félpanzió nélkül kéri, itthonról kell ennivalót vinniük, ami 35 000 Ft pluszköltség. Mennyibe kerül ezzel együtt a szállás és az étkezés?
- h) Te melyik szállodát választanád? Miért? Indokold meg a választásodat!
3. 🏃 Néhány barát elindult a hétvégi *Élj egészségesen!* félmaraton futóversenyen (21 km). A start 9:00 órakor volt, 8000 indulóval.
- a) Péter tervezett átlaga 5,5 perc volt km-enként. Hány órakor ér célba, ha végig tartani tudja ezt a tempót?
- b) Sanyi is 5,5 perces átlagtempót tervezett, de sikerült gyorsabban futnia, így 5 perc 23 mp alatt futott le 1 km-t. Hány perccel előbb ért célba, mint Péter?
- c) Hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val futott Sanyi?
- d) Gergő 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -s átlagsebességgel futott. Hány perc alatt fut le 1 km-t? Hány méter van még hátra Sanyinak, amikor Gergő beér a célba?
- e) Hány perc alatt futott le 1 km-t az az induló, aki 11:45-re ért célba?
- f) A férfi félmaraton világcúcsát az eritreai származású Zersenay Tadesse tartja 58:23-as idővel. Hány métert fut 1 perc alatt? Hány perc alatt fut 1 km-t?
- g) Te hány perc alatt futsz le 1 km-t? Ha ezt a tempót tartani tudnád, le bírnád-e futni 2 órán belül a félmaratont?



1. PÉLDA

A bátyám 100 svájci frankot (CHF) adott a születésnapomra. Gyorsan kiszámoltam, hány forintot ér: 1 svájci frank most 297 forint, így 29 700 forint boldog tulajdonosa lettem. Anya figyelmeztetett, hogy a frank árfolyama gyorsan változhat. 2008-ban 1 svájci frank még csak körülbelül 150 Ft volt, 2015-ben pedig már nagyjából 300 Ft.

- a) Mennyit érne a 100 svájci frank, ha a forinthez képest 3%-ot erősödik?
b) Mennyit érne a pénzem, ha a frank árfolyama a 3%-os erősödés után 2%-ot esne?

Megoldás

- a) A svájci frank 3%-os erősödése azt jelenti, hogy $100 \text{ CHF } 29\,700 \cdot 1,03 = 30\,591$ forintot érne.
b) A 3%-os erősödés után a 2%-os gyengülés azt jelenti, hogy $100 \text{ CHF } 29\,700 \cdot 1,03 \cdot 0,98 \approx 29\,979$ forintot érne.

Dolgozzatok párban! Nézzetek utána, mennyi most az euró árfolyama! Számoljátok ki, hány forintunk lenne, ha 100 svájci frank helyett 100 eurót, illetve ha 100 angol fontot kaptunk volna! Hasonlítsátok össze az értékeket!

2. PÉLDA

Amikor nagyi meghallotta, hogy a bankba akarom tenni a megspórolt 100 000 Ft-omat, mindenképpen megpróbált lebeszélni. Azt javasolta, használjam az ő régi bevált módszerét, és varrjam a pénzt egy párnahuzatba. Így bármikor hozzáférhetek, ha szükségem van rá.

– És az infláció? – kérdeztem tőle, de ő csak legyintett.

Utánanéztem a dolognak az interneten. Az infláció az elmúlt évben 1,7%-os volt, azaz ennyit veszítene a pénzem az értékéből, ha otthon őrizgetném.

– Egyáltalán, mi az az infláció?

– Jó kérdés. Megpróbálom egyszerűen megfogalmazni. **Ha sokféle, mindennap szükséges termék ára egy év alatt átlagosan 1,7%-kal emelkedik, akkor egy év múlva 100 forint helyett 101,7 forintból tudsz ugyanannyit vásárolni. El lehet mondani fordítva is. Egy év múlva ugyanbból a száz forintból csak $\frac{100}{101,7} \cdot 100 \approx 98,3$ forintnyi terméket tudsz megvenni.** Ezért szokták mon-

dani, hogy az infláció során romlik a pénz értéke.

Mennyit érne 100 000 Ft 1, 2, illetve 3 év múlva, ha az infláció minden évben 1,7% lenne?

Megoldás

Egy év múlva a jelenlegi 100 000 forintom csak $100\,000 \cdot 0,983 = 98\,300$ forintot érne.

Két év múlva $100\,000 \cdot 0,983 \cdot 0,983 = 100\,000 \cdot 0,983^2 = 96\,629$ forintot érne.

Három év múlva $100\,000 \cdot 0,983 \cdot 0,983 \cdot 0,983 = 100\,000 \cdot 0,983^3 = 94\,986$ forintot érne.

Ezt az ötletet elvetettem, mivel egyrészt kevesebb pénzem lenne, másrészt még az a veszély is fennállna, hogy hamarabb elköltöm, ha ilyen könnyen hozzáférlek.



3. PÉLDA

Az orosz kormány 1867-ben a csőd szélén állt. Úgy döntöttek, hogy elfogadják az amerikaiak ajánlatát, és eladják a használatlanul tartott alaszakai területeiket. 7 200 000 dollárt kaptak körülbelül 1 700 000 km² földért. Ez kb. 4,2 dolláros ár volt négyzetkilométerenként. 150 évvel ezelőtt szinte mindenki azt gondolta, hogy az amerikaiak hatalmas ostobaságot követtek el, amikor jeges, lakhatatlan földet vásároltak. Sejtelmük sem volt a felszín alatt rejlő hatalmas nyersanyagkészletekről.



- Ha az évenkénti átlagos pénzromlás üteme 2% lett volna, akkor mennyit kellene fizetni 150 évvel később, ha csak az inflációt vesszük figyelembe, azaz mennyi mai dollár felel meg a 150 évvel ezelőtti 7,2 millió USD-nek?
- Mekkora lenne ez az érték 3%-os átlagos infláció esetén?
- Hányszoros különbséget eredményezne a végösszegben egyetlen százalék változás?

Megoldás

- $7,2 \text{ millió} \cdot 1,02^{150} \approx 7,2 \text{ millió} \cdot 19,4996 \approx 140,4 \text{ millió USD}$
- $7,2 \text{ millió} \cdot 1,03^{150} \approx 7,2 \text{ millió} \cdot 84,2527 \approx 606,6 \text{ millió USD}$
- 150 év alatt 1% különbség $\frac{606,4}{140,4} \approx \frac{84,2527}{19,4996} \approx 4,32$ -szoros különbséget eredményezne.

Megjegyzés: az $1,02^{150}$ értékét a számológéppel, vagy a mobiloddal tudod kiszámolni.



KUTATÓMUNKA

- Végezzetek felmérést családok, barátaitok, ismerőseitek körében, ki milyen megtakarítási formát ismer!
- Szerezzetek információkat arról, mibe érdemes manapság befektetni – részvénybe, bankba, lakásba, aranyba stb. –, és válasszatok ki ezek közül egyet! Írjatok róla egy rövid összefoglalót és egy reklámszöveget! Próbáljátok meggyőzni a másik csoportot arról, hogy nálatok fektesse be megtakarítását! Készítsetek egy színes, figyelemfelkeltő plakátot! Szükség esetén használjátok az internetet!

FELADATOK

A nagybátyám bankban dolgozik. Tegnap délután sokat beszélgettem vele, és a következőket tudtam meg:

1. Ha bankban tartom a pénzem, az biztonságosabb, mintha itthon tartanám, ráadásul évente 0,4%-ot kamatozik is. Ha van egy kevés megtakarításom, azt érdemesebb inkább lekötöni, hiszen akkor évenként 4% a kamat. Ha két évig bent hagyom a pénzem, **akkor már úgynevezett kamatos kamattal számolhatok. Ez azt jelenti, hogy egy év elmúltával már a kamattal megnövekedett pénzem kamatozik tovább a következő évben.**

- Számítsd ki, mennyi pénzem lesz egy év múlva, ha 150 000 Ft-ot tartok a bankban!
- Hány forinttal gyarapodik a pénzem abban az esetben, ha 3 évre lekötöm?

2. Sokan úgy döntenek, hogy a pénzüket valamilyen ingóságba fektetik. Az autó erre nem jó megoldás, hiszen annak a megvásárlás pillanatától csökken az ára.

A használat során bekövetkező értékvesztést nevezik amortizációnak.

Egy autó értéke az első évben 20%-kal, a másodiktól a hatodik évig évente 10%-kal csökken. 8 000 000 Ft-ért vásároltam új autót.

- Mennyit ér az autóm 1 év múlva?
- Mennyit ér az autóm 3 év múlva?
- Mennyit ér az autóm 6 év múlva?
- Nézz utána az interneten, melyik Magyarországon gyártott típus kerül új korában 8 000 000 Ft-ba!
- Nézz utána az elektromos autók átlagos amortizációjának. Melyik típusú autó veszít többet az értékéből azonos időtartam alatt, a benzines vagy az elektromos?



3. Sok ember úgy gondolja, hogy a lakásvásárlás a jó befektetés. Ha készpénzből ki tudjuk fizetni, egyszerű a dolgunk. Ha lakáshitelt kell rá felvennünk, akkor már nagyobb a kockázat. **A felvett kölcsön után nemcsak a felvett összeget kell visszafizetnünk, hanem a kamatot – a pénz használatának árát – is meg kell fizetnünk.**

- Hány forintot fizetünk vissza a banknak, ha 10 000 000 Ft hitelt vettünk fel lakásvásárlásra, és 20 éven keresztül havi 62 000 Ft a törlesztőrészlet?
- Hány forintot fizetünk vissza a banknak, ha 10 000 000 Ft hitelt vettünk fel lakásvásárlásra, és 15 éven keresztül havi 74 000 Ft a törlesztőrészlet?

4. A barátomnak ikrei születtek, ezért vásárolt a családjának egy új, nagyobb lakást. Összegyűjtött egy jelentősebb összeget, hitelt is vett fel, így 10 éven keresztül havi 67 850 forintot törleszt a banknak. A régi lakását kiadta, ami reményei szerint fedezi majd az új lakás törlesztőrészletét és azt a pluszki költséget is, amennyivel az új lakás rezsije több lett. Hány forintért kellene kiadnia a régi lakását, ha a törlesztőrészleten túl a 24 500 Ft-os rezsikülönbözetet is ebből szeretné fizetni?

5. Egyre több ember vásárol részvényt, ettől remélve a meggazdagodást.

A részvény bármikor megvehető és eladható. Árfolyama állandó mozgásban van, akár egyetlen napon belül is több százalékot emelkedhet vagy csökkenhet.

Itt nagyon nagy összegeket lehet gyorsan elveszíteni vagy nyerni, ezért nagy elővigyázatosságot igényel a részvényekkel való kereskedés! A részvények adásvétele nagyon sok matematikai ismeretet igényel a pénzpiac területéről.

- 10 000 dollárért mobiltelefon-részvényeket vásároltam. Az értéke első nap 4%-kal növekedett, a második nap 4%-kal csökkent. Mennyit ér most a részvényem?
- Egy másik alkalommal 5000 dollárért vásároltam részvényeket. Az értéke első nap 3,52%-kal nőtt, második nap 1,92%-kal csökkent, harmadik nap pedig 1,38%-kal ismét csökkent. Mennyit ér most a részvényem?

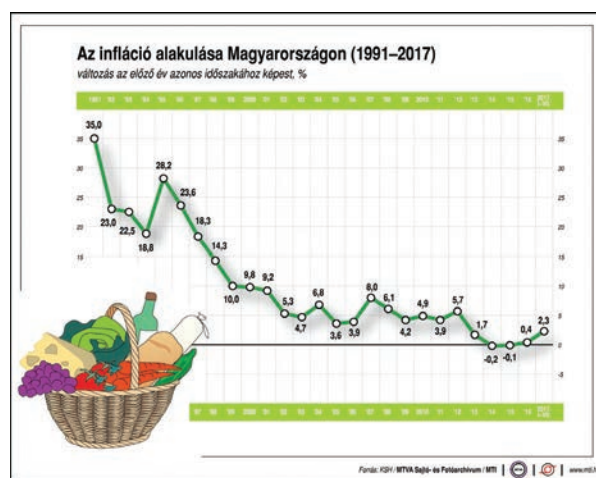
6. Magyarországon 1946-ban sikerült világrekordot dönteni, de erre nem lehetünk büszkéek. Sokáig az akkori magyar infláció volt a legmagasabb, az ilyen magas inflációt hiperinflációnak nevezik. 1946-ban pengő volt a magyar fizetőeszköz neve és gyorsan elértéktelenedett. Egy kiló kenyér például 1945 augusztusában 6 pengőbe került, ezzel szemben a következő év május elején már 8 millió, míg június végén már 5,85 milliárd (!) pengőt kellett érte kifizetni. Az infláció tetőpontja aztán az 1946-os



év július hónapja lett, amikor egy hónap alatt 41 900 billiót romlott a pengő értéke, vagyis az árak átlagosan 15 óránként megduplázódtak. http://www.rubicon.hu/magyar/oldalak/1946_julius_10_vilagrekordot_dont_a_magyar_inflacio_alapjan

- Hányszorosára nőtt a kenyér ára '45 augusztusa és '46 májusa között? Hány százalékos ez az emelkedés?
- Hányszorosára nőtt a kenyér ára '45 augusztusa és '46 június vége között? Hány százalékos ez az emelkedés?
- Írd le a 41 900 billiót ($1 \text{ billió} = 10^{12}$) szöveg helyett nullákkal, majd normálalakban is!

7. A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre! A számításokhoz használj zsebszámológépet vagy mobiltelefont!



- Melyik évben volt a legmagasabb az infláció?
- Mennyit veszített az értékéből 1000 Ft 1991 és 2000 között?
- Mennyit veszített az értékéből 1000 Ft 2001 és 2010 között?
- Keresd meg az interneten, hogy mi az elnevezése a negatív inflációnak!

CSOPORTMUNKA

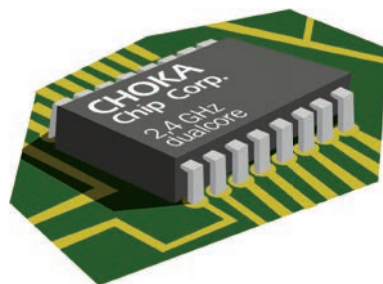
Az itt lévő feladat kapcsán beszéljétek meg, hogy melyik kérdést lehet megválaszolni, melyiket nem, melyik kérdésre egyetlen szám a válasz, melyikre nem. Hogyan változtatnád meg a feladat szövegét, hogy minden kérdésre egyetlen szám legyen a válasz?

A feladat:

A Gamecode kiállítás szombati napjára 2400-an látogattak ki.

Vasárnap 3200 látogatót regisztráltak.

- Hány ember járt a Gamecode kiállításon összesen?
- Legalább hány ember járt a Gamecode kiállításon?
- Legfeljebb hány ember járt a Gamecode kiállításon?



FELADATOK

1. Oldd meg az egyenleteket a racionális számok körében!

- $3x - 4 + 5x - 2 = 17 - 4x + 1$
- $2(x - 3) - 3(4 - 2x) + 7 = 10 - (x + 3)$
- $\frac{x-1}{5} + \frac{x+4}{2} = 2x - 6$

2. Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán! A megoldást ábrázold számegyenesen!

- $5 - 8x < 5x - 8$
- $10(x - 7) - 3(4 + x) - 5 \geq 2 - 3(x - 2)$
- $(4x + 1) \cdot 3 - 24 \geq -8x - 2(3 - x)$
- $\frac{2x}{5} + \frac{3}{2} - \frac{7x}{2} + 2 \geq \frac{3x+1}{5} - \frac{2}{5}$

3. Karcsi 8 év múlva harmadannyi idős lesz, mint édesapja most. Most életkoruk összege 44 év.

- Hány éves Karcsi most?
- Hány éves az édesapja?

4. Kata 26 évvel fiatalabb édesanyjánál, 3 évvel idősebb öccsénél, Bálintnál. Hármuk életkora összesen 65 év. Hány évesek külön-külön?

5. Hány éves most az az ember, aki 5 év múlva kétszer annyi idős lesz, mint 10 évvel ezelőtt?

6. Gondoltam egy számot. Ha a kétszereséhez 100-t adunk, akkor az ötszörösénél 48-cal kisebb számot kapunk. Melyik számra gondoltam?

7. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 13. Ha az eredeti számhoz hozzáadjuk a számjegyek felcserélésével kapott kétjegyű szám kétszeresét, akkor 228-at kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

8. Gondoltunk három különböző pozitív egész számot. Ezeket páronként összeadtuk, és a következő összegeket kaptuk:

- 6, 8, 10;
 - 99, 100, 101.
- Melyik három számra gondoltunk?

9. Egy természetes szám végéről elhagyva az egyes számjegyet egy új számot kapunk. Az új szám végéről elhagyva a hatos számjegyet egy újabb számot kapunk. Az eredeti, az új és az újabb szám összege 2176.

- Melyik az újabb szám?
- Mennyi lehet a legújabb szám?

10. Három egymást követő hárommal osztható szám

- a) összege 783;
b) szorzata 13 608.

Melyik ez a három szám?

11. Az asztalon 8400 Ft van. Kétszer annyi kétszázast láthatunk, mint ezrest. Százforintosból annyi van, mint amennyi az előző kettőből összesen. Van az asztalon ötezres is, de ebből van a legkevesebb. Hány darab pénz van az asztalon?

12. Egy hegedű tokkal 18 800 Ft. Egy hegedű vonóval, 17 800 Ft. Egy hegedűt vonó és tok nélkül 15 900 Ft-ért adnak. Mennyibe kerül egy hegedű tokkal, vonóval?



13. Péter adott Ágnesnek annyi pénzt, amennyi Ágnesnek éppen volt. Ekkor ugyanannyi pénzük lett. Ezután Ágnes visszaadott Péternek egy ezrest, így Ágnesnek csak feleannyi pénze maradt, mint Péternek. Hány forintjuk volt eredetileg?

14. 10 liter 20%-os oldathoz legalább hány liter 80%-os oldatot öntsünk, hogy a keverék 50%-os legyen?

15. Milyen töménységű lesz 20 liter 5%-os sóoldat, amelyből 5 liter víz elpárolgott? Feltételezzük, hogy 1 l tengervíz kb. 1 kg.

16. Egy négyzet alakú füves rész egyik oldalát 20%-kal növelték meg, a másikat pedig 5 m-rel. A területe $100,8 \text{ m}^2$ -rel nőtt.

- a) Mekkora volt, és mekkora lett a füves rész területe?
b) Hány százalékkal nőtt meg a füves rész területe?



17. Egy 30×30 méteres négyzet alakú parkban két, egyenként 4 méter széles murvás utat építenek úgy, hogy a két út középvonala a négyzet alakú terület két átlójára illeszkedjen.

- a) Hány köbméter murvát rendeljenek, ha egy négyzetméterre 4 cm vastagon terítik el?
b) Hány méter szegélykő kell az utak széléhez?

18. Ha három évig bent hagyod az 1 000 000 forintodat a bankban, akkor évente 1,4% kamatot fizetnek, és az alapösszeg 2%-át pluszban jóváírják a 3. év végén. Hány forintod lesz összesen a harmadik év végén? (A költségektől tekintsünk el.)

19. Elhelyeztünk a bankban 1 000 000 Ft-ot egy évre lekötve, amelyre a bank évi 1,2% kamatot fizet. A kiszámított kamatból levonnak 15% kamatadót, amelyet a bank befizet az államnak, ugyanakkor havi 690 Ft kezelési és számlavezetési díjat is felszámolnak.

- a) Mennyivel nő a számlán lévő összeg egy év múlva?
b) Hogyan változik a számlán lévő összeg egy év múlva, ha az éves kamat 0,8%?

CSOPORTMUNKA

Háromfős nyomozócsoporthoz végre a siker előtt áll. A műkincstolvajok nyomán eljuthattok abba a titkos föld alatti kazamatarendszerbe, ahol az ellopott kincseket őrzik.

Oldjátok meg először az A feladatsort, majd a B feladatsort. Az egyes feladatsorokban lévő számokat adjátok össze! Az így kapott két szám szorzata lesz a széfet nyitó kód. Vigyázzatok, csak 45 percet van egy-egy feladatsorra! Osszátok el ügyesen a feladatokat!



A feladatsor

1. Oldd meg az alábbi feladatokat!

- Egy számnak és a felének az összege 196,5. Melyik ez a szám?
- Egy pozitív számnak és a nyolcszorosának a szorzata 50. Melyik ez a szám?
- Egy szám és a hétszeresénél 2-vel kisebb szám különbsége 68. Melyik ez a szám?
- Add össze a fenti feladatok végeredményeit! Ez lesz a kódhoz szükséges **első szám**.

2. Oldd meg az egyenleteket! Szorozd össze a megoldásokat, és megvan a kódhoz szükséges **második szám**!

- $(14 - 9x) \cdot 2 - 11 = -91$
- $\frac{5x - 17}{2} = \frac{101 - 4x}{3}$
- $3(x + 5) - 2(4x - 7) = 5(9 - x) - 4(2x + 1)$
- $\frac{3}{4} \cdot (x - 6) + 13 = \left(15 - \frac{7}{2}x\right) : \left(-\frac{5}{4}\right)$

3. A moziban 175-nél több, de 185-nél kevesebb néző volt. Kétszer annyi gyerek volt köztük, mint felnőtt. A felnőttek között a nők és a férfiak aránya 3 : 2 volt. Hány gyerek volt a moziban?

Ez a kódhoz szükséges **harmadik szám**.

4. A nyári hőségben almafröccsöt készítettünk: 100%-os almalevet öntöttünk fel szódával. Mennyi szódát öntsünk 6 liter almalevéhez, hogy 60%-os almafröccsöt kapjunk? Az eredmény lesz a kódhoz szükséges **negyedik szám**.

5. Egy háromszög oldalainak aránya 3 : 4 : 5, kerülete 30 cm.

- Mekkorák a háromszög oldalai?
- Hány fokos a háromszög legnagyobb szöge?
- Számold ki a háromszög területét! Ez a kódhoz szükséges **ötödik szám**.

B feladatsor

1. Az öcsém és én együtt 248 cm magasak vagyunk. Az apukánk háromszor olyan magas, mint a közünk lévő magasságkülönbség. Hárman együtt 440 cm magasak vagyunk. Hány cm magas vagyok? Ez a végeredmény lesz a kódhoz szükséges **első szám**.
2. A parkban emberek és kutyák sétálnak. Hány ember és hány kutya sétál a parkban, ha összesen
 - a) 51 fejük és 130 lábuk van?
 - b) 51 fejük és 188 lábuk van?
 - c) Add össze az a) és b) feladatban szereplő kutyák számát! Ez a kódhoz szükséges **második szám**.
3.
 - a) Gondoltam egy kétjegyű számra, melynek egyik számjegye 3-mal nagyobb a másikonál. Ha a számjegyeket felcseréljük, az új szám az eredeti $\frac{4}{7}$ része lesz. Melyik számra gondoltam?
 - b) Gondoltam egy kétjegyű számra, amely számjegyeinek összege 10. Ha a jegyeket felcseréljük, az új szám az eredeti szám ötszörösénél 4-gyel kevesebb. Melyik számra gondoltam?
 - c) Szorozd össze a fenti két eredményt! Ez a kódhoz szükséges **harmadik szám**.
4. Bandi és Dezső egy 1000 m hosszú, kör alakú pályán a startvonaltól egyszerre, de ellenkező irányba indul futni. Bandi 6 métert, Dezső 6,5 métert tesz meg másodpercenként.
 - a) Hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val futnak a fiúk?
 - b) Hány másodperc múlva találkoznak?
 - c) Add össze az a) és b) feladatokban eredményként kapott számokat! Ez a kódhoz szükséges **negyedik szám**.
5. Minden évben a nyolcadikosok feladata, hogy a farsangi mulatság után kitakarítsák az iskolát. Az A osztály 80 perc alatt, a B osztály – mivel kevesebben vannak – 2 óra alatt végezne a munkával. Hány percig tart, ha összefognak, és együtt dolgoznak? Az eredmény a kódhoz szükséges **ötödik szám**.

Az öt-öt szám összeadása után kapott két számot szorozzátok össze, így kapjátok meg azt a hétjegyű kódot, amivel bejuthattok a pánccsaszekrénybe.

Sikerült? Hurrá! Lefoglalhatjátok a lopott kincseket.



A mai három delikvens, Attila, Krisztián és Eszter tesztelheti az új vezeték nélküli headseteket, amelyek most érkeztek a futuroszkóphoz a fejlesztőktől.

Sokkal királyabb, mint az az ülés!

V. Függvények, valószínűségek, sorozatok

A számok világában élek. Néha az az érzésem, hogy könyvelőként az összeset leírtam már egyszer, de inkább többször.

Az irodában a kollégákkal azon dolgozunk, hogy minden egyes pénzügyi mozdulatot dokumentáljunk, és mind az állam, mind pedig az ügyfél részéről rendezetten könyveljük.



De igazából a problémamegoldó gondolkodásnak veszem hasznát, amikor olyan könyvelési lehetőséget tudok ajánlani az ügyfeleknek, amely sokkal kedvezőbb mindenkinek. Természetesen szigorúan a törvény keretein belül.



Ezek főleg a hangszett beállításához szükséges elektrotechnikai műveletek.

Egy profi hangosítónak rengeteg számítást, mérést kell végeznie kint a helyszínen és a műhelyben is.



Az adatok alapján kiválasztani a megfelelő eszközt, az kemény matek... és persze tapasztalat. De mikor a színpad mögött hallgathatod Lindsay-t hegedülni... Na, az megéri a sok fáradságot!



Sziasztok! Szép időnk van, nemde? És holnap is az lesz! Nekem elhihetitek. Én vagyok a meteorológiai intézet legjobb előrejelzője.



A közvetítéseken látható stúdiózást persze komoly kalkuláció előzi meg a mérőállomások, szatellitok és ballonok adatai alapján.



Az új indiai heurologic számítógépünknek köszönhetően 300-ból 288 előrejelzésünk közel 98%-ban bejön.



Szóval elhihetitek, ha azt mondom: a holnapi kirándulás rendben lesz!

Emlékeztető

A tavalyi tanévben tanultunk a függvényekről. Ismételjük át a tanult fogalmakat!

Az egyértelmű hozzárendelést függvénynek nevezzük.

Függvényt sokféle módon megadhatunk: szöveges leírással, Venn-diagrammal, táblázattal, elempárokkal, nyíldiagrammal, képlettel és számtalan egyéb módon is, de a következőkre figyelniünk kell. **Egy függvény megadásakor minden esetben meg kell adni az alaphalmazt és a hozzárendelési szabályt.**

Az alaphalmaz azon elemeinek összességét, amelyekhez hozzárendeltünk képhalmazbeli elemeket, a **függvény értelmezési tartományának** nevezzük.

Az alaphalmazt és az értelmezési tartományt gyakran nem különböztetjük meg, hanem azt mondjuk, hogy az alaphalmaz minden eleméhez kell függvényértéket rendelni.

A képhalmaz azon elemeinek összességét, amelyeket hozzárendeltünk az alaphalmaz elemeihez, a **függvény értékkészletének** nevezzük.

A függvényeket gyakran $f, g, h, \dots$ betűvel jelöltük, és

$f: x \mapsto 8 \cdot x$, vagy $f(x) = 8 \cdot x$, vagy régebbi könyvekben $y = 8 \cdot x$

alakban írtuk fel. Ha nem adjuk meg az értelmezési tartományt, akkor mindig a lehető legbővebb halmazra gondolunk, ahol a hozzárendelés értelmezhető.

1. PÉLDA

A nyolcadik osztályosok búcsúzásakor fotókat készítettek. A készülő fotók ára 150 Ft/db, amelyet rendelés után szállítanak. Réka vállalta, hogy összegyűjti a fotók árát, és mindennap leadja osztályfőnökének. Az első napon 105 db, a második napon 87 db, a harmadik napon 116 db árát hozták be az osztálytársai.

- Kovács Panni 17 db-ot rendelt. Mennyit kell fizetnie?
- Hány forintot szedett össze Réka az első napon?
- Mennyi pénz gyűlt össze az első két napon?
- Mennyit fizettek a fotósnek összesen?

**Megoldás**

- $17 \cdot 150 = 2550$ forintot kellett Panninak fizetnie.
- $105 \cdot 150 = 15\,750$ Ft-ot szedett össze Réka az első napon.
- Az első két napon összesen 192 fotó árát hozták be, így $192 \cdot 150 = 28\,800$ Ft gyűlt össze.
- Összesen 308 db fotót rendeltek, így $308 \cdot 150 = 46\,200$ Ft-ot fizettek a fotósnek.

Az első példa megoldásánál azt használtuk fel, hogy a fotók ára és a fizetendő összeg között egyenes arányosság van. Hatodik osztályban már tanultatok az egyenes arányosságról. Ismételjük át a tanultakat!

Két mennyiség akkor egyenesen arányos, ha az egyik mennyiség kétszeresére, háromszorosára stb. változik, akkor a másik mennyiség is kétszeresére, háromszorosára, ugyanannyiszorosára változik.

Ezt másként is megfogalmazhatjuk:

Két mennyiség egyenesen arányos, ha az összetartozó értékek hányadosa állandó. Ez alól a $(0; 0)$ számpár jelent kivételt, mert ezekkel az értékekkel az osztást nem értelmeztük.

A példában a fotók száma és az ezekért fizetett összeg a két összetartozó mennyiség.

A fotók száma (db)	17	105	192	308
Fizetendő összeg (Ft)	2550	15 750	28 800	46 200
1 fotó ára (Ft)	$\frac{2550}{17} = 150$	$\frac{15\,750}{105} = 150$	$\frac{28\,800}{192} = 150$	$\frac{46\,200}{308} = 150$

2. PÉLDA

Zsigáék az udvaron lévő csapból 15 perc alatt tudják feltölteni a 120 literes kerti tavat.

- Mennyi víz folyik a kerti csapból 1 perc alatt?
- Hány literes a víztározó hordó, ha 25 perc alatt tudják feltölteni?
- Hány literes a kerti pancsoló, ha 60 perc alatt tudják feltölteni?

Megoldás

Ha 15 perc alatt 120 liter víz folyik ki, akkor

- 1 perc alatt $\frac{120}{15} = 8$ liter víz folyik ki.
- 25 perc alatt 200 liter víz folyik ki. Tehát a hordó 200 literes.
- 60 perc alatt 480 liter víz folyik ki. Tehát a pancsolómedence 480 literes.

Foglaljuk táblázatba az előző példában szereplő összetartozó mennyiségeket!

Eltelt idő (perc)	15	1	25	60
Vízmennyiség (l)	120	8	200	480
$\frac{\text{Vízmennyiség}}{\text{Idő}} \left(\frac{\text{liter}}{\text{perc}} \right)$	$\frac{120}{15} = 8$	$\frac{8}{1} = 8$	$\frac{200}{25} = 8$	$\frac{480}{60} = 8$

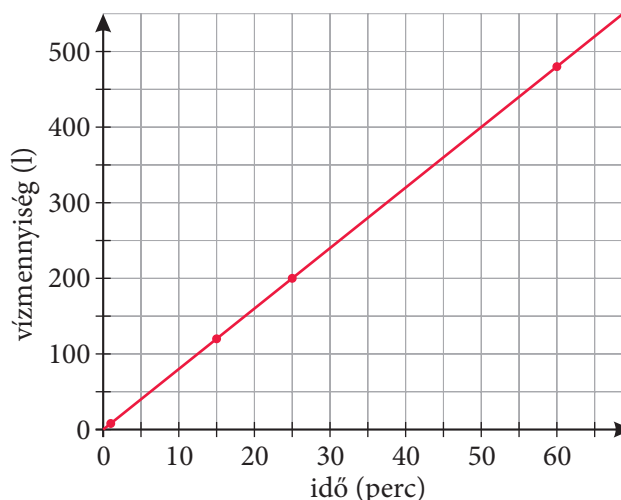
Az összetartozó értékek hányadosa, azaz a kifolyt vízmennyiség és az eltelt idő hányadosa állandó. Ábrázoljuk a kifolyt vízmennyiséget az idő függvényében!

A grafikonról sok információt leolvashatunk:

- A 2. példában a függvény grafikonja egy origón áthaladó félegyenes.
- A hozzárendelés egy függvény.
- Az összetartozó értékek hányadosa állandó.

Ez a hozzárendelés

$$\text{Vízmennyiség} = 8 \left(\frac{\text{liter}}{\text{perc}} \right) \cdot \text{idő.}$$



3. PÉLDA

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket egy koordináta-rendszerben! A függvény értelmezési tartománya legyen a valós számok halmaza!

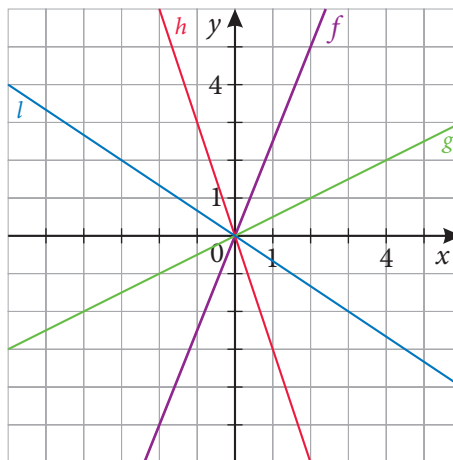
a) $f: x \mapsto 2 \cdot x$

b) $g: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x$

c) $h: x \mapsto -3 \cdot x$

d) $l: x \mapsto -\frac{2}{3} \cdot x$

Megoldás



A példában szereplő függvények egyenes arányosságok. Minden egyenes arányosság hozzárendelési szabálya: $x \mapsto mx$.

FELADATOK

1. a) A sulis büféjében négy pogácsa 340 Ft-ba kerül. Mennyit kell fizetnünk hét pogácsáért?

b) A csiga 4 óra alatt 3 métert tett meg. Mennyit tesz meg 11 óra alatt?

c) Gáspárnak minden hétköznap van edzése, minden nap ugyanannyi. Ha három nap alatt 7,5 órát edzett, hány órát tölt edzésen 25 nap alatt?

d) Az 5,6 kg-os dinnye 756 Ft-ba került. Mennyit kell fizetni a 8,4 kg-os dinnyéért?

2. Négy magyar fiatalember tartja a folyamatos csocsózás világrekordját. A játékot reggel 10:09-kor kezdték, és másnap 23:06-kor fejezték be.

a) Hány percet pihentek ez idő alatt, ha óránként 5 percet engedélyezett a Guinness-rekordok szabályzata?

b) Hány percet csocsóztak összesen?

3. A házunk alapja téglalap, egyik oldala 24 méter hosszú, a tervrajzon azonban csak 20 cm. Mekkora az épület alapterülete, ha a ház másik oldala a tervrajzon 12,5 cm?

4. A világ legnagyobb, 40 méter átmérőjű pizzáját Rómában készítették. A 25,6 tonnás pizzán öt séf dolgozott 48 órán keresztül folyamatosan. A pizzát 5234 adagban tudták csak megsütni.

a) Számold ki, hány kg pizza volt egy adagban!

b) Hányszorosa a pizza súlya egy normál (kb. 720 gramm) pizza súlyának?

c) A hagyományos, 32 cm-es átmérőjű, 8 szeletes pizzából egy nyolcadikos átlagosan 6 szeletet tud megenni. Számold ki, hány nyolcadikos lakna jól a világ legnagyobb pizzájából a megadott adatok alapján!

5. A csapból percenként 8 liter víz folyik a kádba. Mennyi idő alatt telik meg a 120 literes kád, ha csak a kétharmadáig töltjük meg?

- Ábrázold grafikonon a kádban lévő víz mennyiségét az eltelt idő függvényében!
- Add meg a grafikon hozzárendelési szabályát!
- Hogyan módosul a grafikon, ha a víztakarékos csapon csak 2,5 liter folyik percenként?
- Mennyi idő alatt lesz üres a kád, ha 2 liter 6 másodperc alatt folyik le? Ábrázold grafikonon a kádban lévő víz mennyiségét az idő függvényében!

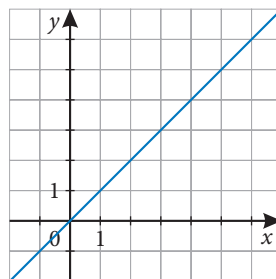
6. A japán mágnesvasút, ami egy tesztszakaszon 11 másodpercig $603 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -s sebességgel száguldott, megdöntötte a gyorsasági világrekordot.

- Számold ki, hány km-t tett meg másodpercenként a mágnesvasút!
- Ábrázold a megtett utat az idő függvényében!

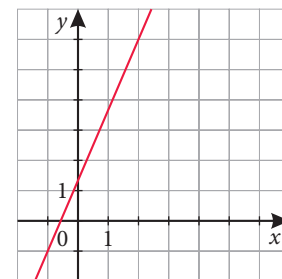


7. Válaszd ki az egyenes arányosságot ábrázoló grafikonokat!

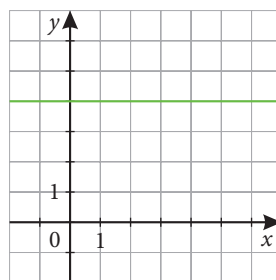
a)



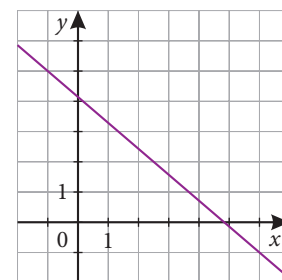
b)



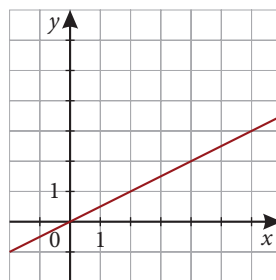
c)



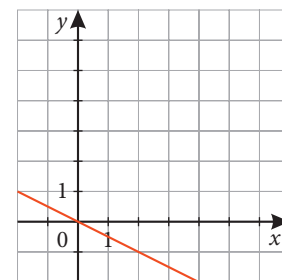
d)



e)



f)



8. Ábrázold az alábbi függvényeket koordináta-rendszerben!

a) $a: x \mapsto 3x$

b) $b: x \mapsto -x$

c) $c: x \mapsto \frac{1}{4}x$

d) $d: x \mapsto -2x$

e) $e: x \mapsto \frac{4}{5}x$

f) $f: x \mapsto -\frac{3}{2}x$

Emlékeztető

A függvények megadásánál többféle megszokott jelölés is létezik.

Az $f: x \mapsto 3x$ jelölés helyett használhatjuk az $f(x) = 3x$ jelölést is. Ez a jelölés azért lehet hasznos, mert a helyettesítési érték jobban látható. Például az f függvény 5 helyen felvett helyettesítési értéke: $f(5) = 3 \cdot 5 = 15$.

1. PÉLDA

Számítsuk ki néhány helyen a függvények helyettesítési értékeit, majd rendezzük a kapott értékeket közös táblázatba! Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az f , g , h függvényeket!

$$f(x) = 2 \cdot x \quad g(x) = 2 \cdot x + 3 \quad h(x) = 2 \cdot x - 4$$

Megoldás

Például, ha $x = -2$, akkor

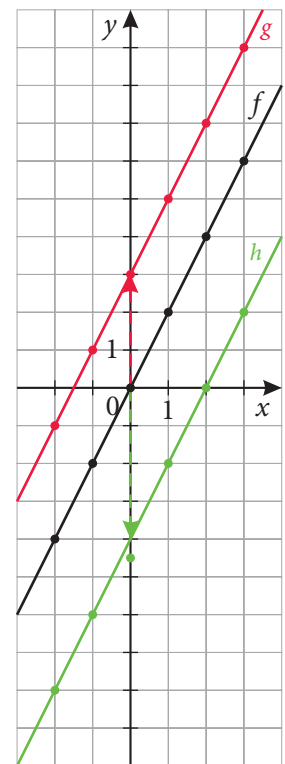
$$f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$$

$$g(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$$

$$h(-2) = 2 \cdot (-2) - 4 = -8$$

Az értéktáblázat és a függvények grafikonja néhány elem esetén:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2 \cdot x$	-4	-2	0	2	4	6
$g(x) = 2 \cdot x + 3$	-1	1	3	5	7	9
$h(x) = 2 \cdot x - 4$	-8	-6	-4	-2	0	2



Látjuk, hogy az $f(x) = 2 \cdot x$; $g(x) = 2 \cdot x + 3$; $h(x) = 2 \cdot x - 4$ függvények grafikonjai egymással párhuzamos egyenesek. A párhuzamosságot az alábbiakkal indokolhatjuk:

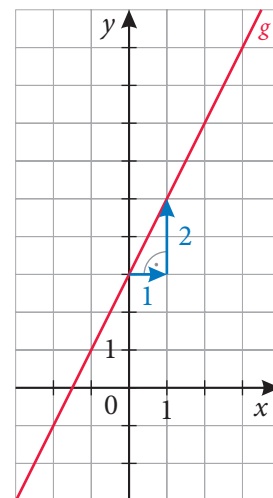
- Az f függvény egyenes arányosság, ezért grafikonja egyenes.
- A g függvény grafikonját megkapjuk, ha az f függvény minden értékéhez hozzáadunk 3-at. Ez azt jelenti, hogy az f függvényt az y tengely mentén 3 egységgel toljuk el pozitív irányba.
- A h függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg az f függvény grafikonjából, hogy az y tengely mentén 4 egységgel toljuk el negatív irányba.
- Az f , g , és h függvények párhuzamossága már a függvények megadásából is következtethetünk, mivel a képletekben az x változó szorzója mindenhol 2.

Mit jelent ez a 2-es szorzó?

Ha az értéktáblázatot megnézzük, azt látjuk, hogyha az x értéke eggyel nő, akkor a hozzárendelt függvény értéke 2-vel nő.

Nézzük meg ezt például a g függvény esetén.

x	-2	-1	0	1	2	3
$g(x) = 2 \cdot x + 3$	-1	1	3	5	7	9

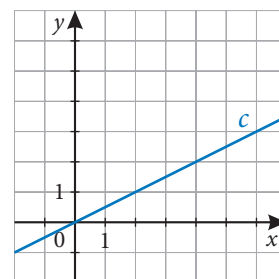
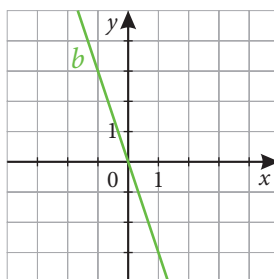
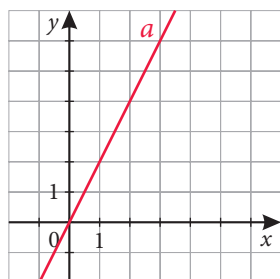


Az x változó szorzója a függvény **meredekségét** határozza meg. Mivel ez a szó m betűvel kezdődik, a meredekséget gyakran m betűvel jelöljük. Minél nagyobb a függvény meredeksége – azaz m értéke – annál gyorsabb a függvény változása.

2. PÉLDA

Ábrázoljuk az $a: x \mapsto 2x$, $b: x \mapsto -3x$, $c: x \mapsto \frac{1}{2}x$ függvényeket, és határozzuk meg a meredekségüket!

Megoldás



Mindegyik függvény egyenes arányosság, mindegyik függvény grafikonja áthalad az origón.

Az a függvény meredeksége 2, a b függvényé -3 , a c függvényé $\frac{1}{2}$.

Az egyenes arányosság függvényét általános képlettel így is írhatjuk: $x \mapsto m \cdot x$, ahol $m \neq 0$ egy szám, amely a függvény meredekségét jelenti.

3. PÉLDA

Számítsuk ki a megadott függvények értékét két-két helyen, és ábrázoljuk a függvényeket a kiszámított értékek segítségével!

$$f: x \mapsto 3x - 2 \quad g: x \mapsto \frac{2}{3}x + 1 \quad h: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 4$$

Határozzuk meg a függvények meredekségét!

Megoldás

Az f függvényhez készített táblázat:

x	0	1
$3x - 2$	-2	1

Ha az x értéke 1-gyel nő, akkor a függvény értéke 3-mal nő. Tehát az f függvény meredeksége 3.

A g függvény ábrázolásához az $x = 0$ érték mellett célszerű az $x = 3$ értéket választani, mert így egész koordinátájú pontokat kapunk.

x	0	3
$\frac{2}{3}x + 1$	1	3

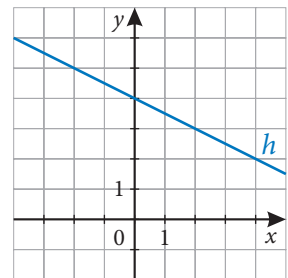
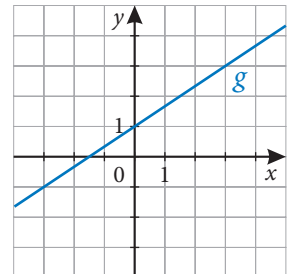
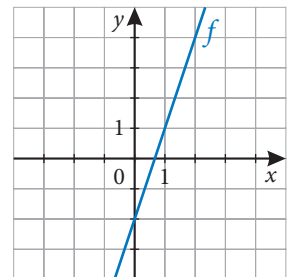
Láthatjuk, hogy ha az x értéke 3-mal nő, akkor a hozzá tartozó érték 2-vel növekszik. Ezért, ha az x értéke 1-gyel nő, akkor a hozzá tartozó függvényérték $\frac{2}{3}$ -dal nő. Tehát a g függvény meredeksége $m = \frac{2}{3}$.

A h függvény két helyettesítési értéke legyen 0 és 2.

x	0	2
$-\frac{1}{2}x + 4$	4	3

A h függvény esetén, ha az x értéke 2-vel nő, akkor a hozzá tartozó függvényérték 1-gyel csökken. Másként mondva: ha az x értéke 1-gyel nő, akkor a függvényérték $\frac{1}{2}$ -del csökken. Tehát a h függvény meredeksége $m = -\frac{1}{2}$.

Az ilyen típusú függvényeket könnyű ábrázolni, mivel grafikonjuk minden esetben egyenes lesz (vagy annak részhalmaza), és az egyenest meghatározza két pontja. Ezért az ilyen típusú függvényeket lineáris függvényeknek nevezzük.



A lineáris függvényeket általános képlettel így is írhatjuk: $f: x \mapsto m \cdot x + b$, ahol az m szám a függvény meredekségét jelenti. A meredekség azt mutatja meg, hogy mennyivel változik a függvény értéke, ha az x tengelyen egy egységet haladunk pozitív irányba. A b értéke azt adja meg, hogy a függvény grafikonja hol metszi az y tengelyt.

FELADATOK

1. 📡 Reggel három család indult el a Tölgyerdei Nomád Táborba (rövidítve TNT). A 210 km-t mindhárom autó 2 óra 20 perc alatt tette meg. A Szalay család 8 órakor, a Kellei család két órával hamarabb, a Litkei család pedig 3 órával később indult.

- Ábrázold egy koordináta-rendszerben a három család által megtett utat az idő függvényében!
- Olvasd le a grafikonokról, melyik család hány órakor érkezett meg!
- Fogalmazd meg, miért párhuzamosak a grafikonok!

2. 📡 Csoportosítsd a füzetedben azokat a hozzárendelési szabályokat, amelyek grafikonjai párhuzamosak egymással!

$a: x \mapsto 3x$	$b: x \mapsto \frac{1}{3}x$
$c: x \mapsto 3x - 4$	$d: x \mapsto x - 3$
$e: x \mapsto 5 + 3x$	$f: x \mapsto -3x + 4$
$g: x \mapsto \frac{5}{2} + \frac{1}{3}x$	$h: x \mapsto -2 - 3x$
$i: x \mapsto 7 - x$	$j: x \mapsto \frac{1}{3}x + 1$
$k: x \mapsto -x + \frac{4}{5}$	$l: x \mapsto -0,75 + x$

3. 📡 Add meg az alábbi függvények meredekségét! Válassz ki három függvényt, és ábrázold a füzetedben!

$f: x \mapsto 2x - 3$	$g: x \mapsto -x + 2$
$h: x \mapsto \frac{2}{3}x + 1$	$k: x \mapsto 3 - 3x$
$l: x \mapsto -2x + 5$	$m: x \mapsto -2 - \frac{3}{2}x$
$p: x \mapsto 3x - 5$	$s: x \mapsto -4$

4. 📡 Ábrázold a füzetedben az alábbi függvényeket, és add meg a meredekségüket!

$f: x \mapsto x + 4$	$g: x \mapsto -2x + 3$
$h: x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$	$i: x \mapsto -\frac{3}{2}x + 2$
$j: x \mapsto -3 - x$	$k: x \mapsto 5$
$l: x \mapsto 0,8x$	$m: x \mapsto -0,2x - 2$

5. 📡 Megadtuk egy lineáris függvény grafikonjának két pontját. Ábrázold a pontokat a füzetedben egy koordináta-rendszerben! Add meg a függvény hozzárendelési szabályát és meredekségét!

- $A(0; -3); B(2; 3)$
- $A(-1; 7); B(3; -1)$
- $A(-4; 3); B(4; 1)$

6. 📡 Rajzolj a füzetedbe egy koordináta-rendszert, és egy olyan egyenest, amelyik nem lineáris függvény!

7. 📡 Ábrázold a füzetedben az $f: x \mapsto \frac{3}{4}x - 6$ függvényt, és válaszd ki a helyes állításokat! A hibás állításokat javítsd ki!

- A függvény meredeksége $m = 3$.
- A függvény nem megy át az origón.
- A függvény nem egyenes arányosság.
- Ha az x értéke 4-gyel nő, a függvény értéke is 4-gyel nő.
- Ha az x értéke 1-gyel nő, a függvény értéke $\frac{3}{4}$ -del nő.
- A $P(3; -4)$ pont rajta van a függvény grafikonján.

8. 📡 Ábrázold a füzetedben az $f: x \mapsto -2,5x + 4$ függvényt, és válaszd ki a hamis állításokat!

- A függvény meredeksége $m = -\frac{5}{2}$.
- A függvény átmegy az origón.
- A függvény egyenes arányosság.
- Ha az x értéke 4-gyel nő, a függvény értéke is 4-gyel nő.
- Ha az x értéke 2-vel nő, a függvény értéke 5-tel nő.
- A $P(4; -6)$ pont rajta van a függvény grafikonján.

1. PÉLDA

Megadtunk három lineáris függvényt a koordináta-rendszerben. Határozzuk meg a függvények hozzárendelési szabályát!

Megoldás

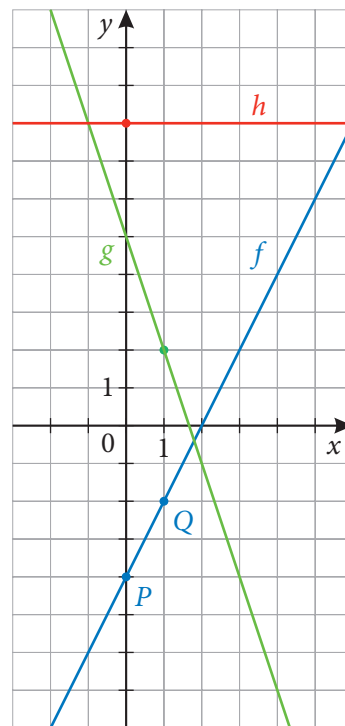
A függvény hozzárendelési szabályát akkor kényelmes felírni, ha ismerjük a függvény meredekségét (m érték) és az y tengellyel való metszéspont második koordinátáját, azaz a függvény tengelymetszetét (b érték).

A P pont koordinátái az f függvény esetében $P(0; -4)$, ezért a $b = -4$. A meredekséget például úgy olvashatjuk le, hogy meghatározzuk még egy pont koordinátáit. A grafikonon ez a $Q(1; -2)$ pont lesz. Ebből kiszámítható a meredekség: egy egységet lépünk az x tengely mentén pozitív irányba, majd kettőt felfelé, tehát a meredekség $m = 2$.

Az f függvény hozzárendelési szabálya: $f: x \mapsto 2x - 4$.

A g függvény esetén hasonlóan eljárva kapjuk, hogy $b = 5$ és $m = -3$, tehát a g függvény hozzárendelési szabálya $g: x \mapsto -3x + 5$.

A h függvény esetében még könnyebb dolgunk van, hiszen ez egy állandó (konstans) függvény. Most $m = 0$ és $b = 8$, tehát $h: x \mapsto 8$.



Milyen különbséget látunk az f és g grafikonja között?

Az f függvény „emelkedő”, a g függvény „süllyedő”. Fogalmazzuk meg ezt pontosabban!

Az f függvény esetében azt láthatjuk, hogy nagyobb x értékhez nagyobb függvényérték tartozik.

x érték	f függvényértéke
0	-4
1	-2
2	0
3	2

A g függvény esetében azt láthatjuk, hogy nagyobb x értékhez kisebb függvényérték tartozik.

x érték	g függvényértéke
0	5
1	2
2	-1
3	-4

Az „emelkedő” függvényeket a matematikában **növekedőnek** nevezzük, a „süllyedő” függvényeket pedig **csökkenőnek**.

A hozzárendelési szabályból megállapítható, hogy a lineáris függvény **növekedő** vagy **csökkenő**.

Ha a meredekség pozitív, akkor a függvény növekedő, ha a meredekség negatív, akkor csökkenő.

Ha a meredekség 0, akkor a függvény minden számhoz ugyanazt a számot rendeli, azaz a függvény állandó, más szóval konstans.

EGYÉNI VERSENY

A füzetedbe dolgozz!

Az $A(-2; 2)$, $B(-1; -3)$, $C(2; 0)$ és $D(0; 4)$ pontok közül bármely kettő egy lineáris függvényt határoz meg.

- Hány ilyen lineáris függvény rajzolható?
- Ezek közül hány függvény csökkenő?
- Írd fel a növekedő függvények hozzárendelési szabályát!

Ha elkészültél, jelentkezz! Ha hibátlanul dolgoztál, jutalmad biztosan nem marad el.

FELADATOK

1. Állapítsd meg az alábbi hozzárendelési szabályok alapján, hogy melyik függvény grafikonja lesz növekedő, csökkenő, illetve konstans!

a) $a: x \mapsto 8x - 7$ b) $b: x \mapsto 0,3x + 15$

c) $c: x \mapsto -6x + 11$ d) $d: x \mapsto -\frac{7}{5}x$

e) $e: x \mapsto -4 + 5x$ f) $f: x \mapsto 1 - \frac{9}{8}x$

g) $g: x \mapsto \frac{x}{4}$ h) $h: x \mapsto -7,5$

2. Megadtuk néhány függvény hozzárendelési szabályát.

$$\begin{array}{ll} a: x \mapsto x - 3; & b: x \mapsto 2x + 6; \\ c: x \mapsto -3x + 6; & d: x \mapsto \frac{1}{4}x - 2 \\ e: x \mapsto 1 - 3x; & f: x \mapsto 0,25x - 4; \\ g: x \mapsto -\frac{5}{7}x; & h: x \mapsto 6 - 7x \end{array}$$

Sorold fel azoknak a hozzárendelési szabályoknak a betűjelét, melyekre teljesül, hogy

- párhuzamosak az $x \mapsto -3x$ függvény grafikonjával!
- ott metszik az y tengelyt, ahol az $x \mapsto -x + 6$ függvény grafikonja!
- van közös pontjuk az $x \mapsto \frac{1}{4}x + 3$ függvény grafikonjával!
- csökkenő függvények!

3. a) Ismerjük az alábbi lineáris függvények meredekségét és tengelymetszetét. Add meg a hozzárendelési szabályt! Ábrázold a grafikonokat a füzetedben!

	Meredekség	Tengelymetszet
$f(x)$	$m = 7$	$b = -2$
$g(x)$	$m = -5$	$b = 6$
$h(x)$	$m = 0$	$b = 2,5$
$i(x)$	$m = \frac{1}{7}$	$b = -3$

b) Ismerjük az alábbi lineáris függvények meredekségét és azt a P pontot, ahol a függvények metszik az x tengelyt. Add meg a hozzárendelési szabályt! Ábrázold a grafikonokat a füzetedben!

	Meredekség	Metszéspont az x tengelyen
$p(x)$	$m = 7$	$P(-3; 0)$
$q(x)$	$m = 7$	$P(2; 0)$
$r(x)$	$m = \frac{3}{2}$	$P(-2; 0)$
$s(x)$	$m = -\frac{1}{4}$	$P(0; 0)$

4. Add meg az alábbi függvények meredekségét, majd határozd meg, hol metszik a koordináta-tengelyeket!

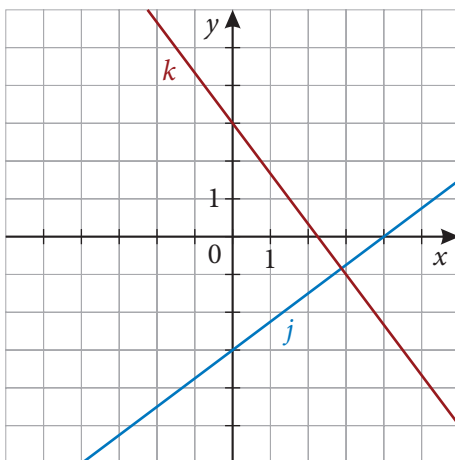
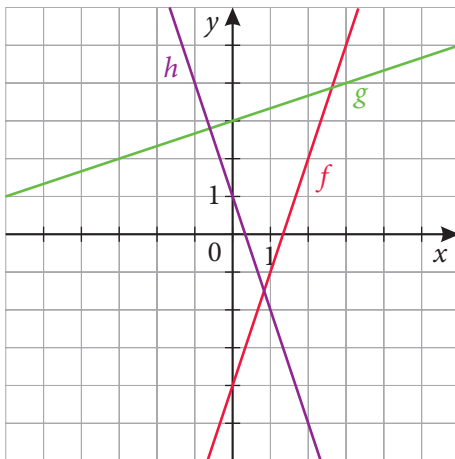
a) $f: x \mapsto 3x + 6$

b) $g: x \mapsto \frac{2}{5}x - 4$

c) $h: x \mapsto -\frac{3}{4}x + 2$

d) $i: x \mapsto -4,5x - 9$

5. Határozd meg a grafikonok alapján a hozzárendelési szabályokat! Add meg a függvények meredekségét és tengelymetszetét is!



6. Mi a közös az alábbi függvényekben? Ábrázold őket közös koordináta-rendszerben, és írd mellé a közös tulajdonságukat!

a) $x \mapsto x;$ $x \mapsto 4x;$

$x \mapsto 3,5x;$ $x \mapsto \frac{3}{5}x$

b) $x \mapsto -2x + 3;$ $x \mapsto -2x - 4;$

$x \mapsto 1 - 2x;$ $x \mapsto -2x + \frac{3}{2}$

c) $x \mapsto 4x - 3;$ $x \mapsto -\frac{2}{3}x - 3;$

$x \mapsto 0,25x - 3;$ $x \mapsto -3$

d) $x \mapsto x + 1;$ $x \mapsto 2;$

$x \mapsto -x + 3;$ $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

7. A lineáris függvényeknek ismerjük két pontját.

Ábrázold a függvényeket, határozd meg a meredekségüket, és válaszd ki, mely függvények növekedők!

a) $A(0; -2)$ $B(3; 7)$

b) $A(-2; 1)$ $B(4; 4)$

c) $A(1; 4)$ $B(3; -2)$

d) $A(2; 5)$ $B(7; 9)$

8. Egy taxitársaság díjai a következők: alapdíj: 450 Ft, viteldíj: $280 \frac{\text{Ft}}{\text{km}}$, várakozás: $70 \frac{\text{Ft}}{\text{perc}}$.

Állapítsd meg, melyik esetben lineáris függvénye a fizetendő ár a megtett kilométerek számának! Rajzolj km-Ft diagramot!

a) 14 km-t teszünk meg, várakozás nélkül.

b) 4 km-t teszünk meg, de közben megállunk egy helyen, ahol a taxi 6 percig vár.

c) Induláskor vár ránk a taxi 5 percet, aztán elmegyünk a 11 km-re lakó nagymamához.

d) Elmegyünk a nagymamához, 5 percig vár ránk a taxi, aztán hazamegyünk.

Az évek során többféle módszert ismertünk meg az egyenletek megoldására. Ilyen volt:

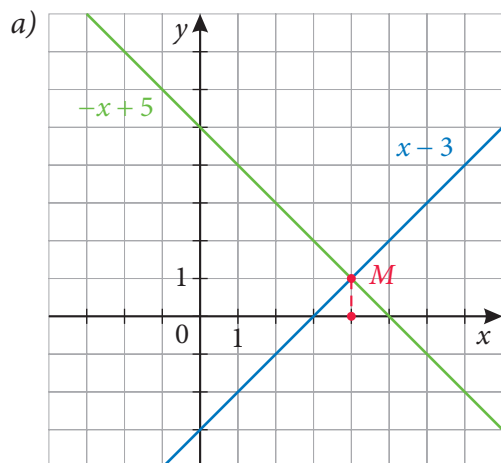
- A **próbálgatás módszere**, amit abban az esetben használtunk, ha érdemes volt egyes értékeket az egyenletbe helyettesíteni, és kipróbálni, hogy megoldás lesz-e.
- A **lebontogatás elve**, amikor az egyenlet megoldásához „visszafelé gondolkozva” jutottunk el.
- A **mérlegelv**, amikor a két oldal egyenlő változtatásával jutottunk el a megoldáshoz.

Most egy új módszert mutatunk az egyenletek megoldására: az **egyenletek grafikus úton történő megoldását**.

1. PÉLDA

- a) Ábrázoljuk az $f: x \mapsto x - 3$ és a $g: x \mapsto 5 - x$ függvényeket közös koordináta-rendszerben!
b) Határozzuk meg a metszéspont koordinátáit!

Megoldás



- b) Ábrázolás után határozzuk meg az $x - 3 = 5 - x$ egyenlet megoldását grafikus úton!

Keressük meg azt az **x értéket**, ahol a két függvény értéke egyenlő. Ezt a függvények metszéspontjának első jelzőszáma adja.

A grafikonról leolvasható, hogy a két függvény grafikonja az $x = 4$ helyen metszi egymást. Több megoldás nem lehetséges, mert két különböző egyenes legfeljebb egy pontban metszheti egymást. Az $x = 4$ megoldás, mert ha behelyettesítjük az egyenlet bal és jobb oldalába, 1-et kapunk, azaz a jobb és a bal oldal egyenlő.

A két függvény metszéspontjának koordinátái: $M(4; 1)$.

Az 1. példában lévő $x - 3 = 5 - x$ egyenletet próbálgatással vagy a mérlegelv segítségével is megoldhattuk volna.

Próbálgatás

Ha $x = 0$, akkor a bal oldal -3 , a jobb oldal 5 .

Ha $x = 10$, akkor a bal oldal 7 , a jobb oldal -5 .

Ha $x = 5$, akkor a bal oldal 2 , a jobb oldal 0 .

A bal oldal még mindig több 2 -vel.

Legyen $x = 4$, akkor a bal oldal 1 és a jobb oldal is 1 .

Tehát az $x = 4$ megoldás.

Mérlegelv

$$x - 3 = 5 - x$$

$$x = 8 - x$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Sok olyan egyenlet van, amelyet többféle módszerrel is megoldhatunk, de célszerű mindig a leggyorsabb, leghatékonyabb módszert választani.

2. PÉLDA

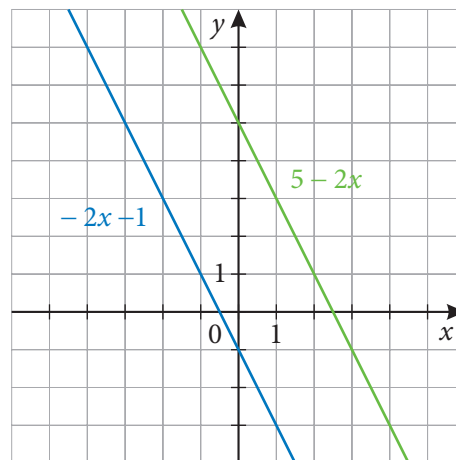
Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenletet!

$$5 - 2x = -2x - 1$$

Megoldás

Ábrázoljuk az egyenlet két oldalát, mint egy-egy függvényt.

A két függvény grafikonja párhuzamos egymással, ezért nincs metszéspontjuk. Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek nincs megoldása.



3. PÉLDA

Oldjuk meg grafikusan az

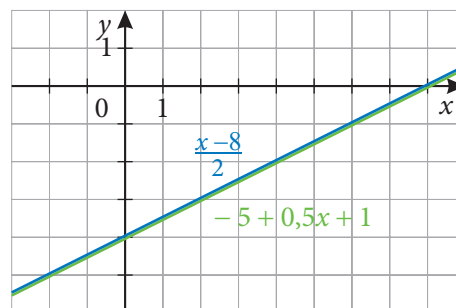
$$\frac{x-8}{2} = -5 + 0,5x + 1$$

egyenletet!

Megoldás

Ábrázoljuk az egyenlet két oldalát, mint egy-egy függvényt.

A két függvény grafikonja egybeesik, ezért minden x érték megoldása az egyenletnek. Az egyenlet azonosság.



A példákban alkalmazott eljárás általánosan is igaz.

Jegyezd meg!

Egyenletet grafikus módon úgy oldhatunk meg, hogy az egyenlet bal, illetve jobb oldalát, mint egy-egy függvényt ábrázoljuk. A megoldandó egyenlet grafikus megoldása során meghatározzuk a két grafikon metszéspontjának első koordinátáját (ha van metszéspont).

Ha a két függvény grafikonjának nincs közös pontja, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ha a két grafikon egybeesik, akkor az egyenletnek minden alaphalmazbeli szám a megoldása lesz.

Jó tanácsok a grafikus megoldáshoz:

- Ha jól akarod alkalmazni a grafikus módszert, akkor pontosan kell ábrázolnod a függvényeket.
- Mindig ellenőrizd a grafikonról leolvasott értéket! Az eredeti egyenletbe helyettesítsd be, hogy valóban sikerült-e a helyes megoldásokat megtalálni!
- Vigyázz! Sajnos nem lehet minden esetben pontosan leolvasni a megfelelő értékeket.

4. PÉLDA

Egy kamion reggel 6 órakor hagyja el a rakodóterminált. Átlagosan $80 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel halad. Két óra múlva az irodában észreveszik, hogy egy célállomásra küldendő irat az irodában maradt, és egy motoros futárt küldenek a kamion után, aki átlagosan $110 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel megy. A kamionos négy óra vezetés után 30 percre megáll, hogy kivegye a kötelező pihenőidőt.

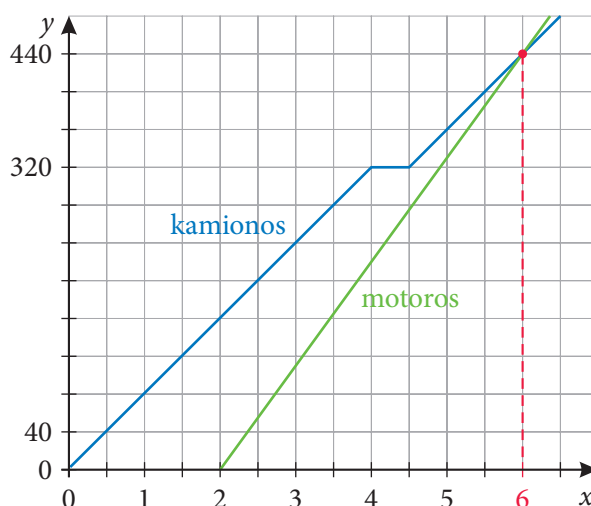
- Mennyi idő elteltével éri utol a motoros a kamiont?
- Az autópályán nem lehet tetszőleges helyen megállni. A találkozás időpontjától a legközelebbi pihenőhely 15 percre van. Mikor tudja átadni az iratot a motoros futár?

Megoldás

A feladat első olvasásra összetettnek tűnhet, de könnyen megoldható, ha a két jármű mozgását grafikonon ábrázoljuk.

- A két grafikon metszéspontjának segítségével válaszolhatunk a kérdésre. A metszéspont első koordinátája adja meg az eltelt időt. Ez leolvasható a grafikonról: $t = 6$ óra elteltével. Ekkora a kamionos már 5,5 órát ment, tehát 440 km-t tett meg. A motoros menetideje 4 óra volt, ekkor ő is 440 km-t tett meg.
- Az irat átadása 6 óra 15 perc elteltével, azaz 12 óra 15 perckor történhet meg.

Ellenőrzés: Mivel a motoros 4 óra alatt ugyanannyit tett meg, mint a kamionos (440 km), valóban ekkor találkoztak.



PÁROS MUNKA

Ábrázoljátok a füzetetekbe az alábbi függvényt!

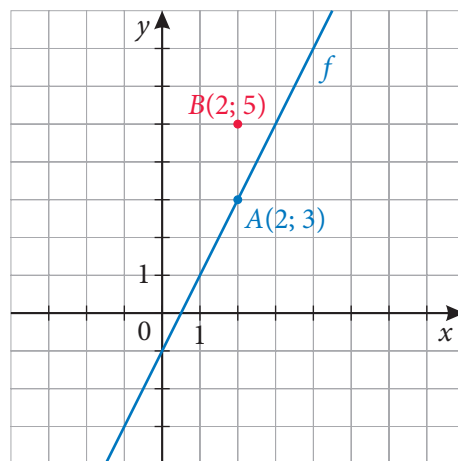
$$f: x \mapsto \frac{3}{5}x + 2$$

Felváltva adjátok meg két-két tetszőleges pont első koordinátáját, majd a párokat keressen hozzá második koordinátát úgy, hogy az alábbi feltételek teljesüljenek! Minden részfeladathoz két-két pontot adjatok meg!

- A pontok illeszkedjenek a függvény grafikonjára!
- A pontok a függvény grafikonja alatt helyezkedjenek el!
- A pontok a függvény grafikonja felett legyenek!
- Beszélgétek meg, mit jelent, hogy egy pont a függvény grafikonja „alatt” vagy „fölött” helyezkedik el!

Ha egy függvény adott x értékéhez meghatározzuk a függvény értékét, akkor az így kapott pont illeszkedik a függvény grafikonjára. Ha egy pont második koordinátája nagyobb, mint az első koordinátához rendelt függvényérték, akkor a pont a függvény grafikonja felett van. Az A pont a grafikonon van, a B pont a grafikon „fölött”.

Ugyanilyen módon megfogalmazható az is, hogy egy pont mikor helyezkedik el a függvény grafikonja alatt.



5. PÉLDA

Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenletet, egyenlőtlenségeket! Jelöljük a megoldáshalmazt az x tengelyen, majd írjuk fel az egyenlőtlenségek megoldását relációjelekkel!

a) $\frac{2}{5}x - 1 = -x + 6$ b) $\frac{2}{5}x - 1 > -x + 6$ c) $\frac{2}{5}x - 1 < -x + 6$

Megoldás

Ábrázoljuk az $f: x \mapsto \frac{2}{5}x - 1$ és $g: x \mapsto -x + 6$ függvényeket közös koordináta-rendszerben!

A grafikonról leolvasható az egyenlet, illetve az egyenlőtlenségek megoldása.

A két grafikon az $x = 5$ pontban metszi egymást.

a) Az egyenlet megoldása: $x = 5$.

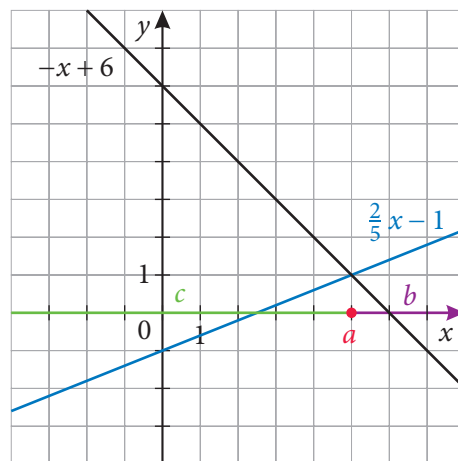
(Az x tengelyen lévő piros pont.)

b) $\frac{2}{5}x - 1 > -x + 6$ teljesül, ha az f függvény grafikonjának pontjai a g függvény grafikonja „fölött” helyezkednek el, azaz ha $x > 5$.

(Az x tengely bordó része.)

c) $\frac{2}{5}x - 1 < -x + 6$ teljesül, ha az f függvény grafikonjának pontjai a g függvény grafikonja „alatt” helyezkednek el, azaz ha $x < 5$.

(Az x tengely zöld része.)



FELADATOK

1. 🎧 Ábrázold az alábbi függvényeket!

$$f: x \mapsto -2x + 1;$$

$$g: x \mapsto \frac{2}{3}x - 4;$$

$$h: x \mapsto -2,5x + 6.$$

Adj meg függvényenként három olyan pontot,

- a) amely a függvény grafikonjára illeszkedik;
- b) amely a grafikon alatt van;
- c) amely a grafikon felett van!

2. 🎧 Ábrázold az $x \mapsto \frac{5}{2}x - 4$ függvényt, és dönts el, a grafikonokhoz képest (alatta, rajta vagy fölött) hol helyezkednek el a megadott pontok!

$$A(2; 1) \quad B(3; 4) \quad C(4; 6) \quad D(-1; -7) \\ E(0; 0) \quad F(-4; -14) \quad G(100; 244)$$

3. 🎧 Ábrázold a két függvényt közös koordináta-rendszerben! Add meg a metszéspontjuk koordinátáit! Jelöld az x tengelyen is azt a pontot, ahol a két függvény értéke egyenlő!

$$a) f: x \mapsto x - 4; \quad g: x \mapsto -3x + 4$$

$$b) h: x \mapsto 3x + 2; \quad i: x \mapsto \frac{1}{2}x - 3$$

$$c) j: x \mapsto \frac{1}{3}x + 2; \quad k: x \mapsto -x - 2$$

4. 🎧 Oldd meg az egyenleteket grafikusan!

$$a) -x + 5 = -2x + 4$$

$$b) 2 - \frac{1}{3}x = 2x - 5$$

$$c) \frac{3}{4}x - 1 = \frac{1}{2}x + 1$$

5. 🎧 Használd az előző feladat ábrázolásait! Jelöld az x tengelyen azokat a pontokat, ahol

$$a) -x + 5 > -2x + 4;$$

$$b) 2 - \frac{1}{3}x < 2x - 5;$$

$$c) \frac{3}{4}x - 1 > \frac{1}{2}x + 1!$$

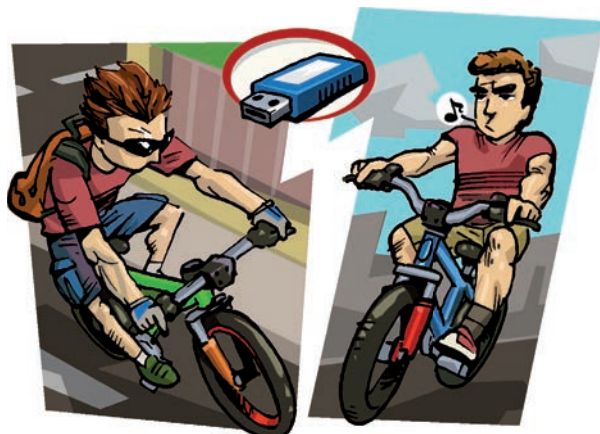
6. 🎧 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a grafikus módszer segítségével!

$$a) -4x + 6 > \frac{1}{2}x - 3 \quad b) \frac{5}{6}x < x - 1$$

$$c) \frac{x}{2} - 5 < -\frac{3}{2}x - 1$$

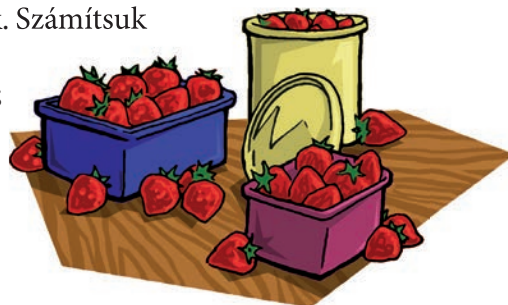
7. 🎧 Amikor a rendőrök észrevették a tőlük 100 méterre álló tolvajt, azonnal üldözőbe vették. A gördeszkás tolvaj $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel menekült, a motoros rendőrök $18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ -mal üldözték. Mennyi idő alatt érték utol? Oldd meg a feladatot grafikusan!

8. 🎧 Daniéknál leállt az internet és mindenképpen szeretne volna megkapni az iskolai bulin rögzített videót. „Nem úgy volt, hogy félúton találkozunk?!” – bosszankodott magában Dénes, miközben (immár két és fél órája) $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel tekert a bringáján Dani felé. „Ha ma egyedül le kell tekerjem oda-vissza összesen 210 km-t, hogy odaadhassam neki ezt a pendrive-ot, tuti gutaütést kapok.” Dani persze elaludt, és csak egy órája indult el. Az órája szerint 500 métert tett meg percenként. Mennyi idő múlva találkoztak? Oldd meg a feladatot grafikusan!



1. PÉLDA

18 kg epret különböző nagyságú dobozokba csomagolnak. Számítsuk ki, hány dobozra van szükség, ha a gyümölcsökből csak 20 dkg-os; 30 dkg-os; 40 dkg-os; 50 dkg-os; 60 dkg-os; 90 dkg-os; 1 kg-os; 1,5 kg-os csomagokat készítenek! Készítsünk az adatokról táblázatot!



Megoldás

Dobozméret (dkg)	20	30	40	50	60	90	100	150
A dobozok száma (db)	90	60	45	36	30	20	18	12

A táblázatba beírt **menntiségek összetartozó értékének szorzata állandó** (1800 dkg), ezért **a két mennyiség fordítottan arányos**. **Másként fogalmazva, ahányszorosára változik az egyik mennyiség, ugyanannyiadrészére változik a másik mennyiség.**

EGYÉNI MUNKA

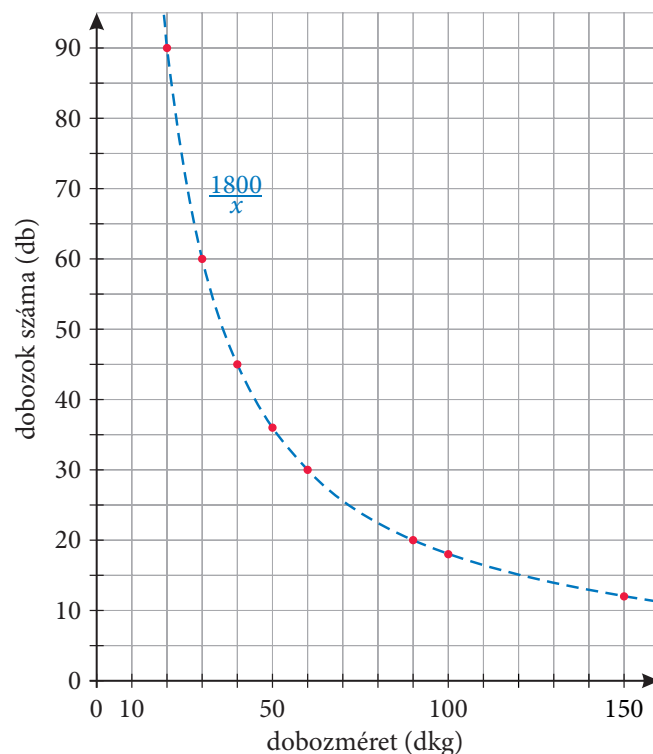
Döntsétek el, hogy fordítottan arányosak-e az alábbi mennyiségpárok!

- Egy pozitív egész szám osztópárjai.
- Egy rendezvény résztvevőinek száma és a befizetett összeg.
- A 10–14 évesek életkora és magassága.
- A 100 km-es távolság megtételéhez szükséges idő és a közlekedési eszköz sebessége.
- Egy 10 km-es futóverseny résztvevőinek száma és a megtételhez szükséges idő.
- Egy kerítést festő emberek száma és a lefestéshez szükséges idő.

2. PÉLDA

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az első példában készített táblázat összetartozó értékeit!

Megoldás



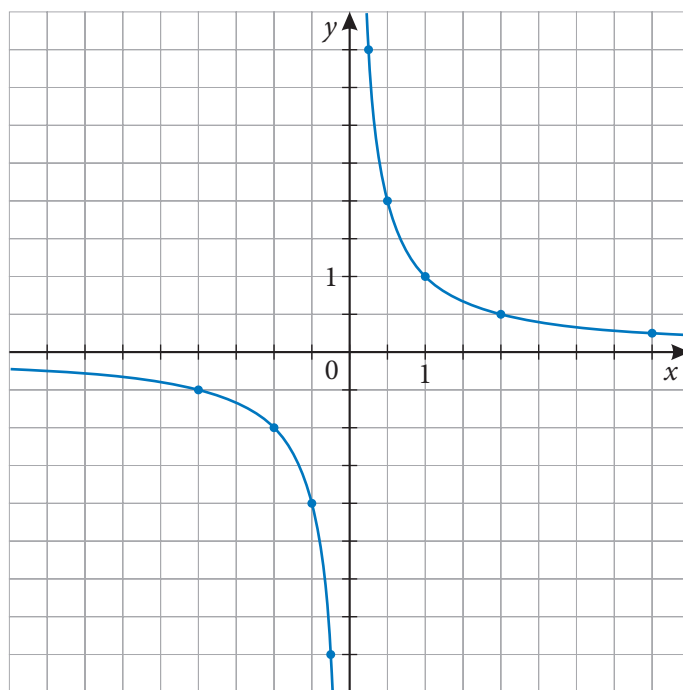
3. PÉLDA

Rendeljük hozzá minden 0-tól különböző számhoz a reciprokát!

- Készítsünk a hozzárendelési szabály alapján táblázatot!
- Ábrázoljuk a pontokat koordináta-rendszerben a táblázat alapján!
- Írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát!

Megoldás

x	$\frac{1}{x}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
-0,5	-2
$-\frac{1}{4}$	-4
$\frac{1}{4}$	4
0,5	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$



A függvény hozzárendelési szabálya: $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, ahol $x \neq 0$.

Ez a **függvény nem lineáris**, mert grafikonja nem egyenes.

ÖNÁLLÓ MUNKA

Értéktáblázat segítségével ábrázold a füzetedben az $f : x \mapsto \frac{2}{x}$ és a $g : x \mapsto \frac{4}{x}$ függvényeket! Fogalmazd meg, milyen hasonlóságot veszel észre!

A fordított arányosságot leíró általános hozzárendelési szabály: $f : x \mapsto \frac{c}{x}$, ahol $x \neq 0$, és c egy tetszőleges, nullától különböző szám.

A fordított arányosság grafikonjának a neve hiperbola. A hiperbolának két ága van.

FELADATOK

1. „Tudok segíteni valamiben?” – kérdezte Laci. „Persze – válaszolta Eszter mosolyogva. – Meg tudnád oldani, hogy egy nap 24 helyett 36 órából álljon?” „Semmi akadálya – vigyorgott Laci –, de akkor csak 40 perces lesz egy óra.”

Ha rögzítjük, hogy egy nap 1440 percből áll, hány perces lesz egy óra, ha egy nap

- a) 12; b) 6;
c) 5; d) 40;
e) 48; f) 60 órából áll?

2. Értéktáblázat segítségével ábrázold a füzetben az alábbi függvényeket!

- a) $f: x \mapsto \frac{1}{x}$
b) $g: x \mapsto \frac{12}{x}$
c) $h: x \mapsto \frac{20}{x}$

3. „Ha ezeket mind egyedül szerelem össze, a prospektus szerint 60 órám rámegy” – boszszankodott Pista bácsi. „Majd mi segítünk!” – válaszolták a gyerekek, unokák és szomszédok. Hány óra alatt végeznek a szereléssel, ha

- a) ketten; b) hárman;
c) négyen; d) öten;
e) tizenöten; f) húszan;
g) harmincan; h) ezren dolgoznak rajta?

I. Foglald táblázatba megoldásaidat!

II. Ábrázold koordináta-rendszerben a táblázat összetartozó értékeit!

4. Egy tengerimalac átlagosan napi 4 dkg száraz tápot fogyaszt. Hány napra elegendő 1 kg táp

- a) 1; b) 2; c) 5;
d) 10; e) 25 tengerimalacnak?

Ábrázold koordináta-rendszerben az összetartozó értékeket!

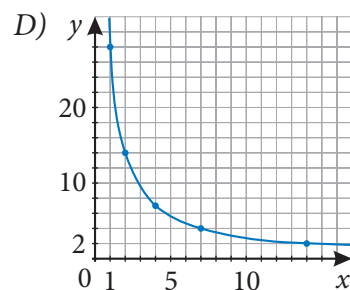
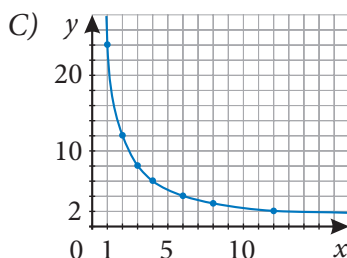
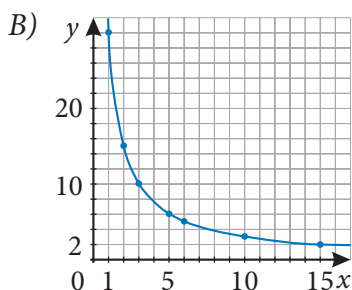
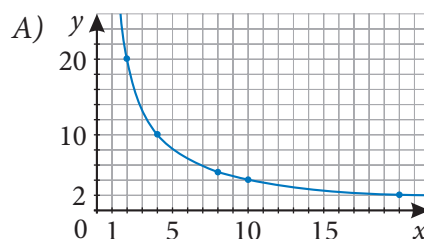
5. Párosítsd a diagramokat a leírásokkal! Készíts táblázatot a füzetedbe, és írd bele az összes értékpárt a diagram alapján!

a) Három ember 8 nap alatt, két ember 12 nap alatt végez a munkával.

b) Öt gyereknek 6 napra, hat gyereknek 5 napra elegendő a tábor maradék fogkrémkészlete.

c) Két csap 14 óra alatt, négy csap 7 óra alatt tölti meg a medencét.

d) $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 20 óra alatt, $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 8 óra alatt érünk Perőcsénybe.



PÁROS MUNKA

Ismétlés

Tegyetek magatok elé 1-1 lapot, és dolgozzatok különböző színű! Egyikőtök az egyik lapra oldja meg az első, másikatok a másik lapra a második feladatot! Ha készen vagytok, cseréljétek! Javítsátok és egészítsétek ki egymás munkáját! Utána beszéljétek meg, miket írtatok és miért! Szükség esetén egy másik párossal egyeztetsetek a megoldásokat!

1. Fogalmazzátok meg, mit értünk egy szám abszolút értékén! Beszéljétek meg, mivel egyenlő a pozitív számok, negatív számok és a 0 abszolút értéke. Hogyan jelöljük a számok abszolút értékét?
2. Írjátok fel a füzetetekbe, mely számok abszolút értéke
a) az 5; b) a 2,3; c) az 1; d) a 0; e) a -2?

1. PÉLDA

Ábrázoljuk a következő hozzárendeléssel megadott függvényt!

$$f: x \mapsto |x|$$

Szöveggel megfogalmazva: Minden számhoz hozzárendeljük az abszolút értékét.

Megoldás

Készítsünk értéktáblázatot a függvény ábrázolásához!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x $	3	2	1	0	1	2	3

A kapott számpárokat ábrázolva a függvény grafikonja:

A grafikonnak csak néhány pontját ismerjük. Ha sok pontot ábrázolunk, akkor láthatjuk, hogy az abszolútérték-függvény grafikonja két félegyenesből tevődik össze.

Ennek az az oka, hogy

- a 0-hoz és a pozitív számokhoz önmagát rendeljük, azaz $x \mapsto x$, ha az x nemnegatív szám;
- negatív számokhoz a számok ellentettjét rendeljük, azaz $x \mapsto -x$, ha az x negatív szám.

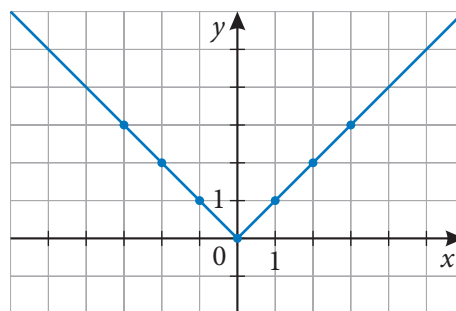
Ez két lineáris függvény, hiszen:

$$x \mapsto \begin{cases} x, & \text{ha az } x \text{ nemnegatív szám} \\ -x, & \text{ha az } x \text{ negatív szám} \end{cases}$$

A függvényt abszolútérték-függvénynek nevezzük, és grafikonja jellegzetes V alakú.

Ezt a függvényt minden valós szám esetén értelmezzük.

A függvény csökkenő, ha $x < 0$, növekedő, ha $x > 0$.

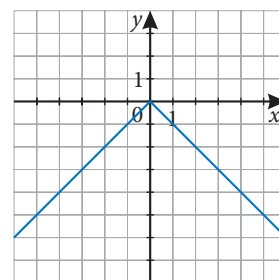
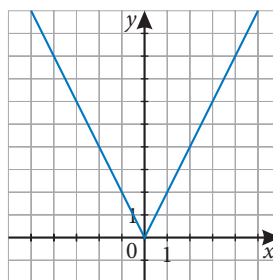
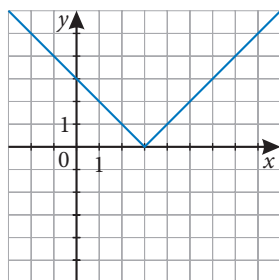
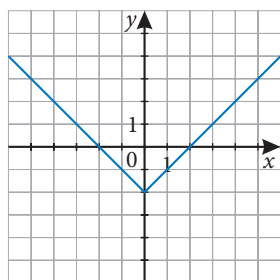


CSOPORTMUNKA

Négyes csoportokban dolgozzatok! Válasszatok ki egyet-egyét az alábbi négy grafikon közül, és oldja meg mindenki egyedül a feladat a) és b) részét a saját függvényére vonatkozóan! Ha készen vagytok, mindenki mondja el a többieknek, hogyan gondolkodott és milyen eredményre jutott! Szükség esetén egészítsétek, illetve javítsátok ki egymás megoldásait!

a) Keressétek meg, hogy a felsorolt hozzárendelési szabályok közül melyik tartozik a kiválasztott grafikonokhoz!

b) Vizsgáljátok meg, melyik függvény hol növekedő, hol csökkenő!



Hozzárendelési szabályok:

$$a: x \mapsto 2 \cdot |x|$$

$$b: x \mapsto -|x|$$

$$c: x \mapsto |x - 3|$$

$$d: x \mapsto |x| - 2$$

2. PÉLDA

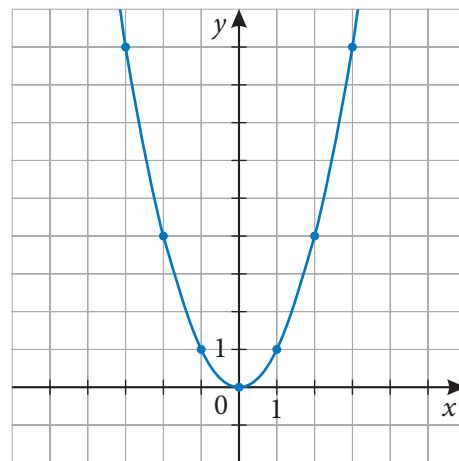
Rendeljük hozzá minden számhoz a négyzetét!
Készítsünk értéktáblázatot, és ábrázoljuk a függvényt!

Megoldás

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
x^2	4	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	9

Ha sok értéket meghatározunk, és berajzoljuk az össze-tartozó számpárokat, akkor az alábbi grafikont kapjuk:

Ekkor a hozzárendelési szabály képlettel történő megadása:
 $f: x \mapsto x^2$.



Ezt a függvényt másodfokú függvénynek nevezzük. A függvény grafikonja egy jellegzetes görbe, amit parabolának nevezünk.

Az $f: x \mapsto x^2$ függvény minden valós szám esetén értelmezhető (minden számnak van négyzete).

A függvény csökkenő, ha $x < 0$, növekedő, ha $x > 0$.

KUTATÓMUNKA

Nézz utána az interneten, milyen ingyenesen használható függvényrajzoló programot találsz!

Ábrázolj pár függvényt, és figyeld meg, merre tolódik el az alapfüggvény $(|x|; x^2)$, ha hozzáadsz, illetve elveszel belőle valamennyit!

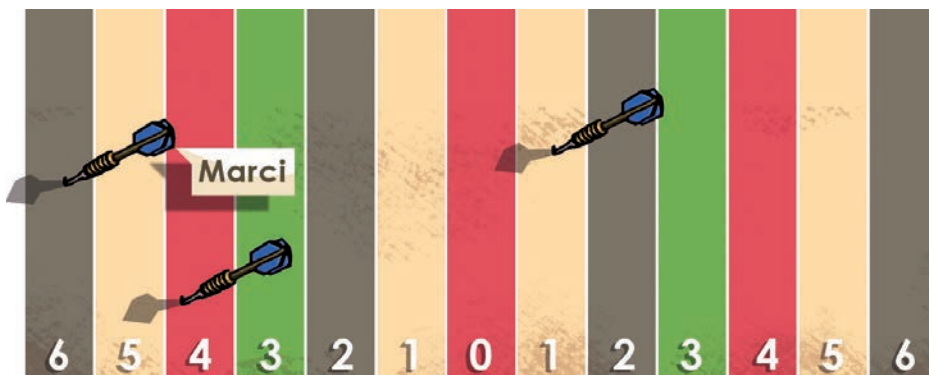
Ha megszorozod a függvényt egy számmal, akkor is eltolódik?

FELADATOK

1. Az osztály kitalált egy új játékot: a vízszintes célba dobót. A játékban az a szabály, hogy ha a tábla közepébe találsz, azonnal nyersz. Ha kicsit mellément a dobás, akkor sajnos pontokat kapsz. Minél kevesebb pontod van, annál előkelőbb helyen szerepelsz a rangsorban.

Az alábbi táblázat a gyerekek eredményeit mutatja. Állítsd a gyerekeket növekvő sorrendbe az elért pontszámok alapján, és ábrázold a füzetedben egy koordináta-rendszerben, ki hova dobhatott! Segítségképp megadtuk Marci eredményét.

Név	Pontszám
Döme	3
Regő	5
Sári	2
Janka	4
Keve	1
Marci	6



2. Ábrázold az $f: x \mapsto |x|$ függvényt a füzetedben, és válaszolj az alábbi kérdésekre!

- Mekkora a függvény értéke, ha $x = 1$; $x = 3$; $x = \frac{1}{2}$; $x = -2$; $x = -2,5$?
- Melyik x érték esetén veszi fel a függvény az $f(x) = 0$; $f(x) = 3$; $f(x) = 4,5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 7$ értékeket?
- Melyik x értékek esetén lesz a függvény értéke nagyobb, mint 5?
- Melyik x értékek esetén lesz a függvény értéke kisebb, mint 4?

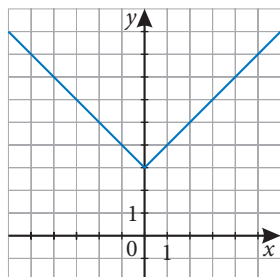
3. Készíts értéktáblázatot, és ábrázold közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket!

- $f: x \mapsto |x|$ $g: x \mapsto |x| + 2$ $h: x \mapsto |x| + 5$ $j: x \mapsto |x| - 1$ $k: x \mapsto |x| - 4$
- $f: x \mapsto |x|$ $g: x \mapsto |x + 2|$ $h: x \mapsto |x + 5|$ $j: x \mapsto |x - 1|$ $k: x \mapsto |x - 4|$
- $f: x \mapsto |x|$ $g: x \mapsto -|x|$ $h: x \mapsto 3 \cdot |x|$ $j: x \mapsto \frac{1}{3} \cdot |x|$

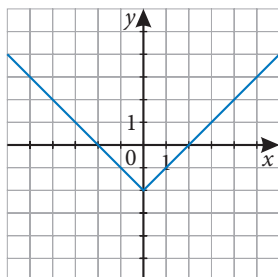
Fogalmazd meg, hogyan kaphatjuk meg a többi függvényt az $f(x) = |x|$ függvényből!

4. Írd fel az alábbi grafikonok hozzárendelési szabályát!

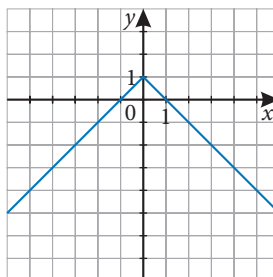
a)



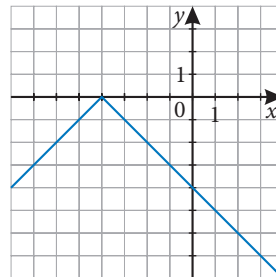
b)



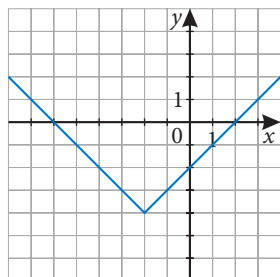
c)



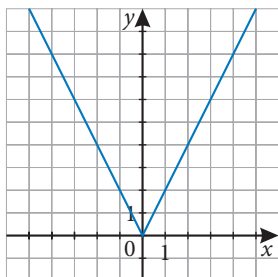
d)



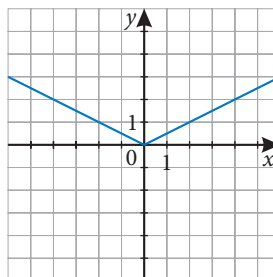
e)



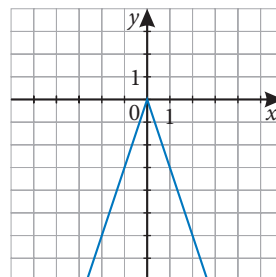
f)



g)



h)



5. a) Oldd meg grafikusan az $|x| = 3$ egyenletet! Segítségképp megadjuk a megoldás lépéseit:

I. Ábrázold az egyenlet mindkét oldalát!

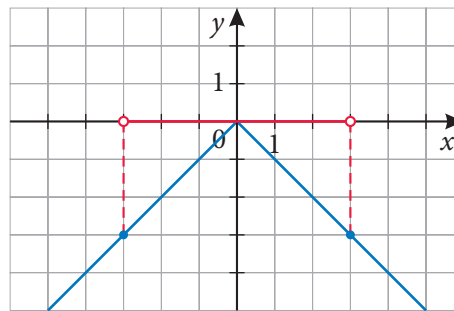
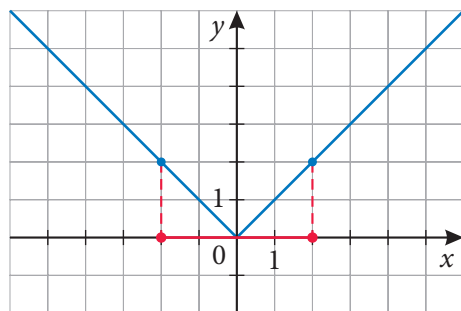
II. Jelöld be a két grafikon metszéspontjait!

III. Keresd meg az x tengelyen a hozzájuk tartozó értékeket!

IV. Olvasd le a megoldást!

b) Oldd meg grafikusan az $|x| < 3$ egyenlőtlenséget az előző grafikon felhasználásával!

6. Olvasd le a grafikonokról, melyik egyenlőtlenséget oldottuk meg grafikusan! Írd le a füzetedbe a megoldást is!



7. 🎧 Ábrázold a füzetedben az $f: x \mapsto x^2$ függvényt, és válaszolj az alábbi kérdésekre!

a) Mekkora a függvény értéke, ha $x = 0$; $x = 2$; $x = \frac{1}{2}$; $x = -1$; $x = -2,5$?

b) Melyik x érték esetén veszi fel a függvény az

$f(x) = 0$; $f(x) = 4$; $f(x) = 2,25$; $f(x) = -1$; $f(x) = 25$

értékeket?

c) Melyik x értékek esetén lesz a függvény értéke nagyobb, mint 9?

d) Melyik x értékek esetén lesz a függvény értéke kisebb, mint 16?

8. 🎧 Készíts értéktáblázatot, és ábrázold közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket!

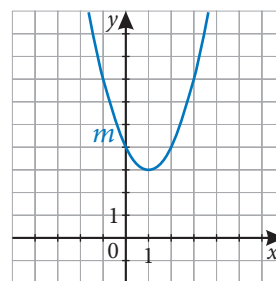
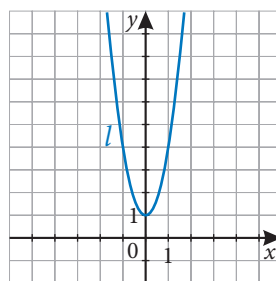
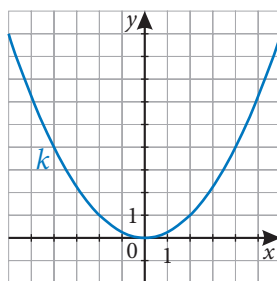
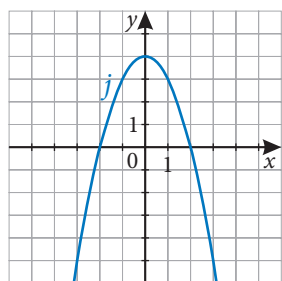
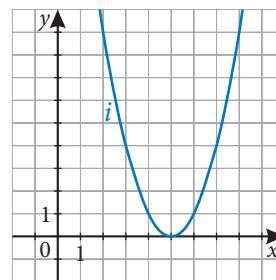
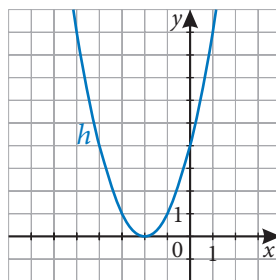
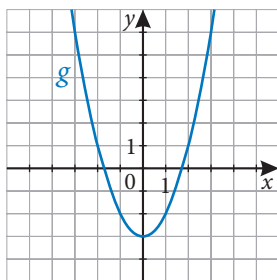
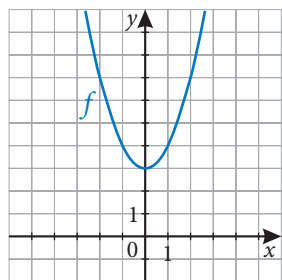
a) $f: x \mapsto x^2$ $g: x \mapsto x^2 + 2$ $h: x \mapsto x^2 + 5$ $j: x \mapsto x^2 - 1$ $k: x \mapsto x^2 - 4$

b) $f: x \mapsto x^2$ $g: x \mapsto (x + 3)^2$ $h: x \mapsto (x + 7)^2$ $j: x \mapsto (x - 4)^2$ $k: x \mapsto (x - 6)^2$

c) $f: x \mapsto x^2$ $g: x \mapsto -x^2$ $h: x \mapsto 2 \cdot x^2$ $j: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x^2$

Fogalmazd meg, hogyan kaphatjuk meg a többi függvényt az $f(x) = x^2$ függvényből!

9. 🎧 Írd fel az alábbi grafikonok hozzárendelési szabályát!



10. 🎧 a) Oldd meg grafikusán az $x^2 - 3 = 1$ egyenletet! A 5. feladatban megadott lépéssort követve biztosan sikerül.

b) Az előző grafikont felhasználva oldd meg az $x^2 - 3 \geq 1$ egyenlőtlenséget!

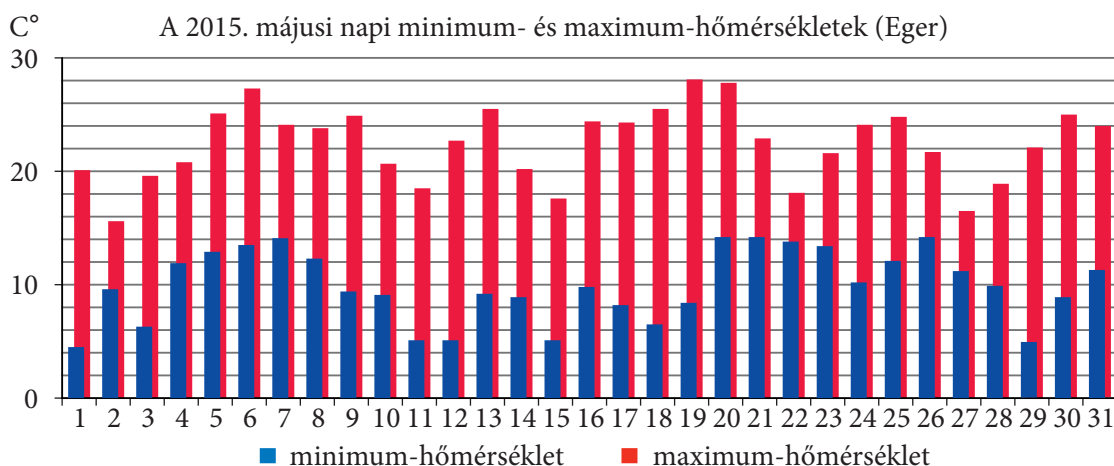
c) Oldd meg az $x^2 - 3 < 1$ egyenlőtlenséget!

d) Oldd meg az $x^2 - 3 < 5$ egyenlőtlenséget grafikusán! Az eredmény pontosításához használj zsebszámológépet!

A mindennapi életünkben gyakran van szükségünk arra, hogy grafikonokat értelmezzünk. Az internetes időjárás-előrejelzést, a valuták árfolyamainak változásait, a banki kamatváltozásokat gyakran grafikonon jelenítik meg. Az alábbi példák azt segítenek megérteni, hogyan lehet adatokat grafikonokról leolvasni, illetve értelmezni.

1. PÉLDA

A grafikonon a 2015 májusában Egerben mért napi minimum-, illetve maximum-hőmérsékletek láthatók (az adatok az Országos Meteorológiai Szolgálat mérései alapján).



- Melyik napon volt a leghidegebb és a legmelegebb Egerben 2015 májusában?
- Mikor volt a legnagyobb a különbség a napi hőmérsékleti minimum- és maximumérték között?
- Gerzson a napi középhőmérsékletet a minimum és a maximum átlagából számolta ki. Te hogyan számolnád a napi középhőmérsékletet, ha a minimum- és maximumérték mellett még rendelkezésre állnak a 7, 13 és 19 órákor mért értékek is?

Megoldás

- A leghidegebb május 1-jén volt, 4 és 5 °C között. A legmelegebb május 19-én, körülbelül 28 °C.
- Néhány napot egyből ki lehet zárni, mert a közelében látunk olyan kék és piros oszlopot, ahol nagyobb a különbség. Nézzük meg május 18-át és 19-ét pontosabban. Teljesen pontos értéket nem tudunk leolvasni a grafikonról, de az látszik, hogy ezen a két napon volt a legnagyobb a hőingadozás, talán 19-én egy kicsit nagyobb, mint 18-án.

	Minimum	Maximum	Különbség
május 18.	6–7	25–26	19–20
május 19.	8–9	28	19–20

- A napi középhőmérséklet kiszámítására nagyon sok lehetőség van.
 - Ennek a három értéknek a számtani közepe.
 - A minimum és a maximum hozzávételével az öt érték számtani közepe stb.
 Ha meg szeretnéd tudni, hogyan számítják ki a napi középhőmérsékletet a meteorológusok, keress rá az interneten!

2. PÉLDA

Balatonszemes és Fonyód kikötője 18 km távolságra van egymástól. Fonyódról $5 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$ egyenletes sebességgel egy kenu indul el Balatonszemes kikötőjébe. Ugyanebben az időben Szemesről egy kajak indul el Fonyódra, amely 7 km-t tesz meg óránként.

- Ábrázoljuk a hajók helyzetét koordináta-rendszerben!
- Mennyi idő alatt ér Balatonszemesre a kenu?
- Mikor haladnak el egymás mellett?
- Mikor voltak 6 km-re egymástól?

Megoldás

- Az egyenletesen mozgó testek út-idő összefüggése $s = v \cdot t$, ahol s a megtett út, v a test sebessége és t az eltelt idő. Ezek alapján: A kenu által megtett utat $s = 5 \cdot t$ alakban írhatjuk fel. A tőle 18 km-re lévő kikötőből induló kajak útját $s = 18 - 7 \cdot t$ képlet írja le.

- A kenu 3,6 óra = 3 óra 36 perc alatt ér Szemesre.

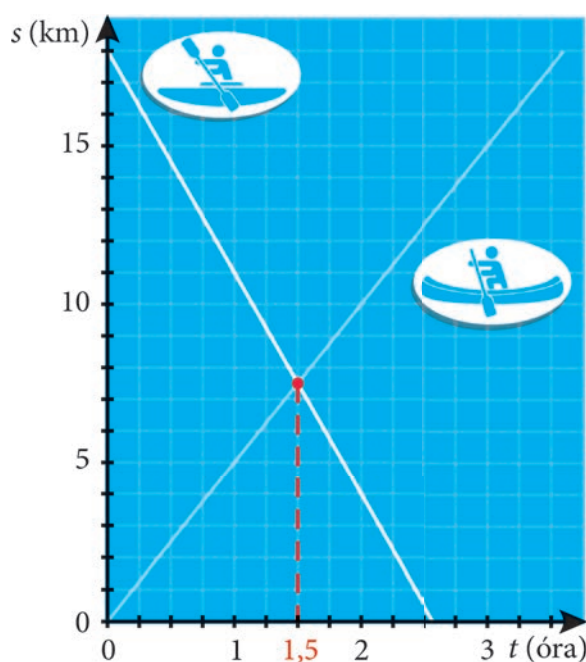
- A két grafikon a $t = 1,5$ -nél metszi egymást. Ez azt jelenti, hogy a két hajó az indulás után 1,5 órával haladt el egymás mellett.

Ellenőrzés: A kenu 7,5 km-t, a kajakos 10,5 km-t tett meg. Ketten együtt 18 km-t, ami az eredetileg köztük lévő távolság, így valóban az indulás után másfél órával találkoztak.

- Olyan pontokat kell keresni a függvények grafikonján, amelyek az y tengely mentén mérve 6 egység távolságra vannak. Két lehetőség van.

I. Indulás után 1 óra elteltével a kenu 5 km-t tett meg, a kajak 7 km-t. Ez összesen 12 km, és induláskor 18 km-re voltak. Tehát 6 km-re vannak egymástól.

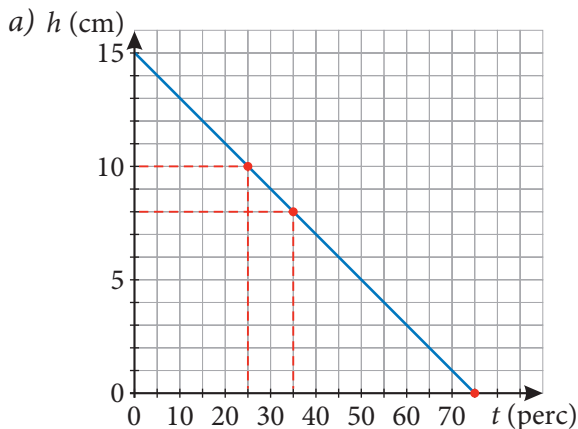
II. Indulás után 2 órával. Ekkor a kenu 10 km-t a kajak 14 km-t tett meg. Ekkor már elhaladtak egymás mellett, közöttük a távolság ismét 6 km.



3. PÉLDA

Egy egyenletesen égő henger alakú gyertya magassága a meggyújtás után 10 perc alatt 2 cm-t csökken.

- Ábrázoljuk a 15 cm-es gyertya magasságának változását az idő függvényében!
- Mennyi idő alatt ég le a gyertya?
- Mennyi idő múlva lesz a gyertya magassága 8 cm?
- Milyen magas lesz a gyertya 25 perc múlva?

Megoldás

A b), c) és d) kérdésekre a választ legkönnyebben úgy adhatjuk meg, hogy ábrázoljuk a gyertya magasságának változását.

A grafikon alapján látható, hogy;

b) a gyertya 75 perc alatt ég le;

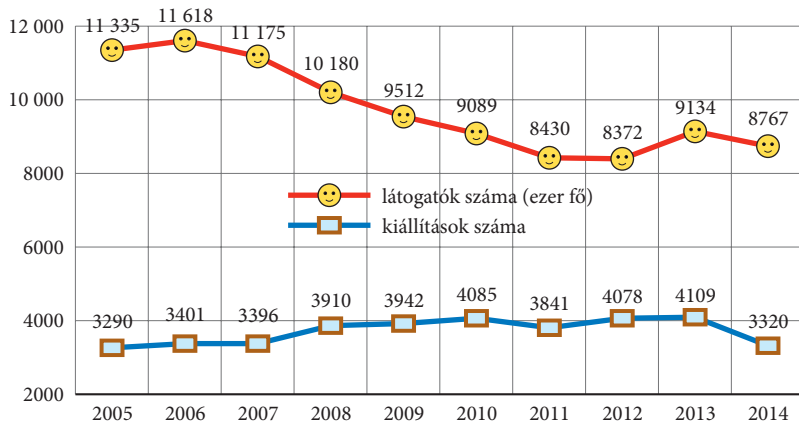
c) a gyertya magassága 35 perc múlva lesz 8 cm;

d) a gyertya 25 perc múlva 10 cm magas lesz.

FELADATOK

1. Nézd meg az alábbi grafikon adatait, majd válaszolj a kérdésekre!

A múzeumlátogatók és a kiállítások száma Magyarországon (2005–2014)



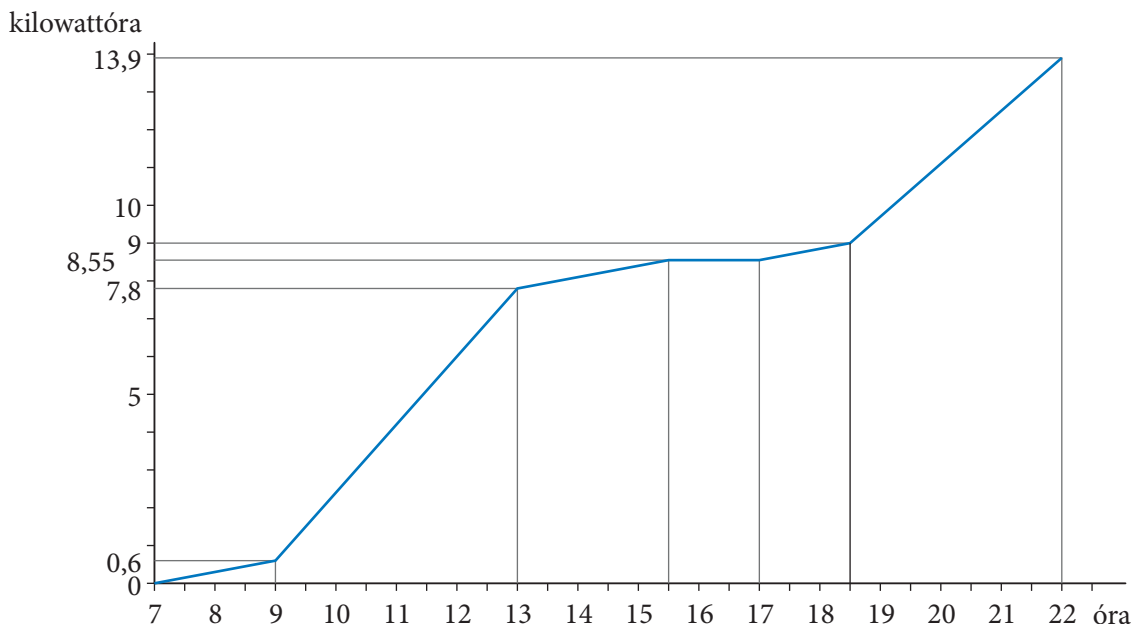
Forrás: KSH

- Melyik évben volt a legtöbb kiállítás Magyarországon?
- Mennyien látogatták a kiállításokat 2010-ben?
- Mikor volt a legtöbb látogató?
- Melyik évben volt nagyobb az egy kiállításra jutó átlagos látogatószám, 2006-ban vagy 2014-ben?

2. Tamásék 80 literes melegvítárolója pont akkor kezdett el csöpögni, amikor elutaztak nyaralni. Három nap alatt szép lassan, egyenletesen, kicsöpögött belőle az összes víz.

- Ábrázold a tartályban lévő víz fogyását az idő függvényében!
- Add meg a függvény hozzárendelési szabályát!

3. Az alábbi grafikon azt mutatja, mennyi áramot használt el a Kellér család szombaton. Délelőtt beindult a szokásos hétfégi takarítás és főzés, így 1,8 kilowattot használtak óránként. Délután kirándultak egyet a környező dombokon, ekkor csak 0,3 kilowattóra volt a fogyasztás, de estére ismét 1,4 kilowattóra nőtt az áramfelhasználás. Válaszolj a kérdésekre az alábbi grafikon alapján!



- Hány órákor ébredtek szombat reggel?
- Hány órákor kezdték el az otthoni munkákat?
- Mikor indultak kirándulni?
- Mi okozhatja a fogyasztást, ha nincsenek otthon?
- Mit jelenthet a vízszintes szakasz 15:30 és 17:00 óra között?
- Mikor lépték át az 5 kilowattórás fogyasztást?

4. Dávid a suliba busszal és biciklivel is mehet. Ha busszal megy, minden reggel 6 perc a várakozási idő. A busz $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -s sebességgel haladva teszi meg az iskolába vezető 6 km-es utat, és szinte a suli előtt teszi le Dávidot. Biciklivel $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -s átlagsebességgel teker el az iskoláig.

- Ábrázold a megtett utat mindkét esetben az idő függvényében!
- Melyik járművel ér előbb az iskolába Dávid?
- Hány órákor ér a suliba, ha 7:20-kor indul el otthonról?



Összefüggések, változások bemutatásához gyakran szemléletesebb, ha egy figyelemfelkeltő grafikont használunk az adatok pusztá sokasága helyett. Kísérletek elvégzésekor, adatok elemzése alkalmával vagy előadásokon szükség lehet arra, hogy az eredményeket grafikonon ábrázoljuk.

1. PÉLDA

Gábor és Zsolti kísérletet végeztek. Vízfórralóval 3 perc alatt vizet melegítettek fel 25 °C-ról 70 °C-ra. Ezután a vízfórralót kikapcsolták, majd 5 percig hűlni hagyták. Ekkor a víz 60 °C-os lett. Ezt követően egy jégkockát dobtak bele, és 4 perc elteltével a víz 20 °C-ra hűlt. Azt vizsgálták, hogyan változik a hőmérséklet, ha a vizet először felmelegítik, majd hűteni kezdik. Azt tapasztalták, hogy a hőmérséklet-változás egyenesen arányos az idő elteltével.

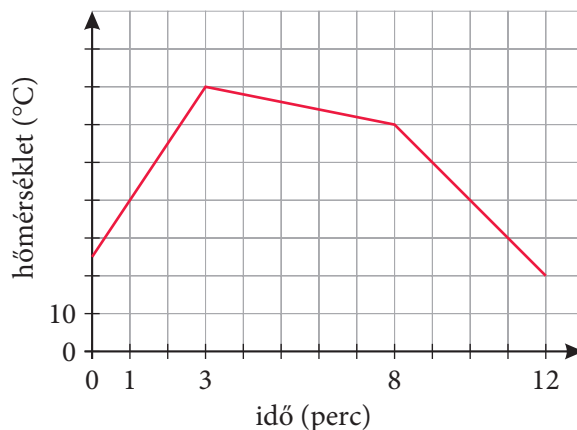
Ábrázoljuk a szöveges hozzárendelési utasítással megadott függvény grafikonját!

Megoldás

A függvény grafikonja három részből áll.

A szöveges utasítás megadható képlet formájában is.

$$f : t \mapsto \begin{cases} 25 + 15 \cdot t, & \text{ha } 0 \leq t \leq 3 \\ 76 - 2 \cdot t, & \text{ha } 3 < t < 8 \\ 140 - 10 \cdot t, & \text{ha } 8 \leq t \leq 12 \end{cases}$$



Az eddig ábrázolt függvények esetében az alaphalmaz a valós számok halmaza volt.

A következő példákban olyan függvényeket mutatunk be, amelyek értelmezési tartománya a valós számok egy részhalmaza.

2. PÉLDA

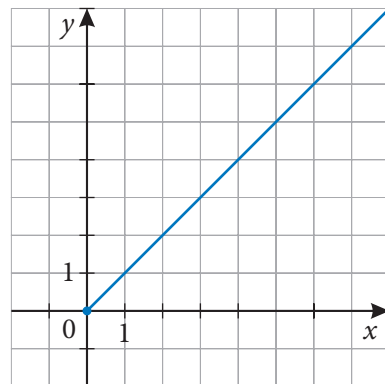
Ábrázoljuk az $f : x \mapsto |x|$ függvényt! Legyen az értelmezési tartomány a nemnegatív számok halmaza! Jellemezzük a függvényt a növekedés szempontjából!

Megoldás

Az abszolútérték-függvényt adtuk meg, de a grafikon a vizsgált halmazon mégsem egy V alak lett, hiszen az értelmezési tartományt leszűkítettük.

Minden nemnegatív szám abszolút értéke önmaga, ezért a függvény grafikonja egy origóból kiinduló félegyenes.

A függvény a megadott értelmezési tartományon növekedő.



3. PÉLDA

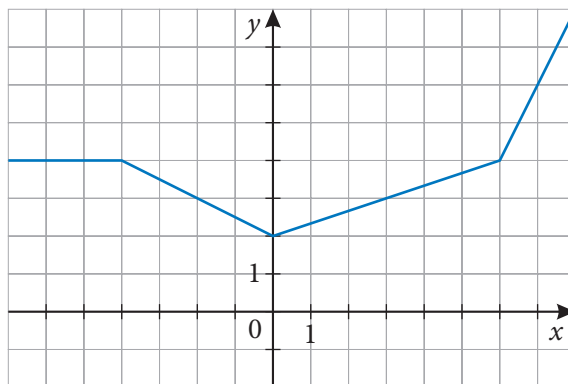
Ábrázoljuk a következő függvényt! Melyik részen csökkenő és melyiken növekedő a függvény?

$$f: x \mapsto \begin{cases} 4, & \text{ha } x \leq -4 \\ -\frac{1}{2}x + 2, & \text{ha } -4 < x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x + 2, & \text{ha } 0 < x \leq 6 \\ 2x - 8, & \text{ha } x > 6 \end{cases}$$

Megoldás

A függvény grafikonja négy lineáris függvény egy-egy része.

Ha $x \leq -4$, akkor a függvény konstans,
ha $-4 < x \leq 0$, akkor a függvény csökkenő,
ha $x > 0$, akkor a függvény növekedő.



4. PÉLDA

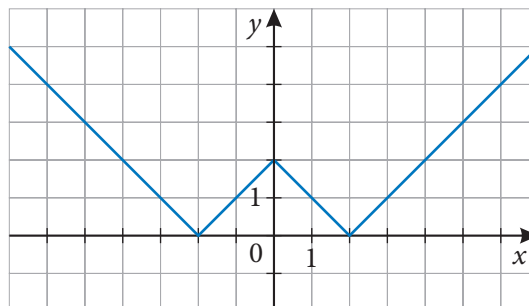
Ábrázoljuk a következő függvényt!

$$f: x \mapsto \begin{cases} |x - 2| & \text{ha } x \geq 0 \\ |x + 2| & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Megoldás

Vizsgáljuk meg, milyen x érték esetén növekedő, illetve csökkenő a függvény!

Ha $x < -2$, akkor a függvény csökkenő,
ha $-2 < x < 0$, akkor a függvény növekedő,
ha $0 < x < 2$, akkor a függvény csökkenő,
ha $x > 2$, akkor a függvény növekedő.



FELADATOK

1. Balázs elment vásárolni. 2 perc alatt 150 m-t tett meg. 8 perc alatt ért a boltba, ahol 5 percet töltött. Visszafelé ugyanazon az úton ment és sietett, ezért 6 perc alatt hazaért.

a) Ábrázold Balázs mozgását az idő függvényében indulástól hazaérkezésig!

b) Milyen messze volt a bolt?

c) Mennyi ideig volt távol?

d) Mikor haladt el a házuától 300 m-re lévő fagyizó előtt?

2. Döme Szadáról indult el Szelessel, a lovával. Már fél órája $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel ügettek, amikor a ló megbokrosodott, ledobta a lovasát, és $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val elvágatott a Gödöllői-dombság egy másik irányába.

a) Ábrázold a ló által megtett utat az idő függvényében!

b) Ábrázold grafikonon a Döme által megtett utat az idő függvényében, olvasd le hány perc alatt ért haza, ha az esés után $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel hazasietett!

3. Ábrázold a következő függvényeket!

$$a) f: x \mapsto \begin{cases} -2x + 10, & \text{ha } x \geq 1 \\ 3x + 5, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

$$b) g: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2, & \text{ha } x \leq 6 \\ 5, & \text{ha } x > 6 \end{cases}$$

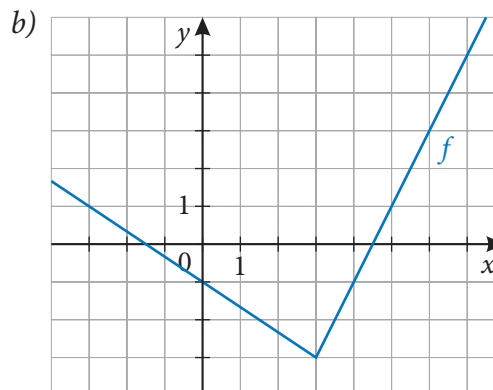
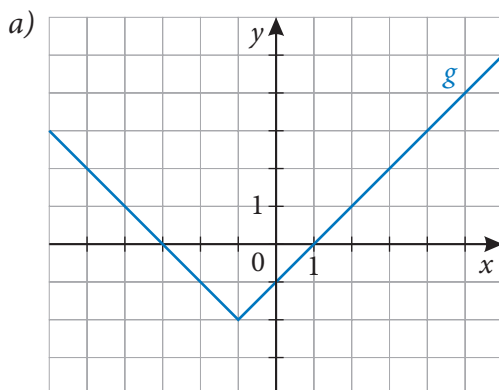
$$c) h: x \mapsto \begin{cases} x + 9, & \text{ha } x \leq -4 \\ -\frac{1}{2}x + 3, & \text{ha } -4 < x \leq 2 \\ \frac{3}{2}x - 1, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

4. Az alábbi függvények hozzárendelési szabályai megadhatók abszolút érték használatával is. Ábrázold a függvényeket, és add meg a hozzárendelés szabályát!

$$a) f: x \mapsto \begin{cases} x - 3, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x - 3, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

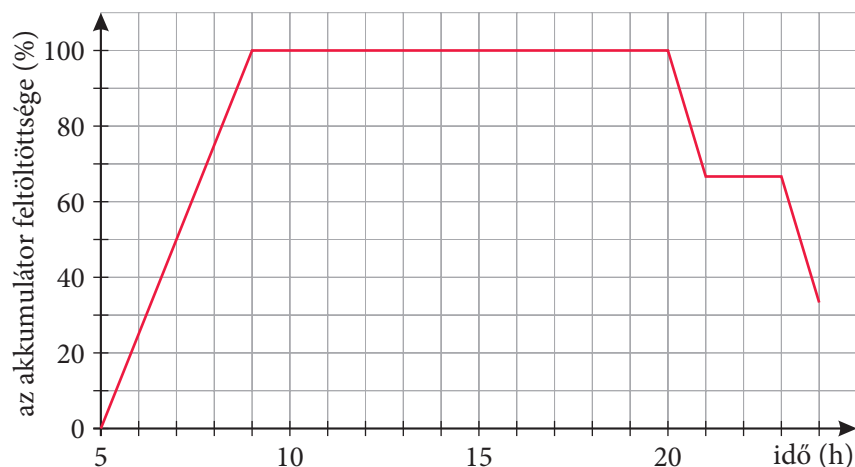
$$b) g: x \mapsto \begin{cases} x + 5 & \text{ha } x \geq -5 \\ -x - 5 & \text{ha } x < -5 \end{cases}$$

5. Add meg az alábbi grafikonok hozzárendelési szabályát!



6. Panni családja a nyaralás alkalmával lakókocsiban lakott. A lakókocsi tetején napelem volt, ami napfényes időben 4 óra alatt teljesen feltöltődött. Panniek sötétedés után ennek segítségével világítottak. Ha folyamatosan égett a lámpa, három óra alatt az összes napenergiát elhasználták. (A napfelkeltét 5 órától számítsd, a napnyugtát 20 órától!)

a) Találj ki egy történetet az alábbi grafikonhoz!

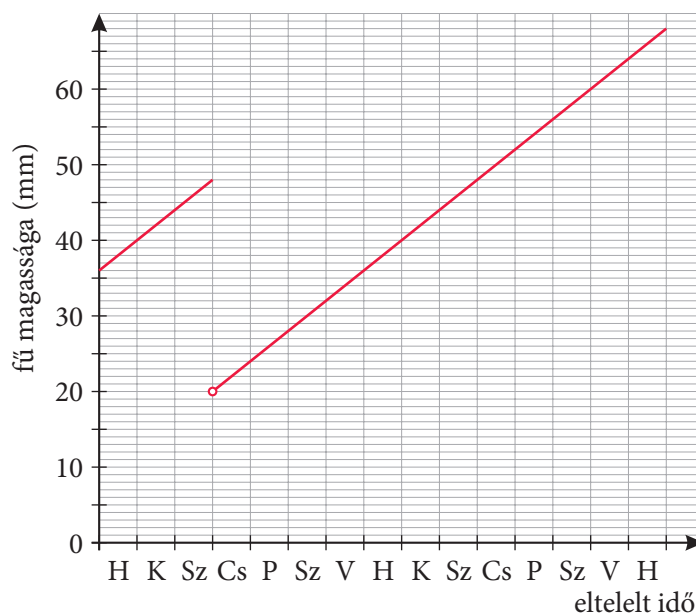


b) Egy felhős napon kétszer annyi idő alatt töltődött fel az akkumulátor, majd sötétedés után addig társasoztak a lakókocsiban, míg világított a lámpa. Ábrázold grafikonon az akkumulátor töltöttségének változását az idő függvényében!

7. A kertünkben hétfőn hajnalban 3,6 cm magas volt a fű. Naponta 4 mm-t nőtt. Szerdán este levágtuk, így 2 cm magas lett.

a) Mikor lesz a fű 5 cm-es?

b) Vajon függvény-e a „fű-ggvény”?



Az elmúlt években számos adatot gyűjtöttünk általunk elvégzett kísérletek vagy természetben előforduló események alapján. Ezeket az adatokat gyakran táblázatba rendeztük, és oszlopdiagramon, vonaldiagramon, illetve kördiagramon szemléltettük. Megismerkedtünk adatok középértékével. Meghatároztuk az adatok **móduszát**, de ha az adataink számok voltak, akkor ki tudtuk számolni az **átlagukat** (számtani közepüket) és a **mediánjukat** is. Megszámláltuk, hogy egy-egy esemény hányszor következett be, azaz felírtuk az események **gyakoriságát**. Hogy a különböző kísérletekből származó adataink könnyebben összehasonlíthatók legyenek, a **relatív gyakoriságot** használtuk annak leírására, hogy mekkora eséllyel következik be egy esemény. Hetedikben azt is láttuk, hogy ha egy kísérletet nemcsak százszor, hanem többször hajtunk végre, akkor a relatív gyakoriságok kevésbé fognak változni. Ezeket a korábban tanult ismereteket két példán keresztül ismételjük át.

1. PÉLDA

Hasonlítsuk össze Budapest és London havi átlagos csapadékmennyiségét! Az adatokat mm-re kerekítettük.



	Budapest	London
január	37	55
február	29	41
március	30	42
április	42	44
május	62	49
június	63	45
július	45	45
augusztus	49	50
szeptember	40	49
október	39	69
november	53	59
december	43	55

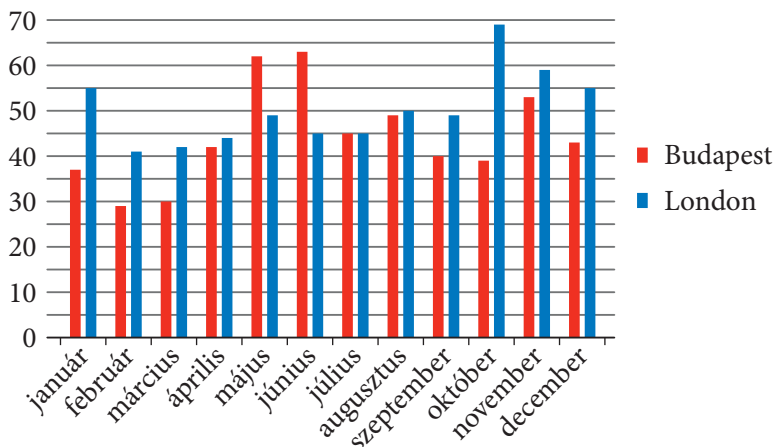
- Mennyi az éves csapadékmennyiség Budapesten, illetve Londonban? Mennyi a csapadék átlagos havi mennyisége?
- Ábrázold az adatokat grafikonon!
- Hány hónapban haladja meg a Londonban mért havi csapadékmennyiség a budapesti értékeket?
- Mely hónapokban haladta meg legalább 15 mm-rel a havi londoni csapadékmennyiség a budapesti átlagot?

Megoldás

- Adjuk össze az egyes oszlopokban szereplő számokat! Az éves csapadékmennyiség Budapesten 532 mm, Londonban 603 mm.

Az átlagokra vonatkozóan $\frac{532}{12} \approx 44,33$ mm-t és $\frac{603}{12} = 50,25$ mm-t kapunk.

- b) Az adatokat célszerű oszlop-diagramon ábrázolni, mert a kördiagram csupán arányokat mutat.
- c) A Londonban mért havi átlagos csapadékmennyiség 9 hónapban haladja meg a budapesti adatokat.
- d) Csak két ilyen hónap van, az október és a január.



2. PÉLDA

A 8. b osztály tanulói szavazással döntötték el, hogy mi legyen a kötelező olvasmány. Öt könyvet jelöltek ki, amelyekből mindenkinek legalább egyet el kellett olvasnia. A táblázatban az szerepel, hogy hányan választották az egyes könyveket. (Volt, aki többet is elolvasott, őket csak az általuk első helyen rangsorolt könyvnél vettük figyelembe.)

<i>A Hobbit</i>	<i>Harry Potter és a halál ereklyéi</i>	<i>Időfutár – A körző titka</i>	<i>Kétévi vakáció</i>	<i>Twilight – Alkonyat</i>
4	9	6	3	8

- a) Írjuk fel, milyen gyakorisággal választották az osztály tanulói az egyes könyveket!
- b) Készítsünk az adatokból oszlop- és kördiagramot!
- c) Ha az iskola 124 nyolcadikosának véleményét össze akarjuk vetni a 8. b osztály véleményével, akkor a gyakoriságokat vagy a relatív gyakoriságokat érdemes összehasonlítani? Miért?
- d) Mi az adatok módusza?

Megoldás

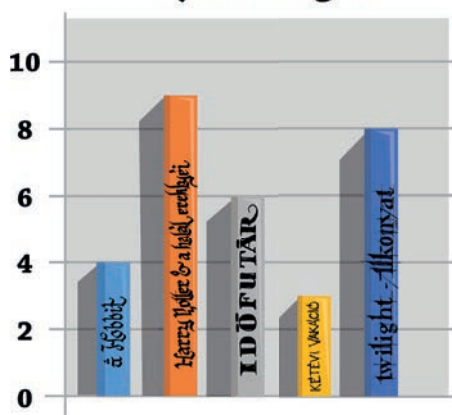
- a) A táblázat alapján $4 + 9 + 6 + 3 + 8 = 30$ gyerek járt az osztályba. Ez alapján az egyes könyvek választásának gyakorisága a következőképpen határozható meg:

	<i>A Hobbit</i>	<i>Harry Potter és a halál ereklyéi</i>	<i>Időfutár – A körző titka</i>	<i>Kétévi vakáció</i>	<i>Twilight – Alkonyat</i>
Gyakoriság	4	9	6	3	8
Relatív gyakoriság	$\frac{4}{30} = 0,13$	$\frac{9}{30} = 0,3$	$\frac{6}{30} = 0,2$	$\frac{3}{30} = 0,1$	$\frac{8}{30} = 0,26$

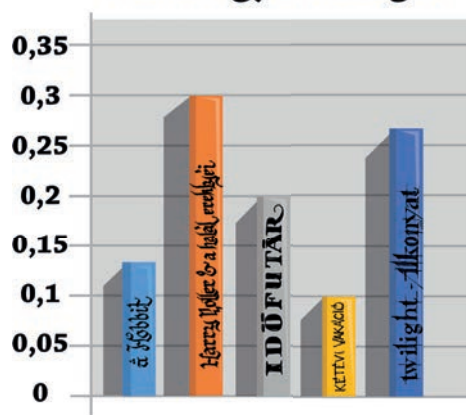
- b) Kétféle oszlopdiagramot is készítettünk: egyet a gyakoriságokról, egyet a relatív gyakoriságokról. Különbséget csak az y tengely méretezése jelent. A relatív gyakoriságok összege mindig 1. A kördiagram középponti szögei:

	A Hobbit	Harry Potter és a halál ereklyéi	Időfutár – A körző titka	Kétévi vakáció	Twilight – Alkonyat
Relatív gyakoriság	$\frac{4}{30} = 0,13$	$\frac{9}{30} = 0,3$	$\frac{6}{30} = 0,2$	$\frac{3}{30} = 0,1$	$\frac{8}{30} = 0,26$
Középponti szög	$\frac{4}{30} \cdot 360^\circ = 48^\circ$	$\frac{9}{30} \cdot 360^\circ = 108^\circ$	$\frac{6}{30} \cdot 360^\circ = 72^\circ$	$\frac{3}{30} \cdot 360^\circ = 36^\circ$	$\frac{8}{30} \cdot 360^\circ = 96^\circ$

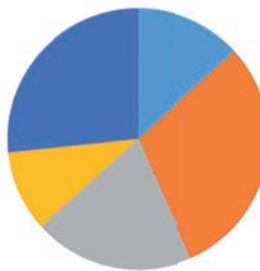
Gyakoriságok



Relatív gyakoriságok



Könyvek



- c) Természetesen a relatív gyakoriságokat, mivel ez mutatja meg az egyes könyvek népszerűségének arányait.
 d) A Harry Potter és a halál ereklyéi a legkedveltebb, így ez lesz a módusz.

KUTATÓMUNKA

Kik a könyvek írói?

FELADATOK

1. Határozd meg a 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 6; 6 számok átlagát, móduszát, mediánját!

2. Egy 28 fős osztály átlaga irodalomból pontosan 4,25.

- Ha hét gyereknek lenne kettese, akkor milyen jegye lenne a többieknek?
- Lehet-e nyolc gyereknek kettese?
- Hány gyereknek van négyese, ha csak négyes és ötös volt az osztályban?
- Mi lehet a módusz?

3. Anya koktélpáradicsomot termeszt a kertben. Gazsi rendszeresen locsolja, gyomlálja. A 24 tő páradicsomról egyik reggel még egy vázlatrajzot is készített, amelybe beírta, hogy melyik tőről hány kis páradicsomot szüretelt az aznapi reggelihez.

- Készíts az adatokból gyakorisági táblázatot!
- Átlagosan hány koktélpáradicsomot szüretelt Gazsi egy tőről?
- Mi volt az adatok mediánja és módusza?
- Ábrázold a relatív gyakoriságokat oszlopdiagramon!
- A kert melyik részét kellene jobban öntözni?



4. A 124 nyolcadikos megszavazhatta, hogy ki „a legjobb fej” a tanárok között. 46 szavazattal Judit néni nyert, 29 szavazattal Tóni bácsi lett a második és 26 szavazattal Szilvi néni a harmadik. A többi szavazaton három másik tanár osztozott. Ábrázold a kapott szavazatokat oszlop- és kördiagramon is!

5. A földgáz hivatalos árát a fűtőértékével mérik és egy összetett képlet alapján kalkulálják. A fogyasztásmérők azonban köbméterben mutatják az elfogyasztott gáz mennyiségét. A gáz pontos árát az összetett számítási mód miatt nem adjuk meg, de ha minden költséget összeszámolunk, akkor arra jutunk, hogy körülbelül 140 Ft egy m^3 gáz ára. A táblázatban Forró Fodor családjának havi gázfogyasztási adatait adtuk meg.

Hónap	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
Fogyasztás (m^3)	272	192	121	92	42	52	23	28	56	74	182	270

- Számold ki a család átlagos havi gázfogyasztását!
- Melyik hónapban fogyasztottak körülbelül átlagos mennyiségű gázt?
- Ábrázold a havi fogyasztási adatokat oszlopdiagramon!
- Mennyi lenne az éves gázdíjuk?
- Mennyi lenne a Forró család havi átalánydíja, ha az éves gázdíjat 11 hónapra osztanák el?

6 A futballmérkőzések után ki szokták írni a csapatok különböző statisztikai mutatóit. Ilyen mutató például, hogy az idő hány százalékában birtokolta a csapat a labdát, a passzok hány százaléka ment csapattárshoz, hány lövésből lett gól stb. A táblázat néhány európai csapat saját bajnokságában elért mutatóit tartalmazza.

	A csapat neve	Lövés/gól	Labdabirtoklás (%)	Sikeres passz (%)
1.	Barcelona	16,4	69,7	88,2
2.	Real Madrid	18,1	57,9	86,3
3.	Bayern Munich	17,4	70,2	87,5
4.	Wolfsburg	15,3	54,9	79,6
5.	Arsenal	16,1	56,7	83,8
6.	Bayer Leverkusen	16,3	51,7	69,9
7.	Paris Saint-Germain	12,9	63,5	88,0
8.	Borussia M. Gladbach	12,6	53,3	82,7
9.	Manchester City	17,6	59,5	84,6
10.	Chelsea	14,8	55,6	83,2
11.	Marseille	15,2	58,0	83,8
12.	Juventus	15,8	57,4	84,8

A 2015-ös Bajnokok Ligája-döntőben a Juventusnak 343-ból 286, a Barcelonának pedig 570-ből 505 sikeres passza volt. Ugyanakkor a Juventus 14 lövésből 1, a Barcelona pedig 18-ból 3 gólt ért el, a labdabirtoklás aránya pedig 39 : 61 volt a Barcelona javára.

- Melyik felsorolt csapat lövéseiből lesz leggyakrabban gól a saját bajnokságában?
- Ki lehet-e számítani ezekből az adatokból, hogy a 12 csapat lövéseinek hány százaléka lesz gól?
- Számold ki a 12 csapat labdabirtoklásának (%) mediánját és átlagát!
- Mennyire van összhangban a Juventus és a Barcelona hazai bajnokságban mutatott éves átlaga a BL-döntőben mutatott teljesítményükkel?
- Ábrázold kördiagramon a két csapat labdabirtoklási arányát!



A kockapóker – vagy idegen szóval Yahtzee – egy viszonylag új játék. Az internet szerint az amerikai Milton Bradley írta le először 1956-ban. A játéknak számtalan variánsa van, az egyes változatok főleg a pontozásban különböznek. Ha másként ismered, az nem hiba, hanem természetes. A játékhoz 5 darab dobókocka szükséges, és praktikus egy dobópoharat is használni a kockák összerázásához és gurításához, hogy ne repüljenek szerteszét. Az eredmények összegzéséhez tettünk egy játéklapot az oldalra, és a munkafüzetben is találsz üres játéklapot. Ha nyerni akarsz, akkor némi szerencse mellett szükséged lesz az esélyek mérlegelésére és a helyes döntések meghozatalára.

Szabályok:

- A játékot érdemes 2–4 játékosnak játszani, hogy elég gyors legyen. A soron következő játékos 5 kockával dob, de ezek közül tetszőleges számú kockával újra dobhat, majd ezt még egyszer megismételheti. Tehát maximum három dobás után kialakul a játékos dobásának az eredménye.
 - Például elsőre dob: 1, 1, 2, 3, 6. Lent hagyja a 6-ost és újra dob a másik négygel.
 - Másodikra dob: 1, 1, 2, 3. Lent hagyja a két 1-est, és újra dob a másik kettővel.
 - Harmadikra dob: 4, 5. Ekkor a dobásainak az eredménye: 1, 1, 4, 5, 6.
 - A játékos dönthet, hogy a táblázat melyik üres sorát tölti ki. Ha a példában dobott értékeket dobja, akkor írhat az egyesekhez 2-t, az egy párhoz kettőt, de dönthet másként is.
- Beírt eredményt nem lehet később felülírni.
- Ha egy dobássorozat eredményét nem lehet sehová sem beírni, akkor egy üres sort ki kell húzni.
- A játék célja az, hogy minél több pontunk legyen, az első 6-sor azonban különleges, jutalmat ér. Ha valaki az első 6 sor sorban összesen legalább 63 pontot ér el, akkor 30 jutalompontot kap. Ezt a 63 pontot elérheti, ha mindegyik számból legalább 3 darabot sikerül dobni, de elérheti úgy is, hogy csak két 1-est dob, és négy darab 5-öst.



1-es (3)			
2-es (6)			
3-as (9)			
4-es (12)			
5-ös (15)			
6-os (18)			
Felső összeg: (63)			
Jutalom: (30) (ha a felső összeg legalább 63)			
2 egyforma (pár)			
2 + 2 egyforma (két pár)			
3 egyforma (drill)			
3 + 2 egyforma (full)			
4 egyforma (póker)			
Kis sor (15)			
Nagy sor (20)			
5 egyforma (50)			
Szemét			
SZUMMA			

A munkafüzetben találtok kitölthető táblázatot.

A 2 egyforma maximuma 12, a 2 + 2 egyforma maximuma 22, a három egyforma maximuma 18, a kis sor (1, 2, 3, 4, 5) 15 pontot, a nagy sor (2, 3, 4, 5, 6) 20 pontot ér stb. Mindenhová az odaillő dobott számok összegét lehet beírni. Van azonban két kivételes sor. Bármiből is dobsz 5 egyformát, az 50 pontot ér. Ha sehová nem tudod beírni, amit dobtál, akkor a játék során egyszer megteheted, hogy a dobott pontjaidat összeadod, és az összeget beírod a Szemét sorba. Miután mindegyikötök 15-ször sorra került, és minden sort kitöltöttetek vagy kihúztatok, akkor már csak össze kell adnotok a pontszámaitokat. Aki a legtöbb pontot éri el, az nyer.

A korábbi évek során és az idei órákon is rengeteg kísérletet hajtottunk végre. Ezek során számos **esemény** relatív gyakoriságát felírtuk. Ilyen esemény volt például az, hogy egy szabályos kockával 1-est dobtunk, vagy az, hogy öt kockával egyből öt darab 6-ost dobtunk. Az eseményeket – a halmazokhoz hasonlóan – nagybetűvel jelöljük.



Egy szabályos kocka feldobása esetén a lehetséges kimenetek a következők:

A: 1-est dobok; B: 2-est dobok; C: 3-ast dobok;
D: 4-est dobok; E: 5-öst dobok; F: 6-ost dobok.

Ezeket **elemi eseményeknek** nevezzük.

Nemcsak a kísérlet kimeneteleinek írtuk fel a relatív gyakoriságát, hanem ezzel kapcsolatos más eseményeknek is:

K: a dobás páros; L: a dobás páratlan; M: a dobás < 3 ; N: a dobás 1 vagy 5.

A K esemény például úgy következhet be, ha 2, vagy 4, vagy 6 áll a kockán.

Két különleges eseménynek saját neve van. Ezekkel az eseményekkel már ötödikben találkoztatok.

A **lehetetlen esemény** az, amely a kísérlet során soha nem következhet be. Jele: $\emptyset$.

A **biztos esemény** az, amely a kísérlet során mindig bekövetkezik. Jele: I (vagy E , vagy Ω).

Például lehetetlen esemény, hogy egy kockával 7-est dobunk, vagy az, hogy az iskolai menzán „mari-nírozott halszeletet kapjak Turbigo módra kétfelé vágott tojással, egész kevés vörösborral párolva”.

Biztos esemény például az, hogy a kockával hetesnél kisebbet dobunk.

Egy esemény relatív gyakoriságára mindig igaz, hogy $0 \leq \frac{\text{gyakoriság}}{\text{kísérletek száma}} \leq 1$.

A **valószínűséget** P betűvel jelöljük, egy A esemény valószínűségét így írjuk le: $P(A)$.

A lehetetlen esemény valószínűsége 0, azaz $P(\emptyset) = 0$.

A biztos esemény valószínűsége 1, azaz $P(I) = 1$.

Tetszőleges eseményre igaz, hogy $0 \leq P(A) \leq 1$.

KUTATÓMUNKA

Nézz utána, hogy milyen betűvel kezdődik angolul, franciául, illetve latinul a *valószínűség* szó!



1. PÉLDA

Dobjunk fel a képen látható homogén testet (szabályos tetraéder) 200-szor!

a) Készítsünk táblázatot arról, hogy milyen gyakorisággal esett az egyes lapjaira!

Számítsuk ki a dobások relatív gyakoriságait is!

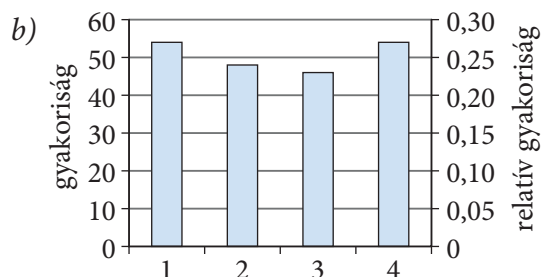
b) Készítsünk oszlopdiagramot a gyakoriságokról és a relatív gyakoriságokról!



Megoldás

a) Mi a következő eredményeket kaptuk:

	1	2	3	4
Gyakoriság	52	48	46	54
Relatív gyakoriság	$\frac{52}{200} = 0,26$	$\frac{48}{200} = 0,24$	$\frac{46}{200} = 0,23$	$\frac{54}{200} = 0,27$



Megjegyzés: Ha a képen látható tetraéderrel dobunk, akkor annak nem lesz felül lévő lapja. Tetraéder esetén az alul lévő lap egyértelmű, ezért ezt tekintjük a dobás értékének. A lap mindhárom élére rá szokták írni a laphoz tartozó számot. A képen látható tetraéderrel éppen 4-est dobtunk.

A nagy számban elvégzett kísérleteink eredményeként azt láttuk, hogy az elemi események relatív gyakorisága sok esetben ugyanazon szám körül helyezkedik el. Ez az eset állt fenn a munkafüzet előző leckéjében lévő kockadobásos feladat és e lecke 1. példája esetében is. A kockadobás esetében a 6 elemi esemény mindegyikének $\frac{1}{6}$ a valószínűsége, az 1. példa esetében pedig mind a négy esemény valószínűsége $\frac{1}{4}$.

Ha egy kísérletnek véges sok lehetséges kimenetele van, és az elemi események valószínűsége egyenlő, akkor klasszikus valószínűségi modellről beszélünk. Vigyázz! Nem minden kísérlet során kapunk klasszikus valószínűségeket!

Ellenpélda

Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy piros fülű elefánt sétál az iskolaudvaron?

Két eset van:

A: Az elefánt ott sétál az iskolaudvaron.

B: Nem sétál az elefánt az iskolaudvaron.

A példának véges sok esete van, pontosan 2 db. Klasszikus valószínűség esetén mindegyik elemi esemény valószínűsége 0,5. Ugye tudod, hogy



nem szoktál piros fülű elefánttal találkozni az udvaron? A hibás eredmény természetesen abból adódik, hogy az elemi eseményeknek nem mindig ugyanakkora a valószínűsége.

A későbbiekben nem fogunk minden egyes esetben ezernyi kísérletre támaszkodni, ha el akarjuk dönteni, hogy klasszikus valószínűségi modelltől van-e szó, vagy sem. Gyakran csak logikai úton következtünk erre, használjuk azt a kényelmes következményt, hogy ebben az esetben minden elemi esemény valószínűsége ugyanakkora.

2. PÉLDA

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az 1. példában látott tetraéderrel páros, illetve páratlan számot dobunk!

Megoldás

Páros szám a 2 és a 4, páratlan az 1 és a 3. A lehetséges 4 eset közül mindkét esemény 2-2 esetben következik be, tehát a valószínűségük:

$$P(\text{páros számot dobunk}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{páratlan számot dobunk}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

3. PÉLDA

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy kockával 5-nél kisebb számot dobunk!

Megoldás

A feladat feltételeinek megfelelően csak az 1, 2, 3, 4 számokat dobhatjuk, ami 4 eset a lehetséges 6-ból, tehát a leírt esemény előfordulásának valószínűsége: $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

A példák azt mutatják, hogy klasszikus valószínűségi modell esetén egyszerű módszerünk van egy esemény valószínűségének kiszámítására:

1. Számláljuk meg, hogy hány elemi esemény fordulhat elő összesen! Ez lesz az összes eset száma.
2. Számláljuk meg, hogy ezek között hány esetben következik be a vizsgált esemény! Ez lesz a kedvező esetek száma.
3. Egy esemény valószínűsége = $\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$.

Vigyázz! A képlet csak klasszikus valószínűségi modell esetén működik!

FELADATOK

1. Alakítsatok háromfős csoportokat! Minden csoporttag válassza ki a táblázat egy sorát, majd járjátok körbe az osztályt, és készítsetek felmérést arról, hogy mennyi időt töltenek osztálytársaitok az általatok kiválasztott tevékenységekkel hetente! Az eredményeiteket ábrázoljátok grafikonon!

	Kevesebb, mint fél óra	Kb. 1 óra	Kb. 2 óra	Legalább 3 óra
Netezés				
Tv-nézés				
Olvasás				

- Egy osztálytársadat véletlenszerűen kiválasztva mennyi annak valószínűsége, hogy ő kevesebb mint fél órát netezik hetente?
- Egy osztálytársadat véletlenszerűen választva mennyi annak valószínűsége, hogy ő kb. 1 órát tévézik hetente?
- Egy osztálytársadat véletlenszerűen választva mennyi annak valószínűsége, hogy ő kb. két órát olvas hetente?

2. A *Ki nevet a végén?* elnevezésű játékban 3 mezővel maradtam le Berta mögött, és én jövök.

- Mennyi a valószínűsége annak, hogy ki tudom ütni?
- Mennyi a valószínűsége annak, hogy elé kerülök?
- Mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő lépésnél ő üt ki engem, ha 5-öst dobtam?

3. Két kék bábum is veszélyes helyen áll a *Ki nevet a végén?* táblán. Éppen Zozó fog lépni a piros bábuval.

- Mennyi a valószínűsége, hogy ki tudja ütni valamelyik kék bábut?
- Mennyi a valószínűsége, hogy ki tudja ütni valamelyik bábut?

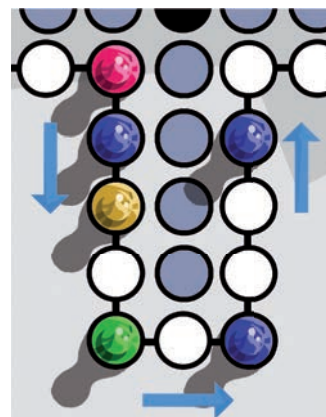
4. Számold ki annak a valószínűségét, hogy egy kockával prímszámot dobunk!

5. Egy piros és egy zöld kockával dobok. A piros kockával dobott szám egy kétjegyű szám első, a zöld kockával dobott szám pedig a kétjegyű szám második számjegye lesz.

- Mennyi a valószínűsége, hogy a 11-es számot írom le?
- Mennyi a valószínűsége, hogy 20-nál kisebb számot írok le?
- Mennyi a valószínűsége, hogy négyzetszámot írok le?

6. A képen látható húszlapú testtel dobva

- mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám kisebb, mint 10?
- mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám legfeljebb 10?
- mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám 1 vagy 20?
- mennyi a valószínűsége, hogy a dobott szám négyzetszám?



OSZTÁLYMUNKA

Tippeljétek meg az osztályban, hogy mennyi lesz az alábbi események valószínűsége, ha feldobtok két 100 forintos érmét! A dobások eredménye:

A: Két fej; B: Egy fej és egy írás; C: Két írás.

Ha nem tudtok egyértelműen dönteni, vagy kétség merül fel valakiben, akkor érdemes kísérleteket végezni.

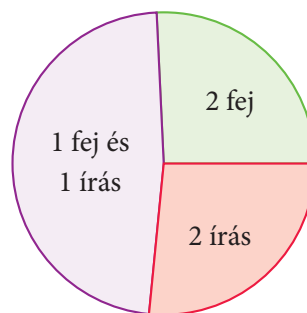
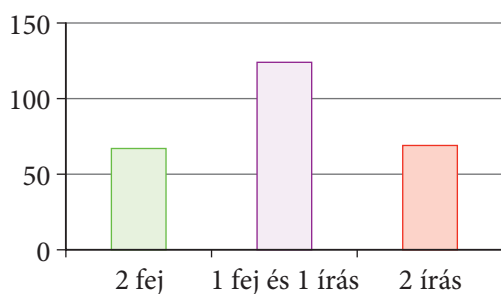
a) Mindannyian vegyetek elő két pénzérmét (nem kötelező százasokat), és dobjátok fel 10-szer! A dobások eredményeit írájátok le!

b) Összesítsétek az osztályban az eredményeket!

A mi osztályunk összesített eredménye:



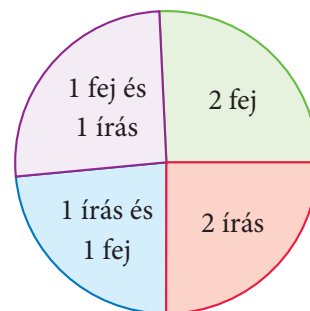
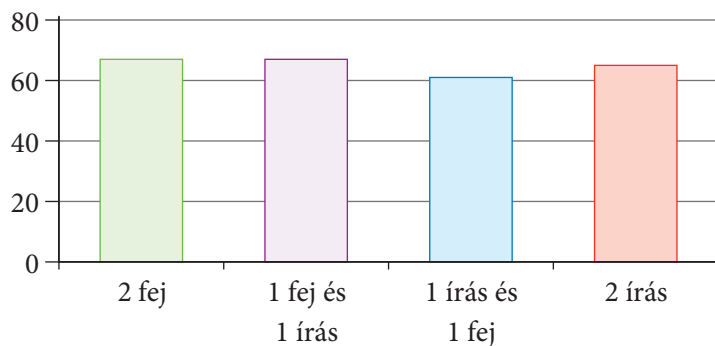
A táblázat mellett grafikonon is ábrázolhatjuk az eredményeket. A jelenlegi feladat arányai is szembeűnőbbek, ha kördiagramot használunk.



Az adatok alapján úgy tűnik, hogy az *egy fej és egy írás* körülbelűl az esetek felében fordul elő, míg a *két fej* és a *két írás* a dobások negyedében. Hogyan lehetséges ez, ha három eseményűnk volt? Nem működik a valószínűségek kiszámítására felírt képletűnk? De igen, csak óvatosan kell megválasztanunk az eseményeket.

Végezzük el a kísérletet újra, de most két különböző pénzérmével! A mi osztályűnkban a következő eredményeket kaptuk:





Most valóban körülbelül $\frac{1}{4}$ mind a négy esemény valószínűsége.

A pénzérme nyilván nem tudja, hogy mennyit érnek, tehát két egyforma pénzérme esetén is kétszer akkora az *egy fej és egy írás* dobásának valószínűsége, mint a *két fej* vagy a *két írás* valószínűsége.

1. PÉLDA

Dobjunk fel 4 pénzérmet, és számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy két fej és két írás lesz köztük!

Megoldás

Olyan elemi eseményeket kell keresnünk, amikor mindegyik esemény valószínűsége egyenlő. Gondoljunk arra, hogy négy különböző pénzérmet használunk, például egy 100 Ft-ost, egy 50-est, egy 20-ast és egy 10-est! A dobott fejek száma nyilván nincs összefüggésben a pénz értékével. Mindegyik pénzérme 0,5-0,5 valószínűséggel lesz fej (F) vagy írás (I).

Készítsünk táblázatot az összes esetről! Lehet mindegyik pénzérme fej. Lehet, hogy egy fej lesz, ami lehet a 100-as, az 50-es, a 20-as vagy a 10-es. Stb.

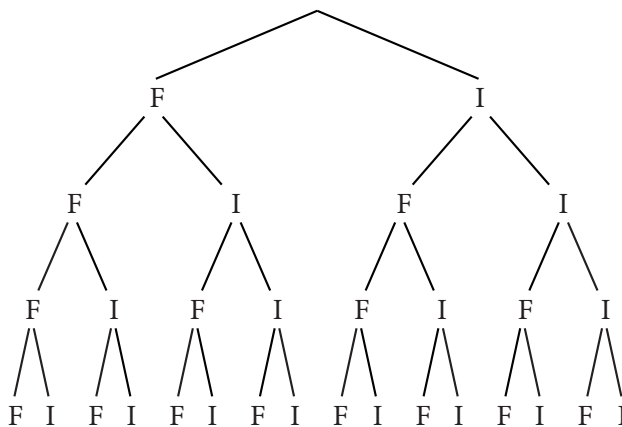
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
100	F	I	F	F	F	I	I	I	F	F	F	I	I	I	F	I
50	F	F	I	F	F	I	F	F	I	I	F	I	I	F	I	I
20	F	F	F	I	F	F	I	F	I	F	I	I	F	I	I	I
10	F	F	F	F	I	F	F	I	F	I	I	F	I	I	I	I

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha másképpen számláljuk le az összes esetet.

A 100 Ft-os kétféle lehet: F vagy I. Az 50 Ft-os mindegyik esetben kétféle lehet stb. (Lásd a következő oldal tetején lévő fadiagramot! Aláhúztuk azokat az eseteket, amikor két fejet és két írást kaptunk.)

Mindkét leszámítási mód esetén 16 db $\frac{1}{16}$ valószínűségű elemi eseményt kaptunk. Közöttük 6 esetben van két fej és két írás, tehát a keresett valószínűség $\frac{6}{16} = 0,375$.

A pénz értéke, mint mondtuk, nyilván nincsen összefüggésben azzal, hogy fej vagy írás lesz egy dobás eredménye. Abban segít, hogy az érméket megkülönböztessük egymástól. A valószínűség akkor is ugyanennyi marad, ha négy darab egyforma pénzérmét dobunk fel, de az eseteket gyakran kényelmesebb áttekinteni, ha legalább gondolatban megkülönböztetjük az egyforma érméket.



FELADATOK

1. Csongi az iskolai menzán tépelődik: „Kétféle leves van, de mindegyiket szeretem. Háromféle főétel, és az is mind jó. Nem tudok választani.”

- Hányféle menüt tud összeállítani Csongi?
- Ajánlj neki egy sorsolási eljárást, amelynél minden párosításnak ugyanakkora a valószínűsége!

2. Mennyi lesz az elemi események valószínűsége, ha a képen látható nyolclapú testtel (oktaéderrel) dobunk?



3. Írd fel 3 pénzérme feldobásának összes lehetséges kimenetelét!

4. Dobj fel 3 egyforma pénzérmét 100-szor, és készíts táblázatot az eredményekről!

- Mennyi lett a három fej dobásának relatív gyakorisága?
- Mennyi lett a két fej és egy írás esemény relatív gyakorisága?
- Mikor közelítené meg a relatív gyakoriság a valószínűséget pontosabban?

5. Egy 24 fős osztályban mindenki nevét felírják egy cetlire, összehajtják, és beteszik egy sapkába. Berta húz egyet.

- Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pont önmagát húzza?
- Mennyi a valószínűsége, hogy Zozó elsőre húz valakit, aztán Berta másodiknak önmagát húzza? (A kihúzott nevet nem teszik vissza.)

6. A tányéron van 3 olyan süti, aminek kicsit odakapott az alja, meg 9 hibátlan. A rájuk szórt porcukor miatt egyáltalán nem vehető észre, hogy melyik alja kozmálhatott oda.

- Mennyi a valószínűsége, hogyha véletlenszerűen választunk közülük 1-et, akkor az a süti égett lesz?
- Mennyi a valószínűsége, hogyha véletlenszerűen választunk közülük 1-et, akkor az a süti jó lesz?
- Mennyi a valószínűsége, hogyha véletlenszerűen választunk közülük 2-t, akkor mindkét süti égett lesz?
- Mennyi a valószínűsége, hogy 4 égettet választunk?

Gyakran kerülünk a hétköznapi életben olyan helyzetbe, hogy egy bonyolult, összetett szövegből kell kikeresnünk lényeges információkat, összefüggéseket. Például a telefonszolgáltatók, közmuhszolgáltatók sokszor nehezen érthető leveleit akkor értjük meg, ha elötte megtanultuk, hogyan vegyünk észre összefüggéseket.

A szövegbeli kapcsolatok megtalálására és a következtetések levonására most néhány könnyed szövegész, de odafigyelést igénylő példát mutatunk.

1. PÉLDA

Átlag Ábel a számokat kedvenc szabálya szerint állította sorba. Az adott hatjegyű szám számjegyeit az elejétől kezdve párokba rendezte, majd kiszámította a párokban levő számjegyek átlagát. Ha ez a szám egész volt, akkor az átlagot írta le, ha viszont az átlag nem egész szám lett, akkor a számjegyek szorzatát. Az így kapott számokat növekvő sorrendbe állította, és eszerint rendezte sorba az eredeti számokat. Írjuk fel, hogy milyen számokat kapott Ábel az átalakítás után, és rendezzük eszerint sorrendbe a számokat!

255 314; 270 846; 802 695; 510 067; 711 407

Megoldás

Az új számok a szövegbeli utasítások szerinti átalakítás után:

255 314 → 1044

270 846 → 1445

802 695 → 447

510 067 → 3042

711 407 → 440

Az eredeti számok növekvő sorrendje: 711 407; 802 695; 255 314; 270 846; 510 067.

2. PÉLDA

Szofi számokat rak sorba egy általa kitalált szabály alapján. Elöször összeadja a számokban levő, 2-vel osztható számjegyeket, majd ezek csökkenő sorrendje szerint rendezi el a számokat. Ha az így kapott összeg két számnál megegyezik, akkor a 3-mal osztható számjegyek összegét is meghatározza, és ezek csökkenő sorrendje szerint rendez. Ha ez is egyenlő, akkor a 4-gyel osztható számjegyek összege, majd az 5-tel osztható számjegyek összege stb. szerint rendezi a kapott számokat az összegek szerinti csökkenő sorrendbe. Mi lesz Szofi sorrendje az alábbi számok esetén?

24 835; 26 972; 58 236; 63 945; 22 823

Megoldás

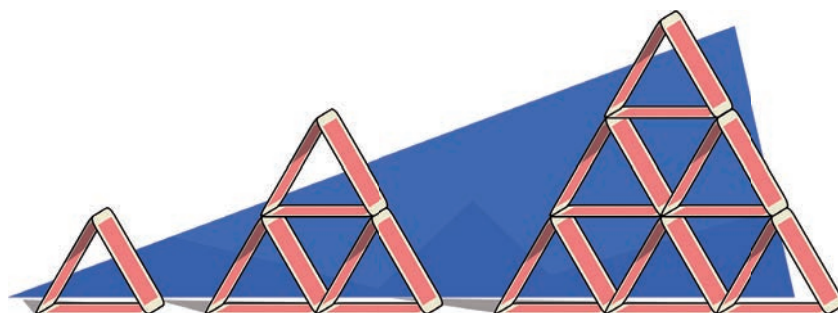
Készítsünk táblázatot! A táblázat kitöltését addig folytassuk, amíg nincs két egyenlő szám az adott sorban! Ekkor egyértelműen eldönthető a sorrend.

	24 835	26 972	58 236	63 945	22 823
2-vel osztható számjegyek összege	14	10	16	10	14
3-mal osztható számjegyek összege	3	15		18	3
4-gyel osztható számjegyek összege	12				8
5-tel osztható számjegyek összege					

A számok csökkenő sorrendje Szofi elrendezése alapján: 58 236; 24 835; 22 823; 63 945; 26 972.

3. PÉLDA

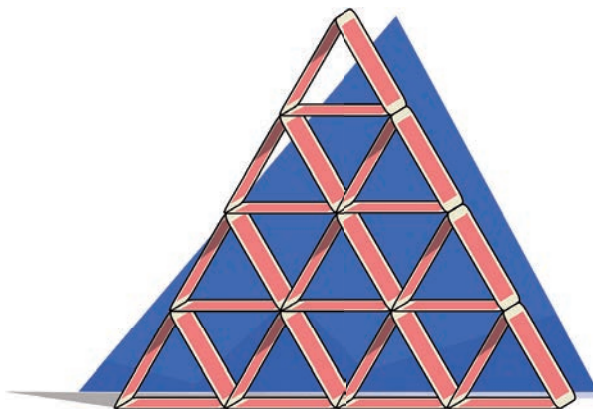
Kártyavárakat építettünk. A képen a kártyavárakat látjuk.



- Hány darab kis háromszöget látunk egy négyszintes kártyavár egyes szintjein?
- Hány darab kis háromszöget látunk egy négy-, illetve ötszintes vár esetében?
- Milyen következtetést vonhatunk le az a) és b) feladatrésztől alapján?

Megoldás

- A legalsó szinten 7 db, a felette lévön 5 db, a következön 3 db, a legfelsön pedig 1 db kis háromszög látható.
- Egy négyszintes vár esetében 16 db, ötszintesnél 25 db kis háromszög látható.
- A kis háromszögek számát a kártyavár egyes szintjein – fentről lefelé – egymást követő páratlan számok adják. A szintek számának a négyzete szintén az összes kis háromszög számát adja. Azaz az első négy páratlan szám összege egyenlő 4^2 -nel, az első öt páratlan szám összege egyenlő 5^2 -nel. Ez a megfigyelés általánosan is igaz. Az első n db páratlan szám összege n^2 .



KUTATÓMUNKA

Nézz utána, milyen módszerekkel lehet még igazolni a páratlan számok összegére vonatkozó állítást!

FELADATOK

1. „Pakoljátok be a ceruzáitokat a dobozba szépen, sorban!” – szólt anya az ikerkhez.

Dini így rakta:



Dani így rakta:



Fogalmazd meg a fiúk sorba rendezésének szabályait!

2. Vizsgáld meg a következő sorozatokat! Fogalmazd meg a képzés szabályát, és folytasd a sorozatokat 3-3 taggal!

- a) H, Sz, P, V, K, ...
- b) a1, b2, c3, d4, ...
- c) Szlovákia, Ukrajna, Románia, Szerbia, ...

3. Folytasd az alábbi számsorozatok 3-3 taggal! Írd le a képzési szabályt is!

- a) 1, 2, 4, 7, 11, ...
- b) 1, 2, 4, 8, 16, ...
- c) 2, 3, 5, 7, 11, ...

4. Add meg annak a számsorozatnak az első 5 tagját, amelynek első eleme 10, és a további tagokat úgy képezzük, hogy

- a) az előző taghoz hozzáadunk (–9)-et;
- b) az előző tag kétszereséből elveszünk 1-et!

5. Balázséknál otthon „gyerekbank” működik. Ha Balásznak pénzre van szüksége, kérhet anyától, de házimunkával kell törlesztenie. A hagyományos bankokhoz hasonlóan a törlesztésnek határideje van, de kamata szerencsére nincs. Az alábbi táblázat mutatja, melyik házimunka hány forintot ér és hányszor végezhető el egy héten.

Munkafajtája	ár	heti rendszeresség
mosogatás	200 Ft	7
porszívás	100 Ft	2
felmosás	50 Ft	2
ruházárító lepakolása	100 Ft	3
udvar összesöpítése	50 Ft	3
rendrakás az egész lakásban	250 Ft	2

- a) Állíts össze egy munkasort Balásznak, ha 3 hét alatt 4500 forintot kell visszafizetnie!
- b) Te hány forintot kérnél kölcsön hasonló esetben? Mennyi idő alatt és milyen házimunkával tudnád törleszteni?

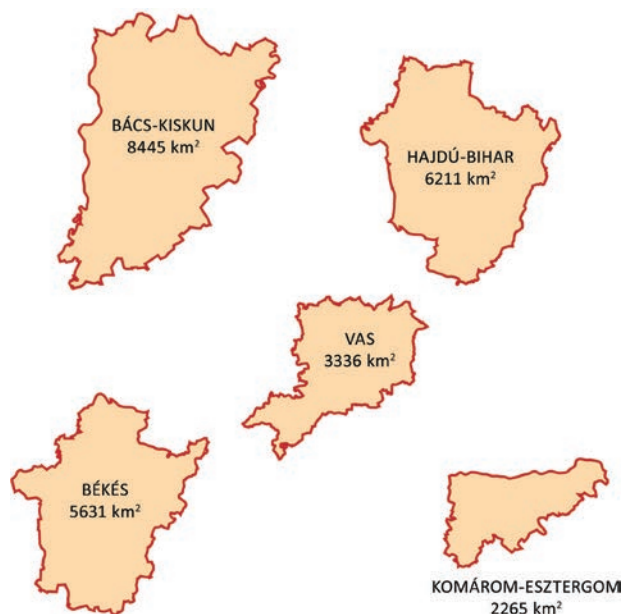
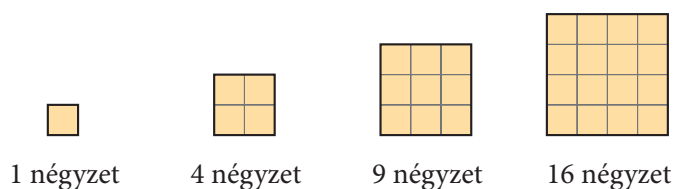
6. Gyuriék körbeültek, és a „Minden harmadik kiesik” játékot játszották. Elkezdtek egyével számolni, és minden olyan ember, akinek a sorszáma osztható volt 3-mal, kiesett. Ez így ment körbe-körbe, és a végén az nyert, aki utolsónak maradt bent. Hányadik helyre üljön Gyuri, ha mindenképp nyerni akar, és a játékot

- a) hatan; b) heten;
- c) ötvenen játsszák?
- d) Hova kerül a nyerő hely, ha a játékszabály „Minden negyedik kiesik”-re módosul?

Sorozatról akkor beszélünk, ha egy halmaz elemeit **sorba rendezéssel** adjuk meg. Sorozatba rendezhetjük Magyarország hegységeit magasságuk szerint, megyéit területük nagysága alapján vagy akár ábécé szerint is.

A **számsorozatok** megadása során számokat adunk meg valamilyen sorrendben vagy szabály alapján. Az egyes számokat a sorozat elemeinek vagy tagjainak nevezzük.

Például számsorozat az 1; 4; 9; 16... Ez a „pozitív négyzetszámok” sorozata.



Olyan sorozatot is könnyű felírni, amelynek nemcsak a később következő, hanem a korábbi tagjait is meg tudjuk állapítani. Például, ha egy számsorozat ötödik, hatodik és hetedik tagja 8; 18 és 28, akkor lehet, hogy a számsorozat tagjai tízesével növekednek. Ekkor a

8. tag a 38; 9. tag a 48; 4. tag a -2 ;
3. tag a -12 ; 2. tag a -22 ; 1. tag a -32 lesz.

Természetesen a sorozat elemeinek felsorolását más módon is folytathatnánk. Például: 8; 18; 28; 38; 48; 8; 18; 28; 38; 48; 8; ...

Azt a számsorozatot, amelyik 1-gyel kezdődik, és minden tagja eggyel több egyest tartalmaz, csak az egyik irányba tudjuk folytatni: 1; 11; 111; 1111; 11111; ... Ennek a számsorozatnak az első tagja az 1, második tagja a 11 stb.

Ezt rövidebben a következő módon szoktuk jelölni:

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 11; \quad a_3 = 111; \quad a_4 = 1111; \quad a_5 = 11111; \quad \dots$$

Az a_8 a sorozat nyolcadik, **az a_n a sorozat n -dik tagját jelöli, ahol n egy pozitív egész szám.**

Sorozatok megadásakor többféle módon járhatunk el:

– A sorozat első néhány elemét adjuk meg. Ekkor többféle módon is folytathatjuk a sorozatot.

– Ha azt szeretnénk, hogy mindenki ugyanarra az egy folytatásra gondoljon, akkor nem elég csupán felsorolnunk az elemeket, hanem a képzési szabályt is meg kell adnunk. Ezt többféle módon tehetjük meg:

- szöveges megfogalmazással;
- képlettel.

EGYÉNI MUNKA

Mindenki folytassa az 1; 3; 6; ... sorozatot legalább háromféle módon! Mindegyik folytatáshoz készítetek leírást is!

1. PÉLDA

Három fiú kirándulást tervezett. Gáspár és Bálint időben a találkozó helyszínére érkezett, de a harmadik fiú késett. A szökőkúthoz – ahol a találkozót megbeszélték – öt lépcsőfok vezetett. Gáspár a várakozás ideje alatt a következő játékot találta ki:

Felváltva menjünk fel a lépcső tetejére! Elég magasak a lépcsőfokok, úgyhogy csak egy vagy két lépcsőfokot léphetünk felfelé! Mindig más módon kell feljutnunk. Az nyer, aki utolsónak tud felmenni olyan módon, amilyen előtte még nem volt. Kezdd te a lépcsőzést!

Ki nyerte a játékot?

Megoldás

Írjuk fel rendszerezve a lehetséges lépéssorrendeket! Ez ugyanaz a feladat, mint ha az ötöt egyesek és kettesek összegeként íránk fel úgy, hogy a tagok sorrendje is számít.

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 2$$

$$5 = 1 + 1 + 2 + 1$$

$$5 = 1 + 2 + 1 + 1$$

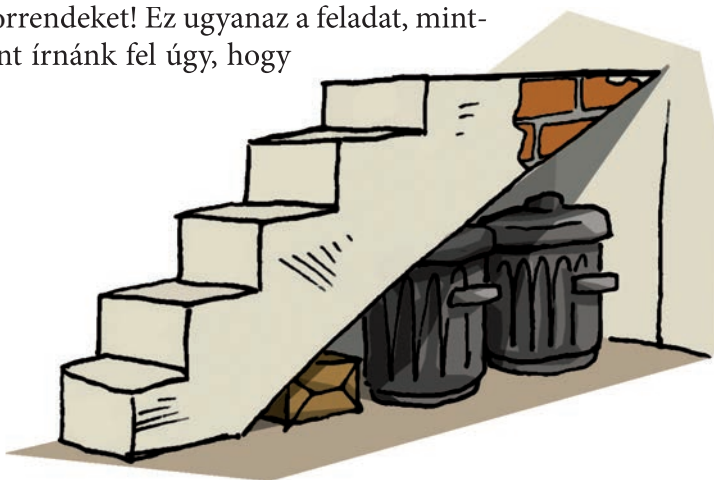
$$5 = 2 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 1 + 2 + 2$$

$$5 = 2 + 2 + 1$$

$$5 = 2 + 1 + 2$$

Ez nyolc lehetőség, tehát Gáspár nyerte a játékot.



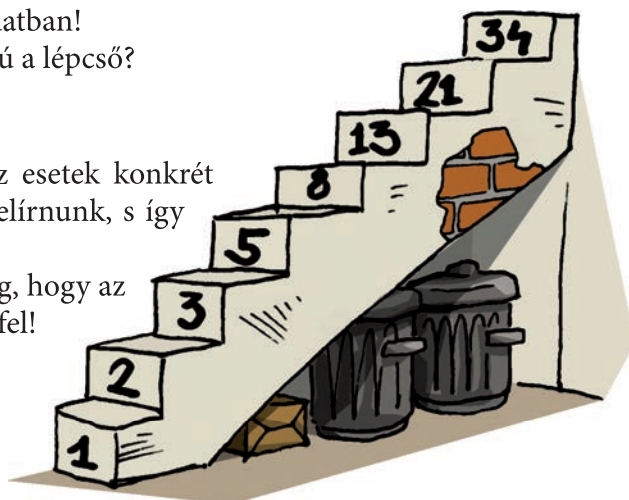
2. PÉLDA

Módosítsuk a lépcsőfokok számát az előző feladatban!
Hány lehetőség van, ha hat-, hét- vagy nyolcfokú a lépcső?

Megoldás

A feladatot megoldhatjuk az előző módon, az esetek konkrét felsorolásával is, de egyre több esetet kellene felírunk, s így könnyen tévedhetünk.

Gondolkodjunk hát másképpen! Vizsgáljuk meg, hogy az egyes lépcsőfokokra hányféleképpen juthatunk fel!



Az első lépcsőfokra egyféleképpen juthatunk. A második lépcsőfokra vagy egyszer kettőt lépünk, vagy kétszer egyet, tehát kétféleképpen juthatunk.

A harmadik lépcsőfokra már háromféleképpen juthatunk fel: vagy az első fokról lépünk kettőt, vagy a másodikról egyet.

$$3 = 1 + 2$$

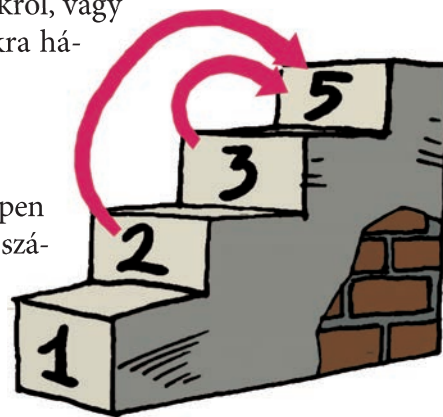
Az előzőhöz hasonló gondolattal azt is könnyen megkaphatjuk, hányféleképpen juthatunk fel a negyedik lépcsőfokra. Két eset van: vagy kettőt lépünk a másodikról, vagy egyet a harmadikról. A másodikra kétféleképpen, a harmadikra háromféleképpen juthattunk, tehát a negyedikre

$$2 + 3 = 5$$

különböző módon juthatunk fel.

Minden lépcsőfokra annyi féleképpen juthatunk fel, ahányféleképpen az előző két lépcsőfokra összesen eljuthattunk. Írjuk fel ezeket a számokat: 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34.

Most már válaszolhatunk a feltett kérdésre. Hatfokú lépcső esetén 13, hét fokú esetén 21, nyolcfokú esetén pedig 34 különböző lehetőségünk van a feljutásra.



A felsorolt számok olyan sorozatot alkotnak, melynek első tagja 1, második tagja 2, harmadik tagja 3, ... nyolcadik tagja 34.

Jelöléseinkkel: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$; $a_4 = 5$; $a_5 = 8$; $a_6 = 13$; $a_7 = 21$; $a_8 = 34$; ...

Ez a sorozat nagyon hasonló az 1; 1; 2; 3; 5; 8; ... Fibonacci-sorozathoz, csak nem két darab, hanem csak egy darab 1-sel kezdődik.

A Fibonacci-sorozatban és a lépcsőmászó feladatban is igaz, hogy: a sorozat bármely eleme megkapható az előző két elem összegeként. Képlettel leírva:

A Fibonacci-sorozat:

$$a_1 = 1, a_2 = 1 \text{ és}$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ ha } n \geq 3.$$

A Lépcsőmászó sorozat:

$$a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ és}$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ ha } n \geq 3.$$



KUTATÓMUNKA

1. Nézz utána, ki volt Fibonacci! Milyen feladat kapcsán írta le a róla elnevezett Fibonacci-sorozatot?
2. Milyen kapcsolat van a napraforgó és a Fibonacci-számok között?

FELADATOK

1. Nagyinak öt unokája van. Búcsúzáskor ott sorakoztak előtte, és a legkisebb vidáman közölte, hogy ad neki két pusztit. „Az semmi – vágta rá a második. – Én kétszer annyit adok.” „Én meg annak a kétszeresét!” – vigyorgott a soron következő. Nagy aznap este rengeteg pusztit kapott: minden unoka kétszer annyit adott neki, mint a sorban előtte álló.

- Kitől hány pusztit kapott?
- Hány pusztit kapott nagy aznap az unokáktól összesen, ha érkezésnél mindenki csak a szokásos kettőt adta?

2. Ivett fogyókúrázik, így állandóan a kalóriákat számolgatja. Azt találta ki, hogy hétfőn 1800 kalóriányi ételt fogyaszt el, és az ezt követő napokon mindig az előző napi adag felénél 500-zal többet.

- Számold ki, hány kalóriát fogyaszt az első négy napon!
- Igaz-e, hogy vasárnap már 1000 kalória alatt lesz a napi adagja?

3. Egy sorozat első tagja -2 , második tagja 3 . Minden további tag a közvetlenül előtte lévő két tag összegével egyenlő.

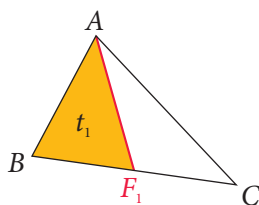
- Sorold fel a sorozat első hat elemét!
- Hányadik tag lesz 100-nál nagyobb?
- Számold ki az első tíz tag összegét!

4. Add meg növekvő sorrendben a 3-mal osztható természetes számok sorozatának első tíz tagját! Legyen $a_1 = 0$.

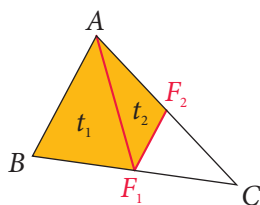
- Add meg a sorozat 50. és 100. tagját is!
- Számold ki az első tíz tag összegét!

5. Sári gondolkodás közben satírozgatott, és az alábbi ábrát készítette. Az F betűk az ábrán látható oldalak felezőpontjai. Például F_1 a BC ; F_2 az AC ; F_3 az F_1C ... oldalak felezőpontjai.

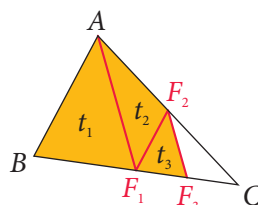
Az ABC háromszög területe legyen 1 egység.



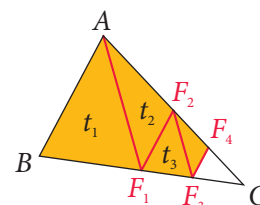
1. lépés



2. lépés



3. lépés

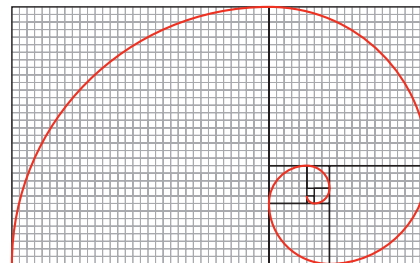


4. lépés

- Számold ki minden lépés után az újonnan beszínezett háromszög területét!
- Folytasd a sorozatot! Számold ki a sorozat 5. és 6. elemét!
- Számold ki a sorozat első hat elemének összegét!
- Mit gondolsz, hányadik lépésben lesz a sorozat tagjainak összege 1?

6. Az alábbi ábrán a Fibonacci-spirált látod.

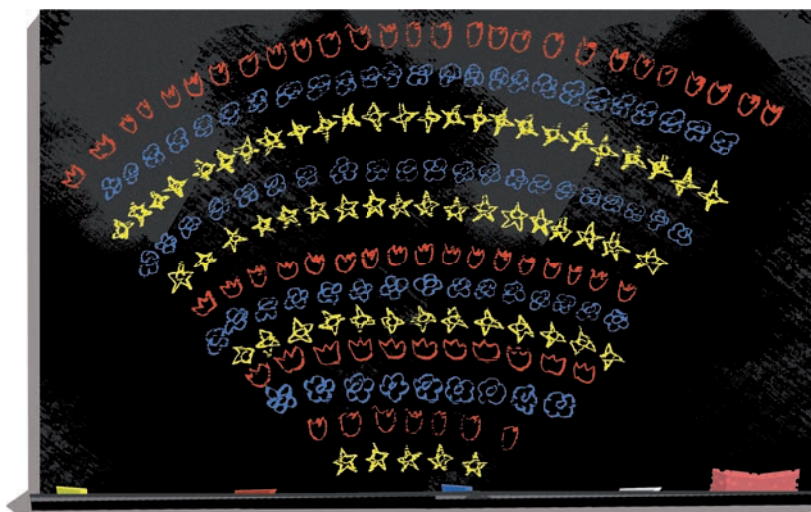
- Nézz utána az interneten, melyik cég használta ezt a spirált a logója elkészítéséhez!
- Keresd meg, hol jelenik meg a természetben ez az alakzat!



1. PÉLDA

A ballagás előtt a hetedikesek díszítették az osztályt. A lányok kis virágokat rajzoltak a táblára az ábrán látható alakban. A legelső sorba 5 virág került. Minden sorban kettővel több virág volt, mint az alatta lévőben. A 12 lány mindegyike egy-egy sor virágot rajzolt.

- Mennyi virágot rajzolt az utolsónak sorra kerülő lány?
- Hány virágot rajzoltak a lányok összesen?



Megoldás

- A virágok soronkénti száma egy sorozatot alkot, amelynek elemei: $a_1 = 5$; $a_2 = 7$; $a_3 = 9$; $a_4 = 11$. Tovább számolva eljutunk az $a_{12} = 27$ -hez. Tehát a 12. sorban 27 virág volt.
- A díszítéshez felrajzolt virágok számát kiszámíthatjuk, ha összeadjuk a sorokban lévő virágok számát. Ez most még meg tudnánk tenni, és nem is tartana sokáig, de keressünk olyan megoldást, amely nem csak 12, de 1222, vagy tetszőlegesen sok elem esetén is használható! Szerencsére most egy olyan különleges sorozattal van dolgunk, ahol minden elem ugyanannyival változik az előzőhöz képest. Írjuk fel a sorozat tagjainak az összegét, majd írjuk fel az összeget még egyszer, de fordított sorrendben! Ügyeljünk, hogy a tagok pontosan egymás alá kerüljenek!

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 5 & + & 7 & + & 9 & + & 11 & + & 13 & + & 15 & + & 17 & + & 19 & + & 21 & + & 23 & + & 25 & + & 27 \\ 27 & + & 25 & + & 23 & + & 21 & + & 19 & + & 17 & + & 15 & + & 13 & + & 11 & + & 9 & + & 7 & + & 5 \end{array}$$

Egy összeadás sorrendje tetszőleges lehet. Ne soronként adjuk össze az elemeket, hanem oszloponként! Mivel minden elem ugyanannyival változott meg az előzőhöz képest, ezért minden összeg 32 lesz. A 32-t 12-szer kell összeadnunk, és akkor megkapjuk az összeg kétszeresét: $12 \cdot 32 = 384$.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 5 & + & 7 & + & 9 & + & 11 & + & 13 & + & 15 & + & 17 & + & 19 & + & 21 & + & 23 & + & 25 & + & 27 \\ 27 & + & 25 & + & 23 & + & 21 & + & 19 & + & 17 & + & 15 & + & 13 & + & 11 & + & 9 & + & 7 & + & 5 \\ \hline 32 & + & 32 & + & 32 & + & 32 & + & 32 & + & 32 & + & 32 & + & 32 & + & 32 & + & 32 & + & 32 & + & 32 \end{array}$$

A sorozat 12 elemének az összege $\frac{12 \cdot 32}{2} = 192$, tehát a lányok 192 virágot rajzoltak fel a táblára.

Az 1. példában olyan sorozatot kaptunk, amelynek minden eleme 2-vel volt nagyobb, mint az előtte lévő elem.

Jelölésekkel felírva:

$$a_2 = a_1 + 2;$$

$$a_3 = a_2 + 2;$$

$$a_4 = a_3 + 2;$$

$\vdots$

$$a_{12} = a_{11} + 2$$

$$a_n = a_{n-1} + 2$$

$$a_2 - a_1 = 2;$$

$$a_3 - a_2 = 2;$$

$$a_4 - a_3 = 2;$$

$\vdots$

$$a_{12} - a_{11} = 2$$

$$a_n - a_{n-1} = 2$$

Ez ugyanazt jelenti, mint hogy a második tagtól kezdve bármely tagból kivonva az előtte álló tagot, kettőt kapunk.

Ezt általánosítva így írhatjuk:

Gyűjtjük össze, mit figyelhetünk meg ebben a sorozatban!

- A sorozat következő eleme mindig ugyanannyival nő az előzőhöz képest.
- Bármely két szomszédos elem különbsége állandó.
- Bármely három egymást követő tag esetén a középső tag egyenlő a két szélső tag számtani közepével (összegének a felével).

Az ilyen típusú sorozatokat számtani sorozatoknak nevezzük.

A különbséget idegen szóval differenciának mondjuk, és d -vel jelöljük.

Számtani sorozat esetében nem szükséges minden tagot kiszámítani ahhoz, hogy megtudjuk például a sorozat 20. tagját. Ugyanis:

$$a_2 = a_1 + d; \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d; \quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d; \quad \dots$$

Tehát minden tagot úgy kapunk, hogy d -t adunk hozzá a sorozat előző tagjához, ezért: $a_{20} = a_1 + 19d$

Hogyan lehet meghatározni a számtani sorozat első néhány tagjának összegét?

A megoldás módszere ugyanaz, mint a példában látott. Az elemeket növekvő, majd csökkenő sorrendben is felírjuk, majd párosítjuk őket. A párok összege mindig ugyanannyi. A páronkénti összeget megszorozzuk az elemek számával, majd az eredményt elosztjuk 2-vel.

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Ez a módszer Gauss német matematikus nevéhez fűződik.



Carl Friedrich Gauss (1777–1855) német matematikus, fizikus és csillagász. Munkásságának elismeréseként „a matematika fejedelme” névvel illetik.

Gauss nevéhez egy közismert iskolai történet is fűződik. Általános iskolai tanára azzal akarta kitölteni diákjai idejét, hogy összeadatja velük az egész számokat 1-től 100-ig. Jó lesz ez gyakorlásnak – gondolta, és állítólag azt tervezte, hogy ez idő alatt átlapozza az újságját.

A fiatal Gauss azonban keresztülhúzta a tanár terveit. Alig ült le a katedrához, észrevette, hogy a kis Gauss jelentkezik. Azt hitte, kérdezni akar valamit, de legnagyobb csodálkozására a gyerek azt állította, hogy végzett a feladattal, és az eredményt akarja közölni. Az eredmény jó volt: 5050.

Gauss ismertette is a gondolatmenetét: A számsor alá fordított sorrendben is leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott: $1 + 100 = 101$; $2 + 99 = 101$; $3 + 98 = 101$ stb., ami összesen 100 darab számpár, ahol mindegyik pár összege 101. Ezért vette a $101 \cdot 100$ -at, majd elosztotta 2-vel. Így kapta meg a helyes megoldást, az 5050-et.

A tanár ezek után külön is foglalkozott Gausszal.

FELADATOK

1. 🎧 Havonta 1,5 centit nő a hajam.

- a) Mennyit nő egy év alatt?
b) Vajon egy év múlva leér-e a derekamig, ha most a hátam közepéig ér? Becsülj!

2. 🎧 (Kopp-kopp-kopp) – Penny?

(Kopp-kopp-kopp) – Penny?

...

Ismételgette Sheldon Penny ajtajánál.

- a) Hányszor kopog, ha 3-szor mondta már, hogy Penny?
b) Hányszor kopog, ha 7-szer mondta már, hogy Penny?
c) Hányszor mondta, hogy Penny, ha 14-szer kopogott?
d) Hányszor mondta, hogy Penny, ha 115-ször kopogott?



Penny – az Agymenők sorozatból

3. 🎧 Egy színház nézőterén az első sorban 16 ülőhely van. Minden sorban 3-mal több szék van, mint az előtte levőben.

- a) Hány szék van a 18. sorban?
b) Hányan férnek el összesen a 18 soros színházban?

4. 🎧 Öt egymást követő egész szám összege 245.

- a) Melyik a középső szám?
b) Melyik a legnagyobb szám?

5. 🎧 Egy háromszög belső szögeinek nagysága számtani sorozatot alkot. A differencia 27° . Számold ki a háromszög szögeit!

6. 🎧 Egy háromszög kerülete 36 cm, oldalai számtani sorozatot alkotnak. A differencia 3 cm.

- a) Mekkora a háromszög oldalai?
b) Mekkora a háromszög legnagyobb belső szöge?

7. 🎧 Egy számtani sorozat első két tagja 9 és 16.

- a) Mennyi a számtani sorozat differenciája?
b) Számold ki a sorozat következő négy elemét!
c) Számold ki az első hat tag összegét!

8. 🎧 Egy számtani sorozat harmadik eleme 11, hatodik eleme 20.

- a) Mennyi a sorozat differenciája?
b) Számold ki a sorozat első elemét!

9. 🎧 Egy számtani sorozatra az alábbiak teljesülnek. Számítsd ki a sorozat első három elemét!

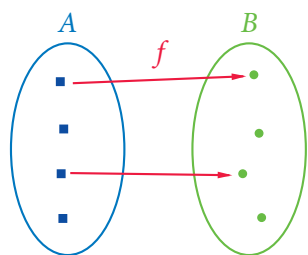
- a) $a_8 = 197$ és $d = 8$
b) $a_{15} = 29$ és $d = -4$
c) $a_5 = \frac{4}{3}$ és $d = \frac{2}{9}$

10. 🎧 Igaz vagy hamis? Indokold az állításodat!

- a) Az 5-tel osztható számok sorozata számtani sorozatot alkot.
b) Egy egész szám osztói növekvő sorrendben felírva számtani sorozatot alkotnak.
c) Ha a 4-re végződő kétjegyű számokat csökkenő sorrendbe írjuk, számtani sorozatot kapunk.
d) A 7-tel osztva 3 maradékot adó számok sorozata számtani sorozatot alkot.

11. 🎧 Egy számtani sorozat egymást követő öt elemének az összege 175. Az egyik tagja 29.

- a) Melyik ez az öt elem?
b) Hány megoldást találtál?



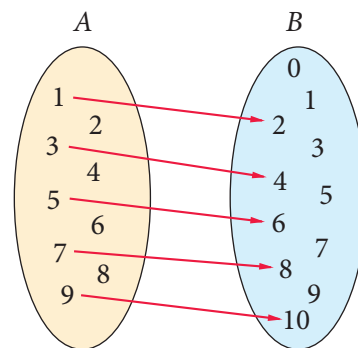
Függvénykapcsolatról akkor beszélünk, ha két halmaz elemei között egyértelmű hozzárendelést létesítünk. Egyértelmű az a hozzárendelés, amely az egyik halmaz minden eleméhez a másik halmaz egy elemét rendeli hozzá.

Alaphalmaz: Az a halmaz, amelynek elemeihez hozzárendelünk elemeket.

Képhalmaz: Az a halmaz, amelyben a hozzárendelt elemek találhatók.

Egy függvény megadása során ismernünk kell az alaphalmazt, a képhalmazt és a **hozzárendelési szabályt**.

Például: Függvényről beszélünk, ha minden pozitív egyjegyű páratlan számhoz hozzárendeljük a nála nagyobb számszomszédját. Legyen az alaphalmazunk a nemnegatív egyjegyű számok halmaza, a képhalmaz a 10-nél nem nagyobb természetes számok halmaza.

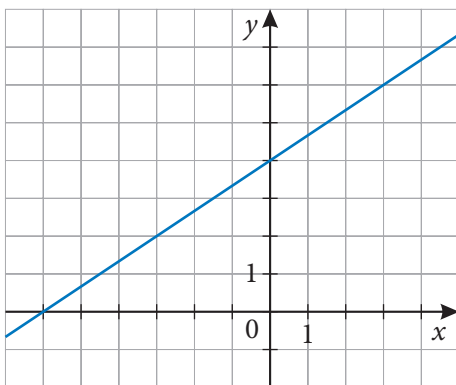


Értelmezési tartomány: Az alaphalmaz azon részhalmaza, amelynek elemeihez rendeltünk képhalmazbeli elemet. Az alaphalmaz és az értelmezési tartomány megegyezhet.

Értékkészlet: A képhalmaz azon részhalmaza, amely csak a hozzárendelt elemeket tartalmazza.

A megadott függvény értelmezési tartománya az $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ halmaz, amely részhalmaza az alaphalmaznak. Az értékkészlet a $\{2; 4; 6; 8; 10\}$ halmaz, ennek minden eleme megtalálható a képhalmazban. A függvényeket sokféle módon megadhatjuk, de leggyakrabban az alábbi módon írjuk fel őket:

- szövegesen: minden számhoz rendeljük hozzá a $\frac{2}{3}$ részénél 4-gyel nagyobb számot;
- képlettel: $f : x \mapsto \frac{2}{3}x + 4$;
- a függvény grafikonjával:



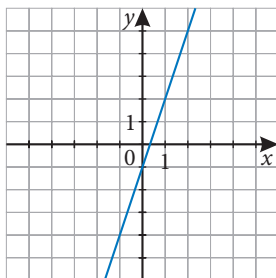
A függvény helyettesítési értéke – vagy röviden **függvényérték** – egy adott számhoz rendelt érték. Ezt a képletbe történő helyettesítéssel is megkaphatjuk.

Például: A 9-hez az f függvény a 10-et rendeli, azaz a 9-nél a függvényérték 10.

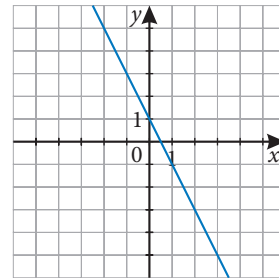
A lineáris függvények grafikonja egyenes (innen származik az elnevezés is). Képlettel megadott hozzárendelési szabálya: $f : x \mapsto mx + b$, ahol az m és a b adott számok.

Az m a lineáris függvény meredeksége. A meredekség megmutatja, hogy mennyit változik a függvény értéke, ha az x értéke 1-gyel nő. Az $m = 0$ különleges eset, ekkor a függvény állandó (konstans).

Ha $m > 0$, akkor a függvény növekedő, például:
 $f : x \mapsto 3x - 1$.



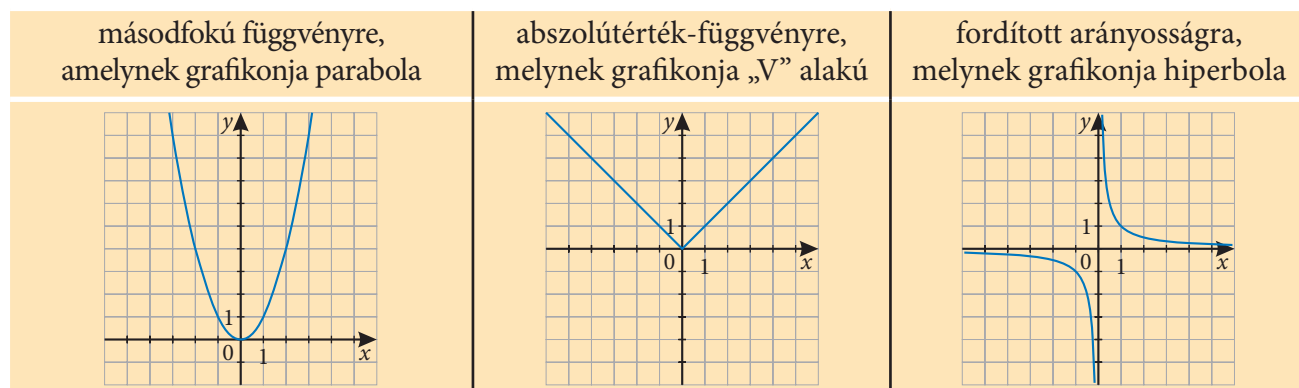
Ha $m < 0$, akkor a függvény csökkenő, például:
 $f : x \mapsto -2x + 1$.



A b értéke megmutatja, hogy az adott lineáris függvény hol metszi az y tengelyt.

Ha $b = 0$, akkor a hozzárendelést egyenes arányosságnak nevezzük. Az egyenes arányosság grafikonja áthalad az origón, például: $f : x \mapsto \frac{5}{7}x$.

A nem lineáris függvények közül láthattunk példát:



Ezen kívül sokféle függvénykapcsolat létezik, amely sok esetben képlettel sem írható le.

A függvények grafikonjának ábrázolásához nagyon jól használható a www.geogebra.org oldalon található *GeoGebra* program.

Újra találkoztunk adatokkal, adatok ábrázolásával, grafikonokkal. Meghatároztuk adatok középtértekeit, azaz mediánját, móduszát, átlagát. Átlag alatt számtani közepet értettünk.

Kiszámoltuk események gyakoriságát, relatív gyakoriságát és beszéltünk események valószínűségéről is. Egy A esemény valószínűségét P betűvel jelöljük, és így írjuk le: $P(A)$.

A lehetetlen esemény valószínűsége 0, azaz $P(\emptyset) = 0$.

A biztos esemény valószínűsége 1, azaz $P(I) = 1$.

Tetszőleges A eseményre igaz, hogy $0 \leq P(A) \leq 1$.

Meghatároztuk egyszerű események valószínűségét klasszikus valószínűségi modell esetén.

Ha egy kísérletnek véges sok lehetséges kimenetele van, és az elemi események valószínűsége egyenlő, akkor klasszikus valószínűségi modelltől beszélünk. Klasszikus valószínűségi modell esetén egyszerű módszerünk van egy A esemény valószínűségének kiszámítására

1. Számláljuk meg, hogy hány elemi esemény fordulhat elő összesen! Ez lesz az összes eset száma.
2. Számláljuk meg, hogy ezek között hány esetben következik be az A esemény! Ez lesz a kedvező esetek száma.
3. $P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$

Vigyázz! A képlet csak klasszikus valószínűségi modell esetén működik!

A számsorozatok olyan speciális függvények, amelyeknek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza.

A **számtani sorozat** olyan számsorozat, amelyre igaz, hogy szomszédos tagjai ugyanolyan „távol” vannak egymástól, azaz bármely két szomszédos elem különbsége állandó: $a_n - a_{n-1} = d$. Ezt az állandót differenciának nevezzük.

Ha az adott sorozat számtani sorozat, akkor a Gauss-módszer segítségével gyorsan összeadhatjuk a sorozat első n darab elemét.

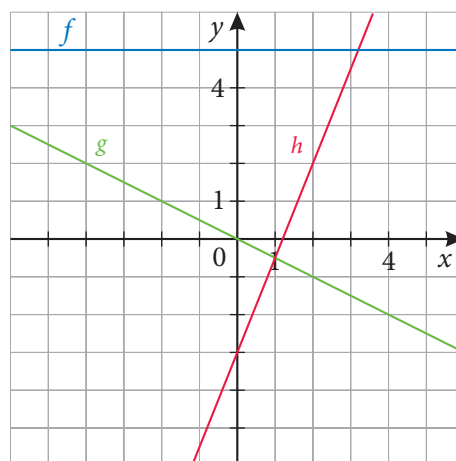
FELADATOK

1. 📻 Döntsd el, melyik állítás igaz! A hamis állításokat tedd igazzá!

- a) 1200 Ft-ért 5 kg őszibarackot vásárolhatunk. Ha a barack feleannyiba kerülne, akkor ugyanannyi pénzből kétszer annyit vásárolhatnánk.
- b) Egy irodaház takarítását egy 6 fős takarítócég 4 óra alatt tudja kitakarítani. Ha a dolgozók felét máshova küldik munkát végezni, akkor a többiek feleannyi idő alatt végeznek a takarítással. (Feltételezzük, hogy mindenki ugyanolyan intenzitással dolgozik.)
- c) Ha négy pohár limonádé elkészítéséhez 1 liter vízre van szükség, akkor 3 liter víz 7 pohár limonádéhoz elegendő.
- d) 1500 db almát dobozokba csomagolnak, és minden dobozba 24 db alma kerül. Ha háromszor annyi almát tennének egy dobozba, akkor harmadannyi dobozt kell felhasználni.
- e) Ha egy autó fél óra alatt 55 km-t tesz meg az autópályán, akkor két óra alatt 200 km-t tud megtenni (Feltételezzük, hogy az autó egyenletes tempóban halad.)

2. 📻 Határozd meg az ábrán látható függvények hozzárendelési szabályait!

- a) Mekkora a h függvény meredeksége?
- b) Hol metszi a h függvény az y tengelyt?
- c) Melyik függvény csökkenő?



3. 🎧 Ábrázold a következő függvényt koordináta-rendszerben, majd válaszolj a kérdésekre a grafikon alapján!

$$f: x \mapsto \frac{1}{3}x - 2$$

- Az f hozzárendelés melyik számot rendeli hozzá a (-3) -hoz?
- Melyik számhoz rendeli hozzá a 0 -t?
- Mely x számokhoz rendel pozitív számokat?
- Mely számokhoz rendelt hozzá 1 -nél kisebb számokat?

4. 🎧 Ábrázold az $f: x \mapsto x + 1$ és a $g: x \mapsto |x| - 1$ függvényeket közös koordinátarendszerben!

- Oldd meg grafikusán az $|x| - 1 = x + 1$ egyenletet!
- Milyen x értékekre teljesül $|x| - 1 \leq x + 1$ egyenlőtlenség. Ábrázold a megoldást számegyenesen!

5. 🎧 Ábrázold a megadott függvényeket! Ha szükséges, készíts értéktáblázatot az ábrázoláshoz!

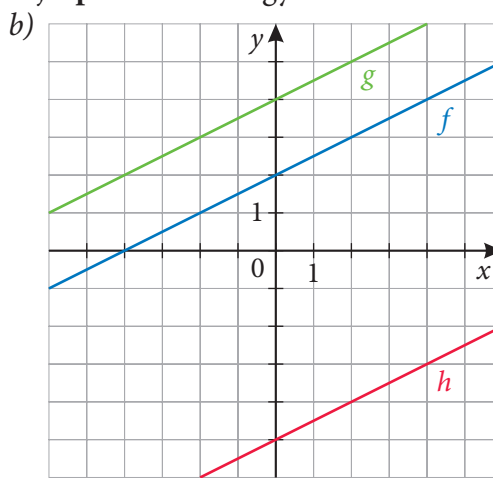
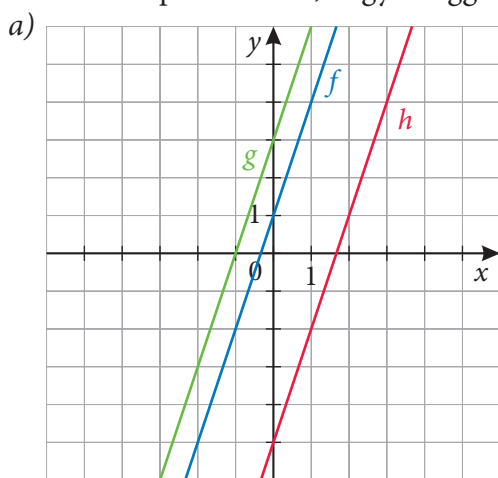
- Minden számhoz rendeljük hozzá a kétszeresénél hárommal nagyobb számot!
- Minden számhoz rendeljük hozzá az ellentettjét!
- Minden számhoz rendeljük hozzá az ötödének az ellentettjét!

Írd fel a függvények hozzárendelési szabályát!

6. 🎧 Ábrázold a megadott függvényeket közös koordináta-rendszerben!

$$f(x) = 2x - 3; \quad g(x) = 3x - 3; \quad h(x) = \frac{1}{3}x - 3$$

7. 🎧 Határozd meg az alábbi függvények hozzárendelési szabályát! Ha szükséges, készíts táblázatot! Mi utal a képletben arra, hogy a függvények grafikonjai **párhuzamos** egyenesek?



8. 🎧 Megadtuk a lineáris függvények két jellemzőjét.

- Ábrázold a függvényeket koordináta-rendszerben!
- Írd fel a függvények hozzárendelési szabályát!

$$f \text{ függvény: } m = 2; \quad y \text{ tengelyt metszi: } y = 3 \quad g \text{ függvény: } m = -\frac{3}{2}; \quad y \text{ tengelyt metszi: } y = 2$$

9. 🎧 Ábrázold az $f: x \mapsto |x|$ függvényt!

a) Mekkora a függvény értéke a következő helyeken:

$$x = -4;$$

$$x = 0;$$

$$x = 3,5;$$

$$x = \frac{5}{2};$$

$$x = -\frac{5}{3}?$$

b) Milyen x értékek esetén lesz a függvény értéke

$$2; \quad 5,6; \quad 0; \quad -3?$$

10. 🎧 Oldd meg grafikusán az alábbi egyenleteket!

a) $\frac{1}{2}x + 3 = |x|$

b) $-\frac{1}{2}x + 5 = |x| + 2$

c) $x^2 - 2 = x$

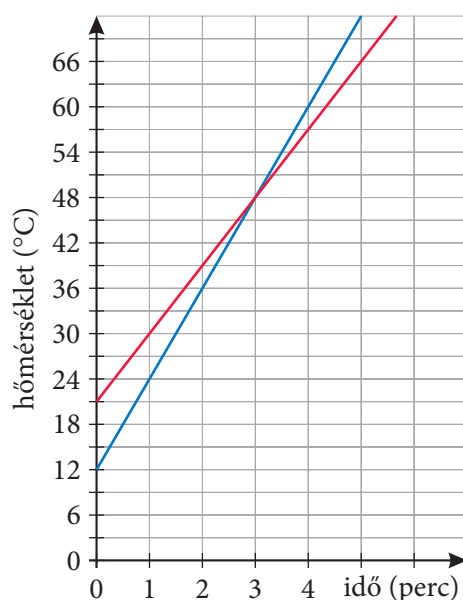
11. 🎧 Fizikaórán a hőmérséklet-változást vizsgálják a tanulók. Két csoport különböző hőmérsékletű vizet kap. Az I. csoport 12°C -os, a II. csoport 21°C -os vizet kezd el melegíteni. Az I. csoport vízmelegítője nagyobb teljesítményű, így az általuk melegített víz percnként 12°C -kal, míg a II. csoporté csak percnként 9°C -kal melegszik. A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre!

a) Mennyi lesz a víz hőmérséklete az egyes csoportoknál 2 perc elteltével?

b) Mikor lesz a víz hőmérséklete 60°C ?

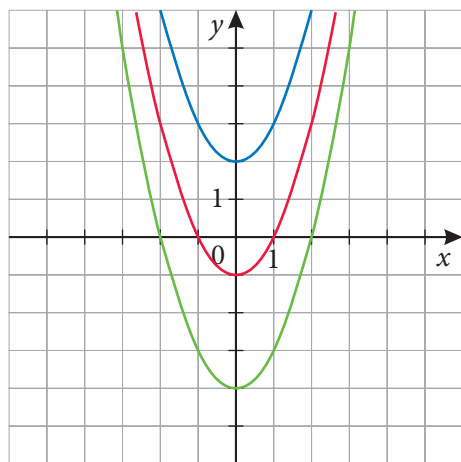
c) Mikor lesz a víz hőmérséklete azonos a két csoportnál?

d) A mérés kezdetétől számítva mikor lesz a két csoportnál a víz hőmérsékletek különbsége 6°C ?

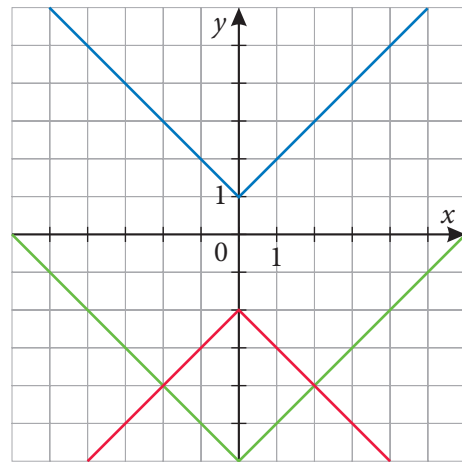


12. 🎧 Melyek tartoznak össze?

Párosítsd a képletet a függvény grafikonjával!



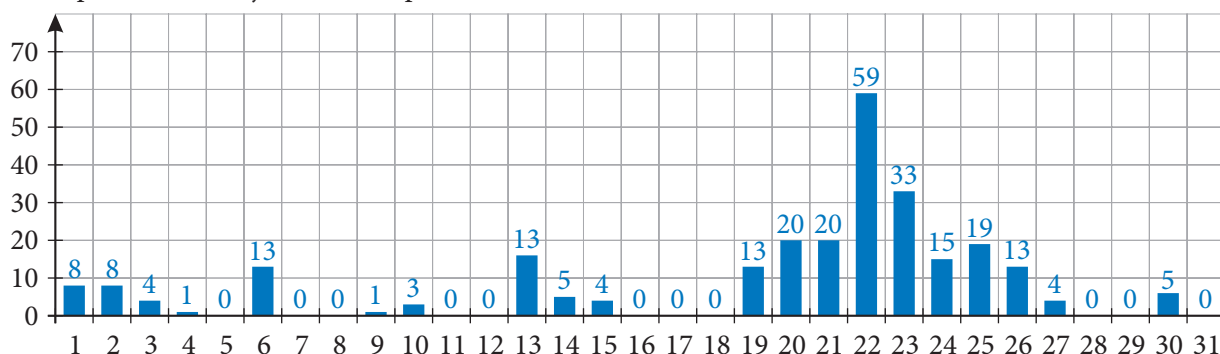
$$f: x \mapsto x^2 + 2; \quad g: x \mapsto x^2 - 4; \quad h: x \mapsto x^2 - 1$$



$$f: x \mapsto |x| + 1; \quad g: x \mapsto |x| - 6; \quad h: x \mapsto -|x| - 2$$

13. Egy Magyarországon működő amatőr meteorológiai mérőállomás többek között a napi csapadékmennyiséget is méri. Az itt látható grafikonon a csapadék mennyiségét mm-ben adták meg. Válaszoljatok az alábbi kérdésekre a grafikon alapján! (Az adatok a www.amsz.hu honlapról származnak.)

Csapadék 2015 májusában – Napi maximum



- Hány napon esett eső májusban?
- Mennyi volt a legnagyobb napi csapadékmennyiség?
- Összesen hány mm csapadék hullott ebben a hónapban?
- Véleményed szerint ez több vagy kevesebb, mint az éves adatok alapján számított havi átlagos csapadékmennyiség?

14. A játszótéren Matyi, Helénke és Anna egy labdát dobált a képen látható tölcserbe. Mindegyikük választott egy ágot, és beállt alá. Ha nála gurult ki a labda, legközelebb ő dobhatta be.

- Melyik táblázat mutathatja a dobásaik számát?
- Mire gyanakodnál, ha az A táblázat mutatná a dobásszámokat?

A:

Anna	Heléna	Matyi
66	32	22

B:

Anna	Heléna	Matyi
22	68	30

C:

Anna	Heléna	Matyi
38	37	45



15. Add meg a következő események valószínűségeit! Egy szabályos dobókockát egyszer feldobva

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| a) 6-ost dobunk; | b) 1-est dobunk; |
| c) páratlan számot dobunk; | d) prímszámot dobunk; |
| e) négyzetszámot dobunk; | f) 6-nál kisebbet dobunk; |
| g) 7-nél kisebbet dobunk; | h) 7-est dobunk. |

16. Zsiga tolltartójában van két kék toll és öt fekete ceruza, de ezek közül kettőnek ki van törve a hegye. Van még egy kék és egy piros ceruza is benne, amelyek szépen ki vannak hegyezve. Ha véletlenszerűen választ ki egy íróeszközt, akkor mi a valószínűsége, hogy az

- a) toll;
- b) ceruza;
- c) fekete ceruza;
- d) fekete ceruza, amelyikkel írni is tud.
- e) Ha tapintással érzi, hogy épp egy ceruzát fog, akkor mi a valószínűsége, hogy írni tud vele?

17. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első negyven pozitív egész közül egyet véletlenül kiválasztva a szám

- a) osztható lesz 2-vel;
- b) osztható lesz 3-mal;
- c) osztható lesz 5-tel;
- d) prímszám lesz;
- e) összetett szám lesz?
- f) Miért nem 1 a d) és e) feladatban kapott számok összege?

18. A szecsuáni síncsiszoló sínt csiszol Szecsuánban. A csiszolás nehéz munka, és a csiszológép is túlmelegszik, ha sokáig használják, úgyhogy minden órában 40 percig dolgozik és 20 percig pihen. Mi a valószínűsége, hogy amikor a főnöke ellenőrizni megy, akkor éppen pihen?



19. Viktor két kedvenc száma az 5 és a 7. Ha kitölt egy ötöslottó-szelvényt, és persze bejelöli a kedvenc számait is, akkor

- a) az 5 és a 7 közül melyik szám kihúzásának van nagyobb esélye?
- b) hány olyan 90-nél kisebb szám van, amelyekben csak 5-ös vagy 7-es számjegy szerepel?
- c) ha csak olyan számokat húztak ki, amelyekben csak 5-ös vagy 7-es számjegy szerepel, akkor mi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok között szerepel az 5 és a 7 is?

20. Az osztályban kisorsolnak egy gyereket, aki az osztály papagájait eteti szeptemberben. Annak a valószínűsége, hogy lányt sorsolnak ki, $\frac{3}{4}$ -e annak a valószínűségnek, hogy fiút sorsolnak ki. Mekkora a lányok és a fiúk aránya az osztályban?



21. Válaszd ki, melyik lehet számtani sorozat az alábbiak közül! Indokold meg választásodat! Add meg a számtani sorozat differenciáját!

a) 25; 48; 25; 48; ...

b) 13; 23; 23; 43; ...

c) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots$

d) 13; 3; -7; -17; ...

e) $\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 1; \dots$

22. A következő számtani sorozatokban határozd meg az első négy tag és a differencia közül azokat, melyek nincsenek megadva!

a) $a_1 = 2; \quad d = 7;$

b) $a_1 = 12; \quad d = -4$

c) $a_1 = -13; \quad a_2 = -9; \quad a_3 = -5$

d) $a_3 = 1,6; \quad d = -0,3$

23. Egy táncversenyen sorszámokat osztanak minden versenyzőnek. Réka megfigyelte, hogy az első sorszám a kettős, a többi pedig minden harmadik ezt követő természetes szám. Réka azt is észrevette, hogy a legutolsó szám a 100-nál nagyobb, hozzá legközelebb eső ilyen szám.

a) Melyik volt az utolsó sorszám, amit kiosztottak?

b) Hány sorszámot osztottak ki?

c) A nézők között annyi karkötőt sorsoltak ki, amennyi a versenyzők sorsszámának összege. Hány karkötő került kisorsolásra?

24. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egy számtani sorozat három egymást követő eleme. Kerülete 56 cm-rel nagyobb, mint a hosszabb befogó.

a) Mekkora a háromszög oldalai?

b) Mekkora a háromszög területe?

25. A karácsonyi könyvvásárrban könyvekből készítettek fenyőfát a könyvesbolt díszítéséhez. A legelső sorban 25 db könyv volt, és minden sorban 4-gyel kevesebb, mint az alatta levőben. A lehető legmagasabb „díszkarácsonyfát” építették meg.

a) Hány szintes volt a könyvkarácsonyfa?

b) Hány könyvet kellett felhasználni?

c) Úgy válogattak könyveket az építéshez, hogy mindegyik könyv 19,5 cm-es legyen. Milyen magas volt a „karácsonyfa”?

KUTATÓMUNKA

Készíts sorozatot a következő szabály szerint. Válassz egy tetszőleges pozitív egész számot, ez lesz a_1 , a sorozat első eleme. Ha páros, oszd el kettővel, ha páratlan, szorozd meg hárommal és adj hozzá egyet, ez lesz a sorozat következő eleme, és így tovább, folytasd addig, amíg 1-et nem kapsz. Ha 5-tel kezdjük, akkor az 5, 16, 8, 4, 2, 1 sorozatot kapjuk. Ha 3-mal kezdjük, akkor a 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 sorozatot.

a) Készítsd el a 7-tel kezdődő sorozatot! b) Készítsd el a 9-cel kezdődő sorozatot!

c) Készítsd el a 11-gyel kezdődő sorozatot! d) Tegyé fel egy kérdést a sorozattal kapcsolatban!

Keress rá az interneten a Collatz szóra! Erdős Pál 500 dollár jutalmat tűzött ki a Collatz-sejtés bizonyításáért.

Gazsinak határozott elképzelései voltak a jövőjéről, így bátran vette fel a headsetet. ...És nem csalódott!

Ide először egy egyszerű kontyolt tetőt tervezett az építész, de meggyőztem, hogy legyen valami kicsit összetettebb, mutatósabb alakzat...

...úgyhogy rádobjuk még ezt a kupolát. Mondjuk már maga a kilátás is megéri!

Helló, srácok!

Változnak az idők... és a módszerek is. De az ember terjeszkedik.

...és épít

wáó, ez de király!

VI. Felszín, térfogat

Nos, amit készítünk, nem éppen maradandó.

Cukrászatunk kisszerűs süteményeket készít. Gondoltatok volna, hogy egy átlagos 12 szeletes tortát 32 dkg 40x30 cm-es, 3 mm vastagra nyújtott marcipánnal lehet beborítani?

Szerinted a 16 szeleteshez mekkora lapra van szükség? Gyakori kérdés ez. A recept arányait a rendelés szerint kell alakítsuk. A rugalmasság a fő erényünk.

Remélem, nekem nem kell minden nap olyan magasra mászkálnom..., de én is alkotni szeretnék. Valami maradandót létrehozni!

Mindig is gyűlöltem a háborút. Szerencsére a pár évvel ezelőtti Világegység Találkozó óta a katonaságnak már csak rendfenntartó szerepe van. Rengeteget utazom, járjuk a világot, mindenféle tudományos projektben segítünk, térképészeti feladatokat látunk el, geológiai vizsgálatokat végzünk.

Nem is hinnétek, mennyit képes változtatni az ember a világon.

Gyönyörű végső, százados, nagyon köszönöm a bemutatkozást!

El kell búcsúzzunk, jön a következő osztály. Vigyázzon magára!

Ne már, tanárnő, pont most kezd izgi lenni!

És még a nyerő számokat se kértük el. Tanárnő, elosztjuk!

Sajnos vége az órának.



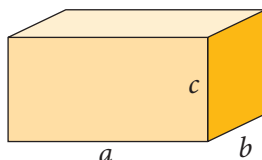
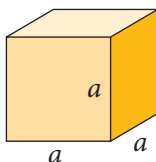
A különböző tárgyak különböző méretű helyet foglalnak el a környezetünkben. Sok esetben fontos lehet annak eldöntése, hogy melyik mennyivel foglal el nagyobb helyet a másiknál. Az ilyen kérdések megválaszolása a tárgyak térfogatának meghatározása után történhet. Előfordulhat az is, hogy egy tárgy felületének nagyságát kell ismernünk. Ha például le akarunk festeni vagy be szeretnénk csomagolni valamit, akkor a felszínének a nagyságát kell ismernünk.

Az előző években megismertük, hogyan lehet kiszámolni néhány speciális test felszínét, illetve térfogatát. Összegyűjtöttük ezeket a testeket, és a felszínük, illetve a térfogatuk kiszámítására szolgáló képleteket:

Téglatest

felszíne: $A = 2(ab + ac + bc)$,

térfogata: $V = abc$.



Kocka

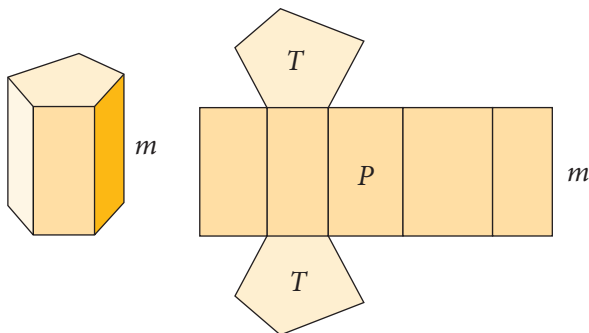
felszíne: $A = 6a^2$,

térfogata: $V = a^3$.

Hasáb

felszíne: $A = 2T + P$, ahol T az alaplappal, P a palást területe,

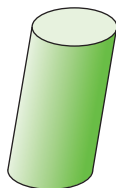
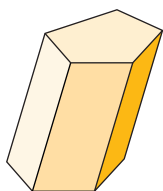
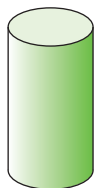
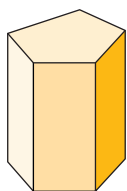
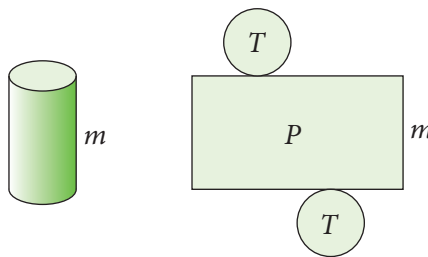
térfogata: $V = Tm$, ahol T az alaplappal területe, m a hasáb magassága.



Henger

felszíne: $A = 2T + P = 2r^2\pi + 2r\pi m = 2r\pi(r + m)$, ahol T az alaplappal, P a palást területe, r az alapkör sugarának hossza, m a henger magassága,

térfogata: $V = Tm = r^2\pi m$, ahol T az alaplappal területe, m a hasáb magassága, r az alapkör sugarának hossza.



egyeses hasáb egyeses henger ferde hasáb ferde henger

A hasáb és a henger alaplappalait eltolással fedésbe hozhatjuk. Ha az eltolás vektora merőleges az alaplappal síkjára, akkor egyenes hasábról és egyenes hengerről beszélünk. Egyébként a *ferde* jelzőt használjuk ezeknek a testeknek az elnevezésére. Ha nem mondunk jelzőt, akkor egyenes hasábra és egyenes hengerre gondolunk.

FELADATOK

1. 📡 Rajzolj halmazábrát a következő címkékkel: sokszöglapokkal határolt testek, kockák, hasábok, testek, téglatestek!

2. 📡 Az egyik téglatest éleinek hossza a , b és c , a másiké x , y és z . Hasonlítsd össze a felszínüket és a térfogatukat! Melyik és mennyivel nagyobb? Melyik és hányszor nagyobb?

a) $a = 12$ cm, $b = 4$ dm, $c = 10$ cm,

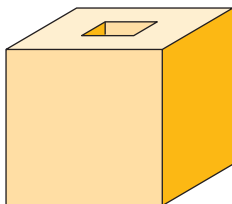
$x = 25$ cm, $y = 3$ dm, $z = 80$ mm

b) $a = 16$ cm, $b = 50$ mm, $c = 0,5$ dm,

$x = 100$ mm, $y = 0,4$ dm, $z = 4$ cm

3. 📡 Egy kocka felszínét cm^2 -ben, térfogatát cm^3 -ben adtuk meg. Hány centiméter a kocka éle, ha felszínének és térfogatának mérőszáma ugyanaz?

4. 📡 Egy 12 cm élű kockát egyik lapjára merőlegesen átfúrtunk. A keletkezett lyuk egy 4 cm-szer 4 cm-es keresztmetszetű, négyzetes oszlop. Mennyivel változott a kocka felszíne és térfogata a lyukasztás után?



5. 📡 Tervezd meg annak a trapéz alapú hasábnak a hálóját, amelyiknek az alaplappja húrtrapéz, a húrtrapéz párhuzamos oldalainak a hossza 1 cm és 3 cm, a trapéz magassága 2 cm, a hasáb magassága pedig 4 cm!

a) Mekkora a hasáb térfogata?

b) Mekkora a hasáb felszíne?

6. 📡 A köbméterenként 3 tonna tömegű bazaltzúzalékból épített vasúti töltés keresztmetszete olyan szimmetrikus trapéz, melynek két párhuzamos oldala 2,2 és 3,2 méter, magassága 50 cm. Hány tonna szükséges egy 600 m hosszú rakodóvágány megépítéséhez?

7. 📡 Egy henger palástját egy 15 cm-szer 10 cm-es lapból alakítjuk ki. A téglalap egyik rövid oldala mentén egy 1 cm széles sávot ragasztóval kenünk be, és ezt a sávot használjuk az összeillesztésre.

a) Mekkora sugarú köröket kell kivágni az alaplapoknak?

b) Mekkora a felszíne az így kapott hengernek?

c) Mekkora a térfogata az így kapott hengernek?

8. 📡 A henger alakú csokoládéérméket egy oszlopba rendezve, szabályos hatszög alapú, hasáb alakú dobozban árusítják. A hatszög oldalainak hossza 2 cm, a hasáb magassága 14,4 cm. A csokoládéérmék magassága 9 mm.

a) Mennyi lehet egy érme térfogata?

b) A doboz hány százalékát foglalhatja el a csokoládé?

c) Mekkora a doboz felszíne?



9. 📡 Milyen magas lehet az az 1 literes kancsó, amelynek a belső keresztmetszete egy 8 cm oldalú négyzet?

10. 📡 Egy fazék aljáról leolvastuk, hogy 8 liter az űrtartalma. A magasságát 26 cm-nek mértük. Mekkora az alapkörének a sugara?

11. 📡 Két henger térfogata egyenlő. Az egyik alapkörének a sugara kétszer akkora, mint a másiké. Milyen kapcsolat van a magasságaik között?

A természetben és épített világunkban rendkívül változatos alakzatokat találunk. Ezek egy csoportját alkotják a **gúlák**.



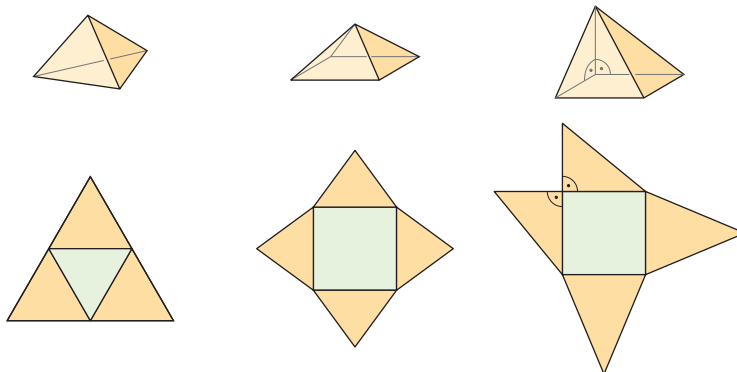
Végy fel egy sokszöget a határvonalával, és egy olyan pontot, amelyik nem illeszkedik a sokszög síkjára! Kösd össze ezt a pontot a sokszög minden csúcsával! Így egy gúla élvázát kaptad.

A sokszöget a gúla **alaplajjának**, a háromszögeket a gúla **oldal-lapjainak** nevezzük. Az oldallapok együttesen a gúla **palást-ját** alkotják. Az alaplap oldalai az **alapélek**, két szomszédos oldallap az **oldalél**ben metszi egymást. A háromszögek közös csúcsának az alaplaptól vett távolsága a **gúla magassága**.

A háromszög alapú gúlát **tetraédernek** nevezzük.

A tetraédert négy háromszög határolja. Ha mind a négy háromszög szabályos, akkor **szabályos tetraéderről** beszélünk.

Megadtuk néhány gúla hálóját. Ha ezeket kartonpapírból kivágnád, és ragasztófüleket is terveznél rájuk, akkor összeállíthatnád belőlük a gúlákat.



A **gúlák felszínét** az alaplap és a palást együttes területe adja: $A = T + P$.

1. PÉLDA

Egy 3,4 méter oldalhosszúságú, négyzet alakú sarokszobára önálló tetőt terveztek. A tető gúla alakú, az oldalélei 4 m hosszúak. Hány darab cserepet fognak felhasználni a befedéséhez, ha 1 m²-re 20 db-bal kell számolnunk?

Megoldás

A gúla palástjának területét kell meghatároznunk, amely négy egybevágó, egyenlő szárú háromszögből áll. Egy ilyen háromszög minden oldalának hosszát ismerjük.

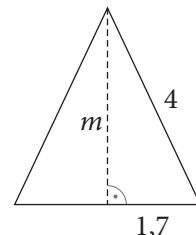
A háromszög magasságát Pitagorasz-tétellel számítjuk ki:

$$m = \sqrt{4^2 - 1,7^2} \approx 3,6 \text{ (m)}.$$

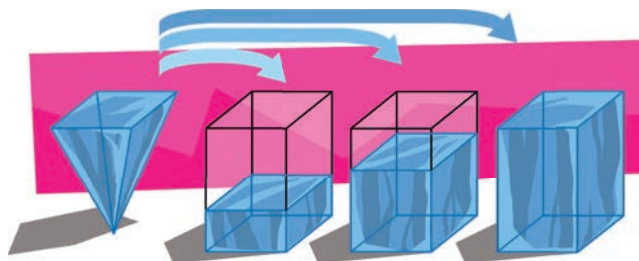
$$\text{A háromszög területe: } t = \frac{3,4 \cdot 3,6}{2} = 6,12 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Ennek a területnek a négyszeresét, vagyis $24,48 \text{ m}^2$ -t kell befedni. Mivel négyzetméterenként 20 db cserépre van szükség, ezért összesen $24,48 \cdot 20 = 489,6 \approx 490$ db cserép szükséges.

Természetesen a vágások, összeillesztések miatt a tető befedéséhez ennél valamennyivel több cserépet kell vásárolni.



A képen látható kísérlet azt mutatja, hogy ha a gúlát háromszor megtöltjük folyadékkal, majd annak tartalmát beleöntjük a hasábkba, akkor az éppen megtelik. A hasáb térfogata háromszorosa az ugyanolyan alapterületű és magasságú gúla térfogatának.



A **gúlák térfogatát** a következő képlet adja meg: $V = \frac{Tm}{3}$, ahol T az alaplaj területét, m a gúla magasságát jelenti. A képlet bizonyítható, de mi a tapasztalat alapján egyszerűen csak elfogadjuk és használjuk.

2. PÉLDA

A PamPyra nevű térbeli játék négy szabályos tetraéderből és hat négyzet alapú gúlából áll. Mindkét test mindegyik éle 5 cm-es. Szeretnénk elkészíteni a játék tartós változatát égethető gyurmából. A szabályos tetraéder magasságát milliméter pontossággal megmértük, ami 4,1 cm volt. Mennyi gyurmára lesz szükségünk?

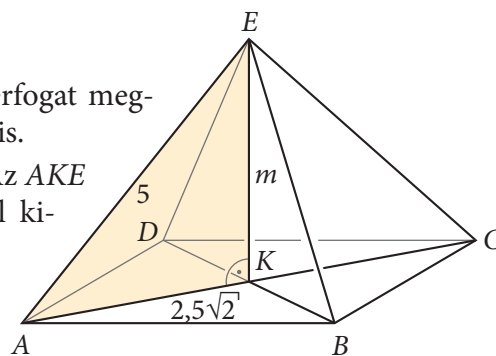
Megoldás

A négyzet alapú gúla alaplajának területe: 25 cm^2 . A térfogat meghatározásához azonban ismernünk kell a gúla magasságát is.

Tudjuk, hogy a négyzet átlója $5\sqrt{2}$, ezért $AK = 2,5\sqrt{2}$. Az AKE derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel segítségével kiszámítjuk, hogy:

$$m = \sqrt{5^2 - (2,5\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 - 12,5} = \sqrt{12,5} \approx 3,5 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Vagyis a gúla térfogata: } V_1 = \frac{25 \cdot 3,5}{3} \approx 29,2 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



A szabályos tetraéder alaplapja szabályos háromszög, ezért a területe a tanult képlet alapján: $\frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 10,8 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Természetesen a Pitagorasz-tétellel akkor is meghatározható a háromszög magasságát, és kiszámítható a szabályos háromszög területét, ha a képletet elfelejtetted. A mérés szerint a tetraéder magassága 4,1 cm.

Vagyis a szabályos tetraéder térfogata: $V_2 = \frac{10,8 \cdot 4,1}{3} \approx 14,8 \text{ (cm}^3\text{)}.$

Tehát a szükséges gyurma mennyisége: $6 \cdot V_1 + 4 \cdot V_2 = 6 \cdot 29,2 + 4 \cdot 14,8 = 234,4 \text{ (cm}^3\text{)}.$



FELADATOK

1. A 6 cm-es alapélű, négyzet alapú gúla minden oldallapjának magassága 8 cm. Mekkora a felszíne?

2. A 8 cm-szer 12 cm-es, téglalap alapú gúla magassága 15 cm. Mekkora a térfogata?

3. Egy négyzet alapú gúla minden oldaléle egyenlő hosszúságú. Add meg a gúlák felszínét és térfogatát az a alapél és a b oldalél hosszának ismeretében!

a) $a = 8 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$

b) $a = 14 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$

4. Egy téglalap alapú gúla minden oldaléle egyenlő hosszúságú. Add meg a gúlák felszínét és térfogatát az a és b alapél, valamint a c oldalél hosszának ismeretében!

a) $a = 8 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, $c = 18 \text{ cm}$

b) $a = 14 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$, $c = 28 \text{ cm}$

5. A 2. példában szereplő játék négyzet alapú gúláinak lapjai piros, zöld, sárga és kék színűek. A négyzet színe mindig sárga. Hányféleképpen lehet kiszínezni a gúlákat, ha

a) a háromszögek különböző színűek;

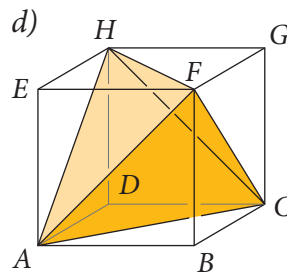
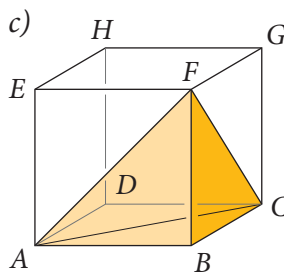
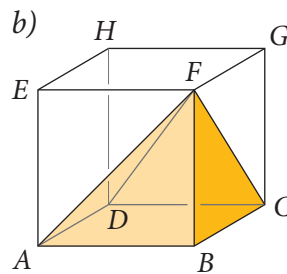
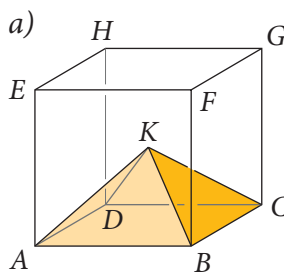
b) a háromszögek között pontosan két piros van, amelyek szomszédosak, és a további kettő különböző színű;

c) a háromszögek között pontosan két azonos színű van, amelyek szomszédosak, és a további kettő ezektől eltérő és különböző színű;

d) a háromszögek között pontosan két piros van, amelyek nem szomszédosak, és a további kettő különböző színű;

e) a háromszögek között pontosan két azonos színű van, amelyek nem szomszédosak, és a további kettő ezektől eltérő és különböző színű;

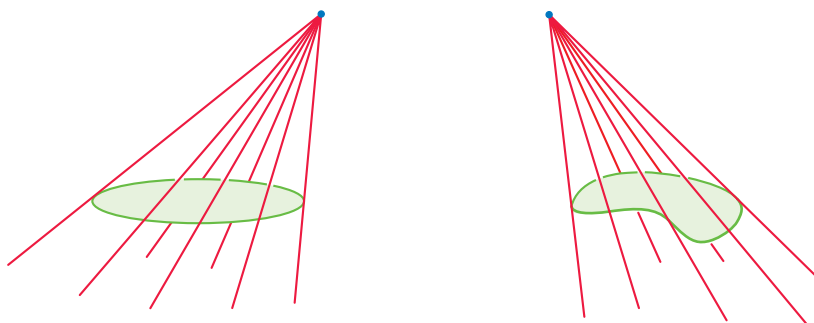
6. 12 cm élhosszúságú kockákba egy-egy gúlát írtunk. Add meg a gúlák felszínét és térfogatát!



Képzeld el, hogy egy derékszögű háromszöget megforgatsz az egyik befogója körül! Ekkor az átfogója és a másik befogója egy **kúp**ot rajzol le a térben. Mivel forgatással hoztuk létre, ezért ennek a kúpnak **forgáskúp** a neve.

Egy másik lehetőség:

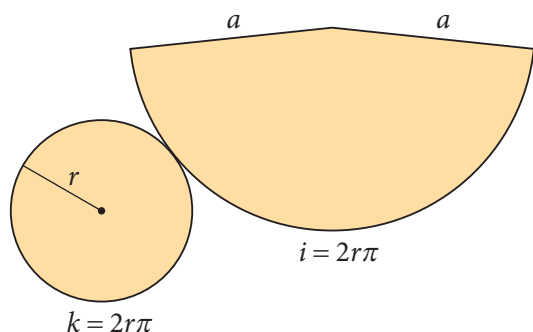
Veszel egy körlapot és egy a kör síkjára nem illeszkedő pontot. Ha a pontot a körvonal minden pontjával összekötöd, akkor is kúpot kapsz. Az így kapott kúp csak akkor lesz forgáskúp, ha a pont és a kör középpontját összekötő egyenes merőleges a kör síkjára.



Ha a kiinduló lap nem kör, akkor kúpszerű test jön létre. Figyeld meg! A gúlák is a kúpszerű testek közé tartoznak!

Ebben a leckében a forgáskúpokkal foglalkozunk, amelyeket röviden csak kúpoknak nevezünk majd.

A kúpoknál a körlap neve **alapláp**, a görbe felületé **palást**. A kúpnak nincs éle, de van egy **csúc**s. A csúc és az alaplap távolságát a kúp **magasság**ának nevezzük. A csúcsot az alaplap (alapkör) határvonalának bármely pontjával összekötve alkotót kapunk.



Mivel a kúp magassága, az alaplap sugara és a kúp alkotója derékszögű háromszöget határoz meg, ezért a három adat közötti kapcsolatot a Pitagorasz-tétellel adhatjuk meg:

$$a^2 = r^2 + m^2.$$

1. PÉLDA

A motoros kotrógépekkel kitermelt homok kúp alakú. Egy ilyen homokhegy 350 m^2 alapterületű, és a csúcsa 14 méterre van a szélétől. Milyen magas egy ilyen homokhegy?

Megoldás

Az alapkör területének ismeretében megmondhatjuk a kör sugarának hosszát:

$$r^2 = \frac{350}{\pi}, \text{ vagyis } r \approx 10,6 \text{ m.}$$

Az alkotó és a sugár ismeretében megadható a magasság. Ha $a^2 = r^2 + m^2$, akkor $m^2 = a^2 - r^2$ és $m = \sqrt{14^2 - 10,6^2} \approx 9,1 \text{ (m)}$. Vagyis a homokhegy körülbelül 9,1 méter magas.



A **kúp felszíne** az alaplap és a palást területének összegével egyenlő:

$$A = T + P.$$

A palást egy körcikk, a körcikk területe pedig a csúcsánál található szög nagyságától függően meghatározható abból, hogy az azonos sugarú körnek hányadrésze.

A **kúp felszíne** ezzel a képlettel számolható ki:

$$A = r^2\pi + r\pi a = r\pi(r + a).$$

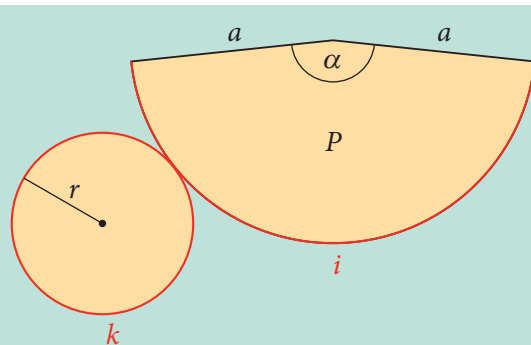
Érdekességgként megmutatjuk, hogyan kapjuk meg általános esetben a kúp felszínképletét:

A körcikket határoló két sugár közötti szög legyen α , a körcikk sugara (a kúp alkotója) pedig a . A körcikk ívhosszának és a kör kerületének aránya az $\frac{\alpha}{360^\circ}$ aránnyal lesz egyenlő. A körcikk területének és a kör területének az aránya is ennyi.

$$\text{Vagyis } \frac{i}{2a\pi} = \frac{P}{a^2\pi}, \text{ amiből } P = \frac{i \cdot a}{2}.$$

Ezt felhasználjuk a kúp felszínének kiszámításánál, hiszen $i = 2r\pi$.

$$A = T + P = r^2\pi + \frac{i \cdot a}{2} = r^2\pi + \frac{2r\pi \cdot a}{2} = r^2\pi + ar\pi = r\pi(r + a).$$



2. PÉLDA

Egy kúp palástja egy $a = 6$ cm sugarú félkör. Mekkora az alaplap sugara? Mekkora a kúp felszíne?

Megoldás

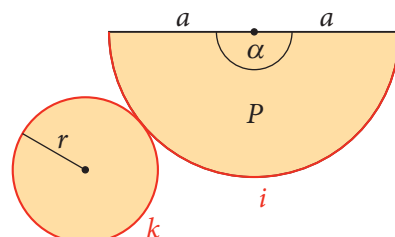
A 6 cm sugarú félkör területe: $P = \frac{6^2 \pi}{2} = 18\pi$ (cm²).

A félkör körívének hossza egyenlő a kúp alapkörének a kerületével: $k = \frac{2 \cdot 6 \cdot \pi}{2} = 6\pi$ (cm).

Így megkaphatjuk az alapkör sugarának hosszát: $r = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$ (cm).

Ezek alapján az alapkör területe: $T = 3^2 \cdot \pi = 9\pi$ (cm²).

A kúp felszíne: $A = T + P = 9\pi + 18\pi = 27\pi \approx 84,8$ (cm²).

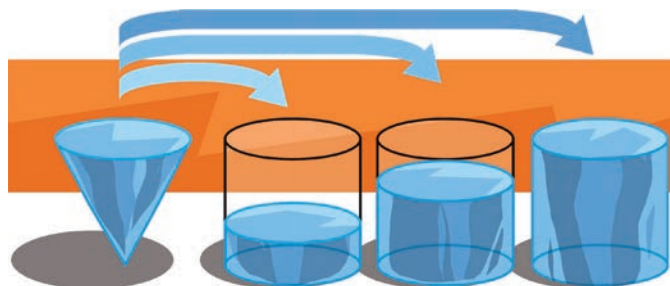


A kúp térfogatának meghatározásához is a rajzon látható kísérletet mutatjuk. A megfigyelhető összefüggést a gúlákhöz hasonlóan itt sem bizonyítjuk, de használjuk.

A henger térfogata háromszorosa az ugyanolyan alapterületű és magasságú kúp térfogatának, ezért a **kúpok térfogata** ezzel a képlettel számítható ki:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{r^2 \pi m}{3},$$

ahol T az alaplap területe, r az alaplap sugarának hossza, m a kúp magasságának hossza.



3. PÉLDA

Egy fuvarozónak kilenc köbméter homok szállítására alkalmas teherautói vannak. Hány fuvarral tudná elszállítani az 1. példában szereplő homokhegyet?

Megoldás

A kúp alaplapjának területe 350 m², a magassága – számításaink szerint – 9,1 m.

A kúp térfogata: $V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{350 \cdot 9,1}{3} \approx 1062$ (m³).

Mivel $1062 : 9 = 118$, ezért 118 fuvarral szállítható el egy homokhegy.



Játék

Egy papírlapon rajzoljatok körül egy 200 forintos érmét háromszor, hogy három körvonalat kapjatok! Az egyikre építsetek egy tornyot úgy, hogy 200, 50, 20, 10 és 5 forintos érméket raktok egymásra!

Az öt érme olyan hatást kelt, mintha egy kúpot alkotna, de ez a torony nem kúp, hiszen valójában egyre kisebb méretű hengerekből épül fel. A 100 forintos érmét azért hagytuk ki az építésből, mert a mérete nem illeszkedik a többihez.

A feladat az, hogy az öt érmét átrakd valamelyik másik körre. Nem szabad áttolni az oszlopot! Egyszerre csak egy érmét helyezhetsz át, és kisebb érmére nagyobbat tenni nem szabad. Hogyan lehet a teljes torony áthelyezését megvalósítani?

A játék egyszemélyes, de nyugodtan megbeszélhetitek párokban is. Gyakorlásképpen kezdheted 3, majd 4 pénzérmével.

A játék a „Hanoi torony” elnevezést kapta, mivel a hengerekből felépített torony a távol-keleti pagodákat juttathatja eszünkbe.



KUTATÓMUNKA

Keresd meg, hogy mit találsz az interneten, ha rákeresel a Hanoi torony kifejezésre!

FELADATOK

1. Számítsd ki a kúp felszínét és térfogatát, ha az alaplajának sugara r , az alkotója a , a magassága m !

- a) $r = 3$ cm, $a = 5$ cm
- b) $r = 5$ dm, $m = 12$ dm
- c) $r = 9,2$ m, $a = 17,5$ m
- d) $r = 8,6$ mm, $m = 22,4$ mm

2. Mekkora a kúpok felszíne, ha a palástjuk egy olyan körcikk, amely egy 4 cm sugarú kör

- a) negyede; b) három negyede;
- c) harmada; d) két harmada?

3. Egy 18 cm magas kúpot kettévágtunk egy a tengelyét is tartalmazó síkkal. A vágásfelület egy egyenlő szárú derékszögű háromszög lett. Mekkora a kúp felszíne, illetve térfogata?

4. A képen látható, házra borított fagylalttölcsér magassága 8,5 m, az alkotója pedig 8,8 m.

- a) Mekkora a palást területe?
- b) Mekkora a térfogata?



5. Egy piros és egy kék forgáskúp palástja is éppen egy negyedkör. A piros kúp alkotója 10 cm, a kék kúp alkotója pedig 5 cm.

- a) Mekkora a piros kúp felszíne?
- b) Mekkora a piros kúp térfogata?
- c) Mekkora a kék kúp térfogata?
- d) Mekkora a két kúp térfogatának aránya?

6. A képen látható pohár belseje kúp alakú, a forgástengelyére illeszkedő keresztmetszete pedig szabályos háromszög. A pohárba 5 cm magasságig folyadékot töltöttünk.

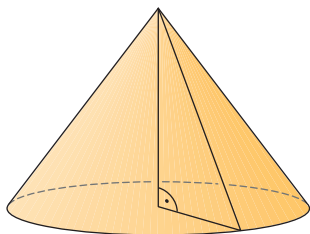


- Mekkora a folyadék térfogata?
- Tippeld meg, hogy hányszorosára növekedne a folyadék mennyisége, ha 5 mm-rel emelkedne a szintje!
- Ellenőrizd számolással a tippedet!

7. Egy barkácsboltban csak 15 cm magasságú hungarocellkúpok kaphatók. A kúpok alaplapjának sugara 5 cm. Kávészemeket szeretnénk a palástra ragasztani, majd ezüst- vagy arany színű spray-vel lefújni, hogy elkészíthessük a tervezett karácsonyi díszünket. Mekkora felületet kell kávészemekkel beragasztanunk?



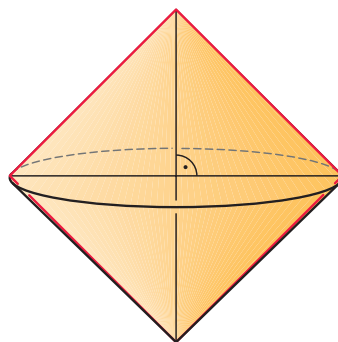
8. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza a és b , az átfogójának hossza c .



- Add meg annak a kúpnek a térfogatát, amelyet a b befogó körüli megforgatással kapsz!
- Add meg annak a kúpnek a térfogatát, amelyet az a befogó körüli megforgatással kapsz!

- Add meg az előzőekben megadott két kúp térfogatának arányát!
- Add meg az előzőekben megadott két kúp palástterületének arányát!

9. Egy négyzetet megforgatunk az egyik átlója mentén. Mekkora az így kapott forgástest térfogata és felszíne?



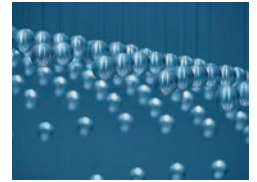
10. Melyik igaz?

- Ha a kúp magasságát kétszeresére növeled, akkor a térfogata is kétszeresére növekszik.
- Ha a kúp sugarát felére csökkented, akkor a térfogata is felére csökken.
- Ha a kúp magasságát háromszorosára növeled, akkor a felszíne is a háromszorosára növekedik.
- Ha a kúp magasságát háromszorosára növeled, akkor a palást területe is a háromszorosára növekedik.
- Ha a kúp magasságát a harmadára csökkented, a sugarát pedig a háromszorosára növeled, akkor a térfogata nem változik.

11. A 20 cm hosszú, henger alakú ceruza átmérője 8 mm. A ceruza kifáradása után az egyik végén 1,2 cm magasságú kúp keletkezett. Mekkora az így kapott ceruza térfogata?



A paradicsom, az alma, a dinnye ugyanazt a formát juttatja eszünkbe. A labdák, a golyók azonos geometriai tulajdonsággal rendelkeznek. Ebben a leckében ez a térbeli alakzat, a **gömb** lesz a főszereplő.



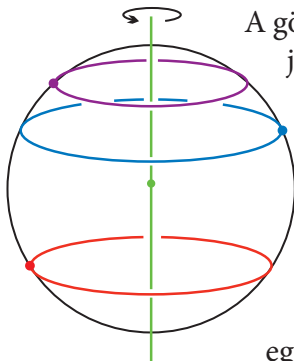
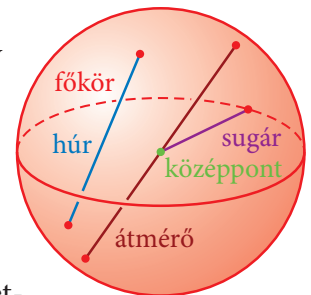
Beszélhetünk **gömbfelületről** és **gömbtestről**.

A gömbfelület azon pontok halmaza a térben, amelyek egy adott ponttól egy adott távolságra találhatók.

Az adott pont a **gömb középpontja**, az adott távolság a **gömb sugara**.

A gömbtest azon pontok halmaza a térben, amelyek egy adott ponttól egy adott távolságnál nincsenek messzebb.

A gömbfelület két tetszőleges pontját összekötő szakasz a **gömb húrja**, a leghosszabb húr pedig a **gömb átmérője**. Ha a gömböt egy síkkal elvágjuk, a metszet egy kör lesz. A legnagyobb ilyen köröket **főkörök**nek nevezzük. A gömb és a főkörök középpontja egybeesik. A főkörök sugara egyben a gömb sugara is.



A gömb forgástest. Ha egy kört az átmérője körül forgatunk, akkor a körvonal pontjai gömbfelületet írnak le.

A gömbfelületet nem tudjuk síkba kiteríteni.

A gömb felszínét és térfogatát megadó képleteket nem vezetjük le. Egyelőre nincs annyi matematikai ismeretünk, amennyivel ezeket a számításokat el lehetne végezni.

A gömb felszíne: $A = 4 \cdot r^2 \pi$.

A gömb térfogata: $V = \frac{4r^3\pi}{3}$.

A képlet jól mutatja, hogy a gömb felszíne a főkör területének a négyszeresével egyenlő.

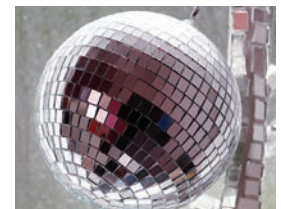
1. PÉLDA

Egy 14 cm sugarú hungarocellgolyóból szobadíszet készítettünk. A felületére ragasztóval apró üvegdarabokat ragasztottunk. Mekkora felületet kellett ragasztóval bekenni? Mekkora a tömege a hungarocellgolyónak, ha 1 dm³ hungarocell 2 g?

Megoldás

A gömb felszíne: $A = 4 \cdot 14^2 \cdot \pi \approx 2463 \text{ (cm}^2\text{)}$. Vagyis kb. 2463 cm² felületet kellett ragasztóval bekenni.

A gömb térfogata: $V = \frac{4 \cdot 14^3 \cdot \pi}{3} \approx 11\,494 \text{ (cm}^3\text{)}$. Vagyis kb. 11,5 dm³ a térfogata, ezért a tömege: $2 \cdot 11,5 = 23$. Tehát a hungarocellgolyó kb. 23 g-os.



2. PÉLDA

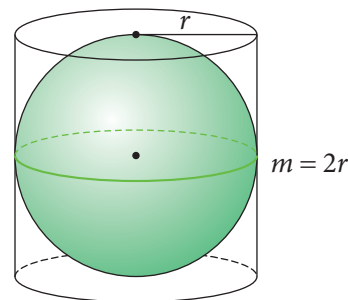
Adott egy r sugarú és $2r$ magasságú henger. Adjuk meg a palást területének képletét! Milyen érdekesség vehető észre?

Megoldás

Használjuk a már ismert képletet és az $m = 2r$ összefüggést:

$$P = 2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi.$$

Ez a képlet azonos a gömb felszínképletével, vagyis a gömb felszíne egyenlő a köré írt henger palástjának területével.



3. PÉLDA

Adjuk meg a képen látható testek térfogatképletét! Keressünk összefüggést a három térfogat között!

Megoldás

A henger és a kúp esetén is $m = 2r$.

$$V_{\text{henger}} = r^2\pi \cdot m = r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi.$$

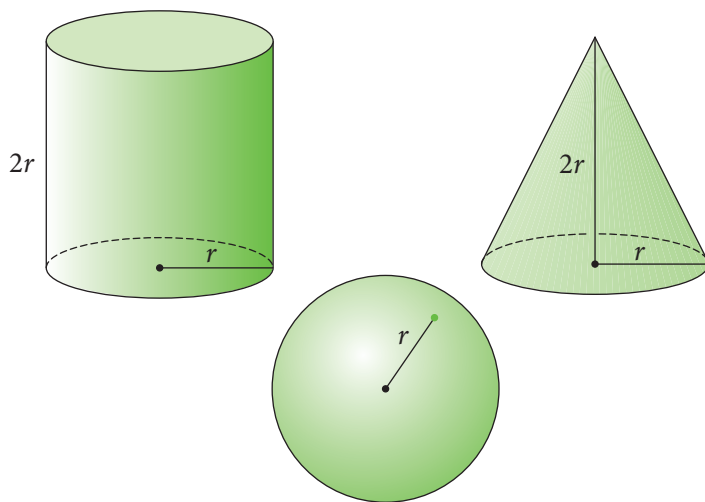
$$V_{\text{kúp}} = \frac{r^2\pi \cdot m}{3} = \frac{r^2\pi \cdot 2r}{3} = \frac{2r^3\pi}{3}.$$

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Tudjuk, hogy $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{henger}}.$

Észrevehető, hogy $V_{\text{gömb}} = \frac{2}{3} \cdot V_{\text{henger}}.$

Ezek alapján: $V_{\text{henger}} = V_{\text{gömb}} + V_{\text{kúp}}.$



Arkhimédész (Kr. e. 287–212) az ókor egyik legnagyobb matematikusa volt. Legkiemelkedőbb matematikai eredményének azt tartotta, hogy belátta: a gömb felszíne egyenlő a köré írt henger palástjának területével, a gömb térfogata pedig a köré írt henger térfogatának $\frac{2}{3}$ részével. Sírját – kérésének megfelelően – egy hengerbe írt gömbbel jelölték meg. Ezt tudva 200 évvel később Cicero meg is találta Arkhimédész végső nyughelyét.

A hetedikes matematika-tankönyv 5. fejezetének bevezetőjében is olvashatsz Arkhimédészről. Az életével és munkásságával kapcsolatos további érdekességeket megtalálhatod az interneten.

Játék

Kigolyózunk

A játék egyszemélyes, de megbeszélhetitek párban is.

Helyeztetek egy hosszú, keskeny vályú egyik felébe négy sötét, másik felébe négy világos golyót! A vályú közepén egy akkora kiszélesedés található, amelyben úgy elfér egy golyó, hogy közben egy másik elgurítható mellette. A vályú sötét golyókat tartalmazó vége zárt, a másik nyitott.



Hogyan lehet a vályúból az összes sötét golyót kigurítani úgy, hogy közben a világosak bent maradjanak? Megtaláljátok a megoldást akkor is, ha a kiszélesedésbe csak sötét golyót lehet begurítani? A golyók természetesen helyettesíthetők más tárgyakkal is. A golyós változathoz a vályú könnyen kialakítható például gyurmából. Segítségképpen kezdhettek 2-2 vagy 3-3 golyóval is.

FELADATOK

1. Számítsd ki a gömb felszínét és térfogatát, ha

- a) $r = 21$ cm; b) $r = 42$ cm;
c) $r = 3,6$ cm; d) $r = 10,8$ cm!

2. Egy 28 cm átmérőjű, gömb alakú dinnyét

- a) egy vágással egyforma részekre vágunk;
b) két, egymásra merőleges vágással egyforma részekre vágunk;
c) három, páronként merőleges vágással egyforma részekre vágunk.

Mekkora egy rész felszíne?

3. Egy 12 cm élű kockából a lehető legnagyobb gömböt esztergálták ki. Mennyi hulladék keletkezett?

4. Nagymama focilabdát készített unokája születésnapjára. A torta a díszítés előtt egy 22 cm átmérőjű félgömb volt. A félgömb gömbfelületét 4 mm vastagságban borítja a marcipán. Mennyi marcipánra volt szükség a torta díszítéséhez?



5. Hazai gyártású acél-szerkezetű víztornyok nagyon változatos méretben rendelkeznek.

- a) Hány hektoliter víz tárolására alkalmas egy 18 méter magasságban elhelyezkedő, 6 méteres belső átmérőjű, gömb alakú tartály?
b) Mekkora átmérőjű tartályt rendeljen az a falu, ahol feleekkora térfogatú is elegendő?



6. Hányszorosára növekedik annak a 24 cm átmérőjű, gömb alakú lufinak a

- a) felszíne;
b) térfogata,
amelynek sugarát 1 cm-rel megnöveljük?

7. Egy 4 cm sugarú gyurmagolyót elfeleztünk, majd mindkét részét ismét gömb alakúra gyúrtuk. Mekkora lesz ezeknek a gömböknek a sugara? Számolás előtt tippelj!

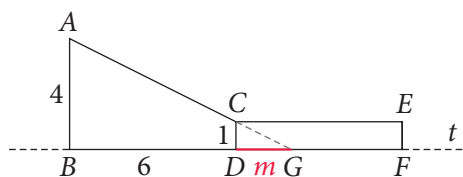
1. PÉLDA

Egy forgástest alakú tölcser teteje egy 4 cm sugarú kör, az alja pedig egy 1 cm sugarú kör. A tölcser magassága 12 cm, az alsó része egy 6 cm magasságú henger. Hány deciliter folyadék lehet maximálisan a tölcserben, ha az alját befogjuk?



Megoldás

Készítsük el a tölcser forgástengelyére illeszkedő síkmetszetét! A tengelyes szimmetria miatt a metszetnek csak az egyik felét rajzoltuk le.



A tölcser felső része egy olyan kúp, amelyből hiányzik egy kisebb kúp. A számításainkhoz szükségünk van a kis kúp m magasságára. A metszeten észrevehető, hogy a DCG háromszög és az ABG háromszög hasonló (szögeik páronként egyenlők). Ezért a megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$$\frac{1}{4} = \frac{m}{m+6}, \text{ vagyis } m+6 = 4m.$$

A kis kúp magassága ezek alapján: $m = 2$ cm, alapkörének sugara 1 cm, a nagy kúp magassága 8 cm, alapkörének sugara 4 cm. Ezek felhasználásával a tölcser felső részének térfogata:

$$V_{\text{felső rész}} = V_{\text{nagy kúp}} - V_{\text{kis kúp}} = \frac{4^2 \cdot \pi \cdot 8}{3} - \frac{1^2 \cdot \pi \cdot 2}{3} = 42\pi \approx 131,95 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Az alsó, henger alakú rész alapkörének sugara 1 cm, magassága 6 cm. A térfogata:

$$V_{\text{alsó rész}} = 1^2 \cdot \pi \cdot 6 = 6\pi \approx 18,85 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A tölcser térfogata: $V = V_{\text{felső rész}} + V_{\text{alsó rész}} = 131,95 + 18,85 = 150,8 \text{ (cm}^3\text{)}.$

Számításaink alapján a térfogat pontosan $42\pi + 6\pi = 48\pi \approx 150,8 \text{ (cm}^3\text{)}$, de a mindennapokban nincs szükség ilyen pontosságra. A $150,8 \text{ cm}^3$ helyett tehát nyugodtan mondhatjuk, hogy a tölcserben 1,5 dl folyadék lehet.

Megjegyzés

A tölcser tetejét úgy kaptuk, hogy egy kútból levágtunk egy kis kúpot. Az így kapott test neve: csonka-kúp. Az edények, vázák, poharak között ilyen alakúakat is találunk. Térfogatukat két kúp különbségeként kapjuk meg. Gúlából ugyanilyen módszerrel csonkagúlát hozhatunk létre.

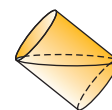
2. PÉLDA



Egy henger alakú poharat csordultig töltöttük vízzel. Hogyan lehetne segédeszközök használata nélkül egy kúp alakú vázába önteni a pohárban lévő víz felét?

Megoldás

Csak a henger alakú pohárnak van szerepe, a kúp alakú vázának nincs. Az ábra mutatja a feladat megoldását.



3. PÉLDA

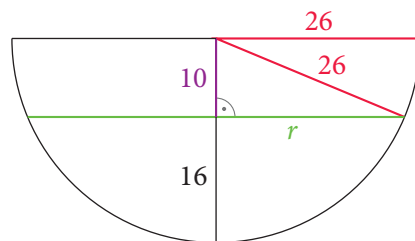
Egy régi réz cukrárszüst alakja egy 26 cm sugarú félgömb, amelybe 16 cm magasságig vizet öntöttünk. Mekkora vízfelületet láthatunk az edényben?

Megoldás

Rajzoljuk meg az üst megfelelő síkmetszetét!

A vízszint az üst felső peremének síkjától 10 cm-re van, hiszen a félgömb magassága a gömb sugarával egyenlő. A vízfelület egy r sugarú kör lesz, hiszen tudjuk, hogy a gömb minden metszete kör alakú. A gömb középpontjától a vízfelület pereme 26 cm-re van, mivel ez a távolság is megegyezik a gömb sugarával. A metszeten látható derékszögű háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt: $10^2 + r^2 = 26^2$.

Tehát a vízfelület sugara: $r = 24$ cm, így a vízfelület területe: $T = 24^2 \pi \approx 1810$ (cm²).



FELADATOK

1. Szeretnénk megtudni, hogy mekkora sugarú gömb térfogatával egyenlő egy szabálytalan alakú kavics térfogata. Van egy vízzel megtöltött mérőhengered. Hogyan járnál el?

2. Mekkora a képen látható fonott kosár térfogata, ha a belső magassága 15 cm, a felső kör sugara 20 cm, az alsó köré pedig 8 cm?

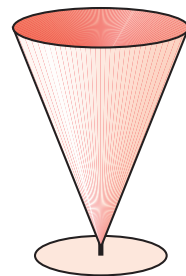


3. Egy 5 cm sugarú, gömbnek tekinthető paradicsomot úgy vágunk ketté, hogy a középpontja 2 cm-re van a vágás síkjától. Mekkora a vágásfelület?

4. Hogyan kell egy sík mentén szétvágni a következő testeket, hogy a térfogatuk feleződjön:

- | | |
|---------------|------------|
| a) gömb; | b) kúp; |
| c) téglatest; | d) henger? |

5. Egy kúp alakú edény pontosan 1 literes. Rajzold le a kúpot a füzetedbe, és jelöld be egy vízszintes vonallal a 14,8 cm hosszú alkotóján, hogy meddig töltsük az edényt, ha fél liter, illetve ha negyed liter vizet szeretnénk beleönteni! Számolás előtt tippelj!



6. Mekkora egy 20 cm belső magasságú és 1,2 cm belső átmérőjű kémcső térfogata? A kémcső alsó része félgömb, a felső része henger alakú.

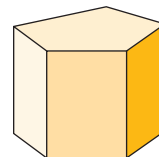


Gyűjtsük össze az eddig tanult felszín- és térfogatképleteket!

A hasáb felszíne: $A = 2T + P$, ahol T az alapelap, P a palást területe.

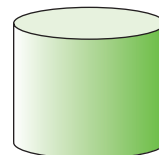
A hasáb térfogata: $V = Tm$, ahol T az alapelap területe, m a hasáb magassága.

Mivel a kocka és a téglatest is hasáb, ezért a fenti képletek magukba foglalják ezeket a speciális eseteket is.



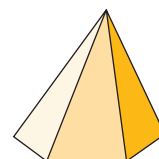
A henger felszíne: $A = 2T + P = 2r^2\pi + 2r\pi m = 2r\pi(r + m)$, ahol T az alapelap, P a palást területe, r az alapkör sugarának hossza, m a henger magassága.

A henger térfogata: $V = Tm = r^2\pi m$, ahol T az alapelap területe, m a hasáb magassága, r az alapkör sugarának hossza.



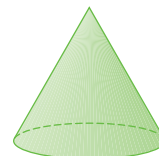
A gúla felszíne: $A = T + P$, ahol T az alapelap, P a palást területe.

A gúla térfogata: $V = \frac{Tm}{3}$, ahol T az alapelap területe, m a gúla magassága.



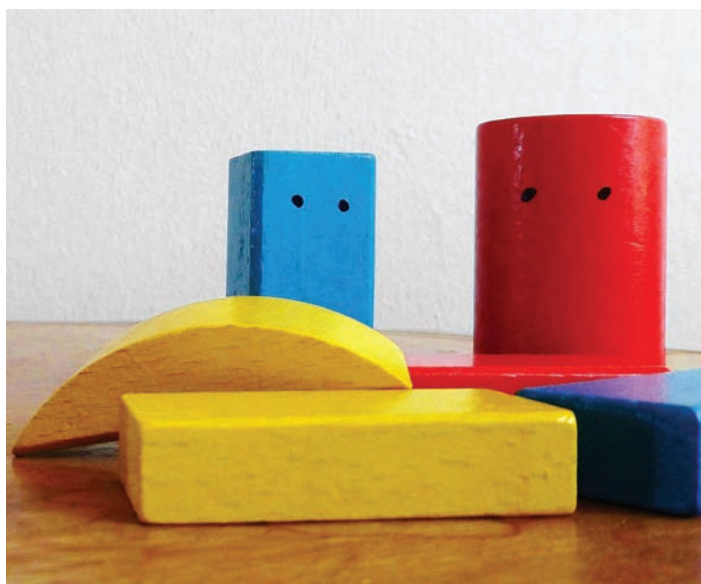
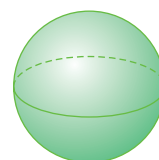
A kúp felszíne: $A = r\pi(r + a)$, ahol T az alapelap, P a palást területe, r az alapelap sugarának hossza, a a kúp alkotójának hossza.

A kúp térfogata: $V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{r^2\pi m}{3}$, ahol T az alapelap területe, r az alapelap sugarának hossza, m a kúp magasságának hossza.



A gömb felszíne: $A = 4 \cdot r^2\pi$.

A gömb térfogata: $V = \frac{4r^3\pi}{3}$, ahol r a gömb sugarának hossza.



FELADATOK

Az 1–8. tesztfeladatoknak egy helyes megoldása van.

1. Egy gúla térfogata 652 cm^3 . Mekkora a vele azonos magasságú és alaplapú hasáb térfogata?
 A: 652 cm^3 -nél kevesebb
 B: 978 cm^3
 C: 1304 cm^3
 D: 1956 cm^3
 E: Az előzőek egyike sem.
2. Egy 24 cm magas kúp alapkörének átmérője 36 cm . Melyik állítás lehet igaz az alkotójára?
 A: Centiméterben mérve nem egész szám.
 B: $\sqrt{1872} \text{ cm}$
 C: Rövidebb, mint 24 cm .
 D: $\sqrt{720} \text{ cm}$
 E: 30 cm
3. Egy gúla minden lapja 11 cm^2 területű. Mekkora a felszíne?
 A: Ez az egy adat kevés a kérdés megválaszolásához.
 B: Biztosan több, mint 44 cm^2 .
 C: 33 cm^2
 D: 44 cm^2
 E: 55 cm^2
4. Mekkora az eltérés 2 db 3 cm sugarú és 3 db 2 cm sugarú gömb felszíne között?
 A: Egyenlők, tehát nincs eltérés.
 B: A 2 db nagyobb gömb felszíne 24 cm^2 -rel nagyobb.
 C: A 2 db nagyobb gömb felszíne $24\pi \text{ cm}^2$ -rel nagyobb.
 D: A 3 db kisebb gömb felszíne $24\pi \text{ cm}^2$ -rel nagyobb.
 E: A 2 db nagyobb gömb felszíne pontosan $75,36 \text{ cm}^2$ -rel nagyobb.
5. Melyik arány adja a kocka és a benne lévő legnagyobb gömb térfogatának arányát?
 A: $2 : 3$
 B: $3 : 2$
 C: $6 : \pi$
 D: $\sqrt{2} : 1$
 E: Az előzőek egyike sem.
6. Egy kúp csúcsából az alapkörével párhuzamosan levágtunk egy 231 cm^3 térfogatú kis kúpot. A két test azonos magasságú lett. Mekkora volt az eredeti kúp térfogata?
 A: 924 cm^3 -nél kevesebb
 B: 924 cm^3
 C: Ennyi adat ismeretében nem adható meg.
 D: 693 cm^3
 E: 1848 cm^3
7. Megszámoltuk egy gúla éleinek a számát. Mennyit kaphattunk eredményül?
 A: 1001
 B: 2000
 C: 2015
 D: 2061
 E: 2345
8. Egy gömb felszínének és térfogatának ugyanannyi a mérőszáma. (A sugár hosszát centiméterben, a felszínét négyzetcentiméterben, a térfogatát köbcentiméterben adtuk meg.) Melyik állítás lehet igaz az alábbiak közül?
 A: Ilyen gömb nincs.
 B: A sugara 2 cm hosszúságú.
 C: A sugara 3 cm hosszúságú.
 D: A sugara nem fejezhető ki egész számmal.
 E: A sugara $\pi \text{ cm}$ hosszúságú.

9. Egy 16 cm élhosszúságú kocka egyik sarkából kivágtunk egy kis kockát. Ennek térfogata az eredeti kocka térfogatának a 12,5%-ával egyenlő. Mekkora a kivágott kiskocka élhossza?

10. A kerítéshez felhasznált deszkák mérete: 15 cm, 90 cm, 2 cm. A deszkák rögzítése négy csavarral történik, melyeknek 6 mm az átmérője.

- Mekkora lesz egy kifűrt deszka térfogata?
- Hány darab deszkára készült el a furat, ha már 1 dm^3 a hulladék?

11. Egy esztergályos azt a feladatot kapta, hogy 4 cm-szer 4-szer 25 cm-es négyzetes oszlopokból a legnagyobb térfogatú hengereket készítsen. Mekkora lesz az így kapott hengerek felszíne, térfogata?

12. A szabályos hatszög keresztmetszetű toronyra rézlemezből tetőt terveznek. A tető olyan gúla lesz, amelynek oldallapjai egyenlőszárú háromszögek. A háromszögek alapja 4 m, a szárai pedig 6 m hosszúak.

- Mekkora felületet kell rézlemezzel borítani?
- A vágások és az átfedések miatt a megvásárolt lemez mennyiségének a 18%-a hulladék lett. Hány m^2 lemezt vásároltak összesen?

13. Egy emléktárgyboltba üvegből készített, négyzet alapú gúlák érkeztek. Az üzletben a felületére szöveg bevésését is vállalják. A gúlák alaplappja $70,56 \text{ cm}^2$ területű, a magassága pedig 6 cm. Mekkora a tömege egy ilyen emléktárgynak, ha az üveg sűrűsége 2500 kg/m^3 (azaz 1 m^3 üveg 2500 kg tömegű)?

14. Vásároltunk egy 26 cm átmérőjű gumilabdát.

- Mekkora a felülete?
- Mennyi anyagból készült, ha az anyagvastagság mindenütt 4 mm?

15. A 4 dm-szer 6 dm-es akváriumba 36 liter vizet öntünk.

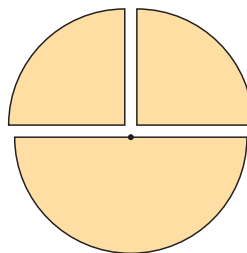
- Milyen magas lesz a vízszint?
- Belerakunk egy 7 cm sugarú acélgömböt. Mennyit emelkedik a vízszint?

16. Tizennégy darab, 12 cm sugarú fagömböt pirosra, és ugyanennyi 12 cm sugarú fa félgömböt zöldre kell festeni. Melyik festékből és hány százalékkal fogy több, mint a másiktól?

17. A kép egy társasjáték figuráinak keresztmetszetét mutatja. Ezek a 3,6 cm magas műanyag bábuk úgy tekinthetők, hogy egy 0,6 cm sugarú gömbből és egy 1,2 cm sugarú kúpából állnak. Mekkora mennyiségű anyagot használnak fel 1500 darab ilyen bábú gyártásakor?



18. Kartonpapírból kivágtunk egy 32 cm átmérőjű kört, majd feleztük az átmérője mentén, az egyik felét pedig feleztük a sugara mentén. A három körcikk egy-egy kúp palástja lett.



A két kisebb kúp palástjának területösszege egyenlő a nagyobb kúp palástjának területével. Milyen viszonyban van a két kisebb kúp térfogatösszege a nagyobb kúp térfogatával?

19. A fényképen látható sütőforma alja 10 cm sugarú, a teteje 14 cm sugarú kör, a magassága pedig 4 cm. Mekkora az edény térfogata?



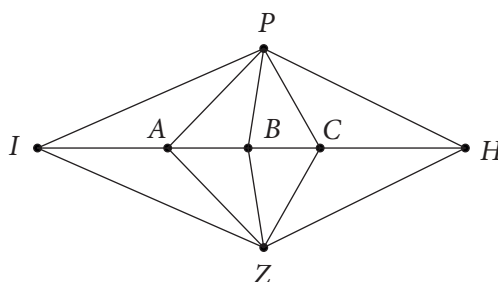
1. Válaszolj a következő kérdésekre!

- a) Mennyi a $\frac{2}{3}$ -nál 5-tel kisebb szám $\frac{6}{7}$ -e?
 b) Mennyi a 10 és a $\frac{3}{5}$ összegének és különbségének a szorzata?
 c) Mennyi a 225-nek a 25%-ánál 13-mal kisebb szám?

2. Tedd igazzá a következő egyenlőségeket!

- a) $5 \text{ kg} - 225 \text{ dkg} = \dots\dots\dots \text{ g}$ b) $46 \text{ cm}^3 + 4600 \text{ mm}^3 = \dots\dots\dots \text{ cm}^3 = \dots\dots\dots \text{ dm}^3$
 c) $13 \text{ mm} + 13 \text{ cm} + 13 \text{ dm} + \dots\dots\dots \text{ m} = 1,5 \text{ m}$

3. Julcsit megkérte az anyukája, hogy az iskolából hazafelé menet vegyen a péknél kenyeret, a zöldségesnél pedig almát. Hányféle úton mehetett haza Julcsi, ha elhatározta, hogy a P , A , B , C , Z kereszteződések közül pontosan négyet fog érinteni és egyikén sem halad át kétszer? (Az ábrán: I = iskola, P = pék, Z = zöldséges, H = otthon, a többi kereszteződést az A , B , C betűk jelölik. Egy lehetséges útvonal: $IPBZCH$.)



4. Törpfallván új fizetőeszközt szeretnének bevezetni, de előtte megkérdezték a törpöket, hogy szerintük milyen formában lenne ez a legcélszerűbb. A megkérdezettek életkorát és válaszát az alábbi táblázat tartalmazza. Válaszolj a következő kérdésekre az adatok alapján!

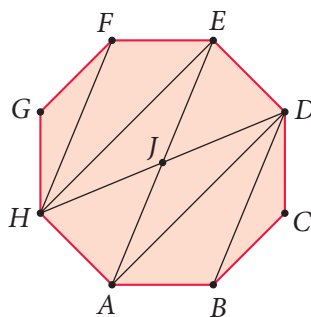
	Papírpénz	Fémpénz	Virtuális pénz
Törpgyerekek (0–10 év)	3	10	32
Fiatal törpök (10–20 év)	12	15	21
Idős törpök (20 év fölött)	36	20	7

- a) Készíts oszlopdiagramot a fiatal törpök válaszairól!
 b) A megkérdezett törpök hány százaléka gondolja a fémpénzt a legcélszerűbb fizetőeszköznek?
 c) Melyik fizetőeszközt vezetik be, ha a kérdés szavazás útján dől el, és a faluban minden 10. életévét betöltött törp szavazhat?



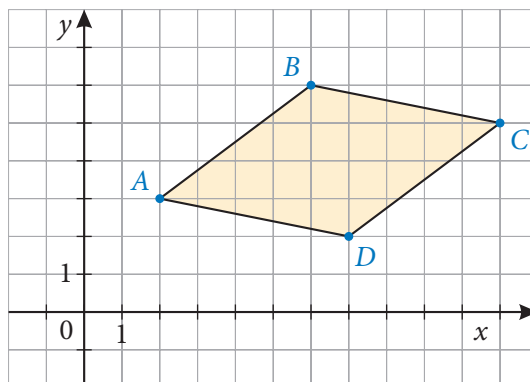
5. Az ábrán egy szabályos nyolcszög látható néhány átlójával.

- a) Sorolj fel öt egybevágó háromszögpárt!
 b) Adj meg egy-egy váltószögpárt, egyállású szögpárt, kiegészítő szögpárt és pótszögpárt!
 c) Határozd meg a következő szögek nagyságát: $\angle EJD$, $\angle AJD$, $\angle BCD$, $\angle CDB$, $\angle HFG$!



6. Az $ABCD$ négyszöget koordináta-rendszerben ábrázoltuk.

- Milyen négyszög az $ABCD$ négyszög?
- Az E pont első koordinátája 4. Add meg a második koordinátáját úgy, hogy az egy 4-nél nem nagyobb pozitív egész szám legyen, és az E pont
 - a négyszög belsejében;
 - a négyszög határvonalán;
 - a négyszögön kívül helyezkedjen el!
- Írd fel az A és B pontokon áthaladó lineáris függvény hozzárendelési szabályát!

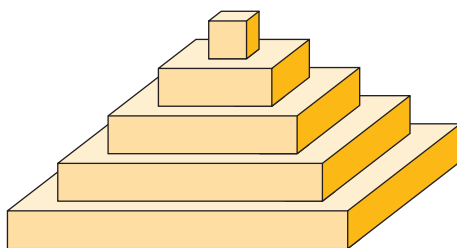


7. A következő állításokról dönts el, hogy igaz vagy hamis!

- Ha egy pozitív egész számnak kettőnél több osztója van, akkor az összetett szám.
- Nem minden rombusz paralelogramma.
- Egy sokszög belső szögeinek összege lehet 1800° .
- Minden lineáris függvény képe egy egyenesre illeszkedik.
- A koordináta-rendszer minden egyenese egy lineáris függvény képe.

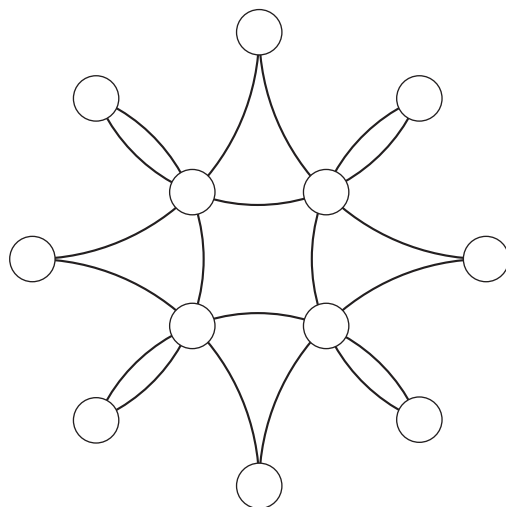
8. Zsófi anyukája farsangi fánkot sütött a családjának. Zsófi sütés után megállapította, hogy a fánkok száma 15-tel és 2-vel is osztható. A fánkok 60%-a elfogyott vacsorára. Másnapra mindegyik gyereknek és az apukának is csomagoltak uzsonnára 2-2 darabot. A maradék 10-et az anyuka bevitte a munkahelyére kóstolónak. Hány gyerek van a családban?

9. A fiúk technikaórán 1 cm vastag falemezekből 5 cm magas piramist barkácsoltak. A szintek négyzet alakúak voltak, rendre 9 cm, 7 cm, 5 cm, 3 cm és 1 cm oldalhosszal. Mekkora az így összeállított piramis felszíne és térfogata?



10. Egy pozitív kétjegyű szám első számjegye 1-gyel kisebb, mint a második. Ha a számjegyeket felcseréljük, akkor az eredeti szám harmadának a négyszeresénél 6-tal kisebb számot kapunk. Melyik ez a szám?

1. Helyezd el az alábbi ábrán a pozitív egész számokat 1-től 12-ig úgy, hogy az azonos köríven lévő számok összege 28-nál kisebb legyen!



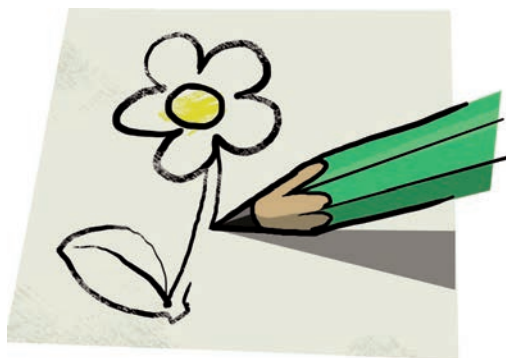
2. Tedd igazzá az alábbi egyenlőségeket!

- a) $4 \text{ h} + 600 \text{ s} = \dots \text{ min}$
- b) $123 \text{ cm}^2 - 0,5 \text{ dm}^2 = \dots \text{ mm}^2$
- c) $1564 \text{ m} - \dots \text{ km} = 6400 \text{ cm}$
- d) $5 \text{ dkg} + 5 \text{ kg} = \dots \text{ g}$

3. Alma, Boróka, Csenge és Dóri társasjátékoztak. A játék elején választaniuk kellett a piros, kék, zöld, sárga és fehér bábuk közül. Alma és Boróka egy szótagú színt szeretne, Dóri nem szereti a kék, zöld és fehér színeket, Csengének pedig mindegy, melyik bábuval játszik. Írd le, hogy alakulhatott a bábuk elosztása, ha mindenki kívánságát figyelembe vették!

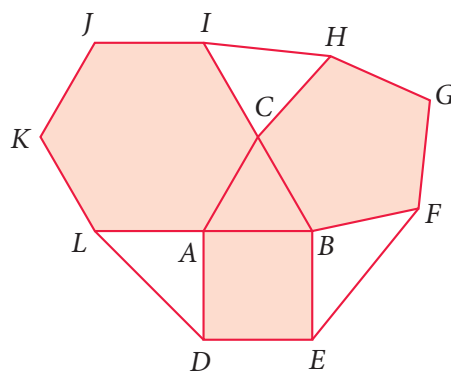
4. Eszter virágos sormintával díszíti a füzte borítóját. Ötszirmú, sárga közepű, egylevelű virágokat rajzol, de minden harmadik virágnak két levelet, minden negyedik virágnak négy szirmot rajzol, és minden ötödik virágnak narancssárgára színezi a közepét.

- a) Milyen tulajdonságai vannak a 36. virágnak?
- b) Melyik a legkisebb sorszámú, négyszirmú, narancssárga közepű és egylevelű virág?
- c) Hány ötszirmú, sárga közepű, egylevelű virág van az ötven virágból álló mintában?



5. Egy szabályos ABC háromszög oldalaira szabályos négyszöget, ötszöget és hatszöget rajzoltunk, így kaptuk a $DEFGHIJKL$ kilencszöget.

- a) Mekkora a kilencszög belső szögei?
- b) Tedd hosszuk szerint növekvő sorrendbe az EF , HI és LD szakaszokat!
- c) Milyen négyszögek a következők: $DEAL$, $ACKL$, $LDBI$, $CIKL$?



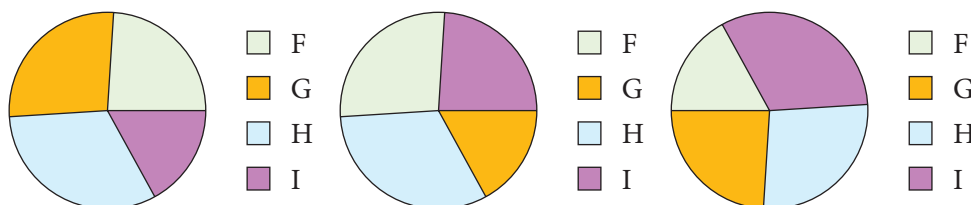
6. Fecó, Gergő, Huba és Iván nyáron meggymagozó versenyt tartottak.

Az eredményt a jobb oldalon lévő oszlopdiagram ábrázolja.

a) Ki nyerte a versenyt?

b) Ha csapatban játszanak, elképzelhető-e, hogy nem a nyertes csapatba kerül az egyéni nyertes?

c) Melyik kördiagram szemlélteti helyesen a végeredményt?



d) Mennyi meggyet magoztak ki átlagosan?

e) Hány százalékat magozta ki a meggynek Gergő?

7. Dönts el, hogy igazak vagy hamisak-e a következő állítások!

a) Minden számnak van reciproka.

b) Négy gyerek 24-féleképpen állhat sorba.

c) A szabályos sokszögek tengelyesen szimmetrikusak.

d) A tengelyesen szimmetrikus sokszögek szabályosak.

e) A 2 minden páros szám osztója.

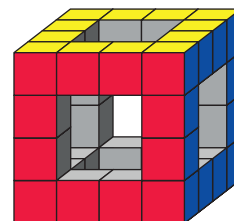
8. Két testvér 40 darab cukorkán osztozkodik. Jancsi, aki két évvel idősebb Katinál, azt javasolja, hogy az általános iskolai évfolyamuk sorszámának arányában osszák szét a kupacot. (Mindketten 6 évesen kezdték az iskolát és nem ismételték évet.) Kati inkább az éveik számát venné alapul, mert akkor jobban járna: csak 4-gyel kevesebb jutna neki, mint Jancsinak. Végül Kati javaslata alapján osztottak. Hány cukorkával kapott így többet Kati, mint Jancsi ötlete alapján kapott volna?

9. Osztályfőnöki órán szavazást tartottak az osztálykirándulás helyszínéről. A három lehetséges helyszín közül legalább egyet és legfeljebb kettőt mindenkinek választania kellett. A szavazatok összeszámolása után a következő eredmény került fel a táblára: Győr: 18, Debrecen: 13, Szeged: 11. Négyvel többen szavaztak két helyszínre, mint ahányan csak Szegedre, négyen írták be Szegedet és Győrt, és csak Debrecenbe 8-an mentek volna. Hány diák vett részt a szavazáson?

10. Lali szétszedte a $4 \times 4 \times 4$ -es Rubik-kockát úgy, hogy csak az élek mentén lévő kiskockákat hagyta meg.

a) Hány százalékára csökkent az eredeti kocka térfogata?

b) Az így keletkezett test kis négyzetlapjainak hányad részén van eredeti színezés?



1. Add meg a következő négy szám közül azt a kettőt, amelyik a legközelebb, és azt a kettőt, amelyik a legtávolabb van egymástól a számegyenesen!

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$

d) $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) : \frac{5}{6}$

2. Egy gyerek a strandon kerek és szögletes kavicsokból a következő alakzatokat rakta ki:



a) Hány kavicsból állna a következő alakzat?

b) Hányadik alakzat áll 81 kavicsból?

c) Melyik fajta kavicsból van több a 45. alakzatban és mennyivel?

d) Az egyik alakzatban legyen a db szögletes és b db kerek kavics. Add meg a szögletes és a kerek kavicsok számát a következő alakzatban!

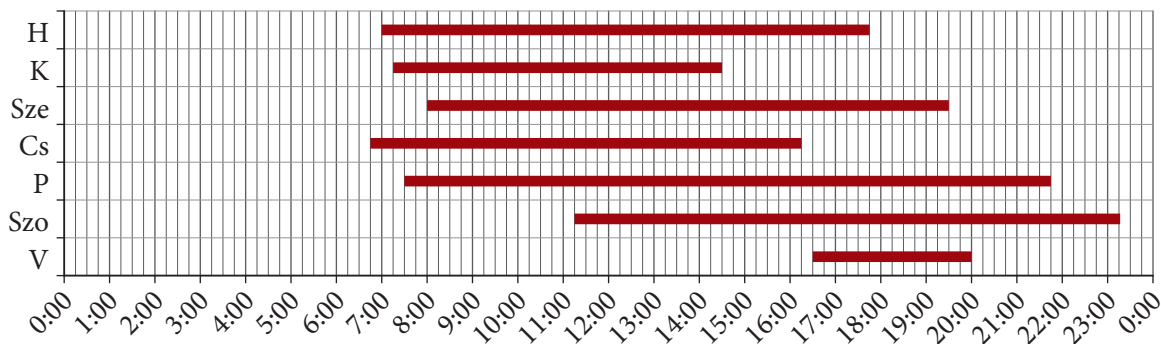
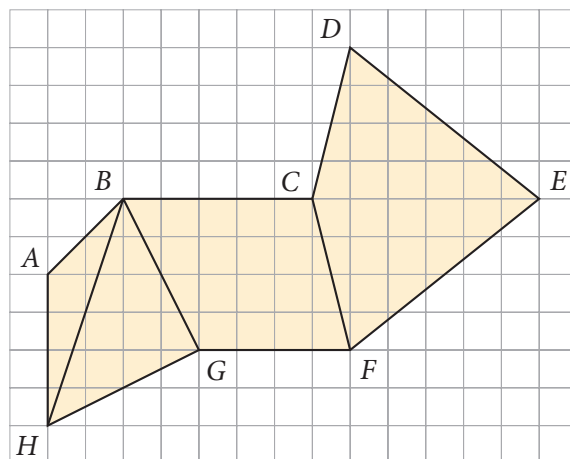
3. A rácson a szomszédos egyenesek távolsága legyen 1 cm.

a) Mekkora az ábrán látható deltoid területe?

b) Az $ABGH$ és a $BCFG$ négyszögek közül melyiknek nagyobb a területe és mennyivel?

4. Nagymama hét üveg barack és szilva lekvárt tett egymás mellé egy polcra. Arra emlékszik, hogy a két szélén baracklekvárt zárta a sort, és arra is, hogy eggyel kevesebb üveg szilvalekvárt tett a polcra, mint baracklekvárt. Hányféleképpen sorakozhat a hét üveg a polcon?

5. Zénó egy héten keresztül minden nap feljegyezte, hogy mettől meddig nem volt otthon. Ezt szemlélteti az alábbi diagram:



a) Melyik napon indult el a legkorábban otthonról?

b) Mit mondhatunk, átlagosan mikor érkezett haza?

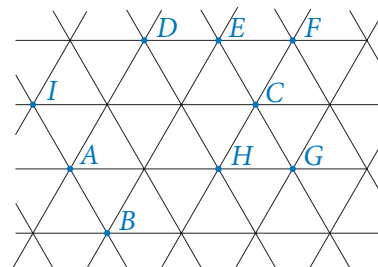
c) Hány olyan nap volt, amikor több időt töltött otthon, mint máshol?

d) Mely napokon nézhette meg otthon a 19 órakor kezdődő híradót?

6. Egy szabályos háromszögrácson bejelöltünk néhány pontot.

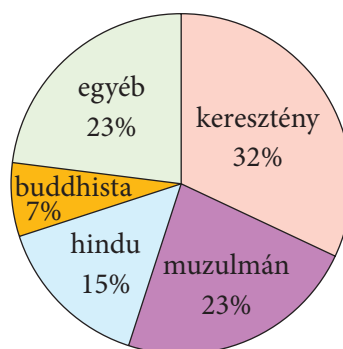
Ezek segítségével adj meg egy olyan sokszöget, amelyik

- a) egyenlő szárú, de nem szabályos háromszög;
- b) tompaszögű háromszög;
- c) deltoid;
- d) trapéz;
- e) paralelogramma;
- f) konkáv!



7. Egy 2012-es tanulmány szerint, amikor a Föld népessége 7 milliárd fő volt, akkor a világvallások követőinek eloszlása a következőképpen alakult:

- a) Ugyanezen tanulmány szerint 400 millió ember különféle hagyományos, törzsi vallás követője. Hány százalékát teszik ki ők az „egyéb” kategóriának?
- b) Hány muzulmán és hány buddhista ember élt a földön 2012-ben?
- c) Milyen arányban voltak a négy világvallás valamelyikének követői, illetve azok, akik nem követik egyiket sem?



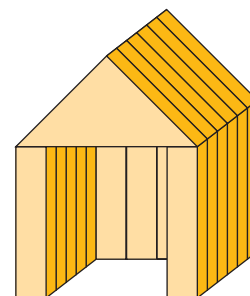
8. Tamás és Ági biciklivel egy napon belül megkerülték a Balatont. Mindketten Siófokról indultak, majd a túra végén ott is találkoztak, de ellenkező irányban tették meg a kört. A közösen megbeszélt helyeken a következő időket mérték:

	Tamás	Ági	
Siófok (0 km)	7:00	17:45	Siófok (210 km)
Fonyód (60 km)	9:45	15:10	Fonyód (150 km)
Keszthely (100 km)	11:50	13:50	Keszthely (110 km)
Révfülöp (135 km)	12:30	11:15	Révfülöp (75 km)
Balatonfüred (165 km)	14:15	9:20	Balatonfüred (45 km)
Siófok (210 km)	15:30	7:00	Siófok (0 km)

- a) Készíts szemléltető diagramot az útról!
- b) Ki ért előbb körbe? Mennyit várt a társára?
- c) Mennyi volt az átlagsebességük?
- d) Tamás 100 km megtétele után felhívta Ágit telefonon. Melyik két város között volt ekkor Ági?

9. Andris fa építőelemekből garázst épített. A garázs négyzet alapú, az oldalfalai négyzet alapú hasábokból, a teteje egyenlő szárú derékszögű háromszög alapú hasábokból van összerakva az ábrán látható módon.

- a) Mekkora a garázs légtere, ha a négyzetes oszlopok alapéle 2 cm, magasságuk pedig 10 cm hosszú?
- b) Mennyi faanyagot használt Andris az építéshez?
- c) Mekkora a garázs belsejének felülete?



10. Ha egy gép két hektár földet szánt fel egy óra alatt, akkor

- a) hány gép szánt fel 44 hektár földet egy óra alatt?
- b) hány gép szánt fel 44 hektár földet 4 óra alatt?
- c) hány óra alatt szánt fel 5 gép 20 hektár földet?
- d) hány hektár földet szánt fel 10 gép 24 óra alatt?

1. Határozd meg az a , b és c értékét, ha tudod, hogy

a) $-17 - (-a) = 7$; b) $b : \frac{4}{9} = 16$; c) $c \cdot (-9) = 11$!

d) Számold ki az $a : b : c$ kifejezés értékét!

2. Írd be a hiányzó számokat úgy, hogy igazak legyenek az egyenlőségek!

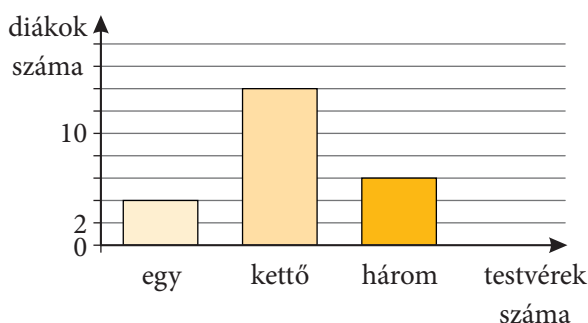
a) $34,8 \text{ m} - \dots\dots\dots \text{ cm} = 147,9 \text{ dm}$

b) $31 \text{ m}^2 + 2380 \text{ cm}^2 = \dots\dots\dots \text{ dm}^2$

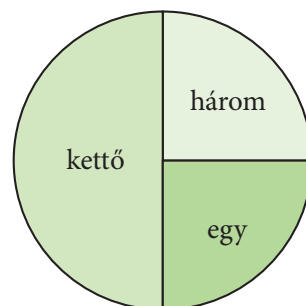
c) $0,2 \text{ óra} + 180 \text{ mp} = \dots\dots\dots \text{ perc}$

d) $1,78 \text{ l} - \dots\dots\dots \text{ cl} = 8,4 \text{ dl}$

3. A Cselővárosi Általános Iskolában két nyolcadik osztály van. Az osztályok létszáma megegyezik. Minden tanulónak van testvére. Az alábbi két diagram a nyolcadik osztályosok testvéreinek számát mutatja.



8. a



8. b

a) Hány főek az osztályok?

b) Hány gyereknek van egy testvére a 8. a-ban?

c) Hány gyereknek van három testvére a 8. b-ben?

d) Melyik osztályban van több olyan gyerek, akinek két testvére van?

e) Melyik osztályban több a testvérek száma és mennyivel?

f) A 8. a osztályosok testvéreinek 58%-a már iskolába jár, a többiek óvodába. Hány ovis testvére van a 8. a-soknak összesen?

4. Igaz vagy hamis?

a) Minden négyzet deltoid.

b) A 3147 prímszám.

c) A paralelogrammának pontosan két szimmetriatengelye van.

d) Minden a és b valós számra igaz, hogy $2(3a + 4b) = 6a + 4b$.

e) Minden 5-re végződő szám osztható 15-tel.

5. Hányféle különböző útvonalon juthat el a lovag a sárkányhoz, ha csak felfelé vagy jobbra haladhat?



6. Kilencedik osztályban angolul, németül és olaszul tanulnak a diákok, mindenki pontosan két nyelvet. Az angol–német párosítást 16 diák választotta. Ők kétszer annyian vannak, mint a német–olasz tanuló. Olaszul összesen 20 diák tanul az osztályból.

- Hányan választották az angol–olasz párosítást?
- Hányan tanulnak németül?
- Mennyivel több diák tanul angolul, mint olaszul?
- Mekkora az osztálylétszám?

7. Julcsi virágcsokrot készített a nagymamájának. A virágok harmada rózsa, 25%-a nárcisz, a többi tulipán.

- A csokor hányadrésze tulipán?
- Hány szál nárcisz és hány szál tulipán van a csokorban, ha tudod, hogy 8 szál rózsa van benne?
- Pár nap után nagyfi kidobta a hervadt szálakat: 3 tulipánt, 2 nárciszt és 1 rózsát. Írd fel a megmaradt virágfajták arányát!

8. Az $ABCD$ négyszög olyan téglalap, amely nem négyzet. Az AC és BD átlók metszéspontja a P pont. Az ABP háromszög területe 27 cm^2 .

- Készíts ábrát a megadott adatok alapján!
- Számold ki a téglalap területét!
- Mekkora a téglalap BC oldala, ha az AB oldala 12 cm ?
- Számítsd ki, hány cm hosszú a téglalap átlója!

- Tükrözd az AD oldal felezőpontjára az $A(1; 4)$, $B(-3; 4)$, $C(-1; -3)$, $D(3; 0)$ csúcsokkal megadott négyszöget! Add meg a tükrökép csúcsainak koordinátáit!
- Add meg annak az egyenesnek a hozzárendelési szabályát, melyre a négyszög csúcsait tengelyesen tükrözve az $A'(3; 2)$, $B'(3; -2)$, $C'(-4; 0)$, $D'(-1; 4)$ négyszöget kapjuk!

10. Az eszkimó gyerekek $15 \text{ cm} \times 35 \text{ cm}$ -es alapterületű, 10 cm magas jégtéglákból jégkunyhót építettek a kutyájuknak. Az alsó sor 27 téglából állt, a következő sorokhoz pedig mindig 4 téglával kevesebb kellett. A tetejére 3 téglakerült.

- Hány sorból áll a kunyhó?
- Hány téglát használtak fel az építéshez?
- Hány liter vizet kellene lefagyasztanunk, ha egy ilyen kunyhót szeretnénk építeni?
- Mikor a kunyhó elkészült, a gyerekek nagyon mosolyogtak, mert észrevették, hogy elfelejtettek ajtót építeni a kunyhóra. Így az alsó négy sorból kivettek rendre 4, 3, 2, illetve 1 téglát. Igaz-e, hogy a téglák több mint 10%-át feleslegesen építették be a kunyhóba? Válaszodat indokold!



Elérkezett az utolsó osztályfőnöki óra. A gyerekek remélték, hogy néhányan mehetnek még egy bónuszkört a futuroszköppel, de szomorúan konstataáltak, hogy az már nincs a laborban.

Sajnos ennyi volt erre az évre, a gépet visszaszállították.



A kiegészítőkért és az eredményekért majd az évzáró után jönnek. Ezért is kérek mindenkitől egy rövid beszámolót az élményeiről.

Hogyan hatott rád, hogy belekukkanthattál a jövőbe? A max. egyoldalas írásművet legkésőbb vasárnap este 8-ig mindenki küldje el az e-mail címemre!

Abban bíztam, hogy ha nekem nem is, de majdani önmagatoknak elhiszitek, hogy a matematika nélkülözhetetlen része a mindennapjainknak. Van, ahol ez egyértelműen kitűnik, van, ahol a háttérben bújkál meg, de mindenütt ott van valamilyen formában.

Egyet azonban feltétlenül tartsatok szem előtt!

A futuroszköp nem időgép. Rengeteg alternatív idővonal létezik. Az, hogy épp melyiket sikerül befogni rajta, az nagyban függ az alany érzéseitől, gondolataitól, pillanatnyi vágyaitól. Vagyis amit láttatok, korántsem biztos, hogy úgy is történik majd. A döntés a tietek, azzá válhattok, amivé csak akartok. Rajtatok áll, a ti kezetekben van a marsallbot!

Köszönöm nektek ezt az évet, nagyszerű volt veletek dolgozni!

VÉGE

Eszterházy Károly Egyetem • 3300 Eger, Eszterházy tér 1.
Tel.: (+36-1) 460-1873 • Fax: (+36-1) 460-1822
E-mail: kiado@ofi.hu

Kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor
Raktári szám: FI-503010801/1
Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orosz Adél, Koródiné Csukás Márta
Grafikai szerkesztő: Kováts Borbála, Márton Tünde
Nyomdai előkészítés: Gados Dániel, Gados László
Terjedelem: 28,84 (A/5) ív, tömeg: 565 gramm
1. kiadás, 2019

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

Legalább
egyszer
próbáld ki,
megéri!

JÓ TANÁCSOK a TANULÁSHOZ



Többféleképpen is
olvashatunk. Tudtad?

- **Figyelmes olvasás:** minden részlet érdekel.
- **Gyorsolvasás:** már olvastad, most csak átismétled.
- **Áttekintő olvasás:** meg akarod tudni, miről is lesz szó.
- **Kereső olvasás:** bizonyos információkat keresel.



Próbáld átlátni, miről is
szól a könyv!

- Nézd meg, mit ígér a tartalomjegyzék!
- Gondold át, hogyan és miért következnek egymásra a fejezetek leckéi!
- Kutasd fel, milyen segítséget ad még a könyv a tanuláshoz!

Ne add fel, ha valami
nehezen érthető!



- Fogalmazd meg kérdések formájában is, amit nem értesz!
- Nézd meg az ábrákat is, hátha azokban rejlik a válasz!
- Ha így sem boldogulsz, megkeresheted ugyanennek a témának a magyarázatát az interneten is.
- Gondold át, kitől kérhetnél személyes segítséget!

Ha valamit szeretnél
pontosan megjegyezni,
foglalkozz vele külön is!



- Olvasás közben készíts magadnak jegyzetet!
- Készíts kérdéskártyákat a legfontosabb dolgokról!
- Oldjad meg a témához tartozó feladatokat!

Ha egy lecke vagy egy
témakör végére érsz,
értékelj!



- Mik voltak a legérdekesebb dolgok?
- Miért fontos vagy hasznos neked ez az új tudás?
- Mikor és hogyan tudnád új tudásodat hasznosítani?
- Milyen korábbi ismeretek és tapasztalatok jutottak eszedbe e rész tanulása közben?
- Mit lenne jó még megtudni?



A matematikus nem attól matematikus, hogy tud számolni, ugyanúgy, mint ahogy egy futballista sem attól focista, hogy tud futni. Persze, ezt is megteszi, ha kell, hozzátartozik a szakmájához, de azért a focista nem egy futó, aki előtt időnként ott pattog egy labda. Azért focista, mert tud mit kezdeni a labdával, ha az éppen elébe kerül. A matematikus nagyjából ugyanígy van ezzel, csak az ő labdája valamiféle végletekig absztrakt objektum.

Mérő László



A teljes tankönyv az Okosportálon is megtekinthető.



okosportál.hu



Kattanj a tudásra!