

gondolkodni jó!



$\pi \approx 3,141\,592\,653\,5$

10^{23} százezertrillió

GONDOLKODNI JÓ!

MATEMATIKA 7.

HAJDU SÁNDOR
CZEGLÉDY ISTVÁN
CZEGLÉDY ISTVÁNNÉ
NOVÁK LÁSZLÓNÉ
SÜMEGI LÁSZLÓNÉ
ZANKÓ ISTVÁNNÉ

Kerettanterv
2012

OFI



A kiadvány 2019. 02. 15-én tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/117-11/2019. számú határozattal.

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet
2. melléklet: Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyamára – 2.2.03. (Matematika),
2.3.1.1. (Emelt matematika – A variáció), 2.3.1.2. (Emelt matematika – B variáció),
4. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyama számára – 4.2.04. (Matematika),
5. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 5–12. évfolyama számára – 5.2.04. (Matematika)
megnevezésű kerettantervek előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
GYÖRFI LÁSZLÓNÉ, KEMPFNER ZSÓFIA

Alkotószerkesztő: DR. HAJDU SÁNDOR főiskolai docens

Az előző kiadásokat bírálták:
ELŐD ISTVÁNNÉ ny. felelős szerkesztő
DR. HETYEI GÁBOR tanszékvezető főiskolai tanár
KANÁSZ LÁSZLÓ ny. vezetőtanár, okl. villamosmérnök
KÖVES GABRIELLA főiskolai adjunktus
LAJOS JÓZSEFNÉ tanár, OPI-munkatárs
DR. MAROSVÁRI MIKLÓSNÉ vezetőtanár

Lektor: TÜSKÉS GABRIELLA matematika szaktárgyi szakértő

Felelős szerkesztő: BOSZNAI GÁBOR

Szerkesztő: CSÍK ZOLTÁN

Borítóterv és tipográfia: H-MOLL GRAFIKA

Fotó és grafika: ANN LUNDIN

© dr. Czeglédy István, dr. Czeglédy Istvánné, dr. Hajdu Sándor, Novák Lászlóné,
dr. Sümegi Lászlóné, Zankó Istvánné, Eszterházy Károly Egyetem, 2019

ISBN 978-963-19-8147-6 (ISBN 978-963-16-4560-6)

Eszterházy Károly Egyetem • 3300 Eger, Eszterházy tér 1.
Tel.: (+36-1) 460-1873 • Fax: (+36-1) 460-1822 • E-mail: kiado@ofi.hu

Kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor • Raktári szám: NT-4209-7/UJ-K
Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos • Műszaki szerkesztő: Knausz Valéria
Terjedelem: 37,08 (A/5) ív • Tömeg: 605 gramm • 6. átdolgozott kiadás, 2019
Nyomdai előkészítés: WeeP Bt.

Nyomta
Felelős vezető:

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ	7
1. GONDOLKOZZ ÉS SZÁMOLJ!	9
Mit tanultunk a számokról?	9
Hatványozás	14
A hatványozás azonosságai	16
1-nél nagyobb számok normálalakja	19
Számelmélet	21
Osztó, többszörös, oszthatósági szabályok	21
Törzsszámok, összetett számok	26
Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös	29
Racionális számokkal végzett műveletek	32
Összevonás	32
Közös osztó, közös többszörös alkalmazása	36
Szorzás, osztás	38
Mennyiségek törtrésze	42
Arány, arányos osztás	47
Százalékszámítás	50
Kamatos kamat	55
Statisztikai számítások	56
Valószínűségi kísérletek	60
Gyakorló- és fejtörő feladatok	64
Tudáspróba	68
2. HOZZÁRENDELÉS, FÜGGVÉNY	69
Hozzárendelések vizsgálata	69
Függvények értelmezése, vizsgálata	73
Egyenes arányosság	78
Lineáris függvény	83
A sorozat mint függvény	90
Fordított arányosság	92
Gyakorló- és fejtörő feladatok	96
Tudáspróba	100

3. EGYBEVÁGÓSÁG	101
Ismerkedés a pont-pont függvényekkel	101
Az elmozdulás megadása irányított szakasszal	107
Eltolás	111
Tengelyes tükrözés, tengelyesen szimmetrikus síkidomok	113
Középpontos tükrözés, középpontosan szimmetrikus síkidomok	116
Szögpárok	122
Az elfordulás mértéke	124
Forgatás, forgásszimmetrikus síkidomok	126
Gyakorló- és fejtörő feladatok	131
Tudáspróba	133
4. ALGEBRA	135
Műveleti tulajdonságok	135
Ismerkedés az algebrai kifejezésekkel	137
Algebrai kifejezések helyettesítési értékének meghatározása	139
Egynemű, különmemű algebrai kifejezések	141
Egynemű algebrai kifejezések összevonása	142
Egytagú kifejezés szorzása, osztása egytagú kifejezéssel	146
Többtagú kifejezés szorzása egytagú kifejezéssel	148
Többtagú kifejezés szorzattá alakítása kiemeléssel	151
Algebrai egészekkel végzett műveletek gyakorlása	154
Egyenlet, egyenlőtlenség, azonosság, azonos egyenlőtlenség	155
Egyenletek megoldása a két oldal egyenlő változtatásával	156
Egyenlőtlenségek megoldása a két oldal egyenlő változtatásával	162
Törtegyűthetős egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása	165
Szöveges feladatok megoldása egyenlettel, egyenlőtlenséggel	171
Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása	177
Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásának gyakorlása	182
Tudáspróba	184
5. SÍKIDOMOK, TESTEK	185
Alapfogalmak, alaptételek	185
Síkidomok, sokszögek	186
Háromszögek	190
A háromszögek szerkesztése	198
Négyszögek	208
A trapéz szerkesztése	212
Paralelogramma	214
A paralelogramma szerkesztése	218

A sokszögek területe	221
A négyszögek területe	222
Tetszőleges sokszög területe	229
Vegyes feladatok	230
Szabályos sokszögek	231
A kör	233
A kör kerülete	234
A kör területe	238
Sokszöglapokkal határolt testek	241
A hasáb	243
A hasáb származtatása, hálójá, felszíne	243
Az egyenes hasáb térfogata	246
Az egyenes körhenger	253
Az egyenes körhenger származtatása	253
Az egyenes körhenger felszíne	255
Az egyenes körhenger térfogata	257
Fejtörő feladatok	259
Feleletválasztásos feladatok	262
Tudáspróba	263
6. ÖSSZEFOGLALÓ	265
Számтан, számelmélet, algebra	265
Függvények	269
Geometria, mérés	273
7. KISLEXIKON	277

A Wikipédiáról származnak a következő fotók (a szám az oldalszámot, a betű az oldalon belüli sorrendet jelöli, a kép után a szerző, majd zárójelben a licenc típusa látható, ahol nincs, az szabad felhasználású kép. Bővebben: http://commons.wikimedia.org/wiki/Commons/Copyright_tags):
9, 20, 23 Adam Jones (cc-by-sa 3.0), 24 Lodo27 (cc-by-sa 3.0), 47, 51 Ciar (cc-by-sa 3.0), 60, 64 Tigerente (cc-by-sa 3.0),
69 Richard Bartz (cc-by-sa 3.0), 81 Terence Ong (cc-by 2.5), 110 Fanny Schertzer (cc-by-sa 3.0), 121, 135 Georg Johann Lay (cc-by-sa 3.0), 147, 176, 256, 265

MÉRTÉKEGYSÉGEK

A mértékegységek nemzetközi rendszerét, az SI mértékegységrendszert az Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet 1960-ban fogadta el.

Magyarország már 1960 óta az SI figyelembevételével szabályozta a mértékegységek használatát. Az 1976-ban kiadott rendelet előírta az SI-re történő kötelező áttérést, majd 1980-tól kezdve a más mértékegységek (hivatalos) használatának a tilalmát. 1991-ben az országgyűlés az 1976 óta ismertté vált tudományos eredmények figyelembevételével ismét meghatározta a szabványos magyar mértékegységrendszer alapjait. Jelenleg ez a szabályozás van érvényben.

☉ *Valamely mértékegység többszöröseit és törtrészeit előtagokkal, más szóval prefixumokkal fejezik ki. Az előtagok rendszere a 15. oldalon látható.*

Az SI alapegységei közül matematikaórán hármat használunk:

A **hosszúság** alapegysége a **méter** (jele: **m**). A méter annak az útnak a hosszúsága, amelyet a fény vákuumban a másodperc 299 792 458-ad része alatt megtesz. A Párizson átmenő délkör hossza körülbelül 40 000 000 m (ennek alapján értelmezték a métert az 1790-es években).

Az **idő** alapegysége a **másodperc** (jele: **s**, a latin secundum szó rövidítése). A másodpercet a céziumatom sugárzásának segítségével értelmezik. A másodperc többszöröse:

perc (= minutum; jele min), 1 min = 60 s

óra (= hora; jele h), 1 h = 60 min = 3600 s

Nagyobb időtartam mérésére használjuk a napot és az évet.

Tömegmérés: alapegysége az SI-ben a **kilogramm** (jele: **kg**).

A kilogramm az 1889. évben Párizsban megtartott 1. Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet által a tömeg etalonjának elfogadott platina-irídium henger tömege. Körülbelül ekkora az 1 dm³ tiszta 4 °C-os víz tömege is.

A kilogramm törtrésze a **gramm** (jele: g). 1 kg = 1000 g.

Korábban a gramm volt a tömeg alapegysége.

A kilogramm többszöröse a **tonna** (jele: t). 1 t = 1000 kg.

Űrtartalom: alapegysége a **liter** (jele: **l**; nem SI alapegység).

1 l ≈ 1 dm³ (nagyon kicsi az eltérés). 1000 l ≈ 1 m³.

Az alapegység hányszorosa (mekkora része)	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
Hosszúságmérés mértékegységei Jelölés	kilo- méter km			méter m	deci- méter dm	centi- méter cm	milli- méter mm
Tömegmérés mértékegységei Jelölés	kilo- gramm kg		deka- gramm dkg, dag	gramm g	deci- gramm dg	centi- gramm cg	milli- gramm mg
Űrtartalom mérés mértékegységei Jelölés		hekto- liter hl		liter l	deci- liter dl	centi- liter cl	milli- liter ml

A dekagrammot a legtöbb országban nem ismerik. Magyarországon a mindennapi életben a dkg rövidítést alkalmazzuk, de hivatalosan a dag rövidítés a szabványos.

ELŐSZÓ

KEDVES GYEREKEK!

Ezt a könyvet – az előző évfolyamok könyveihez hasonlóan – úgy állítottuk össze, hogy a korábban tanultakra támaszkodva, feladatok megoldásával juthatsz el az új ismeretekhez. A több száz érdekes feladat megoldása olyan erőpróba, amely elősegítheti a problémameglátó és -megoldó képességed fejlődését, a matematika fontosságának felismerését, végeredményben a matematika megszeretését.

„A problémamegoldás a legjellemzőbb emberi tevékenység. A problémamegoldás a karaktert is fejleszti. Mert, hogyha nehéz problémánk adódik és azon hetekig, hónapokig, sőt élethosszig gondolkodni kell, az karakter nélkül nem megy. Ahhoz kitartás kell és akaraterő. Az ember tanulja meg, hogy nem adja fel még a reménytelennek látszó eseteket sem.” (Pólya György)

☉ *Kék háttéren érdekes megjegyzéseket, történeti vonatkozásokat olvashatsz.*

Figyeld meg!

Színes alapra, ezzel a színnel nyomtattuk a továbblépéshez nélkülözhetetlen **értelmezéseket, összefüggéseket, tételeket** és szabályokat. Az új **fogalmakat** piros betűkkel emeltük ki.

☉ *A margón sokszor példák segítik az új ismeretek megértését.*

Bizonyítás

7. osztályban már egyes tételek bizonyításával is megismerkedünk.

1. példa

A kidolgozott mintapéldákat ilyen keretbe írtuk.

A példák figyelmes elolvasása, illetve önálló megoldása segítheti a tananyag jobb megértését, a feladatok értelmezését.

☉ *A margón további magyarázatokat, szemléltető ábrákat is találhatsz.*

FELADATOK

1

A legegyszerűbb **alapozó feladatok** sorszámát üres karikába szedtük.

5

A tanultak közvetlen alkalmazását szolgáló **gyakorlófeladatok** jele.

12

Az önálló ötletet kívánó **fejtörő feladatokat** csillag jelöli.

☉ *Az itt olvasható rávezető kérdések, magyarázatok segíthetik a feladatok helyes megoldását.*

Figyelempróba

30

Minden tantárgy tanulása során, sőt az élet minden területén fontos, hogy képes legyél **a szövegeket elemezni, helyesen értelmezni**.

Ilyen színű háttérre nyomtattuk azokat a feladatokat, amelyek **célja a szövegértelmező képességednek a fejlesztése**.

Kísérletezz!

31

A tanultakat nemcsak a matematikaórákon, hanem **a mindennapi életben is alkalmazzunk kell**. A zöld háttérre nyomtatott feladatok elsősorban ezt a képességedet bontakoztathatják ki.

A legtöbb oldal alján érdekes, fejtörő feladatokat találsz. Például:

Többet ésszel ...



A Három vándor megebédelt egy vendéglőben. A pincér 10-10, összesen 30 garast kért tőlük. Ám a vendéglős 5 garast visszaküldött nekik a pincérrel. A pincér az 5 garasból zsebre tett 2-t, és a vándoroknak 1-1 garast adott vissza. Így a vándoroknak 9-9, összesen 27 garasba került az ebéd, és a pincér zsebében is lapult 2 garas. De hová lett a hiányzó 1 garas?

© Régi csalafinta feladat

A könyv margóján szürke pontsor jelzi a mélyebb megfontolásokat igénylő **kiegészítő anyagrészeket**. Ezek a fejezetek kibővítik, elmélyíthetik a matematikai ismereteidet, fejleszthetik a problémameglátó és -megoldó képességedet. Ha kellően fel akarsz készülni a középiskolai tanulmányokra, akkor célszerű tanulmányoznod ezeket a fejezeteket, megoldanod az itt található feladatokat.

B7

A kiegészítő feladatok sorszáma **B** betűvel kezdődik.

© A feladatgyűjteményekre a margón is felhívjuk a figyelmedet. Például:

Gyakorló

5.46–5.47.;

Feladatgyűjtemény

1.1.38–48.

A tankönyv minden olyan szükséges tananyagrészt tartalmaz, amely az átlagos matematikatudás eléréséhez elegendő. Ha ennél biztosabb tudást szeretnél elérni, akkor az alábbi feladatgyűjteményekre is szükség lehet.

Hajdu Sándor: **Matematika 7. gyakorló**

A legfontosabb ismeretek átismétlésében, gyakorlásában segít.

Hajdu Sándor: **Matematika 7–8. Feladatgyűjtemény**

Összetett feladatokat tartalmaz.

Hajdu Sándor **Matematika 7. Felmérő feladatsorok**

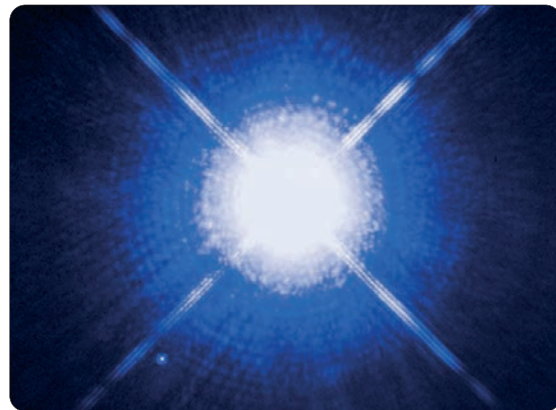
A feladatsorok megoldásával ellenőrizheted a tudásod.

Hajdu Sándor: **Matematika 7. tankönyv feladatainak megoldása**

Az 7. osztályos tankönyv feladatainak megoldását tartalmazza.

1. GONDOLKOZZ ÉS SZÁMOLJ!

Ebben a fejezetben a korábban tanultak átismétlésén és begyakorlásán túlmenően olyan új fogalmakkal ismerkedünk meg, amelyek nemcsak az összefüggések jobb megértését, hanem azok gyakorlati alkalmazását is hatékonyabbá tehetik.

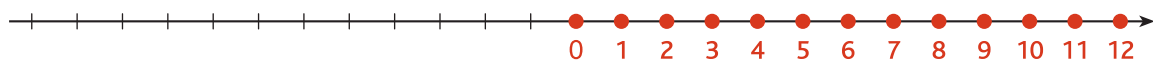


A tőlünk látható legközelebbi csillag, a Szíriusz (és törpe kísérőjének) képe a Hubble űrtávcső felvétele alapján. A Nap és a Szíriusz távolsága kb. 81 000 000 000 000 km

MIT TANULTUNK A SZÁMOKRÓL?

Emlékeztető

A természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$



A természetes számokat felírhatjuk helyiértékes írásmóddal. Például a következő (tízes számrendszerben felírt) természetes szám jelentése:

$$50\,315 = 5 \cdot 10\,000 + 0 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

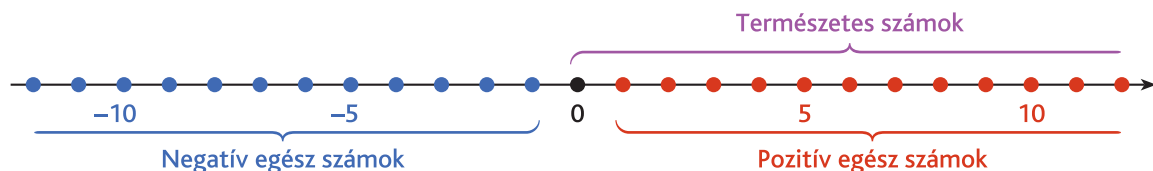
Egész számoknak nevezzük az olyan számokat, amelyek felírhatók két természetes szám különbségeként.

Jelölés: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

Az egész számok: a természetes számok és azok ellentettjei.

☉ Az egész számok végtelenül sokféleképpen írhatók fel két természetes szám különbségeként:

$$\begin{aligned} -3 &= 0 - 3 = 1 - 4 = \dots \\ 0 &= 0 - 0 = 1 - 1 = \dots \\ 3 &= 3 - 0 = 4 - 1 = \dots \end{aligned}$$



Racionális számoknak nevezzük az olyan számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, vagyis törtalakban (a nevező nem nulla).

Jelölés: $\mathbb{Q} = \{\text{Racionális számok}\}$

Az egész számok is fölírhatók törtalakban, ezért **a racionális számok a 0, a pozitív és a negatív egész számok, valamint a pozitív és a negatív törtszámok.**

A racionális számok felírhatók **tizedestört** alakban is.

Például a következő racionális szám jelentése:

$$753,016 = 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{100} + 6 \cdot \frac{1}{1000} = 753 \frac{16}{1000}$$

☉ Racionális számok például:

$$5; -5; 0; \frac{3}{4}; -\frac{3}{4}$$

A racionális számok végtelenül sokféleképpen írhatók fel törtalakban:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{-75}{-100} = \dots$$

© Végezd el az $57 : 55$ osztást, és magyarázd meg, miért ismétlődik a hányadosban a 3 és a 6 számjegyekből álló szakasz!

A racionális számok vagy **véges tizedestört**, vagy **végtelen szakaszos tizedestört** alakban írhatók fel. Véges tizedestört alakban írható fel a racionális szám, ha törtalakja úgy egyszerűsíthető, illetve bővíthető, hogy a nevezője 1, 10, 100, 1000 stb. lesz. Ellenkező esetben olyan végtelen tizedestört alakban írható fel a tört, amelyben egy szakasz újra és újra ismétlődik.

$$\frac{57}{40} = 57 : 40 = 1,425; \text{ véges tizedestört, mert } \frac{57}{40} = \frac{1425}{1000} = 1,425.$$

$$\frac{57}{55} = 57 : 55 = 1,0363636... = 1,0\dot{3}\dot{6}; \text{ végtelen szakaszos tizedestört.}$$

© A racionális számok a számegyenesen mindenütt sűrűn helyezkednek el, ezért folytonos vonallal ábrázoljuk őket, de ezt a vonalat nem folytonosnak képzeljük el, mert a számegyenes bármilyen kicsi szakaszán végtelen sok irracionális szám is van.

Végtelen sok olyan tizedestört írható föl, amely nem véges, és amelyben nincsenek ismétlődő szakaszok. Például:

4,101 001 000..., mindig eggyel több nulla van egy-egy 1-es után;
3,240 856 823..., nincs szabályosság a számjegyek ismétlődésében.

Ezek nem racionális, hanem **irracionális számok**.

© Például:

$$+3 \text{ ellentettje } -3, \text{ mert } +3 + (-3) = 0;$$

$$-\frac{2}{3} \text{ ellentettje } +\frac{2}{3}, \text{ mert } -\frac{2}{3} + \left(+\frac{2}{3}\right) = 0;$$

$$0 \text{ ellentettje } 0, \text{ mert } 0 + 0 = 0.$$

$$|+3| = +3; \quad |0| = 0; \quad |-3| = +3$$

$$\frac{2}{3} \text{ reciproka } \frac{3}{2}, \text{ mert } \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1;$$

$$-2 \text{ reciproka } -\frac{1}{2}, \text{ mert } (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1;$$

$$1,25 = \frac{125}{100} \text{ reciproka } \frac{100}{125} = 0,8, \\ \text{mert } \frac{125}{100} \cdot \frac{100}{125} = 1.$$

Emlékeztető

Egy szám ellentettjén azt a számot értjük, amelyet a számhoz hozzáadva az összeg 0.

Vegyük észre, hogy egy szám ellentettje megegyezik a szám (-1) -szeresével.

A pozitív szám és a nulla abszolútértéke önmaga, a negatív szám abszolútértéke a szám ellentettje.

Egy szám abszolútértéke mindig nemnegatív szám.

Egy 0-tól különböző szám reciprokán azt a számot értjük, amellyel a számot megszorozva a szorzat 1.

A 0-nak nem értelmezhetjük a reciprokát: $0 \cdot \boxed{?} = 1$
Nincs olyan szám, amelyet a keretbe írhatnánk úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen.

© Segít a számok felírásában a tízes helyiérték-táblázat.

FELADATOK

1 a) Írd fel számjegyekkel **tízes számrendszerben** a következő **természetes számokat**!

a = tizenötmillió-kétszázhuszonkétezer-ötszázhat;

b = tizenötezermillió-hétezer-háromszáznég;

c = háromszázötmillió-ötszázhuszonhat.

b) Írd fel **tizedestört alakban** a következő **racionális számokat**!

e = kétszázöt egész háromezer-négyszázhuszonöt tízezred;

f = négyezer-húsz egész negyvenkilenc százezred;

g = hetven egész kétszáz tízezred.

2

Írd fel **törtalakban**, majd egyszerűsítsd az adott számokat!

$$a = 0,25; \quad b = 2,5; \quad c = 0,000\,025; \quad d = 5,0354; \quad e = 2,100$$

◎ Például:

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

3

Írd fel **tizedestört alakban** a törtalakban adott számokat!

$$a = \frac{1}{10}; \quad b = \frac{11}{40}; \quad c = \frac{3}{4}; \quad d = \frac{125}{1000}; \quad e = \frac{73}{25}; \quad f = \frac{25}{18}; \quad g = \frac{4}{7}; \quad h = \frac{65}{99}$$

◎ Például:

$$\frac{11}{40} = 11 : 40 = 0,275$$

4

Írd fel törtalakban a **vegyesszám alakban** adott számokat!

$$p = 2\frac{4}{5}; \quad r = 12\frac{1}{4}; \quad s = 2\frac{45}{57}; \quad t = 3\frac{25}{33}; \quad u = 1\frac{243}{500}; \quad v = 4\frac{137}{990}$$

◎ Például:

$$2\frac{4}{5} = 2 + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

5

Írd fel a következő racionális számok **ellentettjét** és **abszolútértékét**!

$$a = 0; \quad b = -2,5; \quad c = 5,4; \quad d = -\frac{5}{4}; \quad e = \frac{7}{2}$$

◎ Például:

$$-(-2) = 2; \quad |-2| = 2$$

6

Írd fel a következő racionális számok **reciprokát**!

$$a = \frac{1}{2}; \quad b = \frac{4}{5}; \quad c = -\frac{3}{4}; \quad d = 5; \quad e = 0,3; \quad f = 1,75$$

◎ Például: $0,3 = \frac{3}{10}$

$$\text{reciproka: } \frac{10}{3} = 3,3$$

7

Kerekítsd a számokat!

$$\begin{array}{llllll} \text{a) tízesre:} & a = 234; & b = 302; & c = 4567; & d = 44,97; & e = 2; \\ \text{b) századra:} & f = 2353; & g = 678; & h = 67,8; & i = 2301; & j = 49,99; \\ \text{c) tizedre:} & k = 21,34; & l = 0,05; & m = 0,037; & n = 2,5; & o = 9,97 \end{array}$$

◎ Fogalmazd meg!

Hogyan kapjuk meg egy szám

tízesre kerekített;
századra kerekített;
ezresre kerekített
értékét?

Hogyan kapjuk meg egy tizedestört

egyesre kerekített;
tizedre kerekített;
századra kerekített
értékét?

8

a) Melyik lehet az a legkisebb, illetve legnagyobb természetes szám, amelynek tízesekre kerekített értéke

$$e = 340; \quad f = 300; \quad g = 10\,000; \quad h = 3\,405\,120?$$

A megoldást ábrázold külön-külön számegegyenesen!

b) Hány olyan egész szám van, amelynek századokra kerekített értéke 5400?

Melyik ezek közül a legkisebb, melyik a legnagyobb?

c) Hány olyan, legfeljebb tizedeket tartalmazó szám van, amelynek egyesekre kerekített értéke 4?

Melyik ezek közül a legkisebb, melyik a legnagyobb?



Lotte ötféle ajándéktárgy közül válogatott, amelyek ára darabonként 1 €, 4 €, 16 €, 64 € és 256 € volt. Végül mindegyikből vásárolt legfeljebb 3 darabot, és így összesen 745 €-t fizetett ki értük. Mennyibe került annak az árunak darabja, amelyikből legtöbbet vásárolt?

Fejítő!

◎ Hogyan kapjuk meg a szám valamely nem tízes számrendszerbeli alakját?

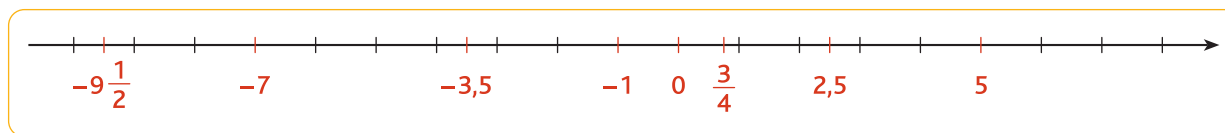


Rakd növekvő sorrendbe a következő számokat!

$$9,121212; \quad 9,12122; \quad 9,12\dot{1}2; \quad 9,12\dot{1}\dot{2}; \quad 9,1\dot{2}12; \quad 9,\dot{1}212$$

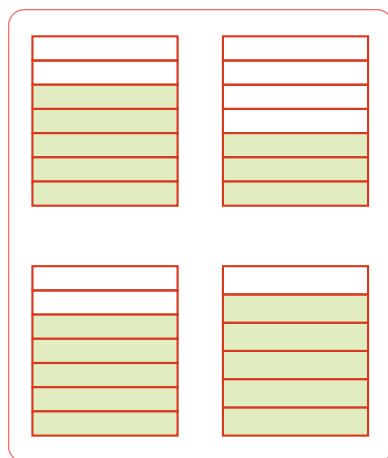
A RACIONÁLIS SZÁMOK NAGYSÁG SZERINTI ÖSSZEHASONLÍTÁSA

Hasonlítsuk össze a következő számokat:



☉ Például:

$2,5 < 5$, mert $|2,5| < |5|$
 $-7 < -3,5$, mert $|-7| > |-3,5|$
 $-7 < 0$, illetve $0 < 2,5$
 $-7 < +2,5$, mert $-7 < 0 < 2,5$



Emlékeztető

Két pozitív szám közül az a nagyobb, amelyiknek nagyobb az abszolútértéke.

Két negatív szám közül az a nagyobb, amelyiknek kisebb az abszolútértéke.

A 0 a pozitív számoknál kisebb és a negatív számoknál nagyobb.

Minden pozitív szám nagyobb bármely negatív számnál.

Egyenlő nevezőjű törtek közül, ha a számláló és a nevező is pozitív, az a nagyobb, amelyiknek nagyobb a számlálója.

Például: $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$

Egyenlő számlálójú törtek közül, ha a számláló és a nevező is pozitív, az a nagyobb, amelyiknek kisebb a nevezője.

Például: $\frac{5}{7} < \frac{5}{6}$

Két törtet általában úgy hasonlíthatunk össze, hogy egyenlő nevezőjű (vagy egyenlő számlálójú) alakban írjuk fel őket.

Például: $\frac{3}{5} ? \frac{2}{3}$; $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$; $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$; $\frac{9}{15} < \frac{10}{15}$, vagyis $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

Negatív törtek összehasonlítása: $-\frac{3}{8} > -\frac{5}{8}$, mert $|\frac{3}{8}| < |\frac{5}{8}|$

☉ Egy tört értéke nem változik, ha a számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a 0-tól különböző számmal megszorozzuk vagy elosztjuk.

☉ Könnyű a számok ábrázolása, ha megfelelően választjuk az egységet a számegyenesen.

FELADATOK

9 a) Ábrázold a számegyenesen a következő számokat!

$a = 0$; $b = 1$; $c = -1$; $d = -\frac{1}{2}$; $e = 0,75$; $f = -0,25$;
 $g = -0,5$; $h = \frac{5}{8}$; $i = \frac{5}{4}$; $j = 1,75$; $k = -2$; $l = \frac{8}{2}$

b) Írd fel növekvő sorrendben az a) feladatban adott számokat!

c) Az a) feladatban adott számok közül melyikre igaz, hogy

A: 3-nál kisebb és pozitív;

B: 1-nél kisebb vagy háromnál nagyobb;

C: nem kisebb $-0,25$ -nél;

D: törtszám vagy nempozitív szám?

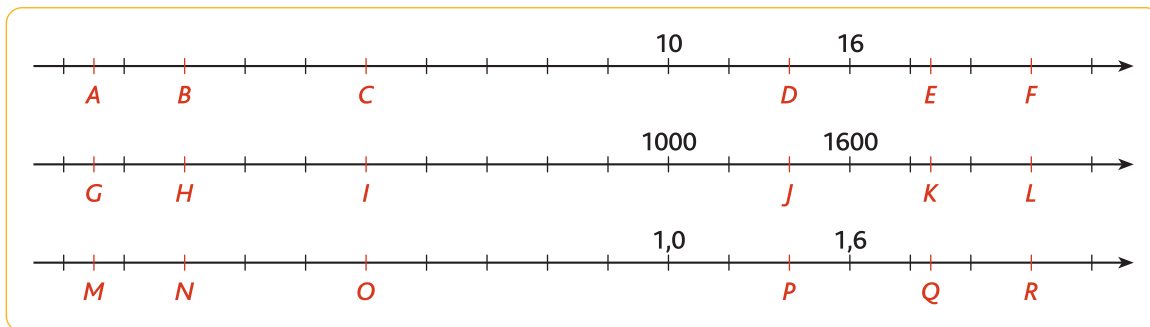
☉ Indokold is meg döntésedet!



Az adott három szám közül melyiket melyik halmazba tennéd?

$\frac{41}{50}$; $\frac{8}{27}$; $\frac{210}{27}$ $A = \left\{ \frac{1}{4}; \frac{7}{25}; \frac{5}{8}; \frac{30}{5}; \dots \right\}$; $B = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{4}{7}; \frac{11}{12}; \frac{34}{18}; \dots \right\}$

10 Olvasd le a számegyenesről a betűkkel jelzett számokat!



11 Írd föl növekvő sorrendben a következő racionális számokat!

- a) $a = -1,23$; $b = 0,2$; $c = 1,4$; $d = 1,38$; $e = 1,04$; $f = -0,5$;
 b) $a = 0$; $b = \frac{5}{7}$; $c = \frac{3}{7}$; $d = \frac{9}{7}$; $e = \frac{7}{7}$; $f = -\frac{6}{7}$; $g = -\frac{2}{7}$;
 c) $a = -1$; $b = \frac{7}{2}$; $c = \frac{7}{7}$; $d = \frac{7}{5}$; $e = \frac{7}{8}$; $f = -\frac{7}{1}$; $g = -\frac{7}{9}$;
 d) $a = \frac{7}{8}$; $b = \frac{7}{4}$; $c = \frac{5}{6}$; $d = \frac{3}{4}$; $e = -\frac{6}{6}$; $f = -\frac{1}{8}$; $g = -\frac{3}{4}$;
 e) $a = \frac{30}{72}$; $b = \frac{75}{24}$; $c = -\frac{95}{36}$; $d = \frac{63}{24}$; $e = -\frac{50}{18}$; $f = -2\frac{10}{18}$

☉ Melyik a legkisebb, melyik a legnagyobb?

12 Pótold a hiányzó számokat!

a) $\frac{7}{4} = \frac{\square}{28} = \frac{\square}{12} = \frac{35}{\square}$; b) $\frac{54}{72} = \frac{\square}{24} = \frac{6}{\square} = \frac{9}{\square}$

☉ Emlékszel a törtek egyszerűsítésére, bővítésére?

13 Mely egész számok írhatók a keret helyére?

a) $\frac{5}{6} < \frac{\square}{30} \leq \frac{7}{6}$; b) $\frac{7}{20} \leq \frac{7}{\square} < \frac{7}{15}$; c) $\frac{8}{15} < \frac{\square}{30} \leq \frac{8}{10}$

Gyakorló
1.01–1.44.;
Feladatgyűjtemény
2.1.04–13.

14 A következő tizedestört alakban adott számok közül melyik racionális szám?

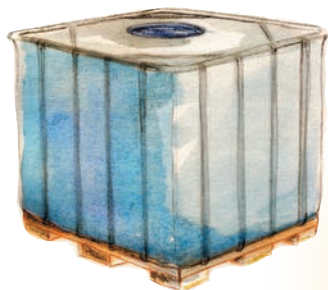
- $a = 3,141\ 414\ \dots$ a kétjegyű szakasz újra és újra ismétlődik;
 $b = 3,141\ 141\ 114\ \dots$ egy-egy 4-es előtt mindig eggyel több egyes van;
 $c = 3,141\ 592\ 653\ \dots$ nincs szabályosság a számjegyek ismétlődésében;
 $d = 3,14$ véges tizedestört;
 $e = 2,3\dot{4}5\dot{6}$ végtelen szakaszos tizedestört

☉ Mit tanultunk a racionális számok tizedestört alakjáról?

Állítsd növekvő sorba a törteket!

a) $\frac{2005}{2006}$; $\frac{2006}{2007}$; $\frac{2007}{2008}$; $\frac{2008}{2009}$; b) $\frac{2006}{2005}$; $\frac{2007}{2006}$; $\frac{2008}{2007}$; $\frac{2009}{2008}$

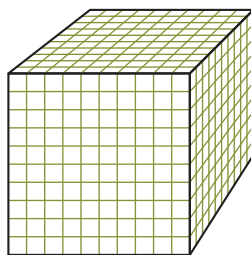
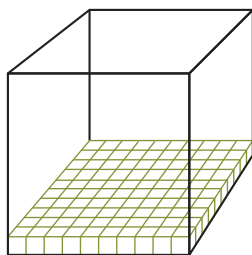
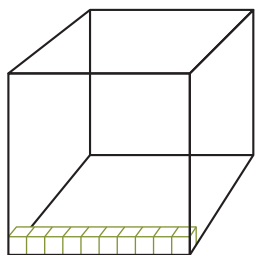
Fejtrő!



HATVÁNYOZÁS

1. példa

Hány liter víz fér az 1 m³ térfogatú, kocka alakú esővíztartályba?



$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3.$$

Az 1 m³ térfogatú kocka egy éle mentén 10 db 1 dm³-es kocka rakható le; egy lapjára 10 ilyen sor, 10 · 10 db 1 dm³-es kocka helyezhető el; a kockába 10 ilyen réteg, 10 · 10 · 10 db 1 dm³-es kocka fér.

Hatványalakban: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$

A 10 **harmadik hatványa** olyan háromtényezős szorzat, amelynek minden tényezője maga a 10. Az 1 m³ térfogatú tartályba 1000 l víz fér.

2. példa

Öt pénzérmével dobunk.

Hány különböző kimenetele lehet a dobásnak?



© Sok olyan feladat van, amelyben egy számot ismételtén önmagával kell szoroznunk, ezért érdemes egy rövidített, célszerűbben alkalmazható írásmódot bevezetnünk.

Szorzatalak:

Hatványalak:

Az ötforintossal dobva fej vagy írás az eredmény: 2

$$= 2^1$$

Az ötforintoson kapott eredménytől függetlenül a tízforintoson is kétféle eredményt kaphatunk.

A két pénzérmén a lehetőségek száma:

$$2 \cdot 2$$

$$= 2^2$$

Három érmével dobva a lehetőségek száma:

$$2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 2^3$$

Négy érmével dobva a lehetőségek száma:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 2^4$$

Öt érmével dobva a lehetőségek száma:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 2^5$$

Egy szám 2., 3. stb. hatványa egy olyan kéttényezős, háromtényezős stb. szorzat, amelyben minden tényező maga a szám.

© Például:

$$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0;$$

$$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$$

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27;$$

$$0,1^3 = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,001;$$

$$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125;$$

$$0^1 = 0; \quad 1^1 = 1; \quad 3^1 = 3;$$

$$0,1^1 = 0,1; \quad (-5)^1 = -5;$$

$$1^0 = 1; \quad 3^0 = 1; \quad 0,1^0 = 1; \quad (-5)^0 = 1$$

Emlékeztető

Egy a szám n -edik hatványa olyan n -tényezős szorzat, amelynek minden tényezője maga az a szám (az n természetes szám, $n > 1$).

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}} = a^n$$

Kitevő

Alap

Hatvány

Megállapodás szerint egy szám első hatványa maga a szám: $a^1 = a$

A nullától különböző számok nulladik hatványa 1: $a^0 = 1$, $a \neq 0$

A 0^0 hatványt nem értelmezzük.

FELADATOK

15 Írd fel hatványalakban a szorzatokat! Számítsd ki az értéküket!

$$a = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3; \quad b = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1; \quad c = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1);$$

$$d = (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1); \quad e = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right); \quad f = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

16 Írd fel szorzatalakban, majd határozd meg a hatvány értékét!

$$a = 5^2; \quad b = (-2)^3; \quad c = (-2)^4; \quad d = 10^3; \quad e = 0,1^5; \quad f = (-1)^9$$

17 Értelmezd a következő hatványokat!

$$a = 5^1; \quad b = 1^5; \quad c = 0^5; \quad d = 5^0; \quad e = (-1,5)^0$$

18 Írd föl növekvő sorrendben a következő számokat!

a) $(-10)^4$; $(-10)^3$; -10^2 ; 10^1 ; 10^0 ; $(-10)^0$; 10^2

b) $(-0,1)^4$; $(-0,1)^3$; $-0,1^2$; $0,1^1$; $0,1^0$; $(-0,1)^0$; $0,1^2$; $0,1^3$

19 Írd le számjegyekkel, majd 10 hatványaként a következő számokat!

egymillió; tíz; egy; százezer; százbillió; tízezermillió.

☉ *Negatív vagy pozitív számot kapunk-e, ha egy negatív szám páros kitevőjű hatványát, illetve páratlan kitevőjű hatványát képezzük? Miért?*

$(-10)^2 \neq -10^2$! Miért?

Gyakorló
1.45–1.52.;
Feladatgyűjtemény
2.3.01–07.

☉ *A táblázat segít.*

Valamely mértékegység többszöröseit, illetve törtrészeit az egység elé illesztett, egy-egy szorzót jelentő **előtaggal** képezhetjük. A Nemzetközi Mértékegységrendszerben a táblázatban adott előtagokat (SI-prefixumokat) használhatjuk. Figyeljük meg, hogy a tízes számrendszerben leírt nagy, illetve kicsi számok értelmezését megkönnyíti, ha ezeket a számokat 10 hatványainak segítségével fejezzük ki.

* A hekto, deka, deci és centi előtagokat mi csak a következő egységek esetén alkalmazzuk:

hektoliter (jele hl),
dekagramm (jele dag vagy dkg),
deciliter (jele dl),
deciméter (jele dm),
centiméter (jele cm),
centigramm (jele cg),
centiliter (jele cl).

Előtag neve	Előtag jele	Az előtaggal jelképezett szorzó	
exa	E	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
peta	P	1 000 000 000 000 000	10^{15}
tera	T	1 000 000 000 000	10^{12}
giga	G	1 000 000 000	10^9
mega	M	1 000 000	10^6
kilo	k	1 000	10^3
hekto*	h	100	10^2
deka*	da	10	10^1
deci*	d	0,1	$1/10^1$
centi*	c	0,01	$1/10^2$
milli	m	0,001	$1/10^3$
mikro	μ	0,000 001	$1/10^6$
nano	n	0,000 000 001	$1/10^9$
piko	p	0,000 000 000 001	$1/10^{12}$
femto	f	0,000 000 000 000 001	$1/10^{15}$
atto	a	0,000 000 000 000 000 001	$1/10^{18}$

▶ A HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI

AZONOS ALAPÚ HATVÁNYOK SZORZATA

3. példa

Írjuk fel hatványalakban a következő szorzatot: $2^6 \cdot 2^7$

$$2^6 \cdot 2^7 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{6 db tényező}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{7 db tényező}} = 2^{6+7} = 2^{13}$$

összesen (6 + 7) db tényező

⊙ A közös alapot a kitevők összegére emeljük.

A számítás során felhasználtuk, hogy a szorzat tényezőit tetszőlegesen csoportosíthatjuk, ezért a zárójeleket el is hagyhatjuk.

AZONOS ALAPÚ HATVÁNYOK HÁNYADOSA

4. példa

Írjuk fel hatványalakban a következő hányadost: $\frac{2^6}{2^4}$

Egymás után négyszer egyszerűsíthetünk 2-vel:

$$\frac{2^6}{2^4} = \frac{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{6 db tényező}}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{4 db tényező}}} = \frac{\overset{\text{(6-4) db}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2^{6-4}}{1} = 2^2$$

⊙ A közös alapot a számláló és a nevező kitevőjének különbségére emeljük.

FELADATOK

20 Írd fel a szorzatokat hatványalakban! Határozd meg a szorzatok értékét!

- a) $2^3 \cdot 2^2$; $2^4 \cdot 2^1$; $3^2 \cdot 3^4$; $5 \cdot 5^4$; $6^2 \cdot 6^2$; $10^2 \cdot 10^4$; $10 \cdot 10^6 \cdot 10^2$
- b) $0,1^3 \cdot 0,1^1$; $0,1^2 \cdot 0,1 \cdot 0,1^3$; $0,5^2 \cdot 0,5^0$; $0,2^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,2^2$
- c) $(-3)^2 \cdot (-3)^4$; $(-2)^3 \cdot (-2)^3$; $(-1)^4 \cdot (-1)^5$; $(-5)^2 \cdot (-5)$; $(-10)^3 \cdot (-10)^4$
- d) százszor száz; ezerszer ezer; százszor tízezer; ezerszer tízezer;
tízmilliószor ezer; egymilliószor egymillió; ezermilliószor ezer.

21 Írd fel a hányadosokat hatványalakban! Határozd meg az értéküket!

- a) $\frac{3^4}{3^2}$; $\frac{5^5}{5^4}$; $\frac{2^4}{2^4}$; $\frac{6^4}{6^3}$; $\frac{7^2}{7^0}$; $\frac{2^5}{2^0}$; $\frac{10^6}{10^2}$; $\frac{10^{10}}{10}$
- b) százban a tíz; százban a száz; ezerben a tíz; tízezerben a száz;
egymillióban a tízezer; egymillióban az ezer; tízmillióban a száz.

⊙ A d) feladatban hogyan szorzunk azonos alapú hatványokat? Például:

$$100 \cdot 100 = 10^2 \cdot 10^2 = 10^4 = 10\,000$$

⊙ Hogyan egyszerűsíthetjük a törteket?

A b) feladatban hogyan osztunk azonos alapú hatványokat? Például:

$$10\,000 : 100 = 10^4 : 10^2 = 10^2$$

SZORZAT HATVÁNYOZÁSA

5. példa

Határozzuk meg a következő hatvány értékét: $(2 \cdot 3)^3$

Úgy is kiszámíthatjuk, hogy először szorzunk, aztán hatványozunk.

$$(2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

Úgy is kiszámíthatjuk, hogy először hatványozunk, aztán szorzunk.

A tényezőket tetszőlegesen felcserélhetjük és csoportosíthatjuk:

$$(2 \cdot 3)^3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$$

☉ Gondolj arra, mit jelent a kitevő!

☉ A szorzat 3. hatványa egyenlő a tényezők 3. hatványának szorzatával:

$$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$$

AZONOS KITEVŐJŰ HATVÁNYOK SZORZATA

6. példa

Határozzuk meg a következő szorzat értékét: $2^3 \cdot 5^3$

Kiszámíthatjuk úgy is, hogy először hatványozunk, majd szorzunk.

$$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 8 \cdot 125 = 1000$$

Kiszámíthatjuk úgy is, hogy először szorzunk, azután hatványozunk.

$$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$$

Alkalmaztuk a tényezők felcserélhetőségét és csoportosíthatóságát.

Figyeljük meg például:

$$(2 \cdot 3)^3 = \overbrace{(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)}^{\text{Szorzat hatványozása}} = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3^3$$

$\xleftarrow{\text{Azonos kitevőjű hatványok szorzata}}$

☉ Azonos kitevőjű hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös kitevőre emeljük az alapok szorzatát:

$$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3$$

TÖRT (HÁNYADOS) HATVÁNYOZÁSA

7. példa

Határozzuk meg a következő hatvány értékét: $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

Úgy is kiszámíthatjuk, hogy először hatványozunk, aztán osztunk.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125} = 0,064$$

Kiszámíthatjuk úgy is, hogy először osztunk, azután hatványozunk.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = (0,4)^3 = (0,4) \cdot (0,4) \cdot (0,4) = 0,064$$

☉ A hányados 3. hatványa egyenlő a számláló és a nevező 3. hatványának hányadosával:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3}$$

AZONOS KITEVŐJŰ HATVÁNYOK OSZTÁSA

8. példa

Határozzuk meg a hányados értékét: $\frac{6^4}{2^4}$

☉ Azonos kitevőjű hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapok hányadosát a közös kitevőre emeljük:

$$\frac{6^4}{2^4} = \left(\frac{6}{2}\right)^4$$

Kiszámíthatjuk úgy is, hogy először hatványozunk, aztán osztunk.

$$\frac{6^4}{2^4} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1296}{16} = 81$$

Kiszámíthatjuk úgy is, hogy először osztunk, aztán hatványozunk.

$$\frac{6^4}{2^4} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{6}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{6}{2} = \left(\frac{6}{2}\right)^4 = 3^4 = 81$$

Megfigyelhető például:

Hányados hatványozása

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^3}{5^3}$$

Azonos kitevőjű hatványok osztása

HATVÁNY HATVÁNYOZÁSA

9. példa

Határozzuk meg a következő hatvány értékét: $(2^4)^3$

☉ Gondolj arra, mit jelent a kitevő!

☉ A hatványt úgy hatványozzuk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük:
 $(2^4)^3 = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12}$

Írjuk fel szorzatalakban.

$$(2^4)^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^3 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{4 \text{ tényező}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{4 \text{ tényező}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{4 \text{ tényező}} = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

összesen (3 · 4) db tényező

☉ Figyeljük meg, hogy itt az egyes előtagok más szorzót jelentenek, mint az SI-ben (lásd 15. oldal).

A számítástechnikában az adatmennyiség, a programok terjedelme stb. jellemzésére használt mértékegység a **bájt** (Byte, jele **B**). A legkisebb digitális egység a **bit** (jele **b**), amely két értéket vehet fel (0 vagy 1). A bájt általában 8 bitből álló adategység. A bájt többszörösei:

2^{10} bájt =	1024 bájt =	1 kilobájt, jele: kB
2^{20} bájt =	1 048 576 bájt = 1024 kilobájt =	1 megabájt, jele: MB
2^{30} bájt =	1 073 741 824 bájt = 1024 megabájt =	1 gigabájt, jele: GB
2^{40} bájt =	1 099 511 627 776 bájt = 1024 gigabájt =	1 terabájt, jele: TB

☉ Tippelj te is! Keresd meg az interneten, mi a helyes válasz!



2001-ben az angol Legyen Ön is milliomos! játék utolsó kérdése volt:
 Hogy nevezik azt a számot, amelyet egy 1-es után száz 0 követ?

A: Googol B: Megatron C: Gigabit D: Nanomole

FELADATOK

22 Határozd meg többféleképpen a kifejezések értékét!

a) $(3 \cdot 5)^2$; $(7 \cdot 9)^0$; $(2 \cdot 5)^3$; b) $0,2^4$; 10^4 ; $0,01^3$; 50^3 ; 8^7 ; $0,125^7$;
 c) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$; $\left(\frac{4}{5}\right)^2$; $\left(\frac{3}{10}\right)^3$; d) $\frac{8^4}{4^4}$; $\frac{10^3}{5^3}$; $\frac{1000^2}{250^2}$; $\frac{(-7)^5}{21^5}$

23 Határozd meg a hatványok értékét.

a) $(2^2)^3$; b) $((-2)^2)^3$; c) $(-2^2)^3$; d) $-(2^2)^3$; e) $(7^0)^3$; f) $(7^5)^0$

24 Írd fel a szorzatokat hatványalakban!

$4 \cdot 16$; $16 \cdot 64$; $16 \cdot 16$; $9 \cdot 81$; $81 \cdot 81$; $25 \cdot 625$; $1000 \cdot 1000$

25 Írd fel a számokat 10, illetve $\frac{1}{10}$ hatványai segítségével, majd végezd el a számítás! Az eredményt is hatványalakban add meg!

a) $100\,000 \cdot 1\,000\,000$; b) $1\,000\,000\,000 : 100\,000$; c) $0,000\,000\,1 \cdot 1\,000\,000$;
 d) $0,001 : 0,000\,000\,1$; e) $1\,000\,000\,3 \cdot 0,0001$; f) $100\,000 : 0,0015$

26 Határozd meg az ismeretlen kitevő értékét!

$10^a \cdot 10^5 = 10^8$; $10^7 : 10^b = 10^2$; $(10^c)^3 = 10^{12}$

☉ Az eredmény többféleképp is felírható hatványalakban!

Gyakorló
1.66–1.85;
Feladatgyűjtemény
2.3.08–14., 2.3.20.

☉ A példák segítenek.

1-NÉL NAGYOBB SZÁMOK NORMÁLALAKJA

Emlékeztető

A természetes számok néhány **helyiértéke** a tízes számrendszerben:

10^0 egy	10^6 millió	10^{12} billió	10^{18} trillió
10^1 tíz	10^7 tízmillió	10^{13} tízbillió	10^{19} tíztrillió
10^2 száz	10^8 százmillió	10^{14} százbillió	10^{20} száztrillió
10^3 ezer	10^9 ezermillió	10^{15} ezerbillió	10^{21} ezertrillió
10^4 tízezer	10^{10} tízezermillió	10^{16} tízezerbillió	10^{22} tízezertrillió
10^5 százezer	10^{11} százezermillió	10^{17} százezerbillió	10^{23} százezertrillió

A mindennapi életben az ezermilliót milliárdnak is nevezik.

☉ A tudományos életben és a számítástechnikában gyakran előforduló nagy számok esetében a helyiértékes írásmód nehézkes. 10 hatványai segítségével áttekinthetőbben írhatók le a számok.

Értelmezés

Az 1-nél nagyobb számok felírhatók olyan kéttényezős szorzatként, ahol az egyik tényező 1 és 10 közé eső szám, a másik tényező 10-nek valamely nemnegatív egész kitevőjű hatványa. A szám ilyen szorzatalakját a szám **normálalakjának** nevezzük.

☉ Például:

$$56,5 = 5,65 \cdot 10^1;$$

$$10 = 10^1; \quad 1 = 10^0;$$

$$734\,000 = 7,34 \cdot 10^5$$

Ha a szám 1 és 10 közé esik: $4,5 = 4,5 \cdot 10^0$



☉ A távoli galaxisok több milliárd fényévre vannak tőlünk. Lehet, hogy a csillag, amelyet most fedeznek fel a csillagászok, már nem létezik. Olyan messze van, hogy mire a Földhöz ér a fénye, már megsemmisült.

☉ Hogyan szorzunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel, ...?

☉ Hogyan osztunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel, ...?

☉ Cseréljük fel, és csoportosítsuk célszerűen a tényezőket.

☉ Alakítsuk át a tagokat, hogy 10-nek azonos kitevőjű hatványai forduljanak elő az összegben. A hamis egyenlőségeket javítsd!

Gyakorló
1.53–1.65., 1.86–1.87.,
Feladatgyűjtemény
2.3.15–19.

1. példa

Mekkora utat tesz meg a fény egy év alatt, ha másodpercenként 300 000 km-t tesz meg?

$$1 \text{ nap} = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$$

$$1 \text{ év} = 365 \text{ nap}$$

$$1 \text{ év} = 3,65 \cdot 10^2 \text{ nap} = (3,65 \cdot 10^2) \cdot (8,64 \cdot 10^4) \text{ s} = 31,536 \cdot 10^6 \text{ s}$$

Kerekítés után írjuk fel más alakban.

$$1 \text{ év} \approx 31,5 \cdot 10^6 \text{ s} = (3,15 \cdot 10) \cdot 10^6 \text{ s} = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$\text{A fény sebessége: } 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

A fény egy év alatt megtett útja (ezt a távolságot nevezzük fényévnek):

$$(3 \cdot 10^5) \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot (3,15 \cdot 10^7) \text{ s} = 9,45 \cdot 10^5 \cdot 10^7 \text{ km} = 9,45 \cdot 10^{12} \approx 10^{13} \text{ km}$$

FELADATOK

27 Határozd meg a szorzatok értékét!

- a) $1,25 \cdot 10^2$; b) $2,05 \cdot 10^1$; c) $6,5 \cdot 10^4$; d) $4,5254 \cdot 10^6$;
e) $3,15 \cdot 10^0$; f) $2,70 \cdot 10^2$; g) $4,1 \cdot 10^3$; h) $5,4 \cdot 10^6$

28 Írd fel a számok normálalakját!

- a = 950; b = 456,7; c = 20 000; d = 56 millió; e = 5;
f = 93,4; g = 40,07; h = 4323,6; i = ötmilliárd; j = ötezer

29 Mennyi az x értéke, ha

- a) $(3,1 \cdot 10^x) \cdot (2 \cdot 10^1) = 620$; b) $(3,1 \cdot 10^x) \cdot (2 \cdot 10^1) = 62\,000$?

30 Melyik egyenlőség igaz, melyik hamis?

- a) $6,5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 = 70 \cdot 10^1$; $6,5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 = 7 \cdot 10^2$;
b) $5,3 \cdot 10^2 - 4,8 \cdot 10^2 = 5 \cdot 10^1$; $5,3 \cdot 10^2 - 4,8 \cdot 10^2 = 5 \cdot 10^0$;
c) $2,2 \cdot 10^1 + 3,3 \cdot 10^2 = 5,5 \cdot 10^3$; $2,2 \cdot 10^1 + 3,3 \cdot 10^2 = 3,52 \cdot 10^2$

31 Próbálj a normálalakkal dolgozni! Az eredményt normálalakban add meg!

- a) $3,8 \cdot 10^4 + 2,7 \cdot 10^4 - 5,3 \cdot 10^4$; b) $2,95 \cdot 10^3 - 1,8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3$;
c) $(1,6 \cdot 10^4) \cdot (2,5 \cdot 10^2)$; d) $(1,3 \cdot 10^1) \cdot (2,05 \cdot 10^5)$;
e) $(7,5 \cdot 10^7) : (1,25 \cdot 10^4)$; f) $(8,6 \cdot 10^4) : (2,15 \cdot 10^2)$

SZÁMELMÉLET

OSZTÓ, TÖBBSZÖRÖS, OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

1. példa

Egy iskola 138 felső tagozatos fiútanulóját erdei iskolában, kis faházakban szállásolják el. Hány faházat foglalnak el a tanulók, ha mindegyik kis házba 6 tanulót helyeznek el? Vajon az utoljára elfoglalt kis házban is hat tanuló lakik?

A 138 **osztható** 6-tal, ugyanis: $138 = 23 \cdot 6$

Ezért 138 tanuló elhelyezhető 23 kis házban úgy, hogy mindegyik házban pontosan 6 tanuló lakjon.

Ha a 138-at elosztjuk 6-tal, akkor a **hányados** (23) természetes szám és a **maradék** 0. Ezt így is mondhatjuk:

A 138 **osztható** 6-tal. A 6 **osztója** a 138-nak. A 6-nak a 138 **többszöröse**.

Értelmezés

Akkor mondjuk, hogy egy a természetes szám **osztója** a b természetes számnak, illetve a b **többszöröse** az a -nak, ha van olyan k természetes szám, hogy: $b = k \cdot a$

Ha nem mondunk mást, akkor a **számok oszthatóságát** a természetes számok halmazában vizsgáljuk.



© A 6 **osztója** a 138-nak, illetve a 138 **többszöröse** a 6-nak, mert van olyan k természetes szám, a 23, hogy:

$$138 = k \cdot 6 = 23 \cdot 6$$

FELADATOK

32 Sorold föl a következő számok összes **osztópárját**!

$a = 10$; $b = 24$; $c = 60$; $d = 200$; $e = 600$; $f = 1500$

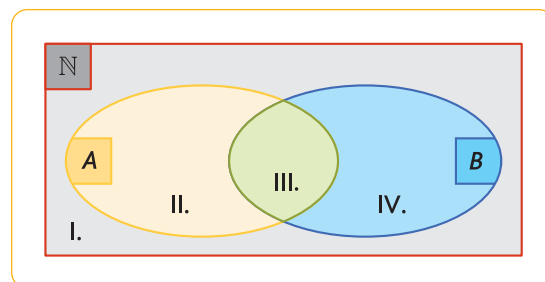
© Például:

$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$

33 A halmazábra római számírással jelzett részeibe írd be három-három számot, illetve vonalkázd be az üres halmazt! Az alaphalmaz a természetes számok halmaza ($\mathbb{N}$), és

a) $A = \{2 \text{ többszörösei}\}$; $B = \{3 \text{ többszörösei}\}$

b) $A = \{4 \text{ többszörösei}\}$; $B = \{8 \text{ többszörösei}\}$



Egy négyjegyű A szám számjegyeinek összege 6-tal több egy négyjegyű B szám számjegyeinek összegénél. A két szám szorzata 10 000 000. Ha az egyik számot elosztjuk, a másikat megszorozzuk 2-vel, akkor olyan négyjegyű C és D számokat kapunk, amelyek közül az egyik szám számjegyeinek összege szintén 6-tal nagyobb a másik szám számjegyeinek összegénél. Határozzuk meg az A szám értékét!

Fejtörő!

© Hány négyjegyű **osztópárja** van a 10 000 000-nak?

© Például:

$$3548 = 3540 + 8;$$

$$3615 = 3610 + 5$$

Gyakorló

1.100–1.101.;

Feladatgyűjtemény

1.1.01–02.

© Sorold fel a 100 osztópárjait!

© Például:

$$3548 = 3500 + 48;$$

$$3615 = 3600 + 15$$

© Például:

10-zel osztható:

0; 10; 230; 200

2-vel osztható:

0; 8; 230; 204; 66

5-tel osztható:

0; 5; 230; 205; 65

100-zal osztható:

0; 100; 200; 2000

4-gyel osztható:

0; 8; 220; 204; 68

25-tel osztható:

0; 50; 200; 275; 6000

20-szal osztható:

0; 80; 200; 240; 6020

- 34 a) Bontsd föl a következő számokat egy 10-zel osztható szám és egy 10-nél kisebb természetes szám összegére!

$$a = 56; \quad b = 346; \quad c = 93; \quad d = 5398; \quad e = 345; \quad f = 420; \quad g = 8$$

Határozd meg a felsorolt számok tízes; kettes; ötös maradékát!

- b) Fogalmazd meg és igazold a 2-vel és az 5-tel való oszthatóság szabályát!

- 35 Sorold föl a 100 összes osztóját!

A következő számok közül melyek oszthatók 100-zal?

$$100; \quad 200; \quad 280; \quad 625; \quad 500; \quad 1400; \quad 5620; \quad 7000$$

Fogalmazd meg a 100-zal való oszthatóság szabályát!

Az előző számok közül melyek oszthatók 100 minden osztójával?

- 36 Bontsd föl a következő számokat egy 100-zal osztható szám és egy 100-nál kisebb természetes szám összegére!

$$a = 564; \quad b = 375; \quad c = 9300; \quad d = 5393; \quad e = 6450; \quad f = 4025;$$

$$g = 600; \quad h = 538; \quad i = 8035; \quad j = 3040; \quad k = 7000; \quad l = 5024$$

A felbontások figyelembevételével válaszolj a kérdésekre!

A felsorolt számok közül melyek oszthatók

- a) 4-gyel? b) 25-tel? c) 20-szal? d) 50-nel? Miért?

- e) A felsorolt számok közül melyek oszthatók 50-nel, de 25-tel nem? Miért?

Fogalmazd meg és igazold a 4-gyel, illetve a 25-tel, a 20-szal, az 50-nel való oszthatóság szabályát!

Emlékeztető

Egy szám 10-zel, 2-vel, 5-tel osztva ugyanannyit ad maradékul, mint amennyit az utolsó számjegye. **A 10-zel osztható számok utolsó számjegye 0.**

A tízesek mindig oszthatók 2-vel, illetve 5-tel, ezért pontosan **azok a számok oszthatók 2-vel, amelyekben az utolsó számjegy osztható 2-vel; azok a számok oszthatók 5-tel, amelyekben az utolsó számjegy osztható 5-tel.**

Egy szám 100-zal, 4-gyel, 25-tel osztva ugyanannyit ad maradékul, mint amennyit az utolsó két számjegyből álló szám.

A százzal osztható számok utolsó két számjegye 0.

A százaskok mindig oszthatók 4-gyel, illetve 20-szal, 25-tel, 50-nel, ezért pontosan **azok a számok oszthatók 4-gyel, illetve 20-szal, 25-tel, 50-nel, amelyekben az utolsó két számjegyből álló szám osztható 4-gyel, illetve 20-szal, 25-tel, 50-nel.**

Többet ésszel ...



Ödömér és édesanyja egyszerre ünneplik a születésnapjukat. Ödömér kijelenti: Életkorom négyzetét megkapjuk, ha édesanyám életkorának ötszöröséből elveszünk 3-at. Bizonyítsd be, hogy Ödömér téved!

2. példa

Egy 8 főből álló munkacsoport 65 340 €-ért elvállalt egy restaurálási munkát. Szét tudják-e osztani ezt a pénzt úgy, hogy mindegyiküknek ugyanannyi egész számú euró jusson?

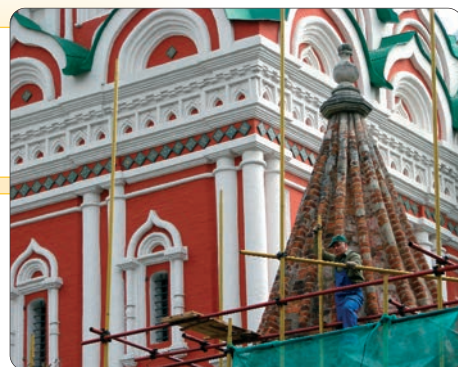
$$65\,340\text{ €} = 65\,000\text{ €} + 340\text{ €}$$

$1000 = 8 \cdot 125$, tehát az 1000 osztható 8-cal (és 125-tel is).

Ezért az ezresek, vagyis a 65 000 € is osztható 8-cal.

Csupán azt kell vizsgálnunk, hogy a **három utolsó számjegyből álló szám**, a 340 osztható-e 8-cal.

$340 = 320 + 16 + 4$; az első két tag osztható 8-cal, az utolsó tag nem, tehát a 340 nem osztható 8-cal. Ezért a 65 340 € nem osztható el egyenlően 8 ember között úgy, hogy mindenki egész számú eurót kapjon.



☉ A példa alapján fogalmazd meg a sejtésedet! Mi lehet a 8-cal való oszthatóság szabálya?

Tétel

Egy természetes szám pontosan akkor osztható 8-cal, ha az utolsó három számjegyből álló (legfeljebb háromjegyű) szám osztható 8-cal.

Bizonyítás

Ha a szám legfeljebb háromjegyű, akkor igaz az állítás.

Ha a szám legalább négyjegyű, akkor felbontható egy 1000-rel osztható szám és egy legfeljebb háromjegyű szám összegére. Például:

$$a = 47\,584 = 47\,000 + 584; \quad b = 54\,025 = 54\,000 + 25$$

Mivel $1000 = 8 \cdot 125$, ezért minden 1000-rel osztható szám osztható 8-cal is. Ebből következik, hogy a felírt összegek 1000-rel osztható tagja mindig osztható 8-cal.

$$a = 47\,584 = \underbrace{47\,000}_{\text{osztható 8-cal}} + \underbrace{584}_{\text{osztható 8-cal}}; \quad b = 54\,025 = \underbrace{54\,000}_{\text{osztható 8-cal}} + \underbrace{25}_{\text{nem osztható 8-cal}}$$

Ha az összeg másik tagja osztható 8-cal, akkor az eredeti szám is osztható 8-cal (lásd az előbbi a számot). Ha az összeg másik tagja nem osztható 8-cal, akkor az eredeti szám sem osztható 8-cal (lásd az előbbi b számot).

☉ Például

8-cal osztható:

0; 80; 200; 7240;

6040; 6168; 697 168

☉ Mikor osztható egy szorzat egy számmal?

☉ Mikor osztható egy összeg egy számmal?

Figyeld meg! $1000 = 8 \cdot 125 = 25 \cdot 40 = 5 \cdot 200 = 4 \cdot 250 = 2 \cdot 500$

Ebből kiindulva fogalmazzuk meg és (önálló munkával) bizonyítsuk a 125-tel, 40-nel, 200-zal, 250-nel, 500-zal való oszthatóság szabályát is.

Tétel

Egy természetes szám pontosan akkor osztható 125-tel, illetve 40-nel, 200-zal, 250-nel, 500-zal, ha az utolsó három számjegyből álló (legfeljebb háromjegyű) szám osztható 125-tel, illetve 40-nel, 200-zal, 250-nel, 500-zal.

☉ Például:

27 640 osztható 40-nel, mert 640 osztható 40-nel.

FELADATOK

© Külön-külön adj példákat az egyes szabályokra!

37 Írj föl 3-3 olyan 5000-nél nagyobb számot, amely osztható 2-vel, 5-tel, 4-gyel, 25-tel, 8-cal, 125-tel!

38 $m = 56\,750$; $n = 47\,600$; $o = 70\,000$; $p = 39\,096$; $q = 48\,780$

A felsorolt számok közül melyek oszthatók

a) 8-cal; b) 125-tel; c) 40-nel; d) 200-zal; e) 250-nel; f) 500-zal?

3. példa



Az időközben 9 főre bővült munkacsoport megkapta a pénzt a restaurálási munkáért. Szét tudják-e osztani a pénzt úgy, hogy mindegyiküknek ugyanannyi egész számú euró jusson?

A pénztáros felismerte, hogy ha 10-ből, 100-ból, 1000-ból stb. elvesz 1-et, akkor rendre 9-et, 99-et, 999-et stb. kap. Ezek a számok már oszthatók 9-cel.

A számításhoz táblázatot készített, a **65 340** €-t helyiérték szerint bontva: Már csak azt kellett megvizsgálnia, hogy a félretett pénz szétosztható-e maradék nélkül 9 ember között. Figyeljük meg, hogy rendre annyi darab egyforintost tett félre (gondolatban), ahány tízezres, ezres, százás, tízes és egyes volt a számban:

	Ennyi pénz van	Félretett	Szétosztható	Egynek jut
Tízezresek	60 000	6	$6 \cdot 9999$	$6 \cdot 1111$
Ezresek	5000	5	$5 \cdot 999$	$5 \cdot 111$
Százások	300	3	$3 \cdot 99$	$3 \cdot 11$
Tízesek	40	4	$4 \cdot 9$	$4 \cdot 1$
Egyesek	0	0	0	0

$6 + 5 + 3 + 4 + 0 = 18 = 2 \cdot 9$, a félretett forintok összege osztható 9-cel.

Ezért a 65 340 € egyenlően elosztható 9 ember között úgy, hogy mindenki egész számú eurót kapjon.

Fejtörő!

© Az osztás elvégzése nélkül is megadható a helyes válasz!



Melyik osztás eredménye egész szám?

A: $1234 : 5$; B: $12\,345 : 6$; C: $123\,454 : 4$;
D: $1\,234\,567 : 8$; E: $12\,345\,678 : 9$



Cyrano de Bergerac, a híres lovag hét különböző módot eszelt ki a Holdba emelkedésre. Lássunk ebből egyet:

A levegőt cédrus-ládába zárom.
Gyújtó-tükörrel fölfogott sugáron
Addig hevitem, addig ritkítom,
Míg száll s a Holdig meg sem áll, tudom!

Azonban mi ennél is különbet ajánlunk:

Hatalmas pergamen lapom
Magam lankadatlan hajtom
Felébe, majd ismét kétrét
Míg elérem a Hold szélét!

Hányszor kellene egy 0,1 mm vastagságú lapot félbehajtani (ha lehetne), hogy elérjük a 400 000 km-re lévő Holdat?

Tétel

Egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek az összege osztható 9-cel.

Bizonyítás

Írjuk fel egy tetszőleges természetes szám helyiérték szerint bontott alakját. Majd írjunk rendre 10 helyett $(9 + 1)$ -et, 100 helyett $(99 + 1)$ -et és így tovább.

$$6538 = 6 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 = 6 \cdot (999 + 1) + 5 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 8$$

A szorzások elvégzése és a megfelelő csoportosítás után a szám felírható egy 9-cel osztható tag és számjegyei összegére:

$$6538 = \boxed{6 \cdot 999 + 5 \cdot 99 + 3 \cdot 9} + \boxed{6 + 5 + 3 + 8}$$

Ez a tag osztható 9-cel Ezt kell vizsgálnunk

A fentiekből következik, hogy egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek az összege osztható 9-cel.

$6 + 5 + 3 + 8 = 22$; a 22 kilences maradéka 4. Ez a szám nem osztható 9-cel.

© Például:

5697 osztható 9-cel, mert $5 + 6 + 9 + 7 = 27$, és 27 osztható 9-cel.

© Mit jelent a tételben a „pontosan akkor” kifejezés?

© Ugyanígy bizonyítható a 3-mal való oszthatóság szabálya. Ugyanis a 9, a 99, a 999 és így tovább, 3-mal is osztható. Például a 6538 nem osztható 3-mal, de a 6438 osztható.

Tétel

Egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek az összege osztható 3-mal.

FELADATOK

39 Határozd meg a következő számok 9-es maradékát!

- a) 10; 20; 30; 40; 50; 60; ...; b) 100; 200; 300; 400; 500; 600; ...;
c) 1000; 2000; 3000; 4000; 5000; 6000; 7000; 8000; 9000; 10 000; ...

© Például:

$$\begin{aligned} 8000 &= 8 \cdot 1000 = \\ &= 8 \cdot (999 + 1) = \\ &= 8 \cdot 999 + 8 \end{aligned}$$

40 3-mal osztva mely számok adnak 0-t, 1-et, 2-t maradékul?

$a = 10$;	$b = 20$;	$c = 30$;	$d = 40$;	$e = 50$;	$f = 60$;
$g = 100$;	$h = 200$;	$i = 300$;	$j = 400$;	$k = 500$;	$l = 600$

41 Mely számjegyek írhatók a helyébe úgy, hogy a $484\text{ }6$ osztható legyen

- a) 3-mal; b) 9-cel; c) 4-gyel; d) 8-cal; e) 5-tel;
f) 6-tal; g) 24-gyel; h) 36-tal; i) 72-vel; j) 45-tel?

Gyakorló

1.108–1.125;
Feladatgyűjtemény
2.6.01–15.



Vilma zárját ötjegyű kódszám beütése nyitja. Sajnos, elfelejtette ezt a számot, viszont arra emlékszik, hogy csak 1-es, 2-es és 5-ös számjegyek fordulnak elő benne, és a kódszám 75-tel osztható. Legrosszabb esetben hány próbálkozással találhatja el a jó kódszámot? Hányra csökkenhet a próbálkozások száma, ha eszébe jut, hogy a szám 45-tel is osztható?

Fejtrőő!

1	2	3	4	5
6	7	8	9	0

TÖRZSSZÁMOK, ÖSSZETETT SZÁMOK

4. példa

Keressük meg 120 összes pozitív osztóját.

120 osztható 1-gyel, az **1 minden számnak osztója**:

$$120 = 1 \cdot 120; \quad \text{osztók: } 1 \text{ és } 120$$

A 10-nél nem nagyobb osztókat meghatározhatjuk az oszthatósági szabályok alkalmazásával. Megkapjuk az **osztópárjukat** is.

120 osztható 2-vel, mert 0-ra végződik:

$$120 = 2 \cdot 60; \quad \text{osztók: } 2 \text{ és } 60$$

120 osztható 3-mal, mert számjegyeinek összege osztható 3-mal:

$$120 = 3 \cdot 40; \quad \text{osztók: } 3 \text{ és } 40$$

120 osztható 4-gyel; mert a két utolsó számjegyéből alkotott szám osztható 4-gyel:

$$120 = 4 \cdot 30; \quad \text{osztók: } 4 \text{ és } 30$$

120 osztható 5-tel, mert 0-ra végződik:

$$120 = 5 \cdot 24; \quad \text{osztók: } 5 \text{ és } 24$$

120 osztható 6-tal, mert osztható 2-vel és 3-mal:

$$120 = 6 \cdot 20; \quad \text{osztók: } 6 \text{ és } 20$$

120 nem osztható 7-tel;

120 osztható 8-cal:

$$120 = 8 \cdot 15; \quad \text{osztók: } 8 \text{ és } 15$$

120 nem osztható 9-cel, mert számjegyeinek összege nem osztható 9-cel;

120 osztható 10-zel, mert 0-ra végződik:

$$120 = 10 \cdot 12; \quad \text{osztók: } 10 \text{ és } 12$$

A 10-nél nagyobb osztókat az előző osztók párként már megkaptuk.

120 pozitív osztói: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 24; 30; 40; 60; 120

5. példa

Keressük meg 83 összes pozitív osztóját.

83 osztható 1-gyel, az **1 minden számnak osztója**:

$$83 = 1 \cdot 83; \quad \text{osztók: } 1 \text{ és } 83$$

Minden 1-től és 0-tól különböző természetes számnak legalább két osztója van a természetes számok körében, az 1 és saját maga.

Beláthatjuk, hogy 83 nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 4-gyel, sem 5-tel, sem 6-tal, sem 7-tel, sem 8-cal, sem 9-cel.

9-nél nagyobb (83-tól különböző) szám nem lehet osztója a 83-nak, mert akkor az osztópárját már megtaláltuk volna.

A 83-nak csak két pozitív osztója van: 1 és 83

Értelmezések

Prímszámnak vagy törzsszámnak nevezzük a természetes számot, ha pontosan két osztója van a természetes számok között.

Összetett számnak nevezzük azt a nullától különböző természetes számot, amelynek kettőnél több természetes szám osztója van.

Az 1-nek csak egy osztója van a természetes számok körében, saját maga. Ezért **az 1 nem prímszám és nem összetett szám.**

A 0 mindegyik természetes számnak többszöröse. A 0 minden pozitív természetes számmal osztható. A 0 nem prímszám, és nem tekintjük összetett számnak sem. **A 0 nem osztója egyik pozitív természetes számnak sem.**

☉ **Például:**

a 2, a 3, az 5, a 83 **prímszám**;

a 4, a 6, a 120 **összetett szám**.

A görög matematikusok már több mint 2000 évvel ezelőtt sokat tudtak a természetes számokról.

Eukleidész bebizonyította, hogy végtelen sok törzsszám van.

Eratoszthenész a következő eljárást (az úgynevezett eratoszthenészi szítát) találta ki a törzsszámok megkeresésére (kövessük a táblázatban az eljárást):

Az 1-et kivesszük, mert az 1 nem prímszám.

Bekarikázzuk a következő számot, a 2-t, és áthúzzuk a 2 többszöröseit.

Bekarikázzuk a következő olyan számot, amely nincs megjelölve. Ez a 3. Áthúzzuk a 3 többszöröseit.

Folytatjuk az eljárást, mindig a következő meg nem jelölt számmal. Észreveheted, hogy a 10-nél nagyobb bekarikázott számok 100-nál kisebb többszöröseit már korábban áthúztuk.

A bekarikázott számok a 100-nál kisebb törzsszámok.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

A régi görögök ismerték például a **tökéletes számokat** és a **barátságos számokat**. Keresd meg a világhálón, hogy mit tudunk ezekről a számokról!

FELADATOK

42

- a) Sorold fel az 50-nél kisebb prímszámokat!
- b) Sorold fel a 2100 osztópárjait!
- c) A 2, 2, 2, 3, 5, 5 prímszámokból építs szorzás segítségével számokat! Mindegyik prímszám legfeljebb annyiszor fordulhat elő tényezőként, ahányszor itt felírtuk. (Például a 2 „egytényezős szorzat”).

☉ **Például:**

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

43

Bontsd föl a következő számokat egy törzsszám és egy másik szám szorzatára!

⋮ a = 48; ⋮ b = 200; ⋮ c = 125; ⋮ d = 480 ⋮

☉ **Keresd meg az összes megoldást!**

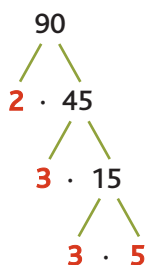


- a) Van-e két olyan prímszám, amelyek összege és különbsége is prím?
- b) Található-e három olyan prímszám, amelyek összege is prím?
- c) Van-e olyan számhármass, ami az előző feltételnek megfelel, és köztük van a 2?

Figyelempróba

☉ **Ha van, adj meg ilyen számokat!**

© A tétel precíz bizonyítása nem általános iskolai tananyag, de a bizonyítás gondolatmenetét áttekinthetjük. Együtt elsajátíthatjuk a **törzstényezőkre bontás** eljárását.



Tétel

Minden összetett szám fölbontható törzsszámok szorzatára, és ez a fölbonthatóság sorrendtől eltekintve egyértelmű.

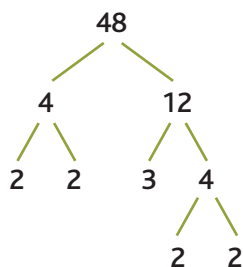
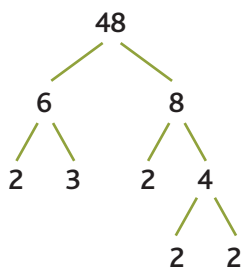
Bizonyítás

Bármelyik összetett szám fölírható egy törzsszám és egy másik természetes szám szorzataként. Ha a másik tényező nem törzsszám, akkor azt is felbonthatjuk egy törzsszám és egy természetes szám szorzatára.

Akkor fejezzük be az eljárást, ha már minden tényező törzsszám.

Mivel az osztók a felbontandó számoknál kisebb természetes számok, ezért ez az eljárás véges sok lépésben véget ér.

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$



48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Egy számot esetleg többféle úton is fölbonthatunk, de végeredményben mindig ugyanazokat a **törzstényezőket** kapjuk. Például:

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$

FELADATOK

44 Bontsd prímszámok szorzatára a következő számokat!

$a = 50;$	$b = 60;$	$c = 150;$	$d = 144;$	$e = 360;$
$f = 1001;$	$g = 60\,500;$	$h = 34\,300;$	$i = 390\,625;$	$j = 14\,641;$
$k = 2700;$	$l = 16\,384;$	$m = 16\,848;$	$n = 148\,257;$	$o = 100\,000$

Gyakorló

1.102–1.107;

Feladatgyűjtemény

1.1.14., 1.2.02–10.

45 $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5;$ $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5;$ $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7;$ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$

A felsorolt szorzatok közül melyik osztható

- a) 2-vel; b) 3-mal; c) 4-gyel; d) 5-tel; e) 6-tal;
f) 7-tel; g) 8-cal; h) 16-tal; i) 25-tel; j) 75-tel?

Többet ésszel ...

© Számológép nélkül dolgozz! Mitől függ, hogy hány 0-ra végződik egy szám?



Állapítsd meg, melyik lehet az eredménye a következő szorzatnak!

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16$$

A: 20 928 988 800 000; B: 20 922 788 880 000; C: 20 922 789 888 000



- a) Mire végződik 10 egymást követő páratlan szám szorzata?
b) Mire végződik 10 egymást követő páros szám szorzata?
c) Mire végződhet 10 egymást követő páratlan szám összege?
d) Mire végződhet 10 egymást követő páros szám összege?

➤ LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓ, LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS

6. példa

Aladár téglalap alakú kertje oldalainak hossza (deciméter pontossággal) 360 dm és 594 dm. Úgy szeretné elkészíteni a kerítést, hogy minden oldalon ugyanakkora távolságra álljanak egymástól a kerítés szomszédos oszlopai. **Legfeljebb** hány deciméter távolságra állhatnak egymástól az oszlopok?

A feladat feltételei alapján a 360 és az 594 **közös osztói**t kell megkeresnünk. Bontsuk törzstényezőkre a számokat, és jelöljük meg a közös törzstényezőket.

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5; \quad 594 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2 \cdot 3^3 \cdot 11$$

A két szám közös osztói az 1-en kívül csak a közös törzstényezők szorzataként állhatnak elő.

A közös osztók: 1; 2; 3; $6 = 2 \cdot 3$; $9 = 3 \cdot 3$; **$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$**

A feladat feltételeinek a közös osztók közül a legnagyobb, vagyis a **legnagyobb közös osztó** felel meg. Jelölés: **$(360; 594) = 2 \cdot 3^2 = 18$**

Legfeljebb 18 dm távolságra állhatnak a szomszédos oszlopok egymástól.



☉ A közös osztók törzstényezősz alakját megfigyelve azt is észrevehetjük, hogy a legnagyobb közös osztó mindegyik közös osztónak többszöröse.

Emlékeztető

Két vagy több szám **legnagyobb közös osztója** (a számok közös osztói közül a legnagyobb)

az adott számok mindegyikének osztója,

az összes közös osztónak többszöröse.

Tétel

Két vagy több szám **legnagyobb közös osztóját** úgy is meghatározhatjuk, hogy a számok prímtényezői közül kiválasztjuk a közöseket, és azoknak az előforduló legkisebb hatványait összeszorozzuk.

Például: $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^1$; $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1$; $1200 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2$

A három számban közösen előforduló prímtényezők legkisebb hatványai: **2^2 ; 3^1**

A három szám legnagyobb közös osztója: $(756; 1080; 1200) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$

Ha két számnak nincs közös prímtényezője, akkor a legnagyobb közös osztójuk 1. Az ilyen számpárokra mondjuk, hogy **relatív prímek**.

☉ A bizonyítás gondolatmenetét lásd az előző példa megoldásában.

☉ Például:

$$75 = 3 \cdot 5^2; \quad 56 = 2^3 \cdot 7; \quad (75; 56) = 1$$



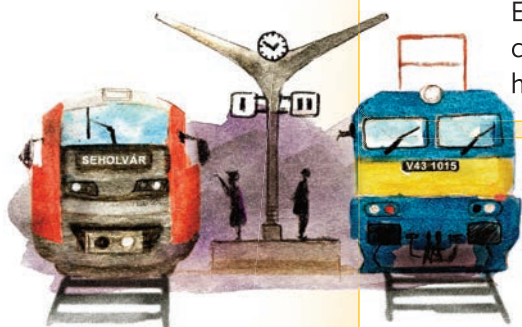
a) Hány 0-ra végződik a következő hányados: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 19 \cdot 20}$?

b) Milyen számra végződnek a következő hatványok: 3^5 , 3^{10} , 3^{18} , 3^{101} ?

c) Egy pozitív természetes számot a 4. hatványra emelünk. Végződhet-e ez a hatvány 5-re; végződhet-e 9-re?

Többet ésszel ...

7. példa



Egy végállomásról 12 percenként indul vonat Nekeresd felé és 45 percenként Seholvár felé. 0 órakor egyszerre indul a két vonat. **Legközelebb** hány perc múlva indul újra egyszerre vonat az adott települések felé?

A feladat feltételei alapján a 12 és a 45 **közös többszörösei** közül a **legkisebb** pozitív **közös többszöröst** kell megkeresnünk.

A számok törzstényezős felbontása:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3; \quad 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$$

Az adott két szám közös többszöröseit törzstényezős felbontásában minden olyan törzsszám előfordul, amely valamelyik szám felbontásában szerepel:

a 2 a második hatványon, mert a 12 felbontásában 2^2 fordul elő;

a 3 is a második hatványon, mert a 45 felbontásában 3^2 van;

az 5 az első hatványon, mert a 45 felbontásában 5^1 található.

A legkisebb közös többszörös törzstényezős felbontásában más törzsszámok nem fordulhatnak elő. A **legkisebb közös többszörös**, a szokásos jelöléssel:

$$[12; 45] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

Legközelebb 180 perc múlva indul egyszerre vonat az adott települések felé.

© A megoldás gondolatmenetéből az is következik, hogy a legkisebb közös többszörös mindegyik közös többszörösnek osztója.

Emlékeztető

Két vagy több szám **legkisebb közös többszöröse** (a számok pozitív közös többszörösei közül a legkisebb)

az adott szám mindegyikének többszöröse,

az összes közös többszörösének osztója.

Tétel

Két vagy több szám **legkisebb közös többszörösét** úgy is meghatározhatjuk, hogy a számok prímtényezői közül kiválasztjuk az összes előforduló különböző prímtényezőt, és azoknak az előforduló legnagyobb hatványait összeszorozzuk.

$$\text{Például: } 756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^1; \quad 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1; \quad 1200 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2$$

A számokban előforduló prímtényezők legnagyobb hatványai: 2^4 ; 3^3 ; 5^2 ; 7^1

A három szám legkisebb közös többszöröse (a szokásos jelöléssel):

$$[756; 1080; 1200] = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 75\,600$$

Ha két számnak nincs közös prímtényezője (vagyis a számok relatív prímek), akkor a legkisebb közös többszörösük a két szám szorzata.

$$\text{Például: } 8 = 2^3; \quad 9 = 3^2; \quad [8; 9] = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

© A bizonyítás gondolatmenetét lásd az előző példa megoldásában.

FELADATOK

46

Az alaphalmaz legyen a természetes számok halmaza ($\mathbb{N}$).

Rajzold meg mindkét feladathoz az $\mathbb{N}$, A , B , C halmazok közös ábráját!

a) $A = \{45 \text{ osztói}\}$; $B = \{60 \text{ osztói}\}$; $C = \{75 \text{ osztói}\}$

Írd be a halmazábrába a következő számokat!

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15; 20; 25; 30; 45; 60; 75

b) $A = \{15 \text{ osztói}\}$; $B = \{45 \text{ osztói}\}$; $C = \{90 \text{ osztói}\}$

Írd be a halmazábrába a következő számokat!

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 15; 18; 30; 45; 50; 60; 90; 180

☉ Figyeld meg: a 45 osztható 15-tel!

Mi az osztók halmazának metszete és uniója?

47

A 300-nak osztója-e a 75, a 18, illetve a 33?

☉ Például:

$75 = 3 \cdot 25$; $18 = 2 \cdot 9$

48

Add meg 300 összes osztóját!

49

Sorold fel (a prímtényezős alak segítségével) a 200, majd a 240 összes osztóját! Karikázd be a közös osztókat!

50

Bontsd prímtényezőkre a következő számokat!

$a = 250$; $b = 125$; $c = 144$; $d = 2100$; $e = 5600$

a) Határozd meg a következő legnagyobb közös osztók értékét!

$(a; b)$; $(b; c)$; $(b; d)$; $(a; b; c)$; $(d; e)$; $(a; d; e)$

b) Írd fel a következő legkisebb közös többszörösöket prímtényezős alakban!

$[a; b]$; $[b; c]$; $[b; d]$; $[a; b; c]$; $[d; e]$; $[a; d; e]$

c) Prímtényezős alakban hasonlítsd össze a következő szorzatokat!

$a \cdot c$ és $(a; c) \cdot [a; c]$; $d \cdot e$ és $(d; e) \cdot [d; e]$

Gyakorló

1.125–1.137.;

Feladatgyűjtemény

2.6.16–23.

51

Bence katona.
Ezt írta az öccsének:

Hány katona vett részt
a gyakorlaton?

Majdnem ezren vagyunk, létszámunk számjegyeinek összege osztható 10-zel. 7-es csoportokba osztva lakunk egy-egy sátorban, de az utolsó sátorban csak 6-an laknak. Az ebédnél egy-egy asztalnál 6-an ültünk, az utolsó asztalnál viszont csak 5 katona volt. Kedden a folyón való átkelést gyakoroltuk, 5-ösével szálltunk egy-egy csónakba, de így az utolsó csónakba 4 fő került.



Hédi elárulja, hogy éveinek számát megkapjuk, ha egy prímszám négyzetét megszorozzuk egy másik, az előzőnél nagyobb prímszámmal. Két évvel idősebb nővére életkorát két prímszám szorzata adja, míg egy évvel fiatalabb húga életkora prímszám. Legközelebb hány év múlva mondhatja el ezt Hédi, ha most a három lány életkorának szorzata egy, a magyar történelemben nevezetes év-szám?

Figyelempróba



RACIONÁLIS SZÁMOKAL VÉGZETT MŰVELETEK

Összevonás

Emlékeztető

A 0 hozzáadása, illetve kivonása a racionális számok halmazában is ugyanazt jelenti, mint a természetes számok halmazában:

$$\begin{aligned} (+3) + 0 &= (+3); & (-5,6) + 0 &= (-5,6); & \left(+\frac{2}{5}\right) + 0 &= \left(+\frac{2}{5}\right); \\ (+3) - 0 &= (+3); & (-5,6) - 0 &= (-5,6); & \left(+\frac{2}{5}\right) - 0 &= \left(+\frac{2}{5}\right); \end{aligned}$$

Pozitív szám hozzáadása a hozzáadandó abszolútértékével való növelést jelent:

$$\begin{aligned} (+3) + (+2) &= (+5); & (-5,6) + (+1,3) &= (-4,3); & \left(+\frac{3}{5}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right) &= \left(+\frac{4}{5}\right) \end{aligned}$$

Pozitív szám kivonása a kivonandó abszolútértékével való csökkentést jelent:

$$\begin{aligned} (+3) - (+2) &= (+1); & (-5,6) - (+1,3) &= (-6,9); & \left(+\frac{3}{5}\right) - \left(+\frac{1}{5}\right) &= \left(+\frac{2}{5}\right) \end{aligned}$$

Negatív szám hozzáadása a hozzáadandó abszolútértékével való csökkentést jelent:

$$\begin{aligned} (+3) + (-2) &= (+1); & (-5,6) + (-1,3) &= (-6,9); & \left(+\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right) &= \left(+\frac{2}{5}\right) \end{aligned}$$

Negatív szám kivonása a kivonandó abszolútértékével való növelést jelent:

$$\begin{aligned} (+3) - (-2) &= (+5); & (-5,6) - (-1,3) &= (-4,3); & \left(+\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right) &= \left(+\frac{4}{5}\right) \end{aligned}$$

A fenti értelmezésből következik:

Egy szám hozzáadása helyettesíthető ellentettjének kivonásával:

$$5 + (-3) = 5 - (+3) = 5 - 3 = 2; \quad 7 + (+4) = 7 - (-4) = 11$$

Egy szám kivonása helyettesíthető ellentettjének hozzáadásával:

$$5 - (+3) = 5 + (-3) = 5 - 3 = 2; \quad 7 - (-4) = 7 + 4 = 11$$

Az $5 - 3$ tekinthető

$$\text{összeadásnak: } 5 - 3 = 5 + (-3) \quad \text{és} \quad \text{kivonásnak is: } 5 - 3 = 5 - (+3)$$

Értelmezés

Nem mindig célszerű megkülönböztetnünk az összeadást és a kivonást. **Az összeadást és a kivonást közös néven összevonásnak nevezzük.**

© *Úgy bővítettük a számhalmazokat, hogy a műveleti tulajdonságok továbbra is érvényben maradtak. Ezt latin eredetű szóval úgy mondjuk, hogy érvényesül a permanenciaelv.*

© *Figyeld meg!*

A kivonásban nem cserélhető fel a kisebbítendő és a kivonandó:

$$5 - 3 \neq 3 - 5$$

Ha a kivonást a kivonandó ellentettjének hozzáadásaként írjuk fel, akkor a tagok felcserélhetők:

$$5 + (-3) = (-3) + 5$$

Az összevonásban a szám kivonását úgy tekintjük, mint a szám ellentettjének hozzáadását, ezért az összevonásra érvényesek az összeadás műveleti tulajdonságai. Például **az összevonásban a tagokat tetszőlegesen felcserélhetjük és csoportosíthatjuk:**

$$17 - 12 - 6 + 36 + 23 - 8 = (+17) + (-12) + (-6) + (+36) + (+23) + (-8) = \\ = (17 + 23) + (-12 - 8) + (36 - 6) = 40 - 20 + 30 = 50$$

Emlékeztető

Egyenlő nevezőjű törtet úgy vonunk össze, hogy a számlálót összevonjuk, ez lesz az eredmény számlálója, míg a közös nevező az eredmény nevezője.

Különböző nevezőjű törtet összevonásakor általában (bővítéssel vagy egyszerűsítéssel) egyenlő nevezőjű alakban írjuk föl a törtet, ezután hajtjuk végre az összevonást.

Például: $\frac{3}{2} - \frac{10}{12} + \frac{1}{3} = \frac{9}{6} - \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{9-5+2}{6} = \frac{6}{6} = 1$

FELADATOK

52 Hajtsd végre írásban az összeadásokat!

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $3,234 + 0,32 + 53,68$; | b) $10,4 + 0,012 + 1,467$; |
| c) $0,04 + 0,0016 + 0,26$; | d) $12,25 + 0,09 + 0,157$ |

53 Hajtsd végre az összeadásokat!

- | | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| a) $(+3,5) + (-0,35) + (-3,65)$; | b) $(-0,4) + (+0,01) + (-4,6)$; |
| c) $(-0,05) + (-0,06) + (-1,29)$; | d) $(+1,75) + (+0,95) + (-2,7)$ |

54 Végezd el a kivonásokat!

- | | | |
|----------------------|---------------------|-----------------------|
| a) $7,564 - 2,328$; | b) $12,4 - 3,35$; | c) $3,04 - 0,00166$; |
| d) $21,45 - 23,97$; | e) $10,8 - 17,69$; | f) $0,76 - 12,49$ |

55 Végezd el a kivonásokat!

- | | | |
|------------------------|------------------------|---------------------------|
| a) $(+7,4) - (-2,8)$; | b) $(-0,4) - (-3,5)$; | c) $(-0,04) - (+0,006)$; |
| d) $0 - (-9,7)$; | e) $(+2,5) - (+3,7)$; | f) $(+0,8) - (+0,65)$ |

56 Hajtsd végre az összeadásokat!

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8}$; | b) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$; | c) $\frac{3}{2} + \frac{3}{5} + \frac{12}{15} + \frac{7}{10}$; |
| d) $\frac{4}{12} + \frac{5}{15} + \frac{12}{18}$; | e) $\frac{5}{7} + \frac{4}{6} + \frac{14}{21}$; | f) $\frac{32}{28} + \frac{25}{35} + 2 + \frac{18}{42}$ |

☉ *A műveletsort átírjuk összegalakba, majd alkalmazzuk a tagok felcserélhetőségét és csoportosíthatóságát.*

☉ *Csak egyenlő nevezőjű törtet vonhatók össze.*

☉ *Ügyeljünk arra, hogy:*

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \neq \frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{5}{4} \neq \frac{0}{2}$$

☉ *Előtte végezz becslést! Azonos helyiértékek kerüljenek egymás alá!*

☉ *Mit jelent a negatív szám hozzáadása?*

☉ *Ügyelj a helyiértékekre! Kétféleképpen ellenőrizd az eredményt!*

☉ *Mit jelent a negatív szám kivonása?*

☉ *Csak egyenlő nevezőjű törtet vonhatók össze. Ellenőrizd az eredményt!*

☉ A zárójelek felbontása-kor figyeltél az előjelekre?

☉ Célszerű a vegyesszámokat törtalakban felírni.

☉ Milyen alakra hozzuk a törtet, hogy elvégezhessük a kivonást?
Ellenőrizd az eredményt!

☉ Ellenőrizd az eredményt!

☉ A tagok felcserélésével és csoportosításával egyszerűsítheted a számítást!

Például:

$$2,3 + 4,7 - 0,75 - 1,25 - 0 = (2,3 + 4,7) - (0,75 + 1,25)$$

Gyakorló

1.138–1.145.;

Feladatgyűjtemény

2.2.08., 2.2.10–12.

☉ Milyen nevezőjű törtet formájában célszerű az A, B, C számot felírni?

☉ Mely zárójelezésekkel változik meg a műveletsor eredménye?

57 Hajtsd végre az összeadásokat!

a) $\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{5}{4}\right) + \left(-\frac{6}{8}\right);$

b) $\left(+\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{6}{10}\right);$

c) $\left(-\frac{7}{8}\right) + \left(-2\frac{5}{6}\right) + \left(+3\frac{15}{18}\right);$

d) $\left(+\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{5}{4}\right) + \left(-1\frac{6}{18}\right);$

e) $\left(-\frac{3}{60}\right) + \left(+\frac{52}{40}\right) + \left(-\frac{11}{10}\right);$

f) $\left(+\frac{17}{48}\right) + \left(-1\frac{15}{16}\right) + \left(+\frac{15}{72}\right)$

58 Végezd el a kivonásokat! Ellenőrizd az eredményt!

a) $\frac{3}{2} - \frac{3}{8};$

b) $\frac{7}{6} - \frac{2}{3};$

c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{10};$

d) $\frac{4}{12} - \frac{5}{18};$

e) $4 - \frac{14}{21};$

f) $\frac{32}{36} - \frac{20}{30};$

g) $\frac{3}{18} - \frac{9}{12};$

h) $\frac{4}{9} - 1$

59 Végezd el a kivonásokat!

a) $\left(+\frac{2}{3}\right) - \left(+\frac{5}{6}\right);$

b) $\left(-\frac{3}{5}\right) - \left(+\frac{7}{10}\right);$

c) $\left(+\frac{9}{10}\right) - \left(-\frac{5}{4}\right);$

d) $\left(-\frac{15}{42}\right) - \left(-1\frac{9}{21}\right);$

e) $\left(+\frac{30}{45}\right) - \left(-\frac{9}{36}\right);$

f) $\left(-2\frac{18}{40}\right) - \left(+2\frac{27}{60}\right)$

60 Végezd el az összevonásokat!

a) $-3 + 2 + (-5) - (-6) - 8;$

b) $10 - 4 + 5 - (-2) + (-2);$

c) $3 - 0 - (-7) + (-6) - (+15);$

d) $-8 + 9 - 5 + (-7) - (-2);$

e) $2,3 - 0,75 - 0 + 4,7 - 1,25;$

f) $-4,5 - 2,5 + 3,6 - (-1,4);$

g) $\frac{22}{15} + \frac{25}{45} - \frac{13}{10} - \frac{17}{30} + 2;$

h) $\frac{13}{24} + \frac{35}{12} - \frac{49}{28} - 1\frac{1}{3} + 1,5$

61 Határozd meg az eredményeket! Mely zárójelek hagyhatók el az előjelek megváltoztatása nélkül úgy, hogy az eredmény ne változzék?

a) $15 - (8 - 5);$

b) $45 + (24 - 12);$

c) $(45 - 10) - 50;$

d) $-(-45) - (5 - 25);$

e) $10 + [-14 + (-16)];$

f) $(-56) - (15 + 65)$

62 Határozd meg az A, B, C értékét!

a) $\frac{243}{500} + A = \frac{743}{500};$

b) $\frac{1}{4} + B = \frac{21}{4};$

c) $\frac{100}{3} + C = \frac{1}{3}$

63 Vond össze: $7 - 6 + 5 - 4 + 3$

Az adott műveletsorban helyezz el különbözőképpen zárójeleket, és számítsd ki így is az eredményt!

64

Emma és Lotte ugyanazokat a ruhaneműket vásárolta, kivéve a képen látható pulcsikat.

Emma 100 euróssal fizetett és 24 € 40 centet kapott vissza.

Lotte is 100 euróssal fizetett. Mennyit kapott vissza?

☉ **Karikázd be a helyes válasz betűjelét!**

A: 19 € 90 centet;

B: 28 € 90 centet;

C: 13 € 42 centet;

D: 35 € 38 centet

Emma választása:



15,48 €

Lotte választása:



10,98 €

65

Hédi sok mindent vásárolt, amelyekért a pénztáros 157,76 €-t számolt össze. A számla ellenőrzésekor Hédi észrevette, hogy a pénztáros az egyik áruért 5,86 € helyett véletlenül 5,68 €-t ütött be. Hogyan javítható ki ez a tévedés?

A: Hédi fizet 5,86 €-t;

B: Hédi kap 5,68 €-t;

C: Hédi fizet 0,18 €-t

☉ **Feleletválasztásos feladat esetén akkor is jelölj meg egy és csak egy választ, ha nem vagy benne biztos, hogy melyik a helyes! Eltalálhatod a helyes választ.**

66

Egy ács $2\frac{3}{8}$ öl hosszú lécből levágott egy 3 láb hosszú darabot. Milyen hosszú lécszár maradt meg, ha tudjuk, hogy 1 öl 6 lábbal egyenlő?

A: $1\frac{7}{8}$ öl maradt;

B: $1\frac{1}{2}$ öl maradt;

C: 2 öl maradt

☉ **Az öl és a láb régi mértékegységek.**

67

- Egy 6 m hosszú gerendából levágnak 1 m 45 cm-t. Milyen hosszú gerenda marad meg?
- Andor 1,80 km-re lakik az Épi Tüzeptől, 950 m-rel nagyobb távolságra, mint Béla. Milyen távolságra lakik az Épi Tüzeptől Béla?
- A Tési Tüzip 1,2500 ha nagyságú telephellyel büszkélkedhet, 250 m²-rel kevesebbel, mint az Épi Tüzip. Hány hektár az Épi Tüzip telephelye?
- Az Épi Tüzipre reggel 8 órakor 234,6 t tüzelőt szállítottak, majd 9 óra 30 perckor elvittek belőle 134,8 tonnát. Hány tonna tüzelő maradt a telepen, ha a szállítások előtt 56,4 t tüzelő volt már a telepen?
- 23,06 t terméskőből két teherautó 3,24 tonnát, illetve 4,43 tonnát elszállított. Mennyit szállított el a harmadik teherautó, ha ezután 12,35 t maradt a tüzipen?
- Egy tartályba 3 min 45 s alatt $\frac{2}{5}$ hl víz folyt be, majd a kifolyónyíláson át 30 s alatt $\frac{1}{4}$ hl-t kiengedtek belőle, így a tartályban $\frac{3}{2}$ hl víz maradt. Mennyi víz volt eredetileg a tartályban?
- Az Épi Tüzipen a cementet 50 kg-os zsákokba csomagolva árusítják. Katiék az építkezéshez 5,40 tonnát vásároltak. Az alaphoz felhasználtak 1450 kg-ot, a falak építéséhez 2,65 tonnát. Mennyi cementet kell vásárolniuk Katiéknak, ha az építkezés befejezéséhez még 2500 kg cement szükséges?

☉ **Ügyeltél a mértékegységek átváltására?**

☉ **Emlékeztető:**

1 ha = 10 000 m²

☉ **1 perc (jele: min) hány másodperc (jele: s)?**

☉ **Minden adat szükséges?**

☉ **Emlékeztető:**

1 t = 1000 kg

KÖZÖS OSZTÓ, KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS ALKALMAZÁSA

Emlékeztető

A törtet egyszerűsítjük, ha nagyobb (ezért kevesebb) tört részből állítjuk elő.

A tört egyszerűsíthető, ha számlálójának és nevezőjének a legnagyobb közös osztója nagyobb 1-nél. Ebben az esetben a tört számlálóját és nevezőjét oszthatjuk a számláló és a nevező bármelyik közös osztójával.

Ha egy tört számlálóját is és nevezőjét is e két szám legnagyobb közös osztójával osztjuk, akkor olyan törtet kapunk, amely tovább már nem egyszerűsíthető. Ez azt jelenti, hogy az adott törtet a lehető legnagyobb tört részekből állítjuk elő.

☉ **Például:**

$$\frac{36}{24} = \frac{30}{20} = \frac{27}{18} = \frac{24}{16} = \frac{21}{14}$$

$$\frac{36}{24} = \frac{18}{12} = \frac{12}{8} = \frac{9}{6} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

1. példa

Írjuk fel tovább nem egyszerűsíthető alakban a $\frac{72}{90}$ törtet.

Például: $\frac{72}{90} = \frac{36}{45}$. A $\frac{36}{45}$ nem a legegyszerűbb alakja a törtnek.

$$72 = 2^3 \cdot 3^2; \quad 90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1; \quad (72; 90) = 2^1 \cdot 3^2 = 18$$

A számlálót is és a nevezőt is osztjuk a legnagyobb közös osztóval:

$$\frac{72}{90} = \frac{72 : 18}{90 : 18} = \frac{4}{5}$$

A prímtényezős felbontás segítségével is számolhatunk:

$$\frac{72}{90} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{\cancel{2} \cdot 2^2 \cdot \cancel{3^2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3^2} \cdot 5} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$$

A $\frac{72}{90}$ törtnek tovább már nem egyszerűsíthető alakja a $\frac{4}{5}$, mert $(4; 5) = 1$.

☉ **Egy tört tovább nem egyszerűsíthető, ha a számlálója és a nevezője relatív prímek, vagyis a számlálónak és a nevezőnek nincs közös prímtényezője.**

FELADAT

B1

A prímtényezős felbontás segítségével határozd meg a számláló és a nevező legnagyobb közös osztóját, majd egyszerűsítsd a törtet!

a) $\frac{60}{72}$; b) $\frac{75}{45}$; c) $\frac{84}{72}$; d) $\frac{63}{84}$; e) $\frac{50}{85}$; f) $\frac{36}{96}$;

g) $\frac{600}{360}$; h) $\frac{175}{105}$; i) $\frac{144}{300}$; j) $\frac{666}{126}$; k) $\frac{750}{875}$; l) $\frac{121}{143}$;

m) $\frac{6000}{8400}$; n) $\frac{4725}{4455}$; o) $\frac{1296}{1944}$; p) $\frac{3136}{1372}$; q) $\frac{9375}{7500}$; r) $\frac{2284}{1210}$

Emlékeztető

Különböző nevezőjű törtet úgy tudunk összeadni (vagy kivonni), hogy először azonos nevezőjű törtté alakítjuk őket, majd a számlálók összegét (különbségét) osztjuk a közös nevezővel. Az egyenlő nevezők megkeresését megkönnyíti a legkisebb közös többszörös meghatározása.

Két vagy több törtet is végtelen sokféleképpen írhatunk fel azonos nevezőjű tört formájában. Ezek közül az a legegyszerűbb, amikor a nevezők legkisebb közös többszörösét választjuk a tört nevezőjéül.

☉ Ha egy tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk, a tört értéke nem változik. Ezért egy törtnek végtelen sokféle alakja van, amelyek értéke egyenlő.

2. példa

Határozzuk meg a művelet sor eredményét: $\frac{18}{75} + \frac{25}{72} - \frac{10}{45}$

$$75 = 3^1 \cdot 5^2; \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2; \quad 45 = 3^2 \cdot 5^1$$

A közös nevező: $[75; 72; 45] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$

A prímtényezősről leolvasható, hogy mennyivel kell szoroznunk a nevezőket, hogy megkapjuk a közös nevezőt:

$$1800 = (3^1 \cdot 5^2) \cdot (2^3 \cdot 3^1) = 75 \cdot 24;$$

$$1800 = (2^3 \cdot 3^2) \cdot (5^2) = 72 \cdot 25;$$

$$1800 = (3^2 \cdot 5^1) \cdot (2^3 \cdot 5^1) = 45 \cdot 40$$

Ugyanezekkel a számokkal kell szoroznunk a megfelelő számlálókat is:

$$\frac{18}{75} + \frac{25}{72} - \frac{10}{45} = \frac{18 \cdot 24}{1800} + \frac{25 \cdot 25}{1800} - \frac{10 \cdot 40}{1800} = \frac{432 + 625 - 400}{1800} = \frac{657}{1800}$$

$$\frac{18}{75} + \frac{25}{72} - \frac{10}{45} = \frac{73}{200}$$

☉ 9-cel egyszerűsíthető a tört.

Ha lehet, egyszerűsítsük az eredményt.

FELADAT

B2 Határozd meg a művelet sorok eredményét!

a) $\frac{14}{15} + \frac{21}{30} - \frac{15}{10};$

b) $\frac{13}{12} - \frac{35}{24} + \frac{14}{28};$

c) $\frac{15}{10} - \frac{13}{30} - 1;$

d) $\frac{30}{60} + \frac{75}{50} + \frac{66}{88};$

e) $\frac{24}{36} + \frac{63}{18} + \frac{12}{54};$

f) $\frac{50}{77} - \frac{60}{28} + 1\frac{55}{70};$

g) $\frac{90}{18} + 10 - \frac{60}{15};$

h) $6 + \frac{80}{56} - \frac{60}{24};$

i) $\frac{85}{70} + 2\frac{18}{63} - 0,5;$

j) $\frac{35}{14} + \frac{10}{70} - \frac{40}{56};$

k) $15 - \frac{15}{75} - \frac{50}{75};$

l) $\frac{60}{24} + \frac{60}{18} - 1\frac{30}{36}$

☉ Végezd el a lehetséges egyszerűsítéseket a műveletek elvégzése előtt és után!



Adjuk össze 36 osztót! Adjuk össze az osztók reciprokait is! Milyen összefüggés áll fenn a két összeg között? Vajon más számokra is igaz ez?

➤ SZORZÁS, OSZTÁS

☉ Például

$$(+3) \cdot (+5) = +15;$$

$$(-3) \cdot (-5) = +15;$$

$$(-6) : (-2) = +3$$

$$(+3) \cdot (-5) = -15;$$

$$(-3) \cdot (+5) = -15;$$

$$(-12) : (+3) = -4$$

$$(+3) \cdot 0 = 0;$$

$$0 \cdot (-5) = 0;$$

$$0 : 25 = 0$$

Például a $0:0$ vagy a

$12:0$ nem értelmezhető.

Emlékeztető

Két azonos előjelű, 0-tól különböző szám szorzata és hányadosa mindig pozitív.

Két különböző előjelű, 0-tól különböző szám szorzata és hányadosa mindig negatív.

Ha a szorzatban valamelyik tényező 0, akkor a szorzat is 0.

Ha az osztandó 0, és az osztó nem 0, akkor a hányados 0.

Az osztó sohasem lehet 0.

☉ Például

$$\textcircled{1} \frac{11}{15} \cdot 3 = \frac{11 \cdot 3}{15} = \frac{33}{15} = \frac{11}{5};$$

$$\textcircled{2} \frac{11}{15} \cdot 3 = \frac{11}{15:3} = \frac{11}{5}$$

Emlékeztető

Törtet egész számmal kétféleképpen szorozhatunk:

- ① a tört számlálóját szorozzuk az egész számmal, a nevezőjét változatlanul írjuk a szorzat nevezőjébe;
- ② a tört nevezőjét osztjuk az egész számmal, számlálóját pedig változatlanul írjuk a szorzat számlálójába.

$$\frac{14}{15} \cdot \frac{9}{4} = \frac{14 \cdot 9}{15 \cdot 4} = \frac{126}{60} = \frac{21}{10}$$

Törtet törttel úgy is szorozhatunk, hogy a számlálók szorzatát osztjuk a nevezők szorzatával.

Ha a műveletvégzés előtt elvégezzük a lehetséges egyszerűsítéseket, akkor könnyebbé tehetjük a munkát.

$$\textcircled{1} \frac{25}{18} : 5 = \frac{25:5}{18} = \frac{5}{18}$$

$$\textcircled{2} \frac{25}{18} : 5 = \frac{25}{18 \cdot 5} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$$

Törtet egész számmal kétféleképp oszthatunk:

- ① a tört számlálóját osztjuk az egész számmal, ez lesz a hányados számlálója, a nevezőjét változatlanul írjuk a hányados nevezőjébe;
- ② a tört nevezőjét szorozzuk az egész számmal, ez lesz a hányados nevezője, számlálóját pedig változatlanul írjuk a hányados számlálójába.

Törttel úgy osztunk, hogy az osztó reciprokaival szorzunk.

Az osztás mindig helyettesíthető az osztó reciprokával való szorzással. Ezért azokban a műveletsorokban, amelyekben nincs zárójel, és csak szorzás és osztás fordul elő, a tényezők tetszés szerint felcserélhetők.

$$18 : 4 = 18 \cdot \frac{1}{4} = \frac{18}{4} = 4,5;$$

$$72 : 1,2 = 72 : \frac{12}{10} = 72 \cdot \frac{10}{12} = 60$$

Ha sorrendet változtatunk, akkor az egyes számokra eredetileg kijelölt műveleteket végezzük el:

$$18 \cdot 47 : 9 = 18 : 9 \cdot 47 = 2 \cdot 47 = 94,$$

$$\text{mert } 18 \cdot 47 : 9 = 18 \cdot 47 \cdot \frac{1}{9}$$

FELADAT

68 Végezd el a műveletet, az osztást ellenőrizd!

- a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}$; b) $\frac{8}{7} \cdot \frac{9}{4}$; c) $\frac{8}{9} \cdot \frac{15}{64}$; d) $\frac{35}{56} \cdot \frac{72}{21}$; e) $\frac{80}{48} \cdot \frac{18}{15}$;
 f) $\frac{9}{6} \cdot \frac{8}{3}$; g) $\frac{5}{8} \cdot \frac{6}{4}$; h) $\frac{1}{3} \cdot \frac{13}{78}$; i) $\frac{43}{10} \cdot \frac{17}{10}$; j) $\frac{8}{5} \cdot 2\frac{1}{7}$;
 k) $\frac{9}{4} : \frac{3}{2}$; l) $\frac{8}{6} : \frac{6}{8}$; m) $\frac{5}{9} : \frac{30}{75}$; n) $\frac{54}{72} : \frac{20}{90}$; o) $\frac{13}{21} : \frac{39}{70}$;
 p) $\frac{7}{2} : \frac{4}{5}$; q) $\frac{1}{9} : \frac{5}{3}$; r) $\frac{4}{7} : \frac{35}{32}$; s) $\frac{13}{10} : \frac{23}{10}$; t) $\frac{17}{10} : \frac{127}{100}$

69 Végezd el a műveletet, az osztást ellenőrizd!

- a) $(-3) \cdot (-5)$; b) $(+30) \cdot (-5)$; c) $(-3) \cdot (+500)$; d) $(+30) \cdot (+500)$;
 e) $(+60) : (-5)$; f) $(-600) : (-50)$; g) $(+60) : (+50)$; h) $(+6) : (-500)$

⊙ *Ügyelj az előjelekre!*



a) Mennyi a következő szorzat értéke?

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \left(1 - \frac{1}{25}\right) \left(1 - \frac{1}{36}\right) \left(1 - \frac{1}{49}\right)$$

b) Mennyi a következő összeg értéke?

$$\frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{5}{17 \cdot 22} + \frac{5}{22 \cdot 27} + \frac{5}{27 \cdot 32} + \frac{5}{32 \cdot 37}$$



10 db $\frac{3}{4}$ l-es üvegbe lekvárt töltünk. Hány darab $\frac{2}{3}$ l-es üvegbe tudjuk ezt a lekvárt betölteni?



Tizenketten 12 kenyeret visznek: minden férfi két-két kenyeret, minden asszony egy-egy fél kenyeret, és minden gyerek egy-egy negyed kenyeret. Hányan vannak a férfiak, az asszonyok, és a gyerekek?



Egy családban az anya életkora éppen fele az apa és a gyerek életkora összegének. Az apa és az anya életkorának összege 100 év, és mindkettő életkora prímszámmal írható le. Hány évesek a család tagjai?

Fejtörő!



⊙ *Régi orosz fejtörő feladat.*

☉ *Hogyan szorzunk, hogyan osztunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel, ...; 0,1-del, 0,01-dal, 0,001-del, ...?*

☉ *A tizedestörtek körében hogyan végezzük el a szorzást és az osztást?*

☉ *Mit mondhatunk a szorzat előjeléről, ha páratlan számú negatív tényező van benne; ha páros számú negatív tényező van benne?*

☉ *A számok nem csoportosíthatók tetszés szerint. Például:*
 $60 : (-10 : 5) : (-2) \neq [60 : (-10)] : [5 : (-2)]$

☉ *A műveletek elvégzése előtt egyszerűsítsd a törtet, ha lehet!*

☉ *Például:* $\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0,6$

☉ *Melyik tört írható fel véges, melyik végtelen szakaszos tizedestört alakban?*

70 Hajtsd végre a műveletet, az osztást ellenőrizd!

- | | | | |
|------------------------|-------------------------|--------------------------|------------------------|
| a) $3,75 \cdot 100$; | b) $0,09 \cdot 2000$; | c) $0,573 \cdot 7001$; | d) $9,8 \cdot 106$; |
| e) $2575 \cdot 0,1$; | f) $279 \cdot 0,001$; | g) $0,573 \cdot 0,019$; | h) $6,8 \cdot 4,6$; |
| i) $56,25 \cdot 2,1$; | j) $53,7 \cdot 0,201$; | k) $0,085 : 10$; | l) $65,6 : 100$; |
| m) $360,5 : 1000$; | n) $48,5 : 62$; | o) $0,065 : 2500$; | p) $34,56 : 48\,000$; |
| q) $16,45 : 0,1$; | r) $538 : 0,001$; | s) $0,045 : 0,01$; | t) $500 : 0,0001$ |

71 A tényezők felcserélésével és csoportosításával egyszerűsítsd a számítást!

- | | | |
|--|---|---|
| a) $5 \cdot 25 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 20$; | b) $2 \cdot 125 \cdot 13 \cdot 50 \cdot 8$; | c) $0,125 \cdot 7,5 \cdot 80 \cdot 2$; |
| d) $7 \cdot 15 \cdot 9 \cdot 0 \cdot 43$; | e) $9 \cdot 0,75 \cdot 12 \cdot 40 \cdot 5$; | f) $12,5 \cdot 7,5 \cdot 58 \cdot 1,6$ |

72 Számítsd ki a szorzatokat!

- | | | |
|-----------------------------------|---|--|
| a) $(-15) \cdot 4 \cdot (-0,5)$; | b) $(-75) \cdot (-100) \cdot (-2)$; | c) $5 \cdot 4,5 \cdot (-8) \cdot (-1)$; |
| d) $15 \cdot (-100) \cdot (-2)$; | e) $(-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1)$ | |

73 Számítsd ki a műveletsorok eredményét!

- | | | |
|------------------------------|------------------------------------|------------------------------|
| a) $(-85) : 5$; | b) $(-75) : (-30)$; | c) $4,5 : (-8) \cdot (-1)$; |
| d) $15 : (-100) : (-2)$; | e) $(-15) \cdot 4 : (-8) : (-1)$; | f) $0 : (-7)$; |
| g) $60 : (-10 : 5) : (-2)$; | h) $(-48 : 12) : [(-4) : (-2)]$ | |

74 Határozd meg az eredményeket!

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|---|--|
| a) $\frac{2}{5} \cdot 7$; | b) $\frac{7}{8} \cdot 4$; | c) $\frac{2}{3} \cdot (-6)$; | d) $-\frac{8}{9} \cdot (-15)$; |
| e) $\frac{2}{5} : 7$; | f) $\frac{9}{5} : 6$; | g) $\frac{2}{3} : (-6)$; | h) $-8 : \left(-\frac{8}{9}\right)$; |
| i) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$; | j) $\frac{6}{7} \cdot \frac{7}{6}$; | k) $-\frac{9}{5} \cdot \left(-\frac{10}{26}\right)$; | l) $\frac{42}{56} \cdot \left(-\frac{16}{14}\right)$; |
| m) $\frac{5}{2} : \frac{2}{5}$; | n) $\frac{7}{6} : \frac{7}{9}$; | o) $-\frac{9}{2} : \left(-\frac{18}{16}\right)$; | p) $\frac{49}{56} : \left(-\frac{21}{14}\right)$ |

75 a) Írd fel a törtet tizedestört alakban!

$$\left| \begin{array}{ccccccc} a = \frac{3}{2}; & b = \frac{2}{3}; & c = \frac{6}{5}; & d = \frac{3}{9}; & e = \frac{36}{25}; & f = \frac{37}{20}; & g = \frac{39}{75} \end{array} \right|$$

b) Írd fel a véges tizedestörteket törtalakban!

$$a = 0,25; \quad b = 2,5; \quad c = 0,0025; \quad d = 13,5; \quad e = 0,000\,002$$

c) A következő törtet tovább már nem egyszerűsíthetők:

$$\left| \begin{array}{ccccccc} a = \frac{37}{40}; & b = \frac{17}{75}; & c = \frac{18}{25}; & d = \frac{37}{27}; & e = \frac{13}{32}; & f = \frac{137}{125}; & g = \frac{307}{150} \end{array} \right|$$

76

- a) Aladár elvállalt egy munkát. Óránként 5,35 €-t kapott. Mennyit keresett, ha összesen 84 órát dolgozott?
- b) Bori üzemanyagot vásárolt, 282,50 Ft-ért literjét. Mennyibe került 35,6 l üzemanyag?
- c) Csaba 1 perc alatt 25 m-t úszik. Hány métert úszik ugyanekkora sebességgel negyed óra alatt?
- d) Dani napi hatórás munkaidőben, 15 napig dolgozott, és 405 €-t keresett. Mennyit keresett Dani óránként?
- e) Hajón 80 km-t 6 óra 15 perc alatt tettünk meg. 1 óra alatt átlagosan hány kilométert ment a hajó?

☉ Nézz utána, mennyibe kerül most egy liter üzemanyag!

☉ $s = v \cdot t$

77

- Ferkó kirándulni ment, 1 óra alatt átlagosan 4,5 km-t tudott megtenni. Hány kilométert gyalogolt 3,5 óra alatt?
- Hazafelé óránként 0,3 km-rel kevesebb utat tett meg. Mennyi idő alatt ért haza?
- A:** 3 óra és 20 perc alatt; **B:** 3 óra és 45 perc alatt; **C:** 3 óra és 75 perc alatt

☉ Karikázd be a helyes választ betűjelét!

78

- Egy téglalap alapú szoba 2 öl 5 láb hosszú, 2 és fél öl széles.
- a) A padlózat elkészítéséhez kiszámították, hogy mekkora a szoba területe.
- A:** 255 négyzetláb; **B:** 6,25 „négyyszögöl”; **C:** 6,25 m²
- b) Legalább hány szál 2 öl 3 láb hosszú és 5 hüvelyk széles deszkára van szükség a padló elkészítéséhez?
- A:** 20 szálra; **B:** 36 szálra; **C:** 41 szálra

☉ Az öl, a láb és a hüvelyk régi mértékegységek.

1 öl = 6 láb;

1 láb = 12 hüvelyk

Melyik a helyes eredmény?

79

- Törttel úgy is oszthatunk, hogy az osztandót
- A:** az osztó reciprokéval szorozzuk; ☐
- B:** az osztó számlálójával szorozzuk, a nevezőjével pedig osztjuk; ☐
- C:** az osztó nevezőjével szorozzuk, a számlálójával pedig osztjuk. ☐

☉ Melyik állítás igaz?

Az igaz állítás után írd le betűt, a hamis állítás után H-t!

80

- a) Számítsd ki a művelet sor eredményét: $50 \cdot 30 : 15 \cdot 8 : 16 \cdot 2$
- b) Az a) feladat művelet sorában helyezz el különbözőképpen zárójeleket, és számítsd ki úgy is minden esetben az eredményt!
- c) $50 \cdot 30 : [15 \cdot 8 : (16 \cdot 2)]$
- Hányszorosára változik a művelet sor eredménye, ha elhagyjuk a szögletes zárójelpárt?

Gyakorló

1.146–1.150.;

Feladatgyűjtemény

2.2.01–07., 2.2.09.

☉ Ügyelj a műveletek sorrendjére!

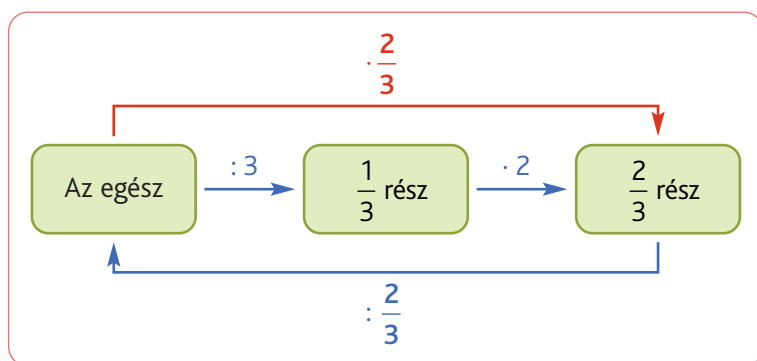


5 : 5 : 5 : 5

Zárójelezd úgy, hogy 1; hogy 5; hogy $\frac{1}{25}$ legyen az eredmény!

Fejtörő!

MENNYISÉGEK TÖRTRÉSZE



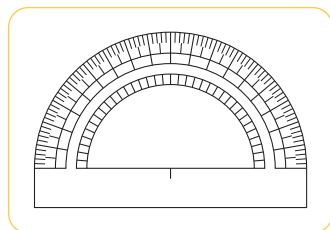
Emlékeztető

A törttel való szorzás a szám (mennyiség) tört részének kiszámítását jelenti.

Egy szám $\frac{2}{3}$ része = a szám $\frac{2}{3}$ -szorosával.

FELADATOK

☉ Az eredményeket fejezd ki különböző mértékegységekkel!



81 a) Mennyi 120 m-nek a $\frac{3}{4}$ része; $\frac{2}{5}$ része; $\frac{7}{3}$ része; $\frac{13}{24}$ része?

b) Mennyi $\frac{3}{4}$ kg-nak a $\frac{3}{4}$ része; $\frac{2}{3}$ része; $\frac{4}{3}$ része; $\frac{3}{100}$ része?

82 a) Hány óra az 1 min; 10 min; 15 min; 18 min; 150 min?

b) Hány perc az $\frac{1}{4}$ h; $\frac{3}{4}$ h; $\frac{5}{4}$ h; $\frac{1}{3}$ h; $\frac{3}{5}$ h; $2\frac{5}{6}$ h; $3\frac{2}{5}$ h?

83 Jelölje π az egyenesszöget.

a) Hány fokok szög az $\frac{1}{4}\pi$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{1}{6}\pi$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{7}{3}\pi$; $1\frac{3}{5}\pi$?

b) Hányad része az egyenesszögnek az 1° ; 10° ; 13° ; 30° ; 45° ; 120° ; 135° ; 180° ; 210° ; 270° ; 300° ; 360° ?

84 Annának 400 Ft-ja van, Benőnek 500 Ft-ja.

Hányad része Anna pénze Benő pénzének?

Hányad része Benő pénze Anna pénzének?

Hányad része Anna pénze, illetve Benő pénze a kettőjük összes pénzének?



☉ A 200 m^2 $\frac{3}{4}$ része hány-szorosa a 200 m^2 -nek? Ügyelj a mértékegységekre!

85 a) 200 m^2 -es kertemnek felástam a $\frac{3}{4}$ részét. Hány négyzetmétert ástam fel? A kert mekkora része maradt felásatlan?

b) 60 km-es túraútvonal $\frac{3}{8}$ részét tettük meg az első napon, $\frac{2}{5}$ részét a második napon. Az útvonal mekkora része maradt a harmadik napra? Hány kilométer ez?

86

a) Egy kosárban almák voltak. Albert megette az almák egynegyedét, Béla a maradék egyharmadát, Csaba a megmaradt alma felét, így Dénesnek már csak 9 alma jutott. Hány alma volt eredetileg a kosárban?

b) 1 kg dió ára 520 Ft. A dióbél a dió tömegének $\frac{2}{5}$ része.

Mennyibe került 1 kg dióbél, ha 1 kg dió megtörésére és tisztítására 120 Ft-ot számítottak?

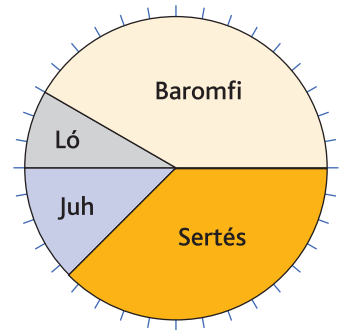
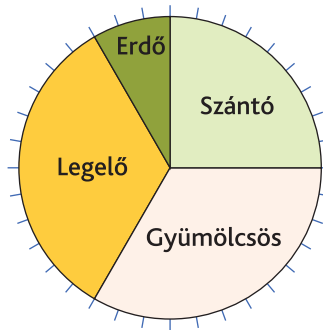


87

Egy gazdaságban a földterület, illetve az állatállomány megoszlását szemléltetik a diagramok:

a) A földterület mekkora része erdő, legelő, szántó, gyümölcsös?

b) Az állatállomány mekkora része a baromfi, a juh, a sertés, a ló?



88

a) Elköltöttem 3000 forintnak először az $\frac{1}{3}$ részét, majd a maradék $\frac{3}{4}$ részét. Hány forintot költöttem összesen? Mekkora része maradt meg a pénzemnek?

b) Egy 240 m²-es kiskert $\frac{4}{5}$ részében vetemény van. A vetemény $\frac{5}{8}$ része burgonya. Mekkora területet foglal el a burgonya ebben a kertben?

c) Szorgalmasék havi bruttó jövedelme 420 000 Ft. A pénz $\frac{1}{3}$ részét már a kézhezvétel előtt levonják tőlük. A maradék pénz $\frac{1}{8}$ részét adósságok törlesztésére, $\frac{1}{2}$ részét élelemre, $\frac{1}{4}$ részét lakbérre és a lakás fenntartására fordítják. Hány forintjuk marad egyéb célokra? Hányad része ez a bruttó jövedelemnek?

d) Egy dinnye $\frac{2}{3}$ része $3\frac{1}{4}$ kg. Mennyi volt a tömege az egész dinnyének?

e) A burgonya $\frac{1}{8}$ része elvesz hámozás során. $\frac{3}{2}$ kg burgonyából mennyi hámozott burgonya lesz? Hány kilogramm burgonyából lesz $\frac{3}{2}$ kg hámozott burgonya?

Gyakorló
1.151–1.155.;
Feladatgyűjtemény
2.2.06., 2.2.14.

© Nézz utána, hogy mit jelent a „bruttó” jövedelem!



a) Egy pozitív szám $\frac{3}{5}$ része egyenlő egy másik szám $\frac{4}{7}$ részével. A két szám összege 3. Mivel egyenlő a két szám hányadosa?

b) Egy szám $\frac{2010}{2011}$ része 2011. Mivel egyenlő a szám $\frac{2011}{2010}$ része?

Fejtörő!

A ZÁRÓJELEK HASZNÁLATA. A MŰVELETEK SORRENDJE

Jegyezd meg!

Egészítsük ki a korábban tanultakat.

Megegyezés szerint a csak összeadást és kivonást vagy a csak szorzást és osztást tartalmazó műveletsort (ha nincs zárójel) balról jobbra haladva is végrehajthatjuk.

Ha sorrendet változtatunk, akkor csak az egyes számokra eredetileg kijelölt műveleteket végezhetjük el.

A négy alpműveletet és hatványozást tartalmazó műveletsorban

1 először a hatványozásokat,

2 ezután a szorzásokat és az osztásokat,

3 végül az összeadásokat és a kivonásokat végezzük el.

A zárójelek módosíthatják a műveletek elvégzésének a sorrendjét.

© Például:

$$\begin{array}{l} 275 - 87 + 25 - 13 \\ \text{vagy} \quad 72 : 18 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 275 + 25 - 87 - 13 \\ \text{vagy} \quad 72 \cdot 2 : 18 \end{array}$$

$$150 - 15 \cdot 2^3 + 7000 : 10^2$$

$$150 - 15 \cdot 8 + 7000 : 100$$

$$150 - 120 + 70 = 100$$

© **Ügyelj a műveletek sorrendjére! Csak milyen esetben haladhatunk a műveletekkel balról jobbra? A zárójelek hogyan módosítják a műveleti sorrendet?**

Gyakorló

1.156–1.174., 9.01–9.07.;

Feladatgyűjtemény

2.2.13–24., 2.3.13–14.

© **Hogyan bontjuk fel a zárójelet, ha a zárójel előtt negatív előjel (műveletjel) van?**

FELADATOK

89 Számítsd ki a műveletsor eredményét!

- a) $15,6 + 13,4 : 4 - 2,5 \cdot 4;$ $14,55 : 75 - 0,000 15 \cdot 1000;$
 b) $22,5 \cdot 2^3 + 4,8 : 16 \cdot 10^2 - 10^2;$ $70 - 64 : 4^2 + 200 : 10^3 + 3 \cdot 25;$
 c) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) \cdot 24 - 1;$ $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} \cdot 24 - 1;$ $\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{6} \cdot 24 - 1\right);$
 d) $\left(\frac{18}{8} - \frac{3}{6}\right) : 4 \cdot 3 - 1;$ $\frac{18}{8} - \frac{3}{6} : (4 \cdot 3 - 1);$ $\frac{18}{8} - \frac{3}{6} : 4 \cdot 3 - 1$

90 Melyik egyenlőség igaz, melyik hamis? Az előjelek megfelelő változtatásával javítsd ki a hibás egyenlőségeket!

- a) $(2,5 - 1,2) + (4,6 - 2,5) = 2,5 - 1,2 + 4,6 - 2,5;$
 b) $(5,3 - 3,5) - (5,2 - 3,5) = 5,3 - 3,5 - 5,2 - 3,5;$
 c) $(4,3 + 2,8) - (4,3 + 1,8) = 4,3 + 2,8 - 4,3 - 1,8;$
 d) $(7,5 + 2,5) + (7,5 - 2,5) = 7,5 + 2,5 - 7,5 + 2,5;$
 e) $(8,1 - 2,1) - (7,1 - 2,1) = 8,1 - 2,1 - 7,1 + 2,1;$
 f) $(3,8 - 1,3) - (1,3 - 3,8) = 3,8 - 1,3 - 1,3 - 3,8$

Fejtörő!



Mennyi a következő műveletek eredménye?

- a) $1 : 2 \cdot 2 : 3 \cdot 3 : 4 \cdot 4 : 5 \cdot 5;$ b) $1 \cdot 2 : 2 \cdot 3 : 3 \cdot 4 : 4 \cdot 5 : 5;$
 c) $1 - 2 + 2 - 3 + 3 - 4 + 4 - 5 + 5;$ d) $1 + 2 - 2 + 3 - 3 + 4 - 4 + 5 - 5;$
 e) $1 + 2 \cdot 3 : 4 - 1 - 2 : 3 \cdot 4;$ f) $-1 - 2 : 3 \cdot 4 + 1 + 2 \cdot 3 : 4$

91

Írd le a számítás tervét is!

- a) Ambrusnak 4500 Ft zsebpénze volt. A hét minden munkanapján 250 Ft-ért tízórait, 120 Ft-ért gyümölcslevet vásárolt. Hány forintja maradt a hét végére?
- b) Egy eszköz 950 Ft-ba kerül, a hozzá tartozó alkatrész 240 Ft-ba. Hány ilyen eszközt vásárolhat egy kisvállalat 54 000 Ft-ért, ha 8 db alkatrészt is be akar nak szerezni?
- c) Egy sportkör úgy tervezte, hogy 18 pár edzőcipőt vásárol, páronként 24 350 Ft-os áron. Mivel a tavaszi vásár során 20%-kal olcsóbban adták a cipőket, és így az edzőcipők árát is mérsékelték 4870 Ft-tal, úgy döntöttek, hogy 23 párat vesznek. Mennyivel tért el a kifizetett összeg a tervezettől?
- d) Egy kistermelő 8000 napocsibét vásárolt, darabonként 110 Ft-os áron. Ebből az első napokban 150 elhullott, így 60 nap múlva 7850 db-ot értékesített, darabonként 360 Ft-ért. Egy csirke felneveléséhez 2,2 kg takarmányt használt fel, amelynek tonnánkénti ára 32 500 Ft volt, továbbá az üzemelés naponta 4200 Ft-ba került. Mennyi volt a kistermelő haszna?

☉ *A megoldás előtt végezz becslést!*

A szöveges feladat eredményét a szöveg alapján ellenőrizzük.



☉ *Emlékeztető:*

1 t = 1000 kg

92

- a) Egy téglalap egyik oldala: $a = 3,8$ cm, a másik: $b = 2,6$ cm.

Szerkeszd meg a téglalapot! Mekkora a téglalap kerülete és területe?

- b) Egy téglalap egyik oldala: $a = 4,3$ cm, a kerülete 12,8 cm.
Mekkora a téglalap területe?
- c) Egy téglalap egyik oldala: $a = 4,5$ cm, a területe $10,8 \text{ cm}^2$.
Mekkora a téglalap kerülete?
- d) Egy kocka éleinek hossza: $a = 6,5$ cm.
Add meg különböző mértékegységekkel a kocka felszínét és térfogatát!
- e) Egy téglatest egy csúcsba futó éleinek hossza: $a = 8,5$ cm, $b = 1,23$ dm, $c = 48$ mm.
Add meg a különböző mértékegységekkel a téglatest felszínét és térfogatát!
- f) Mennyi festék kell egy téglatest alakú doboz kétszeri befestéséhez, ha a doboz egy csúcsban találkozó három éle: 5,0 dm, 25 cm, 0,125 m. 1 m^2 felület első befestéséhez $\frac{1}{8}$ kg festék kell, a másodszori festéshez pedig ennek $\frac{4}{5}$ része.

☉ *Emlékeztető:*

$$K = 2 \cdot (a + b);$$

$$T = a \cdot b$$

$$A = 6 \cdot a^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$V = a^3 \text{ (cm}^3\text{)}$$

☉ *Ügyelj a mértékegységekre!*

☉ *A téglatest felszíne:*

$$A = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

93

Egy téglatest egy csúcsban találkozó éleinek hossza 5 cm; 5 cm; 6 cm.

Számítsd ki a téglatest felszínét!

- a) Melyik számítási terv helyes a következők közül?

① A: $2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = ?$

② B: $2 \cdot (5^2 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6) = ?$

A: Csak az ① helyes.

B: Csak a ② helyes.

C: Mindkettő helyes.

D: Egyik sem helyes.

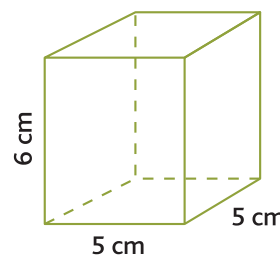
- b) Mekkora a téglatest felszíne?

A: 55 cm^2 ;

B: 120 cm^2 ;

C: 145 cm^2 ;

D: 170 cm^2



☉ *Karikázd be a helyes válasz betűjelét!*



© Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

© Indokold a választ!

$$s = v \cdot t$$

© A helyes válasz betűjelének bekarikázásával válaszolj a kérdésekre!

© Ügyelj a mértékegység átváltására! Például: 3 óra 45 perc hány óra?

94

Egy 12 m-szer 30 m-es téglalap alapú úszómedencében 2 m mély víz van. A medencében egy 2 m-szer 2 m-es négyzet alapú, (a medence aljától számított) 2,20 m magas beton sziget emelkedik ki a vízből. Számítsd ki, hogy hány köbméter víz van a medencében!

a) Melyik számítási terv helyes a következők közül?

A: $12 \cdot 30 \cdot 2 - 2^3 = ?$

B: $12 \cdot 30 \cdot 2 - 2^2 \cdot 2,20 = ?$

C: $12 \cdot 30 \cdot 2 + 2^3 = ?$

D: $12 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2,20 = ?$

b) Arisztid szerint a következőképp is kiszámítható a medencében lévő vízmennyiség:

$$V = 2 \cdot (30 \cdot 12 - 2^2)$$

Igaz-e vagy hamis Arisztid állítása?

c) Hány köbméter víz van a medencében?

A: 728 m³;

B: 712 m³;

C: 728,8 m³;

D: 711,2 m³

95

Andor 850 km távolságról 6 órakor indult hazafelé. Délelőtt végig autópályán haladt, ahol átlagosan 128 km-t tett meg óránként. Kétóránként negyedórás pihenőt is tartott.

a) Délelőtt 10 óra 45 perckor körülbelül mekkora távolságra volt az otthonától?

A: 242 km-re;

B: 306 km-re;

C: 319 km-re;

D: 338 km-re

b) Az utolsó 91 km-t nem autópályán fogja megtenni. Mennyi idő kell ehhez, ha átlagosan csak 65 km-t tehet meg óránként?

A: 1 óra 45 perc;

B: 1 óra 40 perc;

C: 1 óra 24 perc;

D: 1 óra 16 perc

96

Bálint munkagépének tankjába 120 l gázolaj fér. Ha a gép földmunkát végez, akkor óránként átlagosan 22,8 l gázolajat fogyaszt. Ha közúton közlekedik, akkor 100 km-enként 15,6 l-t.

a) A gép 3 óra 45 percen át földmunkát végzett. Hozzávetőlegesen hány liter gázolajat fogyasztott el ez alatt?

A: 53,8 l-t;

B: 58,5 l-t;

C: 78,7 l-t;

D: 85,5 l-t

b) Bálint utoljára a lakóhelyén töltötte tele a tankot, amely a munkavégzés helyszínétől 180 km távolságra fekszik. Hány liter gázolaj lehet most a munkagép tankjában?

A: 6,4 l;

B: 13,2 l;

C: 33,4 l;

D: 34,5 l

c) A munkavégzés után a helyszíntől nem messze lévő benzinkútnál újra üzemanyagot tankol 11 900 Ft-ért. Hány litert töltött a tankba, ha 1 liter gázolaj ára 340 Ft volt?

A: 25 l-t;

B: 32,5 l-t;

C: 35 l-t;

D: 45,5 l-t

Fejtörő!



Egy téglatest egyik élét kétszeresére növeljük, a másik élét $\frac{1}{3}$ -ára csökkentjük. Hogyan változtassuk a 3. él, hogy a téglatest térfogata:

a) az eredetivel megegyezzen,

b) az eredeti kétszeresére növekedjen,

c) az eredeti harmadára csökkenjen?

ARÁNY, ARÁNYOS OSZTÁS

Emlékeztető

Két szám hányadosát a két szám arányának is nevezzük.

A két szám vagy mennyiség hányadosa, más szóval aránya megmutatja, hogy az egyik szám (az osztandó) hányszorosa a másik számnak (az osztónak).

Például: A 8-nak és a 4-nek a hányadosa, vagyis az aránya $8:4=2$, ez azt jelenti, hogy a 8 a 4-nek a 2-szerese.

A 3-nak és a 4-nek az aránya $3:4=\frac{3}{4}$, ez azt jelenti, hogy a 3 a 4-nek $\frac{3}{4}$ -szerese.

Általánosan: Az $a:b=\frac{a}{b}$ hányados ($b \neq 0$), más szóval az $a:b$ arány megmutatja, hogy az a hányszorosa a b -nek.

1. példa

2051-ben már a Marson is élnek emberek. Albi 6 óra alatt 200 m^2 marsot ásott fel a Marson, Béni pedig 4 óra munkával 120 m^2 földet a Földön. A fiúk egyforma teljesítményre lennének képesek azonos égitesten. Hol nehezebb ásni ezek alapján, a Földön vagy a Marson?

1. megoldás:

Határozzuk meg mindkét fiú óránkénti teljesítményét, vagyis az elvégzett munka és a munkaidő arányát.

$$\text{Albi: } (200 \text{ m}^2) : (6 \text{ h}) = 33 \frac{1}{3} \frac{\text{m}^2}{\text{h}};$$

$$\text{Béni: } (120 \text{ m}^2) : (4 \text{ h}) = 30 \frac{\text{m}^2}{\text{h}}$$

Albi óránkénti teljesítménye nagyobb.

2. megoldás

A munkaidők aránya:

$$(6 \text{ h}) : (4 \text{ h}) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Az elvégzett munkák aránya:

$$(200 \text{ m}^2) : (120 \text{ m}^2) = \frac{200}{120} = \frac{5}{3}$$

Vagyis Albi $\frac{3}{2}$ -szer annyi ideig dolgozott, mint Béni, és $\frac{5}{3}$ -szor annyi munkát végzett. Albi és Béni munkaidejének aránya kisebb, mint az elvégzett munkák aránya:

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6} < \frac{5}{3} = \frac{10}{6}$$

Ezek szerint könnyebben megy az ásás a Marson.

☉ A hányadost, az arányt, a törtet mind kifejezhetjük az osztás műveletével.

☉ Napjainkban két Mars szimulációs kutatóközpont is működik a Földön, az egyik Észak-Kanadában, a másik az amerikai Utah-ban.

A kutatóállomáson dolgozók marsi körülményeket feltételezve élnek az állomásokon. Rádióval, levegővel és vízzel felszerelt űrhajós ruhában hagyhatják el csak az állomást, különleges járművekkel és eszközökkel dolgoznak, a Marsot idéző kietlen köves talajon.



Három természetes szám aránya $1:3:5$, négyzeteinek összege 560. Melyik ez a három szám?

Fejtörő!

2. példa



Egy gazda a kutyájával együtt hazafelé tartott. Amikor a kutya megpillantotta a 720 m-re lévő házat, előrefutott, és néhány perc alatt a házhoz ért. Ez alatt az idő alatt a gazda csak 150 m-t tett meg, ezért a kutya a zárt kaputól azonnal visszaszaladt a gazdájához, majd a gazdához érkezve azonnal visszafutott a kapuhoz, és így tovább. Mekkora utat tett meg a kutya a ház megpillantásától addig, amíg a gazda a kapuhoz nem érkezett?

Az azonos idő alatt megtett utak aránya:

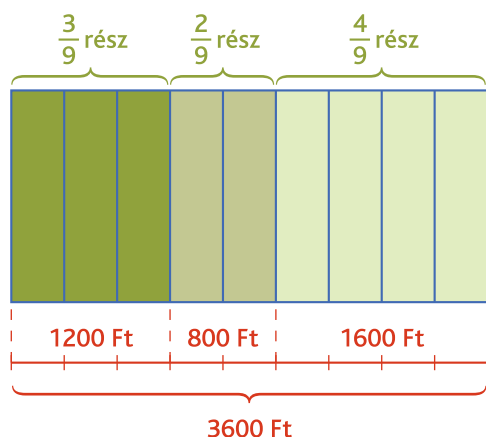
$$(720 \text{ m}) : (150 \text{ m}) = \frac{720}{150} = \frac{24}{5}$$

Ha a gazda 720 m utat tett meg, a kutya $\frac{24}{5}$ -ször annyit:

$$(720 \text{ m}) \cdot \frac{24}{5} = 3456 \text{ m-t.}$$

3. példa

Aladár 75 m², Barna 50 m², Csaba 100 m² kertet ásott fel, és összesen 3600 Ft munkabért kaptak. Mennyi pénz jár nekik külön-külön, ha a bért a végzett munka arányában osztják el?



A három legény munkájának aránya: $(75 \text{ m}^2) : (50 \text{ m}^2) : (100 \text{ m}^2)$
Egyszerűsítsünk a három szám legnagyobb közös osztójával, 25-tel:

$$(75 \text{ m}^2) : (50 \text{ m}^2) : (100 \text{ m}^2) = 3 : 2 : 4$$

Ezért Aladárnak a pénz $\frac{3}{9}$ része, 1200 Ft;

Barnának a pénz $\frac{2}{9}$ része, 800 Ft;

Csabának a pénz $\frac{4}{9}$ része, 1600 Ft jut.

Figyeljük meg, hogyan osztottuk fel a 3600-at 3 : 2 : 4 arányban.
A 3 : 2 : 4 arány itt nem műveletsort jelent!

Gyűjtőmunka

© Vizsgáljatok meg más gyümölcsöt is!
Melyik a leggazdaságosabb gyümölcs hasznos tömeg szempontjából?
Állítsatok fel sorrendet!



Végezzetek méréseket! Állapítsátok meg különböző gyümölcsök hasznos (meghámozott) tömegének és össztömegének arányát!

	Alma	Banán	Narancs	Dió		
Össztömeg (g)						
Hasznos tömeg (g)						
Hasznos tömeg és össztömeg aránya						

FELADATOK

97 Hányszorosa

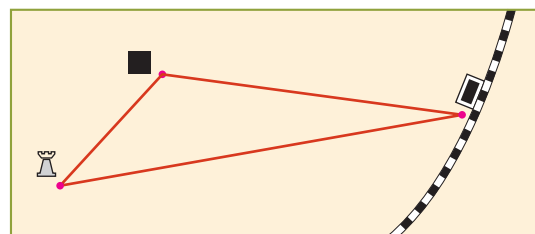
- a) a 9 a 3-nak; b) a 3 a 9-nek; c) a 9 a 4-nek;
d) a 9 az 1,5-nek; e) a $\frac{3}{4}$ a $\frac{4}{5}$ -nek; f) a 100 a 0,01-nak?

Gyakorló
1.175–1.178.;
Feladatgyűjtemény
2.4.01–11.

98 a) A térkép méretaránya 1:250 000. Légvonalban mekkora távolságra vannak egymástól az adott tereptárgyak?

- b) Budapesttől (tízre kerekítve) Szolnok 100 km, Debrecen 230 km, Cegléd 70 km távolságra van. Az alábbi vonal a felsorolt városokhoz vezető 4-es számú főutat jelképezi.

A távolságok arányát figyelembe véve jelöld Cegléd és Debrecen helyét is a vonalon! **Mit jelent a térkép méretaránya?**



Budapest

Szolnok

99

- a) Egy üzemben egy régi gép mellé beállítottak egy újat, amelynek a teljesítménye négyszerese a régi gép teljesítményének. A munka mekkora részét végzi el a régi gép, és mekkora részét az új?
- b) Két testvér a kapott ötösök arányában osztja el a csokoládét. Jancsi két ötöst kapott, Juliska hármat. Mekkora részt kapnak külön-külön a csokoládéból?
- c) Egy osztály három napra 60 km-es túrát tervezett úgy, hogy a naponta megteendő utak aránya 5:4:3 legyen. Hány kilométert tettek meg naponta?
- d) Rajzolj egy tetszőleges szakaszt! Szerkeszd meg azt a pontot, amely 3:1 arányban osztja ezt a szakaszt!
- e) Rajzolj egy tetszőleges hegyesszöget! Szerkeszd meg azt a félegyenest, amely 3:1 arányban osztja ezt a szöget!
- f) Két gyerek az életkoruk arányában osztotta meg a munkát. Imre 12 éves és 180 m² kertet gyomlált ki. Jancsi 15 éves. Hány négyzetméter kertet gyomláltak ki ketten?
- g) Négy vállalkozó egy üzletbe 10:4:6:5 arányban fektetett be tőkét. A tiszta haszon 546 000 Ft volt. Mennyit kapott egy-egy vállalkozó, ha a hasznot a befektetett tőke arányában osztották szét?
- h) Egy ötvözetben a réz és a cink aránya 3:2. Mennyi réz van az ötvözetben, ha 5600 g cinket tartalmaz?
- i) A tanterem hosszúságának, szélességének és magasságának az aránya 8:5:3. Mekkora a tanterem térfogata, ha a magassága 3,6 m?

© Milyen összefüggés van a gép teljesítménye és az elvégzett munka között?

© A számításához hány egyenlő részre kell osztani a mennyiséget?



Valamelyik csúcsából induló egyenessel fel tudjuk-e bontani a háromszöget két egyenlőszárú háromszögre, ha tudjuk, hogy két szögének aránya:

$$\alpha : \beta = 1 : 3?$$

Fejtörő!

SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

© A mennyiség 15%-a hányszorosa a mennyiségnek?

Emlékeztető

Egy mennyiség vagy szám $\frac{1}{100}$ részét a mennyiség vagy szám 1 százalékának, a $\frac{15}{100}$ részét a 15 százalékának is nevezzük.

Jelölés: 1%; 15%. Figyeljük meg az elnevezéseket:

560 kg 15 %-a 84 kg
 alap százalékláb százaléérték

© A sólámpát légúti megbetegedések tüneteinek enyhítéséhez ajánlják.

1. példa

Egy sólámpa előállításának költsége 1200 Ft. Ehhez hozzászámítanak 75% járulékos költséget. Mennyibe kerül így a termék?

1. megoldás (következtetéssel)

Az 1200 Ft az alap, a 100%. A 75% hozzászámítása után a költség 175%-át kell meghatároznunk.

$\begin{array}{l} : 100 \\ \cdot 175 \end{array}$
 $\begin{array}{l} 100\% \\ 1\% \\ 175\% \end{array}$
 $\begin{array}{l} (1200 \text{ Ft} : 100 =) \\ (12 \text{ Ft} \cdot 175 =) \end{array}$
 $\begin{array}{l} 1200 \text{ Ft} \\ 12 \text{ Ft} \\ 2100 \text{ Ft} \end{array}$
 $\begin{array}{l} : 100 \\ \cdot 175 \end{array}$

2. megoldás

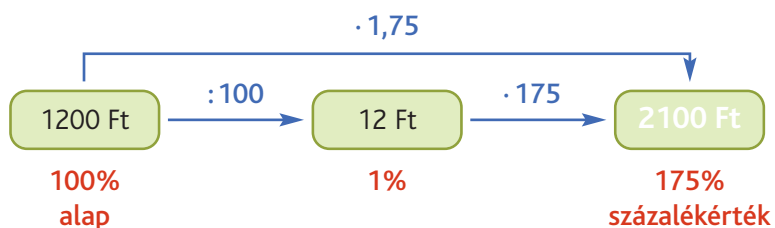
Az alaptól kell kiszámítanunk a százaléértéket, azaz egy mennyiség törtörését számítjuk ki.

Az alap 175%-a, vagyis $\frac{175}{100}$ része az alap

$\frac{175}{100}$ -szoros (1,75-szorosa):

$$1200 \cdot 1,75 = 2100 \text{ (Ft)}$$

© Hogyan számítjuk ki egy mennyiség törtörését?



© Tömegszázalékról van szó: A 16%-os oldat azt jelenti, hogy az oldat tömegének 16%-a só.

2. példa

250 g 16%-os sóoldatot készítünk. Hány gramm sót hány gramm vízben kell feloldani?

A 250 g oldat 16%-a só, 84%-a víz.

A só tömege: $250 \cdot 0,16 = 40 \text{ (g)}$

a víz tömege: $250 - 40 = 210 \text{ (g)}$

40 g sót 210 g vízben kell feloldani.

A százaléértéket határozzuk meg az alap és a százalékláb ismeretében.

3. példa

Egy madáretető előállításához 20% adót hozzászámítottak, így az ára 1500 Ft lett. Mennyi volt az előállítás költsége?

1. megoldás (következtetéssel)

A költséghez hozzászámították a költség 20%-át, tehát az 1500 Ft az eredeti költség 120%-a.

$$\begin{array}{rcl}
 & 120\% & 1500 \text{ Ft} \\
 : 120 & \swarrow & \searrow : 120 \\
 & 1\% & 12,50 \text{ Ft} \\
 \cdot 100 & \swarrow & \searrow \cdot 100 \\
 & 100\% & 1250 \text{ Ft}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (1500 \text{ Ft} : 120 =) \\
 (12,50 \text{ Ft} \cdot 100 =)
 \end{array}$$

2. megoldás

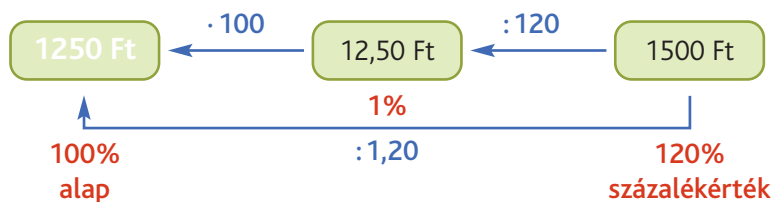
A százaléktérből kell kiszámítanunk az alapot, azaz egy mennyiség törtrészeiből számítjuk ki az egészet.

A százaléktérték 1500 Ft, ez az alap

120%-a, vagyis $\frac{120}{100}$ (1,20) része.

Ezért az alap: $1500 : 1,20 = 1250$ (Ft).

A termelési költség 1250 Ft volt.



☉ A képen egy kolibrietető látható Észak-Amerikából. A kolibrik a legalább 10%-os cukortartalmú virágnektárt kedvelik, de az etetőben kihelyezett cukros vizet is szívesen fogyasztják.

4. példa

Hány gramm 24%-os cukoroldat készíthető 600 g cukorból?

Az oldat 24%-a 600 g.

Az oldat tömege: $600 : 0,24 = 2500$ (g).

2500 g 24%-os cukoroldat készíthető.

Az alapot határozzuk meg a százaléktérték és a százalékláb ismeretében.

☉ Az oldat 24%-a az oldat 0,24-szeresét jelenti.

5. példa

210 g cukrot 390 g vízben feloldunk. Hány százalékos az oldat?

1. megoldás (következtetéssel)

Az oldat tömege: $(210 \text{ g} + 390 \text{ g}) = 600 \text{ g}$

$$\begin{array}{rcl}
 100\% & & 600 \text{ g} \\
 1\% & (600 \text{ g} : 100 =) & 6 \text{ g} \\
 x\% & & 210 \text{ g}
 \end{array}$$

$x = 210 : 6 = 35$. 35%-os az oldat.

2. megoldás

A százaléklábat határozzuk meg az alap és a százaléktérték ismeretében:

Az oldat tömege: 600 g.

Meg kell adnunk (századrészben) a 210 és a 600 arányát. $210 : 600 = 0,35$

A 210 a 600-nak 0,35 része, tehát 35%-a. 35%-os oldatot kaptunk.

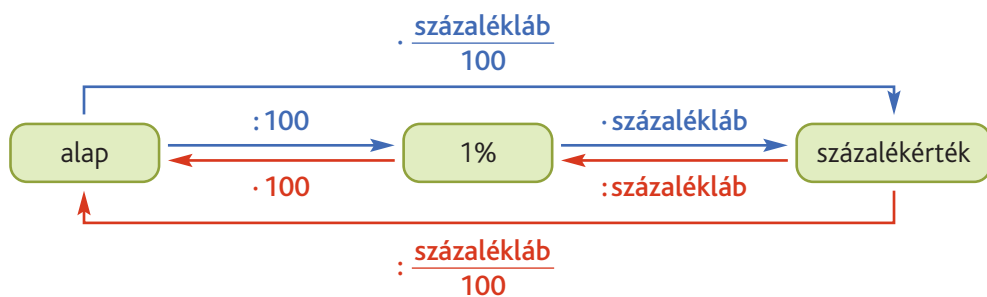
☉ Következtessünk az 1%-ra, majd ebből a 100%-ra.

☉ A 0,35 rész = 35 %

$$e = \frac{a}{100} \cdot p = a \cdot \frac{p}{100}$$

A SZÁZALÉKÉRTÉK KISZÁMÍTÁSA

Az alap tötrészét számítjuk ki. A százaléértéket úgy is megkaphatjuk, hogy az alapot szorozzuk a százalékláb századrészeével.



$$a = \frac{e}{p} \cdot 100 = e : \frac{p}{100}$$

$$p = \frac{e}{a} \cdot 100$$

$a = \text{alap};$

$e = \text{százalékérték};$

$p = \text{százalékláb}$

AZ ALAP KISZÁMÍTÁSA

A tötrészből számítjuk ki az egészet. Az alapot úgy is megkaphatjuk, hogy a százaléértéket osztjuk a százalékláb századrészeével.

A SZÁZALÉKLÁB KISZÁMÍTÁSA

A százalékláb azt mutatja meg, hogy a százaléérték hány századrésze (hány százaléka) az alapnak, ezért a **százaléklábat úgy is kiszámíthatjuk, hogy a százaléérték és az alap arányát szorozzuk 100-zal.**

FELADATOK

☉ Például:

$$\frac{1}{20} \text{ rész} = \frac{5}{100} \text{ rész} = 5\%$$

Egy mennyiség tötrészét hogyan számítjuk ki?

☉ Fejezd ki százalékban is a tötrészeket!

☉ Fejezd ki a százalékot tovább nem egyszerűsíthető tötrésszel is!

☉ Például:

$$a = ? \quad p = 20; \quad e = 10 \text{ m}$$

100 Mennyi a 400 kg

- a) $\frac{1}{10}$ része; b) $\frac{1}{20}$ része; c) $\frac{7}{10}$ része; d) $\frac{7}{25}$ része;
e) $\frac{2}{5}$ része; f) $\frac{3}{4}$ része; g) $\frac{7}{2}$ része; h) $\frac{17}{25}$ része?

Hány százaléka ez a 400 kg-nak?

- 101** a) Mekkora része a 25-nek a 2,5; az 5; a 17,5; a 25?
b) Mekkora része a 45-nek a 0,45; a 45; az 54; a 135; az 58,5?

102 Számítsd ki

- a) 500 Ft-nak a 10%-át, 25%-át, 50%-át, 75%-át, 87%-át, 100%-át;
b) 640 kg-nak a 20%-át, 40%-át, 92%-át, 150%-át, 162%-át, 1000%-át!

- 103** a) Hány méternek a 20%-a a 10 m; 50 m; 250 m; 1200 m?
b) Az 500 kg hány kilogrammnak a 20%-a; 50%-a; 100%-a; 125%-a?
c) Hány forintnak a 45%-a 900 Ft; 1395 Ft; 6300 Ft; 0 Ft?
d) A 0,36 t hány tonnának a 10%-a; 200%-a; 12%-a; 120%-a?

104

- a) Mennyi cukor van 5 t cukorrépában, ha tömegének 16%-a cukor? Hány tonna cukorrépában van 4,8 t cukor?
- b) A kétnapos Magyar Nagydíjon körülbelül 190 000 olyan néző volt kint, aki csak az egyik napra tudott elmenni. Hányan voltak szombaton, ha ezeknek a nézőknek a 65%-a vasárnap volt kint?
- c) A tűzifának felhasználtuk a 30%-át, 5,7 tonnát. Mennyi tűzifánk volt összesen?
- d) Mennyi annak a dolgozónak a bére, aki 35% levonása után 156 000 Ft-ot kap kézhez?
- e) Egy vállalkozó havonként 750 000 Ft bevételt tervez. Januárban 102%-ra, februárban 97%-ra teljesítette tervét. Mennyi volt a bevétele ebben a két hónapban?
- f) A tervezett utunknak megtettük a 45%-át, még 65,8 km maradt. Hány kilométer út megtételét terveztük?
- g) Egy téglalap egyik oldala 16 cm, a másik ennek 125%-a. Mekkora a téglalap kerülete és területe?

☉ **Dönts el, hogy melyik mennyiség az alap (a; 100%), melyik a százaléktérték (e), és melyik a százalékláb (p)!**

105

Mekkora része, illetve hány százaléka

- a) a 10-nek a 4; a 4-nek a 10; b) a 8-nak az 5; az 5-nek a 8;
 c) a 2-nek az $\frac{5}{4}$; az $\frac{5}{4}$ -nek a 2; d) az 5-nek a 0; a 0-nak az 5;
 e) a 4-nek az $\frac{1}{5}$; az $\frac{1}{5}$ -nek a 4; f) az 1-nek a 2,5; a 2,5-nek az 1?

106

Egy 5200 Ft-os áru árát csökkentették 25%-kal, majd az így kapott árat emelték 30%-kal. Hogyan változott az ára a kétszeres változtatással?

☉ **Jelöld meg a helyes választ!**

- A: Maradt az eredeti ár.
 B: 5%-kal, 5460 Ft-ra nőtt az ára.
 C: 2,5%-kal, 5070 Ft-ra csökkent az ára.
 D: 2,5%-kal, 5330 Ft-ra nőtt az ára.

Hányszoros változást jelent a 25%-os csökkenés, illetve a 30%-os növekedés?



Egy kuponnal 500 Ft-tól 999 Ft-ig 15% kedvezményt, 1000 Ft feletti vásárlásnál 150 Ft kedvezményt kapunk. Mekkora a legnagyobb összeg, amit a kuponnal megtakaríthatunk?



- a) A tigrisek hány százaléka szereti a mézet a kördiagram alapján?
 b) Mi lesz az eredmény, ha (megfelelően átszínezve) megcseréljük a két kördiagramot?

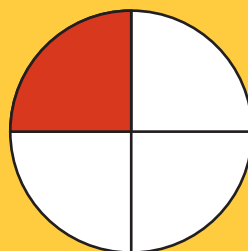


Egy 100 ülőhelyes moziban a nézők hány százaléka ülőhelyének sorszáma tartalmaz 1-es számjegyet?



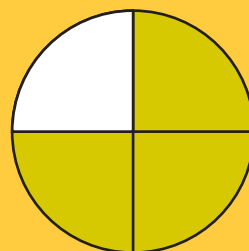
320-nak mennyi az $\frac{1}{8}$ százaléka?

A világ tigrisei:



■ Szereti az édességet

Édesszájú tigrisek:



■ Szereti a mézet

Fejtrő!

© Jelöld meg a helyes választ!

© 1 g 15%-os sóoldatban hány gramm tiszta só van?

Gyakorló
1.179–1.192.;
Feladatgyűjtemény
2.5.01–22.

© Az i) feladatban mennyi tiszta só (100%-os) volt az egyes oldatokban, és mennyi lett a keverékben?

© Mindegyik feladatnál határozd meg az alapot, a százaléklábat és a százaléktételt!

107

Egy 6000 Ft-os áru árát emelték 20%-kal, majd a kiárusításkor csökkentették 25%-kal. Hány forintba került a kiárusításkor? Hány százaléka ez az eredeti árnak?

- A: Maradt az eredeti ár. B: 5%-kal, 5700 Ft-ra csökkent az ára.
C: 2,5%-kal, 6150 Ft-ra nőtt az ára. D: 10%-kal, 5400 Ft-ra csökkent az ára.

108

- a) Hány gramm só van 150 g 15%-os töménységű sóoldatban?
b) 135 g konyhasóból hány gramm 15%-os oldat készíthető?
c) Hány százalékos oldatot kapunk, ha 300 g sót oldunk 1200 g vízben?
d) 300 g cukrot oldunk 100 g 90 °C-os vízben. Hány százalékos az oldat?
e) Mennyi vizet kell önteni 250 g 40%-os oldathoz, ha 10%-osra kívánjuk felhígítani?
f) Milyen tömény oldatot kapunk, ha 500 g 20%-os sóoldatból 100 g vizet elfőzünk?
g) 48 g 35%-os cukoroldatban még 27 g cukrot feloldunk. Hány százalékos lesz így az oldat?
h) Egy cukorgyár naponta 400 t cukorrépát dolgoz fel. 1 t répából, kioldva a cukrot, 1,5 m³ 8%-os cukorlevet kapnak. A víz elfőzése után 90%-os nyerscukor marad vissza. Mennyi vizet főznek el naponta?
i) Hány százalékos sóoldatot kapunk, ha összekeverünk 200 g 25%-os, 100 g 50%-os és 450 g 40%-os sóoldatot?

109

- a) 1200 Ft-ból elköltöttünk 850 Ft-ot. Hány százalékat, illetve mekkora részét költöttük el a pénzünknek?
b) 120 ha földterületből felszántottak 45 ha-t. Mekkora része, illetve hány százaléka maradt szántatlan?
c) A zabnak elfogyott a 65%-a, 2600 kg. Mennyi zab volt eredetileg?
d) Egy medencében a magasságának 80%-áig van víz. A medence magasságának hány százalékáig lesz víz, ha kiengedjük a medencében lévő víz 20% át?
e) $1,25 \cdot 10^6$ Ft-nak hány százaléka a $2,5 \cdot 10^5$ Ft?
f) Egy áru árát először 25%-kal, majd két hónap múlva 20%-kal emelték, és így 4500 Ft-ba kerül. Mennyi volt az áru eredeti ára?



Fejtörő!

Gyűjtőmunka

© Önállóan is gyűjtsetek adatokat!



Egy játékboltban egy nap eladták a dominókészlet 60%-át, és még maradt 40 készlet. Sakk-készletüknek eladták a 25%-át, ami éppen az eladott dominókészletek számával egyezett meg. A másnap reggeli nyitáskor melyik játékból volt több és mennyivel a boltban?



- a) Hasonlítsatok össze különböző gyümölcsitalokat! Melyiknek mennyi a gyümölcstartalma?
b) Hány százalék cukrot tartalmaz az ízlésednek megfelelően édesített tea (kakaó, kompót, lekvár stb.)?

KAMATOS KAMAT

6. példa

Adél szülei 150 000 Ft-ért kötvényt vásároltak, amelyre évenként 12%-os kamatot adnak. Hány forintot ér a kötvény három év múlva?

A kötvény értéke 150 000 Ft. Minden évben az előző év végi érték 12%-ával gyarapszik, vagyis az előző év végi érték 112%-ára (1,12-szorosára) nő:



$$x = 150\,000 \cdot 1,12 \cdot 1,12 \cdot 1,12;$$

$$x = 150\,000 \cdot 1,12^3 \approx 150\,000 \cdot 1,40493 \approx 210\,740$$

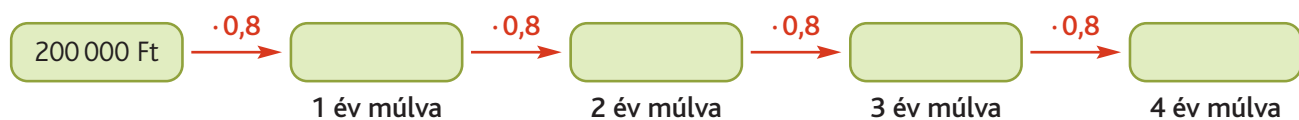
A kötvény értéke három év múlva: 210 740 Ft.

☉ A kamatoskamat-számításban a százalékláb állandó, az alap a következő évben mindig az előző alapnak a százaléktéttel növelt értéke lesz.

7. példa

Egy eszköz értéke az elhasználódás miatt minden év végén az előző év végi érték 20%-ával csökken. Az eszköz értéke december 31-én 200 000 Ft. Mekkora lesz az értéke négy év múlva?

Az eszköz értéke év végén: 200 000 Ft. Évenként 20%-kal, azaz az előző év végi érték 80%-ára (0,80-szorosára) csökken az értéke:



$$x = 200\,000 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8$$

$$x = 200\,000 \cdot 0,8^4 = 200\,000 \cdot 0,4096 \approx 81\,920$$

Az eszköz értéke négy év múlva: 81 920 Ft.

☉ Mindig a megváltozott alap értéke változik 0,8-szeresére.

FELADAT

110

- Andor 500 000 Ft hitelt vett fel, amelyet két év múlva évi 15%-os kamatával együtt kell majd megtérítenie. Mennyit fizet vissza Andor 2 év múlva?
- Egy 50 000 Ft-os áru árát háromszor egymás után 10%-kal csökkentették. Mennyibe kerül most ez az áru?
- Egy 2000 egyedből álló állatpopuláció a természeti környezet kedvezőtlen megváltozása miatt évenként 20%-kal csökken. Hány állat lesz ebben a populációban 1 év, 2 év, 3 év, 4 év múlva?
- A kedvező életkörülmények miatt egy területen a mezei pockok állománya havonta 30%-kal növekszik. Tavasszal ezen a területen mintegy 5000 pocok él. Hány pocok lesz ezen a területen 1 hónap, 2 hónap, 3 hónap múlva?

Gyakorló
1.193–1.196.

☉ A 10%-os csökkenések 3 év alatt 30%-os csökkenést eredményeznek-e?

A folyamatos évi 10%-os csökkenések eredményezhetik-e azt, hogy a végén 0 Ft lesz a termék ára?

STATISZTIKAI SZÁMÍTÁSOK

1. példa

Egy 25 fős osztályban a matematikadolgozatokra a következő pontszámokat kapták a tanulók:

26; 42; 15; 30; 34; 41; 48; 33; 25; 31; 40; 50; 42;

29; 27; 18; 42; 33; 47; 25; 34; 41; 48; 22; 35

a) Határozzuk meg a fenti adatsor néhány statisztikai jellemzőjét.

b) Osztályozzuk a tanulókat a következők szerint:

Osztályzat	Elégtelen	Elégséges	Közepes	Jó	Jeles
Pontszám	0–19	20–27	28–35	36–43	44–50

Határozzuk meg az osztályzatok átlagát.

c) Szemléltessük többféleképpen az érdemjegyek megoszlását.

☞ *Fontos, hogy az adat-rögzítés után az adatokat úgy rendezzük, hogy lehetővé tegyük azok áttekintését.*

A nagyság szerint növekvő adatsorban a középső értéket idegen szóval mediánnak nevezzük.

a) Rendezzük növekvő sorrendbe, más szóval **menyiségi sorba** az elért pontszámokat:

15; 18; 22; 25; 25; 26; 27; 29; 30; 31; 33; 33; 34;

34; 35; 40; 41; 41; 42; 42; 42; 47; 48; 48; 50

Az elért eredmények 15 ponttól 50 pontig „szóródnak”.

A **szóródás terjedelme** a legnagyobb és a legkisebb érték különbsége:

$$T = 50 - 15 = 35$$

A nagyság szerint növekvő adatsorban a **középső érték**: $K = 34$

b) Az elért pontszámok alapján **osztályozhatjuk** a tanulókat.

Az osztályzatok **megoszlása**:

Osztályzat	Elégtelen	Elégséges	Közepes	Jó	Jeles
Tanulók száma	2	5	8	6	4
Megoszlás	8%	20%	32%	24%	16%

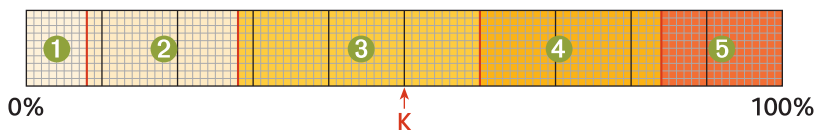
Az osztályozás során a tanulókat jól meghatározott módon kategóriákba soroltuk.

Az osztályzatok számtani átlaga:

$$A = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{25} = \frac{80}{25} = 3,2$$

c) Milliméterpapírra rajzolt **szalagdiagramon** jól szemléltethető az osztályzatok százalékos megoszlása. 1 mm 1%-nak felel meg.

Az is leolvasható, hogy a középső adat: 3-as.



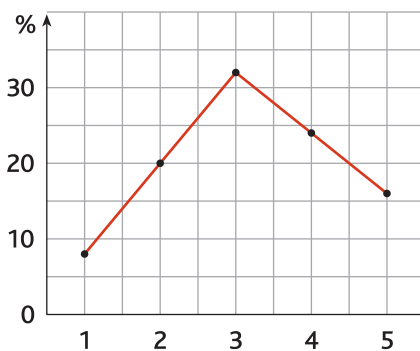


Az osztályzatok megoszlását jól szemlélteti a

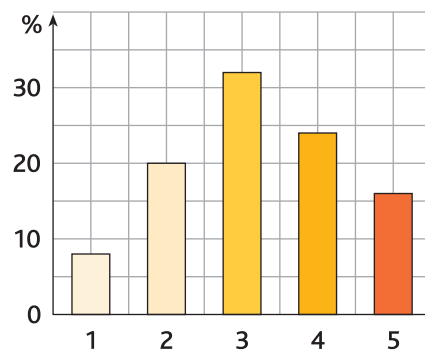
A diagramokról leolvasható, hogy a legtöbbször előforduló érték a 3-as.

A legtöbbször előforduló adatot idegen szóval **módusznak** nevezzük.

töröttvonal-diagram

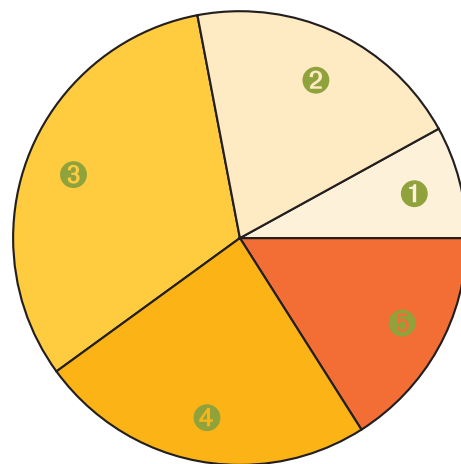


oszlopdiagram



Kördiagram készítése:

100%	360°
1%	3,6°
8%	$8 \cdot 3,6^\circ = 28,8^\circ$
20%	$20 \cdot 3,6^\circ = 72,0^\circ$
32%	$32 \cdot 3,6^\circ = 115,2^\circ$
24%	$24 \cdot 3,6^\circ = 86,4^\circ$
16%	$16 \cdot 3,6^\circ = 57,6^\circ$



FELADATOK

- 111** Határozd meg a következő adatsor középső értékét, számtani átlagát, szóródásának terjedelmét!

5,6; 3,8; 12,0; 7,6; 9,2; 8,4; 4,9; 6,5

☉ **Rendezd az adatokat!**

- 112** Számítsd ki abban az osztályban a matematikadolgozatok számtani átlagát, amelyben a tanulók 5 jeles, 4 jó, 7 közepes, 3 elégséges és 1 elégtelen dolgozatot írtak!



Játsszuk a következő játékot: mindenki felírja a nevét és egy pozitív egész számot egy lapra, majd összeszedjük ezeket. Minden olyan számot kiveszünk, amit többen is írtak, a megmaradtak közül a legnagyobb szám nyer. A nyereménye egy tábla csoki akkora része, amekkora számmal nyert. A maradék csokit pedig egyenlő arányban szétosztjuk a vesztesek között.

- Mekkora az a legnagyobb szám, amelyet még érdemes a lapra felírni? Azaz amivel nagyobb részt nyerhetsz, ha nyersz, mint ha a vesztesek között lennél.
- Adjatok meg olyan 5 számot, amikor mindenki egyforma nagyságú részt nyer, de nem mind az öt szám megegyező!
- Készítsetek statisztikát a nyertes számokról! Melyik szám nyert a legtöbbször, azaz mi a nyerőszámok módusza? Mekkora volt a szóródás terjedelme?

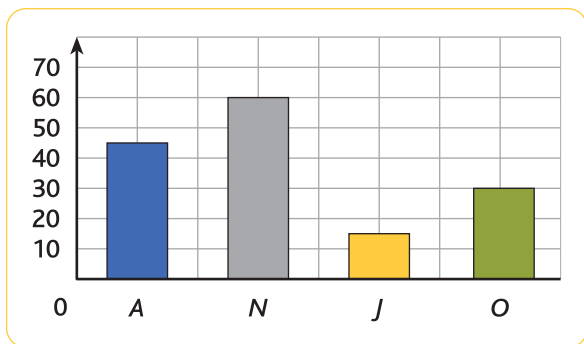
Kísérletezz!

☉ **Próbáljátok ki a játékot! Például 5 fős csoportokban kísérletezzetek!**

Gondold meg, mit jelent ez a kérdés!

113 Az oszlopdiagramról leolvasható, hogy a 7. osztályos tanulók közül hányan tanulnak egy-egy idegen nyelvet. (Minden tanuló egy idegen nyelvet tanul.)

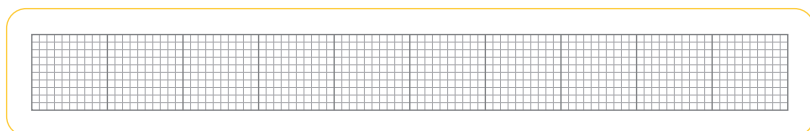
a) Határozd meg, hogy a tanulók hány százaléka tanulja az angol (A), a német (N), a japán (J), illetve az olasz (O) nyelvet!



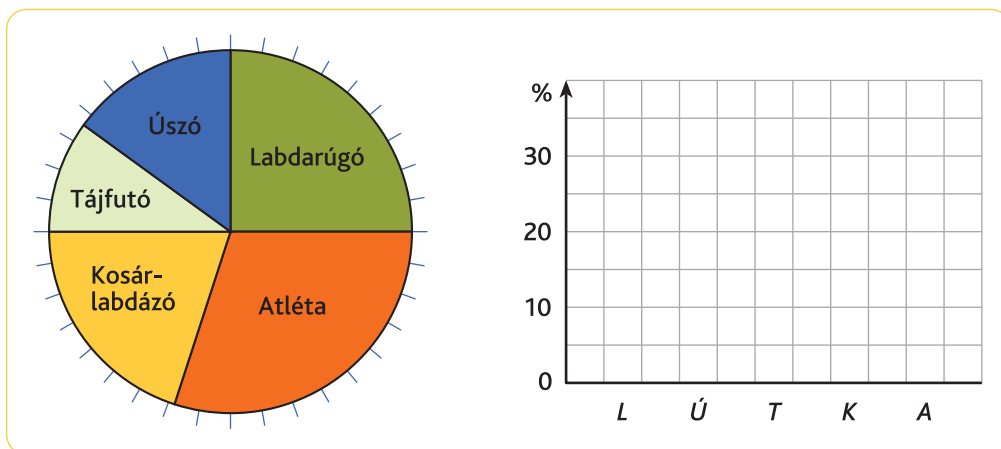
b) Foglald táblázatba a leolvasott értékeket!

Idegen nyelv	Angol	Német	Japán	Olasz
Tanulók száma				
Százalékos megoszlás				

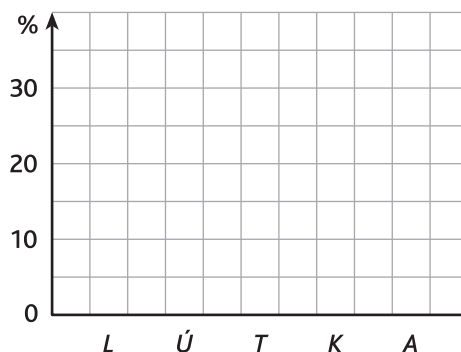
c) Készíts szalagdiagramot a fenti adatsor szemléltetésére!



114 600 tanuló vett részt egy sporttáborban. A résztvevőknek az egyes sportágak szerinti megoszlását a kördiagram szemlélteti:



Szemléltesd oszlopdiagrammal is ezt a megoszlást!



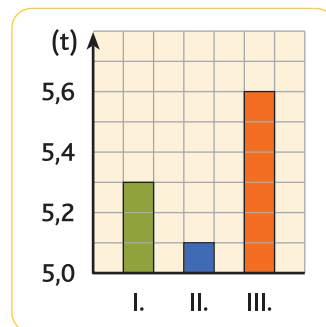
115 Készíts kördiagramot, illetve oszlopdiagramot az adatok eloszlásáról!

- a) Anna a 3600 Ft zsebpénze 0,25 részéért könyvet, 15%-ért képeslapot vásárol, a többit mozijegyre költi. Hány forintot, zsebpénze hány százalékát költi mozijegyre?
- b) Egy iskola tanulóinak 8%-a jelest, 24%-a jót, 23%-a elégségest és 5%-a elégtelent kapott matematikából a félévi osztályozás során. Hányan jártak ebbe az iskolába, ha 240-en közepes matematikajegyet kaptak?

Gyakorló
8.01–8.20.

- 116** Az oszlopdiagram három gazdaság hektáronkénti átlagos búzatermését mutatja egy adott évben. Miért lehet félrevezető ez a diagram?

- A:** Nem olvasható le róla az átlagtermések nagysága.
B: Százalékban kellett volna megadni az adatokat.
C: Félrevezető a háromféle szín, hiszen csak búzáról van szó.
D: Félrevezetően szemlélteti a termések egymáshoz viszonyított arányát.



- 117** A kördiagram egy iskola szakköröseinek eloszlását szemlélteti (mind-egyik tanuló csak egy szakkörre jár).

A diagramot elemezve Benő a következő megállapításokat tette:

- 1** A szakkörösök 90%-a matematika szakkörre jár.

- 2** 10-en tagjai az országyáró szakkörnek.

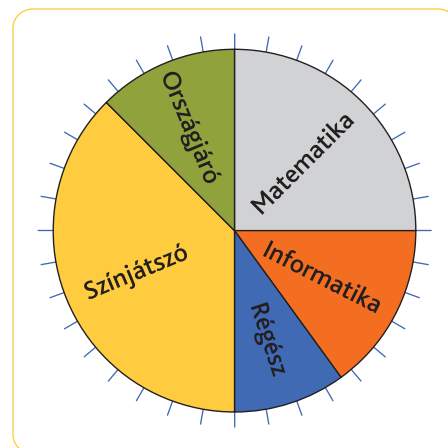
- a) Benő melyik megállapítása igaz, ha 80 tanuló tagja valamelyik szakkörnek?

- A:** Csak az **1** állítás igaz. **B:** Csak a **2** állítás igaz.
C: Mindkét állítás igaz. **D:** Mindkét állítás hamis.

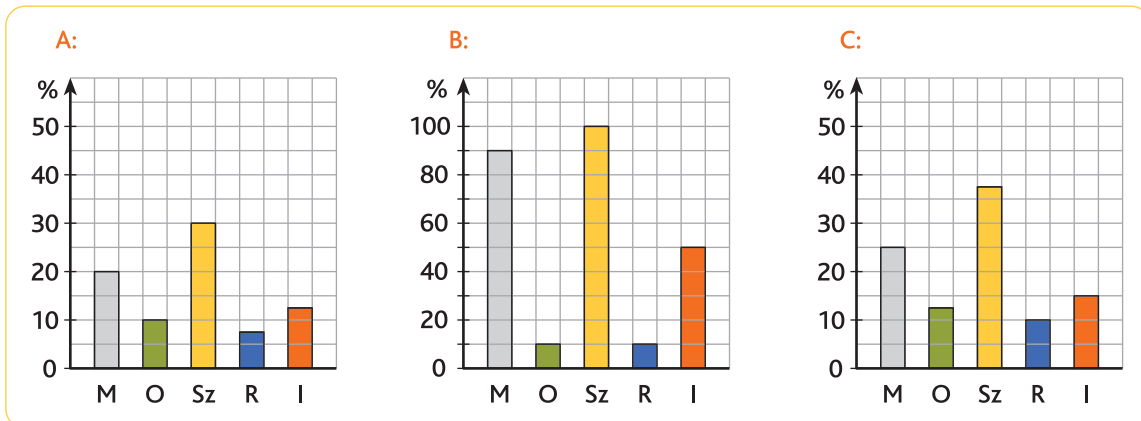
- b) Hány tanuló jár színjátszó szakkörre?

- A:** 30; **B:** 35; **C:** 40; **D:** 135

- c) Melyik oszlopdiagram szemlélteti ugyanazoknak az adatoknak az eloszlását, mint amelyeket a kördiagram ábrázol?



☉ **Karikázd be a helyes diagram betűjelét!**



118

Gyűjtsetek folyóiratokból, napilapokból különböző diagramokat! Magyarázzátok meg, hogy mit szemléltetnek az egyes diagramok. Találtok-e olyan diagramokat, amelyek félrevezetően vagy esetleg hibásan mutatják meg az adatok közti összefüggéseket?

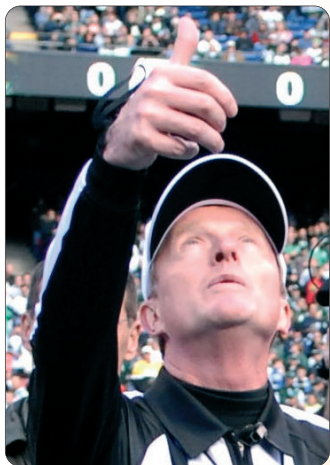
Gyűjtőmunka



Hány szál fű lehet egy 65 m-szer 110 m-es focipályán? Készíts tervet! Milyen statisztikát lenne érdemes végezni, majd milyen számításokkal lehet megadni a közelítő választ?

☉ **Mekkora területen lenne könnyű megszámolni a fűszálakat?**

© Csoportmunkában dolgozzatok.



1. példa

Becsüljük meg, hogy egy ötforintost sokszor feldobva az esetek mekkora részében lesz az írás, illetve a kép felül. Végezzük el a kísérletet, majd hasonlítsuk össze a becsült értéket a kapott eredménnyel.

Becslés:

A pénzfeldobásnak kétféle **konkrét kimenetele** lehet:

I: Írás van felül; **K:** Kép van felül

Szabályos pénzérmével dobva a két **esemény** ugyanakkora eséllyel következhet be, vagyis a két eseménynek **ugyanakkora a valószínűsége**. Ha sokszor elvégezzük a kísérletet, akkor várható, hogy mindkét esemény megközelítően az összes dobás 0,50 részében fordul elő.

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy mindkét esemény valószínűsége 0,50.

Kísérlet:

Célszerű **a kísérletet** úgy elvégezni, hogy egyszerre 10 ötforintost teszünk egy átlátszó fedéllel fedett dobozba, és dobás helyett jól megrázzuk a dobozt. Így például 20 rázással már 200 dobás eredményét vizsgálhatjuk. A kísérletek eredményét például ilyen táblázatban rögzíthetjük:

[illegible]

Ha az értékeket soronként összegezzük, akkor megkapjuk, hogy a 200 dobásból hányszor következett be a **K**, illetve az **I** esemény, vagyis hogy mennyi volt ezen események **gyakorisága**.

Ha a gyakoriságok értékét osztjuk az összes dobás számával, akkor megkapjuk, hogy a kísérletek mekkora részében következett be az esemény. Az így kapott értéket az esemény **relatív gyakoriságának** nevezzük.

Egy-egy rázással 10-10 dobás relatív gyakoriságának a változásait hasonlíthatjuk össze. Azt tapasztaljuk, hogy ezek nagyon különböző értékek lehetnek. Ha a 200 dobásra összesített értékeket vizsgáljuk, akkor nagy a valószínűsége annak, hogy ezek a relatív gyakorisáértékek közel lesznek a 0,50-hoz.

A NAGY SZÁMOK TÖRVÉNYE

A **nagy számok törvénye** azt fejezi ki, hogy **nagy számú kísérlet esetén nagy a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriság jól megközelíti a valószínűséget.**

2. példa

Két szabályos dobókockával dobva mekkora a valószínűsége a következő eseménynek? **A:** A két dobott szám szorzata páratlan.

A kísérlet konkrét kimeneteleit táblázatban rögzíthetjük. A táblázatban leírtuk a dobható számok szorzatát.

Megfigyelhetjük, hogy a kísérletnek összesen 36 konkrét kimenetele lehetséges.

Mindegyik ugyanolyan eséllyel következhet be. Az **A** esemény szempontjából kedvező kimenetek száma 9.

Így ha sokszor végezzük el a kísérletet, várható, hogy az esetek mintegy $\frac{9}{36}$ részében lesz a két dobott szám szorzata páratlan.

$$\text{Az A valószínűsége} = \frac{\text{Kedvező kimenetek száma}}{\text{Összes kimenetel száma}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

A 2. kockán lévő szám

	1	2	3	4	5	6
Az 1. kockán lévő szám	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Egy szerencsejátékos, de Méré lo-
vag Pascal (1623–1662) francia
matematikushoz fordult azzal a
kérdéssel, hogy hogyan számít-
ható ki a kockajáték különböző
eseményeinek esélye. Pascal Fer-
mat (1601–1665) segítségét
kérte, és kettőjük 1654-es levél-
váltását tekintjük a valószínűség-
számítás megszületésének. Nem
sokkal később a Bernoulli család
három tagja már azt is vizsgálta,
hogy a kidolgozott módszereket
hogyan lehet a mindennapi gya-
korlatban alkalmazni. Keress pél-
dákat arra, hogy ma a valószínű-
ség-számítást a mindennapi élet
mely területein alkalmazzák!

FELADATOK

119 Egy farsangi bálon tombolán kisorsolnak egy videojátékot. Az ötödik osztályosok összesen 55 sorsjegyet vettek, a hatodikosok 65-öt, a hetedikesek 80-at, a nyolcadikosok 50-et. Mindenki sorsjegyét beleteszik egy urnába, jól összekeverik, majd kihúzzák a nyertes sorsjegyet.

Mekkora a valószínűsége a következő eseményeknek?

- A:** A kihúzott sorsjegy egy hetedikes tanulóé.
- B:** A kihúzott sorsjegy nem hetedikes tanulóé.
- C:** A kihúzott sorsjegy egy nyolcadikos tanulóé.
- D:** A kihúzott sorsjegy egy hetedikes vagy egy hatodikos tanulóé.

120 Egy 7. osztályba 25 tanuló, 14 fiú és 11 lány jár. 10 tanuló, köztük 3 lány vesz részt az informatika szakkör foglalkozásain. Minden tanuló nevét felírjuk egy cédulára, és a cédulákat beletesszük egy dobozba.

a) Kihúzunk egy cédulát. Mekkora a valószínűsége a következő eseményeknek?

- A:** A kihúzott cédulán egy fiú neve áll.
- B:** A kihúzott cédulán nem informatika szakkörös tanuló neve áll.
- C:** A kihúzott cédulán informatika szakkörös fiú neve áll.
- D:** A kihúzott cédulán informatika szakkörös tanuló vagy fiú neve áll.

b) Visszatevés nélkül taláломra kihúzunk (egymás után) két cédulát. Mekkora a valószínűsége a következő eseményeknek?

- I:** Mindkét cédulán informatika szakkörös tanuló neve áll.
- J:** Az első cédulán lány, a másodikon informatika szakkörös fiú neve áll.

© Készíts halmazábrát az adatok feltüntetésével!



A 2. példában leírt kísérletben figyeljétek meg különböző események relatív gyakoriságát, majd határozzátok meg az események valószínűségét!

Kísérletezz!

3. példa

Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy rajzszöget feldobva a földet érés után a **H**, illetve az **F** esemény következik be?

H: A hegye van felül. ↓

F: A feje van felül. ↗

© Csoportmunkában dolgozva, és a csoportok eredményeit összegezve, akár több ezer dobás eredményeire támaszkodhatunk.

Becslés kísérlettel:

Logikailag nem dönthető el, hogy a két eseménynek ugyanakkora-e a valószínűsége, vagy ha nem, akkor melyik esemény valószínűsége nagyobb.

Ha elég sokszor elvégezzük a kísérletet, akkor a nagy számok törvénye alapján nagy a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriság jó becslést ad az események valószínűségére.

Tegyünk 10 rajzszöget az átlátszó fedéllel fedett dobozba, és végezzük el 20-szor a kísérletet. Így 200 dobás eredménye alapján számíthatjuk ki a relatív gyakoriságokat.

H: ↓																			
F: ↗																			

$$A \text{ H relatív gyakorisága} = \frac{A \text{ H előfordulásának száma}}{A \text{ számba vett dobások száma}}$$

$$Az \text{ F relatív gyakorisága} = \frac{Az \text{ F előfordulásának száma}}{A \text{ számba vett dobások száma}}$$

A rajzszög feldobásának nem lehet más kimenetele. A **H**, illetve az **F** események **kizárják egymást**, egyszerre nem következhetnek be.

$$\text{Ezért } \text{H relatív gyakorisága} + \text{F relatív gyakorisága} = 1$$

4. példa

Mekkora a valószínűsége annak, hogy két rajzszöggel dobva a földet érés után:

A: Mindkét rajzszögnek a hegye van felül.

B: Mindkét rajzszögnek a feje van felül.

C: Az egyik rajzszögnek a hegye, a másiknak a feje van felül.

A valószínűség értékét kísérlet segítségével becsülhetjük meg.

Egy elvégzett kísérletben 1000 dobást megfigyelve a **H** esemény (a hegyes vége van felül) 568-szor következett be.

$$A \text{ H relatív gyakorisága} = \frac{568}{1000} = 0,568 \text{ volt.}$$

A **H** valószínűségének a becsült értéke $\approx 0,57$.

Ez nem azt jelenti, hogy biztosan ennyi a **H** esemény valószínűsége, de nagyon valószínű, hogy ettől az értéktől csak kis mértékben tér el.

Könnyebben kísérhetjük nyomon az eseményeket, ha a két rajzszögre filctollal ráírjuk az 1. és 2. sorszámot.

Az **A** esemény valószínűségének becslése:

Az 1. rajzszög hegye lesz felül az esetek mintegy 0,57 részében.

Mivel a rajzszögek egymástól függetlenül esnek le, a 2. rajzszög hegye lesz felül azoknak az eseteknek a 0,57 részében, amikor az 1. rajzszögnek is a hegye van felül. Így az esetek $0,57 \cdot 0,57 \approx 0,32$ részében várható, hogy mindkét rajzszögnek a hegye lesz felül.

Az **A** esemény valószínűsége $\approx 0,32$.

A **B** esemény valószínűségét hasonló gondolatmenettel kapjuk:

A **B** valószínűsége $\approx 0,43 \cdot 0,43 \approx 0,18$.

A **C** esemény kétféleképpen következhet be: $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ 1. & 2. \end{matrix}$ vagy $\begin{matrix} \uparrow & \downarrow \\ 1. & 2. \end{matrix}$

A $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ 1. & 2. \end{matrix}$ kimenetel valószínűsége $\approx 0,57 \cdot 0,43$.

A $\begin{matrix} \uparrow & \downarrow \\ 1. & 2. \end{matrix}$ kimenetel valószínűsége $\approx 0,43 \cdot 0,57$.

A **C** esemény valószínűsége $\approx 2 \cdot 0,43 \cdot 0,57$.

$$\text{A valószínűsége} + \text{B valószínűsége} + \text{C valószínűsége} = 1$$



FELADATOK

121

Vágjatok le parafa dugóból körülbelül 0,5 cm, 1 cm és 1,5 cm magas kis hengereket! 50-50 dobással végezzetek kísérleteket! Az egyes kísérletekben határozzátok meg, mennyi annak a relatív gyakorisága, hogy az egyes kis hengerek a körlapjukra esnek! A kapott relatív gyakoriságok segítségével becsüljétek meg ezeknek az eseményeknek a valószínűségét!

Kísérletezz!

© *Csoportban dolgozzatok! Az egyes csoportok más-más hengerrel végezzék el a kísérletet.*

122 Két kockával dobva mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege törzsszám lesz?

A: $\frac{5}{36}$ mert a dobott két szám összege lehet 2, 3, 5, 7 és 11 is.

B: $\frac{15}{36}$ mert a 2, 3, 5, 7 és 11 összeg több különböző dobásban is bekövetkezhet.

C: 0, mert két szám összege mindig összetett szám.

*Gyakorló
8.21–8.30.;
Feladatgyűjtemény
5.2.01–13.*

© *Jelöld meg a helyes választ!*



Két normál kockával dobva a dobott számok összege 2 és 12 között változik, különböző valószínűséggel. Tegyük fel, hogy van két üres kockánk. Az egyik lapjaira az 1, 2, 2, 3, 3, 4 számokat írtuk. Hogyan számozzuk meg a másik kocka lapjait ahhoz, hogy ezzel a két kockával dobva is ugyanolyan valószínűséggel jöjhessenek ki 2-től 12-ig az összegek?

Fejítő!

➤ GYAKORLÓ- ÉS FEJTÖRŐ FELADATOK

☉ Jelöld meg a helyes választ!

ISKOLATOTÓ	
Medve – Kenguru	
Napfény – Tornádó	
Irokéz – Orion	
Bolond – Mókus	
Cápa – Donald	

B3 Milyen pontossággal célszerű megadni a következő mennyiségeket?

- a) Egy távolugróversenyen elért eredményt:
A: 1 cm; **B:** 1 mm; **C:** 1 dm pontossággal.
- b) Egy megyeszékhely lakosságának a számát:
A: tíz fő; **B:** száz fő; **C:** ezer fő pontossággal.
- c) Két falu távolságát:
A: 1 dm; **B:** 1 m; **C:** 1 km pontossággal.

B4

- a) Az iskola kézilabda-bajnokságán tíz csapat indul. Amelyik csapat nyer, az 3 pontot kap, amelyik veszít, az 0-t. Döntetlen esetén büntetőket dobnak. Amelyik csapat több gólt ér el a büntetőkből, az 2 pontot kap, amelyik kevesebbet, az 1-et. Az iskola totószelvényt bocsát ki, amelyen az első forduló öt mérkőzésére lehet fogadni. Azt kell beírni, hogy az első helyre írt csapat hány pontot ér el a mérkőzésen (0, 1, 2 vagy 3). Hányféleképpen tölthető ki ez a szelvény?
- b) Hányféleképpen tölthető ki a $13 + 1$ -es totószelvény? (Minden mérkőzéshez 1, vagy 2 vagy X írható.)
- c) Anti, Béni és Csaba egymástól függetlenül elhatározza, hogy szombat délután elmegy valahová kikapcsolódni. A kisvárosban, ahol laknak, ötféle szórakozási lehetőség van (uszoda, sporttelep, táncház, mozi és klub). A következő három esemény közül melyik a legvalószínűbb, melyik a legkevésbé valószínű?
- E:** A három fiú más-más helyre megy. **F:** Legalább két fiú ugyanarra a helyre megy. **G:** Mindhárman ugyanarra a helyre mennek.



☉ Vajon ez a matematikai modell helyesen tükrözi a valóságot?

B5

- a) Egy kopár sziklafalon megtapadt egy parányi zuzmó, és évenként megkétszerezve az általa beborított területet, 100 év alatt elfedte a teljes sziklafalat. Hány év alatt fedte el a sziklafal felét?
- b) Egy szigetre odakerül 10 egér. Megfelelő körülmények között az egerek száma 3 hónap alatt megkétszereződik. Két év múlva hány egér élne a szigeten, ha semmi sem gátolná a szaporodásukat? Mekkora szigeten férnének el az így elszaporodott egerek, ha egy egérre minimálisan 1 dm^2 mozgásteret számítnunk?
- c) Egy emberöltő (egy-egy nemzedék kifejlődéséhez szükséges idő) körülbelül 30 év. A magyar állam – Szent István király uralkodása alatt – mintegy 33 emberöltővel ezelőtt alakult ki. Egy embernek 2 szülője, $2 \cdot 2$ nagyszülője, $2 \cdot 2 \cdot 2$ dédszüloje stb. van. Ezt a gondolatmenetet követve becsüld meg, hogy hány ősöd élt a magyar állam kialakulásakor!

Fejtörő!



Írd be 0-tól 9-ig az egész számokat úgy, hogy igaz legyen!

$$\frac{3^1}{3^{\square}} = (3^{\square})^{\square} = (3^{\square} \cdot 3)^2 = \square^6 = 9^{\square} : 9^{\square} = 243 \cdot 3^7 = 81^{\square} + 3^1 - 1$$

B6

- a) Egy sorozat első eleme 2. Minden további elemet úgy kapunk, hogy a megelőző elemet szorozzuk 8-cal.

Írd föl a sorozat első öt elemét 2 hatványaként!

- b) Egy sorozat első eleme 0,25. Minden további elemet úgy kapunk, hogy az előző elemet osztjuk 2-vel. Írd föl a sorozat első öt elemét 0,5 hatványaként!

- c) Vékony Viktor szilveszterkor elhatározta, hogy az új évben rendszeresen edzeni fog. Januárban naponta 3 fekvőtámaszt csinál, februárban 9-et, és így tovább, minden hónapban megháromszorozza az előző havi adagot. Decemberben hány fekvőtámaszt csinálna naponta, ha sikerülne a terve?

Mennyi időt venne ez igénybe naponta, ha egy fekvőtámaszt 3 másodperc alatt hajtana végre?

☉ *Hogyan írható fel 2 hatványaként a 8?*

☉ *Hogyan írható fel 0,5 hatványaként a 0,25?*

**B7**

- a) Szorzás és hatványozás segítségével írd fel minél többféle alakban: 8^6
- b) Egy sorozat első eleme 10. Minden más eleme az azt megelőző elem négyzete. Írd föl és nevezd meg (tíz, száz, ...) a sorozat első hat elemét!
- c) Hány szám írható föl négy darab kettes számjeggyel a hatványozás segítségével? Melyik a legkisebb és melyik a legnagyobb az így felírható számok közül?

☉ *Alkalmazd a hatványozás azonosságait!*

B8

Hajtsd végre a műveleteket!

- a) $(-10)^3 \cdot 0,1^2 + 10^2 \cdot 0,1^3$; b) $0,5^4 \cdot 4^2 - (-1) \cdot (-2)^3$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$;
- d) $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{10}$; e) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$; f) $-\frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 : \frac{3}{10}$

☉ *Ügyeltél a műveletek helyes sorrendjére?*

B9

Határozd meg többféleképpen a kifejezések értékét!

- a) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3$; b) $\frac{25}{16} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^3$; d) $\frac{10}{12} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^4$; e) $\frac{8}{7} \cdot \left(\frac{14}{16}\right)^3$

☉ *Egyes számok szorzatra bontása után már alkalmazhatod az azonosságokat.*

B10

Határozd meg az eredményeket!

- a) $\left(1,5 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$; b) $\left(0,4 - \frac{5}{4}\right) : (-5)$; c) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} - \frac{3}{7} : \frac{8}{5}$;
- d) $\left(3,8 - \frac{36}{45}\right) : 1,2$; e) $\left(\frac{7}{3} - \left(-\frac{5}{4}\right)\right) : \left(-\frac{3}{8}\right)$; f) $\frac{16}{45} : \left(8 - \frac{16}{45}\right) \cdot 2,5$;
- g) $\frac{36}{14} \cdot \frac{7}{12} + \frac{16}{18} \cdot \frac{27}{24}$; h) $\frac{36}{14} \cdot \left(\frac{7}{12} + \frac{16}{18}\right) \cdot \frac{27}{24}$; i) $\frac{36}{14} \cdot \left(\frac{7}{12} + \frac{16}{18} \cdot \frac{27}{24}\right)$

☉ *A zárójel módosítja-e a műveletvégzés sorrendjét? Meggondoltad, hogy a tizedestört alak és a törtalak közül melyikkel célszerű számolnod?*

B11

Határozd meg az eredményeket!

- a) $575 + (-40) \cdot 25$; $575 - 40 \cdot 25$; $[575 + (-40)] \cdot 25$
- b) $1250 - (-100) : 5^2$; $[1250 - (-100)] : 5^2$; $[1250 - (-100) : 5]^2$
- c) $5,6 - 1,6 \cdot 10^2$; $(5,6 - 1,6) \cdot 10^2$; $(5,6 - 1,6 \cdot 10)^2$
- d) $15 - 4 \cdot (-1,5)^2$; $[15 - 4 \cdot (-1,5)]^2$; $15 - [4 \cdot (-1,5)]^2$

☉ *Mit tanultunk a műveletvégzés sorrendjéről?*

☉ Például az a)-ban:

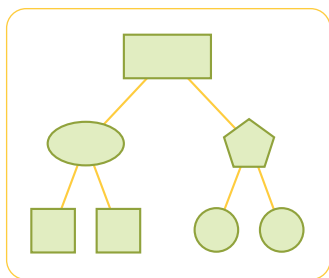
1. elem: $1 \cdot 10 = 10$

5. elem: $5 \cdot 10 = 50$

100. elem: $100 \cdot 10 = ?$

n. elem: $n \cdot 10 = 10n$

☉ A különbséget úgy képezzük, hogy a sorozat tagjaiból mindig az előttük álló tagot vonjuk ki.



☉ Lásd a 15. oldalon az előtagok táblázatát.

☉ A megfelelő oszthatósági szabályokat a 22., illetve a 25. oldalon találod meg. Mely számok oszthatók 12-vel?

☉ Számít-e a betűk sorrendje?

☉ Mely számok oszthatók 9-cel?

B12 Minden feladatban írd föl a sorozat első 10 elemét és a 100. elemét! Írd fel a sorozat n -edik (általános) elemét is!

Add meg a sorozatok **különbségsorozatát**, vagyis a szomszédos tagok különbségéből álló sorozatot!

A sorozat növekvő sorrendben tartalmazza

- a) a 10-zel osztható pozitív egész számokat;
- b) a 2-vel osztható pozitív egész számokat;
- c) a 2-vel nem osztható pozitív egész számokat;
- d) az 5-tel osztható pozitív egész számokat;
- e) az 5-tel osztható számoknál 3-mal nagyobb pozitív egész számokat;
- f) a 4-gyel osztható pozitív egész számokat;
- g) a 4-gyel nem osztható, de 2-vel osztható pozitív egész számokat;
- h) a 20-szal osztható pozitív egész számokat;
- i) a 25-tel osztható, de 50-nel nem osztható pozitív egész számokat.

B13 Sorold fel az 1000 összes osztópárját!

B14 Egy 50-nél nem nagyobb szám törzstényezős felbontásakor ilyen **fadiagramot** kaptunk. Mely számokat írhattuk az egyes keretekbe?

Az azonos keretek azonos, a különbözők különböző számokat jelentenek.

B15 A kék fény hullámhossza 500 nm. A Föld 150 Gm távolságra van a Naptól. Hányszorosa a Nap–Föld távolság a kék fény hullámhosszának?

B16 Írd fel a 0; 1; 2; 3; 4 számjegyekből képezhető háromjegyű számok közül a 3-mal oszthatókat; 4-gyel oszthatókat; 12-vel oszthatókat! Minden számjegy csak egyszer fordulhat elő a számokban.

B17 a) Hány hárombetűs „szó” írható fel az A, O, K, L, M betűkből, ha egy-egy betű csak egyszer fordulhat elő ezekben a „szavakban”?
b) Hány hárombetűs „szó” írható fel az A, O, K, L, M betűkből, ha egy-egy betű többször is előfordulhat ezekben a „szavakban”?

B18 Gondolj egy tetszőleges természetes számra! Vond ki belőle számjegyeinek összegét! Igaz-e, hogy a különbség mindig osztható 9-cel? Miért?

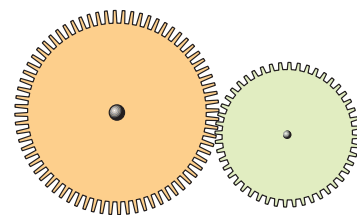
B19 Egy háromjegyű szám legnagyobb helyiértékű számjegye 5. Ha ezt a szám elejéről töröljük és a szám végére írjuk, akkor 162-vel kisebb számot kapunk. Melyik ez a szám?

B20

Egy 72 fogat tartalmazó fogaskerék percenként 180 fordulatot tesz. Meghajt egy 48 fogat tartalmazó fogaskereket.

Mekkora a meghajtott kerék percenkénti fordulatszáma?

Hány fogat tartalmazó fogaskerékkal kell kicserélni a meghajtott kereket, ha azt akarjuk, hogy a fordulatszáma 540 legyen percenként?



B21

- Egy 20 000 Ft névértékű kötvény értéke minden évben 10%-kal nő. Mekkora lesz az értéke a negyedik év végén?
- Egy 50 000 Ft-os nyomtató értéke minden évben az előző évi érték 20%-ával csökken. Hány forintot fog érni három év múlva?
- Mikor járunk jobban? Ha változatlan árak mellett 10%-kal nő a jövedelmünk, vagy ha változatlan jövedelem mellett 10%-kal csökkennek az árak?
- Egy áru ára az első héten 30%-kal nőtt, a következő héten 30%-kal csökkent, a harmadik héten az előző heti ár 30%-ával nőtt, majd az így kialakult ár 30%-ával csökkent. Hogyan változott így az áru ára?

☉ *A százalékláb állandó, de az alap változik. Az új alap mindig az előző évben kapott érték.*

B22

Három pénzermét, egy tízforintost, egy ötforintost és egy húszforintost feldobva mekkora a valószínűsége a következő eseményeknek?

- Mindhárom pénzermén kép van felül.
- A tízforintoson kép van felül, az ötforintoson és a húszforintoson írás.
- Egy pénzermén kép van felül, a többin írás.
- Legalább egy pénzermén írás van felül.

Miben különbözik a **B** és a **C** esemény?

Mi a kapcsolat az **A** és a **D** esemény között?

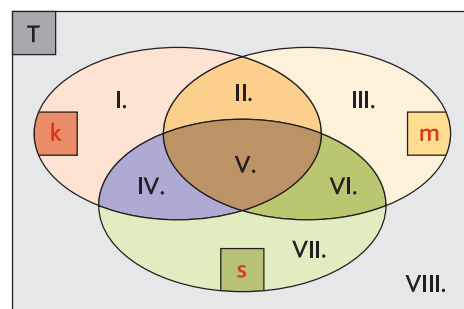
☉ *Tekintsd át a kísérlet lehetséges kimeneteleit!*

B23

200 táborozó tanuló közül már 80-an voltak **m**úzeumban, 100-an **s**trandon és 60-an **k**irándulásra. 40 tanuló kirándulásra és múzeumban is volt. 30-an voltak olyanok, akik a strandolás után elmentek a kirándulásra is, és 50 tanuló a múzeumlátogatás után a strandra ment. 20 tanuló mindhárom foglalkozáson részt vett.

Írd be a halmazábra római számokkal jelzett részeibe, hogy hány tanuló tartozik oda!

- A tanulók hányadrésze nem vett részt egy foglalkozáson sem?
- A tanulók hány százaléka vett részt legalább két foglalkozáson?



Az ábrán látható táblázat minden mezőjébe egy-egy euró vagy euró cent érmét tettünk a következők közül:

1 cent, 2 cent, 5 cent, 10 cent, 20 cent, 50 cent, 1 euró, 2 euró.



Ezután összeadtuk néhány sorban, illetve az oszlopban az érmék összegét. Majd elköltöttünk a táblázatból 5,94 eurót.

Melyik mezőben milyen érme lehetett?

				1,03 €
	10 cent		20 cent	4,30 €
				0,20 €
		1 cent		
2,26 €		2,07 €	1,26 €	

TUDÁSPRÓBA

123

- 1 Írd le számjegyekkel!
- a) nyolc egész tizenhét tízezer; b) ötezer-hatszázötmillió-kétszázhat.

- 2 Írd fel hatványalakban, és számítsd ki a hatvány értékét!
- a) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$; b) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

- 3 Melyik egyenlőség igaz, melyik hamis?

A: $7,3 \cdot 10^5 \text{ kg} = 7\,300\,000 \text{ kg}$; B: $7,3 \cdot 10^5 \text{ kg} = 7,3 \cdot 10^7 \text{ dkg}$; ☐

C: $7,3 \cdot 10^5 \text{ kg} = 7,3 \cdot 10^2 \text{ t} = 730 \text{ t}$ ☐

- 4 Hajtsd végre a műveleteket!

a) $7,5 - (-3) \cdot (-2)^2$; A: -4,5; B: 19,5; C: 43,5; D: 182,25

b) $[7,5 - 3 \cdot (-2)]^2$; A: -4,5; B: 19,5; C: 43,5; D: 182,25

- 5 Bontsd föl a 72-t és az 54-et prímszámok szorzatára! Írd föl a legnagyobb közös osztójukat és a legkisebb közös többszörösüket!

- 6 Hajtsd végre a műveleteket!

a) $\frac{25}{54} - \frac{25}{72}$; b) $\frac{7}{5} : \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right)$; c) $\frac{25}{75} - \frac{25}{72} : \frac{75}{54}$; d) $\left(\frac{25}{15}\right)^3$

- 7 Hány kilogramm 2 t búza 10%-a; 50%-a; 100%-a; 45%-a?

10%-a kg

50%-a kg

100%-a kg

45%-a kg

- 8 Egy kiskertnek felástuk a 42%-át, 630 m²-t. Hány négyzetmétert kell még felásnunk?

- 9 Véletlenül összekeveredett 3 kg keserűmandula, 2 kg papírhéjú és 5 kg kemény héjú ehető mandula, amelyek külsőre nem különböztethetők meg. Ha kiválasztunk egy mandulát, akkor mi a valószínűsége annak, hogy papírhéjú mandulát veszünk ki?

A: $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; B: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; C: $\frac{10}{2} = 5$; D: $\frac{8}{2} = 4$

- 10 Hazánkban a diagramon ábrázolt állóvizei közül a Velencei-tó a legkisebb, a Balaton a legnagyobb területű. Bár a Fertő területe nagyobb, mint a Tisza-tóé, mégis ez utóbbira mondjuk, hogy hazánk második legnagyobb állóvize. Ugyanis a Fertő tó területének nagy része az ország határain kívülre esik.

- a) Írd a diagram oszlopai alá a tavak nevének kezdőbetűjét!

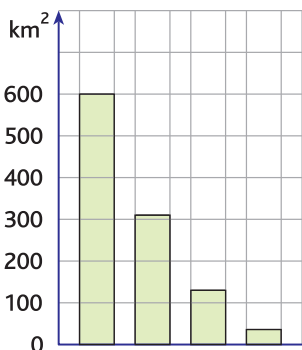
- b) Hozzávetőlegesen mekkora a Tisza-tó területe?

A: 600 km²; B: 310 km²; C: 130 km²

• A válasznak megfelelően írd a kis négyzetbe I, illetve H betűt!

• Karikázd be a helyes eredmény betűjelét!

• Írd be a keretekbe az eredményeket!



2.

HOZZÁRENDELÉS, FÜGGVÉNY

Ez a kép úgy készült egy kosárlabda pattogásáról, hogy egy sötét teremben másodpercenként 20-szor felvillanó vaku fénye mellett fotózták le. Mi minden olvasható le erről a képről?



HOZZÁRENDELÉSEK VIZSGÁLATA

1. példa

Albert (a), Béla (b), Csaba (c) és Dénes (d) elmentek Katival (k), Lillával (l) és Mártival (m) egy szórakozóhelyre. Hányféle táncospár alakulhatott volna ki közülük?

Melyek voltak a tényleges táncospárok, ha Albert nem táncolt Mártival, Béla csak Lillával táncolt, Csaba mindhárom lányt felkérte, viszont Dénes egyáltalán nem táncolt? Vizsgáljuk a hozzárendelés tulajdonságait.



Soroljuk fel a lehetséges táncospárokat. **Piros** betűvel írtuk azokat a párokat, akik valóban táncoltak.

(a; k), (a; l), (a; m), (b; k), (b; l), (b; m),
(c; k), (c; l), (c; m), (d; k), (d; l), (d; m)

Ábrázoljuk **nyíldiagrammal** a lehetséges táncospárokat. Mivel bármelyik fiú (mind a négy fiú) táncolhatott volna mind a három lánnyal, $(4 \cdot 3 =) 12$ táncospár alakulhatott volna ki.

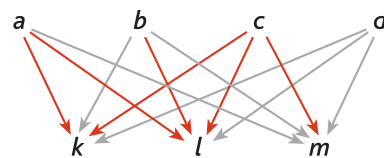
Pirosra színeztük a következő, kapcsolatot jelentő nyilakat:

Ez a fiú **táncolt** ezzel a lánnyal.

Szemléltethetjük a kapcsolatot a következő módokon is:

$A = \{\text{Fiúk}\}$

$B = \{\text{Lányok}\}$



A hozzárendelés tulajdonságai:

Az A halmaz egy-egy eleméhez **több elem is tartozhat** a B halmazból, ezért ezt a hozzárendelést **többértelműnek** nevezzük.

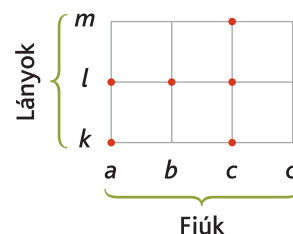
Az A halmaz nem minden eleméhez tartozik elem a B halmazból.

A B halmaz egy-egy eleme több A halmazbeli elemhez tartozhat.

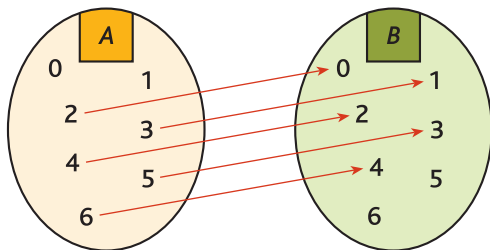
A B halmaznak nincs olyan eleme, amelyik nem tartozik egyetlen A halmazbeli elemhez sem.

		Lányok		
		k	l	m
Fiúk	a	x	x	
	b		x	
	c	x	x	x
	d			

		Lányok		
		k	l	m
Fiúk	a	1	1	0
	b	0	1	0
	c	1	1	1
	d	0	0	0



2. példa

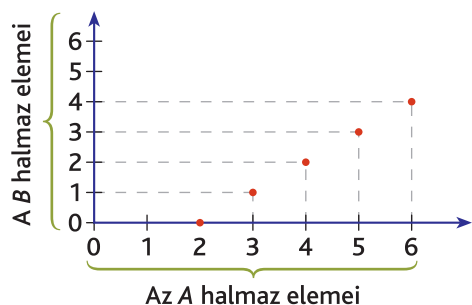


Az A halmaz: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, a B halmaz: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Az A halmaz elemeihez rendeljük hozzá a B halmaz elemeit a következő szabály szerint: $x \mapsto x - 2$

Vizsgáljuk a hozzárendelés tulajdonságait.

A halmazok közötti hozzárendelést szemléltethetjük például **nyíldiagrammal**.



Az A és a B halmaz számhalmaz, az összetartozó értékpárokat ábrázolhatjuk **derékszögű koordináta-rendszerben**, vagyis megrajzoljuk a hozzárendelés **grafikonját**.

A hozzárendelés tulajdonságai:

Az A és a B halmaz megegyezik.

Az A halmaz minden eleméhez **legfeljebb egy elem tartozik** a B halmazból, ezért ezt a hozzárendelést **egyértelműnek** nevezzük.

Az A halmaznak van olyan eleme, amelyikhez nem tartozik elem a B halmazból.

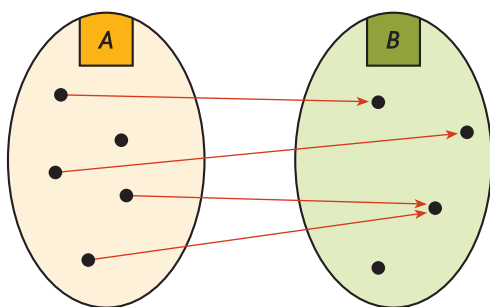
$A \setminus B$ halmaz minden eleme legfeljebb egy A halmazbeli elemhez tartozik.

$A \setminus B$ halmaznak van olyan eleme, amelyik nem tartozik egyetlen A halmazbeli elemhez sem.

☞ **Megfigyelted? A matematika minden fejezetének fogalomrendszere a halmazelméleti alapfogalmakra épül.**

Értelmezések

A **halmaz** a matematika egyik legegyszerűbb fogalma. A „halmaz” szó helyett használhatjuk például az „összesség”, az „együttes”, a „csoport” szavakat. Hasonlóan egyszerű fogalom az **elem** fogalma. Az „elem” szó helyett is használhatjuk például a „dolog”, „tag”, „individuum” szavakat. Ezeket a fogalmakat nem tudjuk egyszerűbb fogalmakkal megmagyarázni, vagyis nem tudjuk **definiálni**. Ennek ellenére, amikor ezeket a szavakat használjuk, akkor mindenki érti, hogy mire gondolunk. Ezeket a fogalmakat **alapfogalmaknak** tekintjük. Alapfogalom továbbá az a kapcsolat, hogy egy elem **beletartozik** egy halmazba. Az alapfogalom elnevezés arra utal, hogy a fogalmat nem definiáljuk, de felhasználjuk más fogalmak értelmezéséhez.



Már korábban is sok olyan feladattal találkoztunk, amelyekben halmazok közötti **kapcsolatokat**, (idegen szóval) **relációkat** vizsgáltunk. Ezekben a feladatokban egy A **alaphalmaz** elemeihez **hozzárendeltük**, az alaphalmaz elemeinek **megfeleltettük** egy B halmaz bizonyos elemeit. Úgy is mondhatjuk, hogy az A halmaz és a B halmaz elemei között **relációt** értelmeztünk. (Az is lehet, hogy az A halmaz és a B halmaz elemei megegyeznek.) A halmazok közötti kapcsolat, reláció, hozzárendelés vagy megfeleltetés ugyanazt a fogalmat jelentik. **A reláció fogalmát** az általános iskolában **alapfogalomnak** tekintjük.

A hozzárendelésben az első halmazt **alaphalmaznak** nevezzük, a második halmazt **képhalmaznak**. Ha az A halmaz egy a elemének megfeleltetjük a B halmaz egy b elemét, akkor azt általában így jelöljük:

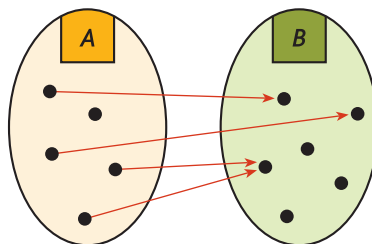
$$A \rightarrow B; a \rightarrow b,$$

és a b elemet az a elem **képének** nevezzük.

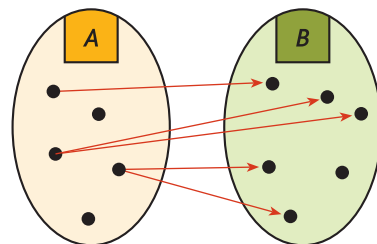
Egyértelmű a hozzárendelés, ha az alaphalmaz minden elemének legfeljebb egy képe van a képhalmazban.

Az 1. példában az alaphalmaz a fiúk halmaza, a képhalmaz a lányok halmaza. A hozzárendelés **többértelmű**, mert volt olyan fiú, aki több lánnyal is táncolt.

Egyértelmű hozzárendelés:



Többértelmű hozzárendelés:



A 2. példában az alaphalmaz és a képhalmaz $A = B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, vagyis a két halmaz megegyezik. A hozzárendelés **egyértelmű**, mert az A halmaz elemeihez legfeljebb egy elem tartozik a B halmazból.

FELADATOK

1 Szemléltesd **nyíldiagrammal, grafikonnal** az összetartozó elempárokat! Vizsgáld az összetartozó elempárokkal értelmezett hozzárendelés tulajdonságait!

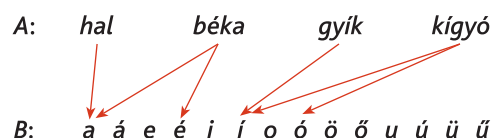
Legyen $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 4; 8\}$. Rendeld az A halmaz elemeihez a B halmaz elemeit a következőképpen: az a számhoz rendeld hozzá

- a) a nála nagyobb számokat; b) a többszöröseit; c) saját magát;
d) a szám 2-szeresét; e) a 2^n hatvány értékét; f) a 4-et!

☉ **Mely hozzárendelések egyértelműek?**

2 Adott a szavaknak az A és a hangoknak a B halmaza:
 $A = \{\text{hal; béka; gyík; kígyó}\}$, $B = \{\text{A magyar ábécé magánhangzóit}\}$.
Mi lehet a hozzárendelés szabálya?

Sorold fel a hozzárendelés tulajdonságait!



3 A $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$, $\neq$ jeleket **relációs jeleknek** nevezzük, hiszen ezek is két (halmaz)elem közötti kapcsolatot jeleznek. Legyen $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ és $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Melyik egyértelmű hozzárendelés a fentiek közül, ha az A az alaphalmaz, a B a képhalmaz?

4 Mi a helyzet a kő-papír-olló játékban? Az alaphalmaz és a képhalmaz megegyezik: $A = B = \{\text{Kő; Olló; Papír}\}$.

A hozzárendelés:

- A kő kicsorbítja az ollót: a kő legyőzi az ollót.
Az olló elvágja a papírt: az olló legyőzi a papírt.
A papír becsomagolja a követ: a papír legyőzi a követ.
Egyértelmű-e ez a hozzárendelés?



a)

	0	1	2	3
11				x
12	x			
13		x		
14			x	

b)

	0	1	2	3
11		x		
12		x	x	x
13		x		
14		x	x	

3

Mi lehet a hozzárendelés szabálya?

Melyik hozzárendelés egyértelmű?

☉ Ábrázold nyíldiagrammal is a hozzárendeléseket!

Gyakorló
2.07–2.08.

4

Mi lehet a hozzárendelés szabálya? Egészítsd ki a táblázatot a felismert szabályok alapján, majd ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az összetartozó számpárokat! Egyértelmű-e a hozzárendelés?

Az A eleme	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A B eleme	1	1	1	1									
		2	3	2									
				4									

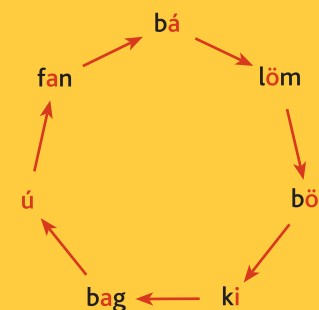
Az alaphalmazt jelölje A , a képhalmazt B .

a) $A = B = \{\text{Pozitív egész számok}\}$

Az A eleme	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	x
A B eleme				2	1	0	1	2					

b) $A = \mathbb{Z} = \{\text{Egész számok}\},$
 $B = \mathbb{N} = \{\text{Természetes számok}\}$

☉ Ábrázold nyíldiagrammal a táncospárok néhány lehetséges összetételét! Mi a különbség az a) és a b) feladat feltétele között?



Anna, Bea, Cili, Dóra, valamint Ede, Feri, Gábor és Henrik táncolnak.

a) Minden lány pontosan egy fiúval táncol. Hányféleképpen alakulhatnak ki ezzel a feltétellel a táncospárok?

b) Minden lány pontosan egy fiúval, és minden fiú pontosan egy lánnyal táncol. Így hányféle táncospár alakulhat ki?



Az itt olvasható „verset” Lázár Ervin Aromója írta a Négyszögletű Kerek Erdő költői versenyére.

Aromo az ábráról leolvasható szabályt igyekezett követni, de néhol hibázott.

Javítsd ki Aromo „versét” a szabály szerint!

Hogyan lehetne gyorsabban megkapni az első sorból az utolsót?

bálömböki bag u fan
bálömbökő big a fún
búlambákő bög i fan
balúmbaká bög ö fin
bilambúka bág ö fön
bölömbakú bag á fön
bölömbika bűg a fán

☉ Több megoldást is találhatsz.



Mi lehet a hozzárendelés szabálya? Egészítsd ki a táblázatot a felismert szabályok alapján! Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az összetartozó számpárokat! Vizsgáld a hozzárendelés tulajdonságait!

Az A eleme	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	x
A B eleme			5	3	1	0	2	4	6			

 $A = \{\text{egész számok}\};$
 $B = \{\text{Természetes számok}\}$

FÜGGVÉNYEK ÉRTELMEZÉSE, VIZSGÁLATA

Értelmezések

Az egyértelmű hozzárendelést a következő feltételek mellett függvénynek nevezzük. A függvény megadása során tisztáznunk kell:

- 1 Az **alaphalmaz** mely **elemeinek van képük a képhalmazban**, vagyis hogy az alaphalmaz mely **részalmazára** értelmezzük a függvényt? **Az alaphalmaznak ezt a részalmazát a függvény értelmezési tartományának** nevezzük.
- 2 Mi a **képhalmaz**?
- 3 Mi a hozzárendelés szabálya?

A **függvény az értelmezési tartomány minden eleméhez pontosan egy elemet rendel a képhalmaz elemei közül.**

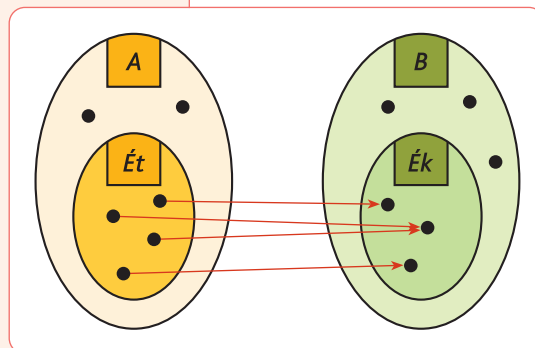
Az értelmezési tartomány elemeit a függvény **független változójának** nevezzük.

A **képelemek**, más szóval **függvényértékek halmazát a függvény értékkészletének** nevezzük. Az értékkészlet a képhalmaz, vagy annak valamely nem üres részhalmaza.

Általában függvényekkel írjuk le, ha valamilyen mennyiség változása maga után vonja egy másik mennyiség változását, ilyenkor a mennyiségek mérőszámai között keresünk kapcsolatot.

Azokat a függvényeket, amelyeknek az alaphalmaza is és a képhalmaza is számhalmaz, szám-szám függvényeknek nevezzük.

☉ **Figyeld meg!**
A függvény speciális hozzárendelés (reláció).



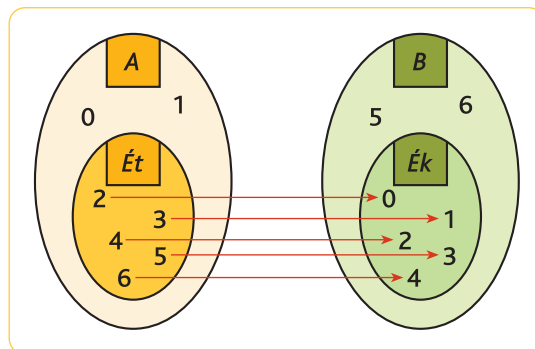
Például: Az előző alfejezet 2. példájában egyértelmű hozzárendelést vizsgáltunk. Ez a hozzárendelés a $\{2; 3; 4; 5; 6\}$ értelmezési tartományon függvény. Az értékkészlete: $\{0; 1; 2; 3; 4\}$

Megállapodások:

Ha nem mondunk mást, akkor a szám-szám függvény értelmezési tartománya az alaphalmaznak az a **legbővebb részhalmaz**, amelyen a függvény értelmezhető. Az alaphalmazt általában úgy célszerű megválasztani, hogy az megegyezze az értelmezési tartománnyal.

Szám-szám függvény esetén, ha nem tüntetjük fel az alaphalmazt és a képhalmazt, akkor mindkettő az addig általunk tanult legbővebb számhalmaz.

Ha nem mondunk mást, akkor a független változót x , a függvényértéket y jelöli.



Antal, Bea, Cili, Dani, Emma és Feri, egy verseny 6 legjobb helyezettje között jutalomkirándulást sorsolnak ki **Pécsre** és **Sopronba**. Pécsre is 3, Sopronba is 3 fő utazhat.

- a) Ábrázold nyíldiagrammal a sorsolás egy lehetséges kimenetelét!
- b) Hányféle kimenetele lehet ennek a sorsolásnak?

Fejtörő!

© Figyeljük meg **ténylegesen egy meggyújtott gyertya hosszának változását.**



1. példa

Egy 18 cm-es gyertyát meggyújtottunk, és megfigyeltük, hogy percenként 1,5 cm gyertya égett el. Fogalmazzuk meg a gyertya meggyújtásától eltelt idő és a gyertya hosszúsága közötti összefüggés szabályát.

A gyertya meggyújtásától eltelt idő (t) és a gyertya hosszúsága (l) közötti kapcsolatot egy függvénnyel jellemezhetjük.

A függvény **értelmezési tartománya** a gyertya meggyújtásától számított időpontok mérőszáma: $t \geq 0$ (min).

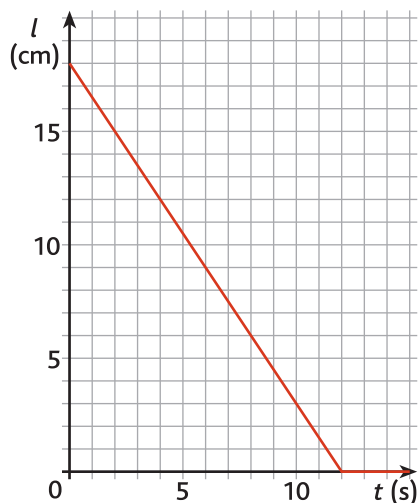
A függvény képhalmaza a lehetséges hosszúságértékek mérőszáma; ezen belül az **értékkészlet** a tényleges hosszúságok mérőszámának halmaza:

$$0 \leq l \leq 18 \text{ (cm)}.$$

Foglaljunk táblázatba néhány összetartozó értékpárt:

t (min)	0	1	2	3	4	...	10	11	12	13
l (cm)	18,0	16,5	15,0	13,5	12,0		3,0	1,5	0	0

Megrajzoltuk a függvény **grafikonját**.



A függvény grafikonjáról leolvasható például:

tetszőleges időpontban milyen hosszú a gyertya;

a 0. perctől a 12. percig a gyertya egyre rövidebb lesz;

a gyertya 12 perc alatt elfogy;

a 12. perctől kezdve minden időpillanathoz 0 cm hosszúságú gyertya tartozik.

Keressük az összefüggést leíró szabályt (képletet):

$$0 \text{ (min)} \rightarrow 18 - 1,5 \cdot 0 \text{ (cm)}$$

$$1 \text{ (min)} \rightarrow 18 - 1,5 \cdot 1 \text{ (cm)}$$

$$2 \text{ (min)} \rightarrow 18 - 1,5 \cdot 2 \text{ (cm)}$$

$$3 \text{ (min)} \rightarrow 18 - 1,5 \cdot 3 \text{ (cm)}$$

⋮

$$t \text{ (min)} \rightarrow 18 - 1,5 \cdot t \text{ (cm)}, \quad \text{ha } 0 \leq t \leq 12 \text{ (min)};$$

$$t \text{ (min)} \rightarrow 0 \text{ (cm)}, \quad \text{ha } t > 12 \text{ (min)}; \text{ elfogyott a gyertya.}$$

A gyertya hossza és az idő közti összefüggést egyenletekkel is felírhatjuk:

$$\begin{cases} l = 18 - 1,5 \cdot t \text{ (cm)}, & \text{ha } 0 \leq t \leq 12 \text{ (min)}; \\ l = 0 \text{ (cm)}, & \text{ha } t > 12 \text{ (min)} \end{cases}$$

Fejtörő!



Az iskolai évnnyitó ünnepségen 54 elsős mindegyike egy 12 cm-es gyertyát kap, amelyből percenként 0,8 cm ég el. Az igazgató a „tudás lángját” személyesen adja át saját gyertyájáról, ezért sorban meggyújtja minden elsős gyertyáját. Mekkora lesz a legnagyobb különbség két gyertya hossza között, ha egy gyertya meggyújtása átlagosan 10 másodpercig tart? Összesen hány másodpercig lesz égő gyertya látható elsős kezében az ünnepségen?

2. példa

Az egész számokhoz rendeljünk hozzá racionális számokat a következő szabály szerint:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad x \mapsto \frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}$$

Függvény-e ez a hozzárendelés?

Mi tartozik az $x = -17$ -hez ebben a hozzárendelésben?

Készítsük el a hozzárendelés **grafikonját**.

☉ Figyeld meg a jelölést!

Fontosak azok a szám-szám függvények, amelyek szabályát valamilyen kifejezéssel (képlettel) megfogalmazhatjuk. Ilyen szám-szám függvényt vizsgálunk ebben a példában.

A szabály értelmezése

A függvényt f -fel jelöljük (bármilyen más betűvel jelölhetjük!).

Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$, az egész számok halmaza.

A képhalmaz a $\mathbb{Q}$, a racionális számok halmaza.

Az x egész számnak az $\frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}$ racionális szám felel meg.

A függvény esetén az elemek közti megfeleltetést **talpas nyíllal** ($\mapsto$) jelöljük. Használatos a következő jelölés is (ha a függvényt f jelöli):

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad f(x) = \frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}$$

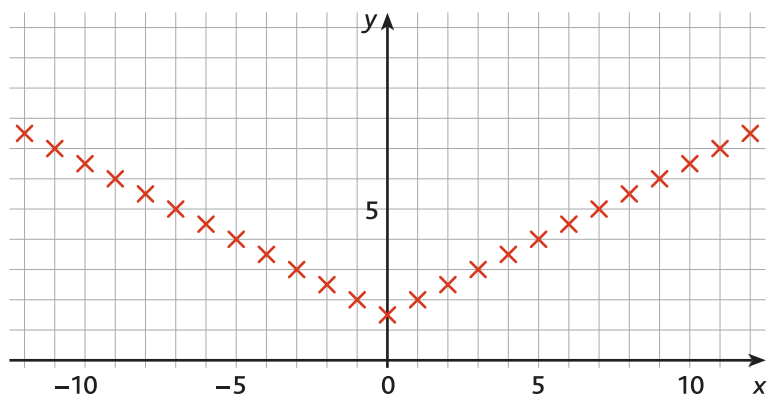
Ez a hozzárendelés függvény, mert mindegyik egész számhoz pontosan egy értéket rendel hozzá.

Az alaphalmaz az egész számok halmaza, a képhalmaz a racionális számok halmaza. Ha a függvény képletébe **behelyettesítjük** a -17 -et, akkor megkapjuk, hogy mely racionális szám tartozik a -17 -hez ebben a hozzárendelésben.

$$-17 \mapsto \frac{|-17|}{2} + \frac{3}{2} = 10, \text{ illetve}$$

$$f(-17) = \frac{|-17|}{2} + \frac{3}{2} = 10$$

A függvény grafikonjában az összetartozó értékpárokat jelölő pontokat nem köthetjük össze folytonos vonallal, mert csak az egész számokra értelmeztük a függvényt.



Ödömér szerint a $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad x \mapsto \frac{|x+3|}{2}$ függvény grafikonja megegyezik a 2. példában adott f függvény grafikonjával. Igaza van Ödömérnek?

☉ Ábrázold a g függvény grafikonját!

3. példa

Alfrédék gépkocsijában fedélzeti számítógép ellenőrzi a gépkocsi mozgását. Szombat délután elmentek a hegyek közé. A számítógép folyamatosan regisztrálta, hogy az adott időpillanatban milyen távolságra voltak a kiindulási ponttól. Alfréd húszpercenként feljegyezte az adatokat:

t (min)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
s (km)	0	15	40	70	80	90	90	90	90	70	50	20	0	0

Szemléltessük grafikonnal az idő és a távolság közti összefüggést.

A számítógép az összes szóba jöhető időpillanathoz **hozzárendeli** a gépkocsinak a kiindulási ponttól való távolságát, ezzel leírja, hogy a távolság hogyan függ az időtől. Ez a hozzárendelés függvény, mert minden időpillanathoz pontosan egy távolságot rendel hozzá.

Az **alaphalmaz** az időpontok mérőszámának, vagyis a nemnegatív számoknak a halmaza.

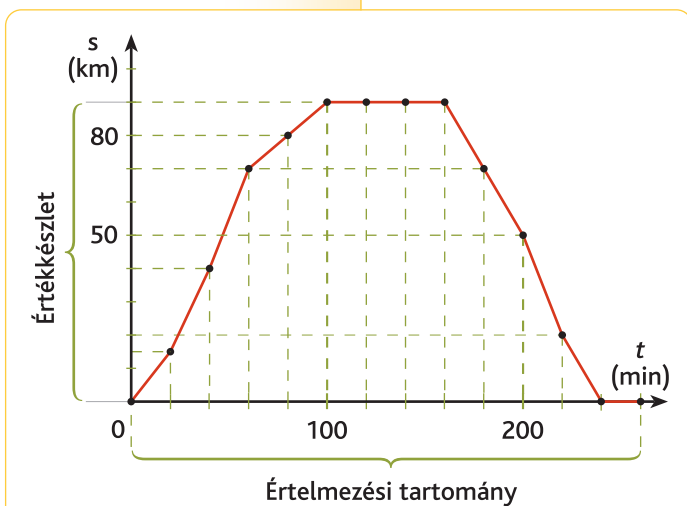
Az alaphalmaz nem üres részhalmaza a függvény **értelmezési tartománya**, vagyis a gép bekapcsolásától a gép kikapcsolásáig számított időpontok mérőszáma:

$$0 \leq t \leq 260 \text{ (min)}$$

A függvény **képhalmaza** a lehetséges távolságok mérőszáma; azaz a nemnegatív számok halmaza. Ennek nem üres részhalmaza az **értékkészlet**: $0 \leq s \leq 90 \text{ (km)}$

A függvény **grafikonját** úgy kapjuk, hogy az összes összetartozó elempárt ábrázoljuk.

Az **értelmezési tartomány** elemeinek az ábrázolt pontok **1. jelzőszáma**, az értékkészlet elemeinek a pontok **2. jelzőszáma** felel meg a grafikonon.



Ha feltesszük, hogy két megfigyelés között az autó egyenletes tempóban haladt, akkor a függvény grafikonjáról leolvasható például:

- az 50. percben 55 km távolságra volt a gépkocsi;
- 80 km távolságra a 80. percben és a 170. percben volt;
- a távolság növekedett a 0. perctől a 100. percgig;
- a 60. perctől a 100. percgig csak 20 km-t haladtak előre;
- a legnagyobb távolság 90 km;
- a 100. percben értek célba, ott 60 percig időztek,
- ezután a távolság csökkent, tehát hazafelé tartottak;
- a 240. percben értek haza.

© Például a $P(60; 70)$ pont rajta van az előző grafikonon, mert a 60-nak a 70 felel meg.

A $Q(60; 40)$ nincs rajta a grafikonon.

Megfigyelés

A szám-szám hozzárendelés összetartozó értékpárjait ábrázolhatjuk derékszögű koordináta-rendszerben. Ekkor kapjuk a hozzárendelés **grafikonját**. Egy $P(x;y)$ pont pontosan akkor van rajta a hozzárendelés grafikonján, ha az x -nek az y értéket feleltetjük meg ebben a hozzárendelésben.

FELADATOK

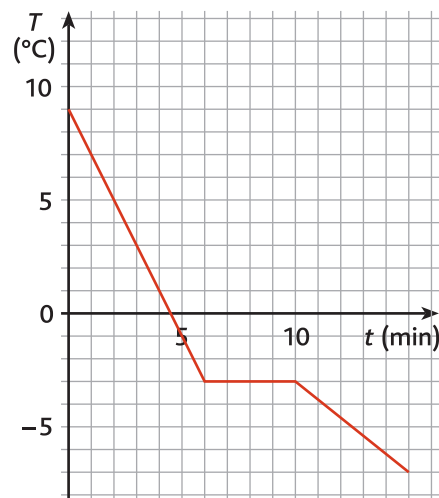
5

Híg sóoldatot lehűtenek. Az oldat hőmérsékletének az alakulását a grafikon szemlélteti.

A grafikon segítségével egészítsd ki a táblázatot!

t (min)	0	1	2	6	7	9	10	15
T (°C)								

- A grafikon időtengelyén húzd meg késsel azt a szakaszt, ahol az oldat hőmérséklete 0°C alá süllyedt!
- Jelöld pirossal azt az időpontot, amikor az oldat hőmérséklete 5°C !
- Percenként hány fokkal csökkent az oldat hőmérséklete?
- Milyen hőmérsékleten fagyott meg az oldat?



6

Töltsd ki a függvénytáblázatot! Rajzold meg a függvény grafikonját!

a) $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad y = 3 \cdot x - 1$

x	0	3	0,4	-2					-1
y					5	0,5	-5,5	-0,4	

b) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad y = \frac{1}{2} \cdot x + 1$

x	-3	-2	-1	0	2				
y						-1	-2,5	3,5	4

c) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad y = 2 \cdot x - 5$

x	3	10	15	0				2	
y					7	-3	-4		0

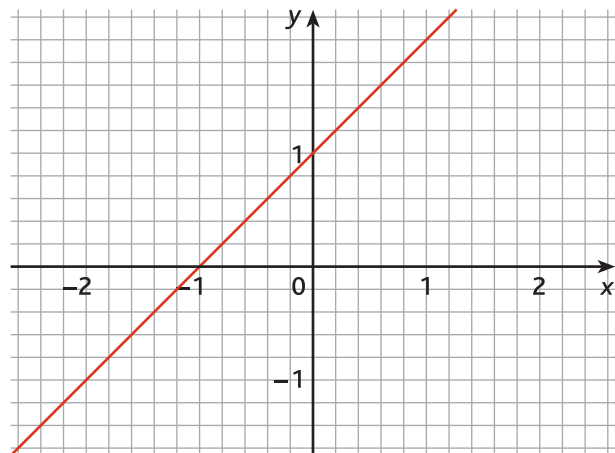
d) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad y = |x - 3| - 2$

x	-10	-5	-3	3				5	1
y					1	-1	-3		

7

Olvasd le a függvény grafikonjáról az adott pontok hiányzó jelzőszámát, ha tudjuk, hogy ezek a pontok rajta vannak a grafikonon!

$A(1; \quad), \quad B(\quad; 0),$
 $C(-2; \quad), \quad D(\frac{1}{2}; \quad),$
 $E(\quad; -\frac{1}{2}), \quad F(-0,1; \quad)$



Gyakorló 2.01–2.06., 2.09–2.11.



Pótold a $P(100,4; \quad)$ és a $Q(\quad; -100,4)$ pont hiányzó jelzőszámát, ha tudjuk, hogy ezek a pontok rajta vannak a 7. feladat (meghosszabbított) grafikonján!

Fejtorő!

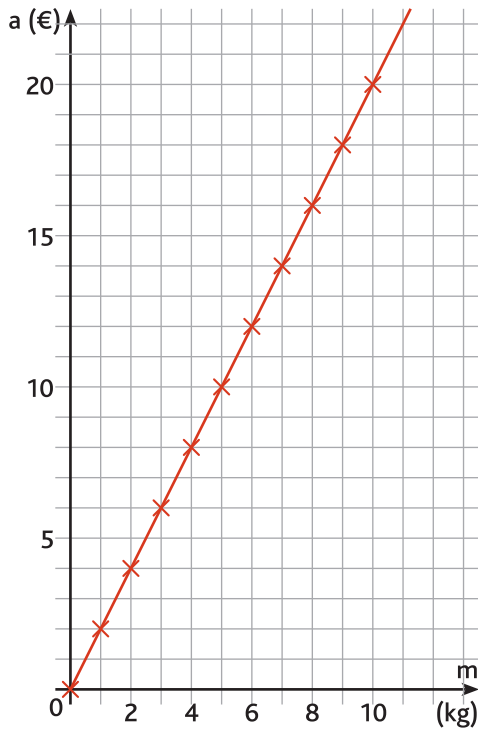
© Írd fel a leképezés szabályát!



EGYENES ARÁNYOSSÁG

1. példa

Egy üzletben 1 kg paprika ára 2 € (euró).
Mennyibe kerül 0 kg; 0,5 kg; 2 kg; 3 kg; 3,5 kg; ... paprika?
Milyen összefüggés van a paprika tömege és az ára között?
Ábrázoljuk grafikonon az összetartozó értékeket.



0 kg paprika 0-szor annyiba kerül, mint 1 kg paprika;
0,5 kg paprika 0,5-szer annyiba kerül, mint 1 kg paprika;
2 kg paprika 2-szer annyiba kerül, mint 1 kg paprika stb.
Ahányad részére csökken a vásárolt paprika tömege, **arányosan** ugyanannyiad részére csökken az ára is. Ahányszorosára nő a vásárolt paprika tömege, **arányosan** ugyanannyiszorosára nő az ára is.

A tömeg mérőszáma tetszőleges nemnegatív szám. A paprika ára is mindig nemnegatív szám.

Ezért nemnegatív számokhoz rendelünk nemnegatív értékeket.

Az **alaphalmaz** és a **képhalmaz**: $A = \{\text{Nemnegatív számok}\}$

Keressük az összefüggés szabályát.

$$0 \text{ (kg)} \mapsto 2 \cdot 0 \text{ (€)}$$

$$0,5 \text{ (kg)} \mapsto 2 \cdot 0,5 \text{ (€)}$$

$$1 \text{ (kg)} \mapsto 2 \cdot 1 \text{ (€)}$$

$$2 \text{ (kg)} \mapsto 2 \cdot 2 \text{ (€)}$$

⋮

$$m \text{ (kg)} \mapsto 2 \cdot m \text{ (€)}$$

Jelölések: a tömeg m , a vételár a .

Az összefüggés leírása

szabállyal: $a = 2 \cdot m$;

a megfeleltetés jelzésével:

$$A \rightarrow A; m \mapsto 2 \cdot m, m \geq 0$$

$m \text{ (kg)}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	10	3,48	0,52
$a \text{ (€)}$	0	1	2	3	4	5	6	7	20	6,96	1,04

Készítsünk táblázatot.

Az összefüggés grafikonja az origóból kiinduló félegyenes.

2. példa

3,5 m vezeték ára 630 Ft. Mennyibe kerül 2,1 m vezeték?

1. megoldás **Következtetés**

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{array}{l} : 3,5 \\ \cdot 2,1 \end{array} & \begin{array}{l} 3,5 \text{ m vezeték ára} \\ 1 \text{ m vezeték ára} \\ 2,1 \text{ m vezeték ára} \end{array} & \begin{array}{l} 630 \text{ Ft} \\ 630 \text{ Ft} : 3,5 = 180 \text{ Ft} \\ 180 \text{ Ft} \cdot 2,1 = 378 \text{ Ft} \end{array}
 \end{array}$$

© Ha az egyik mennyiség valahányszorosára változik, akkor a másik mennyiség hozzá tartozó értéke ugyanannyiszorosára változik.

»»

2. megoldás Aránypár

3,5 m vezeték ára	630 Ft
2,1 m vezeték ára	x Ft

Az összetartozó értékpárok aránya megegyezik:

$$x : 630 = 2,1 : 3,5 = 0,6$$

Ebből: $x = (2,1 : 3,5) \cdot 630$

$$x = 0,6 \cdot 630 = 378 \quad \text{A 2,1 m vezeték ára 378 Ft.}$$



Emlékeztető

Két változó mennyiség egyenesen arányos, ha az egyik mennyiség valahány-szorosára változik, akkor a másik mennyiség hozzá tartozó értéke ugyanannyi-szorosára változik.

Ha két változó mennyiség egyenesen arányos, akkor (nullától különböző) értékpárjaik aránya állandó.

0-hoz mindig 0 tartozik, de a $0 : 0$ arányt nem értelmezzük.

Az egyenes arányosság grafikonja egy olyan egyenesre illeszkedik, amely átmegy az origón.

☉ Például egyenes arányosság van

az áru mennyisége és ára között;

egyenletes mozgásnál az eltelt idő és a megtett út között.

FELADATOK

8 Oldd meg a feladatot többféle megoldási terv alapján!

- a) Egy gépkocsi 5 másodperc alatt 100 m utat tesz meg. Mekkora utat tesz meg
 2 másodperc, 10 másodperc, 45 másodperc, 8,5 másodperc alatt?
 Hány másodperc alatt tesz meg 300 m-t, 350 m-t, 30 m-t, 70 m-t?
- b) 15 m vezeték tömege 75 dkg (dag).
 Mekkora a tömege 75 m, 5 m, 600 m, 3 km vezetéknek?
 Milyen hosszúságú vezeték tömege 15 dkg, 25 dkg, 600 dkg, 5 dkg?

9

Keress egyenesen arányos mennyiségeket!

Gyűjtőmunka



Egyenes arányosság van

- a négyzet a oldalának hossza és a négyzet T területe között;
- a négyzet a oldalának hossza és a négyzet K kerülete között;
- egy 36 cm^2 területű téglalap két szomszédos, a és b oldala között;
- egy $a = 5 \text{ cm}$ oldalú téglalap a -val szomszédos b oldalának hossza és a téglalap T területe között;
- egy $a = 5 \text{ cm}$ oldalú téglalap a -val szomszédos b oldalának hossza és a téglalap K kerülete között

Fejtörő!

☉ Írj a fehér téglalapba I, illetve H betűt, annak megfelelően, hogy igaz vagy hamis az állítás! Indokold meg a válaszod! Írd fel az összefüggés szabályát is!

☉ **Többféle megoldási terv alapján is dolgozhatsz.**

Gyakorló
2.21–2.22.;
Feladatgyűjtemény
2.4.12–13.

10

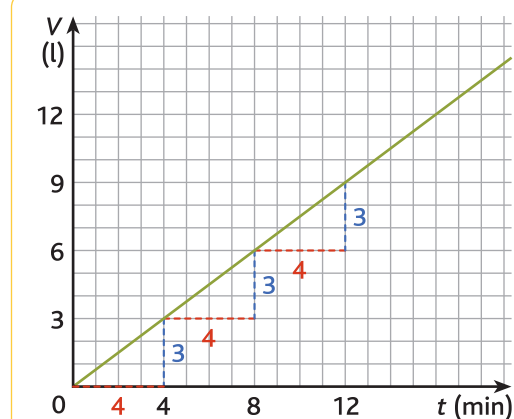
A következő feladatokban az összetartozó mennyiségek között egyenes arányosság van-e? Ha igen, oldd meg a feladatot!

- Egy liter tejből feldolgozás során 3,5 dkg vaját nyernek.
Mennyi vajat kapnak 18,4 l tejből?
Hány liter tejből nyerhető 1,4 kg vaj?
- Bundás, a 4 hetes kiskutya 48 dkg.
Mennyi lesz Bundás tömege 1 éves (52 hetes) korában?
- 5,6 m szőnyeg ára 100,80 €. Mennyibe kerül 1 m, illetve 3,5 m szőnyeg?
- Egy tavaszi reggel 5 órakor 15 °C a hőmérséklet.
Hány fokot mértek éjszaka 1 órakor, illetve délután 15 órakor?
- Egy tehergépkocsi 600 km-t 5 óra alatt tesz meg. Mekkora utat tesz meg ugyanakkora átlagsebességgel 7 és fél óra alatt?
- 1 dm³ vas tömege 7,5 kg. Mekkora a tömege egy 20 cm széles, 5 cm vastag és 6 m hosszú vasgerendának?

3. példa

Változtatható nyílású csapon vizet engedünk egy tartályba. Milyen összefüggés van az idő és a kifolyt vízmennyiség között, ha percenként

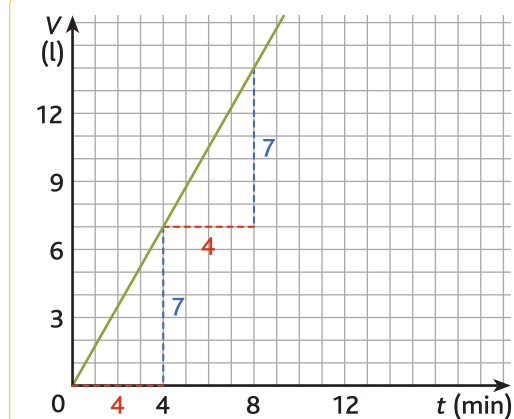
- $\frac{3}{4}$ l víz;
- $\frac{7}{4}$ l víz folyik ki?



Az alaphalmaz és a képhalmaz: $A = \{\text{Nemnegatív számok}\}$.
A kifolyt vízmennyiség egyenesen arányos az eltelt idővel.
Keressük az összefüggést leíró szabályt (képletet):

t (min)	0	1	2	3	4
V (l)	$\frac{3}{4} \cdot 0$	$\frac{3}{4} \cdot 1$	$\frac{3}{4} \cdot 2$	$\frac{3}{4} \cdot 3$	$\frac{3}{4} \cdot 4$

t (min) $\mapsto \frac{3}{4} \cdot t$ (liter víz). Ha az idő 1 perccel nő, akkor a vízmennyiség $\frac{3}{4}$ l-rel nő, ha az idő **4 perccel nő**, akkor a vízmennyiség $\left(4 \cdot \frac{3}{4}\right)$ **3 l-rel nő**.



t (min)	0	1	2	3	4
V (l)	$\frac{7}{4} \cdot 0$	$\frac{7}{4} \cdot 1$	$\frac{7}{4} \cdot 2$	$\frac{7}{4} \cdot 3$	$\frac{7}{4} \cdot 4$

t (min) $\mapsto \frac{7}{4} \cdot t$ (liter víz). Ha az idő 1 perccel nő, akkor a vízmennyiség $\frac{7}{4}$ l-rel nő, ha az idő **4 perccel nő**, akkor a vízmennyiség $\left(4 \cdot \frac{7}{4}\right)$ **7 l-rel nő**.

Megfigyelés

Az előző függvények képe az origóból induló félegyenes. A félegyenesnek nagyobb a meredeksége, ha az összetartozó értékpárok aránya nagyobb.

$$\odot 7:4 > 3:4$$

4. példa

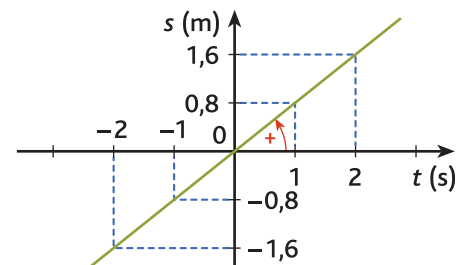
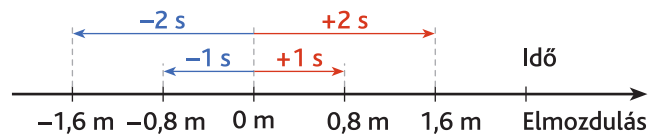
Anna és Béla egymással szemben állnak egy-egy mozgójárdán, és egyenletes tempóban haladnak egymás felé. Abban a pontban érnek egymás mellé, ahol megfigyeljük őket. Anna mozgójárdája 1 s alatt 0,8 m-t, Béláé 1 s alatt 1,2 m-t halad. Milyen összefüggéssel írható le Anna és Béla megfigyelési ponthoz viszonyított helyzete az egyes időpillanatokban, ha a találkozás pillanatát vesszük 0 s-nek, és Anna elmozdulásának irányát pozitívnak? Rajzoljuk meg és hasonlítsuk össze a függvények grafikonját.



A találkozás időpontja előtt és után, továbbá a megfigyelőtől jobbra és balra egyaránt vizsgáljuk a mozgást, ezért az időadatokat és a távolságadatokat minden számra (a negatív számokra is!) értelmeznünk kell. Az egyenletes mozgás miatt az elmozdulás mértéke egyenesen arányos az eltelt idővel. Anna helyzetének változása a megfigyelési ponthoz viszonyítva:

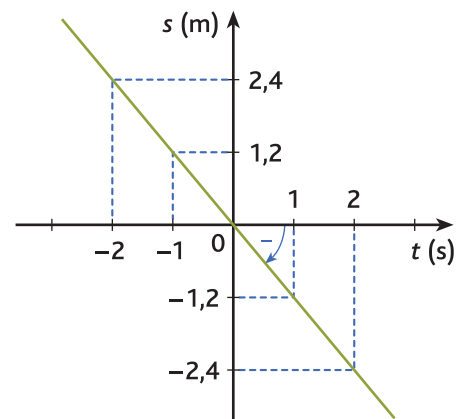
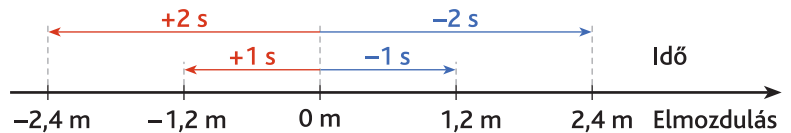
$$\begin{array}{l} \dots \\ -2 \text{ (s)} \mapsto 0,8 \cdot (-2) \text{ (m)} \\ -1 \text{ (s)} \mapsto 0,8 \cdot (-1) \text{ (m)} \\ 0 \text{ (s)} \mapsto 0,8 \cdot 0 \text{ (m)} \\ 1 \text{ (s)} \mapsto 0,8 \cdot 1 \text{ (m)} \\ 2 \text{ (s)} \mapsto 0,8 \cdot 2 \text{ (m)} \\ \dots \\ t \text{ (s)} \mapsto 0,8 \cdot t \text{ (m)} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Korábban} \\ \text{hol volt?} \\ \\ \text{Most itt van.} \\ \\ \text{Ezután hol} \\ \text{lesz?} \end{array} \right\}$$

Anna mozgásának leírása esetén az összetartozó értékpárok aránya pozitív, a nagyobb időadatokhoz arányosan nagyobb értékek tartoznak:
 $= (-1,6) : (-2) = (-0,8) : (-1) = (+0,8) : (+1) = (+1,6) : (+2) = \dots = 0,8$



Béla helyzetének változása a megfigyelési ponthoz viszonyítva:

$$\begin{array}{l} \dots \\ -2 \text{ (s)} \mapsto -1,2 \cdot (-2) \text{ (m)} \\ -1 \text{ (s)} \mapsto -1,2 \cdot (-1) \text{ (m)} \\ 0 \text{ (s)} \mapsto -1,2 \cdot 0 \text{ (m)} \\ 1 \text{ (s)} \mapsto -1,2 \cdot 1 \text{ (m)} \\ 2 \text{ (s)} \mapsto -1,2 \cdot 2 \text{ (m)} \\ \dots \\ t \text{ (s)} \mapsto -1,2 \cdot t \text{ (m)} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Korábban} \\ \text{hol volt?} \\ \\ \text{Most itt van.} \\ \\ \text{Ezután hol} \\ \text{lesz?} \end{array} \right\}$$



Mindkét esetben a függvény grafikonja olyan egyenes, amely az origóra illeszkedik.

»»

»

Mivel az egyenest két pontja meghatározza, az egyenes arányosság grafikonjának megrajzolásához elegendő még egy összetartozó értékpárt megadnunk a $(0; 0)$ értékpáron kívül.

Béla mozgásának leírása esetén az összetartozó értékpárok aránya negatív, a nagyobb időadatokhoz arányosan kisebb értékek tartoznak:

$$\dots = (+2, 4) : (-2) = (+1, 2) : (-1) = (-1, 2) : (+1) = (-2, 4) : (+2) = \dots = -1,2$$

Mindkét grafikonon figyeljük meg a t tengely pozitív iránya és a grafikon egyenese által bezárt szög irányát.

Az ábrákon piros, illetve kék nyíllal szemléltettük.

© A függvény esetén az elemek közti kapcsolat jelölésére „talpas nyilat” használunk:

$$x \mapsto a \cdot x$$

Értelmezések

Az A és B számhalmaz közötti $f: A \rightarrow B; x \mapsto a \cdot x$

függvényt egyenes arányosságnak nevezzük.

Az egyenes arányosság grafikonjának pontjai egy olyan egyenesre illeszkednek, amelyek átmegy az origón. Az egyenes **meredeksége** (az x tengely pozitív irányával bezárt szögének nagysága és iránya) az a aránytól függ.

FELADATOK

Gyakorló

2.12–2.20.;

Feladatgyűjtemény

3.2.01–03.

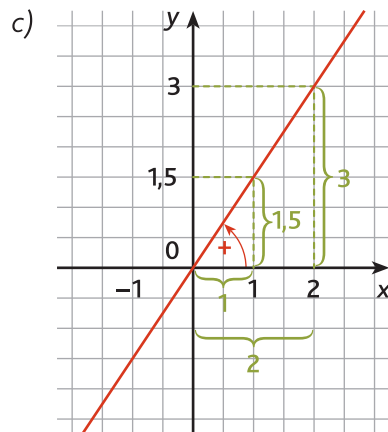
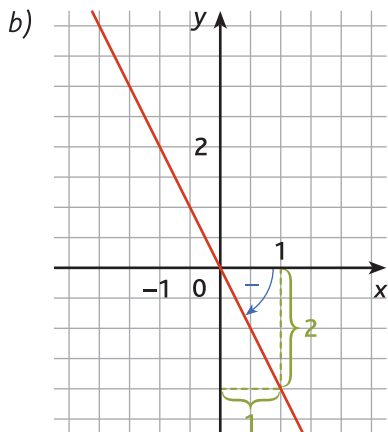
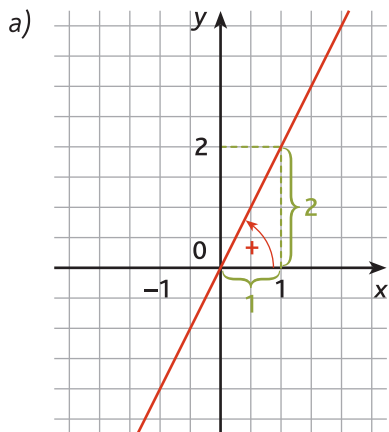
11

Készíts mindegyik függvényhez értéktáblázatot! Rajzold meg (feladatonként) közös koordináta-rendszerben a grafikonjukat!

- a) $e: x \mapsto x;$ $f: x \mapsto \frac{1}{3} \cdot x;$ $g: x \mapsto \frac{2}{3} \cdot x;$ $h: x \mapsto \frac{3}{2} \cdot x;$
- b) $e: x \mapsto -x;$ $f: x \mapsto -\frac{3}{5} \cdot x;$ $g: x \mapsto \frac{3}{5} \cdot x;$ $h: x \mapsto 2 \cdot x;$
- c) $e: x \mapsto 3 \cdot x;$ $f: x \mapsto -3 \cdot x;$ $g: x \mapsto \frac{3}{2} \cdot x;$ $h: x \mapsto -\frac{3}{2} \cdot x;$

12

Írd fel a grafikonokkal adott hozzárendelések szabályát!



13

- a) Egy szigetről északi irányban elindul egy hajó, és 4 percenként 1 km-t tesz meg. Egészítsd ki a táblázatot!

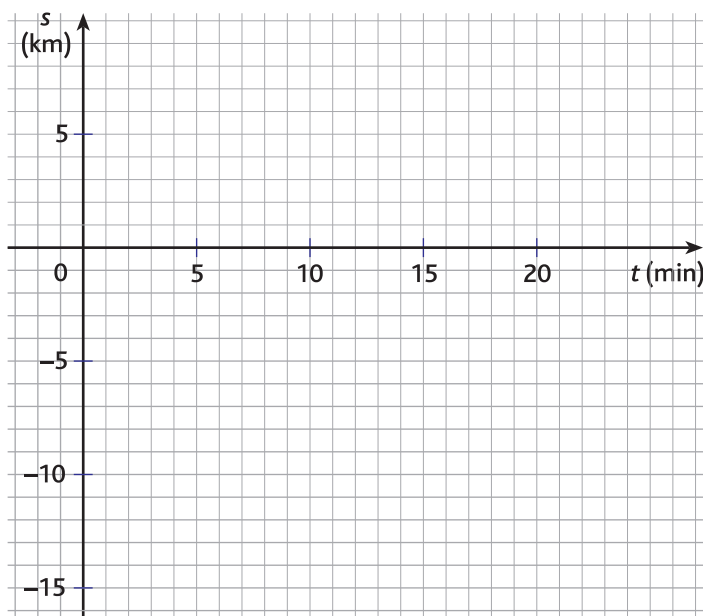
Milyen összefüggés van az idő és a hajó elmozdulása között? **Legyen az északi irány pozitív.**

t (min)	0	4	8	12	16	20
s (km)	0	1				

- b) A szigetről déli irányban is elindul egy hajó, és 5 percenként 3 km-t tesz meg. Egészítsd ki a táblázatot! Milyen összefüggés van az idő és a hajó elmozdulása között? **Legyen a déli irány negatív.**

t (min)	0	5	10	15	20	25
s (km)	0	-3	-6			

- c) Rajzold meg közös koordináta-rendszerben a két hajó mozgásgrafikonját! A két hajó egyszerre indul. Keres kapcsolatot az összetartozó értékpárok aránya és a grafikon meredeksége között!



LINEÁRIS FÜGGVÉNY

FELADATOK

14

Nicolas és Perronelle Flamel két különböző sóoldatot hevítenek az örök élet elixírjéhez, azonos és kedvező körülmények között. Mindkét oldat hőmérséklete 4 percenként 3 °C-kal nő.

Készíts ilyen értéktáblázatot! Írd le kifejezéssel az eltelt idő és az oldatok hőmérséklete közti összefüggést!

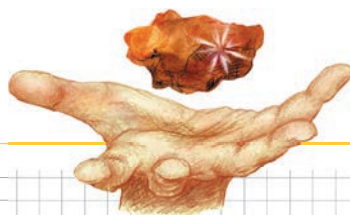
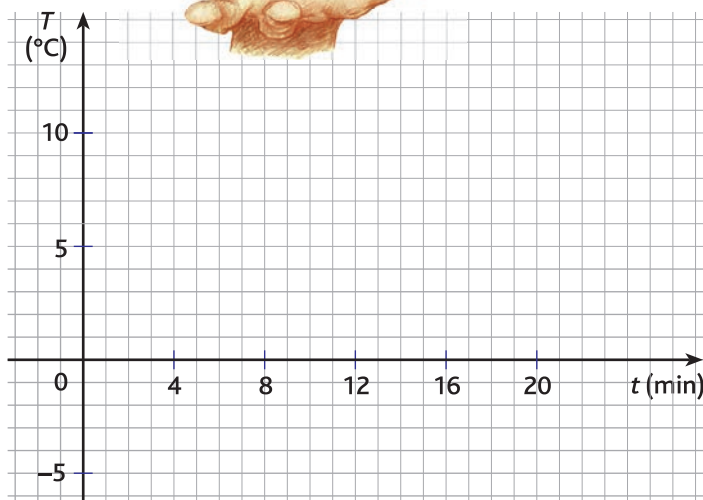
- a) Az (1) oldat kezdeti hőmérséklete 0 °C volt.

Idő (min)	0	4	8	12	16
Hőmérséklet (°C)	0				

- b) A (2) oldat kezdeti hőmérséklete -2 °C volt.

Idő (min)	0	4	8	12	16
Hőmérséklet (°C)	-2				

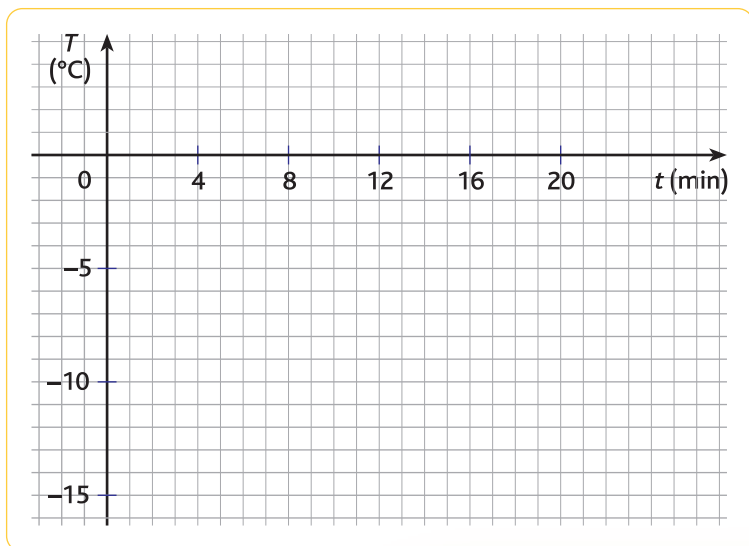
Ábrázold közös koordináta-rendszerben, majd hasonlítsd össze a két függvény grafikonját!



Harry Potter miatt most sokan ismerik Nicolas Flamel nevét, de kevesen tudják, hogy valóban élt. Flamel (kb. 1330–1418) francia írnok, másoló, író, kézirat-kereskedő, de leginkább alkímistaként vált híressé. A legenda szerint ő készítette el feleségével a Bölcsék követét, amitől halhatatlanná vált. A híresztelésre az adott okot, hogy jóval a halála után még mindig az ő neve alatt jelentek meg alkímista művek.

15

Két különböző hőmérsékletű sóoldatot hűtenek azonos körülmények között. Mindkét oldat hőmérséklete 4 percenként 3 °C-kal csökken.



Készíts ilyen értéktáblázatot! Írd le kifejezéssel az eltelt idő és az oldatok hőmérséklete közti összefüggést!

a) Az (1) oldat kezdeti hőmérséklete 0 °C volt.

Idő (min)	0	4	8	12	16
Hőmérséklet (°C)	0				

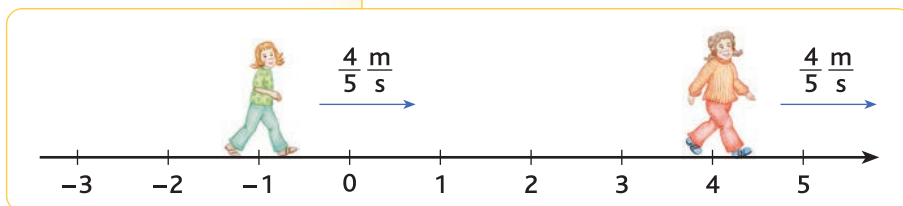
b) A (2) oldat kezdeti hőmérséklete +4 °C volt.

Idő (min)	0	4	8	12	16
Hőmérséklet (°C)	+4				

Ábrázold közös koordináta-rendszerben, majd hasonlítsd össze a két függvény grafikonját!

1. példa

Edina és Flóra ugyanolyan tempóban halad egy úton, 1 s alatt $\frac{4}{5}$ m-t tesznek meg. Flóra 5 m-rel Edina előtt jár.



Hogyan függ az időtől a megfigyelési ponthoz viszonyított helyzetük, ha az órát akkor indítjuk, amikor Edina a megfigyelőponthoz ér?

A megfigyelés kezdő időpontja előtt és után egyaránt vizsgáljuk a mozgást. A két gyerek eleinte közeledett a megfigyelőhöz, majd túlhaladtak rajta, ezért az időadatokat és a távolságadatokat célszerű minden számra értelmeznünk.

Állapodjunk meg: A megfigyelés kezdete előtti időpontok mérőszáma negatív, az ez utáni időpontoké pozitív; a gyerekek mozgásiránya pozitív.

Az Edina mozgását leíró függvényt jelölje: e

t (s)	-2	-1	0	1	2	t
e (m)	$\frac{4}{5} \cdot (-2)$	$\frac{4}{5} \cdot (-1)$	$\frac{4}{5} \cdot 0$	$\frac{4}{5} \cdot 1$	$\frac{4}{5} \cdot 2$	$\frac{4}{5} \cdot t$

$$e: t \mapsto \frac{4}{5} \cdot t$$

Az e függvény egyenes arányosság, a grafikonja az origóra illeszkedő egyenes. Ennek az egyenesnek meredekségét az összetartozó értékpárok aránya határozza meg:

$$a = \frac{4}{5}$$

A Flóra mozgását leíró függvényt jelölje: f

t (s)	-2	-1	0	1	2	t
e (m)	$\frac{4}{5} \cdot (-2) + 5$	$\frac{4}{5} \cdot (-1) + 5$	$\frac{4}{5} \cdot 0 + 5$	$\frac{4}{5} \cdot 1 + 5$	$\frac{4}{5} \cdot 2 + 5$	$\frac{4}{5} \cdot t + 5$

$$f: t \mapsto \frac{4}{5} \cdot t + 5$$

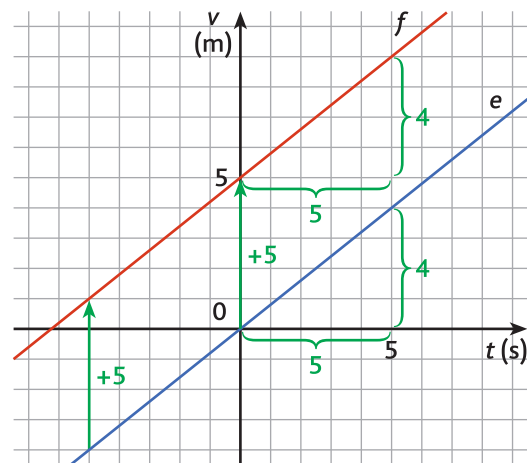
»»

»»

Flóra minden időpillanatban 5 m-rel Edina előtt jár, ezért az f függvény minden időponthoz 5-tel nagyobb értéket rendel, mint az e függvény. Az f függvény grafikonját úgy kapjuk, hogy az e függvény grafikonját 5 egységgel eltoljuk az y tengellyel párhuzamosan pozitív irányban.

Az f függvény grafikonja egy olyan egyenes, amely az y tengelyt a +5 pontban metszi, és amelynek a meredeksége megegyezik az e egyenes arányosság grafikonjának a meredekségével: $a = \frac{4}{5}$

Az f függvény **nem egyenes arányosság**, mert az összetartozó értékpárok hányadosa nem állandó.



2. példa

Alkoholt hűtünk. A hőmérséklete percenként egyenletesen 2 °C-kal csökken. Az órát akkor indítjuk, amikor az alkohol

a) 0 °C-os;

b) 6 °C-os.

Írjuk le képlettel az idő és a hőmérséklet kapcsolatát mindkét folyamatban.

Rajzoljuk meg és hasonlítsuk össze a két függvény grafikonját.

a) Foglaljunk táblázatba néhány összetartozó értékpárt:

t (s)	0	1	2	3	4	10	t
T (°C)	0	-2	-4	-6	-8	-20	$-2 \cdot t$

A hozzárendelés szabályának különböző alakjai:

$$f: t \mapsto -2 \cdot t; \quad f(t) = -2 \cdot t; \quad T = -2 \cdot t$$

b) Foglaljunk táblázatba néhány összetartozó értékpárt:

t (s)	0	1	2	3	4	10	t
T (°C)	6	4	2	0	-2	-14	$-2 \cdot t + 6$

A függvény minden időponthoz 6-tal nagyobb értéket rendel hozzá, mint az a) feladatban vizsgált egyenes arányosság.

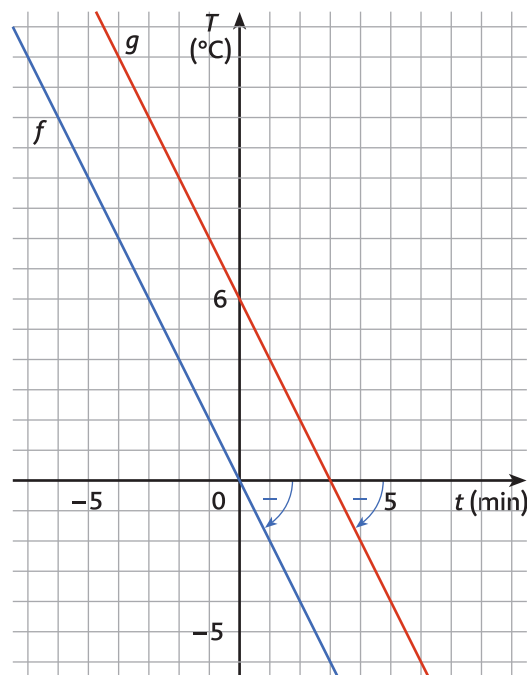
A hozzárendelés szabályának különböző alakjai:

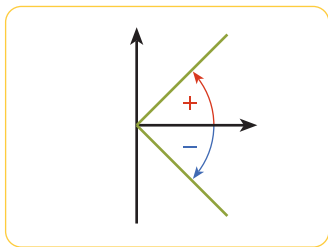
$$g: t \mapsto -2 \cdot t + 6; \quad f(t) = -2 \cdot t + 6; \quad T = -2 \cdot t + 6$$

A két függvény grafikonja két egymással párhuzamos egyenes.

Az f egyenes arányosságban az összetartozó értékpárok aránya negatív szám: $a = -2$, ezért az egyenesek negatív szöget zárnak be a t tengely (a vízszintes tengely) pozitív irányával.

Az f egyenes arányosság grafikonja az origóban metszi a T (a függőleges) tengelyt, a g függvényé a +6 pontban.

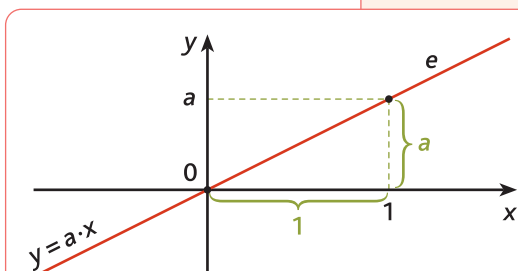




Figyeld meg! Amikor a szögnek nemcsak a nagyságát, hanem az irányát is figyelembe kell vennünk, akkor megállapodás szerint az óramutató járásával megegyező elfordulást negatívnak, az azzal ellentétes irányú elfordulást pozitívnak tekintjük.

Az előző példákban vizsgált függvények mindegyikét egy-egy egyenes arányossággal hasonlítottuk össze.

AZ EGYENES ARÁNYOSSÁG



Az egyenes arányosság az értelmezési tartomány minden x eleméhez hozzárendeli annak a -szorosát, ezért a hozzárendelés szabálya ilyen alakban írható:

$$e: x \mapsto a \cdot x \quad \text{vagy}$$

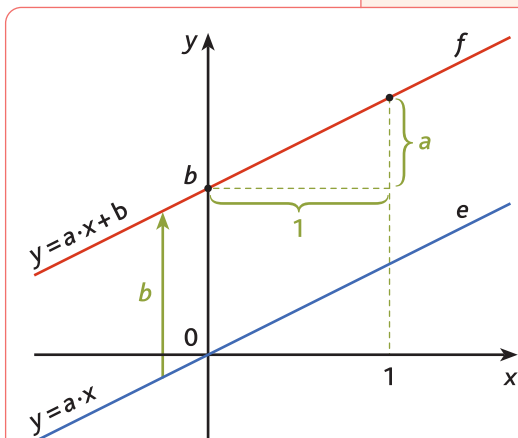
$$e(x) = a \cdot x \quad \text{vagy}$$

$$y = a \cdot x$$

Az egyenes arányosság grafikonja egy az origóra illeszkedő egyenes (vagy ennek az egyenesnek bizonyos pontjai).

A példákban vizsgált függvények az értelmezési tartomány minden x eleméhez hozzárendelik az $a \cdot x$ és egy b érték összegét (az $a \neq 0$, a b lehet 0 is).

AZ ELSŐFOKÚ FÜGGVÉNY



Elsőfokú függvénynek nevezzük a szám-szám függvényt, ha megadható a következő alakban:

$$f: x \mapsto a \cdot x + b \quad (a \neq 0) \quad \text{vagy}$$

$$f(x) = a \cdot x + b \quad (a \neq 0) \quad \text{vagy}$$

$$y = a \cdot x + b \quad (a \neq 0)$$

Az „elsőfokú függvény” elnevezés azt jelzi, hogy a változó (az x) az első hatványon fordul elő.

Az így származtatott függvény grafikonját az egyenes arányosság grafikonjából úgy kapjuk, hogy az egyenest eltoljuk az y irányába b -vel. Vagyis ennek a függvénynek a grafikonja és az $e(x) = a \cdot x$ egyenes arányosság grafikonja egymással párhuzamos egyenesek.

A függvény grafikonja a b pontban metszi az y tengelyt.

© Ábrázold közös koordináta-rendszerben a kétféle tarifa szerinti költség alakulását!



Egy presszóban kétféle tarifa szerint lehet videógolfot játszani: Minden megkezdett 30 percért 0,80 €-t fizetünk, illetve 0,60 € belépti díj megfizetésén túl percenként további 0,02 €-t kérnek. Mikor melyik tarifát érdemes választanunk?

FELADATOK

- 16 Egy kerékpáros tőlünk 25 m távolságról indul el egy egyenes úton, és 2 másodpercenként 9 m-t távolodik. Mekkora távolságra lesz tőlünk

10 másodperc; 15 másodperc; 60 másodperc; 315 másodperc múlva?

Hány másodperc múlva lesz 70 m; 205 m; 209,5 m távolságra?

- 17 Egy csapból egy tartályba másodpercenként 2 l víz folyik. Mennyi víz van a tartályban 1 s; 2 s; 3 s; ... múlva, ha a csap megnyitásakor

a) a tartály üres volt;

b) a tartályban 3 l víz volt?

Készíts mindkét feladathoz értéktáblázatot! Írd le kifejezéssel a mennyiségek közti összefüggést! Hasonlítsd össze a két képletet!

Ábrázold közös koordináta-rendszerben, majd hasonlítsd össze a két függvény grafikonját!

☉ *Használd a szokásos jelölést!*

- 18 Egy tartályban 200 l víz van. A tartály alján megnyitnak egy csapot, amelyen át másodpercenként 2,5 l víz kifolyik.

Mennyi víz lesz a tartályban a csap megnyitása után

1 s; 10 s; 37 s; 80 s; 120 s múlva?

Írd le kifejezéssel az eltelt idő és a tartályban lévő vízmennyiség közti összefüggést!

- 19 Rajzold meg (feladatonként) közös koordináta-rendszerben és hasonlítsd össze a függvények grafikonját!

a) $f: x \mapsto \frac{1}{3} \cdot x;$

$g: x \mapsto \frac{1}{3} \cdot x + 3;$

$h: x \mapsto \frac{1}{3} \cdot x - 4;$

b) $f: x \mapsto -\frac{3}{5} \cdot x;$

$g: x \mapsto -\frac{3}{5} \cdot x + 3;$

$h: x \mapsto -\frac{3}{5} \cdot x - 4;$

c) $f: x \mapsto 3 \cdot x;$

$g: x \mapsto 3 \cdot x + 3;$

$h: x \mapsto 3 \cdot x - 4;$

d) $f: x \mapsto -2 \cdot x;$

$g: x \mapsto -2 \cdot x + 3;$

$h: x \mapsto -2 \cdot x - 4$

☉ *Mikor használunk „talpas nyilat”?*

Milyen viszonyban vannak egymással az egyes függvények grafikonjai?



Anna egy erdei út kezdőpontjától indulva az első félórán negyedóránként 1 km-t megtéve gyalogolt, majd a következő félórán 4 km-t megtéve egyenletes tempóban kocogott. Ekkor egy kilátóhoz ért, ahol 1 óra hosszat pihent és gyönyörködött a tájban. Ezután visszaindult, és egyenletes sebességgel haladva pontosan 1 óra alatt vissza is ért a kiindulási ponthoz.

Balázs ugyanezen az úton háromnegyed órával korábban indult el, mint Anna, és egyenletes tempóban, háromnegyed óránként 2 km-t megtéve, pihenés nélkül sétálva haladt előre.

a) Találkozott-e Balázs Annával? Ha igen, akkor éppen mit csinált Anna?

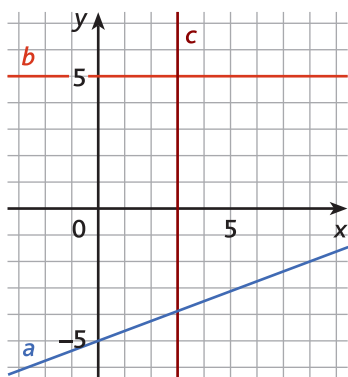
b) Az utolsó órában hogyan jellemeznéd Anna mozgását?

A: Anna rohant; B: Anna sietett; C: Anna sétált.

Figyelempróba

☉ *Ábrázold közös koordináta-rendszerben, majd hasonlítsd össze a két túrázó mozgását leíró függvény grafikonját!*

3. példa

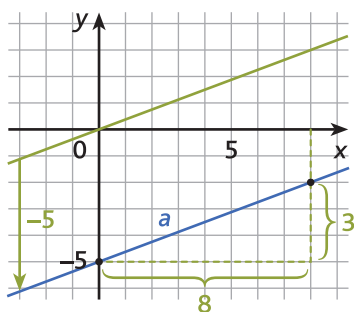


Írjuk fel kifejezéssel a grafikonjukkal adott függvények szabályát!

Melyik elsőfokú függvény közülük?

Az alaphalmaz és a képhalmaz a racionális számok halmaza.

Figyeld meg jól! Vajon mindegyik egyenes függvénygrafikon?

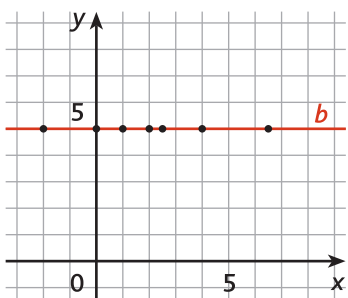


- a** Az a egyenes párhuzamos egy olyan egyenes arányosság grafikonjával (az ábrán zölddel megrajzolva), amelyben az összetartozó értékpárok hányadosa, az egyenes meredeksége: $\frac{3}{8}$

Az egyenes a -5 pontban metszi az y tengelyt.

Ez az egyenes a következő elsőfokú függvény grafikonja:

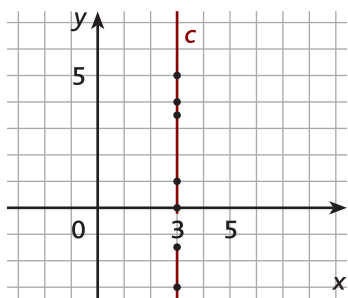
$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}; \quad x \mapsto \frac{3}{8} \cdot x - 5$$



- b** A b egyenes párhuzamos az x tengellyel. A függvény minden x értékhez ugyanazt a számot rendeli hozzá:

Ennek a függvénynek a képe egyenes, de ez **nem elsőfokú függvény**.

Ha $x \neq 0$, akkor $x^0 = 1$, vagyis $x \mapsto 5$ felírható $x \mapsto 5 \cdot x^0$ alakban (ha $x \neq 0$). Ezért ezt a függvényt **nulladfokú függvénynek** vagy **konstans függvénynek** nevezzük.



- c** A c egyenes párhuzamos az y tengellyel.

Ez a hozzárendelés nem függvény, mert egyetlen x értékhez végtelen sok számot rendel.

Ez az egyenes az $x = 3$ egyenlettel jellemezhető, mert minden pontjának az első jelzőszáma 3.



Melyik igaz, melyik hamis a két állítás közül?

A: Minden lineáris függvény elsőfokú függvény.

B: Minden egyenes lineáris függvény grafikonja.

Összegzés

Az elsőfokú függvényt és a nulladfokú függvényt együtt lineáris függvénynek nevezzük.

A lineáris függvény szám-szám függvény, és a hozzárendelés szabálya a következő alakokban adható meg:

$$f: x \mapsto a \cdot x + b \quad \text{vagy} \quad f(x) = a \cdot x + b \quad \text{vagy} \quad y = a \cdot x + b$$

(az a és b is lehet 0).

Az egyenes arányosság speciális lineáris függvény ($b = 0$).

A konstans függvény speciális lineáris függvény ($a = 0$).

A „lineáris” szó arra utal, hogy a függvény grafikonja egyenes. Mégpedig olyan egyenes, amely nem párhuzamos az y koordinátatengellyel.

☉ **Emlékeztető:** A függvény egyértelmű megfeleltetés, az értelmezési tartomány minden eleméhez a képhalmaz pontosan egy elemét rendeli hozzá.

FELADATOK

20

Rajzold meg a következő lineáris függvények grafikonját!

Az alaphalmaz és a képhalmaz a racionális számok halmaza.

a) $x \mapsto \frac{2}{5} \cdot x$;

b) $x \mapsto \frac{2}{5} \cdot x + 4$;

c) $x \mapsto \frac{2}{5} \cdot x - 3$;

d) $x \mapsto -\frac{2}{5} \cdot x$;

e) $x \mapsto -\frac{2}{5} \cdot x - 4$;

f) $x \mapsto -\frac{2}{5} \cdot x + 3$;

g) $x \mapsto -0,8 \cdot x$;

h) $x \mapsto -0,8 \cdot x - 4,5$;

i) $x \mapsto -0,8 \cdot x + 3,2$;

j) $x \mapsto -3 \cdot x + 4$;

k) $x \mapsto 0,5 \cdot x + 4$;

l) $x \mapsto 8 \cdot x + 4$

Gyakorló

2.23–2.30.;

Feladatgyűjtemény
3.2.04–11.

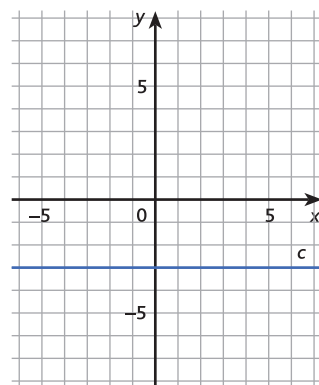
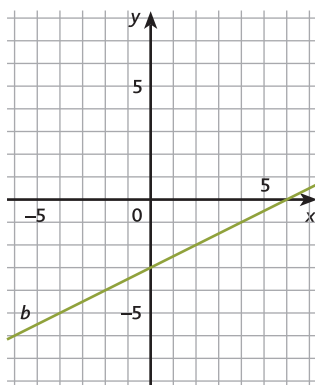
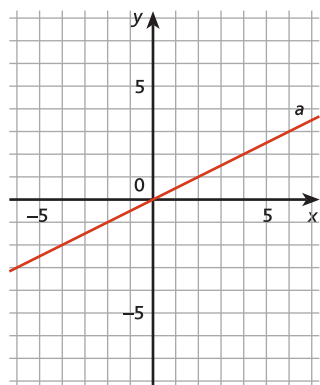
21

Grafikonjukkal adtuk meg a függvényeket. Írd fel a hozzárendelés szabályát!

Melyik lineáris függvény közülük?

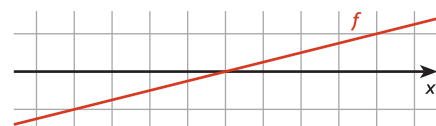
Melyik elsőfokú, melyik nulladfokú függvény közülük?

Melyik egyenes arányosság közülük?



Rajzold be az y tengelyt a koordináta-rendszerbe, ha a

ferde egyenes a $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ függvény grafikonja!



22

Gréta DVD-ket rendel, darabját 12,80 €-ért. Mennyibe kerül 1, 2, 3, ... darab DVD, ha 8 € egyszeri csomagolási és postaköltséget is felszámolnak?

a) A költségeket foglalld táblázatba!

Darabszám	1	2	3				
Költség (€)							

b) Mennyit kellene fizetnie 15 db DVD-ért?

c) Legfeljebb hány darabot rendelhet, ha 100 €-nál nem akar többet költeni?



A SOROZAT MINT FÜGGVÉNY

Értelmezések

A sorozat olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza.

Az 1-hez rendeljük a sorozat első elemét, a 2-höz a sorozat második elemét, a 3-hoz a sorozat harmadik elemét stb.

1. példa

Egy sorozat első eleme: $a_1 = 3$.

A sorozat minden további elemét úgy kapjuk, hogy az előző elemhez 2-t adunk.

Határozzuk meg a sorozat 2., 3., 4., majd a 100. elemét.

Fogalmazzuk meg a hozzárendelés szabályát.

A sorozatnak

az első eleme: $3 + 0 \cdot 2 = 3$; $a_1 = 3$

a második eleme: $3 + 1 \cdot 2 = 5$; $a_2 = 5$

a harmadik eleme: $3 + 2 \cdot 2 = 7$; $a_3 = 7$

a negyedik eleme: $3 + 3 \cdot 2 = 9$; $a_4 = 9$

⋮

az n -edik eleme: $3 + (n - 1) \cdot 2$; $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2$

Az összefüggés felismerése után kiszámíthatjuk a sorozat tetszőleges elemét:

a 100. eleme: $3 + 99 \cdot 2 = 201$; $a_{100} = 201$

Figyeljük meg: Az első tag után a sorozat minden eleme egy adott értékkel nagyobb az előző elemnél. Az ilyen sorozatot **számtani sorozatnak** nevezzük.

Más írásmóddal:

$1 \mapsto 3 + 0 \cdot 2$

$2 \mapsto 3 + 1 \cdot 2$

$3 \mapsto 3 + 2 \cdot 2$

$4 \mapsto 3 + 3 \cdot 2$

$n \mapsto 3 + (n - 1) \cdot 2$



Folytasd a néhány taggal megadott sorozatokat úgy, hogy számtani sorozatok maradjanak!

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

b) 12, 34, 56, 78, ...

c) 123, 456, 789, ...

FELADATOK

23 Add meg a következő sorozatok 50. elemét!

- a) $n \mapsto 3 \cdot n$; b) $n \mapsto 3 \cdot n + 2$; c) $n \mapsto 21 - 3 \cdot n$; d) $n \mapsto 3^n$;
 e) $n \mapsto \frac{n}{2}$; f) $n \mapsto \frac{n+5}{3}$; g) $n \mapsto \frac{1}{n}$; h) $n \mapsto 3 \cdot n^2 - 2$

Gyakorló
2.38–2.39.

24 Megadtuk a sorozat néhány elemét. Keress szabályt, írd fel a sorozat következő öt elemét!

A szabály alkalmazásával számítsd ki a sorozat 15. elemét!

- a) 1; 4; 7; 10; ...; b) 2; 4; 6; 8; ...; c) 2; 4; 8; 16; ...;
 d) 8; 5; 2; -1; ...; e) 1; -1; 1; -1; ...; f) 1; 4; 9; 16; ...;
 g) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$; h) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \dots$; i) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; 1; \dots$



Mi áll képek sorozatában a 3333. helyen, ha a képek továbbra is az itt megfigyelhető szabály szerint követik egymást?

Többet ésszel!



Klári mama legfiatalabb unokája féléves. Az unokák életkorának átlaga 5 év és 9 hónap, továbbá az unokák pontosan másfél évenként követték egymást.

- a) Hány éves Klári mama legidősebb unokája?
 b) Hány unokája van Klári mamának? Hány évesek?
 c) A fél év múlva esedékes születésnapokon összesen hány gyertyát gyújtanak meg az unokák születésnapjainak tortáin?



Ödömérnek egy 3 órás kutyasétáltatást ajánlanak úgy, hogy a munkabérét a következő módon állapítják meg: Az első negyedóráért 1 cent jár. Minden további negyedóráért az előző negyedórában megállapított bér kétszerese jár. Csak az utolsó negyedóráért kapja meg a fizetést, a többi pénzből egy állatmenhelyet támogatnak.

Vajon elvállalja-e a munkát Ödömér?

© Nézz utána, hány forintot ér 1 €!



Matild április 1-jén, vasárnap felfedezte, hogy a kedvenc farmerjébe nem fér bele, így kénytelen diétázni. E naptól fogva csak annyi krémet eshet, hogy **bármely** 5 egymást követő napon 10 krémes fogyjon el. Ha az első kedden egyáltalán nem evett krémet, akkor eshet-e péntek 13-án?

© A táblázat kitöltése segítheti a helyes válasz megtalálását.

Matild már be is írta egy táblázatba, hogy mennyit fogyasztott az első 4 napon.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
V	H	K	Sz	Cs	P	Szo	V	H	K	Sz	Cs	P
3	2	0	1									

FORDÍTOTT ARÁNYOSSÁG

1. példa

Dezső 1 min (perc) alatt 100 m-t tesz meg, vagyis a sebessége $100 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.



Mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat, ha a sebessége:

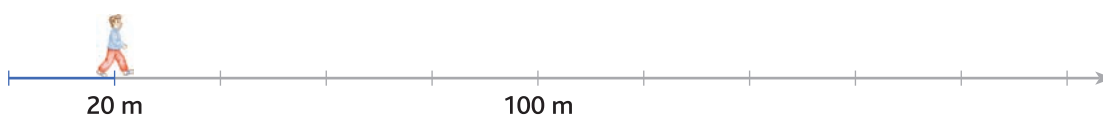
$0 \frac{\text{m}}{\text{min}}$; $20 \frac{\text{m}}{\text{min}}$; $75 \frac{\text{m}}{\text{min}}$; $150 \frac{\text{m}}{\text{min}}$; $200 \frac{\text{m}}{\text{min}}$; $400 \frac{\text{m}}{\text{min}}$; ...?

A feladat értelme alapján a sebesség mérőszáma csak pozitív lehet.

Ha Dezső sebessége $0 \frac{\text{m}}{\text{min}}$, akkor sohasem ér célba. (Nem halad, áll.)

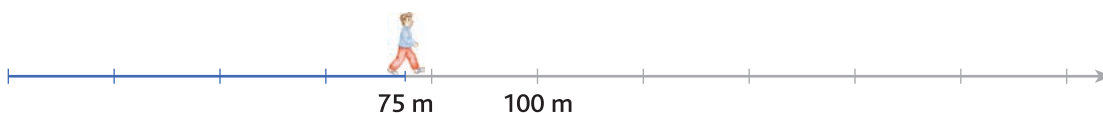
Ha Dezső sebessége az eredeti $\frac{1}{5}$ részére csökken, $20 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ lesz, akkor 5-ször annyi idő, 5 min alatt teszi meg a 100 m utat.

$$20 \cdot 5 = 100$$



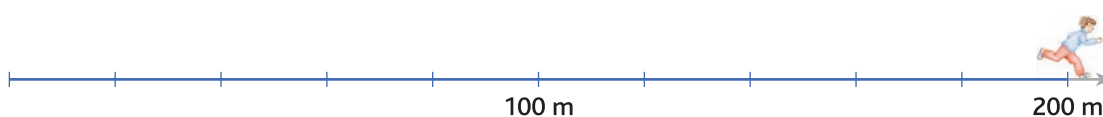
Ha Dezső sebessége az eredeti $\frac{3}{4}$ részére csökken, $75 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ lesz, akkor $\frac{4}{3}$ -szor annyi idő, $\frac{4}{3}$ min alatt teszi meg a 100 m utat.

$$75 \cdot \frac{4}{3} = 100$$



Ha Dezső sebessége az eredeti 2-szeresére nőne, $200 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ lenne, akkor $\frac{1}{2}$ -szer annyi idő, $\frac{1}{2}$ min alatt tenné meg a 100 m utat.

$$200 \cdot \frac{1}{2} = 100$$



Készítsünk táblázatot:

$v \left(\frac{\text{m}}{\text{min}} \right)$	0	10	20	50	75	100	150	200	400	500
$t \text{ (min)}$	0	10	5	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$v \cdot t \text{ (m)}$	–	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Jelölések:

Az 1 min alatt megtett út: v (sebesség);

a 100 m-es út megtételéhez szükséges idő: t



»»

Megfigyelések:

Ahányad részére csökken a sebesség, ugyanannyiszorosára nő a 100 m megtételéhez szükséges menetidő. Ahányszorosára növekszik a sebesség, ugyanannyiadrészére csökken a menetidő.

Ha a sebesség valahányszorosára változik, akkor annak reciprokszorosára változik a menetidő. Az adott út (100 m) egyenlő a sebesség és a menetidő szorzatával.

Az összefüggés leírása szabállyal:

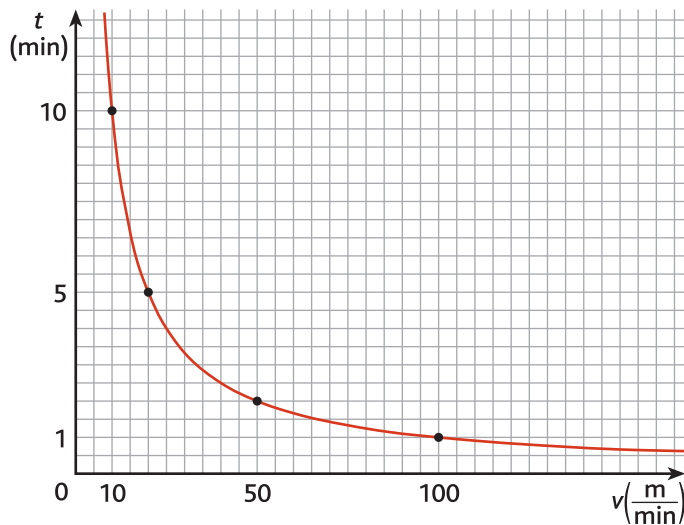
$$t = \frac{100}{v}; \quad v \cdot t = 100;$$

a megfeleltetés jelzésével:

$$v \mapsto \frac{100}{v}; \quad (v > 0)$$

Rajzoljuk meg a függvény grafikonját.

Feltételezésünk szerint Dezső sebességének mérőszáma tetszőleges pozitív szám lehet, ezért a pontokat összeköthetjük folytonos vonallal.



2. példa

Móniék málnaszörpöt készítenek. Ha 7 dl-es üvegekbe töltik, akkor 25 üveg telik meg. Hány 5 dl-es üvegben férne el ez a szörp?

1. megoldás Következtetés

Első lépésben meghatározzuk, hogy hány 1 dl-es üvegre lenne szükség, majd ebből következtünk az 5 dl-es üvegek számára:

$$\begin{array}{lcl} \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \cdot 5 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 7 \text{ dl-es üveg} \\ 1 \text{ dl-es üveg} \\ 5 \text{ dl-es üveg} \end{array} \right. & \begin{array}{l} 25 \text{ db} \\ 25 \text{ db} \cdot 7 = 175 \text{ db} \\ 175 \text{ db} : 5 = 35 \text{ db} \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} \cdot 7 \\ : 5 \end{array} \right. \end{array}$$

2. megoldás Az összetartozó értékpárok szorzata alapján

$$\begin{array}{ll} 7 \text{ dl-es üveg} & 25 \text{ db} \\ 5 \text{ dl-es üveg} & x \text{ db} \end{array}$$

Az összetartozó értékpárok szorzata megegyezik (ennyi deciliter az összes málnaszörp):

$$\begin{aligned} 5 \cdot x &= 7 \cdot 25 \\ x &= (7 \cdot 25) : 5 \\ x &= 35 \end{aligned}$$

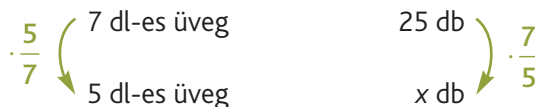


»»

3. megoldás A fordított arányosság értelmezése alapján

Ha az egyik mennyiség valahányszorosára változik, akkor a másik mennyiség annak reciprokszorosára változik.

Az 5 dl és a 7 dl aránya $\frac{5}{7}$.



$$x = 25 \text{ db} \cdot \frac{7}{5} = 35 \text{ db. Az 5 dl-es üvegből 35 db kellene.}$$

© Milyen összefüggés van egy szám és a reciproka között?

Értelmezés

Két változó mennyiség fordítottan arányos, ha az egyik mennyiség valahányszorosára változik, akkor a másik mennyiség annak reciprokszorosára változik.

Fordítottan arányos mennyiségek összetartozó értékpárjainak szorzata nullától különböző állandó. A 0-ra nem értelmezhető az összefüggés.

FELADATOK

Gyűjtőmunka

25

Mondj fordítottan arányos mennyiségeket!

© Hány negyed az 1,25?

26

Egy 100 m^2 területű téglalap egyik oldalát

- a) felére csökkentjük; b) háromszorosára növeljük;
- c) 1,25-szorosára változtatjuk; d) $\frac{2}{3}$ -szorosára változtatjuk.

Hogyan kell megváltoztatni a téglalap másik oldalát, hogy a területe ne változzék?

Figyelempróba

© Mi a különbség a két gyakorlati feladat matematikai modellje közt?

Vizsgáld mindkét esetben, hogy mi az alaphalmaz?

27

Ábrázold mindkét esetben az összefüggés grafikonját!

- a) Ha egy adott teljesítményű csapot nyitnak meg, akkor 12 óra alatt telik meg a medence. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha 2; 3; 4; 5; ... ugyanilyen teljesítményű csapot nyitnak meg?
- b) Egy változtatható teljesítményű csap bizonyos állásában a medence 12 óra alatt telik meg. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha a csap teljesítményét 1,5-szeresére; 2-szeresére; 3-szorosára; 0,2-szeresére; ... változtatjuk?

Figyelempróba

© Ha nem értesz egyet vele, mondj ellenpéldát!



Ödömér szerint, ha az egyik mennyiség növekszik és a másik mennyiség csökken, akkor a két mennyiség között biztosan fordított arányosság van. Vajon igaza van-e Ödömérnek?

28

Válaszd ki a fordítottan arányos mennyiségeket! Fordított arányosság esetén számítsd ki a hiányzó mennyiségeket!

- a) Egy kertet 3 munkás 5 nap alatt ás fel. Hány nap alatt ásná fel ugyanezt a kertet ugyanilyen teljesítménnyel
- | | | |
|-----------|-----------|------------|
| 1 munkás; | 6 munkás; | 10 munkás; |
|-----------|-----------|------------|
- 300 000-ren hány nap alatt végeznék el ezt a munkát? **Elképzelhető-e ez?**
- b) Angéla 12 kg almát vásárolt, kilogrammját 250 Ft-ért. Mennyi almát vásárolhatott volna ugyanennyi pénzért a piacon, ahol 1 kg alma ára 150 Ft volt?
- c) Egy tehenészetben 6,4 t abrakot tárolnak. 12 napi etetés után 4 t abrak marad. Hány tonna abrak marad további 8 napi etetés után, ha nem változott a naponta felhasznált abrakmennyiség?
- d) Egy autófényező üzemben 30 napra elegendő festéket tárolnak. Hány napra elegendő ez a festék, ha a termelés 1,2-szeresére növekszik; ha a termelés 0,75-szorosára csökken?
- e) 1,2 m magas, 45 m hosszú kerítés befestéséhez elegendő a festékem. Milyen hosszan festhetek be ezzel a festékmennyiséggel egy 1,5 m magas kerítést; 0,8 m magas kerítést?

29

Állapítsd meg, hogy az előforduló mennyiségek között egyenes vagy fordított arányosság, illetve lineáris függvénykapcsolat van-e!

- a) Alberték kirándulni mentek. Megállás nélkül, egyenletes tempóban haladtak, és óránként 3 km-t tettek meg.
- Hány kilométert tettek meg $\frac{1}{3}$ óra alatt; $1\frac{2}{3}$ óra alatt; 3 óra alatt?
- Mennyi idő alatt tettek meg 0,5 km-t; 7,5 km-t; 12 km-t?
- b) Bea sétálva óránként 3 km-t halad, és 2 és fél óra alatt ér a szomszéd faluba. Mennyi idő alatt ér oda, ha siet, és óránként 4,5 km-t halad?
- Mennyi idő alatt ér oda kerékpárral, ha óránként 15 km-t halad?
- c) Egy üzemben az oldószert 15 db húszliteres kannában tárolják. Ez a mennyiség hány 50 l-es hordóban; 1,5 l-es palackban; 150 l-es kádban férne el?
- Az oldószert dobozokba töltötték át, 50 doboz telt meg. Hány literesek a dobozok?

Figyelempróba

☉ **Többféle megoldási terv alapján számolhatsz!**

☉ **Hogyan szemléltethetnéd a feladat megoldását?**



Gyakorló
2.40.;
Feladatgyűjtemény
2.4.14–19.



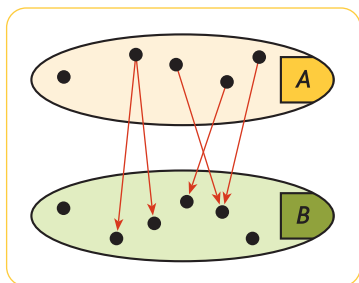
Fordított arányosság van

- ① Aladár pénze és az eltelt napok száma között, ha kezdetben 4800 Ft-ja volt, és naponta vásárolt egy-egy szendvicset 200 Ft-ért;
- ② az uzsonnák száma és az uzsonnák (200 Ft-os, 300 Ft-os, 400 Ft-os), ára között, ha Boldizsárnak 4800 Ft-ja van, és naponta ugyanannyiért vásárol uzsonnát;
- ③ egy $T = 36 \text{ cm}^2$ területű téglalap két szomszédos, a és b oldala között;
- ④ egy $K = 36 \text{ cm}$ kerületű téglalap két szomszédos, a és b oldala között;
- ⑤ egy $V = 360 \text{ cm}^3$ térfogatú téglalest két szomszédos, a és b éle között, ha a téglalest alaplapja négyzet, és éleinek a hossza a , a , b .

Fejtörő!

☉ **Írj a fehér téglalapba I, illetve H betűt, annak megfelelően, hogy igaz-e vagy hamis az állítás! Indokold meg a választod! Írd fel az összefüggés szabályát is!**

GYAKORLÓ- ÉS FEJTÖRŐ FELADATOK



☉ Milyen függvények ezek?

B1 a) Nyíldiagrammal adott egy megfeleltetés. Legfeljebb két módosítással alakítsd át úgy, hogy függvényt szemléltessen, és az A halmaz legyen az értelmezési tartománya!

b) Milyen relációt nevezünk függvénynek?

B2 Rajzold meg (feladatonként) közös koordináta-rendszerben a függvények grafikonját! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

a) $x \mapsto x$; $x \mapsto x - 4$; $x \mapsto x + 2$; $x \mapsto -x$;
b) $x \mapsto x + 3$; $x \mapsto 2 \cdot x + 3$; $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x + 3$; $x \mapsto -\frac{3}{2} \cdot x + 3$

B3 Az adott $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ függvények esetén számítsd ki a következő x értékekhez tartozó függvényértéket!

$x = \frac{1}{2}$;	$x = -\frac{1}{2}$;	$x = 2\frac{3}{4}$;	$x = -\frac{7}{5}$;	$x = \frac{12}{25}$;	$x = 0$
$a(x) = 2 \cdot x - \frac{5}{8}$;	$b(x) = \frac{8}{5} \cdot x + \frac{4}{6}$;	$c(x) = x : \frac{6}{5} + \frac{45}{64}$			

***B4** Rajzold meg annak a függvénynek a grafikonját, és add meg a leképezés szabályát, amelynek a grafikonja

- a) párhuzamos az $f(x) = -\frac{3}{5} \cdot x$ függvény grafikonjával, és **illeszkedik** a $P(0; -4)$ pontra;
b) párhuzamos az $f(x) = \frac{2}{7} \cdot x$ függvény grafikonjával, és **illeszkedik** a $P(7; 4)$ pontra;
c) merőleges az $f(x) = -\frac{4}{5} \cdot x$ függvény grafikonjára, és **illeszkedik** az origóra;
d) merőleges az $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x$ függvény grafikonjára, és **illeszkedik** a $P(0; 5)$ pontra;
e) párhuzamos az $f(x) = 5$ függvény grafikonjával, és **illeszkedik** az origóra;
f) merőleges az $f(x) = 5$ függvény grafikonjára, és **illeszkedik** az origóra!

B5 Melyik lineáris függvény, melyik egyenes arányosság, melyik fordított arányosság? A lineáris függvényeknek rajzold meg a grafikonját! Az alaphalmaz és a képhalmaz a $\mathbb{Q}$.

a) $x \mapsto -\frac{3}{4} \cdot |x|$; b) $x \mapsto \frac{3}{4} \cdot x$; c) $x \mapsto \frac{2}{5} \cdot x - \frac{3}{5}$;
d) $x \mapsto \frac{1}{x}$; e) $x \mapsto -x$; f) $x \mapsto \frac{x+4}{2}$;
g) $x \mapsto 3 - \frac{7}{4} \cdot x$; h) $x \mapsto x^2$

☉ A függvények közül melyik egyenes arányosság?

☉ Melyik függvény nem sorolható egyik csoportba sem?

B6

Melyik egyenes arányosság, melyik fordított arányosság?

Mi az értelmezési tartománya, illetve a képhalmaza?

Írd le kifejezéssel (képlettel) a változók közti összefüggést!

A képletet alkalmazva határozd meg a keresett értékeket!

a) Ha 6 db tojás ára 210 Ft, akkor mennyibe kerül 1 db; 2 db; 15 db tojás?

Hány tojás kerül 105 Ft-ba; 315 Ft-ba; 1470 Ft-ba?

b) Vettünk 3 kg narancsot, kilogrammját 0,80 €-ért.

Mennyi narancsot vásárolhattunk volna kilogrammonként 0,48 €-s áron ugyanennyi pénzért?

c) Egy kerékpáros 1 perc alatt 300 m utat tesz meg.

Mekkora utat tesz meg 1 s; 5 s; 30 s alatt?

Hány másodperc alatt tesz meg 100 m-t?

d) Egy kifőzde raktárában 350 ember részére 18 napra elegendő burgonyát tárolnak.

Hány napra elegendő ez a burgonyamennyiség, ha további 70; 100 ember étkeztetéséről is gondoskodniuk kell, illetve ha 50 ember máshová megy étkezni?

☉ *Érdeklődd meg, hogy mennyibe kerül ténylegesen egy tojás!***B7**

a) Egy téglalap szomszédos oldalai 5 cm és 8 cm. Hogyan változik a téglalap területe és kerülete, ha a kisebbik oldalát 20%-kal csökkentjük, a másikat 25%-kal növeljük?

b) Egy 10 cm-es oldalú négyzet egyik oldalát 40%-kal növeljük, a másikat valamennyivel csökkentjük úgy, hogy ugyanakkora területű téglalapot kapunk. Mekkora ennek a téglalapnak a kerülete?

c) Egy munkacsapat 8 óra alatt végez el egy bizonyos munkát. Mennyi idő alatt végzik el ezt a munkát, ha a munka jobb megszervezésével 60%-kal nő a teljesítményük?

d) Egy teherautó 100 km-en 18 l gázolajat fogyaszt. Hány litert fogyaszt 100 km-en, ha a motor jobb beállításával 15%-kal csökken a fogyasztása?

☉ *A feladatok megoldása előtt végezz becslést!***B8****Keresd a függvénykapcsolatot!**

a) Mennyi só van 10 g; 25 g; 100 g; 256 g; x g 16%-os sóoldatban?

b) 100 g sóoldatban 25 g só van.

Mennyi só van 20 g; 60 g; 200 g ugyanilyen töménységű sóoldatban?

Mennyi sóoldatban van 7,5 g; 87,5 g; 200 g só?

Hány százalékosak ezek az oldatok?

c) Mennyi só van 500 g sóoldatban, ha az oldat

1%-os; 10%-os; 15%-os; 35%-os; 54%-os; 62,5%-os; x%-os?

d) Hány százalékos lesz a keverék, ha 100 g 40%-os sóoldathoz

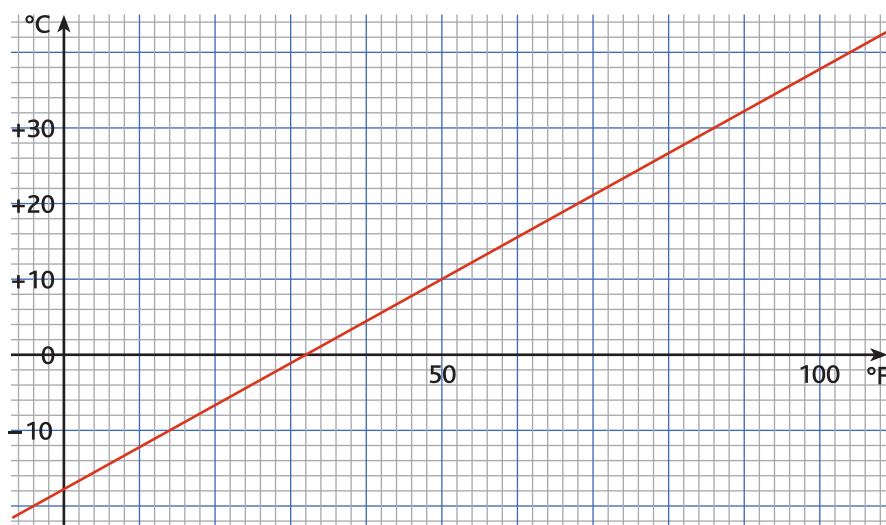
50 g; 100 g; 300 g; 900 g 20%-os sóoldatot öntenek?

e) 100 g ismeretlen töménységű sóoldathoz 200 g 40%-os oldatot kevernek, így 50%-os oldatot kapnak. Milyen töménységű volt a 100 g oldat?

f) Valamennyi 25%-os sóoldathoz 15 g vizet tesznek, így 20%-os oldatot kapnak. Hány gramm 25%-os oldatból indultak ki?

B9

A grafikonról leolvasható, hogy milyen kapcsolat van a hőmérséklet Celsius-fokban, illetve Fahrenheit-fokban mért adatai között.



A Fahrenheit hőmérséklet-skálát az angolszász országokban használják.

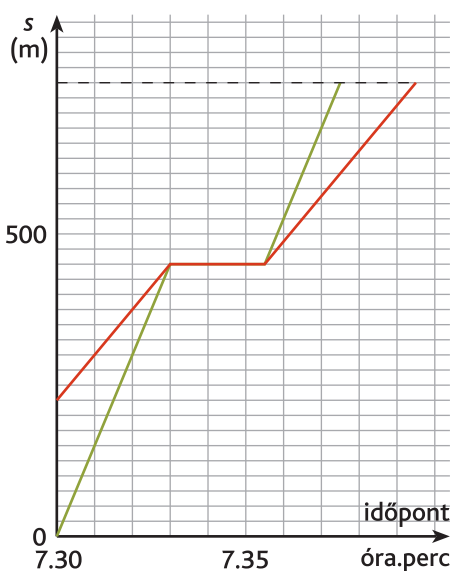
a) Andi hőmérséklete 100 °F volt. Körülbelül hány Celsius-fok volt a hőmérséklete?

- A: 34,5 °C; B: 37,8 °C;
C: 39,8 °C; D: 50,0 °C

b) Hány Fahrenheit-fok van, amikor megfagy a víz?

- A: -17,8 °F; B: -10,0 °F;
C: 0,0 °F; D: +32 °F

© Karikázd be a helyes válaszok betűjelét!



B10

Andor és Bea ugyanabban az utcában lakik. Andorék háza közelebb van az iskolához, mint Beáéké. Fél nyolckor indultak el az iskolába, Andor gyalog, Bea kerékpárral. Amikor találkoztak, megálltak beszélgetni, majd folytatták az útjukat.

a) Mekkora a távolság Andorék és Beáék lakása között?

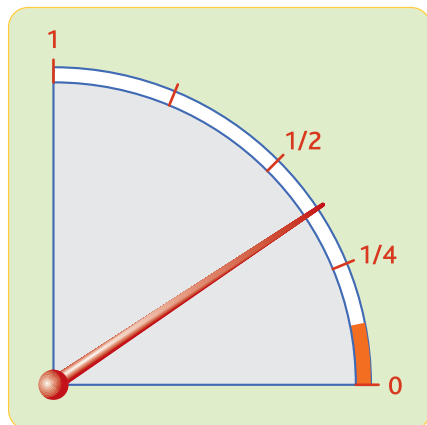
- A: 90 m; B: 180 m; C: 225 m; D: 450 m

b) Hány percre beszélgettek?

- A: 2 percre; B: 2,5 percre; C: 3 percre; D: 3,5 percre

c) Az elindulás után melyik képlet írja le Andor mozgását? Az s a Beáék házától számított, méterrel mért távolság mérőszámát, a t az indulástól eltelt idő percekben adott mérőszámát jelenti.

- A: $s = 1,5 \cdot t$; B: $s = 1,5 \cdot t + 9$;
C: $s = 75 \cdot t$; D: $s = 75 \cdot t + 225$



B11

Ez a műszer azt jelzi ki, hogy egy gépkocsi 60 literes tankjának mekkora részében van még üzemanyag.

a) Körülbelül hány liter üzemanyagot fogyasztott eddig a gépkocsi, ha induláskor tele volt a tankja?

- A: 37,5 l-t; B: 45 l-t; C: 22,5 l-t; D: 15 l-t

b) Hány kilométerre elég a tankban lévő üzemanyag, ha 100 km-enként 7,5 litert fogyaszt a gépkocsi?

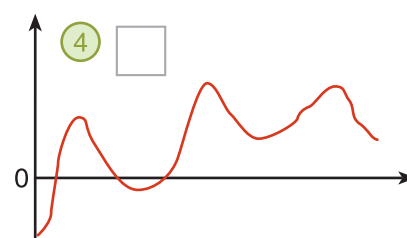
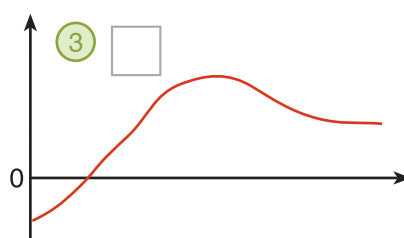
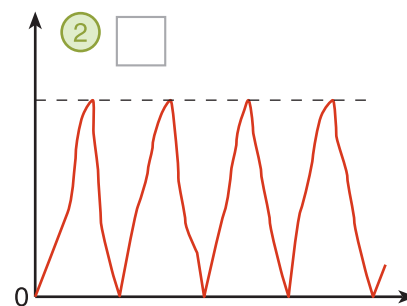
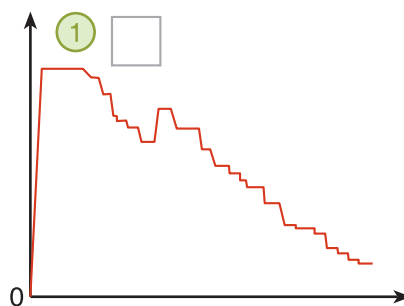
- A: 300 km-re; B: 200 km-re; C: 15 km-re; D: 1,5 km-re

c) Hány kilométerre lenne elég a tankban lévő üzemanyag, ha 100 km-enként csak 5 litert fogyasztana a gépkocsi?

- A: 200 km-re; B: 300 km-re; C: 450 km-re; D: 25 km-re.

B12 Írd be a grafikonnál található kis négyzetbe annak a történetnek, illetve jelenségnek a betűjelét, amelyet a grafikon szemléltet!

- A:** Egy úszó faltól falig úszik.
Az úszó távolságának változása a rajtkőtől.
- B:** Több napon át megfigyelt hőmérséklet-ingadozás.
- C:** Egy zöldség-gyümölcs bolt raktárkészletének változása a nap folyamán.
- D:** Egy folyó több napon át megfigyelt vízszintingadozása.



A két Lotti kétszer találkozott egymással a múlt héten. Mindkét alkalommal az ikrek egymás felé közeledtek az úton, majd miután találkoztak, mindketten visszaindultak. Azonban csak az egyik esetben történt valóban ez, a másik alkalommal szerepet cseréltek. Tudjuk, hogy mindkét alkalommal ugyanazzal a sebességgel gyalogoltak a találkozó után is, mint előtte, márpedig egyikük gyorsabb, mint a másik. Melyik grafikon melyik találkozót szemlélteti?



Ábrázold koordináta-rendszerben a következő pontokat:

$A(4; 1)$; $B(7; -5)$; $C(7; 5)$; $D(1; 7)$; $E(-3; -5)$;
 $F(-7; -3)$; $G(3; 2)$; $H(4; -4)$; $I(2; 3)$; $J(-2; 1)$

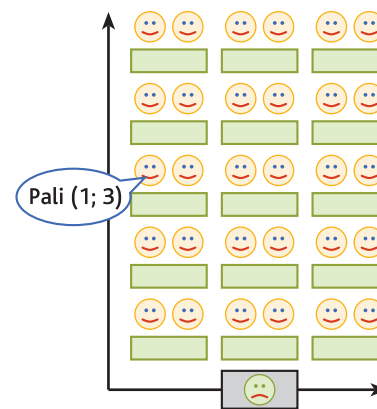
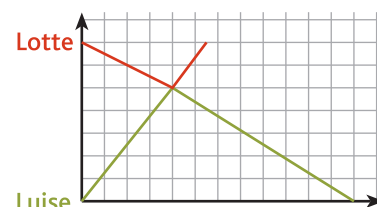
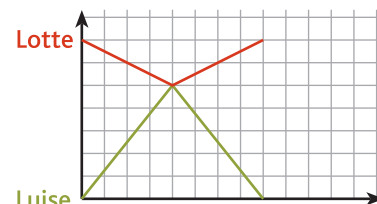
Add meg olyan lineáris függvények hozzárendelési szabályát, amelyek grafikonja úgy vágja ketté a koordinátasíkot, hogy az egyes felekbe ugyanannyi pont essék (a fentiek közül)!



Az osztályban általában padokban ültek, ahol rendszerint soronként 6 hely van. Nézzük most a termet az ábrának megfelelő szemszögből, és legyen egy koordináta-rendszer origója a bal alsó sarok. Ekkor az egyes helyeket koordinátpárokkal adhatjuk meg.

Játsszuk el például a következőket:

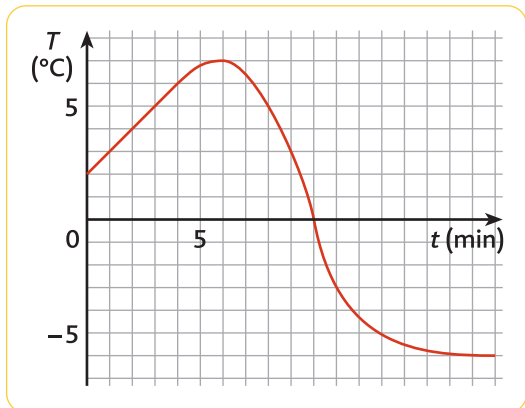
- Álljanak fel, akik $x \mapsto 5 - x$ „grafikonján ülnek”!
- Ki az, aki egyszerre ül az $x \mapsto 5 - x$ és az $x \mapsto x - 1$ grafikonon?
- Ha az $x \mapsto x + 1$ grafikonon ülők közül valakit 2 paddal hátrébb ültetnek, melyik függvény grafikonjára kerül át?
- Adj meg olyan függvényt, hogy a jobb szélső padsorból senki se üljön a grafikonján!
- Adj meg olyan függvényt, amelynek a grafikonján padtársak ülnek!



© Fogalmazz meg hasonló utasításokat!

TUDÁSPRÓBA

30

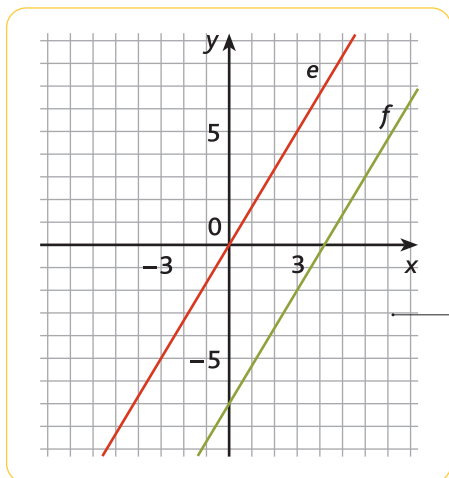


- 1 Egy szerkezet folyamatosan rögzítette, hogy hogyan változik a hőmérséklet az idő függvényében.

A grafikonról olvasd le:

- A 2. percben mennyi volt a hőmérséklet?
- Mikor volt 6°C a hőmérséklet?
- Mikor volt a legmelegebb?
- Mikor volt melegebb 5°C -nál?
- Hogyan változott a hőmérséklet a 3. perctől az 5. percig?

- 2 Grafikonjával megadtunk két függvényt. Az értelmezési tartomány a racionális számok halmaza.



- a) Egészítsd ki az e függvény értéktáblázatát!

x	-6	-3	0	3	6	9	30
y							

Szabály $e: x \mapsto$

- b) Egészítsd ki az f függvény értéktáblázatát!

x	-6	-3	0	3	6	9	30
y							

Szabály $f: x \mapsto$

- 3 Vettünk 8 kg burgonyát összesen 1040 Ft-ért.

- Ugyanezen az áron mennyibe került volna 12 kg burgonya?
- 1170 Ft-ért hány kilogramm ugyanilyen árú burgonyát vásárolhattunk volna?
- Cili 10 kg ugyanilyen árú burgonyát vett egy zsákkal együtt. Mennyit fizetett, ha a zsák 80 Ft-ba került?
- Dani lealkudta az ár 20%-át. Így hány kilogrammot vehetett 1040 Ft-ért?

- 4 Egy autó 640 km távolságra jut, ha 100 km-enként átlagosan 7,5 l üzemanyagot fogyaszt. Mekkora távolságra jutna ugyanezzel az üzemanyag-mennyiséggel, ha 100 km-enként

Fogyasztás (l/100 km)	5	6	7,5	12
Távolság (km)			640	

5 l-t, 6 l-t, 12 l-t fogyasztana?

Egészítsd ki a táblázatot!

3. EGYBEVÁGÓSÁG

Korábban így értelmeztük az egybevágóságot: Egybevágó két alakzat, ha valamilyen mozgattással vagy tükrözéssel kölcsönösen fedésbe hozhatók egymással. Ez a meghatározás újabb összefüggések felismeréséhez vezethet.



ISMERKEDÉS A PONT-PONT FÜGGVÉNYEKSEL

FELADATOK

1 Minden feladathoz másold le az ábrát, majd add meg a megjelölt pontok koordinátáit!

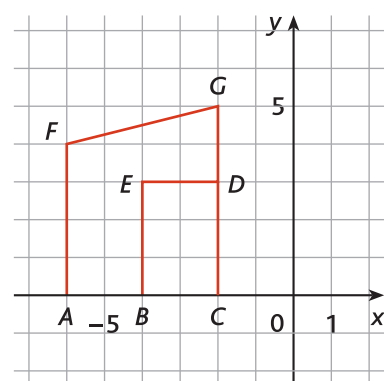
a) **Tükrözd** a „bódét” az y tengelyre, és add meg a tükrözéssel kapott „bódé” megfelelő pontjainak koordinátáit! Hasonlítsd össze az eredeti pontok és a tükrözéssel kapott **képpontok** koordinátáit! Mit tapasztalsz? Melyik jelzőszám változott, és hogyan?

b) **Told el** jobbra 8 egységgel a megjelölt pontokat! Ábrázold az így kapott képpontokat, és rajzold meg a „bódé” **eltolással** kapott képét! Hasonlítsd össze az eredeti pontok és az eltolással kapott képpontok koordinátáit! Melyik jelzőszám változott, és hogyan?

c) A megjelölt pontok második jelzőszámát szorozd meg 2-vel, az első jelzőszámot hagyd változatlanul! Ábrázold az így kapott pontokat!

Az új alakzat szakaszait és szögeit hasonlítsd össze az eredeti alakzat megfelelő szakaszaival és szögeivel!

d) A megjelölt pontok mindkét jelzőszámát szorozd meg -1 -gyel! Ábrázold az így kapott pontokat, és rajzold meg az új alakzatot zöld színnel! Az új alakzat szakaszait és szögeit hasonlítsd össze az eredeti alakzat megfelelő szakaszaival és szögeivel!

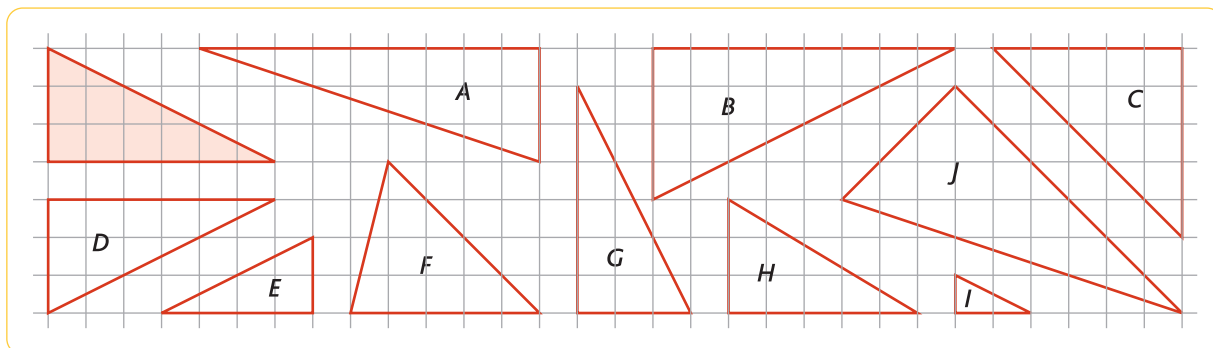


© Az a), a b) és a d) feladatban áttetsző papírra másold át az eredeti „bódét”! Próbáld ezt a papírlapot a füzetlap síkjában úgy elmozdítani, hogy a kapott képre illeszkedjék!

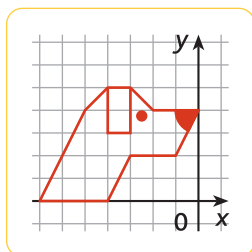
Gyakorló
6.01–6.07.

2 Mely háromszögek **hasonlók** a kiszínezett háromszöghöz, vagyis melyek

a) **nagyítások**; b) **kicsinyítések**; c) **egybevágók** vele?



© Indokold, hogy miért hasonlók, illetve miért nem hasonlók az egyes háromszögek egymással!



☉ Az első négy hozzárendelés esetén minden szakasz képe egy ugyanolyan hosszú szakasz lett, bármely szög képe ugyanakkora, mint az eredeti szög. Ezért az alakzat képe ugyanolyan alakú és méretű, mint az eredeti alakzat.

Pauszpapírral ellenőrizhető, hogy az alakzat a b), c), d) feladatban síkmozgással kölcsönösen fedésbe hozható a képével.

Az a) feladatban át kell fordítanunk a pauszpapírt.

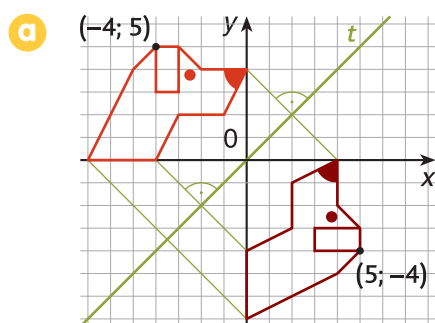
☉ Figyeld meg: az f) leképezésben az alakzat képe ugyanolyan alakú, de nem ugyanolyan méretű, mint az eredeti alakzat.

☉ Számold össze, hány kis négyzet az egyik, hány kis négyzet a másik „kutyus” területe!

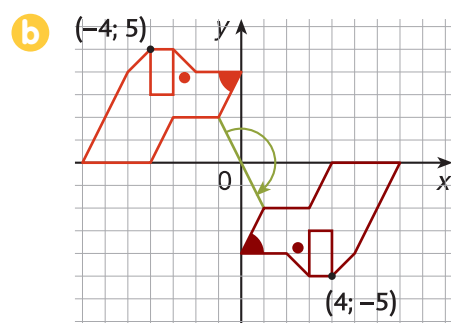
1. példa

A koordináta-rendszerben adott alakzat minden pontjához rendeljünk hozzá egy-egy pontot az adott szabály szerint.

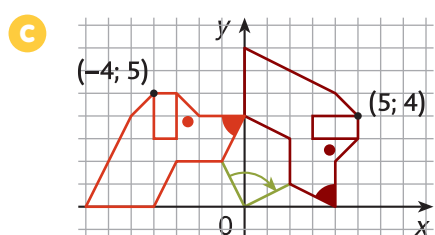
- Cseréljük meg a pontok első és második koordinátáját.
- Szorozzuk meg a pontok mindkét koordinátáját (-1) -gyel.
- Cseréljük meg a pontok első és második koordinátáját, majd változtassuk meg a második koordináta előjelét.
- Adjunk a pontok első koordinátájához 10-et, a második koordinátájához 2-t.
- Szorozzuk meg a pontok első koordinátáját $(-1,5)$ -del, a második koordináta maradjon változatlan.
- Szorozzuk meg a pontok mindkét koordinátáját $(-1,5)$ -del.



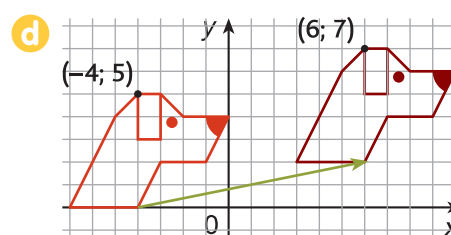
A t tengelyre **tükröztük** az alakzat minden pontját.



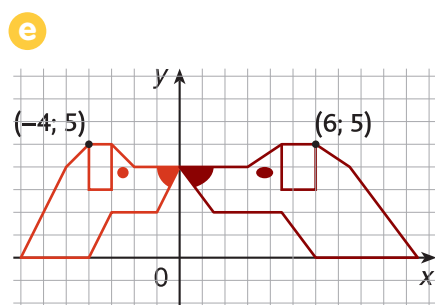
Az O pont körül **180° -kal elforgattuk** az alakzat minden pontját.



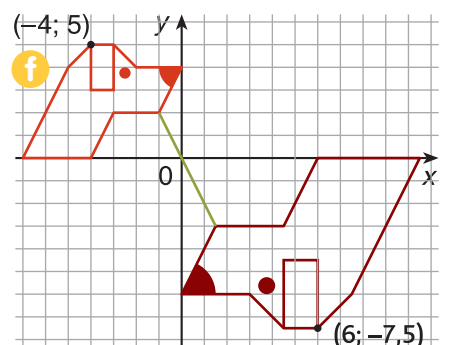
Az O pont körül **90° -kal elforgattuk** az alakzat minden pontját.



A nyíl irányában, adott távolságra **eltoltuk** az alakzat minden pontját.



Egyik irányban **megnyújtottuk** az alakzatot. Sem a kép alakja, sem a kép mérete nem egyezik meg az eredeti alakzatával.



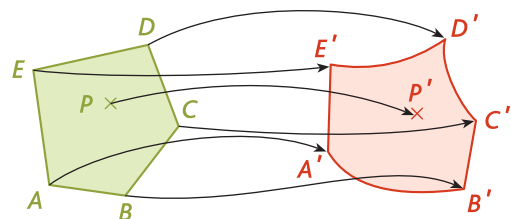
Minden vonalat 1,5-szeresére **nagyítottunk**. Az eredetihez **hasonló** alakzatot kaptunk.

Értelmezések

Geometriai transzformációnak nevezzük az olyan függvényt, amely egy alakzat minden pontjának egy-egy pontot feleltet meg.

A feladatok megoldásakor vizsgálhatjuk például, hogy a transzformációban

- bármely folytonos vonal képe folytonos vonal-e;
- bármely egyenes képe egyenes-e;
- van-e olyan pont, amelynek a képe saját maga;
- bármely szakasz képe ugyanolyan hosszú-e, mint az eredeti szakasz;
- bármely szakasz párhuzamos-e a képével;
- bármely szög képe ugyanakkora-e, mint az eredeti szög;
- az alakzat kölcsönösen fedésbe hozható-e a képével;
- az alakzatnak és a képének az alakja megegyezik-e;
- az alakzatnak és a képének az alakja is és a mérete is megegyezik-e.

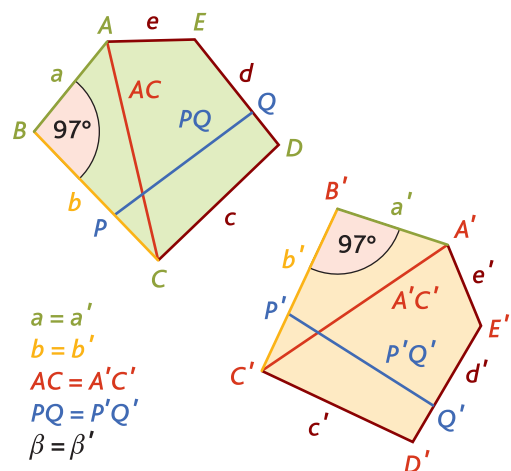


Egybevágóságnak nevezzük a geometriai transzformációt, ha bármely két pontot összekötő szakasz képe ugyanolyan hosszúságú, mint az eredeti szakasz.

Az egybevágósági transzformációban az eredeti alakzat és a képe **egybevágó**, vagyis **ugyanolyan alakú és méretű**.

Az egybevágóság jele: $\cong$

Az egybevágóságból következik a megfelelő szögek, a kerületek, a területek egyenlősége is ($\beta = \beta' = 97^\circ$; $K = K'$; $T = T'$).



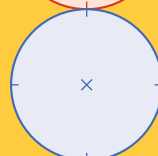
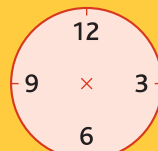
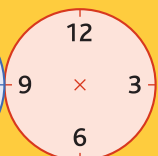
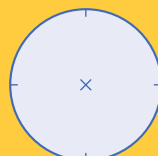
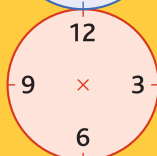
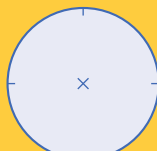
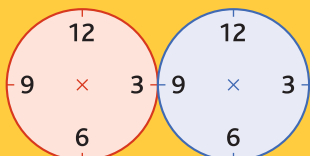
Ha két alakzat egybevágó, akkor az egyik alakzat bármely két pontját összekötő szakasz ugyanolyan hosszúságú, mint a másik alakzat megfelelő pontjait összekötő szakasz; $PQ = P'Q'$

Ha két alakzatra igaz, hogy az egyik alakzat bármely két pontját összekötő szakasz képe ugyanolyan hosszú, mint a másik alakzat megfelelő pontjait összekötő szakasz, akkor a két alakzat egybevágó.

Az előző két mondatban 2-2 állítást kötöttünk össze, de a sorrendjüket felcseréltük. Megállapíthatjuk, hogy az egyik állítás igazságából következik a másik állítás igazsága, és viszont. A két állítás felcserélhető.



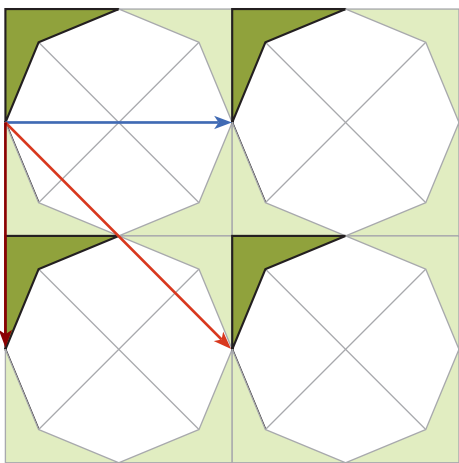
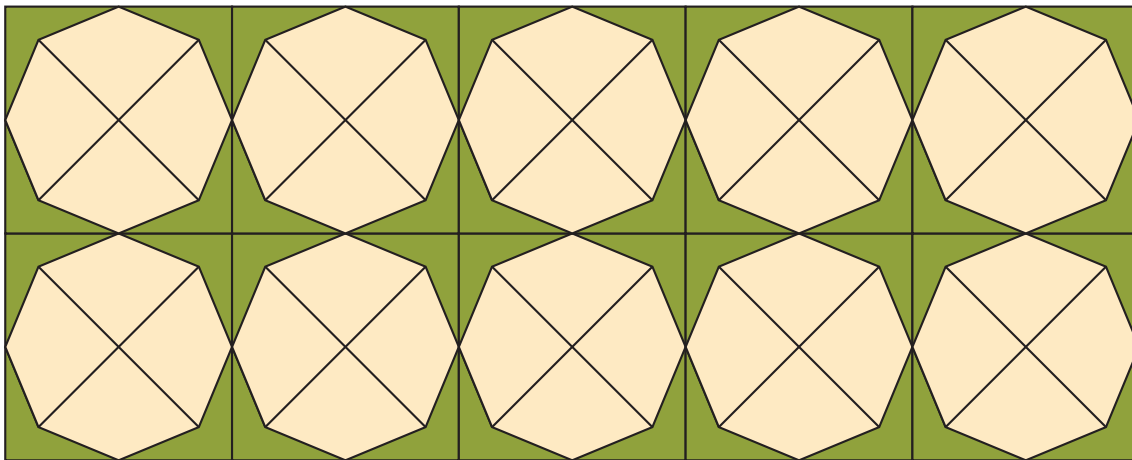
A kék óralapot balra a piros óralap körül görgetjük. A különböző helyzetekben írd be a kék óralapba a 3, 6, 9, 12 számokat!



2. példa

Kétféle deltoiddal parkettáztuk a síkot. Képzeljük el, hogy ez a minta minden irányban folytatódik a felismerhető szabály szerint.

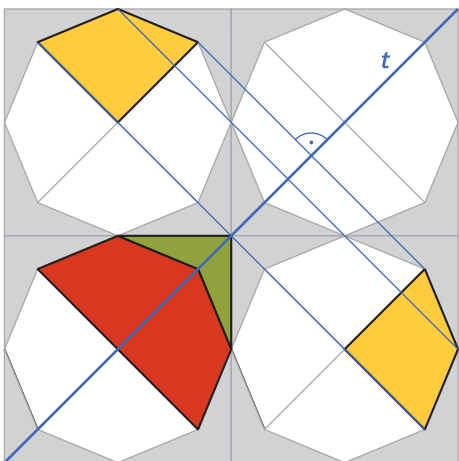
Figyeljünk meg különböző egybevágósági transzformációkat a mintán.



- 1 Például az ábra bal felső sarkában lévő deltoid különböző irányokban és távolságokra **eltolva** újra és újra megjelenik. Ez a megállapítás igaz a parkettaminta egyéb részleteire is.

Az alakzat minden pontja ugyanakkora távolságra, ugyanolyan irányban mozdul el, ezért az alakzat alakja és mérete nem változik. A szakasz és a képe ugyanolyan hosszú és párhuzamos egymással.

Eltolással az eredeti alakzattal egybevágó alakzatot kapunk.



- 2 Ha például az ábrán kézzel megrajzolt **t tengelyre tükrözzük** az egyes alakzatokat, akkor a minta részletei kölcsönösen fedik egymást. Bármely szakasznak és a képének a hossza megegyezik.

Tengelyes tükrözéssel az eredeti alakzattal egybevágó alakzatot kapunk.

Keress más tükrötengelyeket, amelyekre tükrözve a minta megfelelő részletei kölcsönösen fedik egymást!

>>>

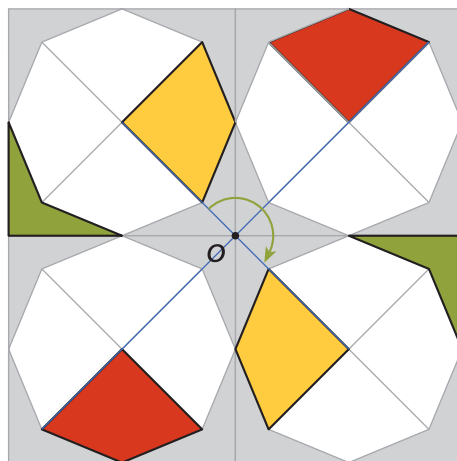
»»

- 3 Akkor is kölcsönösen fedésbe kerülnek az ábra megfelelő részletei, ha például az ábrát **az O pont körül 180° -kal elforgatjuk**.

Bármely szakasz és a képe ugyanolyan hosszú, és párhuzamos egymással. Az elforgatással az alakzat alakja és mérete nem változik meg.

Az O pont körüli 180° -os elforgatással az eredeti alakzattal egybevágó alakzatot kapunk.

Keress más középpontokat, amelyek körül 180° -kal elforgatva a minta megfelelő részletei kölcsönösen fedik egymást! Ne feledd, a mintát minden irányban a végtelenségig folytatva képzeljük el!

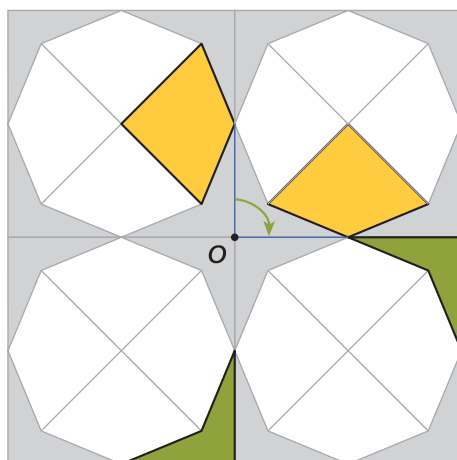


- 4 Ha például az **O pont körül 90° -kal elforgatjuk** az ábrát, akkor bármely szakasznak és a képének megegyezik a hosszúsága. Az elforgatással az alakzat alakja és mérete most sem változik meg.

Az O pont körüli bármekkora szöggel történő elforgatással az eredeti alakzattal egybevágó alakzatot kapunk.

Keress más középpontokat, amelyek körül 90° -kal elforgatva a minta megfelelő részletei kölcsönösen fedik egymást!

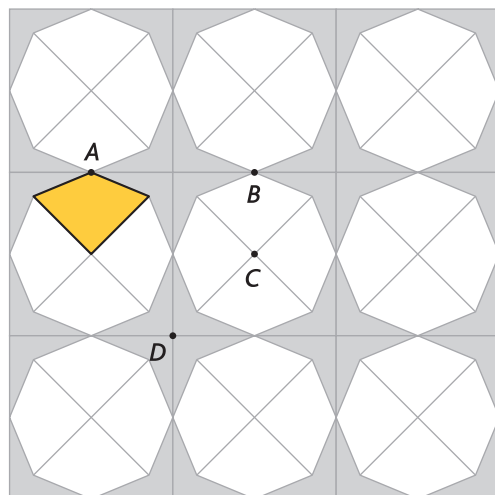
A mintát minden irányban a végtelenségig folytatva képzeljük el.



FELADATOK

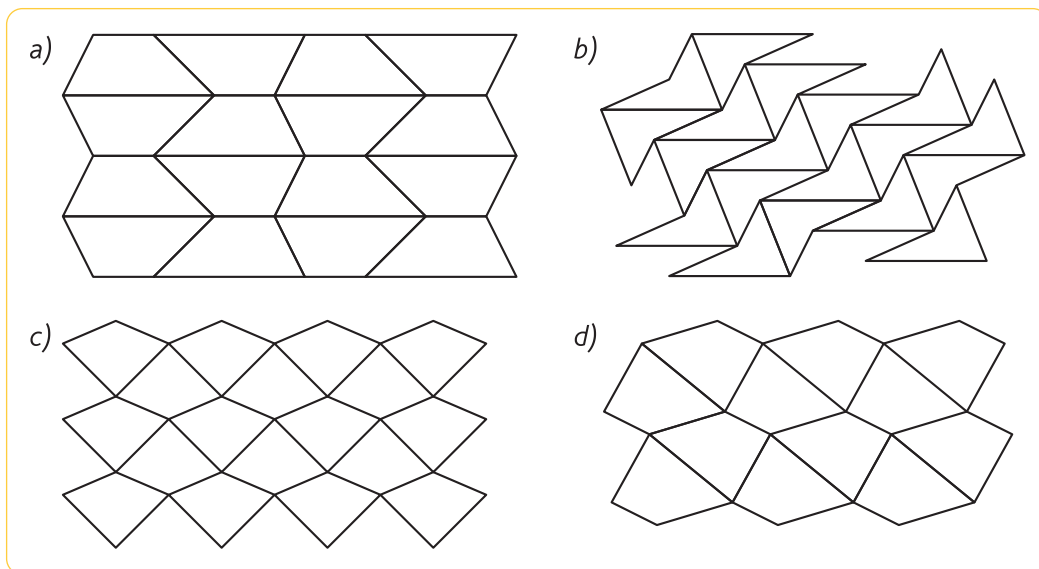
- 3 Színezd különböző színnel a sárga deltoid képét, ha a mintát 180° -kal elforgatjuk

- az A pont körül;
- a B pont körül;
- a C pont körül;
- a D pont körül!



Melyik deltoid lesz a sárgára színezett deltoid képe, ha a 3. feladatban adott forgatásokat egymás után úgy hajtjuk végre, hogy mindig az előző forgatásban kapott képet forgatjuk tovább 180° -kal az adott pont körül?

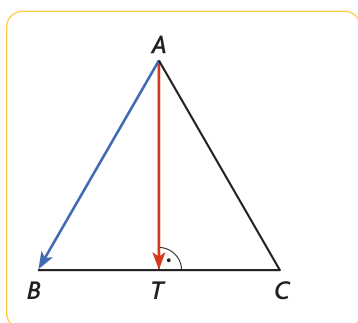
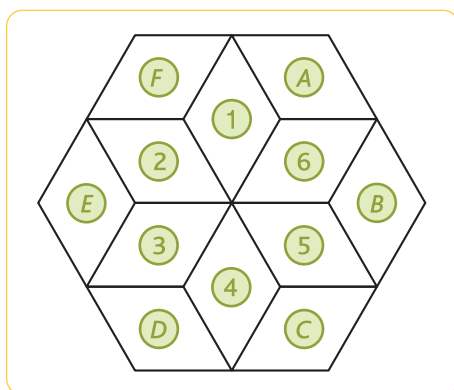
4 Egybevágó négyszögekkel parkettáztuk a síkot.



Sorold föl, milyen egybevágósági transzformációkat figyelhetsz meg az egyes parkettamintákon!

- 5 Milyen geometriai transzformációkkal kerülhet az 1 rombusz a 2 rombusz; a 3 rombusz; a 4 rombusz; az 5 rombusz; az A rombusz; a B rombusz; a C rombusz; a D rombusz; az E rombusz; az F rombusz; helyére?

☉ Minden esetben keress több megoldást!



- 6 Szerkessz ABC szabályos háromszöget, amelynek oldalai 3,2 cm-esek! Szerkeszd meg az m_a magasságát, ennek talppontja legyen T ! Szerkeszd meg az $ABC\triangle$ -nek az egyes transzformációkban kapott képét, ha
- az AB nyíl irányában és hosszával eltolod a háromszöget;
 - az AT nyíl irányában és hosszával eltolod a háromszöget;
 - a BC oldalegyenesre tükrözöd a háromszöget;
 - az AT magasságvonala tükrözöd a háromszöget;
 - az A pont körül 180° -kal elforgatod a háromszöget;
 - a T pont körül 180° -kal elforgatod a háromszöget;
 - az A pont körül balra 60° -kal elforgatod a háromszöget!

Kísérletezz!



Ödömér szerint az 5. feladatban egyetlen elforgatással az 1 rombusz a D rombusz helyére kerülhet. Ha igaz van Ödömérnek, akkor hol van az elforgatás középpontja, és hány fokkal történik az elforgatás?

AZ ELMOZDULÁS MEGADÁSA IRÁNYÍTOTT SZAKASSZAL

1. példa

Egy helikopter pilótája azt a feladatot kapja, hogy egy terepről készítsen légi felvételt. A következő információk közül melyik szükséges ahhoz, hogy végrehajthassa az utasítást?

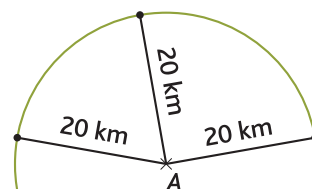
A: A terep az állomástól 20 km távolságra van.

B: A terep az állomástól északnyugatra fekszik.

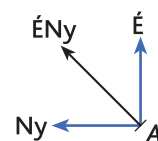


Ha a pilóta csak azt az utasítást kapja, hogy repüljön el 20 km távolságra és készítsen egy légi felvételt, akkor nem tudja egyértelműen elvégezni a feladatot.

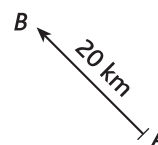
Az ábrán A-val jelöltük az állomás helyét.



Akkor sem tudhatja, hogy mit kell lefényképeznie, ha a parancs úgy szól, hogy az állomástól északnyugati irányban lévő terepről készítsen felvételt.



Egyértelművé akkor válik az utasítás, ha az **irányt** és a **távolságot** egyaránt megjelölik benne. Ebben az esetben a helikopter útját egy **irányított szakasszal** jelmezhetjük.

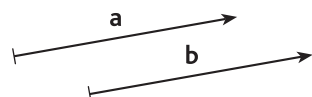


Értelmezések

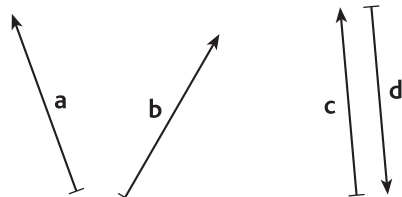
Az **AB irányított szakaszt vektornak nevezzük**. Írásban ezt így jelöljük: $\overrightarrow{AB}$ (olvasd: AB vektor).



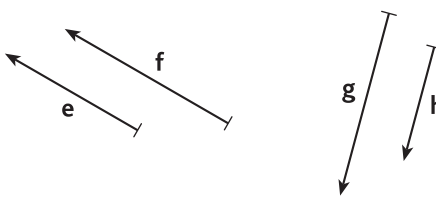
Két vektort akkor tekintünk egyenlőnek, ha **egyirányúak és a hosszúságuk is egyenlő**.



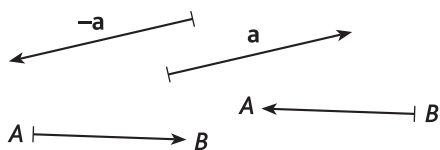
Ezek a vektorpárok nem egyenlők, mert nem egyirányúak.



Ezek a vektorpárok sem egyenlők, mert nem egyenlő a hosszuk.



Értelmezések



Ezek a vektorpárok egyenlő hosszúak, de ellentétes irányúak. **Az egyenlő hosszú, de ellentétes irányú vektorokat ellentett vektoroknak nevezük.** Ha a vektort $\mathbf{a}$ -val jelöljük, akkor az ellentettjét $-\mathbf{a}$ -val.

Az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{BA}$ ellentettjei egymásnak.

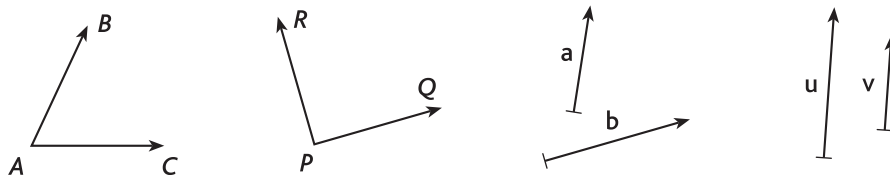
FELADATOK

7 Térkép alapján állapítsd meg, hogy milyen irányban és mekkora távolságra van Hatvantól

a) Szeged; b) Győr; c) Debrecen; d) Mezőtúr; e) Békéscsaba!

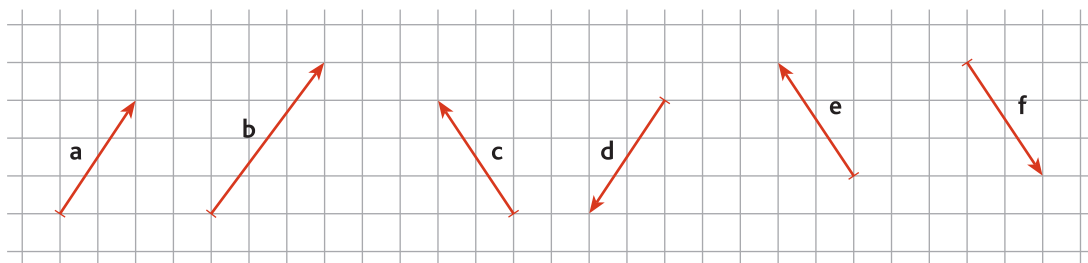
8 Mekkora szöget zárnak be az ábrán a vektorok? Melyik vektor hosszabb?

a) $\overrightarrow{AB}$ vagy $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{PQ}$ vagy $\overrightarrow{PR}$; c) $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$; d) $\mathbf{u}$ vagy $\mathbf{v}$



☉ Két vektort mikor tekintünk egyenlőnek?

9 Melyek azok a vektorok az ábrán, amelyek egyenlők? Melyek azok, amelyek ellentettjei egymásnak?



Gyakorló
7.05–7.11.;
Feladatgyűjtemény
4.1.01–03.

☉ A vektorok megrajzolása nélkül hogyan határoztad volna meg ezeknek a vektoroknak a végpontját?

10 Rajzold meg a derékszögű koordináta-rendszerben az $\overrightarrow{AB}$ -t, ha az $A(0; -2)$, $B(-3; 0)$!

a) Rajzolj olyan vektorokat, amelyek egyenlők az $\overrightarrow{AB}$ -ral, és kezdőpontjuk rendre $C(-2; 0)$, $E(5; -2)$, $F(0; -4)$, $O(0; 0)$!

b) Rajzolj olyan vektorokat, amelyek ellentettjei az $\overrightarrow{AB}$ -nak, és amelyek kezdőpontja rendre $G(-2; -2)$, $A(0; -2)$, $B(-3; 0)$, $O(0; 0)$!

c) Határozd meg az S pont koordinátáit, ha $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AB}$ és $R(56; -75)$!

d) Határozd meg a T pont koordinátáit, ha $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{BA}$ és $R(56; -75)$!

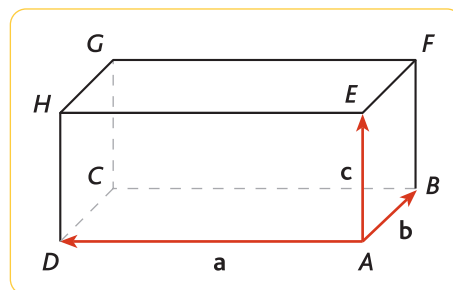
B1 Milyen irányban és mekkora távolságra jut a helikopter az A állomástól,

- ha kelet felé repül 3 km-t, majd nyugat felé 5 km-t;
- ha kelet felé repül 4 km-t, majd nyugat felé 4 km-t;
- ha kelet felé repül 5 km-t, majd nyugat felé 3 km-t;
- ha észak felé repül 5 km-t, majd kelet felé 3 km-t;
- ha észak felé repül 5 km-t, majd délkelet felé 3 km-t;
- ha észak felé repül 3 km-t, majd délkelet felé 5 km-t?

☉ Minden esetben rajzold meg (egy A pontból) a helikopter útvonalát! Ami a valóságban 1 km, az a rajzban 1 cm legyen. A helikopter mozgását nyíllal ábrázold!

B2 Egy téglatest adott A csúcsából kiinduló élvektorai **a**, **b**, **c** az ábra szerint.

- Sorold fel és jelöld a kezdő- és a végpontjukkal azokat az élvektorokat, amelyek az **a**-ral egyenlők!
- Sorold fel és jelöld a kezdő- és a végpontjukkal azokat az élvektorokat, amelyek a **b** ellentettjei!
- Mi mondható az $\overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{GD}$ vektorpárról?
- Mi mondható az $\overrightarrow{AG}$ és $\overrightarrow{FD}$ vektorpárról?



B3 Egy téglatest adott A csúcsából kiinduló élvektorai **a**, **b**, **c** a B2. feladat ábrája szerint.

- Egy katicabogár az A pontból kiindulva elmozdul először **a**, majd **b** vektorral. Melyik pontba jut?
Mely vektorral elmozdulva jutott volna ide legrövidebb úton?
- Egy katicabogár az A pontból kiindulva elmozdul először **a**, majd **b**, végül **c** vektorral. Melyik pontba jut?
Mely vektor mentén repülhetett volna ugyanide?
- Egy katicabogár a A pontból kiindulva elmozdul először **c**, majd **b**, végül **a** vektorral. Melyik pontba jut?
- Egy katicabogár a B pontból kiindulva elrepül a $\overrightarrow{BH}$ mentén. Melyik pontba jut?
Az élek mentén mely vektorral elmozdulva jutott volna ugyanoda?

☉ Az **a**, **b**, **c** segítségével írd le a mozgást!



Egy katicabogár P pontból kelet (K) felé megy 2 cm-t, majd elfordul ÉK felé, és további 2 cm-es utat tesz meg. Ezután folytatja az útját, mindig 2 cm-t megtéve, É, ÉNy, Ny, DNy, D, végül DK felé.

- Az útvonala milyen alakzatot ír le?
- A nyolc elmozdulás után hová kerül?
- Alkalmanként mekkora szöggel fordult el?
- Mennyi az elfordulás szögeinek összege?



Egy szafari vezetője kisrepülőgéppel terepszemlét tart, és a mutatós óra számlapjának segítségével határozza meg a repülés irányát: A repülő pillanatnyi iránya mindig 12 óra, ha ettől az iránytól például jobbra 60° -kal el kíván fordulni, akkor 2 óra irányt jelöl meg. Az indulástól számítva ötpercenként a következő utasításokat adja a pilótának: forduljunk 11 óra; 3 óra; 4 óra; 11 óra, végül 1 óra irányába. 5 perc eltelte után milyen irányú elfordulással és hány perces repüléssel érhetnek vissza a támaszpontra?



☉ Tételezzük fel, hogy teljes szélcsend van, és a repülőgép egyenes sebességgel halad. Szerkeszd meg az útvonalat!

2. példa



Egy kajakozó álló vízben evezve másodpercenként 2,5 m-t tenne meg.

A folyó vize másodpercenként 1,5 m-t folyik előre.

Mekkora utat tesz meg ténylegesen a kajakozó a folyóban 30 s (másodperc) alatt, és milyen irányban mozdul el, ha

- a folyó folyásának irányában evez;
- a folyó folyásával ellentétes irányban evez?

A kajak elmozdulása álló vízben: 1 s alatt 2,5 m

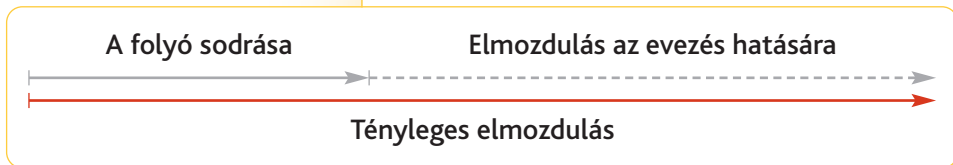
30 s alatt 75 m

A folyóvíz sodrása: 1 s alatt 1,5 m

30 s alatt 45 m

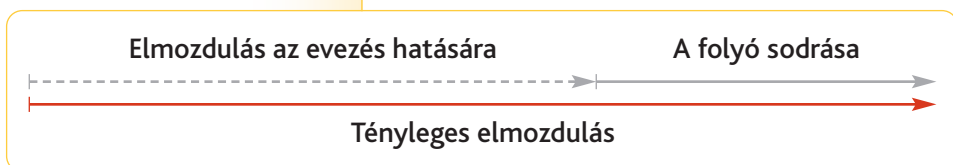
Az elmozdulás vektormennyiség, amelyet a nagysága nem jellemez egyértelműen. Figyelembe kell vennünk az elmozdulások irányát is.

- A két elmozdulásvektor párhuzamos és egyirányú.



Ami a valóságban 1 m, az a rajzon legyen 1 mm.

A tényleges elmozdulás így szerkeszthető meg.

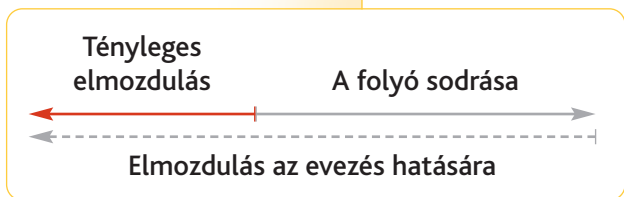


Vagy így.

A kajak tényleges elmozdulása a rajzon 120 mm, a valóságban 120 m.

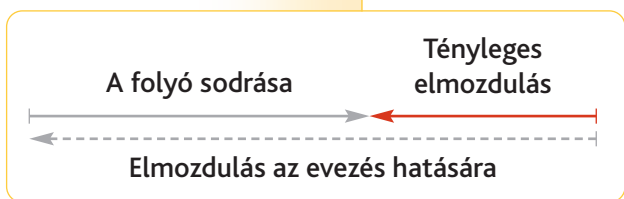
Az elmozdulás iránya megegyezik a folyó sodrásának irányával.

- A két elmozdulásvektor párhuzamos, de ellenkező irányú.



Ami a valóságban 1 m, az a rajzon legyen 1 mm.

A tényleges elmozdulás így szerkeszthető meg.



Vagy így.

A kajak tényleges elmozdulása a rajzon 30 mm, a valóságban 30 m.

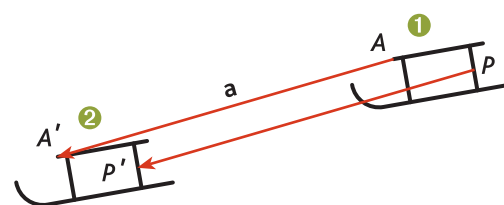
Az elmozdulás ellenkező irányú, mint a folyó sodrásának iránya.

ELTOLÁS

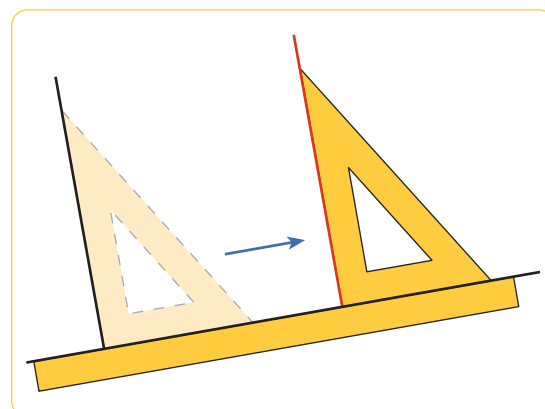
Egyenes lejtőn úgy csúszik le egy szánkó, hogy minden pontja egyenes vonalon halad (a szánkó nem borul fel, nem fordul el).

Egy adott időtartam alatt a szánkó az ① helyzetből a ② helyzetbe jut, az A pontja az $\overrightarrow{AA'}$ -ral elmozdulva az A' pontba kerül.

Mivel a szánkó alakja és nagysága a mozgás során nem változik, akármelyik P pontja ugyanolyan irányban mozdul el, és ugyanakkora utat tesz meg, mint az A pontja: $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AA'} = \mathbf{a}$.



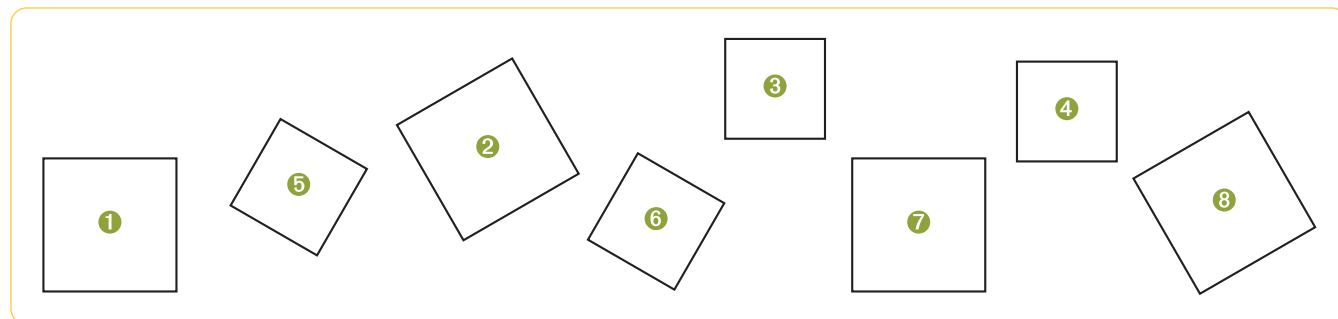
Már korábban is rajzoltunk párhuzamos egyeneseket eltolással.



FELADATOK

- 11 Keresd meg azokat az alakzatokat, amelyeket egymásból eltolással kaphatunk!

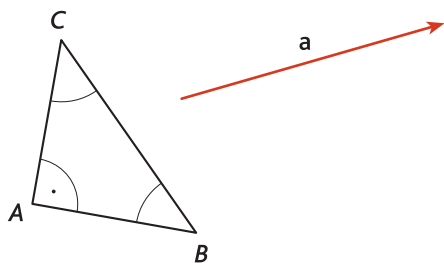
☉ Színezd ki egyforma
színnel!



- 12 a) Rajzolj egy háromszöget! Told el az egyik szögfelezője irányában 5 cm-rel! Sorold fel a párhuzamos eltolás tulajdonságait az ábra segítségével!
b) Szerkessz $ABCD$ négyzetet, amelynek oldalai 3 cm-esek! Told el a $\overrightarrow{BD}$ -ral!

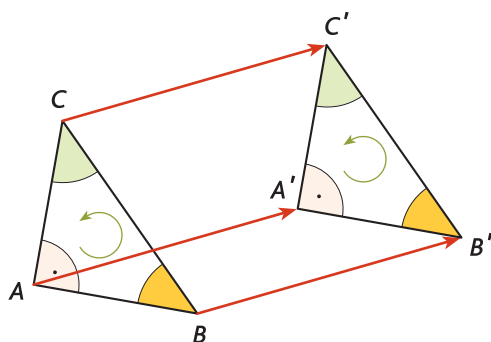
Gyakorló
6.08–6.13.;
Feladatgyűjtemény
4.2.06.

1. példa



Szerkesszünk derékszögű háromszöget, amelynek befogói 2,2 cm hosszúak. A csúcsait jelöljük rendre A , B , C betűkkel. Toljuk el a háromszöget a lap síkjában úgy, hogy minden pontja az adott a -ral mozduljon el.

Hasonlítsuk össze az eredeti háromszöget az eltolással kapott alakzattal.



Szerkesszünk egy derékszöget, a csúcsát jelöljük A -val. A csúcsból kiindulva mérjük föl a száraitra 2,2 cm-t. Megkapjuk a háromszögnek a B és a C csúcsát.

A háromszög csúcspontjaiból az adott a -ral párhuzamos félegyeneseket húzunk. Ezekre rámérjük a vektor hosszát. Az így megszerkesztett pontok az eltolással kapott $A'B'C'$ háromszög csúcspontjai.

- 1 Az eltolással a háromszög alakja és nagysága nem változik, az eredeti és az eltolás utáni háromszög egybevágó. $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$
- 2 Minden szakasz ugyanolyan hosszú, mint a képe:
 $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$
- 3 Minden szög ugyanakkora, mint a képe:
 $CAB\angle = C'A'B'\angle$, $ABC\angle = A'B'C'\angle$, $BCA\angle = B'C'A'\angle$
- 4 Az eltolás nem változtatja meg a háromszög körüljárási irányát.
- 5 Az eredeti háromszög minden oldala párhuzamos az eltolással kapott képével:
 $AB \parallel A'B'$; $BC \parallel B'C'$; $CA \parallel C'A'$

Értelmezés

Ha a síknak vagy a sík egy alakzatának minden pontját ugyanabban az irányban, ugyanakkora távolságra (ugyanazzal a vektorral) mozgatjuk el, akkor minden pontjához egyértelműen pontot rendelünk. Ezt a mozgatást **eltolásnak** nevezzük. Az eltolás egybevágósági transzformáció.

Az eltolást a térben hasonlóan értelmezhetjük.

Megállapodás

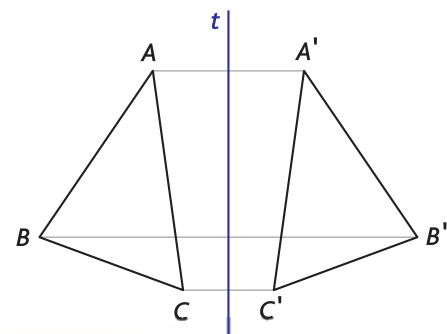
Megállapodás szerint a **helyben maradást** tekinthetjük olyan eltolásnak, amelyben minden pontnak saját maga a képe. Ennek az eltolásnak a vektora a **nullvektor**.

A nullvektor bármilyen irányú lehet, a hosszúsága pedig nulla.

TENGELYES TÜKRÖZÉS, TENGELYESEN SZIMMETRIKUS SÍKIDOMOK

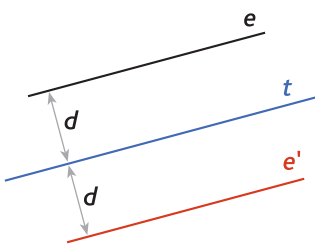
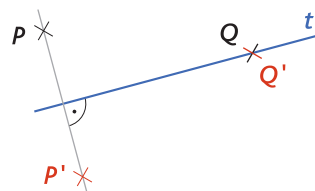
Ha a sík t egyenesére a síkra merőlegesen elhelyezünk egy tükört, akkor az A, B, C pont képe a tükörben rendre az A', B', C' pont, az AB szakasznak a képe az $A'B'$ szakasz, az $ABC\Delta$ -nek az $A'B'C'\Delta$.

A **tengelyes tükrözés** az alakzat minden pontjához egyértelműen hozzárendel egy pontot, tehát a **tengelyes tükrözés geometriai transzformáció**.

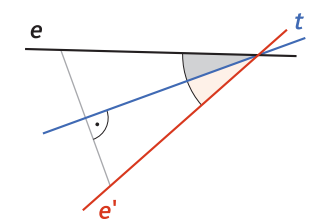


A TENGELYES TÜKRÖZÉS TULAJDONSÁGAI

- 1 A tengelyre nem illeszkedő P pont és tükörképe, a P' pont olyan PP' szakaszt alkot, amelynek szakaszfelező merőlegese a tengely. Ezért a P' pont képe a P pont. A P pont és a tőle különböző P' képe egyértelműen meghatározza a tengelyes tükrözést.
- 2 A tengely bármely pontjának képe önmaga.
- 3 A tengellyel párhuzamos egyenes tükörképe párhuzamos a tengellyel. A tengely az eredeti és a tükörkép egyenestől egyenlő távolságra van.



- 4 A tengelyt metsző egyenes és a képe a tengelyen metszi egymást. A tengely felezi azt a szöget, amelyet az eredeti egyenes és a tükörképe bezár.



- 5 **Bármely alakzat tükörképe egybevágó az eredeti alakzattal:**

$$ABC\Delta \cong A'B'C'\Delta$$

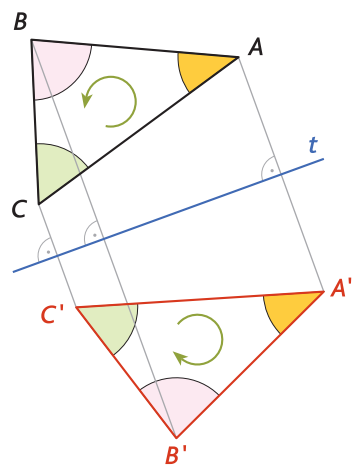
Bármely szakasz egyenlő hosszúságú a tükörképével.

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A'$$

Minden szög ugyanakkora, mint a tükörképe.

$$\angle CAB = \angle C'A'B', \quad \angle ABC = \angle A'B'C', \quad \angle BCA = \angle B'C'A'$$

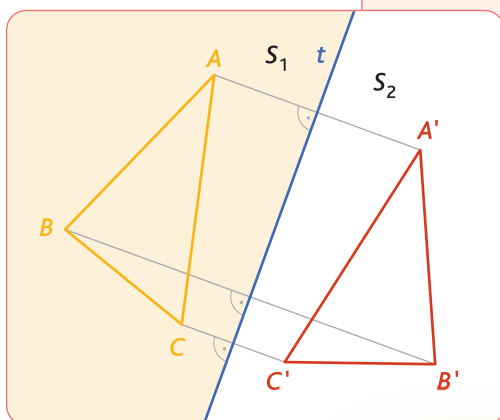
- 6 A tengelyes tükrözés a körüljárás irányát az ellenkezőjére változtatja.



Kísérletezz!

Másoljuk le áttetsző pauszpapírra az előző oldal alján látható háromszöget és a tükörképét. Ha a pauszpapírt a lap síkjában mozgatjuk, akkor nem hozható fedésbe az eredeti háromszög és a pauszpapírra átmásolt tükörképe. Ha átfordítjuk a pauszpapírt, akkor az eredeti háromszög és a tükörképe kölcsönösen fedésbe hozható.

Emlékeztető



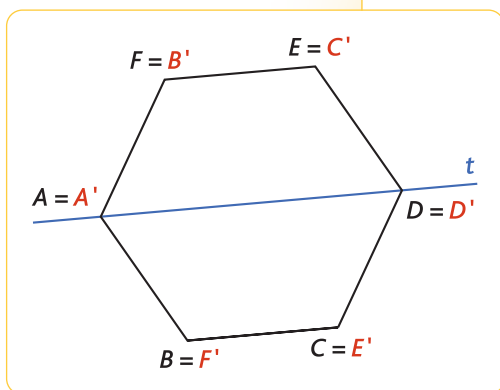
A t egyenes a síkot az S_1 és az S_2 félsíkra bontja (a t egyenes mindkét félsíkhoz hozzá tartozik).

Ha a síkot a t egyenes mint **tengely** körül 180° -kal elforgatjuk, akkor az S_1 félsík az S_2 félsík helyére kerül, az S_2 félsík az S_1 félsík helyére.

Például az S_1 félsík A , B és C pontja rendre az S_2 félsík A' , B' , C' pontjába kerül (és fordítva, az A' , B' , C' pont az A , B és C pontba).

A síknak a t egyenese körüli 180° -os elforgatása a sík pontjaihoz ugyanazokat a képpontokat rendeli hozzá, mint a t tengelyre történő síkbeli tükrözés.

1. példa



Szerkesszünk 2 cm oldalú szabályos hatszöget. Két átlellenes csúcsát összekötve rajzoljuk meg egyik átlóegyenesét. Tükrözzük a hatszöget erre az egyenesre.

Jelöljük rendre a hatszög csúcsait az A , B , C , D , E és F betűvel. Az AD egyenes legyen a tükrötengely.

Azt tapasztaljuk, hogy az eredeti hatszög és a tükörképe kölcsönösen fedik egymást.

$A = A'$; $B = F'$; $C = E'$; $D = D'$; $E = C'$; $F = B'$

Hány egyenesre igaz, hogy tükrötengelye a szabályos hatszögnek? Tükörrel ellenőrizd!

☉ A szabályos sokszögek, a deltoid, a rombusz, a téglalap, a húrtrapéz, az egyenlő szárú háromszög, a kör tengelyesen szimmetrikus alakzatok.

Emlékeztető

Egy síkbeli alakzat **tengelyesen szimmetrikus**, ha van olyan t egyenes, **szimmetriatengely** a síkban, amelyre az alakzatot tükrözve az eredeti alakzat és a tükörképe kölcsönösen fedik egymást.

Többet ésszel ...

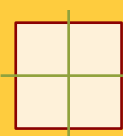
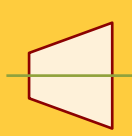
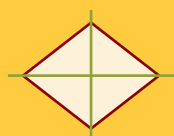


Keress minél több jellel leírható tengelyesen szimmetrikus, 4000-nél nem nagyobb „római számot”! Van-e ilyen, 10 jellel leírható szám?

Fejtörő!



Ödömér különböző síkidomok összes szimmetriatengelyét szeretne volna be rajzolni. Segíts neki, ha valahol hibázott!

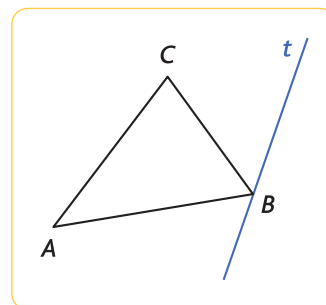


FELADATOK

13

Rajzolj $ABC\triangle$ -et! Húzz egy t egyenest a B csúcán át! Tükrözd a háromszöget a t tengelyre!

Sorold föl a tengelyes tükrözés tulajdonságait az ábra segítségével!



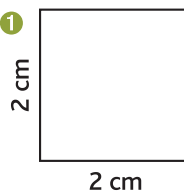
14

Szerkeszd meg az ábrán látható alakzatokat és a szimmetriatengelyeiket!

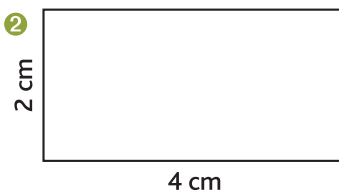
Az alakzatok közül melyiknek van

- pontosan két szimmetriatengelye;
- legfeljebb két szimmetriatengelye;
- legalább két szimmetriatengelye?

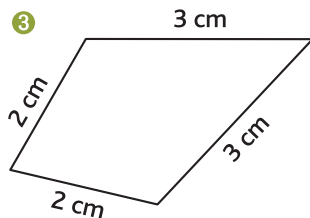
1



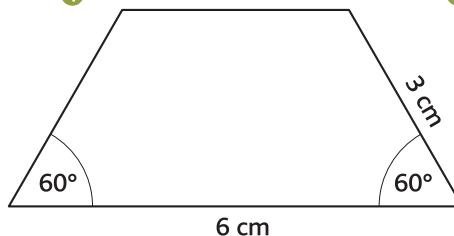
2



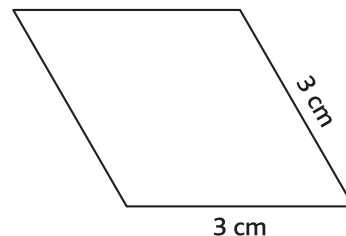
3



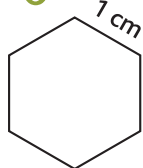
4



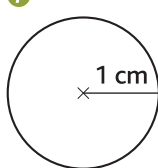
5



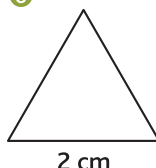
6



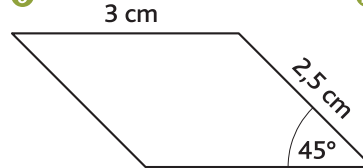
7



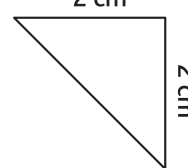
8



9



10



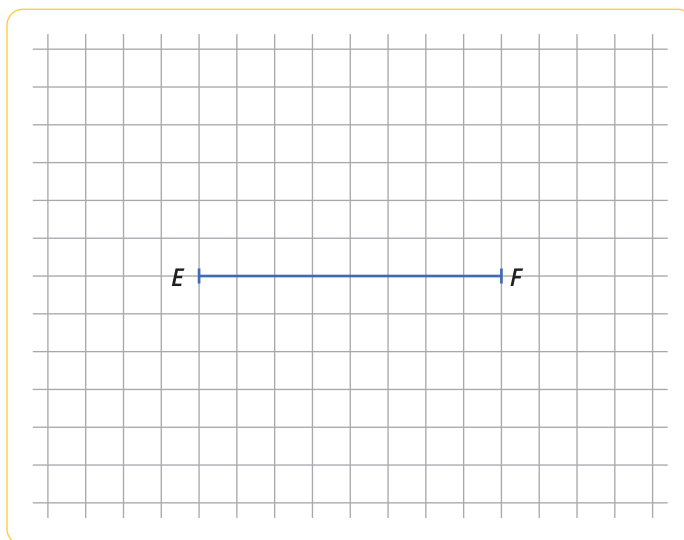
15

A négyzetrácson megjelölt EF szakasz az alább felsorolt síkidomok közös szimmetriatengelyének a síkidomba eső része:

- négyzet,
- téglalap, de nem négyzet,
- egyenlő szárú háromszög,
- deltoid, de nem négyzet.

Mindegyik síkidom területe 32 területegység (1 területegység egy rácsnégyzet területe).

Különböző színekkel rajzold meg ezeket a síkidomokat!



Gyakorló

6.14–6.20.;

Feladatgyűjtemény

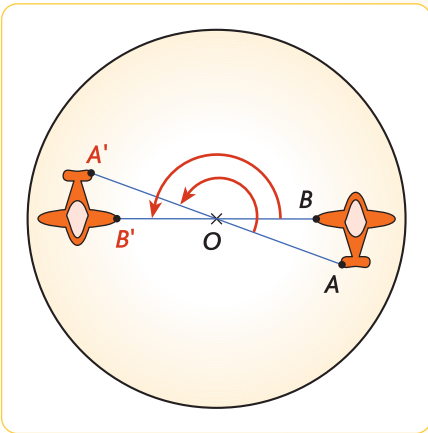
3.2.01., 3.2.05., 4.2.07., 4.2.14–18.

KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS, KÖZÉPPONTOSAN SZIMMETRIKUS SÍKIDOMOK



Az egyik vidámparkban olyan körhinta van, amelyen egy tengely körül forgó lapra „járműveket” szereltek.

A körhintára szerelt „járművek” minden pontja köríven mozog a tengely körül. Ha egy időtartam alatt 180° -os szöggel elfordul a lap, akkor a járművek minden pontja a lappal együtt elmozdul, és 180° -os középponti szöghöz tartozó köríven mozog. A körhinta foroghat (felülről nézve) az óramutató járásával megegyező (negatív), illetve azzal ellentétes (pozitív) irányban.

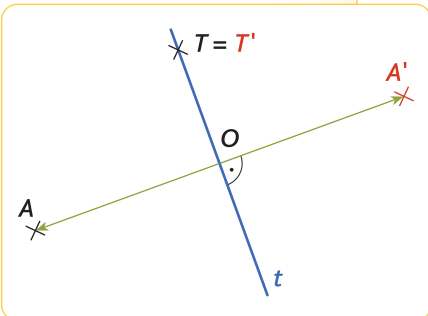


Ha csak a forgó lap síkjában vizsgálódunk, akkor a lap a középpontja körül fordul el (ebben a pontban rögzítették a tengelyhez). Egy időtartam alatt egy kis „jármű” alapjának egyik pontja 180° -os irányított szöggel forduljon el a középpont körül. Mivel a kis „jármű” a mozgás közben nem változik meg, alapjának minden pontja ugyanakkora (180° -os) irányított szöggel fordul el a középpont körül. Az elfordulás közben nem változik meg a „jármű” pontjainak és a középpontnak a távolsága. **Például:**

$$OA = OA'; \quad OB = OB'$$

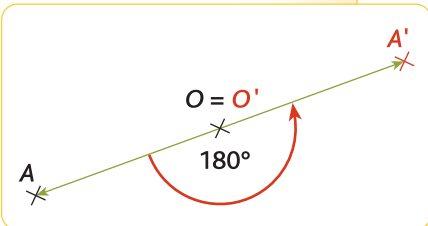
1. példa

Figyeljük meg a tengelyes tükrözés és a 180° -os forgatás közötti hasonlóságot és különbséget!



A tengelyes tükrözés a tengely pontjait helyben hagyja. A tengelyre nem illeszkedő pont és a képe egyenlő távolságra, de ellenkező irányban van a tengelytől.

Ezért ha az A pont képe az A' , akkor az A' képe az A .



A 180° -os forgatás a középpontot helyben hagyja. A középponttól különböző pont és a képe egyenlő távolságra, de ellenkező irányban van a középponttól.

Ezért ha az A pont képe az A' , akkor az A' képe az A .

A két transzformáció hasonlóságából ered a 180° -os forgatás elnevezése is.

Értelmezés

Egy adott O pont körüli 180° -os elforgatást a síkban **középpontos tükrözésnek**, a 180° -os forgatás középpontját a **tükrözés középpontjának, centrumának** nevezzük.

FELADATOK

16

Az $ABC\triangle$ csúcspontjainak koordinátái: $A(4; 3)$, $B(7; 6)$, $C(2; 6)$.

Ábrázold a háromszöget a koordináta-rendszerben!

- a) Képezd az A' , B' , C' pontokat úgy, hogy az A , B , C pontok koordinátáit ellentettjére változtasd!

Ábrázold ugyanebben a koordináta-rendszerben az $A'B'C'\triangle$ -et!

- b) Az AA' , BB' , CC' szakaszok hol metszik egymást?

- c) A metszésponttól milyen távolságra van az A és az A' ; a B és a B' ; a C és a C' ?

☉ Milyen kapcsolat van az $ABC\triangle$ és az $A'B'C'\triangle$ között?

17

Arnold és Brúnó a következő társasjátékot játszották: Egy 6×6 -os négyzetrácsos lapon felváltva 1, 2 vagy 3 kis négyzetet kiszínezték úgy, hogy az egyszerre kiszínezett rész négyszög vagy hatszög legyen. Az nyert, aki az utolsó kis négyzetet kiszínezte.

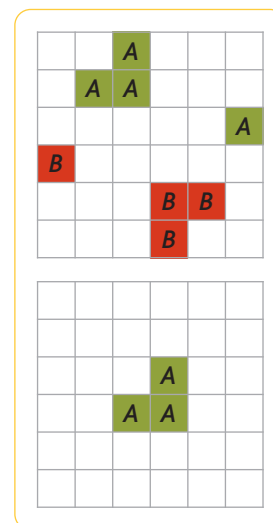
- a) Az egyik játszma-ban ez volt Arnold és Brúnó első két lépése. Arnold kezdett.

Átvéve Brúnó szerepét, meg tudnád-e nyerni a játszmát, akármilyen ügyesen játszik is Arnold?

- b) Arnold most így kezdte a játszmát.

Tudnád-e folytatni Brúnó szerepében, hogy biztosan nyerj?

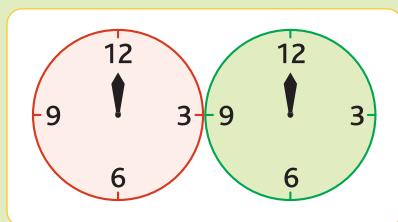
- c) Ha 5×5 -ös négyzetrácsos lapon játszanák ezt a játékot, akkor melyik játékosnak lenne nyerő stratégiája?



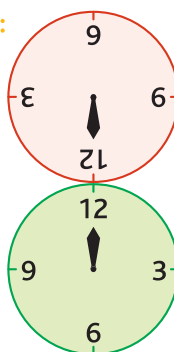
18

Melyik ábrát kapjuk, ha a piros órászámlapot rágördítjük a zöld óralap tetejére?

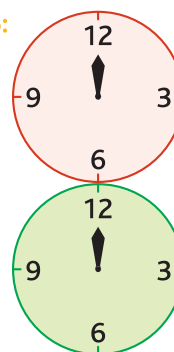
Kísérletezz!



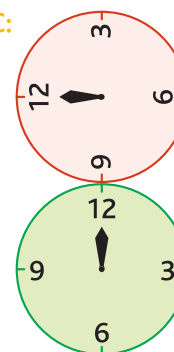
A:



B:

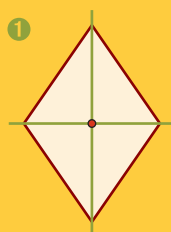


C:

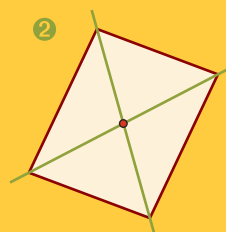


Ödömér szerint, ha egy síkidomnak több szimmetriatengelye van, és azok metszéspontjára tükrözzük a síkidomot, akkor az eredeti és a tükrözött alakzat kölcsönösen fedik egymást. Ezt az állítást a következő ábrákkal „igazolta”. Mi a véleményed erről az állításról és „bizonyításról”?

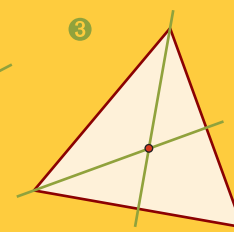
1



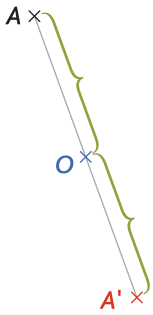
2



3



2. példa



Rajzoljunk egy $ABC\Delta$ -et. Vegyünk föl a síkon egy O pontot.

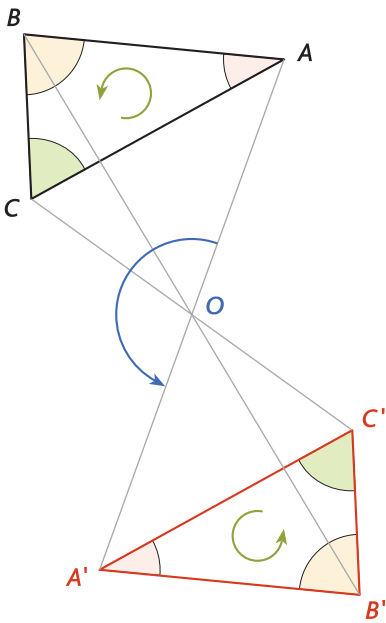
Tükrözzük az $ABC\Delta$ -et az O pontra, vagyis hajtsuk végre a következő geometriai transzformációt:

Az O pont képe legyen saját maga, $O' = O$.

Az A pont képét úgy kapjuk, hogy az A és az O ponton át egyenest húzunk, és az O ponttól ellenkező irányban felmérjük az OA távolságot, $OA = OA'$.

Ugyanígy szerkesztjük meg a sík többi pontjának képét is.

Figyeljük meg a transzformáció tulajdonságait.



Megfigyeléseink

- 1 Az O pont felezi a pont és a képe közti távolságot:

$$AO = OA', \quad BO = OB', \quad CO = OC'$$

- 2 Bármely szakasz és a képe egyenlő hosszúságú:

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A'$$

Egybevágósági transzformációt kaptunk:

$$ABC\Delta \cong A'B'C'\Delta$$

- 3 Bármely szög és a képe egyenlő nagyságú:

$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C'$$

- 4 Bármely szakasz és a képe párhuzamos egymással:

$$AB \parallel A'B', \quad BC \parallel B'C', \quad CA \parallel C'A'$$

- 5 Az $ABC\Delta$ és az $A'B'C'\Delta$ körüljárási iránya megegyezik.

- 6 A sík O pontra történő tükrözése megvalósítható a sík O pont körüli 180° -os elforgatásával, vagyis síkmozgással.

Kísérletezz!

Ha a fenti ábrát áttetsző lapra lemásoljuk, és a lapot elforgatjuk az O pont körül 180° -kal, akkor az $ABC\Delta$ és az $A'B'C'\Delta$ helyet cserél. Ugyanis a félegyenes és a 180° -os elforgatottja együtt egy egyenest alkot, amelyen az O ponttól egyenlő távolságra van például az A pont és az O pont körül elforgatott képe, az A' pont.

FELADATOK

- 19 Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(2; 1)$, $B(3; 7)$, $C(9; 5)$.

- a) Rajzold meg a háromszöget a derékszögű koordináta-rendszerben!
- b) Tükrözd a háromszöget az x tengelyre, majd az így kapott síkidomot az y tengelyre!

Milyen egyetlen mozgással helyettesíthető a két tükrözés egymásutánja?

© Milyen kapcsolatot fedezettél fel az eredeti háromszög és a tükrözéssel kapott háromszögek csúcsainak koordinátái között?

20

Szerkessz háromszöget, ha oldalainak hossza 3 cm, 4 cm, 5 cm!

Tükrözd az O pontra középpontosan, ha

- az O a háromszög egyik csúcsa;
- az O a háromszög belsejében van;
- az O a háromszögon kívül helyezkedik el;
- az O a háromszög egyik oldalának felezőpontja;

☉ Hasonlítsd össze a háromszöget a középpontos tükröképével (oldalhossz, szög, körüljárás iránya)!

21

a) Adott AB szakasz felezőmerőlegesének tetszőleges pontjára tükrözd a szakaszt! Az eredeti szakasz és a tükörképe mely esetben lehet egy négyszög két oldala?

- Rajzold meg a négyszöget, és sorold fel a tulajdonságait!
Hány ilyen négyszög állítható elő?

- Mitől függ a keletkezett négyszög területe?

☉ Hogyan szerkesztjük meg egy szakasz felezőmerőlegesét?
Milyen négyszöget kaptál?

22

Egy 4 cm oldalú szabályos háromszöget tükrözz oldalának felezőpontjára!

- Milyen négyszöget alkot az eredeti háromszög és a képe együtt?
- A kapott négyszög átlói milyen helyzetűek? Miért?

23

Szerkessz derékszögű háromszöget, amelynek befogói 4 cm és 6 cm hosszúak! Milyen alakzatot alkot az eredeti háromszög és a képe, ha a háromszöget tükrözd

- a rövidebb befogó felezőpontjára;
- a hosszabb befogó felezőpontjára;
- az átfogó felezőpontjára?

Az eredeti háromszög és a három tükrözés után kapott három háromszög együtt milyen síkbeli alakzatot alkot?

Hasonlítsd össze ezen síkbeli alakzat kerületét, területét az eredeti háromszög kerületével, területével!

☉ Emlékszel? A derékszögű háromszögben a derékszöget közrefogó két oldalt nevezzük befogónak, a derékszöggel szemközti oldalt pedig átfogónak.

24

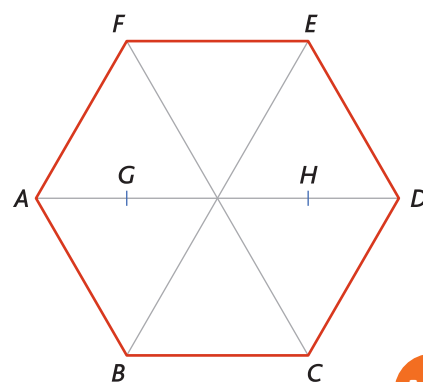
Szerkessz olyan trapézt, amelynek alapjai 4 cm, 6 cm, szárjai 3 cm-esek!

- Tükrözd a trapézt egyik szárának felezőpontjára!
- Milyen síkbeli alakzatot alkot az eredeti trapéz és a tükrözés után kapott trapéz együtt?
- Mekkora az eredeti trapéz és az egyesített síkbeli alakzat területének aránya?

Gyakorló
6.21–6.30.;
Feladatgyűjtemény
4.2.08., 4.2.10., 4.2.19.

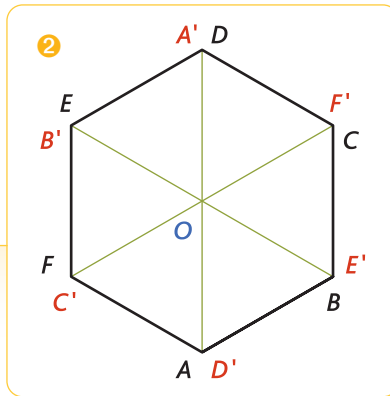
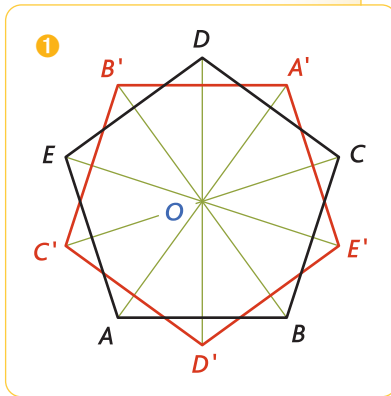


Szerkessz szabályos hatszöget, majd szerkeszd meg a G és a H pontot az ábra szerint! Tükrözd a szabályos hatszöget a G , majd a H pontra. Hány oldalú sokszöget kaptál? Hogyan aránylik egymáshoz az eredeti hatszög és a kapott sokszög kerülete és területe?



3. példa

Tükrözzük a szabályos ötszöget, illetve a szabályos hatszöget a köré írható kör középpontjára. Mit tapasztalunk?



- 1 Ha a szabályos ötszöget tükrözzük az O pontra, akkor egy tízágú „csillagot” kapunk.
- 2 Ha a szabályos hatszöget tükrözzük az O pontra, akkor a tükörkép és az eredeti hatszög kölcsönösen fedik egymást.

☉ Az internet segítségével vizsgálj például Penrose néhány művét! Találsz középpontos szimmetriát alkalmazó alkotásokat?

Értelmezés

Középpontosan szimmetrikus a síkbeli alakzat, ha van olyan középpontos tükrözés, amely az alakzatot önmagába viszi át.



Például a szabályos hatszög középpontosan szimmetrikus alakzat, a szabályos ötszög középpontosan nem szimmetrikus.

A paradicsom keresztmetszete, a képen látható virág, a hópihe nemcsak tengelyes szimmetriával, hanem középpontos szimmetriával is jellemezhető.

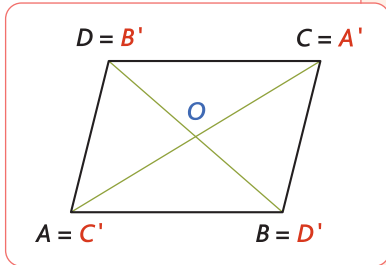
Tétel

A paralelogramma középpontosan szimmetrikus négyszög.

Bizonyítás

Tükrözzük az $ABCD$ paralelogrammát a BD átló O felezőpontjára. Ekkor $B' = D$, és $D' = B$.

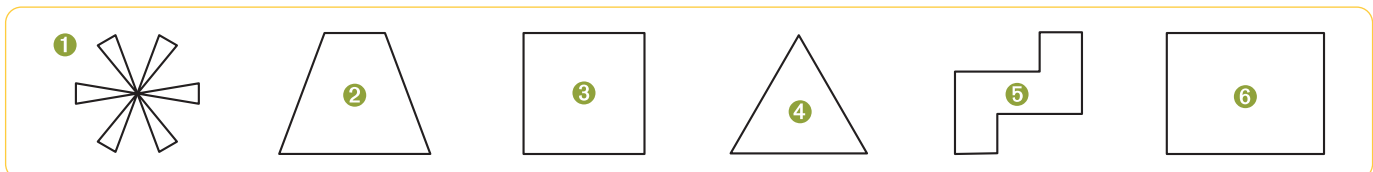
A középpontos tükrözés tulajdonságai alapján: $AB = A'B'$, és $AB \parallel A'B'$. Ezért az A pont képe csak a C pont lehet (és viszont): $A' = C$, $C' = A$.



FELADATOK

25 Válaszd ki az alakzatok közül azokat, amelyek

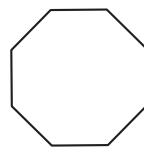
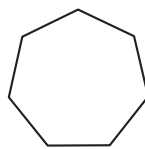
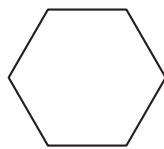
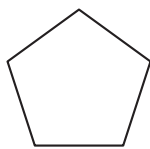
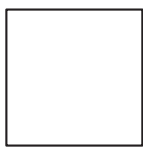
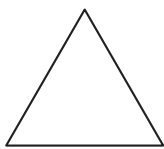
- a) középpontosan szimmetrikusak; b) tengelyesen szimmetrikusak!



26

Hány szimmetriatengelye van a szabályos háromszögnek, négyszögnek, öt-
szögnek, hatszögnek, ... n -szögnek? Melyeknek van szimmetria-középpontja?

Gyakorló
6.31.

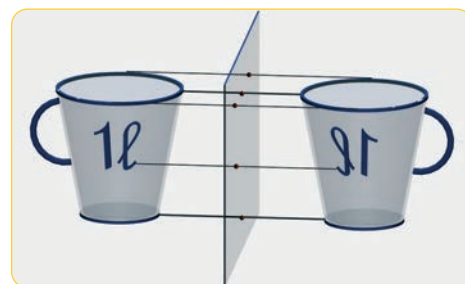


27

Melyek a középpontosan szimmetrikus nyomtatott nagybetűk?

Korábban láttuk, hogy a síkbeli tengelyes tükrözésnek a térben a **síkra tükrözés** felel meg.

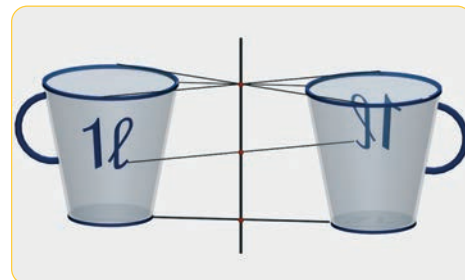
A **tükrösík** minden pontjának a képe ön maga. Bármely, a tükrösíkra nem illeszkedő P pontnak az a P' pont a tükörképe, amelyre igaz, hogy a PP' szakaszt a tükrösík merőlegesen felezi. Azaz a P' pont a P pontból a tükrösíkra bocsátott merőleges egyenesre illeszkedik, ugyanakkora távolságra van a tükrösíktól, mint a P pont, de a tükrösík által meghatározott másik féltérben van.



A síkbeli középpontos tükrözésnek a térben a **tengelyes tükrözés**, azaz a tengely körüli 180° -os elforgatás felel meg. Tehát egy test és a tengelyes tükörképe kölcsönösen fedésbe hozható egymással.

A **tükrötengely** minden pontjának a képe ön maga.

Bármely, a tükrötengelyre nem illeszkedő P pontnak az a P' pont a tükörképe, amelyre igaz, hogy a PP' szakaszt a tükrötengely merőlegesen felezi.



A térben is értelmezhetjük a **középpontos tükrözést**.

A **tükrörközéppontnak** a képe ön maga.

Bármely, a tükrörközéppontra nem illeszkedő P pontnak az a P' pont a tükörképe, amelyre igaz, hogy a PP' szakaszt a tükrörközéppont felezi.

A középpontos tükrözés helyettesíthető egy síkra tükrözés és egy tengelyes tükrözés egymás utáni végrehajtásával.



A szélességi és hosszúsági körök hálózata alkotja a **földrajzi fókálózatot**. Ennek segítségével egyértelműen meghatározható a Föld felszínén minden pont helye két koordinátával. Megállapodás szerint az **Egyenlítő** a 0° -os **szélességi kör**, ettől északra haladva 90° -ra van az Északi-sark, délre 90° -ra a Déli-sark. A 0° -os **hosszúsági kör** pedig London egyik külvárosán, Greenwichen halad át. Innen keletre és nyugatra is 180° -ra van felosztva a földgolyó. Így például Balatonalmádi koordinátái: É 47° , K 18° . Mit kell tennünk ebben a koordináta-rendszerben a koordinátákkal, ha tükrözni szeretnénk Balatonalmádit

- a) az Egyenlítő síkjára;
- c) a Föld középpontjára;

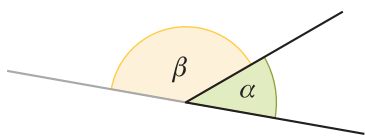
- b) a kezdő hosszúsági kör síkjára;
- d) a Föld forgástengelyére?



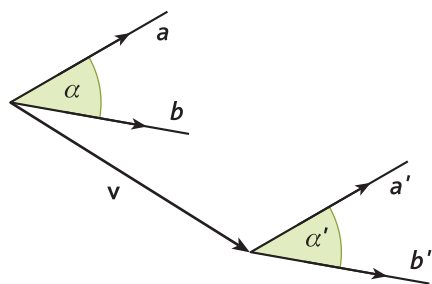
Keleti hosszúság $180^\circ =$
= nyugati hosszúság 180°

SZÖGPÁROK

1. példa



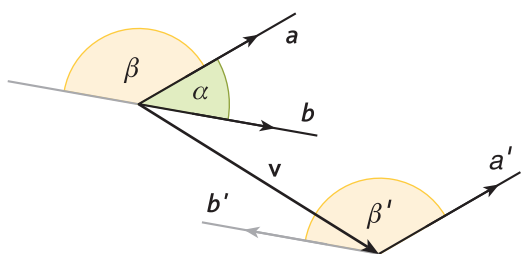
- a) Adott α szöget toljunk el egy v vektorral. Milyen kapcsolat van az α szög és az α' szög között?
- b) Jelölje az α szög **mellékszögét** β . Legyen β' a β szög képe az eltolásban. Milyen kapcsolat van az α szög és a β' szög között?



- a) Az eltolásban bármely alakzat képe, így a szög képe is vele egybevágó alakzat. **A szög és a képe egyenlő nagyságú, megfelelő szárai párhuzamosak.**

A szögek szárai félegyenesek. A párhuzamos félegyenesek lehetnek egyirányúak, illetve ellentétes irányúak.

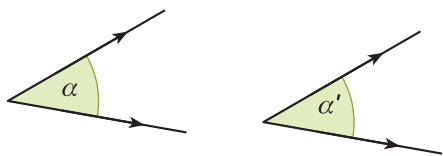
Az α és az α' megfelelő szárai egyirányúak.



- b) Az α és a β' szárai is páronként párhuzamosak, és a β' szög a β szög képe, ezért 180° -ra egészíti ki az α szöget.

Az α és a β' egy-egy szára egyirányú, egy-egy szára ellentétes irányú.

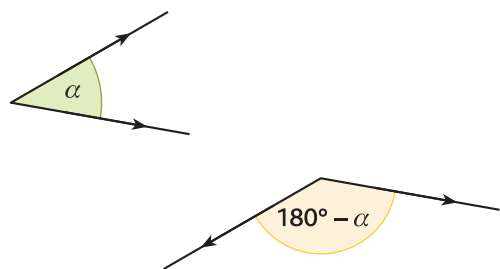
Értelmezés



Az olyan szögpárokat, amelyeknek szárai páronként párhuzamosak, **párhuzamos szárú szögeknek** nevezzük.

Az olyan párhuzamos szárú szögeket, amelyeknek szárai egyirányúak, **egyállású szögeknek** nevezzük.

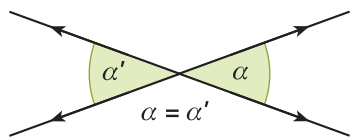
Az egyállású szögek egyenlő nagyságúak.



Az olyan párhuzamos szárú konvex szögeket, amelyeknek egy-egy szára egyirányú, egy-egy szára pedig ellentétes irányú, **társszögeknek** nevezzük.

A társszögek összege 180° .

Azokat a társszögeket, amelyeknek közös csúcsuk van, **mellékszögeknek** nevezzük.



Az α szöget a csúcsára tükrözzük.

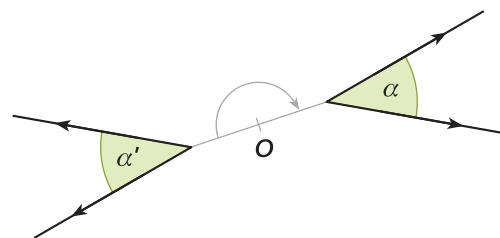
Az α és α' szög egymással egyenlő, csúcsaik egybeesnek, szárai ellentétes irányúak.

Az ilyen szögeket **csúcshögeknek** nevezzük.

»»

Az α szög szárait az O pontra tükrözzük. Az α és α' szög szárai párhuzamosak, de ellentétes irányúak. Az ilyen szögeket **váltószögeknek** nevezzük. A csúcsszögek is váltószögek.

A váltószögek egyenlő nagyságúak.



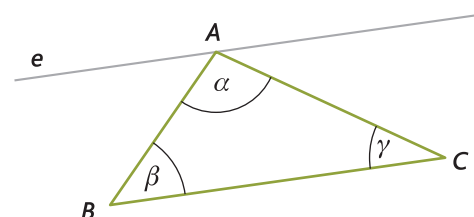
FELADATOK

28

Az $ABC\triangle$ A csúcsán át húzott e egyenes párhuzamos a BC oldallal.

Keress az ábrán szögpárokat!

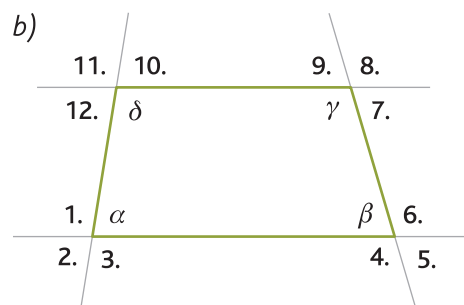
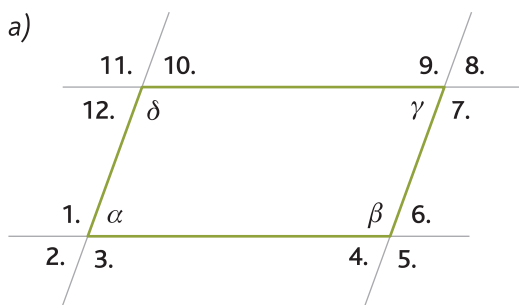
Mely összefüggés igazolható az ábra segítségével?



29

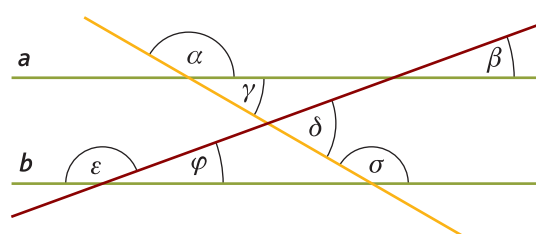
Keress az ábrán szögpárokat! Fogalmazd meg észrevételeidet!

Gyakorló 6.24., 6.30.

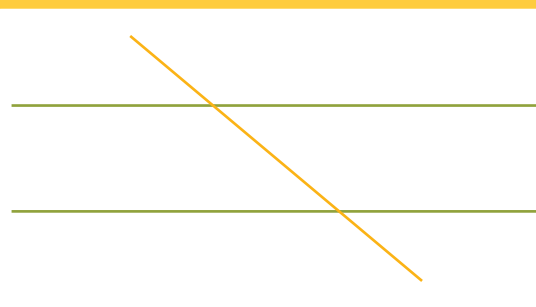


30

Hány fokok a megjelölt szögek, ha $a \parallel b$; $\alpha = 150^\circ$, $\beta = 20^\circ$?



Messünk el két párhuzamos egyenest egy harmadikkal! Szerkesszük meg a metszéspontokban keletkezett szögek felezőit! A szögfelezők milyen síkidomot zárnak közre?



AZ ELFORDULÁS MÉRTÉKE

A szögtartományt jól jellemezhattük a nagyságával. Az elfordulások mértékének meghatározásához ez már nem elegendő.

1. példa

Egy vitorlás kezdetben észak felé halad. A haladási irányától először nyugat felé fordul el 45° -kal, majd kelet felé 60° -kal.

Milyen irányban halad a vitorlás a két elfordulás után?

Megállapodhatunk a következőkben:

Ha a haladási iránytól balra fordul el a hajó, akkor azt pozitív, ha jobb felé fordul el, akkor azt negatív elfordulásnak tekintjük.

$$(+45^\circ) + (-60^\circ) = -15^\circ$$

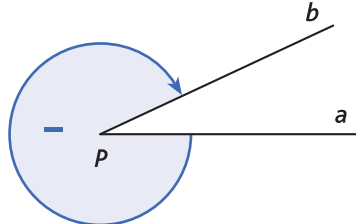
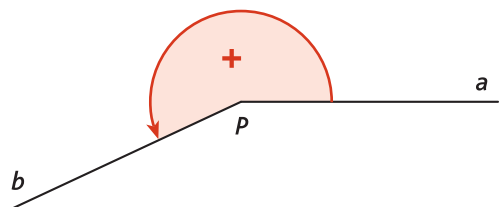
A hajó 15° -kal jobbra, vagyis kelet felé tért el az eredeti északi iránytól.

Megállapodás

Az elfordulást irányított szöggel jellemezhetjük.

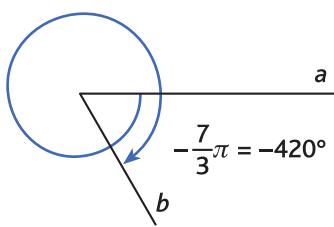
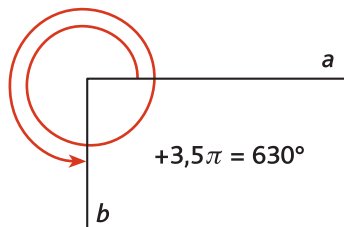
Ha a szög a és b szára egybeesik, az **nullszög**.

Rögzítsük a P kezdőpontú a félegyenest. A b félegyenest kétféle irányban forgozhatjuk el a P pont körül. Megállapodás szerint



pozitívnak tekintjük az óramutató járásával ellentétes irányú elfordulást; negatívnak tekintjük az óramutató járásával megegyező irányú elfordulást.

Az elfordulás abszolútértéke annak a szögnek a nagysága, amelyet az elforgatott szög szár súrol.



Az elfordulás abszolútértéke nagyobb is lehet a teljes szögnél.

Az elforgatott szög szár többször is súrolhatja ugyanazt a síkrészt.

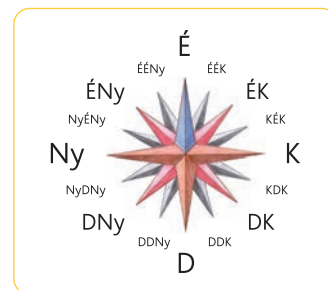
FELADATOK

B4

Mekkora az elfordulás együttes mértéke, ha északi irányból kiindulva kétszer változtatunk irányt: egyszer hátraarcot, majd egyszer jobbraátot végzünk?

B5 Mekkora az elfordulás mértéke, ha

- keleti irányból északi irányba fordulunk;
- keleti irányból déli irányba fordulunk;
- keleti irányból északkeleti irányba fordulunk;
- keleti irányból északnyugati irányba fordulunk;
- északkeleti irányból keleti irányba fordulunk;
- északkeleti irányból délkeleti irányba fordulunk?

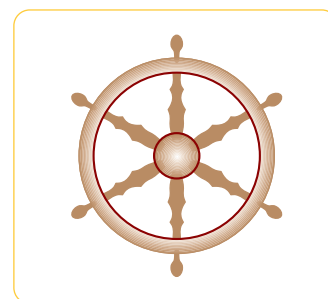


B6 Mekkora az elfordulás együttes mértéke, ha északi irányból kiindulva kétszer változtatunk irányt?

- először $+90^\circ$ -kal, majd $+45^\circ$ -kal térünk el;
- először $+45^\circ$ -kal, majd -90° -kal térünk el;
- először -90° -kal, majd -30° -kal térünk el;
- először $+60^\circ$ -kal, majd -90° -kal térünk el?

B7 Hány fokkal fordul el a hajókormány, ha

- balra kétszer teljesen körbefordul;
- jobbra ötször teljesen körbefordul;
- balra két és félszer körbefordul;
- balra kétszer, majd jobbra négyszer teljesen körbefordul?



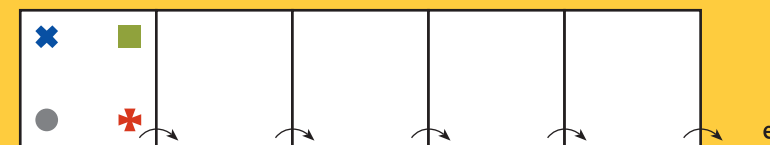
B8 a) Hány fokkal fordul el az óra kismutatója az alatt, míg a nagymutató 360°-kal; 180°-kal; 120°-kal; 720°-kal fordul el?

b) Hány fokkal fordul el a nagymutató az alatt, míg a kismutató 30°-kal; 5°-kal; 10°-kal; 45°-kal fordul el?

Gyakorló 7.15–7.24.



Az *e* egyenesen egy négyzetet görgetünk. Az első négyzetbe 4 különböző jelet rajzoltunk. Rajzold be az üres négyzetekbe a jeleket!

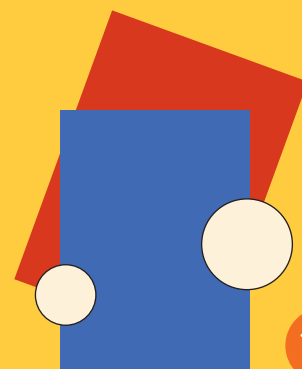


Az asztalon két könyv fekszik egymáson, és rajtuk két pénzérme. Hol tudnánk megmérni a pénzérmékkel letakart szögek nagyságát, ha nem mozdíthatjuk el a kompozíciót?

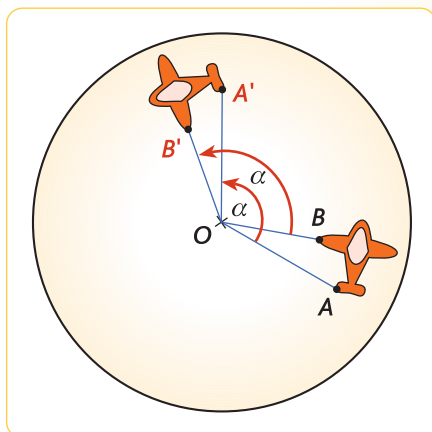


Ödömér az 1-es számjegyet „l”-nek, a 8-as számjegyet középpontosan szimmetrikusnak írja, így: 8. Hány olyan hatjegyű számot tud leírni Ödömér, amelyik az ő kézírásában középpontosan szimmetrikus?

A: 125-öt; B: 100-at; C: 64-et; D: 27-et



FORGATÁS, FORGÁSSZIMMETRIKUS SÍKIDOMOK

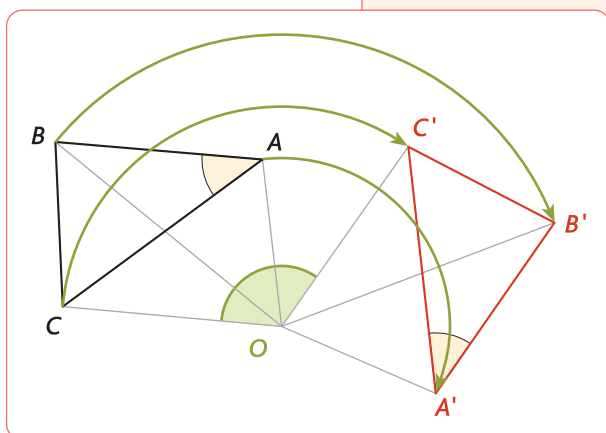


Folytassuk a korábban látott vidámparki körhinta forgásának a vizsgálatát.

A vizsgálatot az alaplap síkjában végezzük. Tekintsük azt az esetet, amikor az alaplapon egy kis „jármű” alapjának egyik pontja tetszőleges α irányított szöggel fordul el az O pont körül. Mivel forgás közben a „jármű” alakja és mérete változatlan marad, alapjának minden pontja ugyanakkora α irányított szöggel fordul el az O pont körül. A forgatáskor nem változik meg a „jármű” pontjainak és a középpontnak a távolsága sem. **Például:**

$$OA = OA'; \quad OB = OB'$$

Értelmezés



Ha a sík vagy a sík egy alakzatának minden pontját egy rögzített O pont körül ugyanabban az irányban, ugyanakkora szöggel elforgatjuk, akkor minden pontjához egyértelműen pontot rendelünk.

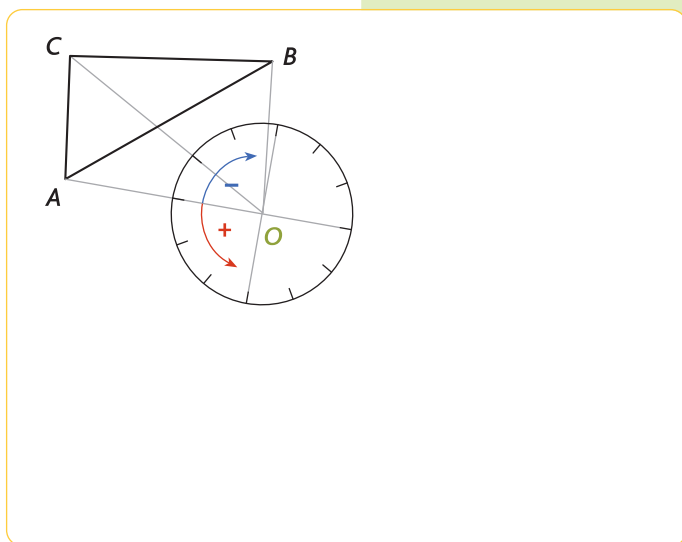
Ezt a mozgást **forgatásnak** nevezzük.

A forgatás egybevágósági transzformáció.

FELADATOK

31

Kísérletezz!



Másold le pauszpapírra az ABC háromszöget!

A pauszpapírra rajzolt háromszög megfelelő csúcsait jelölje A' , B' , C' . Másold rá a pauszpapírra az O pontot is. Rajzold meg az OA' , OB' , OC' szakaszokat! Rögzítsd (gombostűvel) a pauszpapírt a könyv lapjára az O pontban úgy, hogy a két háromszög kölcsönösen fedje egymást! Forgasd el a síkot (pauszpapírt) úgy, hogy az

- a) $\angle AOA' \triangleleft +60^\circ$; b) $\angle AOA' \triangleleft -120^\circ$;
- c) $\angle AOA' \triangleleft +180^\circ$; d) $\angle AOA' \triangleleft -180^\circ$;
- e) $\angle AOA' \triangleleft +90^\circ$; f) $\angle AOA' \triangleleft -270^\circ$

legyen! Fogalmazd meg megfigyeléseidet!

A fokbeosztást 30° -onként adtuk meg.

1. példa

Adott O és A pont távolsága 2 cm. Mozgassuk el az A pontot a papírlap síkjában úgy, hogy közben az O ponttól való távolsága változatlanul 2 cm maradjon.

- Jelöljük meg az így kapható pontok közül néhánynak a helyét a lapon.
- Szerkesszünk olyan A' síkbeli pontot, amely az O ponttól 2 cm-re van, és az $\angle AOA' = 60^\circ$.

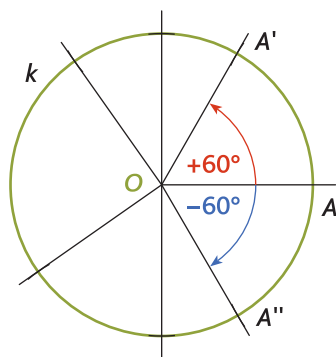
- Az O pontból húzott félegyenésekre az O pontból felmértük az $OA = 2$ cm távolságot.

Az adott tulajdonságú összes pontot az O középpontú, 2 cm sugarú k kör megszerkesztésével állíthatjuk elő. Végtelen sok megfelelő pont van.

- A körzőnyílásba vett 2 cm távolsággal az A pontból elmetsszük a k kört. Így két megfelelő pontot kapunk, az A' és az A'' pontot.

Az $\triangle AOA'$ és az $\triangle AOA''$ mindegyike egyenlő oldalú, és az $\angle AOA' = +60^\circ$, $\angle AOA'' = -60^\circ$.

Az A pontot az óramutató járásával ellentétes irányban, majd az óramutató járásával megegyező irányban forgattuk el 60° -kal.



2. példa

Rajzoljunk tetszőleges ABC háromszöget.

Pauszpapírra másoljuk át az ABC háromszöget, a csúcspontokat jelölje A' , B' , C' .

A pauszpapírt rögzítsük az O pontban úgy, hogy a két háromszög kölcsönösen fedje egymást.

Forgassuk el a síkot (a pauszt) úgy, hogy $\angle AOA' = -120^\circ$ legyen.

Megfigyeléseink:

Az elforgatás középpontja, az O pont helyben marad.

$$\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = -120^\circ$$

$$OA = OA', \quad OB = OB', \quad OC = OC'$$

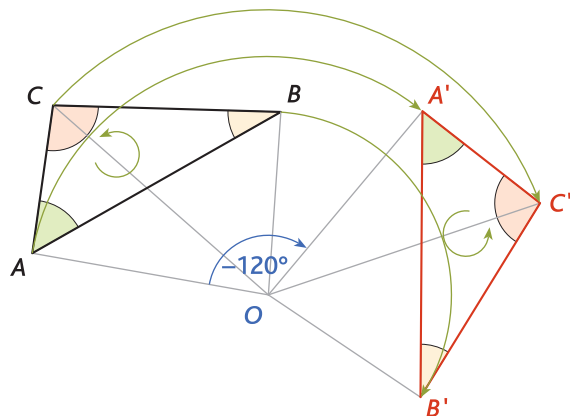
$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A'$$

A megfelelő szakaszok nem párhuzamosak.

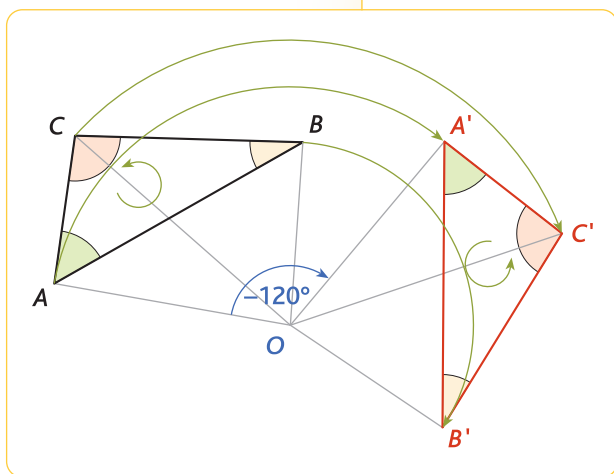
$$\angle CAB = \angle C'A'B', \quad \angle ABC = \angle A'B'C', \quad \angle BCA = \angle B'C'A'$$

Az $\triangle ABC$ körüljárásának iránya megegyezik az $\triangle A'B'C'$ körüljárásának irányával.

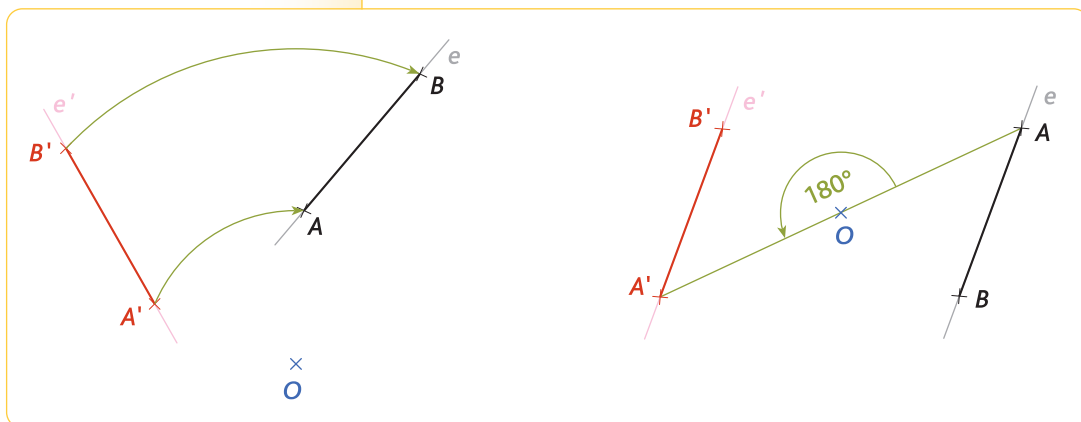
$\triangle ABC$ egybevágó az $\triangle A'B'C'$ -gel: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$



AZ ELFORGATÁS TULAJDONSÁGAI



- 1 Bármely alakzat egybevágó a forgatással kapott képével, például az egyenes képe egyenes, a szakasz képe ugyanolyan hosszú szakasz, a szög képe ugyanakkora szög.
- 2 A forgatás nem változtatja meg a síkidom körüljárásának irányát. A forgatás síkmozgás.
- 3 A forgatást a középpontja és az elfordulás (irányított) szöge egyértelműen meghatározza.
- 4 Egy egyenes (szakasz, félegyenes) csak akkor párhuzamos a forgatással kapott képével, ha a forgatás szöge 180° , vagy annak egész számú többszöröse.



- 5 Ha a síkot (alakzatot) 0° -kal, 360° -kal vagy annak egész számú többszörösével forgatjuk el, akkor minden pont képe saját maga. Ezért a helyben hagyást forgatásnak is tekinthetjük.

FELADATOK

☉ Az adatok kijelölését úgy végezd, hogy az egész ábra elférjen a füzetlapon!

☉ Hogyan szerkeszthetjük meg a szabályos háromszög szimmetriatengelyeit?

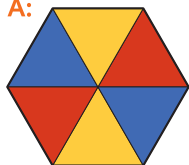
☉ Ügyesen tervezd meg a rajzot!

- B9** a) Rajzolj egy négyszöget (jelöld a csúcsoakat) és egy O pontot! Végezd fel egy α szöget, és jelöld meg a forgatás irányát! Forgasd el a négyszöget az O pont körül α szöggel! Hasonlítsd össze az eredeti négyszögnél és képénél oldalait, szögeit, körüljárási irányát!
- b) Szerkessz 4 cm oldalú szabályos háromszöget! Forgasd el egyik csúcspontja körül 120° -kal! Az elforgatás esetén van-e olyan pont, illetve egyenes, amelynek a képe önmaga?
- c) Szerkessz 5 cm oldalú szabályos háromszöget! Szerkessz meg a tükrötengelyeit! Forgasd el a háromszöget a tükrötengelyeinek metszéspontja körül $+120^\circ$ -kal!
-
- B10** Rajzolj egyenlő szárú derékszögű háromszöget! Forgasd el 90° -kal derékszögének csúcsa körül háromszor egymás után ugyanabban az irányban!
- A háromszögek együtt milyen sokszöget alkotnak?

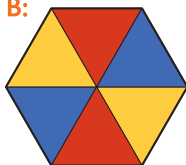
B11

Melyik színes hatszög vihető eltolással a jobb oldalon lévő ábra színezetlen részébe úgy, hogy (a színezést is figyelembe véve) középpontosan szimmetrikus alakzatot kapjunk?

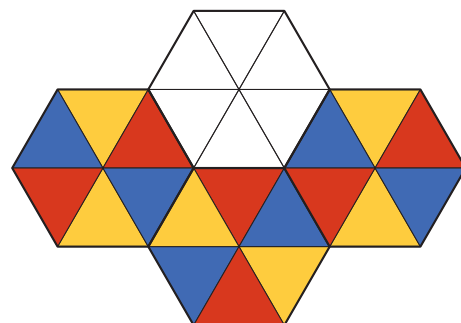
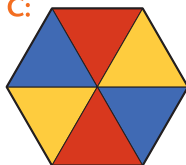
A:



B:



C:



B12

Melyik állítás hamis?

Az 1-gyel jelölt pont körül 60° -kal elforgatva

A: a 3-as jelű hatszög képe a 4-es hatszög;

☐

B: az 5-ös jelű hatszög képe a 6-os hatszög;

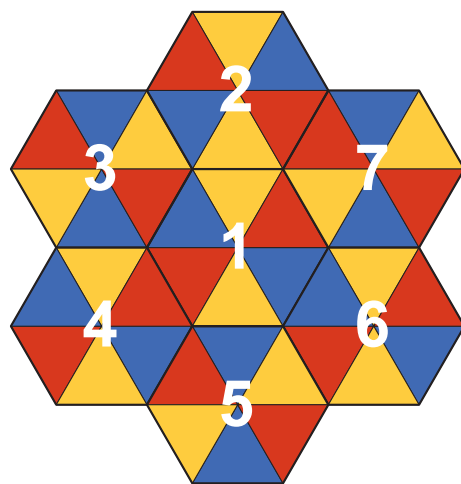
☐

C: a 7-es jelű hatszög képe a 2-es hatszög.

☐

© Írj I betűt, illetve H betűt a kis négyzetbe aszerint, hogy igaz-e vagy hamis az állítás! Az ábrák színezését is vedd figyelembe!

© A következő feladatokban áttetsző papír és gombostű segítségével kísérletezhetsz.

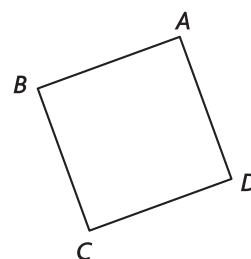


B13

Forgasd el a D pont körül az $ABCD$ négyzetet -90° -kal!

- Van-e az eredeti négyzetnek és az elforgatottjának közös része?
- Mekkora szöget zár be a négyzet DB átlója az elforgatottjával?
- Mekkora az eredeti, illetve az elforgatott négyzet területe?
- Legalább hányszor kell a -90° -os elforgatást megismételni, hogy az elforgatott négyzet egybeessen az eredetivel?
- Milyen választ adhatnál az előbbi kérdésre, ha a „legalább” szó nem szerepelne feltételként?

Kísérletezz!



B14

Végy fel egy A pontot és egy A' pontot! Az A pont elforgatottja az A' pont. Hol helyezkedik el az O pont, amely körül az A pontot elforgattuk, ha a forgatás

- 180° -os;
- -90° -os;
- $+90^\circ$ -os;
- $+60^\circ$ -os?

© Hová szúrjuk a gombostűt, ha a forgatást végre kívánjuk hajtani?

B15

Szerkessz 4 cm oldalú $ABCD$ négyzetet! Forgasd el átlóinak metszéspontja körül

- $+45^\circ$ -kal;
- -45° -kal;
- -90° -kal;
- $+270^\circ$ -kal;
- $+180^\circ$ -kal;
- -180° -kal;
- $+360^\circ$ -kal;
- -630° -kal!

☉ *Hogyan szerkesztjük meg egy háromszög belső szögfelezőjét?*

B16 Szerkessz 5 cm oldalú ABC szabályos háromszöget! Szerkeszd meg a szögfelezők metszéspontját (jelölje O)!

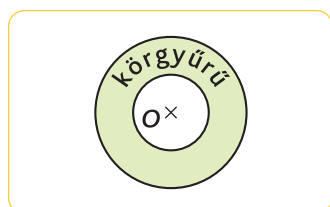
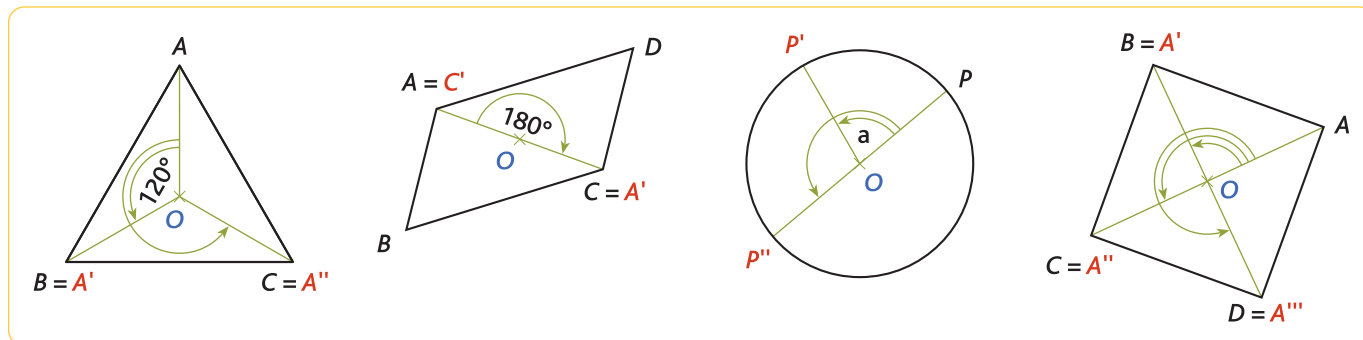
Forgasd el az O pont körül a háromszöget

- a) -60° -kal; b) $+300^\circ$ -kal; c) $+120^\circ$ -kal; d) $+840^\circ$ -kal!

Értelmezés

Egy síkbeli alakzatot **forgásszimmetrikusnak** nevezünk akkor, ha létezik olyan 0° -nál nagyobb, 360° -nál kisebb szögű elforgatás, amely a síkbeli alakzatot önmagába viszi át.

A szabályos sokszögek, a paralelogramma, a kör forgásszimmetrikus alakzatok.



A körlapot, a körgyűrűt a középpontja körüli bármekkora szöggel való elforgatás önmagába viszi át. Az ilyen forgásszimmetrikus alakzatokat **körszimmetrikusnak** nevezzük.

A 0° -os és a 360° -os elforgatás bármely síkbeli alakzatot önmagába viszi át. Ha nem zártuk volna ki ezeket az elforgatásokat, akkor bármely alakzatot forgásszimmetrikusnak kellene tekintenünk.



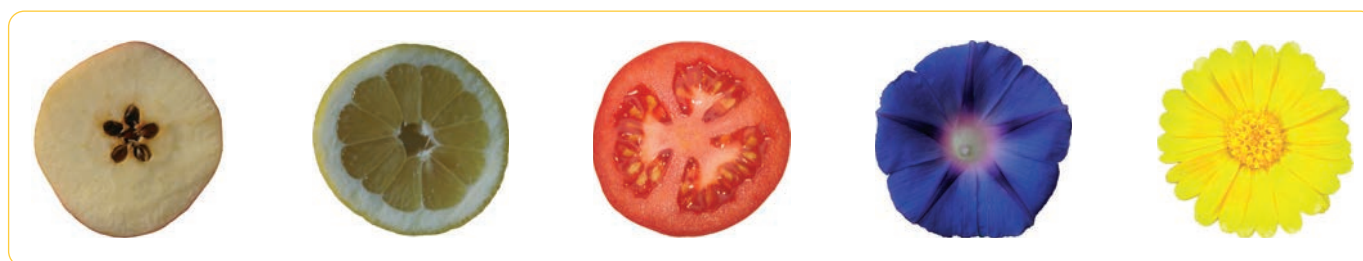
A művészetben sokszor alkalmazzák a forgásszimmetriát.

Figyeljük meg a budapesti Mátyás templom bejárata fölött lévő díszítést. A nagy körön belül a közepén lévő „rózsa” és a kis körök forgásszimmetrikus alakzatot alkotnak. A nagy kör középpontja körüli, a 60° többszöröseivel történő elforgatás ezt az alakzatot önmagába viszi át.

A kis körökben lévő alakzatok a 120° többszöröseivel forgathatók el úgy, hogy önmagukkal fedésbe kerüljenek. A szomszédos kis körök egymáshoz viszonyítva 60° -kal vannak elforgatva.

A természetben is megfigyelhetjük a forgásszimmetriát.

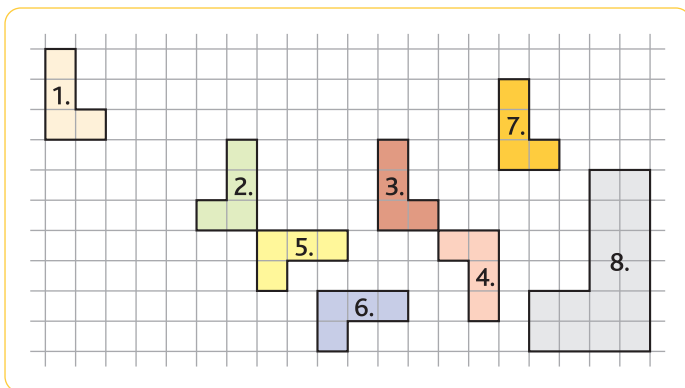
Például az alma, a citrom, a paradicsom keresztmetszete, a kék és a sárga virág forgásszimmetrikus alakzat.



GYAKORLÓ- ÉS FEJTÖRŐ FELADATOK

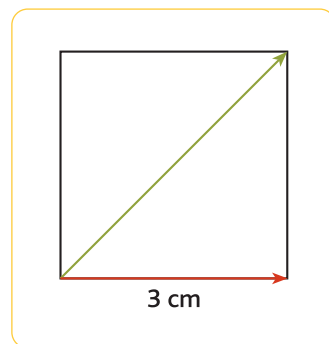
B17 Az 1–8. alakzatok közül válaszd ki az összes olyan párt, amely egymás

- eltolással kapott képe;
- tengelyes tükörképe;
- középpontos tükörképe;
- 90° -os elforgatottja!

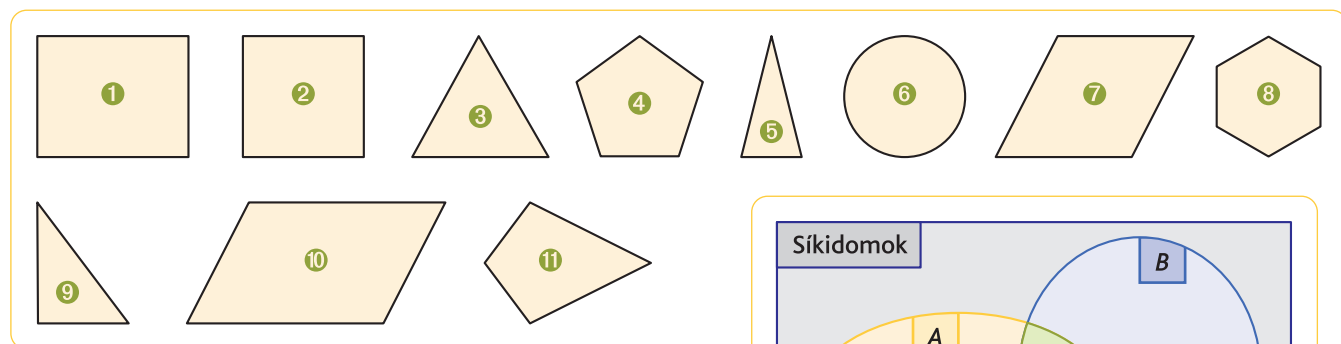


B18 Minden esetben szerkessz 3 cm oldalú négyzetet!

- Told el az egyik oldalvektor irányában az oldal hosszával!
- Told el az egyik átlóvektor irányában az átló felével!
- Told el az egyik átlóvektorának irányában az átló hosszával!
- Rajzold meg azoknak a tengelyes tükrözéseknek a tengelyeit, amelyekben a négyzet képe ugyanaz a négyzet, mint az a), b), illetve c) feladatban!
- Rajzold meg azoknak a középpontos tükrözéseknek a középpontját, amelyekben a négyzet képe ugyanaz a négyzet, mint az a), b), illetve c) feladatban!



B19 A síkidomok sorszámát írd be a halmazábra megfelelő részébe!



A címkék jelentése:

A: Tengelyesen szimmetrikus

B: Középpontosan szimmetrikus

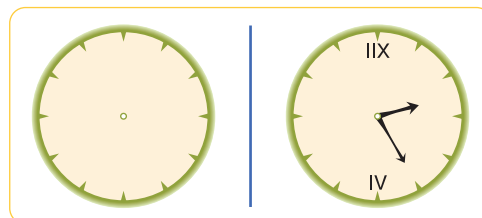
B20 Hány óra van, ha ezt látod a tükörben?

A: 2 óra 25 perc

B: 2 óra 35 perc

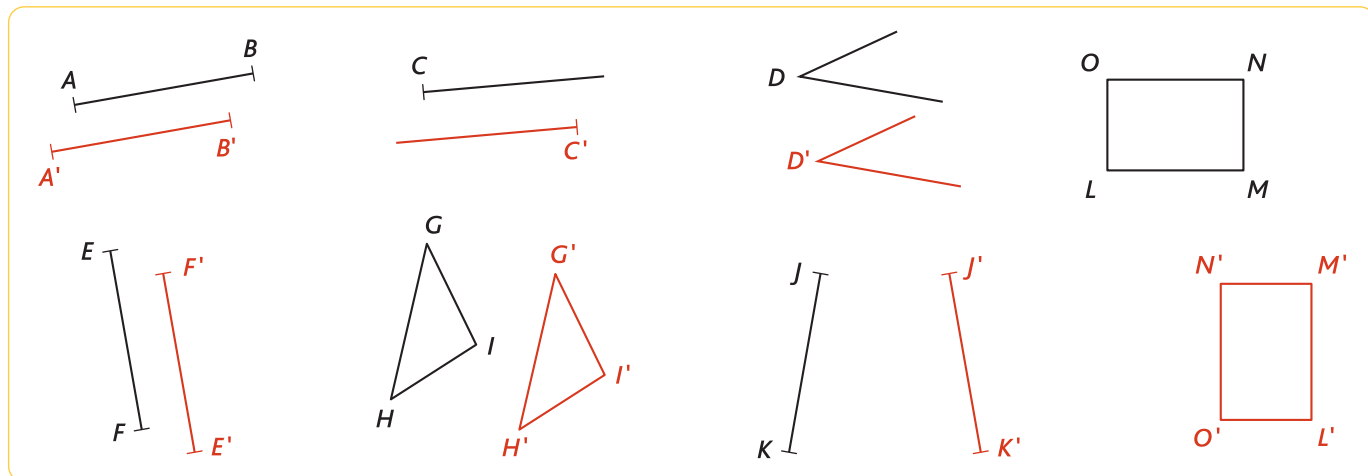
C: 9 óra 25 perc

D: 9 óra 35 perc



B21 Keresd meg azokat az alakzatkárokat, amelyek egymásból

- a) eltolással; b) tengelyes tükrözéssel; c) forgatással;
d) vagy az előző transzformációk közül kettőnek az egymás utáni végrehajtásával származtathatók!



☉ *Megrajzolható az eltolás vektora? Számítással meghatározhatók az eltolt háromszög csúcsainak koordinátái?*

☉ *Milyen tulajdonsága van a paralelogramma átlói metszéspontjának?*

☉ *Milyen kapcsolatot fedezett fel az eredeti téglalap és az elforgatott téglalap csúcsainak koordinátái között?*

☉ *Lásd az előző feladat megoldását.*

☉ *Ne feledkezz meg a fogalmak közti összefüggésekről sem!*

B22 Egy eltolás a koordináta-rendszer origóját a $(-2; -5)$ pontba viszi át. Milyen alakzatba viszi át az ABC háromszöget, ha a háromszög csúcsainak koordinátái $A(2; 2)$, $B(4; 2)$, $C(-1; -1)$? Add meg az eltolással keletkezett alakzat csúcsainak koordinátáit!

B23 Egy paralelogramma szomszédos csúcspontjai: $A(4; 1)$, $B(3; 5)$, átlóinak metszéspontja az origó. Határozd meg a másik két csúcs pont koordinátáit!

B24 Egy téglalap egyik csúcsa az origóval esik egybe, az ezzel szemközti csúcsának koordinátái $(4; 5)$, a másik két csúcsa a tengelyekre illeszkedik.

- a) Rajzold meg ezt a téglalapot a koordináta-rendszerben!
b) Forgasd el az origó körül -90° -kal!
c) Add meg az elforgatott téglalap csúcs pontjainak koordinátáit!

B25 Igazold, hogy a derékszögű koordináta-rendszerben $OA \perp OB$, ha

- a) $O(0; 0)$, $A(3; 5)$, $B(-5; 3)$; b) $O(0; 0)$, $A(3; 5)$, $B(5; -3)$!

B26 Végy fel egy A és egy B pontot! Hol legyen a szimmetria-középpont, ha azt szeretnénk, hogy a tükrözés után az A , a B pont és a pontok tükröképei egy

- a) négyzet; b) téglalap; c) deltoid; d) trapéz;
e) paralelogramma csúcs pontjai legyenek?

B27 Szerkessz 5 cm oldalú $ABCD$ négyzetet! Forgasd el az $ABCD$ négyzetet átlói metszéspontja körül $+45^\circ$ -kal! Mekkora az eredeti négyzet és az elforgatottja egyesítése nyomán nyert sokszög területe?

TUDÁSPRÓBA

32

- 1 A P és a P' pontok egymás középpontos tükrképei. Hol van a tükrözéppont?

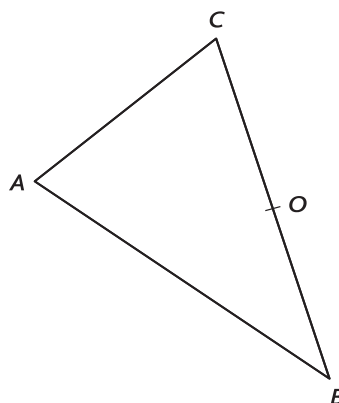
$\times$
 P

P'
 $\times$

- 2 Tükrözd középpontosan az O oldalfelező pontra az ABC háromszöget!

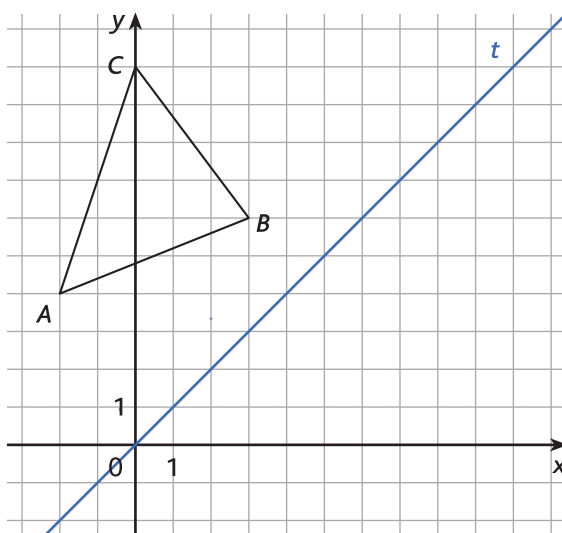
Milyen négyszög csúcsai az A, B, A', C pontok?

Sorold föl ennek a négyszögnek a tulajdonságait!



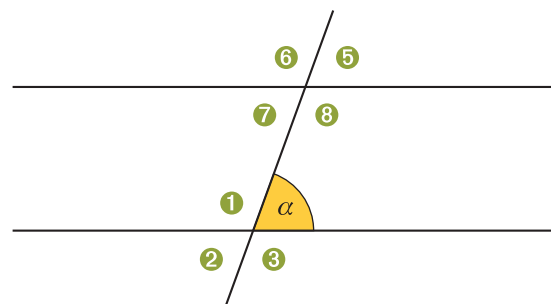
- 3 Rajzold meg az $ABC\Delta$ t tengelyre vonatkozó tükrképét!

Írd föl a háromszög és a tükrképe csúcspontjainak koordinátáit! Milyen összefüggés van a pontok és tükrképeik koordinátái között?



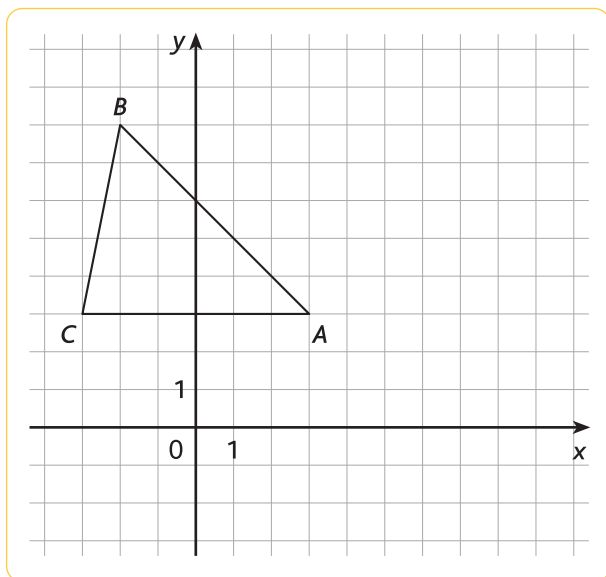
- 4 Sorold föl az α szög

társszögeit;	
egyállású szögeit;	
váltószögeit;	
mellékszögeit;	
csúcsszögeit!	



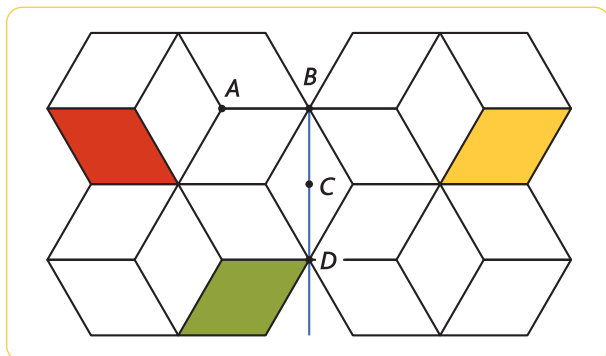
5 Rajzold meg az $ABC\triangle$ A pontra vonatkozó tükörképét!

Írd föl a háromszög és a tükörképe csúcspontjainak koordinátáit!



Az ábra alapján sorold föl a középpontos tükrözés tulajdonságait!

6 a) Mely transzformációval kapható meg a piros rombuszból a narancssárga rombusz?



A: A C pontra tükrözéssel.

B: A BC tengelyre tükrözéssel.

C: A D pont körüli -120° -os elforgatással.

☉ **Karikázd be a hibás válasz betűjelét!**

b) Mely transzformációval kapható meg a piros rombuszból a zöld rombusz?

A: A C pont körüli $+90^\circ$ -os elforgatással.

B: A B pont körüli $+60^\circ$ -os elforgatással.

C: Eltolással.

☉ **Karikázd be a helyes válasz betűjelét!**

7 a) Mely autóemblémák látszanak a visszapillantó tükörben ugyanolyannak, mint a valóságban?

b) Mely emblémák néznek ki ugyanúgy, ha véletlenül megfordítva, „fejjel lefelé” szerelik fel őket?

☉ **Sorold fel a helyes válaszoknak megfelelő betűjeleket!**

A: Mercedes;

B: Opel;

C: Renault;

D: Volkswagen;

E: Chevrolet



4.

ALGEBRA

Ebben a fejezetben a számokról, műveletekről korábban tanultakat általánosítjuk. Így olyan fogalmakkal és eljárásokkal ismerkedünk meg, amelyek segítségével az egyenletmegoldás lépéseit, illetve a geometriában és a függvénytanban tanult képleteket tudatosabban tudjuk alkalmazni.

A matematikának a műveletek általánosításával, a műveleti tulajdonságok vizsgálatával, valamint az egyenletek megoldásával foglalkozó ágát **algebrának** nevezzük.



MŰVELETI TULAJDONSÁGOK

Emlékeztető

Az összeg tagjai, illetve a szorzat tényezői **fölcserélhetők**.

$$a + b = b + a;$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$2 + 5 = 5 + 2;$$

$$2 \cdot 5 = 5 \cdot 2;$$

$$3 + (-4) = (-4) + 3;$$

$$3 \cdot (-4) = (-4) \cdot 3;$$

$$x + 2 = 2 + x;$$

$$x \cdot 2 = 2 \cdot x$$

Az összeg tagjai, illetve a szorzat tényezői **tetszőlegesen csoportosíthatók** (zárójelezhetők).

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c);$$

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$5 + 2 + 8 = (5 + 2) + 8 = 5 + (2 + 8);$$

$$5 \cdot 2 \cdot 8 = (5 \cdot 2) \cdot 8 = 5 \cdot (2 \cdot 8);$$

$$2 + x + 2x = (2 + x) + 2x = 2 + (x + 2x);$$

$$2 \cdot x \cdot x^2 = (2 \cdot x) \cdot x^2 = 2 \cdot (x \cdot x^2)$$

Összeg, különbség szorzása

Összeget vagy különbséget kétféleképpen szorozhatunk egy számmal:

Elvégezzük a zárójelben lévő műveleteket, majd ennek eredményét szorozzuk a számmal, vagy

az összeg, illetve a különbség minden tagját megszorozzuk a számmal, és utána végezzük el az összeadást, illetve kivonást.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$4 \cdot (9 + 6) = 4 \cdot 15 = 60$$

vagy

$$4 \cdot (9 + 6) = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 36 + 24 = 60;$$

$$5 \cdot (8 - 2) = 5 \cdot 6 = 30$$

vagy

$$5 \cdot (8 - 2) = 5 \cdot 8 - 5 \cdot 2 = 40 - 10 = 30;$$

$$x \cdot (2 + 5) = x \cdot 7 = 7x$$

vagy

$$x \cdot (2 + 5) = x \cdot 2 + x \cdot 5 = 2x + 5x = 7x$$



Mezopotámiában az ékírás elősegíthette az algebrai jelrendszer és gondolkodásmód kialakulását. A mennyiségeket és a műveleteket is egy-egy jellel írták le. Az ókori görögök a mennyiségek és műveletek kezdőbetűit alkalmazták számításaikban.

A hinduk bevezették a műveleti jeleket és a zárójelek használatát is. Ezek az eredmények az arabok közvetítésével jutottak el Európába.

© *Figyeljük meg, hogy az összefüggéseket nemcsak szavakkal, hanem betűket tartalmazó egyenletek segítségével is leírhatjuk. Ezekben az egyenletekben a betűk tetszőleges számokat, azaz egy alaphalmaz tetszőleges elemeit jelentik.*

1. példa

Számítsuk ki a következő művelet sor eredményét:

$$\frac{16}{15} \cdot 5,2 - \frac{16}{15} \cdot 2,3 + \frac{16}{15} \cdot 3,8 - \frac{16}{15} \cdot 3,7$$

Többet ésszel ...

Vegyük észre, hogy mindegyik tagban $\frac{16}{15}$ az egyik tényező. Ezt úgy is értelmezhetjük, hogy egy többtagú kifejezés minden tagját szoroztuk $\frac{16}{15}$ -del.

$$\frac{16}{15} \cdot 5,2 - \frac{16}{15} \cdot 2,3 + \frac{16}{15} \cdot 3,8 - \frac{16}{15} \cdot 3,7 = \frac{16}{15} \cdot (5,2 - 2,3 + 3,8 - 3,7)$$

Célszerűbben számolhatunk úgy, hogy először a zárójelben lévő tagokat vonjuk össze. Ezek a tagok felcserélhetők és csoportosíthatók:

$$\frac{16}{15} \cdot (5,2 - 2,3 + 3,8 - 3,7) = \frac{16}{15} \cdot (\underbrace{5,2 + 3,8}_{9} - \underbrace{2,3 + 3,7}_{-6}) = \frac{16}{15} \cdot 3$$

Törtet egész számmal úgy is szorozhatunk, hogy a tört nevezőjét osztjuk az egész számmal:

$$\frac{16}{15} \cdot 3 = \frac{16}{5} = \frac{32}{10} = 3,2$$

© A számítás egyszerűsítése céljából hogyan alkalmazhatjuk azt, hogy az összeg tagjai felcserélhetők és tetszőlegesen csoportosíthatók?

FELADATOK

Gyakorló

1.71–1.80.;

Feladatgyűjtemény

2.2.04–07., 2.2.17–21.

1 A műveleti tulajdonságok alkalmazásával írd fel hatványok szorzataként a következő kifejezéseket!

a) $3 \cdot 3 \cdot c \cdot c \cdot c$;

b) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot 7 \cdot 7$;

c) $5 \cdot 5 \cdot y \cdot y \cdot y \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;

d) $(-c) \cdot (-c) \cdot (-c) \cdot 1,2 \cdot 1,2$

2 A műveleti tulajdonságok alkalmazásával egyszerűsítsük a számításokat.

a) $\frac{1}{2} + 0,7 - \frac{2}{4} - 0,5 - 0,2$;

b) $\frac{3}{4} + 12,25 - \frac{3}{4} - 15,5 - 0,25$;

c) $5 \cdot (0,55 + 2 + 0,65 - 0,2)$;

d) $17 \cdot 0,06 + 17 \cdot 1,04 + 17 \cdot 8,9$;

e) $6 \cdot (-2,4 + 5 - 0,6 + 3)$;

f) $29 \cdot 0,09 - 29 \cdot 2,09 + 29 \cdot 112$;

g) $256 \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{12}{14} + 5 - \frac{4}{7} - 14 \right)$;

h) $2 \cdot \frac{19}{17} - \frac{19}{17} \cdot \frac{3}{4} + \frac{15}{4} \cdot \frac{19}{17} - 5 \cdot \frac{17}{19}$;

i) $\frac{3}{4} : 5 + \frac{1}{2} : 5 - \frac{5}{8} : 5$;

j) $5 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} - 4 \cdot \frac{3}{7} + 11 \cdot \frac{3}{7}$;

k) $0,63 : \frac{3}{4} - 0,17 : \frac{3}{4} + 0,54 : \frac{3}{4}$;

l) $\frac{3}{4} : \frac{4}{3} - \frac{8}{5} : \frac{4}{3} + \frac{7}{10} : \frac{4}{3} + 1$

© Odafigyeltél a műveletek helyes sorrendjére?

3 Számítsd ki a művelet sor eredményét! $2,5 - 0,5 \cdot 4^2 =$

A: 64;

B: 32;

C: -5,5;

D: -1,5

© Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

ISMERKEDÉS AZ ALGEBRAI KIFEJEZÉSEKKEL

Korábban több képlettel, összefüggéssel ismerkedtünk meg. **Például:**

A $K = 4 \cdot a$ képletben a $4 \cdot a$ kifejezéssel kiszámíthatjuk egy a oldalú négyzet területét.

A $T = b^2$ képletben a b^2 kifejezés egy b oldalú négyzet területét adja.

A $K = 2 \cdot (a + b)$ kifejezéssel meghatározhatjuk egy a, b oldalú téglalap területét.

A $3 \cdot x + 5 = 4 \cdot x - 6$ egyenlet mindkét oldalán egy-egy kifejezés áll.

Bal oldalon: $3 \cdot x + 5$; jobb oldalon: $4 \cdot x - 6$.

Milyen közös tulajdonságot fedezhetünk fel a következő kifejezésekben?

$4 \cdot a$; b^2 ; $2 \cdot (a + b)$; $3 \cdot x + 5$; $4 \cdot x - 6$

Mindegyikben számok, betűk vagy ezek hatványai vannak, amelyeket alpműveletekkel kapcsoltunk össze.

Értelmezés

Ha a négy alpműveletet számokra, betűkre (illetve ezek hatványaira) véges sokszor alkalmazzuk, **algebrai kifejezést** kapunk.

Az algebrai kifejezésekben a betűk valamilyen **alaphalmaz** elemeit jelölik.

Elnevezések:

együttható
 $3 \cdot a$
változó

együttható
 $x^2 \cdot 5$
változó

együttható együttható
 $2,8 \cdot a + 3,4 \cdot x \cdot y^2$
változó változók

Összegalakban felírt algebrai kifejezések esetében is használjuk ezeket a fogalmakat.

Ha nem érthető félre, akkor **a szorzás jelét nem kell kitenni az együttható és a betűkifejezés közé** (két betűkifejezés közé, zárójelbe írt számok, kifejezések közé stb.).

Vannak olyan kifejezések is, amelyekben nem látszik így elkülönülten az együttható és a változó. Ezeknek a kifejezéseknek az együtthatója 1, illetve -1 . Ezeket is felírhatjuk szorzatalakban.

Ha 1 az együttható, azt nem szoktuk betű elé leírni.

Ha -1 az együttható, akkor a „ $-$ ” előjelet írjuk ki.

Az algebrai kifejezések két csoportba sorolhatók a nevezőjük (osztójuk) szerint.

Algebrai egész kifejezéseknek nevezzük azokat a kifejezéseket, amelyek vagy **nem törtalakúak (nem hányadosok)**, vagy ha tört- (hányados) alakban vannak felírva, akkor **a nevezőjükben (osztójukban) nincs változó**.

Algebrai törtkifejezéseknek nevezzük azokat a kifejezéseket, **amelyek törtalakúak (hányadosok), és a nevezőjükben (osztójukban) van változó**. A törtkifejezések értelmezésekor figyelembe kell vennünk, hogy **a nevező nem lehet zérus**.

Például a fordított arányosság szabályát törtkifejezéssel írtuk le $\left(y = \frac{k}{x}\right)$.

7. osztályban a továbbiakban csak algebrai egész kifejezésekkel foglalkozunk.

☉ *Természetesen ezek a kifejezések mást is jelenthetnek, nem csak azt, amit itt említettünk.*

Például:

A $4 \cdot a$ kifejezés jelentheti 4 kg áru árát, ha ebből az áruból 1 kg ára a Ft.

☉ *Mely műveleteket nevezzük alpműveleteknek?*

☉ *Az x^2 -ben az x a változó.*

Az xy^2 -ben az x és az y a változók.

☉ **Például:**

$$2 \cdot a = a \cdot 2 = 2a;$$

$$5 \cdot (x - 4) = (x - 4) \cdot 5 = 5(x - 4)$$

☉ **Például:**

$$x = 1 \cdot x; \quad y^2 = 1 \cdot y^2;$$

$$-a^3 = (-1) \cdot a^3;$$

$$a \cdot b^2 = 1 \cdot a \cdot b^2$$

☉ **Algebrai egészek:**

$$a : 3; \quad \frac{xy}{2}; \quad 3x^2;$$

$$\frac{z}{6} : 7; \quad \frac{a^2 + b^2}{160}$$

☉ **Algebrai törtek:**

$$\frac{a}{b}; \quad \frac{2}{2y^2 + x};$$

$$b \neq 0; \quad 2y^2 + x \neq 0$$

1. példa

Mi a következő kifejezések együtthatója? $\frac{x}{3}$; $-\frac{x^2}{2}$; $\frac{3xy}{4}$; $4 \cdot \frac{-y^3}{5}$

☉ Lapozz ide vissza, ha később bizonytalan vagy, hogy mi mit jelent!

Írjuk fel ezeket is egy szám és egy betűkifejezés szorzataként.

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{3} \cdot x; \quad -\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2} x^2; \quad \frac{3xy}{4} = \frac{3}{4} \cdot xy; \quad 4 \cdot \frac{-y^3}{5} = -\frac{4}{5} \cdot y^3$$

A kifejezések együtthatói: $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{5}$

A kifejezések változói (különböző hatványon): x ; x^2 ; xy ; y^3

FELADATOK

☉ A kifejezéseket írd olyan alakba, hogy be tudd karikázni az együtthatókat!

Gyakorló

3.08., 4.22–4.34.;

Feladatgyűjtemény

2.4.09., 2.4.14–15.,

2.4.19., 2.5.01–09.,

2.7.30.

4 Írd le a következő kifejezéseket, és karikázd be az együtthatókat!

- | | | | | |
|------------------------|---------------------|-------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $3 \cdot x$; | a ; | $2x$; | $5,8 + a$; | $a - b$ |
| b) $5y^2$; | $-\frac{1}{2}a$; | $0,8 \cdot x^3$; | $-3,2 \cdot xy$; | $2 \cdot y^2 \cdot 4 \cdot y^2$ |
| c) $a \cdot 5$; | $3 \cdot (x + y)$; | $4 \cdot (-b)$; | $-z \cdot 3$; | $-y$ |
| d) $x^2 \cdot 3$; | $-2x \cdot y^3$; | $a \cdot b \cdot 0,8$; | $x^2 - (y^2)$; | $2 \cdot y^5 \cdot (-1)$ |
| e) $\frac{x + y}{2}$; | $-y^3$; | $-\frac{a^2}{4}$; | $\left(\frac{a}{2}\right)^2$; | $-\frac{y^3}{5}$ |

Figyelempróba

☉ Számít-e a műveletben előforduló elemek sorrendje? A szöveg alapján egyértelmű-e ez a sorrend?



Ödömér szerint a következő feladatokban az **A** és a **B** kijelentés leírható ugyanazzal az algebrai kifejezéssel, ezért ugyanazt jelenti.

- | | |
|--|---|
| ① A: 2-nek és b^2 -nek a szorzata. | B: b^2 -nek és 2-nek a szorzata. |
| ② A: 5-nek és x -nek a különbsége. | B: x -nek és 5-nek a különbsége. |
| ③ A: A 4 és az x 3-szorosának az összege. | B: A 4 és az x összegének a 3-szorosa. |
| ④ A: A 2-nek és a b négyzetének a szorzata. | B: A 2 és a b szorzatának a négyzete. |

Mi a véleményed Ödömér állításáról?



Egyikőtök olvassa fel, másikótök írja le a „matematika nyelvén” az egyenletet! A felolvasás közben tartott 1 másodperces szünetek helyének megváltoztatásával megváltozik-e a leírt algebrai kifejezés? Végül közösen oldjátok meg az egyenletet!

három plusz négy szer iksz per kettő mínusz egy egyenlő

három plusz négy szer iksz per kettő mínusz egy

ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK HELYETTESÍTÉSI ÉRTÉKÉNEK MEGHATÁROZÁSA

Értelmezés

A betűk (változók) helyére az alaphalmazból különböző elemeket írhatunk, amelyekkel a kijelölt műveleteket elvégezve megkapjuk az algebrai kifejezés helyettesítési értékeit.

☉ Ha nem mondunk mást, akkor az általunk tanult legbővebb számhalmazt tekintjük alaphalmaznak.

1. példa

Határozzuk meg a $4x$ kifejezés helyettesítési értékét, ha **a)** $x = 2$; **b)** $x = -3$

a) $x = 2$ esetén:
 $4x = 4 \cdot x = 4 \cdot 2 = 8$

b) $x = -3$ esetén:
 $4x = 4 \cdot x = 4 \cdot (-3) = -12$

☉ Mivel nem mondunk mást, az alaphalmaz a racionális számok halmaza.

2. példa

Határozzuk meg a kifejezések helyettesítési értékét, ha $a = 5$; $b = -2$.

a) $0,5a - 2b^2$; **b)** $0,5a - (2b)^2$; **c)** $0,5a + (-2b)^2$

a) $0,5 \cdot a - 2 \cdot b^2 = 0,5 \cdot 5 - 2 \cdot (-2)^2 = 2,5 - 2 \cdot 4 = 2,5 - 8 = -5,5$

A műveletek elvégzésének sorrendje, ha nincs zárójel:

hatványozás $\rightarrow$ szorzás, osztás $\rightarrow$ összeadás, kivonás

☉ A geometriai, illetve fizikai képletek alkalmazásakor sokszor végzünk behelyettesítést.

Az egyenletek gyökeinek helyességét is behelyettesítéssel ellenőrizzük.

b) $0,5 \cdot a - (2 \cdot b)^2 = 0,5 \cdot 5 - [2 \cdot (-2)]^2 = 2,5 - (-4)^2 = 2,5 - 16 = -13,5$

c) $0,5 \cdot a + (-2 \cdot b)^2 = 0,5 \cdot 5 + [-2 \cdot (-2)]^2 = 2,5 + 4^2 = 2,5 + 16 = 18,5$

☉ A zárójel módosíthatja a műveletek elvégzésének sorrendjét.

3. példa

Határozzuk meg a kifejezések helyettesítési értékét, ha $x = 2,5$; $y = -\frac{5}{3}$.

a) $\frac{2x - y}{2}$; **b)** $(x - 1)(2 + y)$

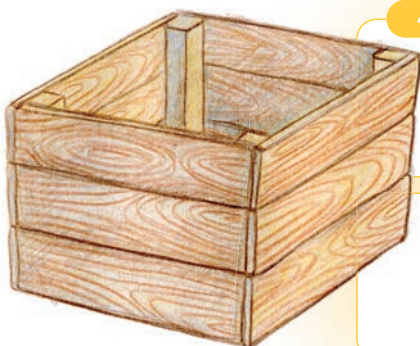
a) $\frac{2x - y}{2} = \left[2 \cdot 2,5 - \left(-\frac{5}{3} \right) \right] : 2 = \left[5 + \frac{5}{3} \right] : 2 = \frac{20}{3} : 2 = \frac{10}{3}$

A törtalakban írt kifejezést felírhatjuk az osztás jelével is. Ez akkor válhat célszerűvé, ha a kifejezésbe nem egész számokat helyettesítünk be.

Figyeljünk arra, hogy **a törtvonal zárójelet helyettesít!** Ha a törtalakban adott kifejezés számlálójában vagy nevezőjében több tag van, akkor ezeket zárójelbe írjuk, amikor törtvonal helyett az osztás jelét használjuk.

☉ A törtvonal az osztás jelét és zárójelet is helyettesíthet.

b) $(x - 1) \cdot (2 + y) = (2,5 - 1) \cdot \left(2 - \frac{5}{3} \right) = 1,5 \cdot \left(\frac{6}{3} - \frac{5}{3} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$



4. példa

A négyzet alapú téglatest (négyzetes hasáb) alakú láda térfogata: $V = a^2 \cdot b$, ha a láda alapéleinek hossza a , magassága b hosszúságegység.

Mekkora a térfogata, ha $a = 0,5$ m; $b = 0,4$ m?

Helyettesítsük be a térfogat képletébe az $a = 0,5$ m és a $b = 0,4$ m értéket:

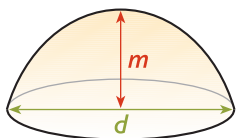
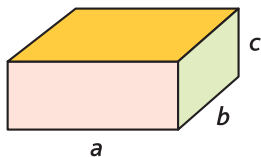
$$V = a^2 \cdot b = 0,5^2 \cdot 0,4 = 0,1$$

$$\text{A láda térfogata: } V = 0,1 \text{ m}^3 = 100 \text{ dm}^3$$

☉ **Ügyelj a műveletek helyes sorrendjére!**

Gyakorló
3.09–3.13., 3.17–3.18.;
Feladatgyűjtemény
2.7.01–23.

☉ **Például:**
 $-2x^2 = -2 \cdot (2)^2 = -8$



FELADATOK

5 Határozd meg a kifejezések helyettesítési értékét!

a) $3 \cdot a + 5$; $3 \cdot (a + 5)$; $3 + a \cdot 5$; $(3 + a) \cdot 5$; ha $a = 2$

b) $b - \frac{1}{2}$; $2b + 3$; $\frac{b+1}{2}$; $\frac{2b-5}{3}$; ha $b = 3$

c) $3a^2$; $(3a)^2$; $\left(\frac{1}{2}a\right)^3$; $\frac{1}{2}a^3$; ha $a = 4$

6 Határozd meg a kifejezések helyettesítési értékét!

a) $a + 2b$; $2a + b$; $2a - b$; $(a - 2)b$; ha $a = -1$; $b = -1,5$

b) $a - b + 1$; $a + b + 1$; $-a + b + 1$; $-a - b + 1$; ha $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$

c) $a + \frac{3}{4}b$; $\frac{3}{4}a - b$; $b - \frac{3}{4}a$; $-a - \frac{3}{4}b$; ha $a = \frac{8}{9}$; $b = -\frac{4}{3}$

d) $a^2 - 2b$; $(-a)^2 - 2b$; $-a^2 - 2b$; $-(a^2 - 2b)$; ha $a = -2$; $b = 0,5$

7 Határozd meg a kifejezések helyettesítési értékét!

$3,5x^2$; $-2x^2$; $0,5x^3$; $\frac{1}{2}x^0$; a) ha $x = 2$; b) ha $x = -2$

8 A téglatest felszínét szeretnénk kiszámítani.

a) Melyik képlet hibás? **Jelöld meg a hibás képletet!**

A: $2(ab + ac + bc)$; **B:** $2ab + 2ac + 2bc$;

C: $2a(b + c) + 2bc$; **D:** $2a(a + b + c)$

b) Mennyi a téglatest felszíne, ha $a = 5$ cm; $b = 4$ cm; $c = 2$ cm?

A: $A = 40 \text{ cm}^2$; **B:** $A = 76 \text{ cm}^2$; **C:** $A = 38 \text{ cm}^2$

9 A boglya térfogata $V \approx (m \cdot d^2) : 2$ (lásd az ábrát). Hány köbméter széna van a boglyában, ha a méretei: $d = 3$ m; $m = 2$ m?

A: $V \approx 36 \text{ m}^3$; **B:** $V \approx 18 \text{ m}^3$; **C:** $V \approx 9 \text{ m}^3$

EGYNEMŰ, KÜLÖNNEMŰ ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK

1. példa

Figyeljük meg, hogy miben egyeznek meg és miben különböznek egymástól a következő algebrai kifejezések:

a) $2 \cdot x$; $\frac{1}{2} \cdot x$; $-3,2 \cdot x$; $4 \cdot (-x)$; $x \cdot 0,5$; $\frac{1}{3} \cdot x$; $\frac{5}{2} \cdot x$; $x \cdot 2$

b) x^2 ; $-2x^2$; $3 \cdot (-x^2)$; $x^2 \cdot (-2)$; $-\frac{4}{5} \cdot x^2$; $-0,8 x^2$; $1,5 x^2$; $-\frac{x^2}{3}$

c) $3x^3y^2$; $-x^3y^2$; $\frac{2}{5} \cdot x^3y^2$; $-7,5 \cdot x^3y^2$; $x^3y^2 \cdot \frac{3}{4}$; $x^3 \cdot 3 \cdot y^2$

a) Mindegyik kifejezésben ugyanaz a változó van, és ugyanazon a hatványon fordul elő ($x = x^1$), legfeljebb az együtthatók különböznek.

Együtthatók: 2 ; $\frac{1}{2}$; $-3,2$; -4 ; $0,5$; $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{2}$; 2

b) Minden kifejezésben azonos a változó, és minden kifejezésben a második hatványon fordul elő (x^2)

Együtthatók: 1 ; -2 ; -3 ; -2 ; $-\frac{4}{5}$; $-0,8$; $1,5$; $-\frac{1}{3}$

c) Ezekben a kifejezésekben is azonos változók vannak, s ugyanolyan hatványon: x^3y^2

Együtthatók: 3 ; -1 ; $\frac{2}{5}$; $-7,5$; $\frac{3}{4}$; 3

☉ Az egyes sorokban látható algebrai kifejezések legfeljebb együtthatóikban különböznek egymástól. Ezek **egynemű kifejezések**.

A különböző sorokba írt kifejezések nem egyneműek, mert nem ugyanazokat a változókat tartalmazzák, vagy ha ugyanazok a változók vannak bennük, akkor nem ugyanazon a hatványon. Ezek **különnemű kifejezések**.

Értelmezés

Azokat az algebrai kifejezéseket, amelyek legfeljebb együtthatóikban különböznek egymástól, **egynemű algebrai kifejezéseknek** nevezzük.

Két algebrai kifejezés **különnemű**, ha változóikban vagy azok hatványaiban különböznek egymástól.

☉ Például **különneműek**:

$2x$, $2x^3$, $1,2xy^2$

FELADATOK

10 $2x$; $-y$; $3x$; $-x$; $\frac{1}{2}y$; x^2 ; $2y$; $3 \cdot xy$; $\frac{x^2}{3}$;
 $\frac{5}{2} \cdot y$; $-2^2 \cdot x$; $-2x$; $-\frac{1}{2}y$; $4,5xy$; $3x^2$; $xy \cdot \frac{1}{2}$; $y \cdot (-2)$

a) A fenti kifejezések mindegyikében húzd alá pirossal az együtthatókat, kékkel a változókat!

b) Gyűjtsd külön sorokba az egynemű kifejezéseket!

c) Mennyi a fenti kifejezések helyettesítési értéke, ha $x = 6$; $y = -2$?

☉ Ahol szükséges, írd más alakba a kifejezést!

Gyakorló
3.19–3.21.

11 Írj öt-öt olyan kifejezést, amelyek a következő kifejezésekkel egyneműek!

© Mindegyik kifejezésben húzd alá pirossal az együtt-hatókat, kékkel a változókat!

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } \frac{1}{2}a; & \text{b) } -2y^2; & \text{c) } x \cdot 3; & \text{d) } x^2 \cdot y; & \text{e) } -y^3; \\ \text{f) } \frac{a^2}{2}; & \text{g) } x \cdot 2 \cdot y; & \text{h) } \frac{xy^2}{6}; & \text{i) } \frac{ab}{-3}; & \text{j) } -\frac{2cd}{3} \end{array}$$

EGYNEMŰ ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK ÖSSZEVONÁSA

1. példa

Pingponglabdából ugyanannyi darabot csomagoltak egy-egy dobozba. Egy raktárban 12 doboz és még 8 db pingponglabda volt. Hétfőn érkezett 14 doboz pingponglabda, eladtak 20 dobozzal és még 4 darabot. Hány pingponglabda volt hétfőn este a raktárban, ha egy-egy dobozba 25 darabot csomagoltak?

© Az összeg tagjait tetszőlegesen csoportosíthatjuk, ezért a zárójelet elhagyhatjuk:

1 dobozban x labda;
12 dobozban $12x$ labda;
14 dobozban $14x$ labda van.

Jelölje x az egy dobozban lévő pingponglabdák számát.

A raktárban volt $12x + 8$ darab pingponglabda. Érkezett $14x$ darab.

A raktárkészlet a szállítás után:

$$(12x + 8) + 14x = 12x + 8 + 14x$$

Eladtak $20x$ -et és még 4 darabot. Ekkor a pingponglabdák száma:

$$12x + 8 + 14x - 20x - 4$$

Számolhatunk közvetlenül a szemlélet alapján, de az eredményt magyarázhatjuk a műveleti tulajdonságokkal is.

Külön-külön határozzuk meg a dobozokban lévő és a csomagolatlan pingponglabdák számát:

Az összeg tagjai tetszőlegesen felcserélhetők és csoportosíthatók:

$$12x + 8 + 14x - 20x - 4 = (12x + 14x - 20x) + (8 - 4)$$

Meghatározhatjuk, hogy hány doboz maradt, ha **összevonjuk** a dobozok számát:

$$12 + 14 - 20 = 6 \text{ doboz}$$

A $(12x + 14x - 20x)$ összeg minden tagjában előfordul az x .

Az összeg szorzásáról tanultakat „visszafelé” alkalmazhatjuk:

Ebben $6x$ pingponglabda volt.

$$(12 + 14 - 20) \cdot x = 6 \cdot x$$

A csomagolatlan pingponglabdák száma: $8 - 4 = 4$

Összesen 6 doboz pingponglabda ($6x$) és még 4 db pingponglabda maradt:

$$12x + 8 + 14x - 20x - 4 = \underbrace{(12x + 14x - 20x)}_{6x} + \underbrace{(8 - 4)}_4 = 6x + 4$$

Helyettesítsünk be az x helyére 25-öt:

$$6 \cdot 25 + 4 = 150 + 4 = 154$$

A raktárban hétfőn este 154 db pingponglabda volt.

© Figyeld meg, hogyan vonjuk össze a $12x$ -et, a $14x$ -et és a $(-20x)$ -et! Fogalmazd meg sejtésedet!

2. példa

Írjuk fel az a és b oldalú téglalap területét többféleképpen.

1. megoldás

$$K = a + b + a + b = a + a + b + b$$

Az a -t az a -hoz, b -t a b -hez adjuk hozzá:

$$K = 2a + 2b$$

A $2a + 2b$ összeadást csak jelöltük, mert ezek különemű kifejezések.

2. megoldás

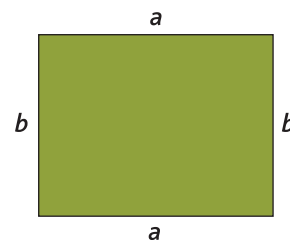
$$K = a + b + a + b = (a + b) + (a + b)$$

A tagok csoportosítása után az $(a + b)$ -t az $(a + b)$ -hez adjuk hozzá:

$$K = 2(a + b)$$

A két megoldást hasonlítsuk össze:

$$K = 2(a + b) = 2a + 2b$$



☉ **Felhasználjuk, hogy az összeadásban a tagok felcserélhetők és tetszőlegesen csoportosíthatók.**

☉ **A két kifejezés egyenlősége az összeg szorzása alapján is belátható.**

Figyeld meg!

Egynemű algebrai kifejezéseket úgy vonunk össze, hogy az együtthatóikat összevonjuk, a betűkifejezést változatlanul leírjuk.

A különemű kifejezések nem vonhatók össze. Ezek összeadását, illetve kivonását csak kijelölni tudjuk, elvégezni nem.

3. példa

Határozzuk meg a téglatest felszínét, ha egy csúcsában találkozó három élé a , b , c .

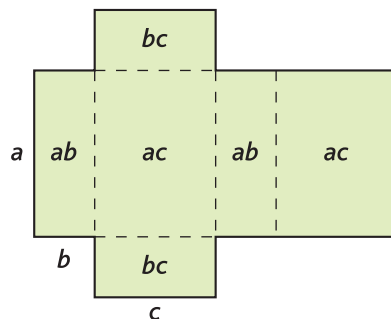
$$A = ab + bc + ac + ab + bc + ac$$

Az egyenemű kifejezéseket vonjuk össze:

$$ab + ab = 2ab; \quad ac + ac = 2ac; \quad bc + bc = 2bc$$

A különemű kifejezések összegét csak jelöljük: $2ab + 2ac + 2bc$

$$A = 2ab + 2ac + 2bc$$



Add meg a nyolcszög alapú hasáb felszínét a és b segítségével!

A hasáb hálója az ábrán látható.



Egy téglatest felszíne 76 cm^2 .

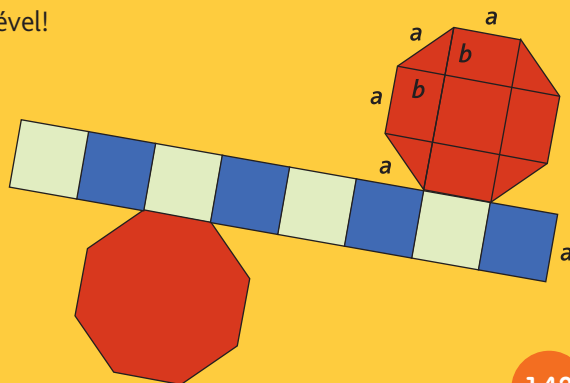
Két élének hossza: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$.

Hány centiméter a harmadik (c) él hossza?

Lásd a téglatest felszínének kiszámítását a 3. példában.

Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

A: $c = 1 \text{ cm}$; B: $c = 2 \text{ cm}$; C: $c = 3 \text{ cm}$; D: $c = 4 \text{ cm}$



4. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet. Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

$$2x + x + 3 = 3x - x + 5$$

☉ Az egyenletek megoldása során már korábban is alkalmaztuk az egynemű algebrai kifejezések összevonását.

Az „x-es tagok” egyneműek, összevonhatók:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 3 & = & 2x + 5 \\ x + 3 & = & 5 \\ x & = & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} / - 2x \\ / - 3 \end{array}$$

Ellenőrzés

Bal oldal: $2x + x + 3 = 2 \cdot 2 + 2 + 3 = 9$

Jobb oldal: $3x - x + 5 = 3 \cdot 2 - 2 + 5 = 9$

FELADATOK

12

Válaszd ki az egynemű tagokat, ezeket vond össze, és írd egyszerűbb alakba a kifejezéseket!

- a) $1 - a + 5a + 3a - 2 - 6a + 4,2$;
- b) $3,4 + b + 3b - b + 2b - 2,5 - 3b + 4$;
- c) $c + 5c - 3c + 1 + c - 2,9 - 1,5c + 1,9 + 2,5c - 2$;
- d) $d^2 + 15 + 4d^2 - 13 + 2^2 + 4d^2 - 2d^2$;
- e) $5 - 7xy + 13 - 6 + 2xy + 8 - 3xy - 15$;
- f) $f^2 - 10 - 5f + 6f - 3f - f^2 + 4 - f + 6$;
- g) $3g^2 + 5b + 1 - g^2 + 2,3 - g^2 + 15b + 2g^2$;
- h) $8h - 15 + 2hd - 3h - 5h + 4h - 3dh + 25$

☉ Mi jellemzi az egynemű algebrai kifejezéseket?

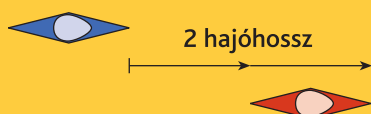
☉ Ügyelj a műveletek sorrendjére!
 $-y^2 \neq (-y)^2$

13

Végezd el az összevonásokat! Mennyi a kifejezések értéke, ha $x = 4$; $y = 2$?

- a) $x - 2y + \frac{1}{2}x + 1,2y + y - 3,5x$;
- b) $x + \frac{1}{2}y + y - 3x + 2y - x$;
- c) $x - 4x + 2y^2 + 1,2x + 2x + 6y^2$;
- d) $2 - y^2 - 2xy - y^2 - 4 - \frac{1}{2}xy + y^2$;
- e) $3 - x + 2 - y + x - 3 + y - 2$;
- f) $4x + 2xy - 3xy + 2x - 2xy - 6x$

Figyelempróba



☉ A jó rajz segíthet!



Öt fiú egyforma, k hosszúságú kajakkal versenyez. Fél távon Bulcsúnak 2 m híján 3 hajóhossz előnye van Áronnal szemben. Dénes viszont 2 hajóhosszal és 3 m-rel előzi meg Eleket, akit Csaba is lehagyott 3 hajóhosszal. Csaba így is Bulcsú mögött evez 3 m-rel.

- a) Áronhoz képest hol evez a másik négy versenyző? Fejezd ki a távolságokat a k segítségével!
- b) Melyik fiú evez az első helyen, melyik az utolsón? Mekkora köztük a távolság?
- c) Mit mondhatunk a kajakok méretéről, ha tudjuk, hogy Dénes volt a harmadik?

14 Az összevonás után számítsd ki a kifejezések értékét!

- a) $a - a + a + 3a - 3a;$ $ab + 3ab - 2ab;$
 $4a - 4 + 2a - 2;$ $3a - 2b + a + 2b;$ ha $a = 1; b = 0$
- b) $x^2 + 2x^2 + 3x^2 - x^2;$ $x - y^2 + x - y^2;$
 $3xy - 2xy + 5 - xy;$ $2x^2 - 0,5x^2 - 0,75x^2;$ ha $x = -\frac{1}{2}; y = 0,4$

15 Mi az eredmény, ha egy kifejezésből kivonjuk önmagát?

- a) $3x - 3x;$ b) $5xy - 5xy;$ c) $\frac{5a}{15} - \frac{5a}{15};$ d) $-2b^2 - (-2b^2)$

16 Minden feladatban először algebrai kifejezésekkel add meg a számítás tervét, ezután végezd el az összevonásokat, majd a helyettesítéseket!

- a) Három fiú nyáron munkát vállalt. Naponta a forintot kaptak személyenként. Hány forintot kaptak összesen, ha Alfonz 12 napig, Béla 25 napig, Csaba 9 napig dolgozott? Hány forintot kaptak összesen, ha naponta 4500 Ft-ot kaptak külön-külön ($a = 4500$ Ft)?
- b) A hét minden napján vendéglőben ebédeltem, és mindig menüt rendeltem. Mennyit fizettem összesen, ha munkanapokon z Ft-ba, szombaton másfélszer annyiba, vasárnap 1865 Ft-ba került a menü, és még vettem összesen 640 Ft-ért üdítőt is?
Mennyit fizettem, ha a hétköznapi menük ára $z = 890$ Ft volt?
- c) A strandon Anna 2 lángost és 2 fagyit, Bea 3 lángost és 80 Ft-ért palacsintát, Cili 1 lángost és 3 fagyit, Dóra 120 Ft-ért nyalókát vásárolt.
Mennyit fizettek összesen, ha egy lángos x Ft-ba, egy fagyi y Ft-ba került?
Mennyit fizettek összesen, ha $x = 225$ Ft, $y = 180$ Ft?
- d) Egy családban 3 gyerek van. A legfiatalabb első osztályos, x Ft zsebpénzt kapott, a középső, a hetedik osztályos ennek a hétszeresét. A gimnazista nyolcszor annyi zsebpénzt kapott, mint a legfiatalabb, és még 500 Ft-ot.
Mennyit kaptak külön-külön? Mennyit kaptak összesen?
Mennyivel kapott többet a gimnazista, mint a hetedik osztályos?
Mennyivel kapott kevesebbet a hetedik osztályos, mint a gimnazista?
Válaszolj az előző kérdésekre, ha a legfiatalabb gyerek 500 Ft-ot kapott!
- e) Emma hétfőn 5 láda és 3 vödör meggyet szedett le. Kedden 2 ládát töltött meg, és szedett még 15 kg-ot. Szerdán leszedett 12 vödörnyit és az egyik láda aljába beöntött még 2 kg-ot.
Összesen mennyi meggyet szedett le a három nap alatt? Hány kilogramm meggyet szedett le, ha a ládába 15 kg, a vödörbe 6 kg meggy fér?

© *Ellenőrizheted az eredményt úgy, hogy először helyettesíted be a változók értékeit, majd utána vonod össze azokat.*

Gyakorló
3.22–3.28;
Feladatgyűjtemény
2.7.24–32., 2.8.01–03.

Figyelempróba



Máté n éves. Bátyja, Ábel 2 évvel idősebb. Édesanyja 1 év híján 5-ször annyi idős, mint Máté. Édesapja viszont 1 évvel fiatalabb volt akkor, amikor a felesége született, mint most Máté. Mennyi most az életkoruk összege? Mennyivel lesz több az életkoruk összege a mostani összegnél akkor, amikor Máté kétszer annyi idős lesz, mint most?

Többet ésszel ...

© *Lásd még a 153. lap alján lévő feladatot.*

EGYTAGÚ KIFEJEZÉS SZORZÁSA, OSZTÁSA EGYTAGÚ KIFEJEZÉSEL

1. példa

Szorozzuk össze a kifejezéseket:

a) $1,2 \cdot (2x^2)$; b) $(2x) \cdot (3y)$; c) $(3,4x^2) \cdot (-5x^3)$

☉ Kellő gyakorlás után a közbülső lépéseket „fejben” is elvégezhetjük.

A szorzat tényezői tetszőlegesen **felcserélhetők** és **csoportosíthatók**.
A zárójelet elhagyhatjuk.

a) $1,2 \cdot (2 \cdot x^2) = 1,2 \cdot 2 \cdot x^2 = (1,2 \cdot 2) \cdot x^2 = 2,4 x^2$

b) $(2x) \cdot (3y) = 2 \cdot x \cdot 3 \cdot y = (2 \cdot 3) \cdot (x \cdot y) = 6xy$

c) $3,4x^2 \cdot (-5x^3) = [3,4 \cdot (-5)] \cdot (\underbrace{x^2 \cdot x^3}_{x^{2+3}}) = -17x^5$

2. példa

Szorozzuk össze a kifejezéseket: a) $\frac{2x}{15} \cdot 7$; b) $\frac{2x}{15} \cdot 5$; c) $\frac{2x}{15} \cdot 15$

a) A számlálót szorozzuk 7-tel, a nevező változatlan: $\frac{2x}{15} \cdot 7 = \frac{14x}{15}$

b) A nevezőt osztjuk 5-tel, a számláló változatlan: $\frac{2x}{15} \cdot 5 = \frac{2x}{3}$

c) A nevezőt osztjuk 15-tel, a számláló változatlan: $\frac{2x}{15} \cdot 15 = \frac{2x}{1} = 2x$

☉ Ha a törtet a nevezőjével szorozzuk, akkor a szorzat a tört számlálója lesz.

☉ Az osztást értelmezhetjük úgy, hogy az osztó reciprokával szorzunk, ezért alkalmazhatjuk a szorzás műveleti tulajdonságait.

☉ Ha az összefüggéseket megfigyeltük, akkor a közbülső lépéseket nem kell elvégeznünk.

☉ Ha az osztóban változó is van, akkor megvizsgáljuk, hogy a kifejezés mely számokra nem értelmezhető.

3. példa

Végezzük el a következő osztásokat:

a) $(3,6x^6) : 3$; b) $(3,6x^6) : (3x^2)$; c) $(3,6x^6) : (3y)$

Az együtthatók szorzatát és hányadosát ki tudjuk számítani:

a) $(3,6 \cdot x^6) \cdot \frac{1}{3} = \left(3,6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot x^6 = (3,6 : 3) \cdot x^6 = 1,2 \cdot x^6$

b) Mivel az osztó nem lehet nulla, azért $x \neq 0$.

$$(3,6 \cdot x^6) \cdot \frac{1}{3x^2} = (3,6x^6) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2}\right) = \left(3,6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x^6 \cdot \frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= (3,6 : 3) \cdot (\underbrace{x^6 : x^2}_{x^{6-2}}) = 1,2x^4$$

C Mivel az osztó nem lehet nulla, azért $y \neq 0$.

$$(3,6x^6) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y}\right) = \left(3,6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x^6 \cdot \frac{1}{y}\right) = (3,6 : 3) \cdot \left(\frac{x^6}{y}\right) = 1,2 \frac{x^6}{y}$$

Az egyenlő alapú hatványok szorzatát és hányadosát felírhatjuk egyszerűbb alakban. A különböző változók szorzatát és hányadosát csak kijelöljük.

Figyeld meg!

Szorzatnak mindig csak az egyik tényezőjét szorozzuk vagy osztjuk az adott számmal vagy kifejezéssel.

☉ **Vesd össze majd az összeg szorzásával (149. oldal)!**

FELADATOK

17 Végezd el a következő szorzásokat!

- a) $3 \cdot (4,5x)$; b) $\left(\frac{1}{2}y^2\right) \cdot 4$; c) $\frac{3}{4} \cdot (2xy)$;
d) $(2x)(2,5y)$; e) $\left(\frac{5}{7}y^2\right) \cdot (3x)$; f) $\frac{1}{3}x \cdot \frac{3}{4}y$;
g) $3x^2 \cdot 5x$; h) $45x^3 \cdot \frac{1}{9}x^3$; i) $-35x \cdot \left(-\frac{3}{7}x^4\right)$

☉ **Célszerű először az együtthatókkal elvégezni a kijelölt műveleteket.**

18 Végezd el az osztásokat! Mennyi a helyettesítési érték, ha $x=2$, $y=-4$?

- a) $(4,5x^6) : 5$; b) $\left(\frac{5}{3}x\right) : \frac{10}{21}$; c) $\frac{4x}{56} : \frac{5}{7}$; d) $(-35xy^2) : (-7)$;
e) $\frac{8x}{25} : 4$; f) $\frac{36x}{45} : 7$; g) $\frac{9x}{42} : \frac{3}{7}$; h) $\frac{4x}{72} : 3$

☉ **0-tól különböző számmal úgy is oszthatunk egy kifejezést, hogy a szám reciprokával szorozzuk azt.**

19 Az egyenes hasáb, illetve a henger térfogata: $V = T \cdot M$, ahol T az alapterület, M a test magasságát jelöli. Határozd meg a következő testek térfogatát!

- a) A téglalap alapú hasáb alapélei a és $3a$, magassága $M = 5a$.
b) A négyzet alapú hasáb alapéle a , magassága $M = \frac{1}{2}a$.



A Mars sugarának hossza 53,3%-a a Föld sugara hosszának. A Marson nincsenek tengerek, míg a Föld felszínének csak 29,2%-a szárazföld. Melyik bolygón nagyobb a „szárazföld” területe, a Földön vagy a Marson?

Mindkét bolygó jó közelítéssel gömbnek tekinthető, a gömb felszíne:

$$A \approx 4 \cdot R^2 \cdot 3,14$$

Hány négyzetkilométer a különbség, ha a Föld sugara $R \approx 6360$ km?



TÖBBTAGÚ KIFEJEZÉS SZORZÁSA EGYTAGÚ KIFEJEZÉSEL

1. példa

Írjuk fel az ábrán látható téglalap területét kétféleképpen.

$$① T = 2 \cdot (a + 3) = (a + 3) \cdot 2$$

$$② T = T_1 + T_2 = 2a + 2 \cdot 3 = 2a + 6$$

A két kifejezés ugyanazt a területet jelenti, ezért:

$$2 \cdot (a + 3) = 2a + 6 \quad \text{vagy} \quad (a + 3) \cdot 2 = 2a + 6$$

A $2 \cdot (a + 3)$ és az $(a + 3) \cdot 2$ egy algebrai kifejezés **szorzatalakjai**.

Ugyanennek a kifejezésnek a $2a + 6$ kifejezés az **összegalakja**.

A $2 \cdot (a + 3)$ és az $(a + 3) \cdot 2$ szorzatokból úgy kaphatjuk a $2a + 6$ kifejezést, hogy az $(a + 3)$ összeg mindkét tagját megszorozzuk 2-vel, és ezeket a szorzatokat összeadjuk.

$$\begin{array}{ccc} \text{szorzat} & & \text{összeg} \\ 2 \cdot (a + 3) & = & 2 \cdot a + 2 \cdot 3 \\ \text{tényezők} & & \text{tagok} \end{array}$$

2. példa

Írjuk fel az ábrán látható téglalap területét kétféleképpen.

$$① T = x \cdot (x + y)$$

$$② T = T_1 + T_2 = x^2 + xy$$

A két kifejezés ugyanazt a területet jelenti, ezért:

$$x \cdot (x + y) = x^2 + xy$$

Az $x \cdot (x + y)$ szorzat egyik tényezője x , a másik tényezője $(x + y)$, azaz egy kéttagú összeg.

A szorzást úgy is elvégezhetjük, hogy az $(x + y)$ összeg mindkét tagját megszorozzuk x -szel:

$$x \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y = x^2 + xy$$

3. példa

Egy öt kockát tartalmazó dobókockacsomag ára pohárral együtt p Ft. A pohár ára 200 Ft. Mennyibe kerül 8 dobókockacsomag pohár nélkül?

$$\begin{array}{ll} ① \text{ 1 dobókockacsomag ára pohár nélkül:} & p - 200 \\ \text{8 dobókockacsomag ára pohár nélkül:} & 8 \cdot (p - 200) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} ② \text{ 8 dobókockacsomag ára pohárral:} & 8 \cdot p \\ \text{8 pohár ára:} & 8 \cdot 200 \\ \text{8 dobókockacsomag ára pohár nélkül:} & 8 \cdot p - 8 \cdot 200 \end{array}$$

$$\text{A két kifejezés ugyanazt az értéket jelenti:} \quad 8 \cdot (p - 200) = 8 \cdot p - 8 \cdot 200$$



Figyeld meg!

Összeget (különbséget) úgy szorozhatunk egy kifejezéssel, hogy az összeg (különbség) minden tagját megszorozzuk a kifejezéssel.

☉ Például:

$$\frac{3}{2}(5-x) = \frac{15}{2} - \frac{3x}{2}$$

FELADATOK

20 Ahol lehet, ott kétféleképpen végezd el a műveletet!

- a) $3 \cdot (5-2)$; b) $4,2 \cdot (3,2+1,6)$; c) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{8}\right)$;
 d) $5 \cdot (3-d)$; e) $(-3) \cdot (2-3e)$; f) $4 \cdot (3a+2-a)$;
 g) $3 \cdot (2a-a)$; h) $1,2 \cdot (x^2+0,5x^2)$; i) $\frac{3}{4} \cdot (ab-2ab)$

☉ Mely esetekben nem lehet kétféleképpen elvégezni? Miért?

21 Írd a szorzatokat összegalakba!

- a) $2 \cdot (x+1)$; b) $3 \cdot (x-2)$; c) $1,2 \cdot (a+3)$; d) $5 \cdot (x+y)$;
 e) $(x-2) \cdot 6$; f) $(4-x) \cdot 5$; g) $(a+b) \cdot 1,4$; h) $(a-2) \cdot \frac{1}{2}$;
 i) $-3 \cdot (x+5)$; j) $-4 \cdot (x+y)$; k) $-\frac{3}{4} \cdot (a-b)$; l) $-5 \cdot (2-x)$;
 m) $a(2-b)$; n) $b(2-a)$; o) $c(a+b)$; p) $(a-b) \cdot c$;
 q) $x(x+1)$; r) $y(1-y)$; s) $4,5c(c+2)$; t) $d(2-d)$

☉ Végezzük el a szorzásokat. Hogyan szorzunk egytagú kifejezést többtagúval?

22 Számítsd ki a kifejezések értékét szorzatalakban és összegalakban is!

- a) $2 \cdot (a-3)$; $(a-1) \cdot \frac{1}{2}$; $(2a-3) \cdot 2$; ha $a=1$
 b) $(2x+3) \cdot 5$; $(3-x) \cdot 2$; $(5-2x) \cdot 3$; ha $x=4$
 c) $(3-y) \cdot (-2)$; $-\frac{1}{2} \cdot (2y+5)$; $3 \cdot (0,5y+2)$; ha $y=2$
 d) $(x+y+2) \cdot 2$; $-3 \cdot (x-y+1)$; $5 \cdot (2x-3y+4)$; ha $x=3$; $y=2$
 e) $2,8 \cdot (a-b)$; $(0,2a+3,4b) \cdot 2$; $(3-ab) \cdot 2$; ha $a=1$; $b=2$
 f) $(4x+5y) \cdot 3$; $(3-2x) \cdot y$; $(x+y) \cdot x$; ha $x=-1$; $y=1$



A szorzások, osztások, összevonások elvégzése után írd fel az egyes sorokban látható kifejezéseket összegalakban!

Satírozd be a táblázat megfelelő sorában a kapott kifejezésekben előforduló együtthatókkal megegyező számokat!

$3a + 2(a + 3b)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$4(2a - a) + b(2 + 5)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$(2 \cdot 2b) \cdot 2 + 8a : 2$	1	2	3	4	5	6	7	8
$4(b - a) + 4,5(2a + b) - 0,5b$	1	2	3	4	5	6	7	8
$(1a + 2b + 5c) : 2 + (7a + 9c + 10b) : 2$	1	2	3	4	5	6	7	8
$3(a + a) - 3(2a - a)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$2(4a + 8b) : 4$	1	2	3	4	5	6	7	8
$3[2a + 2(b - a) - b] + a$	1	2	3	4	5	6	7	8

Figyelempróba

☉ A felírt számítási tervekbe helyettesítsd be a termékek tényleges árát! 1 év megközelítően hány hét?

☉ A 35%-os növelés, illetve a 10%-os csökkenés hányszoros változást jelent?

☉ Egy asztal árának 60%-a az asztal árának hányszorosát jelenti?

☉ A tömeg a sűrűségnek és a térfogatnak a szorzata.

☉ A sűrűség jele ρ (ró; görög betű).

☉ A négyzetes oszlop olyan téglatest, amelynek legalább két lapja négyzet.

☉ Mennyi ideje kerékpározik Béla?

Gyakorló
3.38–3.44.;
Feladatgyűjtemény
2.7.35–39., 2.7.41.,
2.8.07–10., 2.8.14.,
2.8.21.

23

Írd föl algebrai kifejezéssel többféle alakban a számítás tervét, majd számítsd ki a helyettesítési értékeket!

- a) Jelölje a tej egységárát t , a kenyérét k . Marikáék minden héten 12 l tejet és 7 kg kenyeret vesznek. Nándiék ugyanott hetente 7 l tejet és 4 kg kenyeret vásárolnak.

Mennyit költenek Marikáék, illetve Nándiék egy év alatt a két termékre?

Egy év alatt mennyit költ ezekre a termékekre a két család együtt?

- b) Február hónapban Anna, Béla és Cecília 24 napon vendéglőben étkeztek. Béla ebédjegye 35%-kal többé, Cecíliaé 10%-kal kevesebbe került, mint Annáé. Anna ebédjegye x Ft-ba került. Mennyit költöttek összesen, ha Béla minden alkalommal 300 Ft-ért még üdítőt is vett?

A két lány együtt mennyivel költött többet, mint Béla?

Mennyit költenek ténylegesen, ha Anna ebédjegye $x = 800$ Ft?

- c) Egy tervezőiroda 25 egyforma íróasztalt és 40 egyforma széket vásárolt. Az asztalok szállítása darabonként 240 Ft, a székeké darabonként 40 Ft volt.

Mennyit költöttek összesen, ha a székek ára 60%-a volt az asztalok árának, és egy asztal a Ft-ba került?

Mennyit költöttek ténylegesen, ha egy asztal ára $a = 15\,600$ Ft?

Székre vagy asztalra költöttek-e többet, mennyivel?

24

Egy fenyőfából készült négyzetes oszlop alapéle a , magassága M , anyagának sűrűsége ρ .

Egy bükkfából készült négyzetes oszlop alapéle 80%-a, magassága 125%-a a fenyőfából készült oszlop megfelelő adatainak, és a bükkfa sűrűsége 1,5-szerese a fenyőfa sűrűségének. Mennyi a két oszlop tömege külön-külön, illetve együtt?

Melyik négyzetes oszlop tömege nagyobb, mennyivel?

Határozd meg az adatokat, ha $a = 15$ cm; $M = 200$ cm; $\rho = 0,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$!

25

Anna és Béla ugyanarról a helyről indul el kerékpárral, de Anna 5 perccel korábban indul el, mint Béla. Mekkora lesz közöttük a távolság t perccel

Anna indulása után, ha Anna 250 m-t, Béla 300 m-t tesz meg egy perc alatt, és

- a) ugyanabban az irányban haladnak; b) ellenkező irányban haladnak?

Mekkora köztük a távolság, ha ① $t = 20$ perc; ② $t = 40$ perc?

26

Egy úton 2000 m távolságban van egymástól Aladár és Bea. Aladár 8 óra előtt 7 perccel indul el Bea felé, és percenként 110 m-t tesz meg,

Bea 8 órakor indul Aladár felé $90 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ sebességgel.

Mekkora távolságra lesznek egymástól 8 óra után t perccel?

Mekkora köztük a távolság, ha ① $t = 15$ perc; ② ha $t = 45$ perc?

TÖBBTAGÚ KIFEJEZÉS SZORZATTÁ ALAKÍTÁSA KIEMELÉSSSEL

1. példa

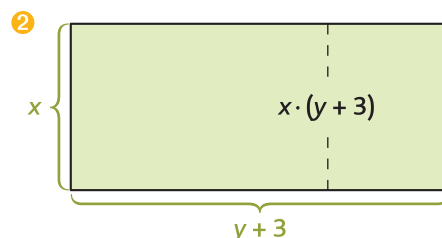
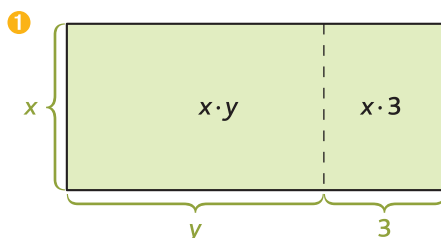
Írjuk fel a téglalap területét kétféleképpen, ha oldalai: x , $y + 3$

1 $T = x \cdot y + x \cdot 3$

2 $T = x \cdot (y + 3)$

A két kifejezés ugyanazt a területet jelenti, ezért:

$$x \cdot y + x \cdot 3 = x \cdot (y + 3)$$



Ha egy szorzat egyik tényezője összeg, akkor ezt a szorzatot fel tudjuk írni összegalakban. Az összeg minden tagját megszorozzuk az adott kifejezéssel. **Például:**

Szorzat felírása összegalakban

$$3a \cdot (a + 2b) = 3a \cdot a + 3a \cdot 2b = 3a^2 + 6ab$$

Sokszor szükséges, hogy egy algebrai kifejezést összegalakból szorzatalakba írjunk át.

$$3a^2 + 6ab = 3a \cdot a + 3a \cdot 2b = 3a \cdot (a + 2b)$$

Összeg felírása szorzatalakban

A $3a^2 + 6ab$ kéttagú algebrai kifejezés szorzattá alakítható, mert mindkét tagban előfordul a $3a$ tényező.

Úgy mondjuk, hogy a $3a$ **kiemelhető** az összeg mindkét tagjából.

Figyeld meg!

Egy többtagú algebrai kifejezés kiemeléssel szorzattá alakítható, ha az összeg mindegyik tagjában előfordul ugyanaz a tényező.

☉ **Például:**

$$6x - 3 = 3 \cdot 2 \cdot x - 3 \cdot 1 = 3 \cdot (2 \cdot x - 1)$$

2. példa

Mennyit fizetett 10 barát összesen a strandon, ha egy főre az étkezés e Ft-ba, a belépőjegy f Ft-ba került, és a kabinért még együtt 1000 Ft-ot fizettek?

1 Összegalakban:

$$10 \cdot e + 10 \cdot f + 10 \cdot 100$$

2 Szorzatalakban:

$$= 10 \cdot (e + f + 100)$$

☉ A kifejezés felírható olyan alakban, hogy minden tagjában a 10 tényezőként fordul elő.

3. példa

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezést: $6a + 2ab^2$

Keressük meg mindkét tagban azt a tényezőt, amelyet ki lehet emelni.

$$6a = 3 \cdot 2a; \quad 2ab^2 = b^2 \cdot 2a$$

A $2a$ kifejezés mindkét tagban előfordul szorzótényezőként.

$$6a + 2ab^2 = 3 \cdot 2a + b^2 \cdot 2a = 2a \cdot (3 + b^2)$$

Ellenőrizzük munkánkat úgy, hogy a szorzatot összeggé alakítsuk.

$$2a \cdot (3 + b^2) = 2a \cdot 3 + 2a \cdot b^2 = 6a + 2ab^2$$

☉ *Mi a szorzattá alakíthatóság feltétele?*

☉ *Ha nem derül ki azonnal, hogy mi a közös tényező a tagokban, akkor próbáld a tagokat olyan szorzatokká alakítani, amelyekben már van közös tényező!*

☉ *Figyeld meg! Ha $5x$ -ből kiemeljük az $5x$ -et, 1-et kapunk.*

4. példa

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezést: $5x - 10x^3y + 15xyz$

Mindegyik tagban előfordul az $5x$ tényező, ezt kiemelhetjük:

$$5x - 10x^3y + 15xyz = 5x \cdot 1 - 2 \cdot 5x \cdot x^2y + 3 \cdot 5x \cdot yz = 5x \cdot (1 - 2x^2y + 3yz)$$

Ellenőrzésképp elvégezhetjük a kijelölt szorzást, az eredeti összeget kell kapnunk:

$$5x \cdot (1 - 2x^2y + 3yz) = 5x - 2 \cdot 5x \cdot x^2y + 3 \cdot 5x \cdot yz = 5x - 10x^3y + 15xyz$$

5. példa

12 kőműves három egymást követő napon dolgozott, és a következő munkabért kapták: Az első nap 5-ször annyi, a második nap 4-szer annyi, a harmadik nap 3-szor annyi tallért kapott a csapat, mint ahányadika volt abban a hónapban. (Végig ugyanabban a hónapban dolgoztak.) Kaptak még 2 tallér borraivalót is. A tallérok felváltása nélkül el tudták-e osztani a keresetüket úgy, hogy mindegyikük ugyanannyi pénzt kapott?

Ha az első nap n -edike volt, akkor a következő két nap: $(n+1)$ -edike és $(n+2)$ -edike.

$$5n + 4(n+1) + 3(n+2) + 2 =$$

$$= 5n + 4n + 4 + 3n + 6 + 2 =$$

$$= 12n + 12 =$$

$$= 12(n+1)$$

Megszorozzuk a kéttagú összegeket, és

összevonjuk az egyenmű tagokat.

Mindegyik tagban előfordul a 12,

kiemeljük ezt a tényezőt.

A keresetet el tudták osztani 12 egyenlő részre a tallérok felváltása nélkül, egy-egy kőművesnek $(n+1)$ tallér jutott.



Fejtörő!

☉ *Megpróbáltad szorzatalakban felírni az összegeket?*



Mely számokkal oszthatók biztosan a következő összegek, ha n tetszőleges természetes szám?

a) $2 \cdot (7n - 1) + 5 \cdot (2n + 10);$

b) $100 - 7 \cdot (n - 5) + 5 \cdot (3n + 13);$

c) $12 \cdot (n + 4) + 4 \cdot (5n + 6);$

d) $75 + 9 \cdot (5 + 2n) - 4 \cdot (3n + 15)$

FELADATOK

B1 Keresd meg az összegek, különbségek szorzat párját!

1 $2x + 2y$ 2 $2xy + 2y$ 3 $2ab - 2a$ 4 $2x - 4y$ 5 $2ab - 4b$

A: $2(x - 2y)$ B: $2a(b - 1)$ C: $2b(a - 2)$ D: $2(x + y)$ E: $2y(x + 1)$

☉ *Hogyan szorzunk összeget, különbséget?*

B2 Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $7x + 14y$; b) $3x - 6y$; c) $18 - 9x$; d) $7,5 - 1,5x$;
e) $2xy + y$; f) $3x - 6xy$; g) $5y - 10x$; h) $8xy - 6y$;
i) $x^2 + x^2y$; j) $xy^2 - 2x$; k) $x^2 - 2x$; l) $12xy^3 - 9xy$;
m) $3x - 6y - 9$; n) $3x - 12x^2$; o) $5x - 6xy + 2xy^2$

☉ *Keress a tagokban megegyező tényezőket! Minden esetben ellenőrizd a kiemelés helyességét úgy, hogy a szorzatot írd fel ismét összegalakban!*

B3 Kiemeléssel alakítsd szorzattá a következő többtagú kifejezéseket! Helyettesítsd be az adott értékeket!

a) $2x + 2$; $4x - 8$; $3x + 9$; $5x - 10$; ha $x = 1$
b) $9 - 3a$; $4a - 2$; $15a - 10$; $8 - 6a$; ha $a = -1$
c) $\frac{1}{2}x - xy$; $x^2 - 0,6xy$; $xy^2 - x^2y$; ha $x = -2$; $y = 3$
d) $3a^2b^2 - 6ab$; $8a^2 + 6a$; $7ab - 14b$; ha $a = -\frac{1}{2}$ $b = \frac{1}{4}$
e) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2}$; $0,8x^2y^2 - 0,4xy$; $\frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}$; ha $x = -4$; $y = -2$

☉ *Végezd el az ellenőrzéseket is úgy, hogy mind a többtagú kifejezés, mind a szorzat helyettesítési értékét számold ki! Például: $2a - 4 = 2 \cdot (a - 2)$, ha $a = 3$, akkor $2 \cdot 3 - 4 = 2$; $2 \cdot (3 - 2) = 2 \cdot 1 = 2$.*

B4 Először végezd el az összevonásokat, majd alakítsd szorzattá a kifejezéseket!

a) $x + 3x + xy + 4yx$; b) $y + 4y + 2xy + 6xy$;
c) $4,5x - 1,5xy - 10x - 4xy$; d) $4 + 4y - 2xy + 6xy - 8 - 4y$

☉ *Csak az egynemű tagokat vontad össze?*

B5 Alakítsd szorzattá a kifejezéseket!

a) $a^2 - 3a$; b) $2x^2 - 3x$; c) $5b^2 - 10b$; d) $a + 2a^2 + a$;
e) $b - 3b^2 + 5b$; f) $c + 7c^2 + 3c^2$; g) $xy + 3y^2$; h) $ab - 2b^3$;
i) $2ab - a^2$; j) $ab - b^2a^2$; k) $ab - ab^2$; l) $ab - a^2b$

☉ *Ha vannak a kifejezésben egynemű tagok, azokat célszerű összevonni.*

B6 Végezd el az összevonásokat, majd alakítsd szorzattá a kifejezéseket!

a) $x + xy + 2x + 2xy$; b) $a - ab + 3a - 3ab$;
c) $y^2 - xy + 2y^2 - 2xy$; d) $abc - ab + abc - ab$

Gyakorló
3.45–3.50.;
Feladatgyűjtemény
2.7.40–43.

Hány éves Máté, ha Ábel életkorának 5-szöröse 5-tel több, mint édesapjuk életkora?

☉ *A 145. lap alján lévő feladat folytatása.*

ALGEBRAI EGÉSZEKEL VÉGZETT MŰVELETEK GYAKORLÁSA

☉ Csak az egynemű tagokat vontad össze?

B7 Az összevonások után számítsd ki a kifejezések értékét!

- a) $3a + 2b - a + 4b - 6a - 3b + 2a + 13b$, ha $a = 1$; $b = 2$
 b) $x + 2x - 3,5x + 4,2x + x - 2x + 3x$, ha $x = 5$
 c) $-3x - 4y - 5x - 6y - 7x - 8x$, ha $x = 0$; $y = \frac{1}{9}$
 d) $xy + x - 2xy + x - 3xy + x$, ha $x = \frac{1}{2}$; $y = -2$
 e) $\frac{1}{2}y + \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}y + \frac{5}{8}y - \frac{5}{4}y + 3y$, ha $y = -2$

☉ Hogyan szorzunk összeget, különbséget egy számmal?

B8 Írd a szorzatokat összegalakba, majd számítsd ki az értéküket!

- a) $(a + 3) \cdot 4$; $(a - 8) \cdot (-3)$; $(6 + a) \cdot 2$; $(4 - a) \cdot 5$, ha $a = -2$
 b) $4(x - 1)$; $-6(2x - 5)$; $6(5 - 2x)$; $4(7x - x)$, ha $x = -1,5$
 c) $(a - b + 2) \cdot 3$; $-2 \cdot (5 - a - b)$; $1,2(a - 2 + b)$, ha $a = -1$; $b = 1$
 d) $(2x - 3y) \cdot \frac{1}{2}$; $1,7(0,5x - 2,1y)$; $-0,6(x - 2y)$, ha $x = 3$; $y = 10$
 e) $3,7 \cdot (2x - 0,5 + 3x) \cdot 2$; $4(x + 2) + 3(x - 2)$, ha $x = 1,1$
 f) $(a + b) \cdot b$; $b(2 - a)$; $(a + b - 5) \cdot (-3)$, ha $a = 1$; $b = -1$

☉ Javítsd ki a hibákat!

B9 Ödömér a következő összevonásokat végezte. Milyen hibákat követett el?

- a) $2x + 3y = 5xy$; b) $3x - 2x = 1$; c) $1,2x^2 + 0,5x^2 = 1,7x^2$;
 d) $4x + 9y = 13(x + y)$; e) $5x^2 - 5x^2 = 0$; f) $3xy - 3xy = xy$

☉ Segíts neki kijavítani a hibákat!

B10 Ödömér így végezte el a szorzásokat. Mi a hiba? Javítsd ki!

- a) $5 \cdot (2x^2) = 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x^2 = 50x^2$; b) $x \cdot (3,4x) = x \cdot 3,4 \cdot x \cdot x = 3,4 \cdot x^3$

☉ Keresd meg az egynemű tagokat!

B11 Először végezd el az összevonásokat, majd alakítsd szorzattá a kifejezéseket!

- a) $300y - 150y + 40y^2 - 30y^2$; b) $y^3 + 8yx + 2y^2 - 2yx$;
 c) $45 - 25x^2 + 15 - 20x^2$; d) $18y - 4zy - yz + 2y - 25y^2 + 50$;
 e) $a - \frac{1}{2}a + b - \frac{1}{2}b$; f) $\frac{3}{2}x - y - 2x - \frac{1}{4}y + x$

☉ Az x^2y nem egynemű az xy^2 -tel. Miért?

B12 Alakítsd szorzattá a kifejezéseket!

- a) $x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + 2x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - 4xy^2 + xy^2 - x^2y$;
 b) $\frac{xy}{2} - \frac{1}{2}xy + \frac{x^2}{4} - \frac{xy}{8} + \frac{x^2}{2} - \frac{xy}{4} + xy + x^2$

☉ Mi az xy együtthatója?



EGYENLET, EGYENLŐTLENSÉG, AZONOSSÁG, AZONOS EGYENLŐTLENSÉG

Értelmezés

Az olyan nyitott mondatot, amelyben két kifejezést az egyenlőség jelével kapcsolunk össze, **egyenletnek** nevezzük.

Az olyan nyitott mondatot, amelyben két kifejezést a „kisebb” ($<$), „kisebb vagy egyenlő” ($\leq$), „nagyobb” ($>$), „nagyobb vagy egyenlő” ($\geq$), „nem egyenlő” ($\neq$) jelek valamelyikével kapcsolunk össze, **egyenlőtlenségnek** nevezzük.

Egyenletek: $2 \cdot x - 5 = 12$; $|x - 1| = 5$; $2^x - 1 = 7$; $\frac{x}{y} = 2$

Egyenlőtlenségek: $2 \cdot x - 5 < 12$; $|x - 1| > 5$; $2^x - 1 \leq 7$; $\frac{x}{y} \geq 2$

☉ *Idézzük fel a 6. osztályban tanultakat!*

☉ *A „kisebb vagy egyenlő” helyett „nem nagyobb”-at is mondhatunk. Mit mondhatunk a „nagyobb vagy egyenlő” helyett?*

☉ *$y \neq 0$ Miért?*

Emlékeztető

Tudnunk kell, hogy mely **alaphalmazon** vizsgáljuk a megoldást. Ha nem mondunk mást, akkor a tanult számok, a racionális számok halmaza az alaphalmaz.

Ha az egyenletbe (egyenlőtlenségbe) **behelyettesítjük** az alaphalmaz valamely elemét, akkor igaz vagy hamis kijelentést kapunk. Az egyenlet (egyenlőtlenség) **igazsághalmazába** az alaphalmaznak azok az elemei tartoznak, amelyeket behelyettesítve az egyenletbe (egyenlőtlenségbe), igaz kijelentést kapunk.

Az igazsághalmaz elemeit az egyenlet (egyenlőtlenség) **megoldásainak**, más szóval **gyökeinek** nevezzük.

Egyenletet (egyenlőtlenséget) megoldani annyit jelent, mint meghatározni az igazsághalmazát.

☉ *Mely számokat nevezzük racionális számoknak? Hogyan értelmeztük a racionális szám fogalmát? Hogyan jelöljük a racionális számok halmazát?*

Az egyenlet (egyenlőtlenség) megoldása során általában

- ① megállapítjuk, hogy az alaphalmaz mely értékeire értelmezhető az egyenlet (egyenlőtlenség);
- ② az egyenletet (egyenlőtlenséget) olyan alakra hozzuk, amelyről már leolvasható a megoldás;
- ③ igazoljuk (ellenőrizzük), hogy a kapott értékek az alaphalmaz elemei; valóban megoldásai (gyökei) az egyenletnek (egyenlőtlenségnek); az egyenletnek (egyenlőtlenségnek) nincs más megoldása.

☉ *Például: a nevező nem lehet 0.*

Értelmezés

Ha az igazsághalmaz megegyezik az alaphalmazzal, akkor **azonosságról**, illetve **azonos egyenlőtlenségről** beszélünk.

☉ *Például:*
 $x + 5 = 5 + x$;
 $x + 5 > x + 2$;
 $x + 5 \neq x + 2$

FELADATOK

☉ Mely esetekben lesz az egyenletek, egyenlőtlenségek igazsághalmaza egyenlő az alaphalmazzal?

27

A következő egyenletek és egyenlőtlenségek közül melyik azonosság, melyik azonos egyenlőtlenség?

Határozd meg az egyenletek, egyenlőtlenségek igazsághalmazát!

Az alaphalmaz: $U = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

a) $2x + 1 = x + 4;$

b) $3x - 3 \leq x + 1;$

c) $3(x - 2) = 3x - 6;$

d) $5x + 5 > 4x + 5;$

e) $3x - 2 = 3x + 2;$

f) $3x - 2 < 3x + 2;$

g) $(x - 2) \cdot (x + 2) = 0;$

h) $(x - 2) \cdot (x + 2) \geq 0;$

i) $|x - 2| = -(x - 2);$

j) $|x - 2| < 3;$

k) $\frac{6}{x - 2} = -3;$

l) $\frac{6}{x - 2} > 0$

☉ Behelyettesítéssel eldönthető.

28

A következő egyenletek közül melyiknek megoldása a -2 ?

A: $10 - 3x = x + 2;$

B: $5x - 5 = 15 - 5x;$

C: $2x + 7 = 1 - x$

29

a) A következő egyenlőtlenségek közül melyiknek nem megoldása a -2 ?

A: $5x \neq 7;$

B: $3x - 1 < -10;$

C: $1 - 5x \geq 13 + x$

b) Vizsgáljuk a következő egyenlőtlenséget: $|x^2 - 2| \leq 4$

Az A, B, C, D, pontban adott számok közül melyik nem megoldása ennek az egyenlőtlenségnek?

A: $x = -3$

B: $x = -2$

C: $x = -1$

D: $x = 0$

EGYENLETEK MEGOLDÁSA A KÉT OLDAL EGYENLŐ VÁLTOZTATÁSÁVAL

1. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(3x + 1) + (3x + 2) + 2 = 4x + 11$$

☉ A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$
Az x eleme a $\mathbb{Q}$ -nak.

Az alaphalmaz a racionális számok halmaza, mivel nem mondtunk mást.

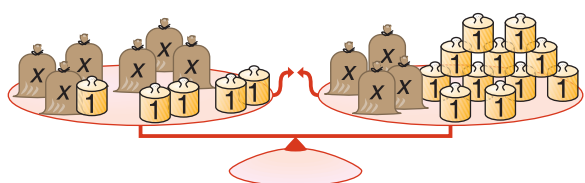
Az egyenlet két oldalán lévő kifejezések a racionális számok halmazán értelmezve vannak.

Az egyenlet két oldalát egy mérleg két serpenyőjéhez hasonlíthatjuk. Úgy változtatjuk a két oldalt, hogy az „egyensúly” megmaradjon, azaz az egyenlet igazsághalmaza ne változzon.

$$(3x + 1) + (3x + 2) + 2 = 4x + 11$$

Az első lépésekben azonos átalakításokat hajthatunk végre: Az egyenlet bal oldalán az összeg tetszőlegesen zárójellezhető, a zárójeleket el is hagyhatjuk.

»»



»»

$$3x + 1 + 3x + 2 + 2 = 4x + 11$$

Összevonhatjuk az **egynemű tagokat**, vagyis külön az ismeretleneket és külön a számokat.

$$6x + 5 = 4x + 11 \quad / - 4x$$

Mindkét oldalból elvehetünk $4x$ -et.

$$2x + 5 = 11 \quad / - 5$$

Mindkét oldalból elvehetünk 5 -öt.

$$2x = 6 \quad / : 2$$

Mindkét oldalt oszthatjuk 2 -vel.

Olyan alakot kapunk, amelyről már leolvasható a megoldás.

$$x = 3$$

A végrehajtott lépések során nem változott meg az egyenlet igazsághalmaza. Tehát az eredeti egyenlet igazsághalmaza: $I = \{3\}$

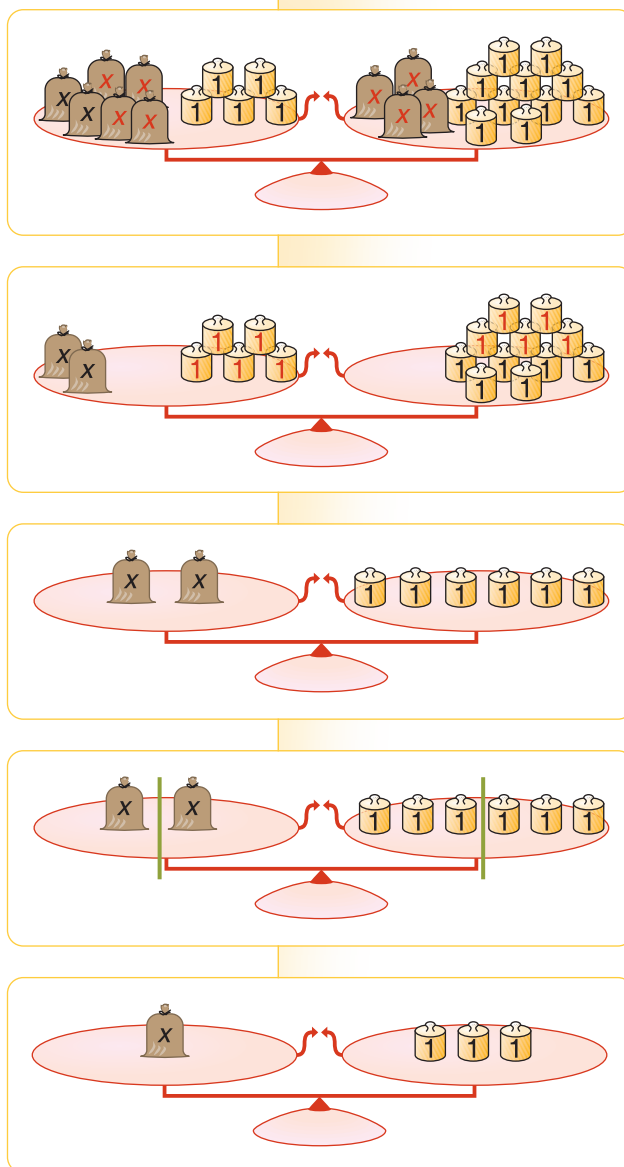
Ellenőrzés

Bal oldal: $(3 \cdot 3 + 1) + (3 \cdot 3 + 2) + 2 = 10 + 11 + 2 = 23$

Jobb oldal: $4 \cdot 3 + 11 = 23$

Tehát az $x = 3$ valóban megoldása az egyenletnek.

A megoldás ellenőrzését minden esetben el kell végeznünk. (Akkor is, ha ezt a feladatban külön nem írjuk elő!) Ugyanis **az ellenőrzéssel bizonyítjuk a megoldás helyességét.**



Két természetes szám összege 82. Ha a nagyobbikból elhagyunk egy számjegyet, éppen a kisebbik számot kapjuk. Melyik ez a két szám?

Többet ésszel ...



A különböző betűk különböző természetes számokat takarnak.

Mi lehet az **É** ?

$$H + A + T = 6$$

$$H + É + T = 7$$



Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz az $\mathbb{N}$.

$$6x - 5x + 4x - 3x + 2x - x = 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1$$

© Csak egy megoldást találtál?

© Melyik halmazt jelöltük $\mathbb{N}$ -nel?

2. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet: $7x - (3x + 2) = 8 - x$

Az alaphalmaz a természetes számok halmaza: $\mathbb{N}$

⊙ A zárójel előtti „-” jel a (-1) -gyel való szorzást is jelenti, azaz:

$$\begin{aligned} -(3x + 2) &= \\ &= (-1) \cdot 3x + (-1) \cdot 2 = \\ &= -3x - 2 \end{aligned}$$

⊙ Ellenőrzéskor mindig a kiindulási egyenletbe helyettesítjük be a kapott megoldásokat.

$$7x - (3x + 2) = 8 - x$$

$$7x - 3x - 2 = 8 - x$$

$$4x - 2 = 8 - x \quad / + x$$

$$5x - 2 = 8 \quad / + 2$$

$$5x = 10 \quad / : 5$$

$$x = 2$$

$(3x + 2)$ -t kivonni ugyanazt jelenti, mint $3x$ -et is és 2 -t is kivonni, ezért az egyenlet bal oldalán lévő zárójel így bontható fel.

Az egyenmű tagokat összevonhatjuk.

Mindkét oldalhoz hozzáadhatunk x -et.

Mindkét oldalhoz hozzáadhatunk 2 -t.

Mindkét oldalt oszthatjuk 5 -tel.

A végrehajtott lépések során nem változott meg az egyenlet igazsághalmaza, tehát az egyenletnek más megoldása nem lehet. A 2 természetes szám, tehát az egyenlet igazsághalmaza: $I = \{2\}$.

Ellenőrzés

Bal oldal: $7 \cdot 2 - (3 \cdot 2 + 2) = 14 - (6 + 2) = 6$; **jobb oldal:** $8 - 2 = 6$

Az $x = 2$ valóban megoldása az egyenletnek.

3. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$2,5 \cdot (2x - 12) - 5 \cdot (4 - 2x) = 10 - 3 \cdot (x + 2)$$

⊙ Általában olyan egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel foglalkozunk, amelyek mindkét oldalán algebrai kifejezések vannak. Ezért megoldásuk során alkalmazhatjuk az algebrai kifejezésekről tanultakat.

Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$ (mivel nem mondtunk mást).

$$2,5 \cdot (2x - 12) - 5 \cdot (4 - 2x) = 10 - 3 \cdot (x + 2)$$

$$5x - 30 - 20 + 10x = 10 - 3x - 6$$

$$15x - 50 = 4 - 3x \quad / + 3x \quad \text{Mindkét oldalhoz hozzáadhatunk } 3x\text{-et.}$$

$$18x - 50 = 4 \quad / + 50 \quad \text{Mindkét oldalhoz hozzáadhatunk } 50\text{-et.}$$

$$18x = 54 \quad / : 18 \quad \text{Mindkét oldalt oszthatjuk } 18\text{-cal.}$$

$$x = 3$$

Ellenőrzés

A 3 racionális szám, tehát eleme az alaphalmaznak.

Az **eredeti egyenlet** bal és jobb oldalán álló algebrai kifejezések helyettesítési értékét vizsgáljuk.

Bal oldal: $2,5 \cdot (2x - 12) - 5 \cdot (4 - 2x) = 2,5 \cdot (2 \cdot 3 - 12) - 5 \cdot (4 - 2 \cdot 3) =$
 $= 2,5 \cdot (6 - 12) - 5 \cdot (4 - 6) = 2,5 \cdot (-6) - 5 \cdot (-2) = -15 + 10 = -5$

Jobb oldal: $10 - 3 \cdot (x + 2) = 10 - 3 \cdot (3 + 2) = 10 - 3 \cdot 5 = 10 - 15 = -5$

Az $x = 3$ valóban megoldása az egyenletnek.

4. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet: $(3x - 6) : (x - 2) = 1$ Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

0-val nem oszthatunk, ezért feltételezzük, hogy $(x - 2) \neq 0$; vagyis $x \neq 2$.

$$\begin{array}{ll} (3x - 6) : (x - 2) = 1 & / \cdot (x - 2) \quad \text{A feltevésünk szerint az } (x - 2) \text{ nullától} \\ & \text{különbözik, ezért megszorozhatjuk vele az} \\ & \text{egyenlet mindkét oldalát.} \\ 3x - 6 = x - 2 & / + 6 \quad \text{Mindkét oldalhoz hozzáadunk 6-ot.} \\ 3x = x + 4 & / - x \quad \text{Mindkét oldalból elveszünk } x\text{-et.} \\ 2x = 4 & / : 2 \quad \text{Mindkét oldalt osztjuk 2-vel.} \\ x = 2 & \end{array}$$

Az $x = 2$ nem megoldása az eredeti egyenletnek, mert erre a számra nem értelmezhető az egyenlet bal oldalán lévő kifejezés.

Az egyenletnek más megoldása nem lehet, ezért az egyenlet igazsághalmaza az üres halmaz:

$I = \{ \}$ A jelölés azt szemlélteti, hogy a halmaznak nincsen eleme.

☉ Ha egy hányadost szorzunk az osztóval, akkor eredményül az osztandót kapjuk.

☉ Feltétel volt, hogy $x \neq 2$.

A MÉRLEGELV

Az egyenlet igazsághalmaza nem változik, ha az egyenlet

- 1 valamelyik (esetleg mindkét) oldalát vele azonos kifejezéssel helyettesítjük, például egyszerűsítjük vagy közös nevezőre hozzuk a törteket, elvégezzük a kijelölt műveleteket, felbontjuk a zárójeleket;
- 2 mindkét oldalához hozzáadjuk, vagy mindkét oldalából kivonjuk ugyanazt a számot vagy (az alaphalmazon értelmezett) kifejezést;
- 3 mindkét oldalát szorozzuk vagy osztjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal.

Megjegyzés: Ha olyan kifejezést adunk hozzá az egyenlet mindkét oldalához (vagy vonunk ki az egyenlet mindkét oldalából), amely az alaphalmaz valamely értékére nincs értelmezve, akkor az így kapott új egyenletnek más lehet az igazsághalmaza, mint az eredetinek. Ugyanez vonatkozik arra az esetre is, ha az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk vagy osztjuk egy olyan kifejezéssel, amely nulla is lehet, vagy az alaphalmaz nem minden értékére van értelmezve (lásd 4. példa).



Hárman megbecsülték egy óriás tobzoska hosszát. Peti 118 cm-t, Zoli 133 cm-t tippelt. Az egyik fiú tippelésének hibája kétszerese volt a másik fiú hibájának. Mekkora lehetett a tobzoska? Mennyit tippelhetett Kata, ha csak 2 cm-t tévedett?



Egy állatkertben az elefánt és a víziló életkorának összege 56 év. Az elefánt kétszer olyan idős, mint a víziló volt akkor, amikor az elefánt feleannyi éves volt, mint a víziló lesz akkor, amikor a víziló háromszor olyan idős lesz, mint az elefánt volt akkor, amikor az elefánt háromszor olyan idős volt, mint a víziló volt ugyanabban az időben. Hány évesek most?

Fejtörő!

☉ Vigyázz! Hátha több megoldása van a feladatnak!



FELADATOK

30

Oldd meg az egyenleteket! Az egyenletek közül melyik azonosság, ha az alaphalmaz a racionális számok halmaza?

Mely egyenletek igazsághalmaza az üres halmaz?

a) $5a - 0,5 = 3a + 3,5$;

b) $4b - 5 + 2b + (-4) = b + 6$;

c) $2,1c + 0,15 = 0,6c - 0,45$;

d) $4 - d - 5 + 4d = 2,4 - 2d$;

e) $e - \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - e$;

f) $f + \frac{3}{4} + 2f = 0,5 - f$;

g) $1,4 - 4g + (-0,5) = 0,8 - 2g$;

h) $4 - 0,3h - 0,4h = 2,4 - 0,2h$

31

Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz a racionális számok halmaza.

a) $15 - (3a + 6) = 3$;

b) $20 + (14 - b) = 27$;

c) $(5 - c) + (3c - 3) = 6$;

d) $(4d - 2) - (d - 2) = 3d$;

e) $e + (2,5 + e) - (2e + 2,5) = 5e$;

f) $3f - (5 - f) = 4f + 7$;

g) $\frac{4}{5} - (2,4 - g) - (1 - 3g) = 0$;

h) $(2,4 - h) - \frac{4}{3} + (1 - h) = \frac{2}{3}$

5. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet: $\frac{2}{5} - \frac{x}{3} = \frac{3}{2}$

a) Az alaphalmaz az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$

b) Az alaphalmaz a racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$

Az előforduló kifejezések minden racionális számra értelmezve vannak.

$$\frac{2}{5} - \frac{x}{3} = \frac{3}{2}$$

A tagokat közös nevezőre hozhatjuk.

$$\frac{12}{30} - \frac{10x}{30} = \frac{45}{30} \quad / \cdot 30$$

Mindkét oldalt szorozzuk a közös nevezővel.

$$12 - 10x = 45$$

A bal oldalt felírhatjuk összegalakban. Ez a lépés gondolatban elvégezhető.

$$12 + (-10x) = 45 \quad / - 12$$

Mindkét oldalból elvehetünk 12-t.

$$-10x = 33 \quad / : (-10)$$

Mindkét oldalt eloszthatjuk -10 -zel.

$$x = -3,3$$

A végrehajtott lépések során nem változott meg az egyenlet igazsághalmaza, tehát az egyenletnek más megoldása nem lehet.

a) A $-3,3$ nem egész szám, nem eleme az alaphalmaznak, ezért az egyenlet igazsághalmaza az üres halmaz.

b) A $-3,3$ racionális szám, eleme az alaphalmaznak, ezért az egyenlet igazsághalmaza egyelemű: $I = \{-3,3\}$

»»

☉ *Ügyelj a két oldal egyenlő változtatására! Csak egynemű kifejezések vonhatók össze. Ellenőrizd a megoldást!*

☉ *A zárójelek felbontása-kor gondold az összeg és a különbség változásairól tanultakra! Ha az eredeti egyenletbe helyettesíted be a megoldást, akkor észreveheted, ha hibásan bontottad fel a zárójelet.*

☉ *A közös nevező a nevezők legkisebb közös többszöröse.
[5; 3; 2] = 30*



Ellenőrzés

Bal oldal: $\frac{2}{5} - \frac{-3,3}{3} = \frac{2}{5} - (-3,3) : 3 = 0,4 - (-1,1) = 1,5$

Jobb oldal: $\frac{3}{2} = 1,5$ Az $x = -3,3$ valóban megoldása az egyenletnek.

FELADATOK

32

Határozd meg az igazsághalmazt, ha az alaphalmaz a racionális számok halmaza ($\mathbb{Q}$)!

Mely egyenletek igazsághalmaza az üres halmaz?

a) $\frac{a}{2} = \frac{3}{4}$; b) $\frac{b}{3} = \frac{2}{5}$; c) $\frac{c}{5} = 4\frac{3}{7}$; d) $\frac{2d}{3} = \frac{8}{5}$;

e) $\frac{4e}{5} = \frac{16}{25}$; f) $\frac{7f}{9} = -\frac{9}{7}$; g) $-\frac{6g}{21} = \frac{8}{7}$; h) $\frac{9h}{15} = -\frac{36}{25}$

33

Oldd meg az egyenleteket!

a) $\frac{3}{2}a + 0,3 = 1\frac{1}{2}$; b) $1,5 - \frac{3}{4}b = 5$; c) $1\frac{5}{6} = -2 - \frac{3}{4}c$;

d) $1 - \left(\frac{2}{3}d + 2\right) = -2\frac{1}{2}$; e) $5 - \left(1 + \frac{3}{2}e\right) = -5$; f) $\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}f\right) = 0$;

g) $5 + \left(\frac{5}{3}g - 1\right) = -2\frac{5}{6}$; h) $3 - \left(2 - \frac{1}{4}h\right) = -h$; i) $\frac{3}{2} - \left(\frac{9}{6} - \frac{3}{2}i\right) = \frac{3}{2}i$

34

Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$. Oldd meg az egyenleteket! Válaszd ki közülük az azonosságokat!

a) $(a + 3) \cdot 2 + 1 = 2a + 7$; b) $\frac{1}{2} \cdot (10b + 7) = 5b + 7$;

c) $c - (5 + c) = 5$; d) $d - (3 - d) = 4$;

e) $4 \cdot (e + 2) - (e + 2) \cdot 4 = 0$; f) $\frac{f}{2} + \frac{f}{3} = \frac{5f}{6}$;

g) $g + 2 + 2 \cdot (g + 3) + 3 \cdot (g + 4) = 7g$; h) $\frac{1}{2} \cdot (h - 3) + (3 - h) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$;

i) $i + 1,2 - (i - 2,4) = 3,6$; j) $3 \cdot \left(j - \frac{1}{3}\right) - 6 \cdot \left(j + \frac{1}{3}\right) = 0$

☉ Mit célszerű közös nevezőnek választanunk?

☉ Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

☉ Mi a teendő, ha a zárójel előtt „-” jel van?

☉ Egy egyenlet mikor azonosság?

Ügyelj a műveleti sorrendre!

Végezz ellenőrzést minden esetben!

Gyakorló

4.07–4.10.;

Feladatgyűjtemény

2.8.01–02., 2.8.11.,

2.8.23.



Oldd meg az egyenletet! Alaphalmaz a természetes számok halmaza.

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x}{3 \cdot 4} + \frac{x}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$



Melyik az a szám, amelynek az egytizede meg az egyharmada nyolccal kevesebb, mint az egyötöde meg a fele?

Többet ésszel ...

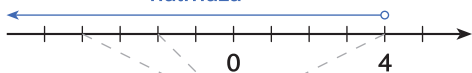
EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA A KÉT OLDAL EGYENLŐ VÁLTOZTATÁSÁVAL

1. példa

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget, az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$:

$$-x < 4$$

A keresett számok ellentettjeinek halmaza



A keresett számok halmaza

$$-x < 4 \quad / \cdot (-1)$$

Az igazsághalmazba tartozó számok ellentettjei kisebbek 4-nél.

Vegyük mindkét oldal ellentettjét, vagyis mindkét oldalt szorozzuk (-1) -gyel.

Az igazsághalmazba tartozó számok nagyobbak a 4 ellentettjénél, (-4) -nél.

$$x > -4$$

Ellenőrzés például:

$$\begin{aligned} -3 > -4; \quad 0 > -4; \quad +5 > -4; \\ -(-3) < 4; \quad -(0) < 4; \quad -(+5) < 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(-3) &= 3; \\ -(0) &= 0; \\ -(+5) &= -5 \end{aligned}$$

Emlékeztető

Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalának az ellentettjét vesszük (szorozzuk -1 -gyel), akkor megváltozik az egyenlőtlenség iránya.

2. példa

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget, az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$:

$$5 - 2x \leq 11$$

☉ *Elegendő gondolatban elvégezni.*

☉ *Ha mindkét oldalt osztjuk (-2) -vel, akkor a két lépést egy lépésben hajtjuk végre.*

$$5 - 2x \leq 11$$

$$5 + (-2x) \leq 11 \quad / -5$$

$$-2x \leq 6 \quad / \cdot (-1)$$

$$2x \geq -6 \quad / : 2$$

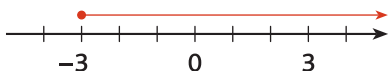
$$x \geq -3$$

A bal oldal felírható összegalakban.

Mindkét oldalból elvehetünk 5-öt.

Mindkét oldal ellentettjét véve megváltozik az egyenlőtlenség iránya.

Mindkét oldalt oszthatjuk 2-vel.



Számegyenesen ábrázoljuk az igazsághalmazt.

Ellenőrzés

$$\begin{aligned} x = -3; \quad 5 - 2 \cdot (-3) &= 11; & \text{A } -3 \text{ eleme az igazsághalmaznak;} \\ x = -2 > -3; \quad 5 - 2 \cdot (-2) &= 9 < 11; & \text{a } -2 \text{ eleme az igazsághalmaznak;} \\ x = -4 < -3; \quad 5 - 2 \cdot (-4) &= 13 \not\leq 11. & \text{a } -4 \text{ nem eleme az igazsághalmaznak.} \end{aligned}$$

3. példa

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget: $\frac{2}{5} - \frac{x}{3} < \frac{3}{2}$. Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$.

$$\frac{2}{5} - \frac{x}{3} < \frac{3}{2}$$

A tagokat közös nevezőre hozhatjuk.

$$\frac{12}{30} - \frac{10x}{30} < \frac{45}{30}$$

/ · 30

Mindkét oldalt szorozzuk a közös nevezővel.

$$12 - 10x < 45$$

/ - 12

Mindkét oldalból elvehetünk 12-t.

$$-10x < 33$$

/ : (-10)

Mindkét oldalt osztva -10-zel az egyenlőtlenség iránya megváltozik.

$$x > -3,3$$

Mivel az alaphalmaz az egész számok halmaza, ezért a -3,3-nél nagyobb egész számok adják az igazsághalmazt: $I = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

Ellenőrzés

Ha $x = -3$, akkor a **bal oldal**:

$$\frac{2}{5} - \frac{-3}{3} = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5} = \frac{42}{30}$$

Az egyenlőtlenség **jobb oldala** nem változik $\frac{3}{2} = \frac{45}{30}$

$$\frac{42}{30} < \frac{45}{30}$$

Igaz kijelentést kaptunk, a -3 megoldása az egyenlőtlenségnek.

Ha -3-nál nagyobb egész számokat helyettesítünk be, akkor az egyenlőtlenség bal oldalán a kivonandót növeljük, tehát a különbség csökken. Ezért ezekre a számokra is igaz kijelentést kapunk. **Például:**

Ha $x = -2$, akkor a bal oldal: $\frac{2}{5} - \frac{-2}{3} = \frac{12}{30} + \frac{20}{30} = \frac{32}{30}$

$$\frac{32}{30} < \frac{45}{30}$$

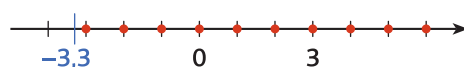
Ha -3-nál kisebb egész számokat helyettesítünk be, akkor az egyenlőtlenség bal oldalán a kivonandót csökkentjük, tehát a különbség nő. Ezért ezekre a számokra hamis kijelentést kapunk. **Például:**

Ha $x = -4$, akkor a bal oldal: $\frac{2}{5} - \frac{-4}{3} = \frac{12}{30} + \frac{40}{30} = \frac{52}{30}$

$$\frac{52}{30} \not< \frac{45}{30}$$

© A közös nevező lehet a nevezők legkisebb közös többszöröse:

$$[5; 3; 2] = 30$$



© Az egyenlőtlenségek megoldásánál nem tudunk minden számot (ami az egyenlőtlenségnek megfelel) behelyettesíteni. Ilyenkor néhány érték behelyettesítésével próbáljuk ellenőrizni megoldásunkat.

A műveleti tulajdonságok alkalmazásával (például itt a különbség változásainak figyelembevételével) sokszor igazolni is tudjuk a megoldás helyességét.

Két egyenlő nevezőjű tört közül melyik a nagyobb?



Hány tallér és hány garasba kerül egy puli, ha egy tallér 12 garast ér? A puli és a lúd egymáshoz viszonyított értékét az ábráról leolvashatjuk:



© Tételezzük fel, hogy a garasnál nincsen kisebb értékű pénzérme.

☉ Lásd 155. oldal.

Az egyenletek megoldásánál megfogalmazott ➊ és ➋ szabály az egyenlőtlenségek megoldására is érvényes, de a ➌ helyett új szabályt kell megfogalmaznunk.

Az egyenlőtlenség igazsághalmaza nem változik, ha az egyenlőtlenség

- ➊ valamelyik (esetleg mindkét) oldalát vele azonos kifejezéssel helyettesítjük;
- ➋ mindkét oldalához hozzáadjuk, vagy mindkét oldalából kivonjuk ugyanazt a számot vagy (az alaphalmazon értelmezett) kifejezést;
- ➌ mindkét oldalát szorozzuk vagy osztjuk ugyanazzal a **pozitív számmal**, és **az egyenlőtlenség irányát változatlanul hagyjuk**, vagy mindkét oldalát szorozzuk vagy osztjuk ugyanazzal a **negatív számmal**, és **az egyenlőtlenség irányát megváltoztatjuk**.

FELADATOK

☉ *Ellenőrizd a megoldást! Ábrázold számegyenesen az igazsághalmazt!*

Azonos egyenlőtlenség esetén milyen viszony van az alaphalmaz és az igazsághalmaz között?

☉ *Mi történik az egyenlőtlenséggel, ha mindkét oldal ellentettjét vesszük?*

Gyakorló

4.11–4.13.;

Feladatgyűjtemény

2.8.01., 2.8.03., 2.8.13.

35 Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$ (racionális számok halmaza). Melyik azonos egyenlőtlenség?

- | | |
|--|---|
| a) $7a - 15 > 2a + 15$; | b) $5b - 2 + b + (-5) < 6b + 4$; |
| c) $2,5c + 0,5 \leq 0,75c - 0,45$; | d) $7 - d - 2 + 4d \geq 4 - 2d$; |
| e) $e - \frac{1}{2} > \frac{3}{2} + e$; | f) $f + \frac{3}{5} + 2f \leq 0,6 - 2f$; |
| g) $g : 2 - 5 < 15$; | h) $(0,3h - 6) : 3 \geq 1$ |

36 Határozd meg az igazsághalmazt! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

- | | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $-a < -2,5$; | b) $-1,5b \geq 6$; | c) $c : (-3) \leq 9$; | d) $-\frac{d}{2} > \frac{3}{5}$; |
| e) $-\frac{e}{3} < \frac{2}{5}$; | f) $-\frac{f}{3} \geq 2\frac{1}{4}$; | g) $\frac{2g}{3} \leq \frac{8}{5}$; | h) $\frac{4h}{5} > \frac{16}{25}$ |

37 Add meg az egyenlőtlenségek igazsághalmazát! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

- | | | |
|---|---|---------------------------------------|
| a) $2 \cdot (x - 1) < 3$; | b) $3 \cdot (x - 5) - 2 \cdot (x - 6) < 2$; | c) $\frac{1}{2} \cdot (2y - 4) > 3$; |
| d) $\left(y + \frac{1}{2}\right) : 4 > 1$; | e) $2 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (x + 1) \geq 0$; | f) $(2y - 3) \cdot 5 + 1 > 2$ |

Többet ésszel ...



Adj meg olyan számot, amelyre csak az egyik egyenlőtlenség teljesül:

- a) $x - 2 > 3$; b) $3x > 15$; c) $x^2 > 25$

Fejtörő!



Wyatt Earp és Johnny Ringo párbajra készülnek. Egymással háttal ellenkező irányba indulnak. Wyatt 200-tól számol ötösével előre minden lépésnél egyet, míg Johnny lépésenként 300-tól hármásával vissza egyet. Amikor Wyatt először mond több mint háromszor akkora számot, mint Johnny, megfordulnak és lőnek. Hány lépésre lesznek ekkor egymástól?

TÖRTEGYÜTTHATÓS EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA

1. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet, ha az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

$$\frac{x-5}{2} + \frac{x}{3} = 5$$

☉ $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza.

Átalakítjuk az egyenletet olyan egyenletté, hogy ne tartalmazzon törtet. Ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, ha **közös nevezőre hozzuk a törtet, majd szorozzuk az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezéseket a törtök közös nevezőjével.**

$$\frac{x-5}{2} + \frac{x}{3} = 5$$

A törtök közös nevezője a 2 és a 3 legkisebb közös többszöröse: $[2; 3] = 6$.

$$\frac{3 \cdot (x-5)}{6} + \frac{2x}{6} = 5 \quad / \cdot 6$$

Törtet egész számmal úgy is szorozhatunk, hogy a tört nevezőjét osztjuk a szorzóval.

$$3 \cdot (x-5) + 2x = 30$$

Felbontjuk a zárójelet.

$$3x - 15 + 2x = 30$$

Összevonjuk az egyenmű tagokat.

$$5x - 15 = 30 \quad / +15$$

$$5x = 45 \quad / :5$$

A két oldal egyenlő változtatásával keressük a megoldást.

$$x = 9$$

☉ Ha a törtet szorozzuk a nevezőjével, akkor a tört számlálóját kapjuk eredményül.

☉ Összeget úgy szorzunk, hogy minden tagját megszorozzuk.

Ellenőrzés

A 9 racionális szám, tehát eleme az alaphalmaznak.

A **bal oldal**: $\frac{9-5}{2} + \frac{9}{3} = \frac{4}{2} + 3 = 2 + 3 = 5$

A **jobb oldal** értéke szintén 5.

Tehát az $x = 9$ kielégíti az egyenletet és eleme az alaphalmaznak, azaz gyöke az egyenletnek. Az egyenlet igazsághalmaza: $I = \{9\}$



Ödön vagyona felét Tóbiásra, a vagyon egyharmadát Ulrikra, egynegyed részét Zebulonra, unokaöccseire hagyta, míg a maradék 100 tallérral ismeretlen helyre távozott. Hány tallért kapott egy-egy unokaöcs?

Többet ésszel ...

☉ Értelmezd az eredményt!



Ha ugyanazt a számot hozzáadjuk 30-hoz, 50-hez és 80-hoz, úgy három olyan számot kapunk, amelyekre igaz az, hogy az első úgy aránylik a másodikhoz, mint a második a harmadikhoz. Melyik ez a szám?

Fejtörő!

☉ Mit értünk két szám arányán?



Az A , B , C , D , E betűk mindegyike egy egész számot jelöl. Melyik mi lehet, ha igazak a következő összefüggések?

① $\frac{A+C}{A} = 1$; ② $\frac{A}{E} = -1$; ③ $B-D=D$; ④ $\frac{D}{E} = D$; ⑤ $\frac{B}{D} = D$

☉ $\mathbb{N}$ a természetes számok halmazának a jele.

☉ Nemcsak a törteket szorozzuk 4-gyel.

☉ Ha a törtet a nevezőjével szorozzuk, akkor eredményül a számlálóját kapjuk. Megfigyelted a zárójel felbontását?

☉ Ha az alaphalmaz a racionális számok halmaza

lenne, akkor az $x = \frac{2}{7}$ gyöke lenne az egyenletnek.

2. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet, ha az alaphalmaz az $\mathbb{N}$.

$$4 - \frac{5x + 3}{2} = \frac{8 - 3x}{4}$$

$$4 - \frac{5x + 3}{2} = \frac{8 - 3x}{4}$$

A törtek közös nevezője 4. Azonos nevezőjűvé alakítjuk a törteket.

$$\frac{16}{4} - \frac{2 \cdot (5x + 3)}{4} = \frac{8 - 3x}{4} \quad / \cdot 4$$

Mindkét oldalt szorozzuk a közös nevezővel.

$$16 - 2 \cdot (5x + 3) = 8 - 3x$$

Felbontjuk a zárójelet.

$$16 - 10x - 6 = 8 - 3x$$

Összevonjuk az egyenmű tagokat.

$$10 - 10x = 8 - 3x \quad / + 10x$$

A két oldal egyenlő változtatásával keressük a megoldást.

$$10 = 8 + 7x \quad / - 8$$

$$2 = 7x \quad / : 7$$

$$\frac{2}{7} = x$$

Ellenőrzés

Bár az $x = \frac{2}{7}$ kielégíti az eredeti egyenletet, de nem természetes szám, ezért **nem eleme az alaphalmaznak, tehát nem megoldása az egyenletnek**. Az egyenletnek nincs gyöke ebben az alaphalmazban. Az egyenlet igazsághalmaza az üres halmaz.

Figyeld meg!

Milyen műveleteket végezhetünk az egyenlet megoldása során?

- 1 Megkeressük a törtek nevezőjének legkisebb közös többszörösét, és azonos nevezőjű törtekké alakítjuk őket.
- 2 Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezést a törtek közös nevezőjével. A törtek szorzását úgy célszerű elvégeznünk, hogy a nevezőket osztjuk a szorzóval.
- 3 Egyszerűbb alakra hozzuk az egyenlet két oldalán álló kifejezéseket.

Például:

felbontjuk a zárójeleket;

összevonjuk az egyenmű kifejezéseket.

- 4 Meghatározzuk a változó értékét, például a két oldal egyenlő változtatásával.

3. példa

Oldjuk meg az egyenletet. Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

$$\frac{x - 5}{2} = 0$$

Egy tört értéke pontosan akkor 0, ha a számlálója 0, és a nevezője nem 0.

A tört számlálója: $x - 5$

$$\begin{aligned} x - 5 &= 0 & / +5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Ellenőrzés

Az 5 racionális szám, tehát eleme az alaphalmaznak.

$$\frac{5 - 5}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Azaz az $x = 5$ gyöke az egyenletnek.

⊙ **Vigyázz!** A nevező soha sem lehet 0.

⊙ A kiindulási egyenletbe helyettesítjük be a gyököt.

4. példa

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget, ha az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$:

$$\frac{x - 3}{2} + \frac{x}{4} > 2$$

$$\frac{x - 3}{2} + \frac{x}{4} > 2$$

$$\frac{2 \cdot (x - 3)}{4} + \frac{x}{4} > 2 \quad / \cdot 4$$

$$2 \cdot (x - 3) + x > 8$$

$$2 \cdot x - 6 + x > 8$$

$$3x - 6 > 8 \quad / +6$$

$$3x > 14 \quad / :3$$

$$x > \frac{14}{3}$$

A közös nevező 4. A törteket azonos nevezőjű alakban írjuk fel.

Mivel a 4 pozitív szám, nem változik meg az egyenlőtlenség iránya, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel.

Felbontjuk a zárójelet.

Az egynemű tagokat összevonjuk, majd a két oldal egyenlő változtatásával keressük a megoldást.

A 3 pozitív szám, tehát nem változik az egyenlőtlenség iránya, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát elosztjuk 3-mal.

Ellenőrzés

A $\frac{14}{3}$ -nál nagyobb például a $\frac{15}{3} = 5$. Ezt behelyettesítjük az eredeti egyenlőtlenségbe:

$$\frac{5 - 3}{2} + \frac{5}{4} = 1 + \frac{5}{4} = 2\frac{1}{4} > 2$$

Az 5 valóban **megoldása** az egyenlőtlenségnek.

A $\frac{14}{3}$ -nál kisebb például a $\frac{12}{3} = 4$. Ezt behelyettesítve:

$$\frac{4 - 3}{2} + \frac{4}{4} = \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2} \not> 2$$

A 4 valóban **nem megoldása** az egyenlőtlenségnek.

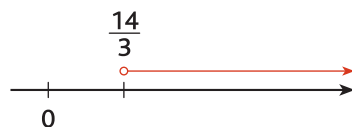
Ábrázoljuk számegyenesen az igazsághalmazt:

Az $x = \frac{14}{3}$ nem eleme az igazsághalmaznak, ezt üres karikával jelezzük.

⊙ Az egyenlőtlenség megoldásakor ugyanazokat a lépéseket hajtjuk végre, mint az egyenletnél, csak arra kell vigyázni, hogy ha negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk mindkét oldalt, akkor változik az egyenlőtlenség iránya.

⊙ Ha 5-nél nagyobb egész számokat helyettesítünk be az egyenlőtlenségbe, akkor a bal oldalon álló kifejezés értéke nő, tehát az 5-nél nagyobb számok mindegyike megoldás.

Ha 4-nél kisebb számokat helyettesítünk be, akkor a bal oldalon álló kifejezés értéke csökken. Ezek nem megoldások.



5. példa

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget. Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$.

$$1 - \frac{4x-1}{6} < \frac{3}{2} - \frac{x-3}{3}$$

☉ *Magyarázd meg, hogy miért így bontjuk fel a zárójelet!*

$$\frac{6}{6} - \frac{4x-1}{6} < \frac{9}{6} - \frac{2(x-3)}{6} \quad / \cdot 6$$

A törtet azonos nevezőjű alakra hozzuk, majd mindkét oldalt szorozzuk a közös nevezővel.

$$6 - (4x-1) < 9 - 2(x-3)$$

A törtvonal zárójelet helyettesít, ezért **a törtvonal elhagyása után kitesszük a zárójeleket.**

$$6 - 4x + 1 < 9 - 2x + 6$$

Felbontjuk a zárójeleket, és összevonjuk az egyenmű tagokat.

$$7 - 4x < 15 - 2x \quad / + 2x$$

$$7 - 2x < 15 \quad / - 7$$

A két oldal egyenlő változtatásával keressük a megoldást.

$$-2x < 8 \quad / : (-2)$$

$$x > -4$$

Negatív számmal osztva (vagy szorozva) az egyenlőtlenség mindkét oldalát, az egyenlőtlenség iránya megváltozik.

Igazsághalmaz: $I = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

Ellenőrzés

Helyettesítsük be az $x = -4$ értéket:

Bal oldal: $1 - \frac{4(-4)-1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{-16-1}{6} = \frac{6}{6} + \frac{17}{6} = \frac{23}{6}$

Jobb oldal: $\frac{3}{2} - \frac{-4-3}{3} = \frac{9}{6} - \frac{-8-6}{6} = \frac{9}{6} + \frac{14}{6} = \frac{23}{6}$

$$\frac{23}{6} \not< \frac{23}{6}; \text{ az } x = -4 \text{ nem megoldás.}$$

Helyettesítsük be a -4 -nél nagyobb értéket, például az $x = -3$ -at:

Bal oldal: $1 - \frac{4(-3)-1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{-12-1}{6} = \frac{6}{6} + \frac{13}{6} = \frac{19}{6}$

Jobb oldal: $\frac{3}{2} - \frac{-3-3}{3} = \frac{9}{6} - \frac{-6-6}{6} = \frac{9}{6} + \frac{12}{6} = \frac{21}{6}$

$$\frac{19}{6} < \frac{21}{6} \text{ az } x = -3 \text{ valóban megoldás.}$$

☉ *Néhány alkalmas egész szám behelyettesítésével győződhetünk meg megoldásunk helyességéről.*

Összegzés

Egyenlőtlenséget ugyanúgy oldunk meg mérlegelvvel, mint egyenletet, csak **ha negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát, akkor megváltozik az egyenlőtlenség iránya.**

FELADATOK

B13 Oldd meg az egyenleteket! Ellenőrizd a megoldást! Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{lll} a) \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 18; & b) \frac{2x}{5} + \frac{x}{2} = 9; & c) \frac{3x}{4} - \frac{x}{2} = 5; \\ d) \frac{4x}{5} - \frac{x}{10} = 7; & e) \frac{7x}{8} - \frac{x}{6} = 17; & f) \frac{9x}{5} - \frac{x}{2} = 2\frac{3}{5}; \\ g) \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 7; & h) \frac{x}{5} + \frac{3x}{7} - \frac{x}{35} = 21; & i) \frac{x}{2} - \frac{x}{6} = 1 + \frac{x}{3} \end{array}$$

B14 Oldd meg az egyenleteket! Ellenőrizd a megoldást! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{lll} a) x - \frac{x}{2} = 3; & b) \frac{x}{5} - 2x = 6; & c) 3x + \frac{2x}{5} = 4; \\ d) x - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 0; & e) \frac{x}{3} - \frac{x}{6} + \frac{x}{18} = 1; & f) 2 \cdot \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 5 \end{array}$$

B15 Oldd meg az egyenleteket! Ellenőrizd a megoldást! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{a}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2} - \frac{a}{4}; & b) 0,2 - \frac{3b}{2} + \frac{b}{5} = 0,6 - \frac{2b}{5}; \\ c) \frac{2c}{3} - \frac{5}{4} + \frac{5c}{6} = \frac{3c}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}; & d) \frac{2d}{5} + 1 + \frac{2d}{3} = \frac{5d}{3} - \frac{1}{3} - \frac{3d}{5}; \\ e) \frac{7e}{15} + 0,1 - \frac{5e}{12} = \frac{3e}{20} + \frac{1}{2} + \frac{e}{5}; & f) 2 - \frac{3f}{25} - \frac{7f}{10} = \frac{2f}{5} - \frac{3}{2} - \frac{11f}{50}; \\ g) g - \left(\frac{5}{2} + 2g\right) + (5g - 1) = g + \frac{3}{4}; & h) \frac{4}{5} - \left(\frac{3}{2} - 2h\right) - 0,1h = 0,5h \end{array}$$

B16 Oldd meg az egyenleteket! Ellenőrizd a megoldást! Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{lll} a) \frac{x-2}{6} = 8; & b) \frac{2x+5}{3} = 7; & c) \frac{3x+5}{7} = 5; \\ d) \frac{4x-3}{5} = 13; & e) \frac{x-2}{3} + \frac{5+4x}{5} = 6; & f) \frac{5x+3}{4} - 4 = \frac{4+3x}{2}; \\ g) y+1 = \frac{5-y}{2}; & h) 2 - \frac{1-3y}{4} = y; & i) 1 - \frac{x+2}{3} = \frac{2x-1}{6} \end{array}$$

☉ $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza.

☉ Mely egyenletek igazsághalmaza az üres halmaz?

Melyek igazsághalmaza egyezik meg az alaphalmazzal; hogyan nevezzük az ilyen egyenleteket?

☉ $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza.

☉ A zárójelek felbontásakor gondold az összeg és a különbség változásairól tanultakra!

☉ Emlékeztető: A törtvonal zárójelet helyettesít! Hogyan bontjuk fel a zárójelet, ha a zárójel előtt „-” jel van?



Van-e olyan természetes szám, amelynek a felét és az egyötödét összeszorozva a szám nyolcszorosát kapjuk?



Ödömérnek van 243 (kívülről teljesen egyforma) aranytallérja, de ezek közül egy hamisítvány, kicsivel könnyebb a valódi talléroknál. Kétkarú mérleggel (például két-két tallér tömegét összehasonlítva) megállapítható, hogy melyik tallér hamis, de mérésenként egy-egy ezüst garast kérnek. Hogyan lehetne legkevesebb méréssel biztosan kiválasztani a hamis pénz?

Többet ésszel ...

☉ Klasszikus fejtörő feladat alapján. Segíts Ödömérnek!

☉ Mit helyettesít a törtvo-
nal?

B17 Oldd meg az egyenleteket! Ellenőrizd a megoldást! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{lll} a) \frac{y-3}{2} = 5; & b) \frac{2y-5}{7} = 3; & c) \frac{3y+2}{4} = \frac{13}{2}; \\ d) \frac{y+1}{2} - 3 = 0; & e) \frac{y-2}{3} = \frac{y+1}{4}; & f) \frac{y}{2} = \frac{2y-3}{5}; \\ g) \frac{2y-3}{7} = 0; & h) \frac{2y-3}{7} = 1; & i) \frac{2y-3}{7} = \frac{1}{7}; \\ j) \frac{x-5}{6} + \frac{x}{3} = 1; & k) \frac{x+1}{4} - \frac{x}{2} = 0; & l) \frac{2x-3}{5} = \frac{3x-6}{8} \end{array}$$

☉ Egy tört mikor pozitív, és
mikor negatív?

B18 Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Ellenőrizd a megoldást! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{lll} a) \frac{x-5}{4} > 0; & b) \frac{3-x}{2} < 0; & c) \frac{x+2}{-3} > 0; \\ d) \frac{x-3,5}{4} > 1; & e) \frac{2x-5,2}{3} - 1 \geq 0; & f) \frac{4-2,5x}{6} \geq -1; \\ g) \frac{2x-3}{2} + 1 > 2; & h) \frac{4,5-2x}{4} + 2 \leq 3; & i) \frac{5x-4}{5} \geq 1+x \end{array}$$

☉ Mikor 0 egy tört értéke?

B19 Oldd meg az egyenleteket! Ellenőrizd a megoldást! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{llll} a) \frac{x-4}{3} = 0; & b) \frac{5-x}{2} = 0; & c) \frac{x+9}{7} = 0; & d) \frac{3x-9}{17} = 0; \\ e) \frac{2x-5}{8} = 0; & f) \frac{6x+24}{11} = 0; & g) \frac{3x+3,8}{9,2} = 0; & h) \frac{9x+3}{71} = 0; \\ i) \frac{3x+18}{2} = 0; & j) \frac{3x+18}{2} = 1,5x; & k) \frac{3x+18}{2} = 1,5x+9; \\ l) \frac{x-7}{-4} = \frac{14-x}{8}; & m) \frac{15}{5x} = 0; & n) \frac{x+3}{2} = \frac{3x-5}{6} \end{array}$$

Gyakorló
4.14–4.21.;
Feladatgyűjtemény
2.8.12., 2.8.15–18.

B20 Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Ellenőrizd a megoldást! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{lll} a) \frac{x-3}{2} \geq 5; & b) \frac{x+1}{4} < 0; & c) \frac{x+5}{10} < 1; \\ d) \frac{3-x}{50} > 3; & e) \frac{x}{2} + 1 \leq 3; & f) \frac{-5x-3}{4} + 2 \geq 0 \end{array}$$



Többet ésszel ...

Kísérletezz!

☉ Játsszátok el,
legyetek ti a
törpék!



A lámpás törpe 20 cm-rel alacsonyabb, mint az ásós törpe. A bányász törpe annyi magasabb, mint a lámpás, mint amennyivel alacsonyabb, mint az ásós, és így a magassága az ásós törpe magasságának 13 tizenötöd része. Mennyi az átlagmagasságuk?



Amélie 4-szer 4-es elrendezésbe állította apja kerti törpéit. Ezután minden oszlopban kiválasztotta a legalacsonyabb törpét, majd ezek közül a legmagasabbat megjelölte egy piros pöttyel. Majd kiválasztotta minden sorban a legmagasabbat, és ezek legalacsonyabbikát egy sárga pöttyel jelölte meg. Melyik törpe magasabb, a piros vagy a sárga pöttyös?

SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSA EGYENLETTEL, EGYENLŐTLENSÉGGEL

1. példa

Két egész szám aránya $2:3$. Ha a két szám összegéből elveszünk 5-öt, akkor 65-öt kapunk. Melyik ez a két szám?

1. Értelmezzük a feladatot. Jelöljük az ismeretleneket.

Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$ (az egész számok halmaza).

A két szám aránya $2:3$, ezt így szemléltethetjük:

Legcélszerűbb egy részt jelölni x -szel.

Az egyik szám: $2x$; a másik szám: $3x$.



2. Keressünk az adatok közt összefüggést. Becsüljük meg az eredményt.

A két szám összege:

Ebből még 5-öt el kell vennünk, és akkor kapunk 65-öt.

Ha egy rész

$x = 10$, akkor $2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 = 50$, ez kevés, hiszen $50 - 5 < 65$;

$x = 20$, akkor $2 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 100$, ez sok, hiszen $100 - 5 > 65$.

Az x érték 10 és 20 között van.



3. Tervezzük meg a számítást. Írjuk fel az egyenletet.

$$(2x + 3x) - 5 = 65$$

4. Oldjuk meg az egyenletet.

$$5x - 5 = 65 \quad / + 5$$

$$5x = 70 \quad / : 5$$

$$x = 14$$

Az egymű tagokat összevonjuk, felbontjuk a zárójelet, majd a két oldal egyenlő változtatásával keressük a megoldást.

Az egyik szám $(2 \cdot 14 =)$ 28, a másik szám $(3 \cdot 14 =)$ 42.

5. Ellenőrizzük a megoldást.

A 28 és a 42 egész számok.

28 és 42 aránya $\frac{28}{42} = \frac{2}{3}$; összegük $28 + 42 = 70$.

Ha a két szám összegéből, a 70-ből elveszünk 5-öt, akkor valóban 65-öt kapunk.

Az eredményünk eleget tesz a feladat szövegének.

6. Mi mondható még el a feladatról?

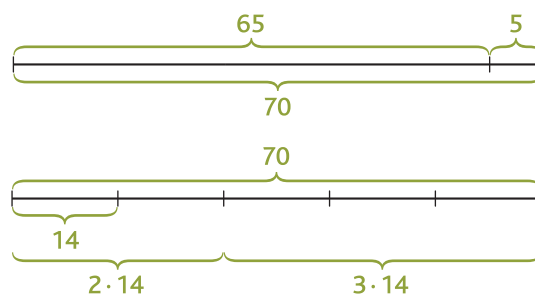
a A feladatot egyenlet felírása nélkül is megoldhatjuk.

Ha a két szám összegénél 5-tel kevesebb szám 65, akkor a két szám összege 70.

A 70-et kell $2:3$ arányban osztanunk.

Öt egyenlő részre osztjuk a 70-et. Az egyik szám az egyötöd rész kétszerese, a másik a háromszorosa.

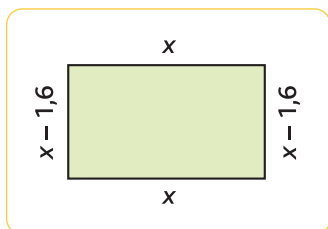
b Más módon is megoldható a feladat, de ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az előző megoldásokban.



☉ Más egyenlettel is felírhatjuk az adatok közötti összefüggést.

☉ A szöveges feladatok megoldását mindig a szöveg alapján ellenőrizzük.

$$K = 2a + 2b = 2(a + b)$$



2. példa

Egy téglalap egyik oldala 1,6 cm-rel rövidebb a másik oldalnál. Kerülete háromszorosa a hosszabbik oldalnak. Mekkora a téglalap területe?

1 Értelmezzük a feladatot.

Rajzoljuk le a téglalapot. Vezessünk be jelöléseket.

A hosszabbik oldalt jelölhetjük x -szel.

A másik oldal ennél 1,6 cm-rel rövidebb: $x - 1,6$ cm

A kerület 3-szorosa a hosszabbik oldalnak: $K = 3 \cdot x$

Az x csak pozitív szám lehet.

2 Keressünk összefüggést az adatok közt. Becsüljük meg az eredményt.

Készítsünk táblázatot.

Hosszabb oldal (cm)	1	2	3	4	x
Rövidebb oldal (cm)	–	0,4	1,4	2,4	$x - 1,6$
Kerület (cm)	–	4,8	8,8	12,8	$2 \cdot x + 2 \cdot (x - 1,6)$
A hosszabb oldal háromszorosa (cm)	3	6	9	12	$3 \cdot x$

A feladat csak akkor értelmezhető, ha a hosszabbik oldal 1,6 cm-nél hosszabb. Ha a hosszabbik oldal 3 cm, akkor a 3-szorosa még nagyobb, mint a kerület. Ha a hosszabbik oldal 4 cm, akkor a 3-szorosa kisebb, mint a kerület. A hosszabbik oldalnak a hossza 3 cm és 4 cm között van.

3 Tervezzük meg a számítást. Írjuk fel az egyenletet.

A kerületet kétféleképpen felírva az adatok közt megtaláljuk az összefüggést:

$$2x + 2 \cdot (x - 1,6) = 3x$$

Kiszámítjuk az oldalak hosszát, majd ezekből a téglalap területét.

4 Oldjuk meg az egyenletet.

$$2x + 2 \cdot (x - 1,6) = 3x$$

$$2x + 2x - 3,2 = 3x$$

$$4x - 3,2 = 3x \quad / + 3,2$$

$$4x = 3x + 3,2 \quad / - 3x$$

$$x = 3,2$$

Elvégezzük a szorzást.

Az egyenmő tagokat összevonjuk.

Mindkét oldalhoz hozzáadunk 3,2-et.

Mindkét oldalból elveszünk $3x$ -et.

Az egyik oldal: $a = 3,2$ cm; a másik: $b = 3,2$ cm $- 1,6$ cm = 1,6 cm.

A terület: $T = a \cdot b = 3,2 \cdot 1,6$ cm² = 5,12 cm²

5 Ellenőrizzük a megoldást.

A szöveg alapján ellenőrizzük.

A kerület: $K = 2 \cdot (3,2$ cm + 1,6 cm) = 2 · 4,8 cm = 9,6 cm;

$$K = 3 \cdot 3,2$$
 cm = 9,6 cm

A kerület valóban 3-szorosa a hosszabbik oldalnak.

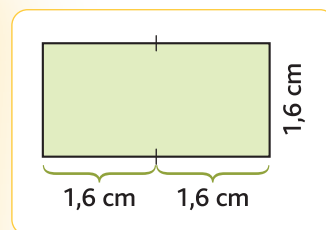


6 Mi mondható még el a feladatról?

- a Ha a rövidebb oldalt y -nal jelöljük, akkor ebből kiindulva is felírható az egyenlet:

$$2y + 2(y + 1,6) = 3(y + 1,6)$$

- b Ha olyan téglalapot próbálunk rajzolni, amelynek kerülete 3-szorosa a hosszabbik oldalnak, akkor észrevehetjük, hogy a rövidebb oldal fele a hosszabbiknak. Így egyenlet felírása nélkül is eljuthatunk a megoldáshoz.



3. példa

Gábor elköltötte zsebpénzének 65%-át és még 14 €-t.

Így pénzének legfeljebb $\frac{1}{3}$ része maradt meg.

Mennyi lehetett Gábor zsebpénze?

☉ Mit jelent az, hogy a zsebpénznek legfeljebb az egyharmad része maradt meg?

Gábor zsebpénzét jelölje z . A z pozitív szám.

Elköltötte a pénz 65%-át, megmaradt a 35%-a: $0,35 \cdot z$

A zsebpénz $\frac{1}{3}$ része: $\frac{z}{3}$.

A zsebpénz 35%-a legalább 14 €.

Az adatok közti összefüggés alapján két egyenlőtlenséget írhatunk fel:

$$\textcircled{1} 0,35z \geq 14 \qquad \textcircled{2} 0,35z - 14 \leq \frac{z}{3}$$

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket.

$$\textcircled{1} \quad 0,35z \geq 14 \quad / : 0,35 \quad \text{Oszthatunk mindkét oldalt 0,35-dal.}$$

$$z \geq 40$$

$$\textcircled{2} \quad 0,35z - 14 \leq \frac{z}{3} \quad / \cdot 3 \quad \text{Mindkét oldalt szorozzuk 3-mal.}$$

$$1,05z - 42 \leq z \quad / - 1,05z \quad \text{Mindkét oldalból elveszünk 1,05z-t.}$$

$$-42 \leq -0,05z \quad / : (-0,05) \quad \text{Oszthatunk mindkét oldalt } (-0,05)\text{-dal.}$$

$$840 \geq z$$

Az egyenlőtlenség iránya megváltozik.

A két egyenlőtlenség megoldását összevetve: $40 \leq z \leq 840$

Gábornak legalább 40 €-ja és legfeljebb 840 €-ja volt.

☉ Mit jelent az, hogy a zsebpénz 35%-a legalább 14 €?

☉ Miért változott meg az egyenlőtlenség iránya?

Ellenőrzésként táblázatot készítünk:

Zsebpénz (€)	30	40	810	840	870
A pénz 35%-a (€)	10,50	14	283,50	294	304,50
A pénz egyharmada (€)	10	13,33	270	280	290
A maradék (€)	–	0	269,50	280	290,50

A 30 € nem megoldás, a maradékból nem költhető el 14 €.

A 40 €, a 810 €, a 840 € megoldás, a maradék nem több a zsebpénz egyharmadánál. A 870 € nem megoldás, a maradék több a zsebpénz egyharmadánál.

FELADATOK

Figyelempróba

☉ Ne feledkezz meg az ellenőrzésről!

38

Írd fel az adatok közti összefüggést egyenlettel vagy egyenlőtlenséggel, majd add meg az igazsághalmazt!

- Egy téglát tömege 1 kg és egy fél téglát. Mekkora a téglát tömege?
- Péternek 300 Ft-ja volt. Vett három füzetet és 45 Ft-ért egy törlőgumit. 150 Ft-nál kevesebb pénze maradt. Mennyibe kerülhetett egy füzet?
- Egy osztályban 32 tanuló van, 6-tal több fiú, mint lány. Hány fiú és hány lány van az osztályban?
- Egy 240 cm hosszú léce három darabra akarunk fűrészelni úgy, hogy az egyik 60 cm-rel hosszabb legyen, mint a másik kettő.

Mekkora részekre fűrészeljük?

☉ Készíts rajzot a szöveg alapján!

☉ Melyik kosár burgonyát célszerű változónak (x -nek) választani?

☉ Emlékszel? Hány fok a háromszög belső szögeinek az összege?

39

- Egy kiskertben 2 nap alatt összesen 95 láda almát szüreteltek le, és még felszedtek 28 kg hullott almát. Az átválogatás után 72 láda almát eladtak a piacon, valamennyit megtartottak maguknak, és 240 kg kissé hibás almát egy almalékészítő üzem vásárolt meg.
Hány kilogramm alma lehetett egy-egy ládában?
- Három kosárba burgonyát tettek. Az első kosárban 10 kg-mal kevesebb, a másodikban 25 kg-mal több burgonya volt, mint a harmadikban. A második kosárból 15 kg-ot áttettek az elsőbe és 5 kg-ot a harmadikba, így mindhárom kosárban ugyanannyi burgonya lett.
Mennyi burgonya volt eredetileg a harmadik kosárban?
- Mekkorák a háromszög szögei, ha a második 10° -kal nagyobb az első kétszeresénél, a harmadik pedig 30° -kal kisebb a másodiknál?

Többet ésszel ...

☉ A háromszög megszerkesztésével ellenőrizd a megoldást!



Egy háromszög oldalainak a mérőszáma egész szám. Az egyik oldala 3 cm-rel rövidebb, a másik 6 cm-rel hosszabb, mint a harmadik oldala. Mekkorák lehetnek a háromszög oldalai, ha a területe legfeljebb 30 cm^2 ?



Rékákék családjában mindenki ma ünnepli a születésnapját. Réka öccse 3 évvel fiatalabb Rékánál, apja 3-szor annyi idős, mint Réka, édesanyjuk viszont az apjuknál fiatalabb 3 évvel. Hány éves a család négy tagja, ha az életkoruk átlaga már egy évvel ezelőtt is több volt 27 évnél, míg 15 évvel ezelőtt a család átlagos életkora még csak 19 év volt, ám 16 évvel ezelőtt a család életkorainak átlaga ugyanannyi volt, mint tavaly?

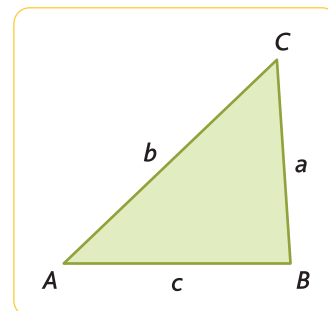
40

- a) Mely számot adhatjuk hozzá a $-2\frac{3}{5}$ -höz úgy, hogy az összeg kisebb legyen 1,6-nél?
- b) Mely számot kell kivonni az $1\frac{3}{4}$ -ből, hogy a különbség legfeljebb $-\frac{1}{2}$ legyen?
- c) Mely számot kell hozzáadni a $3\frac{2}{3}$ és a 0,75 összegéhez, hogy az így kapott összeg ne legyen kisebb 5-nél?

☉ Gondold meg, hogy mikor célszerű törtté, mikor tizedestörtté alakítani a vegyszámokat!

41

- a) Egy háromszög egyik oldalának a hossza 90%-a, a másiké 130%-a a harmadik oldal hosszának. Mekkora a háromszög oldalai, ha a kerülete 9,6 cm?
- b) Elfogyott a zsebpénzem 40%-a és még 100 Ft, így az eredeti pénzem egyharmad része maradt meg. Mennyi volt a zsebpénzem?
- c) Egy tál gombócnak a negyedrésznél 6-tal többet megettek, így a gombócok 60%-a maradt meg. Hány gombóc volt eredetileg a tálon?
- d) A raktárban levő abrak 15%-át a juhokkal, kétharmad részét a tehenekkel megették. Ha még 600 kg abrakot megetetnek, akkor már csak az eredeti abrakmennyiség 10%-a marad meg. Mennyi abrak volt eredetileg a raktárban?



42

- a) Egy anya 23 évvel idősebb a fiánál. Kettőjük életkora összesen 47 év. Hány éves az anya, és hány éves a fia?
- b) Anna egy óra alatt 5 m^2 -rel kevesebb területet ásott fel, mint Béla. Anna 6 óra hosszat, Béla 8 órán át dolgozott, de így sem ásták fel a 640 m^2 -es kertet. Mekkora területet áshatott fel óránként Béla?
- c) Egy pincében két sorban összesen 60-nál kevesebb hordó van. Az első sorban 7-tel több, mint a másodikban. Legfeljebb hány hordó van egy-egy sorban?

☉ A szöveg alapján is ellenőrizted a megoldást?

Gyakorló
4.22–4.23.;
Feladatgyűjtemény
2.8.25–28.



Egy állatkert trópusi pavilonjában különböző majmok, papagájok és (akváriumokban) trópusi halak vannak. Az állatoknak összesen 130 feje és 148 lába van. Hány hal, hány papagáj és hány majom van ebben a pavilonban, ha a halak száma megegyezik a majmok és papagájok számának összegével?



Erna görkorcsoyával gurult végig egy hosszú sétányon. Az első percben s métert tett meg. A második percben az előző percben megtett út kétszeresénél 200 m-rel rövidebb szakaszon haladt végig. A harmadik percben az előző percben megtett út kétszeresénél 300 m-rel volt kisebb a megtett út. Végül a negyedik percben az előző percben megtett út kétszeresénél 400 m-rel volt rövidebb a végigszárguldott útszakasz.

- a) Mekkora utat tett meg Erna a második, a harmadik és a negyedik percben? Mekkora utat tett meg összesen 4 perc alatt?
- b) Mekkora utat tett meg az első percben, ha 4 perc alatt összesen 1800 méter hosszú úton haladt végig?

Többet ésszel ...



4. példa



☉ A párologtatás utáni oldatban lévő tiszta só mennyisége egyenlő a párologtatás előttivel.

☉ A szöveg alapján ellenőrizzük a megoldást.

A tengervíz 5% sót tartalmaz. Mennyi vizet kell elpárologtatni 40 kg tengervízből, hogy a töménysége 20%-os legyen?

Az 5%-os sótartalom azt jelenti, hogy 1 kg tengervízben $\frac{5}{100}$ kg tiszta só van.

Párologtatás előtt 40 kg 5%-os oldatban $40 \cdot \frac{5}{100}$ kg só van.

Párologtatás után x kg 20%-os sűrített tengervíz marad:

x kg 20%-os oldatban $x \cdot \frac{20}{100}$ kg só van.

A párologtatás során a só mennyisége nem változik, ezért:

$$40 \cdot \frac{5}{100} = x \cdot \frac{20}{100} \quad / \cdot 100$$

$$200 = 20x \quad / : 20$$

$$10 = x$$

A párologtatás után 10 kg 20%-os sós víz marad, tehát 30 kg vizet kell elpárologtatni.

Ellenőrzés

40 kg 5%-os oldatban $40 \cdot \frac{5}{100}$ kg = 2 kg só van;

10 kg 20%-os oldatban $10 \cdot \frac{20}{100}$ kg = 2 kg só van.

Eredményünk helyes.

FELADAT

B21

- Dolgos Dénes kézhez kapott munkabére 71%-át megélhetésre fordította. 6600 Ft-ot költött szórakozásra. Ekkor bére egynegyed részénél kevesebb pénze maradt. Mennyi munkabért kaphatott kézhez Dolgos Dénes?
- Kever Ede hány gramm 60%-os oldatot kevert 600 g 20%-os oldathoz, ha 30%-os oldatot kapott?
- 300 g vizet, 200 g sóoldatot és 100 g sót összekeverték, és így 60%-osnál töményebb oldatot kaptak. Milyen töménységű volt a 200 g sóoldat?
- Milyen tömény lehet 100 g sóoldat, ha 60 g 15%-os sóoldatot hozzáadva 40%-osnál töményebb oldatot kapunk?
- Egy 15-tel osztható természetes szám 20%-a nagyobb 30-nál, 25%-a kisebb 50-nél. Mi lehet ez a szám?

Gyakorló

4.24–4.31.;

Feladatgyűjtemény

1.1.20–21., 2.9.01–17.

Többet ésszel ...



100 g 60%-os alkoholhoz hány gramm 10%-os alkoholt kell kevernünk, hogy 70%-os alkoholt kapjunk?

EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK GRAFIKUS MEGOLDÁSA

FELADAT

B22 Ábrázold a két-két függvény grafikonját közös koordináta-rendszerben! Keresd meg azokat az x értékeket, amelyekre a függvényértékek egyenlők!

a) $f(x) = 3 \cdot x - 5$; $g(x) = 2 \cdot x - 4$ b) $f(x) = -x + 4$; $g(x) = 2 \cdot x - 2$

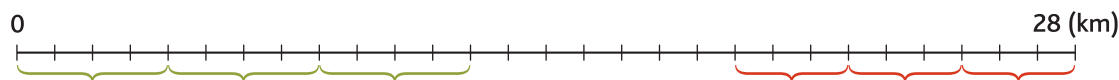
c) $f(x) = \frac{3}{2} \cdot x - 5$; $g(x) = 1,5 \cdot x + \frac{3}{2}$

☉ Lásd a lineáris függvény grafikonját a tankönyv 87–89. oldalán.

1. példa

Frici és Gréta egyszerre indul egymással szemben egy 28 km-es túraútvonal két végpontjáról. Mennyi idő múlva találkoznak, ha Frici óránként 4 km-t, Gréta 3 km-t tesz meg? Milyen messze lesznek ekkor Frici kiindulási helyétől?

A megfigyelőpont Frici kiindulási helye legyen.



Foglaljunk táblázatba néhány összetartozó értékpárt:

t (h)	0	1	2	3
s (km)	0	4	8	12

t (h)	0	1	2	3
s (km)	28	25	22	19

Frici helyzetét az idő (t) függvényeként így írhatjuk le:

$$f: t \mapsto 4 \cdot t$$

Gréta távolsága a megfigyelőponttól óránként 3 km-rel csökken:

$$g: t \mapsto 28 - 3 \cdot t$$

Amikor találkoznak, akkor a két függvényérték megegyezik, vagyis:

$$4 \cdot t = 28 - 3 \cdot t$$

A két függvény grafikonja metszi egymást.

A metszéspont első jelzőszáma megmutatja, hogy mely időpillanatban találkoztak, a második jelzőszáma, hogy a kiindulási ponttól mekkora távolságra találkoztak.

A grafikonról leolvasható: $t = 4$ (óra); $s = 16$ (km)

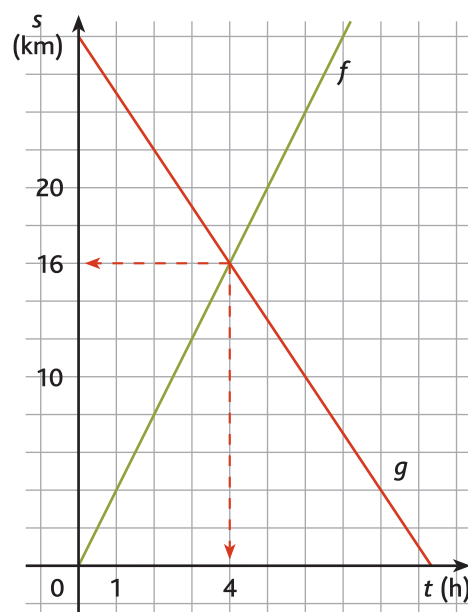
4 óra múlva találkoznak Frici kiindulási pontjától 16 km távolságra.

Ellenőrzés

4 óra alatt Frici $(4 \cdot 4 =) 16$ km-t, Gréta $(4 \cdot 3 =) 12$ km-t tesz meg, ez összesen 28 km.

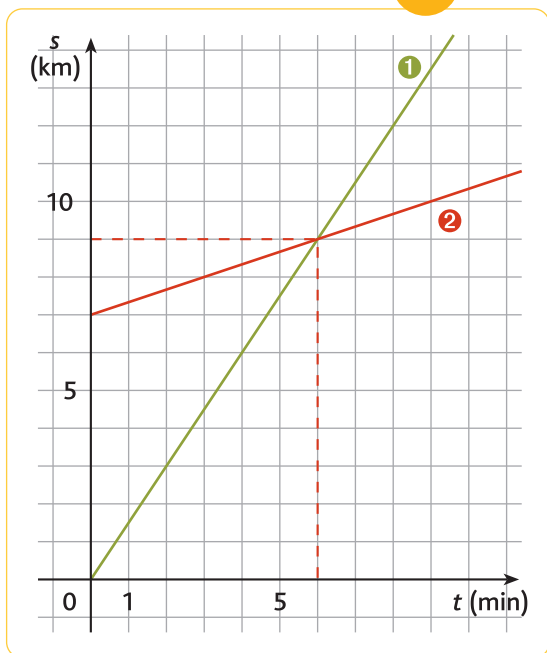
Valóban találkoznak.

☉ Frici távolsága a megfigyelőponttól óránként 4 km-rel egyenletesen nő.



FELADATOK

B23 Megrajzoltuk egy kerékpáros és egy gépkocsi mozgásgrafikonját.



a) Melyik a kerékpáros grafikonja?

b) Mennyi utat tett meg 1 perc alatt a gépkocsi?

Mennyi utat tett meg 1 perc alatt a kerékpáros?

c) A 2. percben milyen távolságra voltak egymástól?

d) Mikor találkozott a két jármű?

e) Írjuk le az idő és a jármű helyzete közti kapcsolat szabályát

a gépkocsi esetén:

a kerékpár esetén:

☉ A kétféle megoldás összehasonlításával is ellenőrizheted megoldásod helyességét.

B24 Oldd meg grafikusan és algebrai úton is az egyenleteket! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

a) $x + 2 = 2 \cdot x + 3$;

b) $x - 5 = -x + 2$;

c) $2 \cdot x - 4 = 4 \cdot x + 1$;

d) $0,5x = \frac{1}{2}x + 3$;

e) $2 \cdot x - 3 = -x + 6$;

f) $3 \cdot x - 1 = 5$

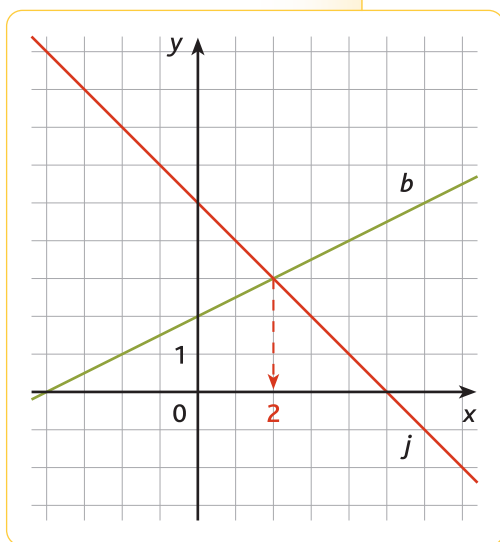
2. példa

Vizsgáljuk a következő egyenletek megoldhatóságát. Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{1}{2} \cdot x + 2 = -x + 5$;

b) $4 - 2 \cdot x = -2 \cdot x - 2$;

c) $\frac{3}{4} \cdot x - \frac{4}{5} = 0,75 \cdot x - 0,8$



a) Az egyenlet bal, illetve jobb oldalán álló kifejezéssel egy-egy lineáris függvény értelmezhető.

$$b: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x + 2; \quad j: x \mapsto -x + 5$$

Arra keresünk választ, hogy ez a két függvény melyik x értékhez rendel ugyanazt a függvényértéket. Ennél az x értéknél a két függvény grafikonjának közös pontja van.

Ezeknek a függvényeknek a grafikonja két, egymást metsző egyenes. Ennek az egyenletnek egy megoldása van: $x = 2$

Ellenőrzés $b: \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 3$; $j: -2 + 5 = 3$

b Az egyenlet bal és jobb oldalán álló kifejezéssel értelmezhető lineáris függvények:

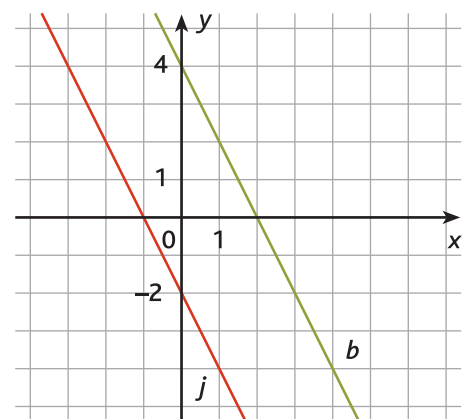
$$b: x \mapsto -2 \cdot x + 4;$$

$$j: x \mapsto -2 \cdot x - 2$$

Ezeknek **a függvényeknek a grafikonja két egymással párhuzamos egyenes.**

Ezek az egyenesek nem metszik egymást, a jobb és a bal oldal semelyik x értéknél nem egyenlő.

Ennek **az egyenletnek nincs megoldása**, az igazsághalmaza üres halmaz.



c Az egyenlet bal és jobb oldalán álló kifejezéssel értelmezhető lineáris függvények:

$$b: x \mapsto \frac{3}{4} \cdot x - \frac{4}{5};$$

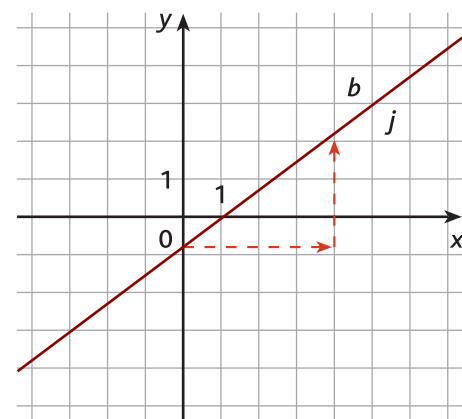
$$j: x \mapsto 0,75 \cdot x - 0,8$$

Az egyenlet jobb, illetve bal oldalán azonos kifejezés áll (más alakban).

Ezeknek **a függvényeknek a grafikonja egybeesik.**

A jobb oldal és a bal oldal mindegyik x értéknél egyenlő.

Ez az azonosság, **minden szám megoldása ennek az egyenletnek**, igazsághalmaza az alaphalmaz.



FELADATOK

B25

Oldd meg grafikusan és algebrai úton is az egyenleteket! Ellenőrizd az eredményt! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

a) $2 \cdot x - 4 = 4 - 2 \cdot x;$

b) $2 \cdot x - 4 = 2 \cdot (x - 4);$

c) $2 \cdot x - 4 = 2 \cdot (x - 2)$

☉ **Melyik egyenlet azonos-ság? Hogyan látható ez a grafikonon?**

B26

Az adatok közti összefüggést írd fel egyenlettel! A szöveg alapján határozd meg az alaphalmazt!

Grafikusan és algebrai úton is oldd meg az egyenletet!

a) Egy tartályban 16 l víz van, amikor megnyitják a csapját, és percenként 2 l vizet kiengednek belőle. A másik tartályban 3 l víz van, ebbe percenként 2 l víz folyik. Hány perc múlva lesz ugyanannyi víz a két tartályban, ha a csapokat egyszerre nyitják meg?

b) Egy tudományos diákkonferencián Pali csoportjában 16-an voltak ott a megnyitón, de minden reggel hazautazott 2-2 gyerek. Robiék 3-an érkeztek a megnyitóra, de minden reggel 2-2 gyerek csatlakozott a csoporthoz. Volt-e olyan reggel, amikor ugyanannyian voltak a két csoportban?

☉ **Hogyan ellenőrizhető a megoldás?**

☉ **Miben különböznek az a), illetve a b) feladatban adott folyamatokat leíró függvények?**

Mi a különbség a grafikonok között?

☉ Mely pontok koordinátáira áll fenn az alábbi egyenlőség, melyekre az egyenlőtlenségek közül az egyik?

$$y = -\frac{1}{2}x + 0,5;$$

$$y < -\frac{1}{2}x + 0,5;$$

$$y > -\frac{1}{2}x + 0,5$$

B27 Rajzold meg az $x \mapsto -\frac{1}{4}x + 0,5$ függvény grafikonját! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

Mi írható az $A(0; \square)$, $B(-5; \square)$, $C(\frac{4}{5}; \square)$, $D(\square; 0)$, $E(\square; 4)$ pontok hiányzó jelzőszáma helyére úgy, hogy

a) a pont rajta legyen a függvény grafikonján;

b) a függvény grafikonja alatt legyen a pont;

c) a függvény grafikonja felett legyen a pont?

B28 Rajzold meg az $x \mapsto \frac{4}{3}x - 2$ függvény grafikonját! Az adott pontok közül melyik van rajta a grafikonon, melyik van a grafikon alatt, melyik van felette?

Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

$G(-3; -6)$, $H(24; 32)$, $I(-1; -4)$, $J(-18; -35)$, $K(\frac{8}{5}; 0)$, $L(-0,06; -2,05)$

3. példa

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget:

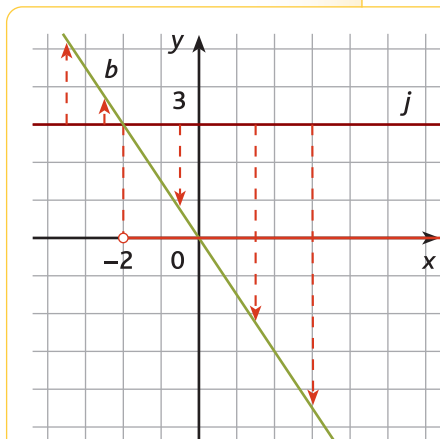
$$-\frac{3}{2} \cdot x < 3$$

Az egyenlőtlenség bal és jobb oldalán álló kifejezésekkel értelmezhető lineáris függvények:

$$b: x \mapsto -\frac{3}{2}x; \quad j: x \mapsto 3$$

Arra keresünk választ, hogy a b függvény mely x értékhez rendel kisebb függvényértéket, mint a j függvény. Ezeknél az x értékeknél a b függvény grafikonjának a pontjai a j függvény grafikonja alatt helyezkednek el. Az ábráról leolvasható: $x > -2$

Az x tengelyen pirosra színeztük azokat az értékeket, melyek a megoldáshalmazba tartoznak.



☉ A két megoldási mód eredményének összehasonlításával mindkét megoldási mód eredményének helyességét ellenőrizhetjük. Ne feledkezz meg a kapott érték behelyettesítéséről sem!

FELADATOK

B29 Oldd meg grafikusan is, algebrai úton is az egyenleteket, egyenlőtlenségeket! Ellenőrizd a megoldást! Az alaphalmaz a racionális számok halmaza.

a) $2 \cdot x + 2 = -\frac{1}{2} \cdot x - 3$; b) $2 \cdot x + 2 < -\frac{1}{2} \cdot x - 3$; c) $2 \cdot x + 2 > -\frac{1}{2} \cdot x - 3$;

d) $-2 \cdot x + 2 = \frac{3}{4} \cdot x + 1$; e) $-2 \cdot x + 2 < \frac{3}{4} \cdot x + 1$; f) $-2 \cdot x + 2 > \frac{3}{4} \cdot x + 1$;

g) $x - 4 = -\frac{3}{2} \cdot x + 6$; h) $-x + 3 \leq \frac{2}{5} \cdot x - 4$; i) $-\frac{5}{3} \geq 10$

B30

Grafikusan és algebrai úton is oldd meg a feladatokat!

- Egy edényben $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os folyadékot melegítenek, a hőmérséklete percenként egyenletesen $3\text{ }^{\circ}\text{C}$ -kal nő. Ugyanakkor egy másik edényben $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os folyadékot hűteni kezdenek, ennek hőmérséklete percenként $2\text{ }^{\circ}\text{C}$ -kal csökken. Mennyi idő múlva lesz egyenlő a két folyadék hőmérséklete?
- Egy edényben $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os folyadékot melegítenek, a hőmérséklete percenként egyenletesen $3\text{ }^{\circ}\text{C}$ -kal nő. Ugyanakkor egy másik edényben $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os folyadékot kezdenek melegíteni, ennek a hőmérséklete percenként $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ -kal nő. Hányadik perctől kezdve lesz melegebb az első folyadék, mint a második?

☉ Milyen függvény írja le a hőmérséklet egyenletes változását?

Ellenőrizd a megoldást!

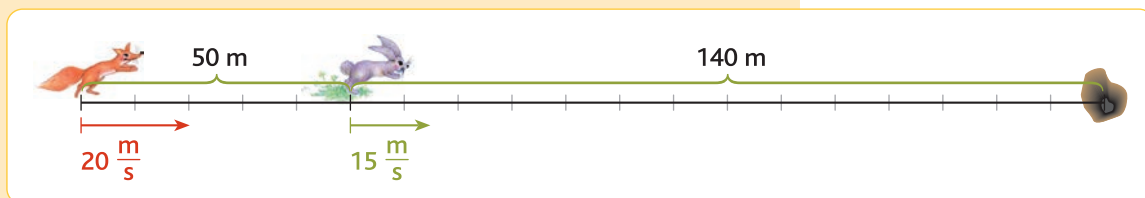
B31

Grafikusan és algebrai úton is oldd meg a feladatokat!

- Egy autó és egy kerékpáros indul egymással szemben egy 46 km -es útvonalon. Mennyi idő múlva találkoznak, ha az autó $\frac{6}{5}\text{ km-t}$ tesz meg percenként, a kerékpáros $\frac{1}{3}\text{ km-t}$?
- Egy szigetről északi irányban elindul egy hajó, és 4 percenként 1 km-t tesz meg. Vele szemben közeledik egy másik hajó, amely 5 percenként 3 km-t halad. Hány perc múlva találkoznak, ha az első hajó indulásának pillanatában a második hajó 17 km távolságra volt a szigettől?
- A tópartról vízbe ugrik egy béka, és 5 másodpercenként 2 m-t úszik. Ugyanakkor, a béka indulása után 42 másodperccel a béka után ered egy liba, és 2 másodpercenként 5 m-t úszik. Mennyi idő múlva éri utol a liba a békát?
- Egy róka és egy nyúl 50 m távolságban meglátják egymást. A nyúl azonnal menekülni kezd, másodpercenként 15 m-t megtéve. A róka üldözőbe veszi, és másodpercenként 20 m-t tesz meg. Van-e a nyúlnak esélye a megmenekülésre, ha a menekülés irányában 140 m távolságra van az ürege?

☉ Ellenőrizd a megoldást!

☉ $s = v \cdot t$



- Egy téglalap egyik oldala $4,5\text{ cm}$ -rel rövidebb a másik oldal 2 -szeresénél. Mekkora lehetnek a téglalap oldalai, ha a kerülete legfeljebb 15 cm ?
- Egy gyalogos elindul egy túraútvonalon, és egyenletes sebességgel haladva óránként 4 km-t tesz meg. 4 óra múlva követi egy kerékpáros, óránként 12 km-es sebességgel. Mikor és hol éri utol a kerékpáros a gyalogost?
- 5 € van nálam. Legfeljebb hány paprikát vehetek, ha a zöldpaprika darabja $0,5\text{ €}$, és a zacskó, amelybe teszem, $0,2\text{ €}$?

☉ $K = 2(a + b)$

B32

Egy hordóban 6 l víz van, amikor megnyitnak egy csapot, és percenként $1,5\text{ l}$ vizet beleengednek. A másik hordóban $1,5\text{ l}$ víz van, ebbe percenként 2 l vizet folyik. Hány perc múlva lesz ugyanannyi víz a két hordóban, ha a csapokat egyszerre nyitják meg?

EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSÁNAK GYAKORLÁSA

☉ Alkalmazhatjuk az algebrai kifejezések átalakításáról tanultakat.

Ügyelj a műveletek sorrendjére és a zárójelek helyes felbontására!

Az egyenlőtlenségek igazsághalmazát ábrázold számegyenesen!

Ellenőrizd a megoldást!

☉ Ellenőrizd a megoldást!

☉ Mit célszerű közös nevezőnek választani?

Ellenőrizd a megoldást!

☉ Ellenőrizd a megoldást!

☉ Ne feledd! A törtvonal zárójelet helyettesít, ügyelj a törtvonal előtti „-” jelre!

☉ Egy hányados mikor pozitív, mikor negatív?

Ellenőrizd a megoldást!

B33 Oldd meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $3 \cdot (y - 5) = 7$; | b) $2 \cdot (x + 2) = 5$; | c) $(x - 4) \cdot 5 = 30$; |
| d) $2 \cdot (2x - 3) = 7$; | e) $(x - 1) \cdot (-3) < 2$; | f) $4 \cdot (x + 5) > 4$; |
| g) $3 \cdot (x - 2) + 8 = 17$; | h) $5 \cdot (x - 2) - 9 = 11$; | i) $5 \cdot (x - 1) + 17 = 17$; |
| j) $-3 \cdot (y - 5) - 2 \leq 7$; | k) $3 \cdot (x + 2) + 5 \geq 10$; | l) $2 \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right) - 3 > 0$; |
| m) $3 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (x - 2) = 2$; | n) $5 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (x - 3) = 1$; | |
| o) $4 \cdot (x + 2) + 9 \cdot (3x + 4) = -20$; | p) $1,3 \cdot (x - 5) + 2 \cdot (2 - x) \geq -2$; | |
| q) $4 \cdot (2 - 3x) + 5 \cdot (1 + x) < 6$; | r) $3 \cdot (x - 3) = 5 \cdot (x - 2)$; | |
| s) $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (1 - x)$; | t) $4 \cdot \left(x + \frac{3}{4}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{4} - x\right)$; | |
| u) $3 \cdot (x + 2) < 2 \cdot (x + 2) - (x - 4)$; | v) $4 \cdot (x - 5) \geq 3 \cdot (x - 5) - (2 - 10x)$; | |
| w) $0,8 \cdot (3 - x) - 1,2 \cdot (x + 3,2) = 4$; | x) $(4,2 - 2x) \cdot 0,6 - (3,6 + x) \cdot 0,5 = 5$ | |

B34 Ábrázold a számegyenesen a következő egyenletek, egyenlőtlenségek igazsághalmazát, ha az alaphalmaz a racionális számok halmaza!

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|-------------------|
| a) $ x < 4$; | b) $ x = 4$; | c) $ x > 4$; | d) $ -x \leq -4$ |
|----------------|----------------|----------------|-------------------|

B35 Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz a $\mathbb{Z}$.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} = \frac{2x}{3}$; | b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} = x - \frac{x}{3}$; | c) $x - 2 \cdot \left(\frac{x}{5} + \frac{3}{2}\right) = \frac{3x}{5} - 3$; |
| d) $\frac{3x}{2} + \frac{x}{6} - \frac{2x}{9} = 13$; | e) $\frac{1}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{1 + 4x}{6}$; | f) $\frac{x}{6} - \frac{2x - 6}{9} = \frac{x}{4} - 3$ |

B36 Oldd meg a következő egyenleteket! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{x}{2} - \frac{x + 1}{3} = 5 - x$; | b) $\frac{x + 2}{4} = \frac{2x - 1}{8}$; |
| c) $\frac{x}{2} - \frac{x + 1}{5} = \frac{x}{3}$; | d) $y - \frac{1 - 4y}{2} = 3y + \frac{1}{2}$; |
| e) $\frac{5}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6} + 1,25$; | f) $\frac{3}{2} + \frac{x - 5}{2} + \frac{x - 5}{3} = \frac{5(x - 5)}{6} + 1$ |

B37 Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

- | | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|---|---|
| a) $\frac{1 - x}{2} < 0$; | b) $\frac{x - 5}{15} > 0$; | c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} \geq 0$; | d) $\frac{2x}{6} - \frac{x - 1}{3} > 1$; |
| e) $\frac{x}{3} < \frac{x}{5}$; | f) $\frac{2x}{15} < \frac{3x}{15}$; | g) $x - \frac{1 - x}{3} > x$; | h) $\frac{2x}{3} < \frac{4x - 1}{3}$ |

B38

- a) Ha egy pozitív szám 75%-ából kivonjuk a szám és az $\frac{1}{4}$ különbségét, akkor $2\frac{1}{5}$ -nél nagyobb számot kapunk. Mi lehet ez a szám?
- b) Melyik számból kell kivonni a $\frac{9}{5}$ és a $\frac{3}{2}$ összegét, hogy az így kapott különbség nagyobb legyen a két adott szám különbségénél?

B39

- a) Melyik az a szám, amelynek a $\frac{2}{3}$ része 5,2-del nagyobb, mint az $\frac{1}{3}$ része?
- b) Melyik az a szám, amelynek a $\frac{3}{4}$ része 1,6-del nagyobb, mint a $\frac{2}{3}$ része?

B40

- a) Két szám különbsége $\frac{1}{2}$. Ha összegük háromszorosából kivonjuk a különbségüket, akkor 19-et kapunk. Melyik ez a két szám?
- b) Egy szám 50-nel nagyobb egy másik számnál. Ha a nagyobb számból kivonjuk a kisebbet, és ezt a különbséget megszorozzuk 4-gyel, akkor 200-at kapunk. Melyik ez a szám?
- c) Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege kisebb, mint 8. Ha a számjegyeket felcseréljük, akkor az eredeti számnál nagyobb számot kapunk. Mi lehet az eredeti szám?
- d) Két testvér életkorának összege feleannyi, mint apjuk életkora. Hány évesek külön-külön, ha hármójuk életkorának összege 45 év?

B41

- a) Egy szám 4,5-del kisebb, mint egy másik szám. Ha a két szám összegének 150%-ából kivonjuk a kisebb szám 60%-át, akkor 13,5-et kapunk. Melyik ez a két szám?
- b) Két szám különbsége 18. Ha összegük 50%-ából kivonjuk a különbségük egy-harmadát, akkor eredményül 3-at kapunk. Melyik ez a két szám?

B42

Arankának 20 Ft-tal kevesebb pénze van, mint Beának. Csabának 3,5-szer annyi, mint a két lánynak együttvéve. Hány forintjuk lehet külön-külön, ha a három gyerek együtt sem tudja megvenni az 540 Ft-os újságot?

Figyelempróba

☉ *Mindegyik feladatban a szöveg alapján ellenőrizzük a megoldást.*

☉ *Hogyan számolhatjuk ki egy mennyiség tört részét?*

☉ *Hányszorost jelent a 150%?*

☉ *Hányadrészt jelent az 50%?*

☉ *Milyen relációt jelent az, hogy „nem tudják megvenni”?*



Egy hetedik osztályban matematikából kétszer annyi hármast dolgozatot írtak, mint ötöst, néggyel kevesebb négyest, mint hármast, és írtak még négy kettést. Hány jeles, jó, közepes, elégséges dolgozatot írtak, ha a jegyek átlaga 3,48 volt, és nem volt elégtelen dolgozat?



Ha $2x - 1 = 10$, akkor

A: $4x + 1 = 19$; **B:** $4x + 1 = 21$; **C:** $4x + 1 = 23$; **D:** $4x + 1 = 25$.

Fejtrő!

☉ *Karikázd be a helyes egyenlet betűjelét!*

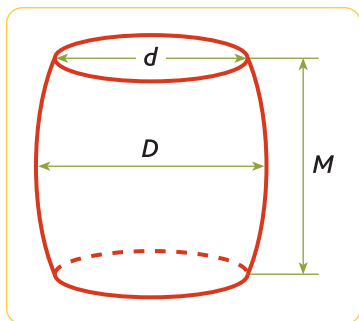
TUDÁSPRÓBA

43

1 Normálalakban írd be a hiányzó mérőszámokat!

a) $5200 \text{ kg} = \square \cdot 10^{\square} \text{ t} = \square \cdot 10^{\square} \text{ kg} = \square \cdot 10^{\square} \text{ g} = \square \cdot 10^{\square} \text{ dkg}$

b) $520 \text{ hl} = \square \cdot 10^{\square} \text{ l} = \square \cdot 10^{\square} \text{ dl} = \square \cdot 10^{\square} \text{ dm}^3 = \square \cdot 10^{\square} \text{ m}^3$



☉ Karikázd be a másik kettővel nem egyenmű kifejezés betűjelét!

☉ Húzd alá azonos színnel az egyenmű tagokat!

☉ Karikázd be a helyes válaszok betűjelét!

2 Egy hordó térfogatát a következő képlet segítségével becsülhetjük meg:

$$V \approx M \cdot (2D^2 + d^2) : 4$$

Ahol M a hordó magassága, D a közepének átmérője, d az alapjának átmérője. Mennyi a térfogata annak a hordónak, amelynek az adatai:

$$M = 5,6 \text{ dm}; D = 6,0 \text{ dm}; d = 5,0 \text{ dm?}$$

A: $V \approx 237 \text{ dm}^3$; B: $V \approx 136 \text{ dm}^3$; C: $V \approx 107 \text{ dm}^3$; D: $V \approx 100 \text{ dm}^3$

☉ Karikázd be a helyes válasz betűjelét!

3 Írd föl egyszerűbb alakban a következő kifejezéseket!

A: $2a \cdot 2b^2 = \square$

B: $5a(-b)^2 = \square$

C: $(a+3)b^2 = \square$

4 Írd föl a kifejezést egyszerűbb alakban!

$$3,2a - 8,4 + 2,4b - 17,6 + 1,8a - 1,5b + 6 - 0,9b = \square$$

5 Oldd meg az egyenleteket! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$ (racionális számok halmaza).

1 $3 \cdot (x - 5) - 2 \cdot (2 - x) = 1$; 2 $\frac{y}{4} - \frac{y + 12}{5} = 6 - y$

a) Az 1 megoldása során melyik egyenletet kaphatjuk a következők közül?

A: $5x - 19 = 1$; B: $x - 9 = 1$; C: $5x - 11 = 1$; D: $x - 11 = 1$

b) A következő számok közül melyik az 1 egyenlet megoldása?

A: $x = 20$; B: $x = 3,6$; C: $x = 2$; D: $x = 4$

c) A 2 megoldása során melyik egyenletet kaphatjuk a következők közül?

A: $y - 48 = 6 - y$; B: $9y + 48 = 6 - 20y$; C: $y - 48 = 120 - 20y$

d) A következő számok közül melyik a 2 egyenlet megoldása?

A: $y = 8$; B: $y = 27$; C: $y = 1,44$; D: $y = 2$

6 Egy természetes szám 3-szorosából elvettem 4-et, majd a különbséget megszoroztam 1,6-del. Mi lehetett a gondolt szám, ha a művelet sor eredménye 32-nél kisebb?

a) Melyik egyenlőtlenség fejezi ki helyesen az adatok közti kapcsolatot?

A: $3x - 4 \cdot 1,6 < 32$; B: $3(x - 4 \cdot 1,6) < 32$; C: $(3x - 4) \cdot 1,6 < 32$

b) A következő számok közül melyikre gondolhattam?

A: $x = -2$; B: $x = 6$; C: $x = 8$; D: $x = 4,5$

5. SÍKIDOMOK, TESTEK

Már az ókori birodalmakban, például Egyiptomban, Mezopotámiában a földterületek felméréséhez, a hatalmas építkezések megtervezéséhez szükség volt a geometriai ismeretekre. Az ókori görögök viszont ezt a mindennapi gyakorlatban alkalmazott ismeretrendszert – a matematika történetében első ízben – tudománnyá fejlesztették. Eukleidész mintegy 2300 évvel ezelőtt rájött, hogy a geometriát szigorú logikai rendszerben lehet és kell felépíteni. Művét 2000 éven át tankönyvként használták, és még ma is példaként szolgálhat a matematikával foglalkozók számára.



> ALAPFOGALMAK, ALAPTÉTELEK

OLVASMÁNY

A matematika tanulása és a feladatok megoldása során összefüggéseket, kapcsolatokat állapítunk meg a matematikai fogalmak között. **Például:**

- 1 Két pontot összekötő vonalak közül legrövidebb a szakasz.
- 2 A háromszög belső szögeinek összege 180° .
- 3 Az ötszögnek pontosan öt átlója van.
- 4 A kör azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek egy ponttól adott (0-tól különböző) távolságra vannak a síkban.

Egy-egy állítást a már előzőleg megismert fogalmak, állítások segítségével fogalmazunk meg. Például az előző állításokban előforduló szakasz, háromszög, belső szög fogalmat már korábban **meghatároztuk, definiáltuk**.

Az 1 állításban használunk olyan fogalmat is, a pont fogalmát, amelyet **előzőleg nem definiáltunk**. Tudjuk, hogy mi a pont. A pontot mindenki egyformán képzei el, de a pont fogalmát nem tudjuk egyszerűbb fogalmakra visszavezetni. Az ilyen fogalmat **alapfogalomnak** tekintjük, nem definiáljuk, de felhasználjuk más fogalmak értelmezéséhez.

Alapfogalomként használjuk a geometriában a pont, az egyenes, a sík és a tér fogalmát. A magasabb matematikában definiálják a **vonat** és a **felület** fogalmát, mi ezeket is alapfogalomként kezeljük.

Általában nem elégszünk meg azzal, hogy az állításokat megfogalmazzuk, hanem arra törekszünk, hogy azok igazságát be is bizonyítsuk. Vannak azonban olyan egyszerű állítások, amelyeknek az igazságát bizonyítás nélkül elfogadjuk. Az ilyen állítást **alaptételnek** (idegen szóval **axiómának**) nevezzük.

☉ *Korábban is beszéltünk alapfogalmakról:*

*A **halmaz** a matematika egyik alapfogalma. Hasonlóan alapfogalom az **elem** és az a kapcsolat, hogy egy elem eleme egy halmaznak. Az általános iskolában alapfogalomnak tekintjük a **reláció** fogalmát is.*

Alaptétel lehet például:

Két ponton át pontosan egy egyenes húzható.

Ha három pont nincs egy egyenesen, akkor egyetlen sík illeszkedik rá.

Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes is illeszkedik a síkra.

Egy egyenessel egy rajta kívül fekvő ponton keresztül csak egy párhuzamos egyenes húzható.

Az alaptételeket tehát nem bizonyítjuk, de minden más állítást az alaptételek vagy már előzőleg bebizonyított állítások segítségével igazolunk.

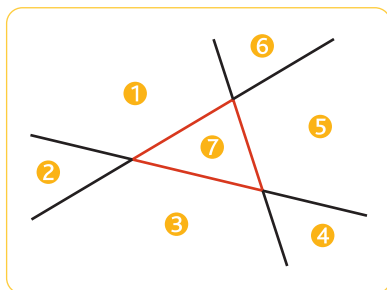
A következő állításokat például bebizonyíthatjuk az alaptételekből kiindulva:

Egy egyenesre és egy nem rajta levő pontra egyetlen sík illeszthető.

Két metsző egyenesre egyetlen sík illeszthető.

Az általános iskolában nem követhetjük ezt, az előzőekben felvázolt szigorú rendszert, de 7. osztályban a fogalmak többségét precízen értelmeznünk kell, és már megismerkedünk egyes fontos (mégis egyszerű) tételek bizonyításával.

> SÍKIDOMOK, SOKSZÖGEK

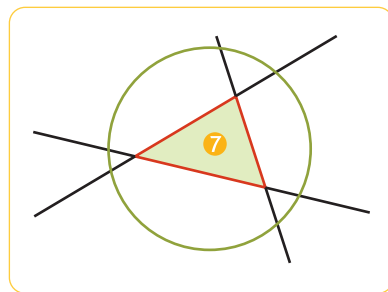
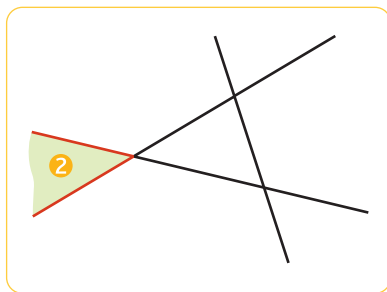


A sík feldarabolásakor **síkidomok** keletkeznek. Például 3 egyenes, ha három metséspontja van, akkor a síkot 7 részre bontja.

A 7 jelű síkidomot zárt töröttvonal, **sokszög** határolja.

Vizsgáljuk meg, hogy a keletkező síkidomok közül melyik foglalható körbe.

Például a 2 jelű síkidom a végtelenbe nyúlik. Nincs olyan kör, amely minden pontját tartalmazza, akármekkora is a kör sugara. A 2 jelű síkidom **nem korlátos**, ez szögtartomány.

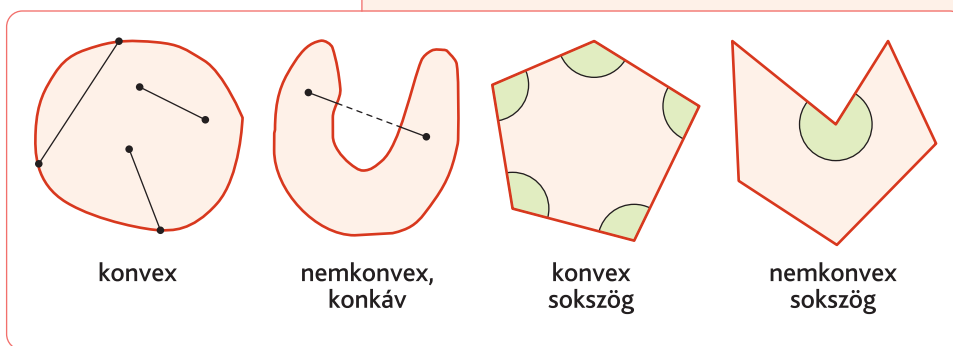


A 7 jelű síkidomnak nincs végtelenbe nyúló része. Van olyan kör, amely minden pontját tartalmazza.

A 7 jelű síkidom **korlátos**.

Az általános iskolában általában korlátos síkidomokkal foglalkozunk.

Emlékeztető



Konvex a síkidom, ha bármely két pontját összekötő szakasz minden pontja a síkidomhoz tartozik. A **nemkonvex** síkidomot **konkáv** síkidomnak is nevezzük.

A konvex sokszögnek minden szöge konvex.

Emlékeztető

Az egymáshoz csatlakozó szakaszok töröttvonalat alkotnak. **A záródó töröttvonalat egyszerű sokszögvonálnak**, az egymáshoz csatlakozó szakaszokat **oldalnak** és a csatlakozási pontokat **csúcsoknak** nevezzük, ha a záródó töröttvonalnak

ugyanannyi csúcsa van, mint ahány oldala;

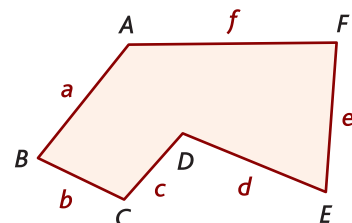
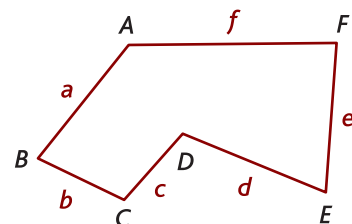
minden csúcsához két oldal csatlakozik;

az oldalainak a csúcsokon kívül nincs más közös pontja.

A sokszög vonal nem feltétlenül illeszkedik egy síkra.

A síkbeli egyszerű sokszög vonal két síkidomra vágja a síkot, ezek közül a korlátosat (a sokszög vonalon belülit) **sokszöglapnak** nevezzük.

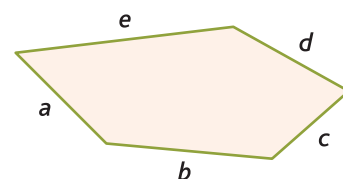
Ha az egyértelműséget nem veszélyezteti, akkor a sokszög vonalat is és a sokszöglapot is **sokszögnek** nevezzük. Az általános iskolában a síkbeli egyszerű sokszög vonalakkal foglalkozunk, és sokszögön az ezek által határolt **egyszerű sokszöget** értjük.



	Sokszögek (síkidomok)	Sokszögek (vonalak)
Egyszerű sokszögek		
Nem egyszerű sokszögek		

A sokszög kerülete a sokszöget határoló töröttvonal hossza.

A sokszögeket osztályozhatjuk oldalainak száma szerint (háromszög, négyszög, ötszög, ..., n oldalú sokszög). Az n oldalú sokszögnek n csúcsa és n belső szöge van.



$$K = a + b + c + d + e$$

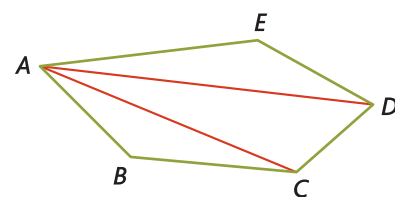
A sokszög két nem szomszédos csúcsát összekötő szakaszt a sokszög átlójának nevezzük.

Az n oldalú sokszögben egy csúcsból $(n - 3)$ átló húzható.

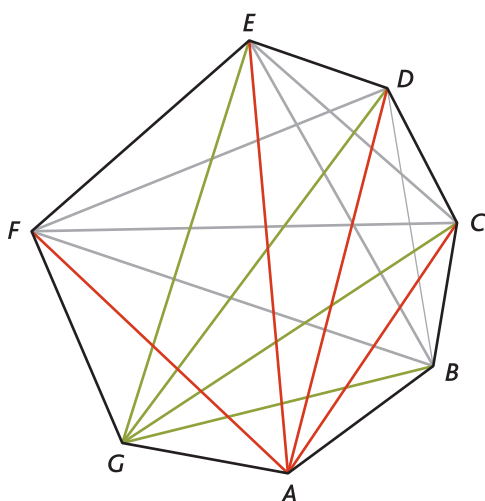
Például egy ötszögben egy csúcsból $(5 - 3 =) 2$ átló húzható.

Az n oldalú sokszög átlóinak száma: $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$

Az összefüggés bizonyításának gondolatmenetét a következő (konkrét) példa megoldásával szemléltetjük.



1. példa



Határozzuk meg egy tetszőleges konvex hétszög átlóinak számát.

A hétszög minden csúcsából $(7 - 3 =) 4$ átló húzható. Ha a hétszögnek mind a 7 csúcsából meghúzzuk az összes átlót, akkor a meghúzott átlók száma:

$$7 \cdot (7 - 3) = 28$$

Ebben az esetben minden átlót kétszer húztunk meg. Például az AD átlót meghúztuk az A csúcsból és a D csúcsból kiindulva is. Ezért az előzőekben kiszámított értéket osztanunk kell 2-vel. A hétszög átlóinak száma:

$$\frac{7 \cdot (7 - 3)}{2} = 14$$

FELADATOK

1 Számítsd ki a síkidom területét!

- A háromszög oldalai: 34 cm; 2,4 dm; 480 mm hosszúak.
- A négyszög oldalai: $\frac{5}{4}$ dm; $\frac{3}{5}$ dm; $\frac{1}{2}$ dm; 0,8 dm hosszúak.
- Az egyenlő szárú háromszög alapja: 25 cm; szára: 15 cm hosszú.
- Az ötszög oldalai: $\frac{15}{24}$ dm; $\frac{5}{6}$ dm; $\frac{31}{12}$ dm; 15 cm; 0,2 m hosszúak.
- A paralelogramma két oldala: $\frac{16}{15}$ m; $5\frac{17}{20}$ dm hosszú.
- A szabályos negyvennyolcszög egy oldala: 25 mm hosszú.
- A rombusz egy oldala: 4,05 dm hosszú.

☉ *Odafigyeltél a mértékegységekre?*

☉ *Készíts vázlatot!*

- Egy téglalap kerülete 30 cm. Az egyik oldala 7,5 cm hosszú. Mekkora a téglalap másik oldala?
- Egy szabályos kilencszög kerülete $3\frac{3}{20}$ m. Milyen hosszú egy oldala?
- Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 54 cm. Mekkora a szárai, ha az alapja 18 cm-es?

- Egy háromszög a oldala 7,5 cm-es, a b oldal hossza az a hosszának 80%-a, a c oldalé az a hosszának a 2 harmad része. Mekkora a háromszög kerülete?

- Egy háromszög kerülete 24 cm. Mekkora az oldalai, ha az a oldal hossza a kerület 30%-a, a b oldalé a kerület 45%-a?
- Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 600 mm. Mekkora az alapja, ha az egyik szára a kerület 24%-a?

☉ *A terület hányszorosa a terület 30%-a, 45%-a?*

4 A négyszög, ötszög, hatszög esetében

- hány átló húzható egy csúcsból;
- az egy csúcsból kiinduló átlók hány háromszögre bontják a sokszöget;
- hány átlója van összesen?

☉ Rajzolj konvex négyszöget, ötszöget, hatszöget!

5 A derékszögű koordináta-rendszerben megadott pontok sokszögek csúcsai. Mekkora a sokszögek belső szögei? Melyik sokszög konvex?

- $A(0; 2), B(4; 2), C(6; 4), D(0; 10)$
- $A(0; -4), B(4; 0), C(0; 4), D(-4; 0)$
- $A(-3; -3), B(0; -3), C(6; 3), D(0; 3), E(-3; 0)$
- $A(0; 0), B(0; -3), C(3; 0), D(3; 6), E(-3; 0)$

☉ Ábrázold a sokszögeket!

Feladatgyűjtemény
1.1.09., 3.4.02.

6 A kocka **élei, lapátlói, testátlói** közül kiválasztottunk néhány egymáshoz csatlakozót, ezeket színes vonallal húztuk meg, a kockán belüli (nem látható) vonalakat szaggatott vonallal.

Az így egymáshoz csatlakozó szakaszok **töröttvonalat** alkotnak.

Mely állítás igaz?

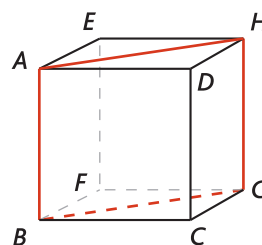
- Síkbeli zárt töröttvonal.

A: Csak az ①	B: Csak a ②
C: A ② és a ③	D: Az ① és a ④
- Egyszerű síkbeli sokszöget határol.

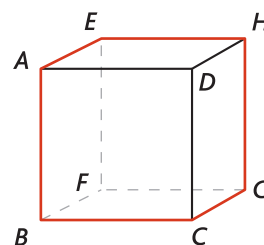
A: Csak az ①	B: Csak a ②
C: Az ① és a ②	D: Az ① és a ④
- Tengelyesen szimmetrikus síkbeli alakzat.

A: Csak az ①	B: Csak a ④
C: Az ① és a ④	D: A ② és a ③

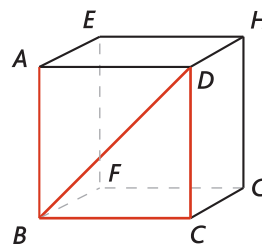
① ABGHA



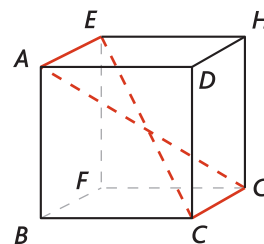
② ABCGHEA



③ ABCDB



④ AGCEA

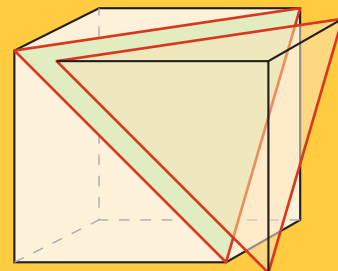


Megrajzoltuk a kocka három lapátlóját. A három lapátló mentén levágunk a kockából egy testet.

Hány lapja, éle, csúcsa lesz a levágott és a maradék testnek?

- Ha a kocka lapjait sárga, kék és piros színnel úgy festjük be, hogy a szemközti lapjai azonos színűek legyenek, akkor hányféle lehet a levágott test színezése?
- Ha a kocka két szemközti lapját arany és ezüst színűre, a többi lapját valamilyen sorrendben sárga, kék, piros és zöld színűre festjük be, akkor hányféle lehet a kocka, illetve a levágott test színezése?
- Az a) és a b) feladatban minden esetben vizsgálj meg a maradék test színezését is!

Fejtörő!



HÁROMSZÖGEK

Emlékeztető

A háromoldalú sokszöget **háromszögnek** nevezzük.

A háromszög jele: $ABC\Delta$;

csúcsok: A, B, C ;

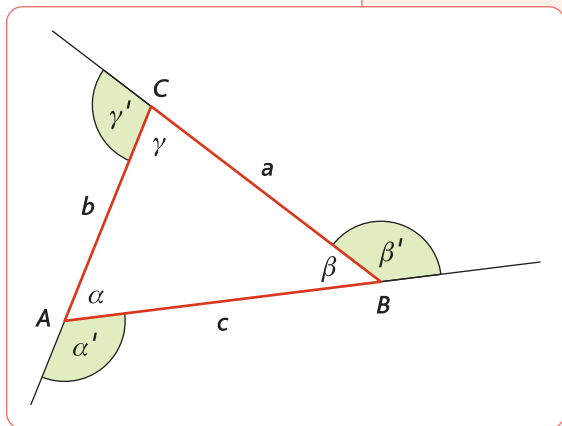
oldalak: a, b, c ; vagy: BC, AC, AB ;

belső szögek: α, β, γ ; vagy: $A\angle, B\angle, C\angle$;
vagy: $CAB\angle, ABC\angle, BCA\angle$

külső szögek: α', β', γ'

A háromszög **kerülete:** $K = a + b + c$

A háromszög bármely belső szöge és a mellette lévő külső szöge egyenesszögre egészíti ki egymást.



A HÁROMSZÖGEK CSOPORTOSÍTÁSA		Szögek szerinti csoportosítás		
		Hegyszögű	Derékszögű	Tompaszögű
Oldalak szerinti csoportosítás	Minden oldala különböző			
	Pontosan két oldala egyenlő			
	Egyenlő oldalú		—	—

Figyeld meg!
A háromszögeket csoportosíthatjuk oldalaik szerint, illetve szögeik szerint.

FELADATOK

Kísérletezz!

☉ Szívószálból vágatsz le ekkora „pálcikákat”.

☉ Számítsd ki a háromszög területét!

☉ A pálcikák itt is segíthetnek!

7

a) Egy kötegben 4 cm-es, 6 cm-es és 10 cm-es pálcikák vannak, egy-egy féleből több is.

A pálcikákból hányféle különböző háromszöget lehet összeállítani? Írd le az összeállítható háromszögek oldalainak hosszúságát!

b) Szerkessz háromszöget, ha oldalainak hossza: 4 cm, 4 cm, 6 cm!

c) Szerkessz háromszöget, ha oldalainak hossza: 4 cm, 4 cm, 10 cm!

8

a) Egy háromszög két oldalának hossza 4 cm és 7 cm. A harmadik oldala is egész centiméter hosszú. Mekkora lehet a harmadik oldala?

b) Egy háromszög két oldala 3 cm és 4 cm hosszú. Mekkora lehet a harmadik oldala?

9

a) Adott hat szakasz: 1 cm; 2 cm; 3 cm; 4 cm; 5 cm; 6 cm hosszúak. Hányféleképp választható ki közülük három különböző szakasz, ha a sorrend nem számít?

Hányféle háromszög szerkeszthető ezekből a szakaszokból?

b) Egy háromszög minden oldalhosszának mérőszáma egész szám, területe 20 cm, az egyik oldala 2 cm-rel nagyobb, mint a másik oldala. Mekkora lehet a háromszög harmadik oldala?

c) Szerkessz háromszöget, ha oldalai 4 cm; 5 cm; 6 cm hosszúak! Számítsd ki a területét!

☉ Milyen fontos összefüggést figyelhettél meg az előző két feladat megoldása során?

10

Az alábbi háromszögek közül melyekre igazak a következő állítások?

A: Van hegyesszöge.

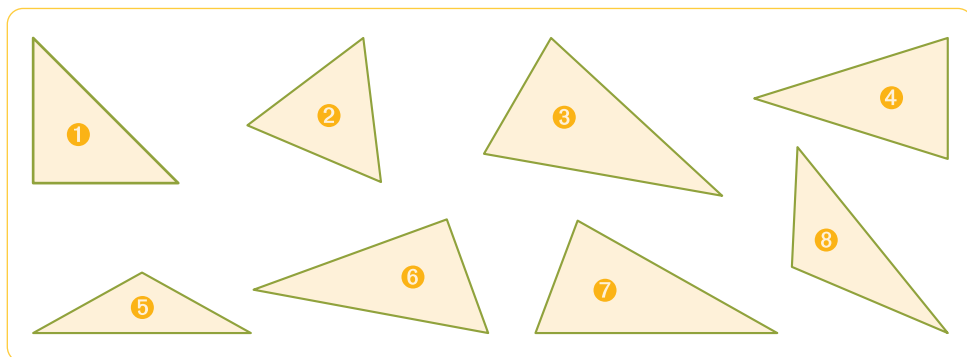
B: Van nemkonvex szöge.

C: Van derékszöge.

D: Van tompaszöge.

E: Minden szöge hegyesszög.

F: Minden szöge derékszög.



☉ Sorold fel a megfelelő sorszámozakat!

11

A fenti háromszögek közül melyekre igazak a következő állítások?

A: Tengelyesen szimmetrikus.

B: Van három szimmetriatengelye.

C: Van két egyenlő oldala.

D: Minden oldala egyenlő.

12

Szerkessz háromszöget három oldalból:

$AB = 6$ cm, $AC = 3$ cm, $BC = 5$ cm

Tükrözd a háromszöget a BC oldal felezőpontjára is és az AC oldal felezőpontjára is! Milyen sokszöget alkot az eredeti háromszög és a két tükrösképe együtt? Hosszabbítsd meg az AB oldalt mindkét irányban!

a) Színezd ki azonos színnel a megszerkesztett rajzon az egyenlő nagyságú szögeket! Milyen szögpárt alkotnak ezek?

b) Mely (az a) feladatban kiszínezett) szögek összegére bontható az A , illetve a B csúcsnál lévő külső szög?

c) Mely szögek összegére bontható a C csúcsnál keletkezett egyenesszög?

Gyakorló
7.33–7.36.

☉ Fogalmazd meg szóban is a felismert összefüggéseket!

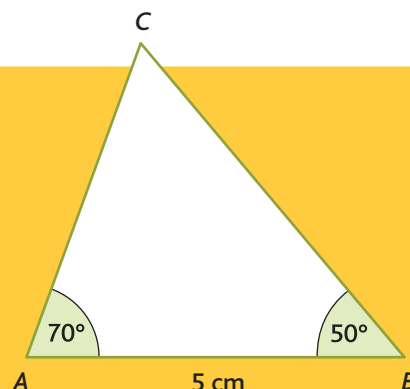


Az $ABC\Delta$ belsejében keress olyan pontot, hogy ha azt összekötöd a háromszög csúcsaival, a keletkezett belső háromszögek közül az egyiknek legyen

a) derékszöge; b) 120° -os szöge; c) két egyenlő szöge!



Az $ABC\Delta$ belsejében keress olyan pontot, hogy ha azt összekötöd a háromszög csúcsaival, a keletkezett háromszögek közül kettő egyenlő szárú legyen!!

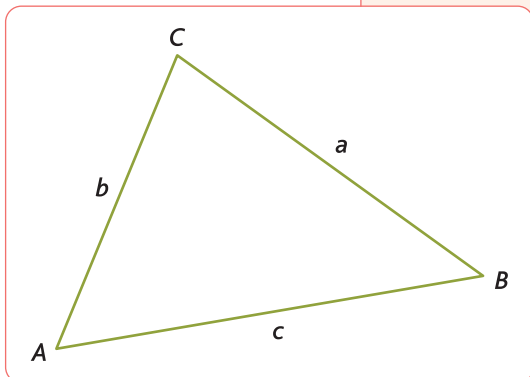


A HÁROMSZÖG OLDALAI KÖZTI KAPCSOLAT; HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG

Tétel

A háromszög bármely két oldalának összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldala.

Bizonyítás



A háromszög kerületén egyik csúcsából a másikba két úton juthatunk. Az egyik út a két csúcsot összekötő szakasz, ez a legrövidebb út két pont között. A másik út, a másik két oldal összege töröttvonal, ez nem egyenes, hosszabb, mint a két csúcsot összekötő szakasz.

$$a + b > c; \quad a + c > b; \quad b + c > a$$

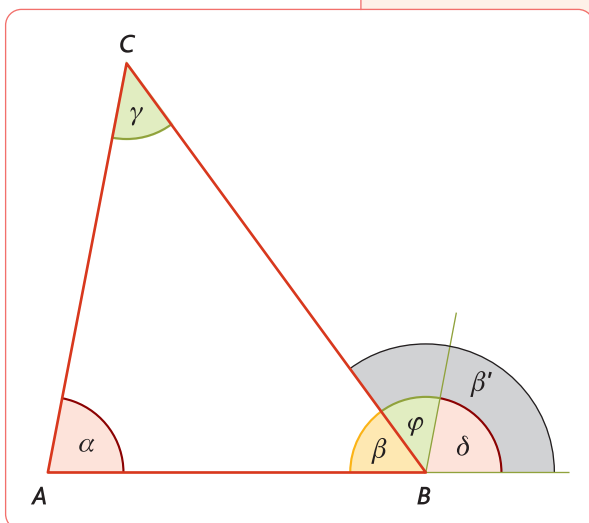
Ezt kellett bizonyítanunk.

A HÁROMSZÖG SZÖGEI KÖZTI KAPCSOLATOK

Tétel

A háromszög külső szöge megegyezik a nem mellette lévő két belső szög összegével.

Bizonyítás



A párhuzamos szárú szögekről tanultak alkalmazásával bizonyítjuk a tételt. A háromszög bármely belső szöge (például a β) és a mellette lévő külső szöge (jelöljük ezt β' -vel) egyenes-szögre egészíti ki egymást: $\beta + \beta' = 180^\circ$

A háromszög B csúcsán át az AC oldallal párhuzamos félegyenest húzunk. Ez a félegyenes a háromszög egyik külső szögét két részre osztja.

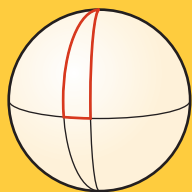
A részek közül a δ szög egyállású az α szöggel, tehát $\delta = \alpha$.

A φ szög váltószöge a γ -nak, tehát $\varphi = \gamma$.

Mivel $\beta' = \delta + \varphi$, az előbbiek miatt $\beta' = \alpha + \gamma$.

Ezt kellett bizonyítanunk.

A következő összefüggést 5., 6. osztályban méréssel, tépéssel, hajtogatással, par-kettázással szemléltettük. Most az előző tétel alkalmazásával bizonyítjuk.



A 0° -os hosszúsági körnek (greenwichi délkörnek) és a Magyarországon áthaladó 20° -os keleti hosszúsági körnek az Északi-sarktól az Egyenlítőig tartó negyed köríve, valamint az egyenlítőnek a két délkört összekötő rövidebb köríve gömbháromszöget határol. Határozd meg ezen gömbháromszög belső szögeinek az összegét!

Tétel

Bármely háromszög belső szögeinek összege 180° .

☉ A tételleket az előző tétel alkalmazásával bizonyítjuk.

Bizonyítás

Jelölje a háromszög belső szögeit α , β , γ , egyik külső szögét β' .

$$\beta + \beta' = 180^\circ$$

A külső szög megegyezik a nem mellette fekvő két belső szög összegével:

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

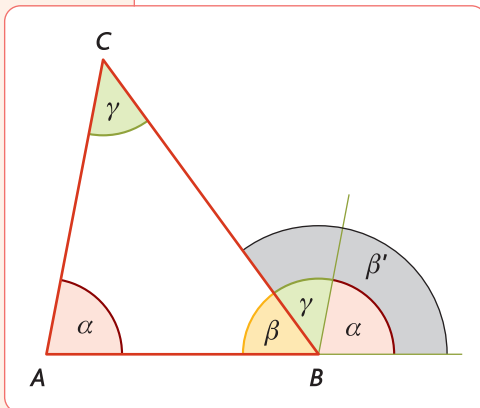
Az előzőkből következik:

$$\beta + \alpha + \gamma = \beta + (\alpha + \gamma) = \beta + \beta' = 180^\circ$$

Azaz a három belső szög összege:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Ezt kellett bizonyítanunk.



FELADATOK

13 A következő 3-3 szög közül melyek lehetnek egy háromszög belső szögei?

- | | | |
|---|--|--|
| a) 30° , 40° , 50° ; | b) 30° , 60° , 90° ; | c) 1° , 2° , 177° ; |
| d) 50° , 50° , 90° ; | e) 120° , 30° , 30° ; | f) 100° , 120° , 140° |

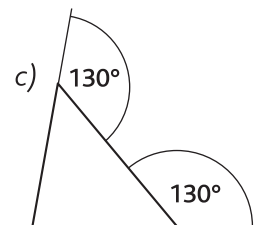
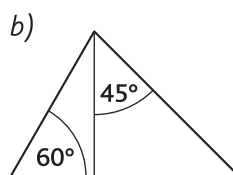
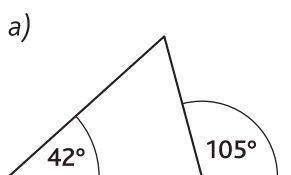
☉ Megjegyezted az előző két tételt?

14 Mekkora a háromszög harmadik szöge, ha két szöge

- | | | | |
|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| a) 60° , 70° ; | b) 105° , 75° ; | c) 85° , 90° ; | d) 60° , 60° ? |
|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|

☉ Melyik nem lehet egy háromszög két szöge? Miért?

15 A megadott szögekből számítsd ki a háromszög szögeit!



16 Az alábbi szögpárok közül melyek lehetnek egy háromszög egymás mellett fekvő belső és külső szögei?

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\alpha = 90^\circ$; $\alpha' = 90^\circ$; | b) $\alpha = 80^\circ$; $\alpha' = 80^\circ$; | c) $\alpha = 70^\circ$; $\alpha' = 110^\circ$ |
|---|---|--|

☉ Indokold válaszod!

17 Az alábbi 3-3 szög közül melyek lehetnek egy háromszög külső szöge és a nem mellette fekvő két belső szöge?

- | | |
|--|---|
| a) $\alpha' = 80^\circ$; $\beta = 35^\circ$; $\gamma = 45^\circ$; | b) $\alpha' = 120^\circ$; $\beta = 55^\circ$; $\gamma = 75^\circ$ |
|--|---|

Gyakorló
7.37–7.43.



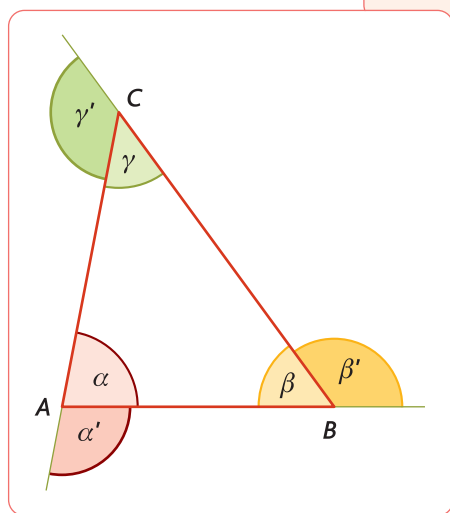
A háromszög három belső és három külső szöge közül megadtunk kettőt, de azt nem, hogy ezek belső vagy külső szögek-e! Mekkora lehet a három belső szög és a három külső szög?

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| a) 30° , 110° ; | b) 45° , 45° ; | c) 60° , 100° |
|-------------------------------|------------------------------|-----------------------------|

Fejtörő!

☉ Rajzolj!

☉ Alkalmazzuk az előző két tételt.



Tétel

A háromszög külső szögeinek összege 360° .

Bizonyítás

Mivel $\alpha' = \beta + \gamma$, $\beta' = \alpha + \gamma$ és $\gamma' = \alpha + \beta$, ezért:

$$\begin{aligned}\alpha' + \beta' + \gamma' &= (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma) + (\alpha + \beta) = \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma) = 2(\alpha + \beta + \gamma)\end{aligned}$$

A háromszög belső szögeinek összege 180° :

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

Azaz a háromszög külső szögeinek összege:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

A HÁROMSZÖG OLDALAI ÉS SZÖGEI KÖZTI KAPCSOLAT

Tétel

A háromszögben az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak.

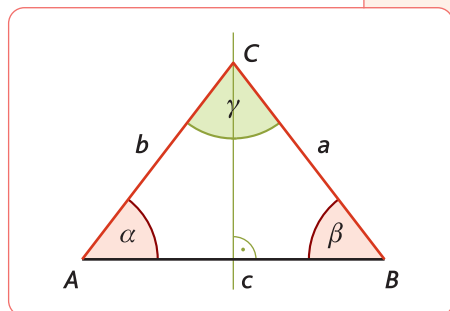
Bizonyítás

Mivel a háromszögnek vannak egyenlő oldalai, a háromszög tengelyesen szimmetrikus.

A tengelyes szimmetriából következik az összefüggés.

Ha $b = a$, akkor $\beta = \alpha$.

Ezt kellett bizonyítanunk.



FELADATOK

Kísérletezz!

☉ Dolgozzunk közösen.
Beszéljük meg a tapasztalatakat.

☉ Keressünk kapcsolatot a háromszög szögei és oldalai közt.

☉ Betűzzük meg a háromszög oldalait a feltételnek megfelelően.

B1

Szerkessz háromszöget, majd mérd meg a háromszög belső szögeit!

- a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm; b) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm;
c) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm; d) $a = 3$ cm, $b = 2$ cm, $c = 1$ cm

Nagyság szerint rendezd az α , β , γ szöget!

B2

Rajzolj háromszöget, ha két szöge:

- a) 100° és 60° ; b) 30° és 60° ; c) 30° és 110° ;
d) 80° és 50° ; e) 100° és 40° ; f) 110° és 80° !

Mekkora a háromszög harmadik szöge?

A háromszög három oldaláról tudjuk, hogy $a < b < c$.

Melyik oldal fekszik a harmadik szöggel szemben?

Tétel

A háromszögben a hosszabbik oldallal szemben fekvő szög nagyobb, mint a rövidebb oldallal szemben fekvő szög.

☉ Figyeld meg, mely tételeket alkalmazzuk a bizonyítás során!

Bizonyítás

Az $ABC\triangle$ -ben $a < b$.

Jelölje D a CB félegyenesnek azt a pontját, amelyre $CA = CD$.

A $CAD\triangle$ egyenlő szárú, az alapon fekvő szögei egyenlők: $\alpha + \varepsilon = \delta$, ebből

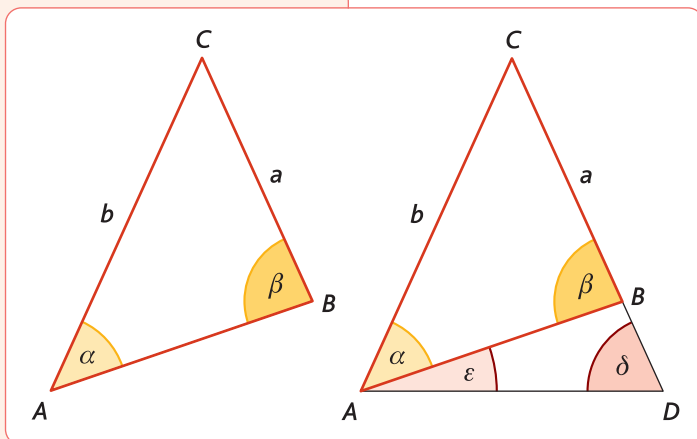
$$\alpha = \delta - \varepsilon$$

Az $ADB\triangle$ -nek külső szöge a β . A külső szög megegyezik a két nem mellette fekvő belső szög összegével:

$$\begin{aligned} \beta &= \delta + \varepsilon \\ \underbrace{\delta - \varepsilon}_{\alpha} &< \underbrace{\delta + \varepsilon}_{\beta} \end{aligned}$$

Ezért ha $a < b$, akkor $\alpha < \beta$.

Ezt kellett bizonyítanunk.



FELADATOK

B3 Mekkora az egyenlő szárú háromszög szögei, ha

a) egyik alapon fekvő szöge: 30° ; 45° ; 75° ; 90° ;

b) szárszöge: 180° ; 160° ; 90° ; 40° ?

☉ Mit tudunk az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeiről?

B4 Egy háromszög belső szögeinek aránya:

a) $4 : 4 : 1$; b) $3 : 4 : 5$; c) $3 : 7 : 8$; d) $1 : 2 : 3$

Mekkora az a háromszög szögei?

☉ Hány részre osszuk fel a belső szögek összegét, hogy az adott arálynak megfelelő szögek nagyságát kiszámíthassuk?

B5 Egy háromszög egyik belső szöge 70° . A másik két belső szög aránya $5 : 6$.

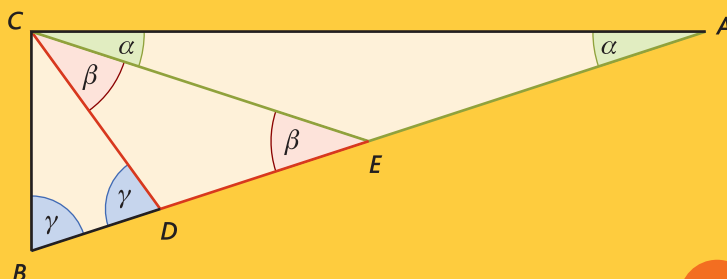
Mekkora az a háromszög belső szögei?



Egy derékszögű háromszöget három egyenlő szárú háromszögre bontottunk.

$BC = CD = DE$; $CE = EA$

Mekkora az egyenlő szárú háromszögek szögei?



Figyelempróba

☉ Készíts vázlatot a szöveg alapján!

Figyeld meg az adatok közti kapcsolatokat! Tudod-e alkalmazni a háromszög belső, illetve külső szögei közti összefüggésekről tanultakat? A szöveggel összevetve ellenőrizd megoldásod helyességét!

B6

- Egy háromszög egyik belső szöge 42° . A másik két belső szög közül az egyik 28° -kal nagyobb a másiknál. Mekkora a háromszög belső szögei?
- Egy háromszög egyik külső szöge 87° , egyik belső szöge pedig 27° . Mekkora a háromszög belső szögei?
- Egy háromszög két külső szöge 128° és 116° . Mekkora a háromszög belső szögei?

B7

- Egy háromszög legkisebb szöge 15° -kal kisebb, a legnagyobb szöge pedig 15° -kal nagyobb a középsőnél. Mekkora a háromszög belső szögei?
- Egy háromszög két szöge egyenlő, a harmadik feleakkora, mint a két egyenlő szög mindegyike. Mekkora a háromszög belső szögei?
- Egy háromszög egyik szöge 36° , a másik két szög közül pedig a nagyobbik 3-szorosa a kisebbiknek. Mekkora a háromszög belső szögei?
- Egy háromszög legkisebb szöge α , a β ennél 10° -kal nagyobb, a γ pedig a β -nél is nagyobb 10° -kal. Mekkora a háromszög belső szögei?

B8

- A háromszög egyik szöge 55° , a másik két szög közül az egyik 25° -kal kisebb a másik kétszeresénél. Mekkora a háromszög szögei?
- Egy háromszög egyik szöge α , a másik 1,5-szerese, a harmadik 2-szerese az α -nak. Mekkora a háromszög szögei?

B9

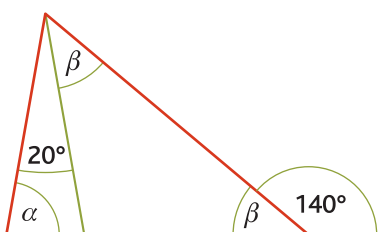
- Egy téglalap átlói 40° -os szöget alkotnak. Mekkora szöget zárnak be az átlók az oldalakkal?
- Egy rombusz egyik szöge 72° . Mekkora szöget zárnak be az átlók az oldalakkal?
- Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 40° . Mekkora szöget zárnak be a háromszögben a hegyesszögek szögfelezői?

B10

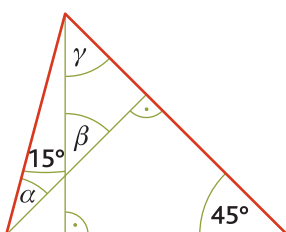
- A következő 3-3 szög közül melyek lehetnek egy háromszög külső szögei?
- 100° ; 120° ; 140° ;
 - 85° ; 85° ; 190° ;
 - 105° ; 120° ; 75°

☉ Mennyi a külső szögek összege?

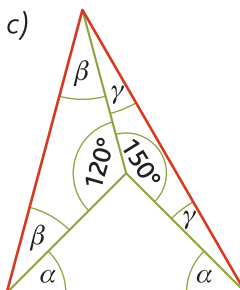
a)



b)



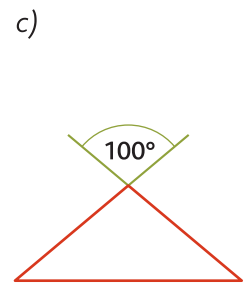
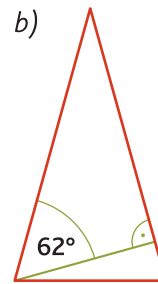
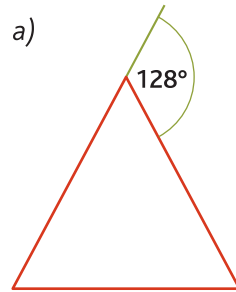
c)



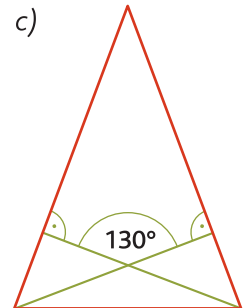
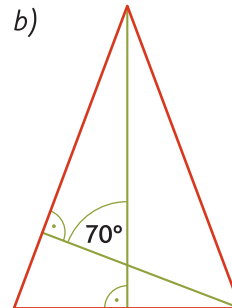
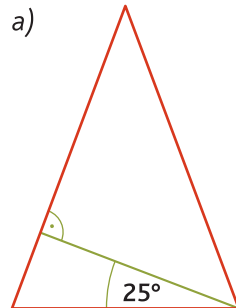
B11

A megadott szögekből számítsd ki a görög betűkkel jelzett szögeket!

B12 A megadott szögekéből számítsd ki a tengelyesen tükrös háromszög szögeit!



B13 Mekkora az egyenlő szárú háromszög belső szögei?



B14 Rajzolj 6 cm hosszú AB szakaszt! Rajzolj ABC háromszöget úgy, hogy a C csúcs 3 cm távolságra legyen az AB oldal egyenesétől! Hány ilyen háromszög szerkeszthető, ha azt is kikötjük, hogy derékszögű legyen?

Feladatgyűjtemény 2.8.30., 4.1.7–19.

- B15**
- Egy háromszög leghosszabb oldala 5 cm-rel kisebb, mint a legrövidebb oldal hosszának kétszerese, a harmadik oldala 0,5 cm-rel nagyobb a legrövidebb oldalnál. Mekkora a háromszög oldalai, ha a kerülete 2 cm-rel hosszabb a legrövidebb oldal hosszának 3-szorosánál?
 - Egy egyenlő szárú háromszög egy szára 3 cm-rel rövidebb az alap hosszának 1,5-szeresénél, a kerülete pedig 6 cm-rel kisebb az alap hosszának 4-szeresénél. Mekkora a háromszög oldalai?
 - Egy háromszög oldalhosszainak mérőszáma egész szám, kerülete 10 cm. Mekkora lehetnek a háromszög oldalai?

Figyelempróba

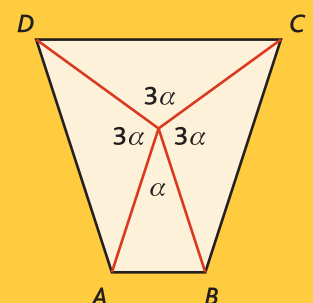
☉ *Figyelembe vették a háromszög oldalai közti kapcsolatot? A vázlat most is segíthet.*



Az $ABCD$ tengelyesen tükrös négyszöget négy egyenlő szárú háromszögre bontottuk, ezek szárszögeit vizsgáljuk.

- Ha a négy szárszög közül három egyenlő és a negyedik egyharmada a többinek, akkor mekkora a négyszög belső szögei?
- Mekkora a négyszög belső szögei, ha a négy egyenlő szárú háromszög szárszögeinek aránya $2 : 3 : 1 : 3$?
- Mekkora a négyszög belső szögei, ha a négy egyenlő szárú háromszög szárszögei egyenlők?

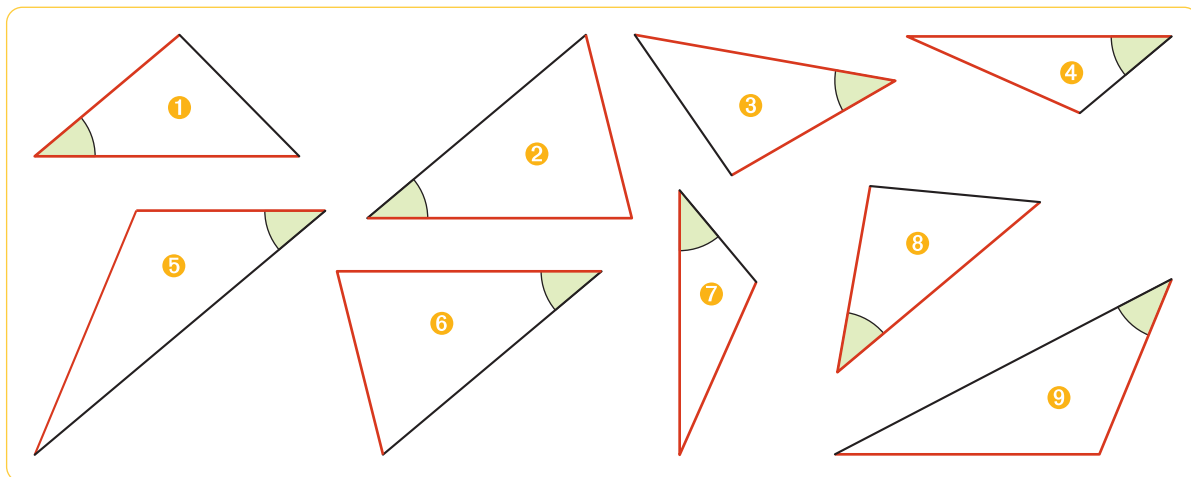
☉ *A b) és a c) feladathoz önállóan rajzolj vázlatot!*



A HÁROMSZÖGEK SZERKESZTÉSE

FELADATOK

- 18 Az ide rajzolt háromszögek mindegyikének van 3,5 cm-es, 2,5 cm-es oldala és 40° -os szöge. A megadott két oldalt színes vonallal húztuk, a 40° -os szöget ki-színeztük. Válaszd ki közülük az egybevágókat!

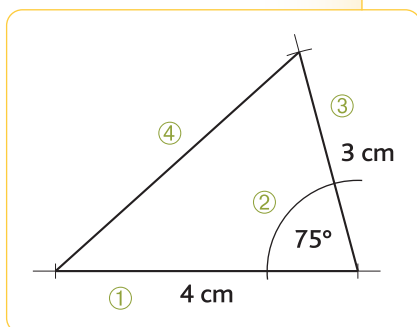


☉ A szerkesztés előtt készíts vázlatot! Megvizsgáld minden le-hetőséget?

- 19 Hányféle háromszög szerkeszthető a következő adatokkal?
Szerkeszd meg a háromszögeket! Egy háromszög
a) egyik oldala 3 cm, egy másik oldala 4 cm hosszú, egyik szöge 30° ;
b) egyik oldala 6 cm hosszú, szögei közül az egyik 45° , egy másik 60° .

1. példa

Egy háromszög két oldala 4 cm és 3 cm hosszú, az általuk közbezárt szög 75° . Szerkesszük meg a háromszöget.



☉ A 18. feladat három-szögei közül melyek felelnek meg ennek a feltételnek?

A szerkesztés lépései

- 1 Vegyünk fel egy 4 cm-es szakaszt.
- 2 Egyik végpontjában szerkesszünk 75° -os szöget.
- 3 A szög másik szára mérjük föl a 3 cm-es oldalt.
- 4 Húzzuk meg a háromszög harmadik oldalát.

Mit mondhatunk még el a feladról?

A szerkesztés lépéseit más sorrendben is végrehajthatjuk. Az is mindegy, hogy a 4 cm-es szakasz melyik végpontjában szerkesszük a 75° -os szöget. A kapott háromszögek egybevágók, ezeket nem tekintjük különböző megoldásnak.

A háromszög két oldalból és a közbezárt szögből egyértelműen megszerkeszt-hető (a szög kisebb 180° -nál).

2. példa

Egy háromszög oldalainak a hossza: 3 cm, 5 cm és 6 cm.
Szerkesszük meg a háromszöget.

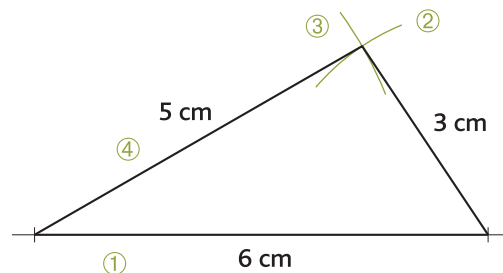
A háromszög három oldala adott. Ezekre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség:

$$3 \text{ cm} + 5 \text{ cm} > 6 \text{ cm}; \quad 3 \text{ cm} + 6 \text{ cm} > 5 \text{ cm}; \quad 5 \text{ cm} + 6 \text{ cm} > 3 \text{ cm}$$

A háromszög megszerkeszthető.

A szerkesztés lépései

- ① Vegyünk fel egy 6 cm-es szakaszt.
- ② A szakasz egyik végpontjából húzzunk 3 cm sugarú körívet.
- ③ A szakasz másik végpontjából húzzunk 5 cm sugarú körívet.
- ④ A két körív metszéspontja lesz a háromszög harmadik csúcsa. Ezt kössük össze a 6 cm-es szakasz két végpontjával.



Mit mondhatunk még el a feladról?

Bármelyik szakaszból kiindulva elvégezhetjük a szerkesztést, a kapott háromszögek egybevágók.

A háromszög három oldalból egyértelműen megszerkeszthető (ha az oldalakra fennáll a háromszög-egyenlőtlenség).

3. példa

Egy háromszög egyik oldala 5 cm hosszú, az adott oldalon fekvő két szöge 45° és 60° . Szerkesszük meg a háromszöget.

$45^\circ + 60^\circ < 180^\circ$. A háromszög megszerkeszthető.

A szerkesztés lépései

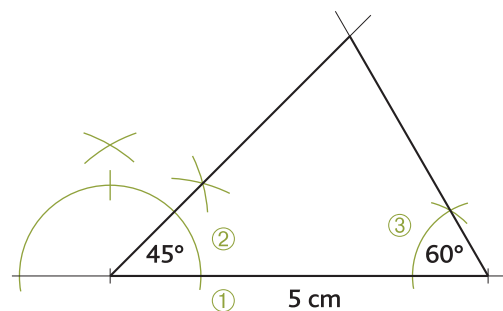
- ① Vegyünk föl egy 5 cm-es szakaszt.
- ② A szakasz egyik végpontjában szerkesszünk 45° -os szöget.
Ismételt szögfelezéssel hajtjuk végre a szerkesztést.
- ③ A szakasz másik végpontjában szerkesszünk 60° -os szöget.

A megszerkesztett két szögcsúcs metszéspontja lesz a háromszög harmadik csúcsa.

Mit mondhatunk még el a feladról?

Ha az 5 cm-es szakasz másik végpontjára, illetve másik partjára szerkesztenénk a 45° -os szöget, a fenti háromszöggel egybevágó háromszöget kapnánk.

A háromszög egy oldalból és a rajta fekvő két szögből egyértelműen megszerkeszthető (a két szög összege kisebb 180° -nál).



Figyeld meg a 18. feladatban az ⑤ és a ⑨ háromszögeket! A háromszögek mely adatait adtuk meg?

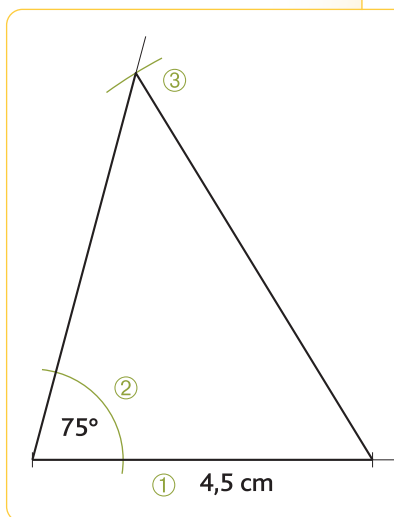
4. példa

Egy háromszög két oldala 6 cm és 4,5 cm hosszú, a nagyobb oldallal szemközi szög 75° . Szerkesszük meg a háromszöget.

A szerkesztés lépései

- ➊ Vegyünk fel egy 4,5 cm-es szakaszt.
- ➋ A szakasz egyik végpontjában szerkesszünk 75° -os szöget.
- ➌ A szakasz másik végpontjából húzzunk 6 cm-es sugarú körívet úgy, hogy messe a 75° -os szög szárát. Ez a metszéspont lesz a háromszög harmadik csúcsa.

A háromszög két oldalból és a nagyobb oldallal szemközi szögből egyértelműen megszerkeszthető (a szög kisebb 180° -nál).



Figyeld meg a 18. feladatban például a ➉ és a ➊ háromszöget! Mi adott ezekben a háromszögekben?

A 4. példában vajon miért hangsúlyoztuk azt, hogy a nagyobb oldallal szemközi szög adott?

FELADATOK

Gyakorló
7.44–7.50.

20 Szerkessz háromszöget a következő adatokból!

a)

Két oldal (cm)		Közbezárt szög
6,5	5,8	45°
8	4	75°
6	6	120°
4	4	60°

b)

Három oldal (cm)		
6	5,5	5
10	8	6
5,4	5,4	3
6	3	3

c)

Oldal (cm)	A rajta fekvő két szöge	
4	45°	75°
6,5	30°	95°
5,2	95°	85°
4	75°	75°

d)

Két oldal (cm)		A nagyobbikkal szemközi szög
4	5	45°
3,5	4,5	75°
6	4,5	105°
4	4	60°

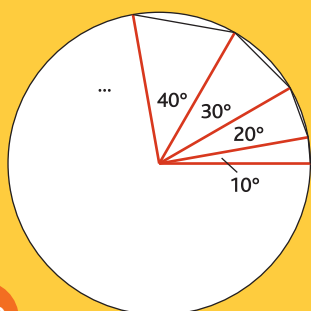
☉ Az előző példák közül melyik alapján dolgozhatsz?

21

Egy háromszög két oldala 6,4 cm és 4,5 cm hosszú.

Az általuk közbezárt szög 60° .

- a) Szerkeszd meg a háromszöget! Mérd meg a harmadik oldalát!
- b) Melyik a legnagyobb szög? Melyik oldallal szemben helyezkedik el?



Egy körbe egyenlő szárú háromszögeket rajzoltunk úgy, hogy a legkisebb szárszöge 10° , majd balra (az óramutató járásával ellentétes irányban) a mellette lévő szárszöge 10° -kal több, a következő balra megint 10° -kal több, és így tovább.

Hány oldalú lesz a sokszög?

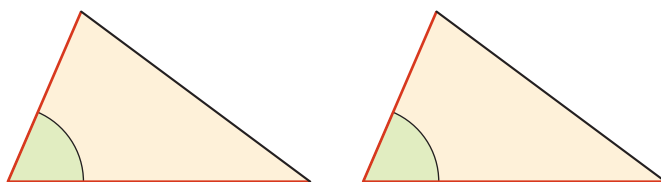
Mekkora a sokszög szögei?

☉ Rajzold be és írd be az ábrába a hiányzó szárszögeket!

A HÁROMSZÖGEK EGYBEVÁGÓSÁGÁNAK ALAPESETEI

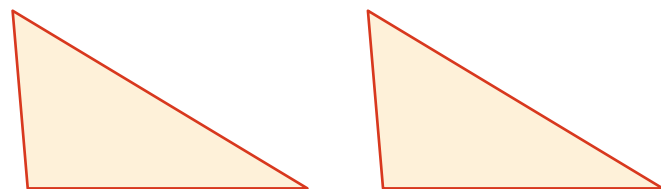
- ❶ Két háromszög egybevágó, ha két oldalukban és az általuk közbezárt szögben megegyeznek.

Lásd 1. példa



- ❷ Két háromszög egybevágó, ha oldalaik páronként megegyeznek.

Lásd 2. példa



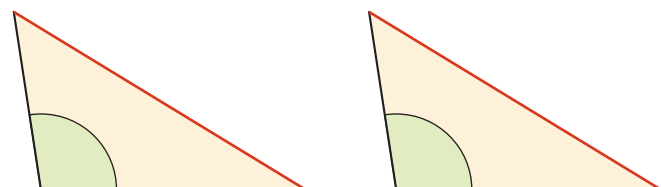
- ❸ Két háromszög egybevágó, ha egy oldalukban és az azon fekvő két szögükben megegyeznek.

Lásd 3. példa



- ❹ Két háromszög egybevágó, ha két oldalukban és a nagyobbikkal szemkötti szögükben megegyeznek.

Lásd 4. példa



A 207. oldalon foglalkozunk azzal az esettel, amikor két oldal és a kisebb oldallal szemkötti szög adott.

Figyeld meg

Két háromszög egybevágóságát mind a négy alapesetben 3-3 független alkotórészrel határoztuk meg. A háromszög megszerkesztéséhez három megfelelő adatot kell ismernünk.

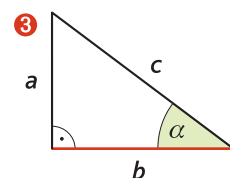
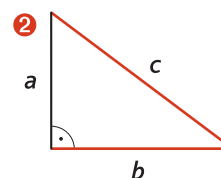
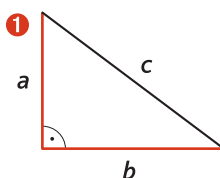
Az adatok nem megfelelőek például akkor, ha nem teljesülnek azok az összefüggések, amelyeket a háromszög oldalairól és szögeiről tanultunk.

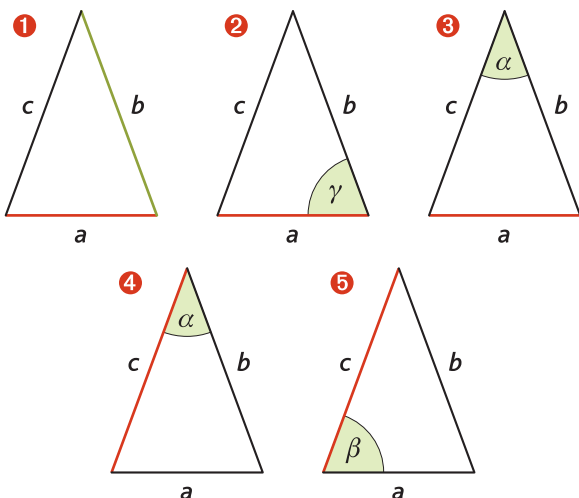
Derékszögű háromszög megszerkesztéséhez elegendő két megfelelő alkotóelem megadása, mert a harmadik a derékszög. **Például:**

Megszerkeszthető a derékszögű háromszög, ha ismerjük.

- ❶ a két befogóját;
- ❷ az átfogóját és az egyik befogóját;
- ❸ az egyik oldalát és az egyik hegyesszögét.

A rajzon az ismert oldalakat színes vonallal húztuk meg.

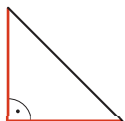




Egyenlő szárú (tükrös) háromszög szerkesztéséhez is elegendő két alkotóelem, mert a szükséges harmadik az egyenlő szárú háromszög tulajdonságai alapján kikövetkeztethető. **Például:**

Megszerkeszthető az egyenlő szárú háromszög, ha ismerjük

- 1 az alapot és a szárát;
- 2 3 az alapot és bármelyik szöget;
- 4 5 a szárát és bármelyik szöget.



A **derékszögű egyenlő szárú háromszög** szerkesztéséhez elegendő bármelyik oldal ismerete. (A szögei 90° és 45° -osak.)



Az **egyenlő oldalú háromszög** szerkesztéséhez elegendő az oldal ismerete. (A szögei 60° -osak.)

Háromszög szerkesztése ismert adatok segítségével azt jelenti, hogy az ismert adatok alkotórészek lesznek. Előfordulhat, hogy az ismert adatokkal nem szerkeszthető háromszög, vagy többféle, esetleg végtelen sokféle háromszög szerkeszthető. Akkor mondjuk, hogy a háromszög az adatokkal egyértelműen megszerkeszthető, ha akárhány háromszöget szerkesztünk is az adatokkal (a szerkesztés terve, a lépések sorrendje változhat is), azok mind egybevágók lesznek. Lásd 1., 2., 3., 4. példa!

FELADATOK

☉ A jelölések a 201. oldal alján lévő ábrákon láthatók.

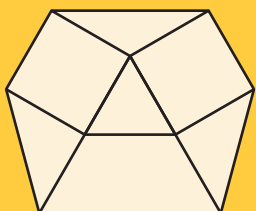
☉ Az a az alapot jelöli.

22 Szerkessz derékszögű háromszöget, ha

- a) $a = 3,6$ cm, $b = 4,8$ cm; b) $b = 3$ cm, $\alpha = 30^\circ$; c) $c = 6$ cm, $b = 4$ cm!

23 Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, ha a fenti ábrákon látható jelölésekkel

- a) $a = 3,6$ cm, $b = 4,8$ cm; b) $a = 3$ cm, $\gamma = 75^\circ$; c) $a = 6$ cm, $\alpha = 45^\circ$;
d) $a = 6$ cm, $\alpha = 135^\circ$; e) $c = 4$ cm, $\beta = 45^\circ$!



Egy hatszöget fel tudunk darabolni az ábra szerint két egybevágó négyzetre, egy tengelyesen szimmetrikus négyszögre, egy szabályos háromszögre és további három egyenlő szárú háromszögre. Hány adat kell az ábra megszerkesztéséhez?

Mekkora a hatszög szögei?

Értelmezés

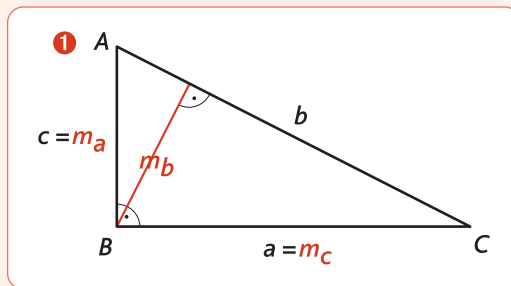
A háromszög csúcsaiból a szemközti oldalegyenesekre bocsátott **merőleges** szakaszokat magasságszakaszoknak, ezeknek a **szakaszoknak a hosszát a háromszög magasságainak nevezzük**.

Ha nem érhető félre, akkor a magasságszakaszt is magasságnak mondjuk.

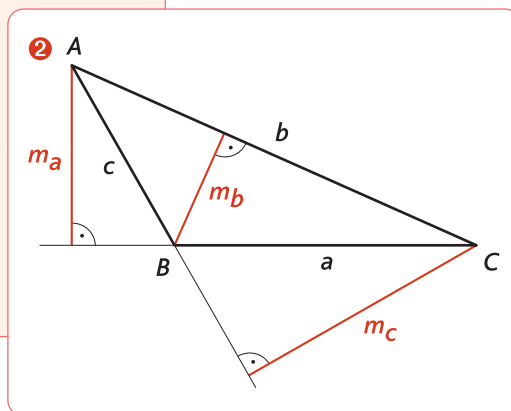
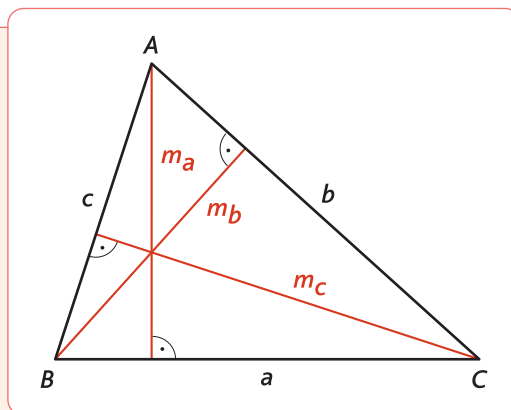
Az a , b , c oldalhoz tartozó magasságot rendre m_a , m_b és m_c jelöli.

1 A derékszögű háromszög két magassága megegyezik a két befogóval:

2 A tompaszögű háromszög két magasságszakasza a háromszögön kívülre esik.



A magasságokat tartalmazó egyenesek a háromszög **magasságegyenesei** (-vonalai).



FELADATOK

24 a) Szerkessz 5 cm-es oldalú szabályos háromszöget! Szerkeszd meg mindhárom szimmetriatengelyét!

Mérd meg és hasonlítsd össze a háromszög magasságait!

b) Szerkessz tengelyesen tükrös háromszöget, amelynek az alapja 3 cm hosszú, a hozzá tartozó magasság 4 cm!

Szerkeszd meg a száraknak a szemközti csúctól való távolságát!

25 Szerkessz háromszöget három oldalból! Szerkeszd meg a csúcsoknak a szemközti **oldalegyenestől** való távolságát!

a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm;

b) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm;

c) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4,5$ cm;

d) $a = 5$ cm, $b = 5$ cm, $c = 4$ cm

☉ Mit tudunk a tengelyesen szimmetrikus háromszögekről?

☉ A hegyesszögű háromszög mindhárom magasságszakasza a háromszögön belülre esik.

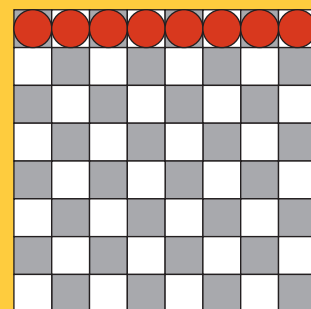


Egy 8-szor 8-as, 5 cm oldalhosszúságú négyzetekből álló sakktáblára 5 cm átmérőjű érméket rakunk. Ha minden kis négyzetbe elhelyezünk egy-egy érmét, akkor 64 darab fér el a táblán.

Az első sorba már be is raktuk az érméket.

Vajon felrakható-e 64-nél több érme a táblára úgy, hogy egyik se „lógjon le” a tábláról? Az érme érinthetik egymást, de nem rakhatók egymásra.

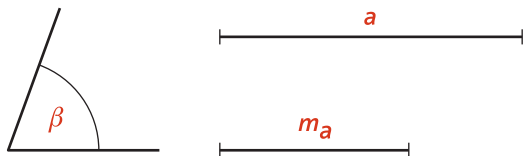
A 24. a) feladat tanulmányozása ötletet adhat. Próbálj megszerkeszteni ilyen elhelyezést!



A háromszög nem csak az alapesetekből szerkeszthető meg. Ilyenkor meg kell vizsgálnunk, hogy egyértelmű-e a megoldás, illetve hány nem egybevágó megoldása van a feladatnak.

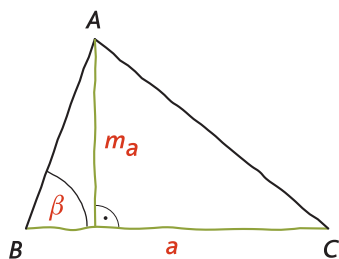
5. példa

Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a rajta lévő egyik szöge és az adott oldalhoz tartozó magassága.



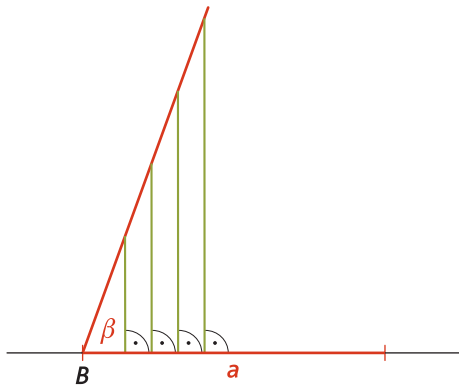
Értelmezzük a feladatot!

Vegyük föl az adatokat.
Vezessünk be jelöléseket.



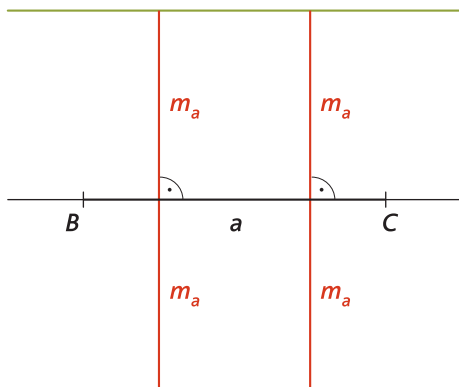
Készítsünk vázlatot!

Rajzoljuk le a háromszöget, mintha már megszerkesztettük volna.
Betűzzük meg a háromszög csúcsait.



Kutassuk fel az összefüggéseket!

A keresett A csúcs helyét két feltétel szabja meg:
legyen rajta az a egyik végpontjában felmért β szög szárán;
pontosan m_a távolságra legyen az a egyenestől.

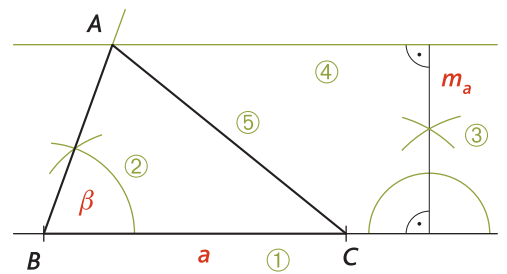
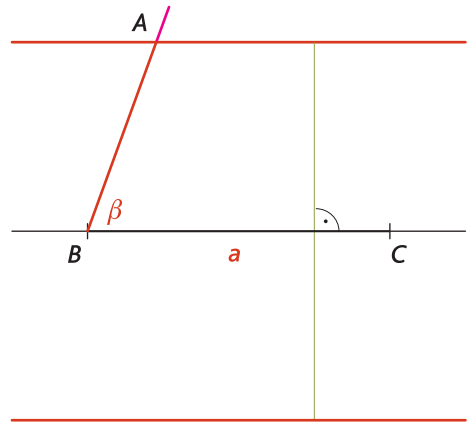


Az a egyenestől m_a távolságra végtelen sok pont van. Ezek az a oldal egyenesével párhuzamos egyenespáron vannak.

Ahol a β szög szára metszi a párhuzamos egyenesek valamelyikét, ott lesz az A csúcs.

A szerkesztés lépései:

- ① Egy félegyenesre rámásoljuk az $a = BC$ szakaszt.
- ② Az a szakasz B végpontjára rámérjük a β szöget.
- ③ Az a oldalegyenesének tetszőleges pontjában merőlegest szerkesztünk, és rámérjük az m_a szakaszt.
- ④ m_a távolságra párhuzamost szerkesztünk az a oldallal.
- ⑤ A β szög szárának és az a oldallal húzott párhuzamos egyenesnek a metszéspontja lesz az A csúcs. Ezt összekötjük a C csúccsal.



Még mit mondhatunk el a feladról?

- Az a szakasz végpontjaira négyféleképpen mérhetjük föl a β szöget. A kapott négy háromszög egybevágó.

A β szög különböző helyekre történő felmérése ellenére egybevágó háromszögeket kaptunk. Más megoldási mód esetén is az itt kapott megoldással egybevágó lesz a megszerkesztett háromszög.

Például lásd a B pontot.

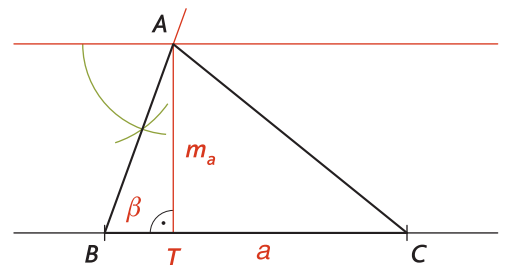
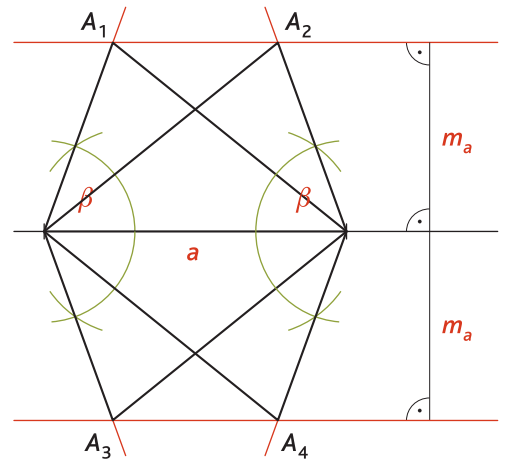
Az egybevágó megoldásokat nem tekintjük különbözőnek.

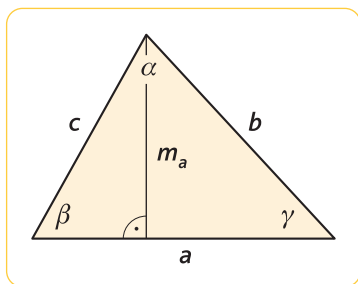
A háromszög a megadott adatokból egyértelműen megszerkeszthető.

- B Másképp is megoldhatjuk a feladatot. Például:

A magasság talppontját jelölje T . Az ATB derékszögű háromszögben ismert egy oldal (m_a) és két szög, ez a háromszög egyértelműen megszerkeszthető.

A BT oldal meghosszabbítására a B pontból felmérve az a szakaszt, megkapjuk a C csúcsot.





☉ Karikázd be a választó betűjelét!

☉ A jelöléseket lásd a fenti ábrán.

☉ Minden esetben szerkeszthető háromszög a megadott adatokkal? Hány megoldása van az egyes feladatoknak?

☉ Az a 120%-a hányszorosa az a -nak?

☉ Készíts vázlatot!

Feladatgyűjtemény
4.1.22–23., 4.1.28.

FELADATOK

B16 Egy háromszög kerülete 18 cm. Az alábbiak közül melyik három adatból **nem szerkeszthető** háromszög?

A: $a = 6$ cm, $b = 6$ cm, $c = 6$ cm;

B: $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm;

C: $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 8$ cm;

D: $a = 3$ cm, $b = 6$ cm, $c = 9$ cm

B17 Az alábbiak közül melyik három adatból **nem szerkeszthető** háromszög?

A: $a = 4$ cm, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 135^\circ$; **B:** $a = 4$ cm, $c = 3$ cm, $\beta = 45^\circ$;

C: $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 3$ cm; **D:** $a = 4$ cm, $m_a = 3$ cm, $c = 5$ cm

B18 Szerkessz háromszöget, ha egyik oldala 4 cm hosszú, a rajta fekvő egyik szög 30° , a szöggel szemben fekvő oldal hossza

a) 1,5 cm; b) 2 cm; c) 2,5 cm; d) 4,5 cm!

Szögeik szerint milyen háromszögeket kaptál?

Számítsd ki a háromszögek területét!

Egészítsd ki a háromszögeket deltoiddá!

B19 Szerkessz háromszöget, ha a két oldala 3 cm és 4 cm hosszú, a harmadik oldalnak a hossza

a) 4,5 cm; b) 5 cm; c) 5,5 cm!

Szögeik szerint milyen háromszögeket kaptál?

B20 Egy háromszög a oldala 5 cm-es, a b oldal hossza az a -énak 120%-a, a c oldalé a b -nek $\frac{3}{4}$ része. Szerkeszd meg a háromszöget! Nevezd el a szögeit!

Melyik a legkisebb szög? Melyik oldallal szemben helyezkedik el?

B21 Egy háromszög AB oldala 5 cm hosszú, a rajta fekvő két szög $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 75^\circ$. Szerkeszd meg a háromszöget!

Szerkeszd meg az AB és az AC oldalhoz tartozó magasságot!

Mekkora szöget zár be egymással a két magasságegyenes?

B22 Hányféle háromszög szerkeszthető, ha a háromszög egyik oldala 6 cm, és

a) egyik szög: 30° ;

b) két szög: 30° , illetve 75° ;

c) két szög: 90° , illetve 45° ;

d) két szög: 105° , illetve 30° ;

e) két szög: 105° , illetve 75° ?

Szerkessz ezekkel az adatokkal háromszögeket!

A 200. oldalon a 4. példában két oldalt és a nagyobb oldallal szemközi szöget adtuk meg. Úgy egyértelműen megszerkeszthettük a háromszöget.

5. példa

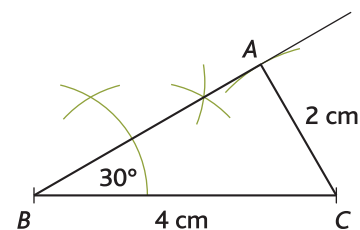
Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és a kisebbik oldallal szemben lévő szöge.

a Legyen $a = 4$ cm; $b = 2$ cm; $\beta = 30^\circ$.

Éppen egy szimmetriatengelyével kettévágott szabályos háromszög felét kell megszerkesztenünk.

A C középpontú, 2 cm sugarú körív **egy pontban érinti az adott** (30° -os) **szög másik szárát**.

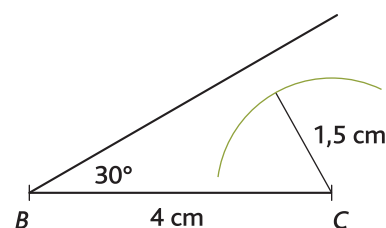
A háromszög egyértelműen megszerkeszthető.



b Legyen $a = 4$ cm; $b = 1,5$ cm; $\beta = 30^\circ$.

A C középpontú, 1,5 cm sugarú körív **nem metszi az adott** (30° os) **szög másik szárát**.

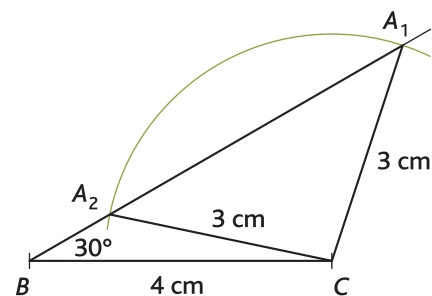
Az adott adatokból **nem szerkeszthető háromszög**.



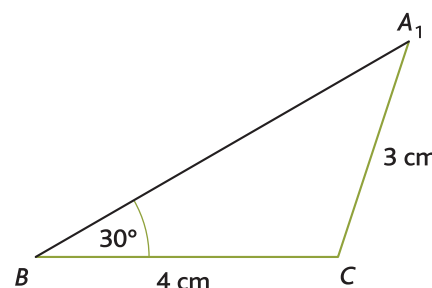
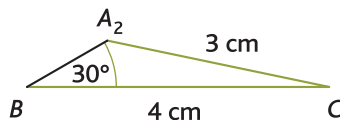
c Legyen $a = 4$ cm; $b = 3$ cm; $\beta = 30^\circ$.

A C középpontú, 3 cm sugarú körív **két pontban metszi az adott** (30° -os) **szög másik szárát**.

Az adatokból **nem egyértelműen szerkeszthető meg a háromszög**.



Két ilyen háromszög van:



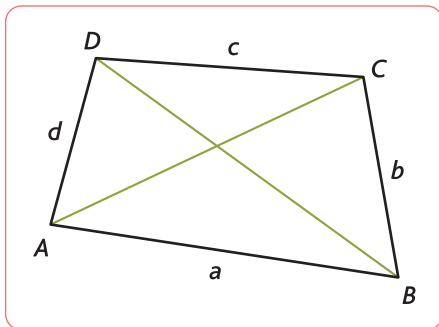
Egy háromszögről annyit tudok, hogy van 3 cm-es és 4 cm-es oldala, és van egy 45° -os szöge. Hány olyan háromszög szerkeszthető, amely megfelel a feltételeknek? Szerkeszd meg ezeket a háromszögeket!

Szögei szerint milyenek lehetnek ezek a háromszögek?

Többet észlel ...

• A 45° -os szöget is szerkeszd!

NÉGYSZÖGEK



Értelmezés

A négyoldalú egyszerű sokszöget **négyszögnek** nevezzük.

A négyszög kerülete:

$$K = a + b + c + d$$

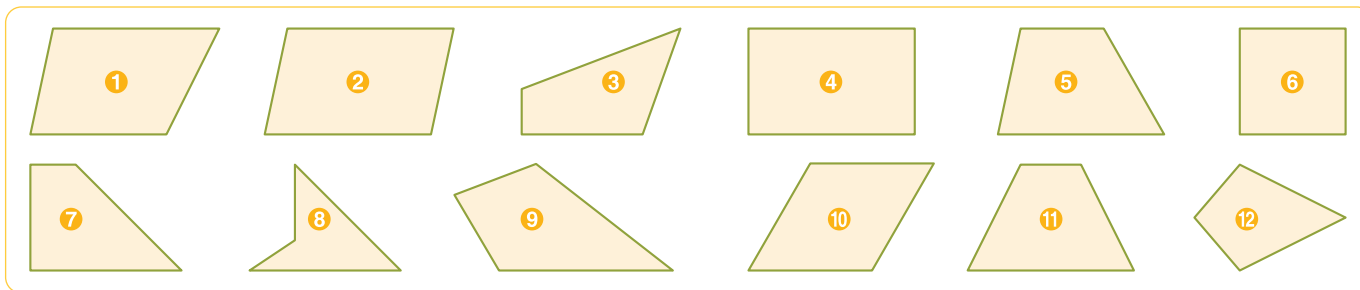
A négyszögnek két **átlója** van.

FELADATOK

☉ A megfelelő négyszögek sorszámának felsorolásával válaszolj!

26 A felsorolt állítások melyik négyszögre igazak?

- | | |
|---------------------------------------|--|
| A: Tengelyesen szimmetrikus. | B: Központosan szimmetrikus. |
| C: Szemközti oldalai egyenlők. | D: Pontosan két oldala egyenlő. |
| E: Van párhuzamos oldalpárja. | F: Szemközti oldalai párhuzamosak. |
| G: Oldalai egyenlők. | H: Két-két szomszédos oldala egyenlő. |



27 A fenti négyszögek közül melyekre igaz az állítás?

- | | |
|---------------------------------------|--|
| A: Van homorúszöge. | B: Van két homorúszöge. |
| C: Minden szöge hegyesszög. | D: Van derékszöge. |
| E: Minden szöge derékszög. | F: Pontosan három derékszöge van. |
| G: Szögei egyenlők. | H: Szemközti szögei egyenlők. |
| I: Szomszédos szögei egyenlők. | J: Két-két szöge egyenlő. |

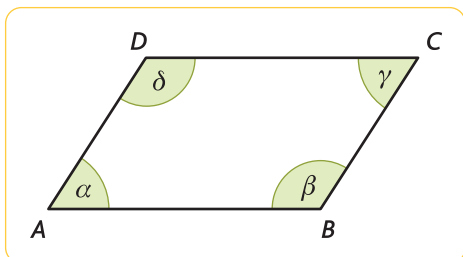
28 a) Mekkora a téglalap belső szögeinek összege?

b) Milyen szögpárt alkotnak a paralelogramma szomszédos szögei?

Mennyi a paralelogramma két szomszédos szögének összege?

Határozd meg mérés nélkül a paralelogramma belső szögeinek összegét!

c) A szükséges mérések elvégzése után számítsd ki a paralelogramma kerületét!



Tétel

A négyszög belső szögeinek összege 360° .

Bizonyítás

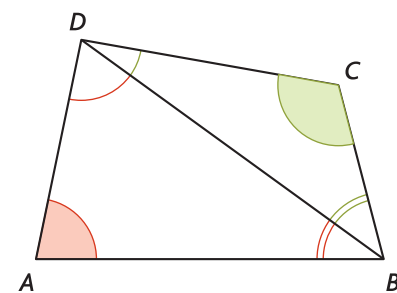
A négyszög két háromszögre bontható.

Mindkét háromszög belső szögeinek összege 180° .

$$\text{[Red Triangle]} + \text{[Red Triangle]} + \text{[Red Triangle]} = 180^\circ$$

$$\text{[Green Triangle]} + \text{[Green Triangle]} + \text{[Green Triangle]} = 180^\circ$$

$$\text{[Red Triangle]} + \left(\text{[Red Triangle]} + \text{[Green Triangle]} \right) + \text{[Green Triangle]} + \left(\text{[Red Triangle]} + \text{[Green Triangle]} \right) = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$$



☉ *Konkáv négyszög esetén hogyan bontanád két háromszögre a négyszöget?*

FELADATOK

29

Az alábbi szögek közül melyik négy lehet egy négyszög négy belső szöge? Egy-egy szöget többször is felhasználhatsz.

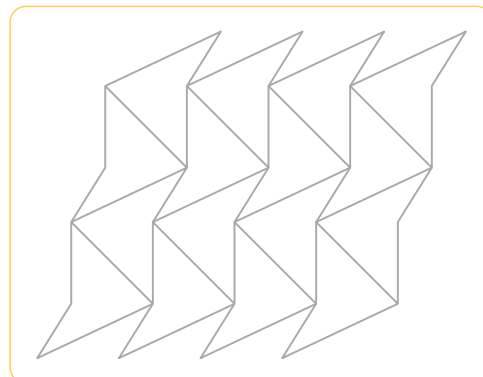
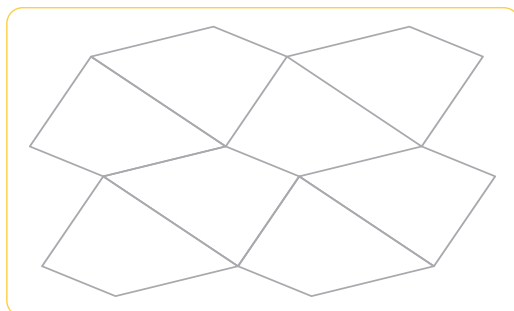
30°; 50°; 60°; 90°; 120°; 150°; 180°; 210°

☉ *Figyelembe vetted az előző tételben bizonyított összefüggést?*

30

Egybevágó négyszögekkel parkettáztuk a síkot.

- Színezd azonos színnel az egymással párhuzamos szakaszokat!
- Jelöld az egyenlő nagyságú szögeket azonos módon!



- Az oldalak és a szögek vizsgálata alapján is igazold, hogy a négyszög belső szögeinek összege 360° !

31

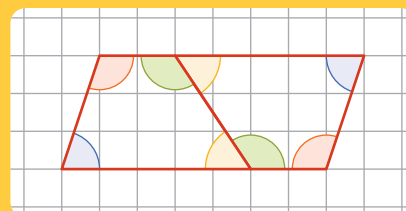
A szükséges mérések elvégzése után számítsd ki a fenti tétel bizonyításában lerajzolt négyszög területét!

Gyakorló
7.51–7.63;
Feladatgyűjtemény
1.1.11–13., 1.2.17.

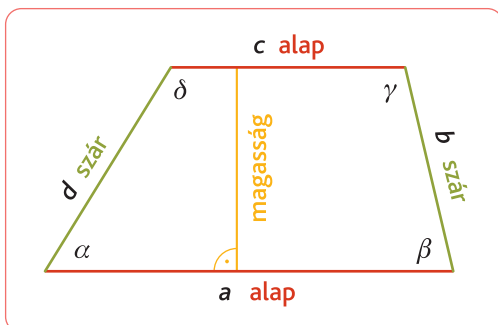


Parkettázd (négyzetrácsos lapon) a síkot például ilyen trapézokkal úgy, hogy a trapéz szögei közti összefüggéseket szemléltesse az ábrád!

Fogalmazd meg a felismert összefüggéseket!



TRAPÉZ



Emlékeztető

Az olyan négyszöget, amelynek van párhuzamos oldalpárja, **trapéz**-nak nevezzük.

$$AB \parallel DC$$

A trapéz párhuzamos oldalait **alpnak** nevezzük, a másik két oldalt **szárnak**.

A szárak is lehetnek párhuzamosak.

Az alapok távolsága a trapéz magassága.

A trapéz egy-egy száron fekvő két szögének összege 180° , ezek társ-szögek.

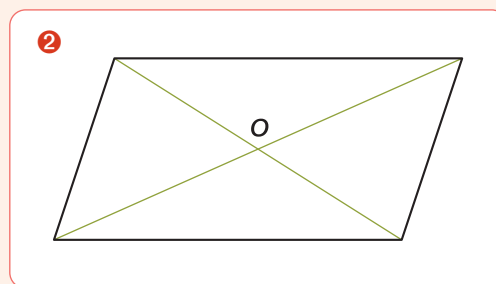
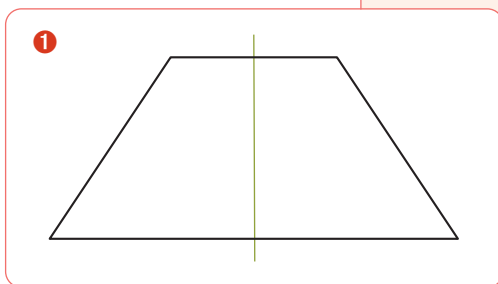
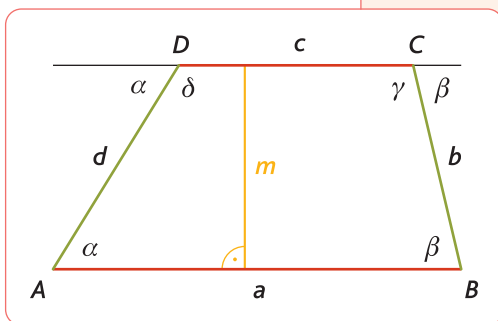
$$\alpha + \delta = 180^\circ$$

$$\beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

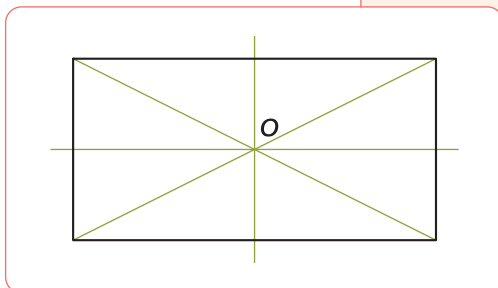
Ezeket az összefüggéseket ismerhettük fel és bizonyíthattuk az előző lap alján lévő feladat megoldásakor.

A trapéz kerülete: $K = a + b + c + d$



Ha a szárak egyenlők, akkor a trapéz lehet

- 1 **húrtrapéz**, tengelyesen szimmetrikus;
- 2 **paralelogramma**, középpontosan szimmetrikus.



Van olyan húrtrapéz, amelyik paralelogramma.

Ez a **téglalap**.

Ne feledjük, a négyzet speciális téglalap.

FELADATOK

32

A szükséges mérések elvégzése után számítsd ki az előző emlékeztetőben lerajzolt négy különböző trapéz területét!

© Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!



Melyik az a trapéz, amelynek az átlója tükörtengely?

A: Nincsen ilyen trapéz.

C: Minden téglalap ilyen.

B: Minden paralelogramma ilyen.

D: Minden rombusz ilyen.

33 Válaszd ki a következő trapézok közül a megadott tulajdonságúakat!

A: Tengelyesen szimmetrikus.

B: Középpontosan szimmetrikus.

C: Van három egyenlő oldala.

D: Van két szemközti egyenlő oldala.

E: Minden oldala egyenlő.

F: Két-két szemközti szöge egyenlő.

G: Minden szöge egyenlő.

H: Két-két szomszédos szöge egyenlő.

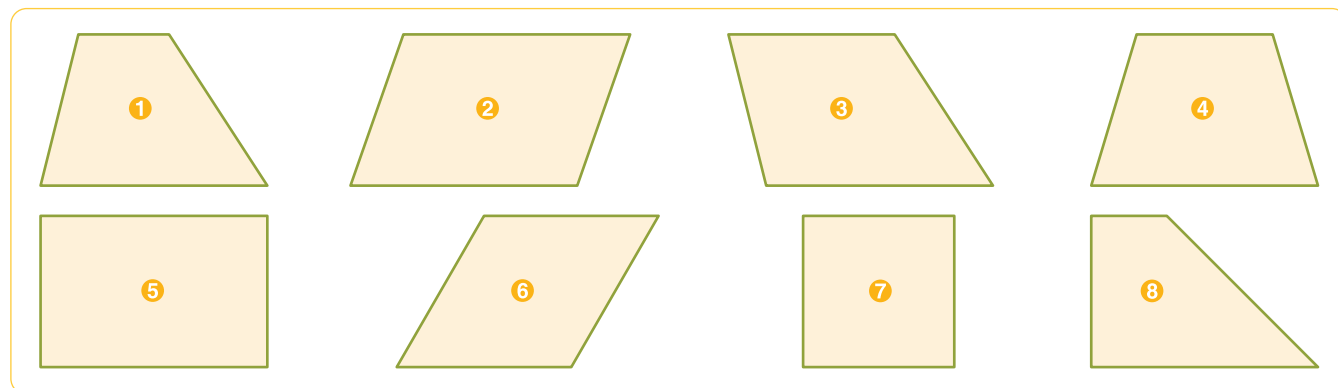
I: Átlói egyenlők.

J: Van csúcsain átmenő tükörtengelye.

K: Átlói merőlegesek egymásra.

L: Van csúcsain át nem menő tükörtengelye.

☉ *A megfelelő trapézok sorszámanak felsorolásával válaszolj!*



Sorold föl, hogy az egyes trapézokra melyek teljesülnek a fent felsorolt **A, B, ..., K**, illetve **L** tulajdonságok közül!

34 a) Egy trapéz két szemközti szöge 72° és 115° . Mekkora a másik két szöge?

b) Egy trapéz egyik szöge 70° . A szárak meghosszabbítása (a száregyenesek) 40° -os szöget alkotnak. Mekkora a trapéz szögei?

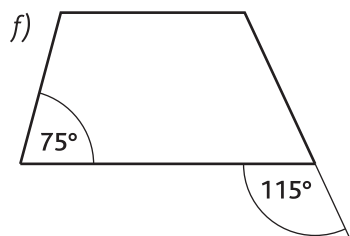
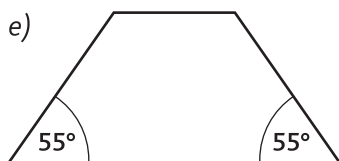
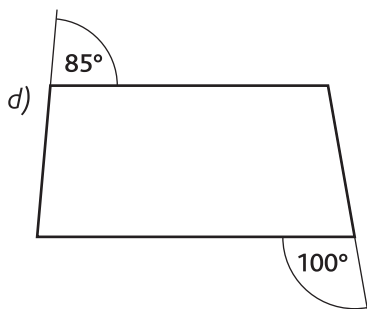
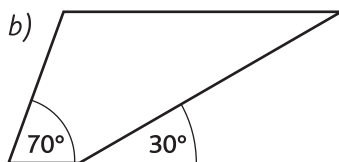
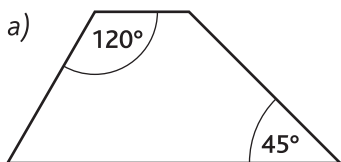
c) Egy húrtrapéz hegyesszögei 45° -osak. Hosszabbik alapja 8 cm-es, magassága 2 cm. Mekkora a másik két belső szöge? Mekkora a rövidebbik alap?

d) Egy húrtrapéz egyik hegyesszöge 60° . Az átlók merőlegesek a szárakra. Rajzolj! Mekkora a többi belső szöge? Mekkora a trapéz alapjai, ha a szár 5 cm-es?

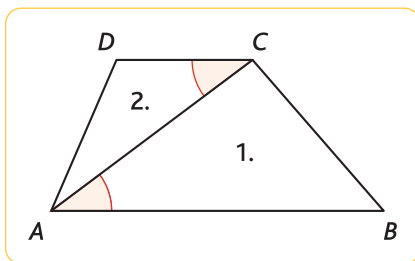
☉ *Készíts vázlatot! Milyen összefüggést figyeltünk meg a trapéz egy száron nyugvó szögei közt?!*

35

A megadott szögekből határozd meg a trapéz szögeit!

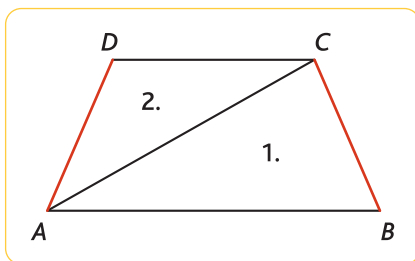


A TRAPÉZ SZERKESZTÉSE



Hány adat szükséges a trapéz megszerkesztéséhez?

A trapézt egyik átlója két háromszögre bontja. Az 1. jelű háromszög megszerkesztéséhez 3 adat szükséges. Ha ez a háromszög megvan, akkor a 2. jelű háromszöghöz megadtunk 2 adatot, mivel a meghúzott átló mindkét háromszög oldala. Az alapok párhuzamossága miatt a jelzett szögek váltószögek, tehát egyenlők. Ezért a 2. jelű háromszög megszerkesztéséhez már csak egy új adat szükséges.

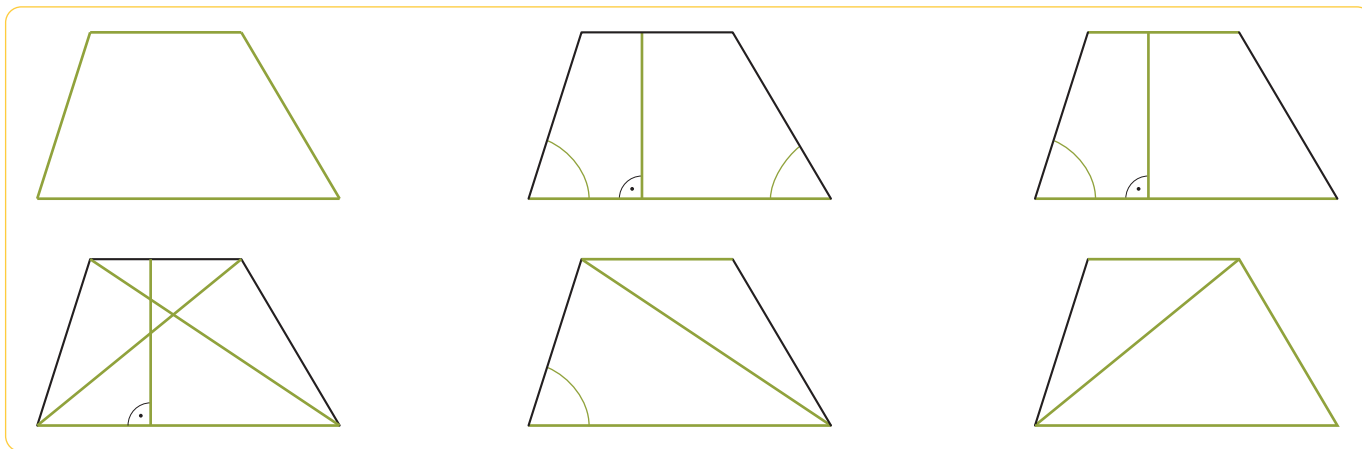


A trapéz szerkesztéséhez általában négy független adatot kell ismernünk.

A húrtrapéz két szára egyenlő, ezért a 2. jelű háromszög megszerkesztéséhez már nem kell újabb adat.

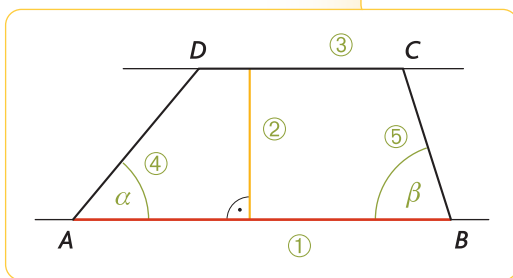
A húrtrapéz három jól megválasztott független adatból megszerkeszthető.

Például az alábbi ábrán zölddel megjelölt adatokból szerkeszthetünk trapézt, ha az adatokat megfelelően választjuk meg.



1. példa

Szerkesszünk trapézt, ha egyik alapja 5 cm, az ezen lévő két szög 60° és 80° , magassága 2 cm.



A szerkesztés lépései lehetnek:

- ① Felvesszük az 5 cm-es AB szakaszt.
- ② Az AB -re merőlegest szerkesztünk, arra rámérjük a 2 cm-es magasságot.
- ③ Megszerkesztjük az AB -vel párhuzamos DC oldal egyenesét.
- ④ Az AB alap egyik végpontjában (például az A -ban) 60° -os szöget szerkesztünk. A szög szára és a DC oldalegyenes metszéspontja a trapéz D csúcsa.
- ⑤ Az AB alap másik végpontjában felmérjük a 80° -os szöget. A szög szára és a DC oldalegyenes metszéspontja a trapéz C csúcsa.

FELADATOK

B23 Négy négyszögről mondunk egy-egy igaz állítást. Ezek alapján melyik négyszögről tudjuk biztosan, hogy trapéz?

A: Két szomszédos szögének összege 180° .

B: Két szomszédos szöge egyenlő.

C: Két szemközti szöge egyenlő.

D: Két szemközti szögének összege 180° .

☉ *Karikázd be a megfelelő állítás betűjelét!*

B24 Egy trapéz négy oldalának a hosszúsága rendre 6 cm, 3 cm, 3 cm, 3 cm.

A: A trapéz húrtrapéz.

B: A trapéz három szabályos háromszögre bontható.

C: A trapéznek van szimmetriatengelye.

D: A trapéznek van derékszöge.

☉ *Karikázd be a hamis állítás betűjelét!*

B25 Egy trapéz egyik alapja 4 cm hosszú, a rajta lévő két szöge 60° , 45° .

Szerkeszd meg a trapézt, ha a magassága a) 2 cm; b) 5 cm!

B26 Egy trapéz egyik alapja 5 cm hosszú, a magassága 4 cm, az 5 cm-es alapon fekvő egyik belső szöge 75° . Szerkeszd meg a trapézt, ha a másik alapjának a hossza: a) 3 cm; b) 5 cm; c) 7 cm!

☉ *Készíts vázlatot!*

B27 Szerkessz trapézt, ha

a) alapjai 6,5 cm és 4 cm, szárjai 2,5 cm és 3 cm hosszúak!

b) alapjai 8,5 cm és 4 cm, szárjai 2,5 cm és 2 cm hosszúak!

☉ *Minden feladat esetén vizsgáld meg, hogy megszerkeszthető-e a trapéz!*

B28 Szerkessz trapézt, ha egyik alapja 7 cm-es, magassága 3 cm, az egyik átlója 5 cm hosszú, a másik átlójának a hosszúsága

a) 7 cm; b) 5 cm; c) 4 cm; d) 2 cm!

☉ *Mit értünk a trapéz magasságán?*

B29 Egy trapéz egyik alapja 5 cm hosszú, a rajta lévő két szög 120° és 75° . Szerkeszd meg a trapézt, ha

a) a magassága 4 cm; b) a másik alapja 8 cm; c) a hosszabbik átlója 6 cm!

B30 Szerkessz húrtrapézt, ha alapjainak hosszúsága 8 cm és 6 cm, egyik szöge 60° !

Feladatgyűjtemény 2.8.31.; 4.1.26.

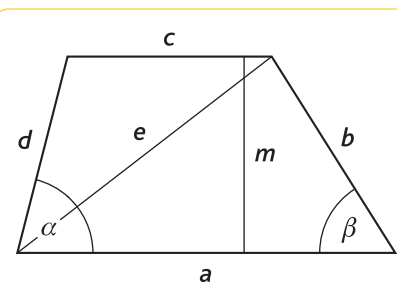
B31 Szerkessz trapézt a következő adatokból!

a) $a = 5,6$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 75^\circ$, $m = 3,6$ cm

b) $b = c = d = 4$ cm, $\alpha = 30^\circ$

c) $a = e = 6$ cm, $m = d = 3$ cm

d) $a = 9,6$ cm, $b = 6$ cm, $\beta = 60^\circ$, $c = 5$ cm



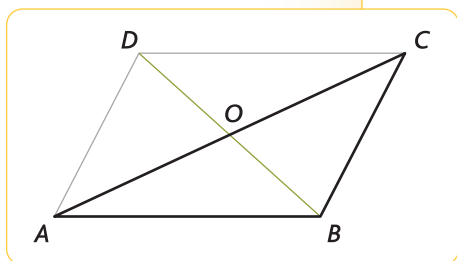
PARALELOGRAMMA

A paralelogrammát olyan tulajdonsággal tudjuk „kiemelni” a négyszögek közül, amelyik minden paralelogrammra igaz, de nem igaz egyetlen olyan négyszögre sem, amelyik nem paralelogramma. A paralelogrammának több ilyen tulajdonsága is van. Mi a következő meghatározást tanultuk:

Emlékeztető

Az olyan négyszöget, amelynek a szemközti oldalai párhuzamosak, **paralelogrammának** nevezzük.

A PARALELOGRAMMA SZÁRMAZTATÁSA

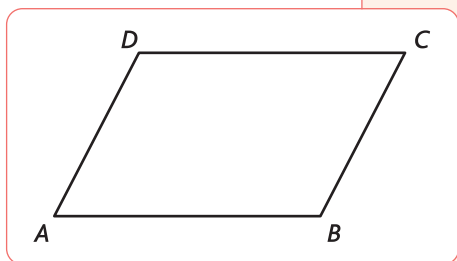


Rajzoljunk egy $ABC\triangle$ -et, és felezzük meg az AC oldalát. A felezési pontot jelölje O . Tükrözzük a háromszöget az O pontra, a B pont tükörképét jelölje D .

A középpontos tükrözés tulajdonságai miatt az $ABC\triangle$ és a $CDA\triangle$ egybevágó, a megfelelő oldalak egyenlők és párhuzamosak, a megfelelő szögek egyenlők.

Egy olyan $ABCD$ négyszöget kaptunk, amelynek a szemközti oldalai párhuzamosak. Az $ABCD$ négyszög **paralelogramma**.

A PARALELOGRAMMA TULAJDONSÁGAI



A paralelogramma a következő tulajdonságok bármelyikével meghatározható:

- 1 A paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak.

$$AB \parallel CD; \quad AD \parallel CB$$

- 2 A paralelogramma szemközti oldalai egyenlők.

$$AB = CD; \quad AD = CB$$

- 3 A paralelogramma középpontosan szimmetrikus négyszög, szimmetriaközéppontja az átlók metszéspontja.

- 4 A paralelogramma átlói felezik egymást.

$$AO = OC; \quad BO = OD$$

- 5 A paralelogramma szemközti szögei egyenlők, mert váltószögek.

$$A\angle = C\angle; \quad B\angle = D\angle$$

- 6 A paralelogramma szomszédos szögeinek összege 180° , mert társ-szögek.

$$A\angle + B\angle = 180^\circ; \quad B\angle + C\angle = 180^\circ;$$

$$C\angle + D\angle = 180^\circ; \quad D\angle + A\angle = 180^\circ$$

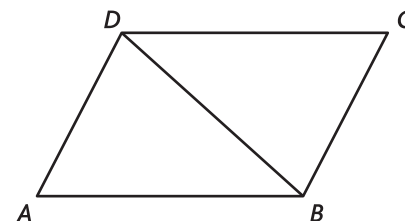
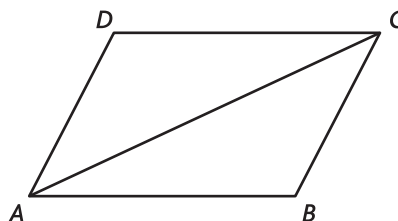
»»

»»

- 7 A paralelogrammát bármelyik átlója két egybevágó háromszögre bontja.

$$ABC\triangle \cong CDA\triangle;$$

$$ABD\triangle \cong CDB\triangle$$



FELADATOK

- 36 a) Egy paralelogramma egyik szöge 40° . Mekkora a többi szöge?
 b) Szerkessz olyan paralelogrammát, amelynek oldalai 4 cm, 5 cm hosszúak, és csúcsai egyenlő távolságra vannak a szimmetria-középponttól!
 c) Egy paralelogramma két szögének aránya 4 : 5. Mekkora a szögei?
 d) Egy paralelogramma egyik átlója oldalai bármelyikével egyenlő hosszú. Mekkora az egy oldalán fekvő két szögének az aránya?

☉ A rajz segíthet.

- 37 A koordináta-rendszerben megadtuk egy paralelogramma három csúcsát: (4; 0), (8; 0), (10; 3). Melyik pont lehet a negyedik csúcs?

☉ Milyen szimmetriatulajdonsága van a paralelogrammának?

- 38 A koordináta-rendszerben megadott három pont közül kettő egy paralelogramma egy-egy csúcsa, a harmadik a középpontja: (2; 0), (6; 0), (5; 2). Hol lehet a másik két csúcsa?

- 39 Egy egyenlő szárú háromszög alapja $a = 3$ cm, szára $b = 4$ cm hosszú. Szerkeszd meg a háromszöget! Milyen síkidomot kapsz, ha

☉ Készíts vázlatot!

- a) az alap egyenesére tükrözd a háromszöget;
 b) az alap felezőpontjára tükrözd a háromszöget;
 c) a szár egyenesére tükrözd a háromszöget;
 d) a szár felezőpontjára tükrözd a háromszöget?

Hasonlítsd össze az a), b), c) és d) feladatban megszerkesztett síkidomokat!

- 40 Egy háromszög két oldala 5,4 cm és 4 cm hosszú, a közbezárt szög 120° . Szerkeszd meg a háromszöget!

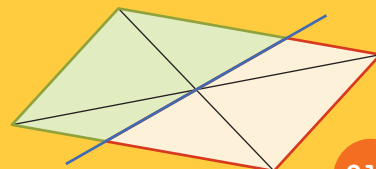
- a) Tükrözd a háromszöget a leghosszabb oldalára!
 b) Tükrözd a háromszöget a leghosszabb oldal felezőpontjára!
 c) Tükrözd a háromszöget a leghosszabb oldal felezőmerőlegesére!

Állapítsd meg minden esetben, hogy az eredeti háromszögnek és tükröképének csúcsai együtt milyen sokszöget alkotnak!

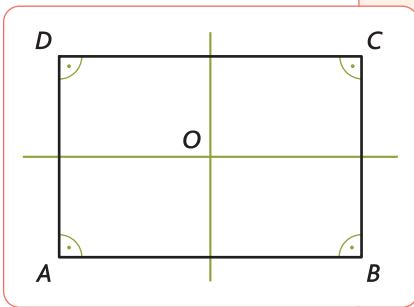
Feladatgyűjtemény
4.1.20.



Igazold, hogy a paralelogramma átlóinak metszéspontján átmenő egyenes a paralelogrammát két egybevágó részre bontja!



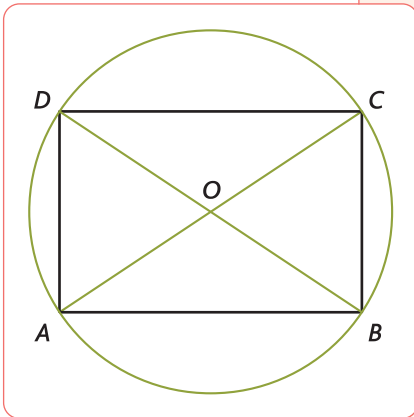
SPECIÁLIS PARALELOGRAMMÁK



A téglalap, a rombusz és a négyzet is paralelogrammák, ezért rendelkeznek a paralelogramma tulajdonságaival.

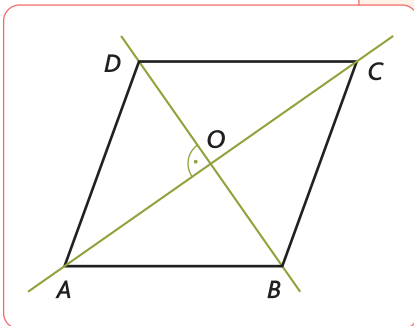
A téglalap olyan paralelogramma, amelynek mind a négy szöge egyenlő.

Tengelyesen szimmetrikus, tükörtengelyei a szemközti oldalak felezőmerőlegesei, a tengelyek felezik a szemközti oldalakat.



A téglalap átlói egyenlők, mivel egymás tükörképei. Ezért a téglalap köré kör húzható, **a téglalap húrtrapéz**.

A téglalapot az átlói négy egyenlő szárú háromszögre bontják.



A rombusz olyan paralelogramma, amelynek mind a négy oldala egyenlő.

A rombusz tengelyesen szimmetrikus, tükörtengelyei az átlók egyenesei. A tengelyek (átlók) felezik a szemközti szögeket.

A rombusz átlói merőlegesek egymásra. (A tengelyes szimmetriából következik.)

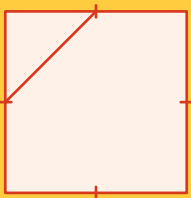
A rombuszt az átlói négy egybevágó derékszögű háromszögre bontják.

A négyzet rendelkezik mind a téglalap, mind a rombusz tulajdonságaival.

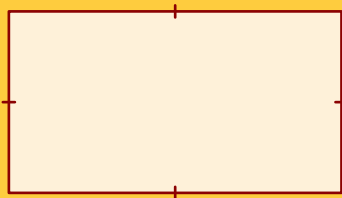
❶ Igazold az állításaidat!



Kösd össze a következő paralelogrammák szomszédos oldalainak felezőpontjait! Mit mondhatunk az így kapott négyszögek oldalairól, átlóiról, szögeiről, területéről?

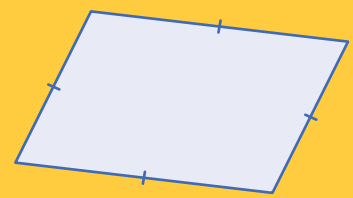
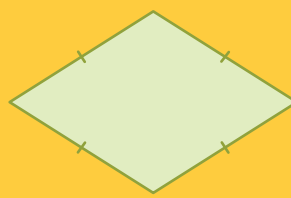


A ✗



B ✗

C ✗



Az A, B, C pont egy négyszög három csúcsa. Keres olyan negyedek csúcsot, hogy

- az átlók felezzék egymást;
- az átlók merőlegesek legyenek egymásra;
- a négyszög tengelyesen szimmetrikus legyen!

FELADATOK

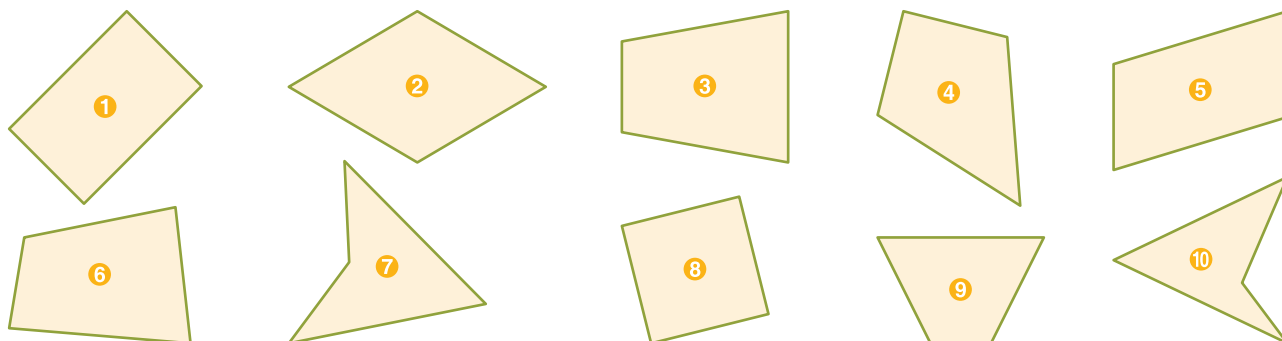
41

Egy paralelogramma szomszédos szögeinek aránya $2 : 3$.
Mekkorák a paralelogramma szögei?

☉ Mennyi két szomszédos szög összege?

42

Az alaphalmaz a következő négyszögek halmaza:



A fenti négyszögek közül melyekre igaz az állítás?

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| A: Van szimmetriaátlója. | B: Van szimmetria-középontja. |
| C: Átlói egyenlők. | D: Átlói merőlegesek egymásra. |
| E: Átlói felezik egymást. | F: Minden oldala egyenlő. |

43

Négy négyszögről mondunk egy-egy igaz állítást. Ezek alapján melyik négyszögről tudjuk biztosan, hogy paralelogramma?

- | | |
|-------------------------------------|--|
| A: Átlói egyenlő hosszúak. | B: Az átlói merőlegesek egymásra. |
| C: Az átlói felezik egymást. | D: Két szemközti oldala egyenlő hosszú. |

☉ Karikázd be a megfelelő állítás betűjelét!

44

Melyik állítás nem igaz minden egyes téglalapra?

- | | |
|-------------------------------------|---|
| A: Átlói egyenlő hosszúak. | B: Az átlói merőlegesek egymásra. |
| C: Az átlói felezik egymást. | D: Átlói négy egyenlő szárú háromszögre bontják. |

☉ Karikázd be a hamis állítás betűjelét!

45

Melyik állítás nem igaz a négyzetre?

- A:** A négyzet középpontosan szimmetrikus négyszög.
B: A négyzet olyan rombusz, amelyik téglalap.
C: Az a négyszög, amely húrtrapéz és rombusz is, az négyzet.
D: A négyzetnek pontosan két szimmetriatengelye van.

☉ Karikázd be a hamis állítás betűjelét!

46

Melyik állítás nem igaz egy (nem négyzet) téglalap, egy (nem négyzet) rombusz és egy négyzet mindegyikére?

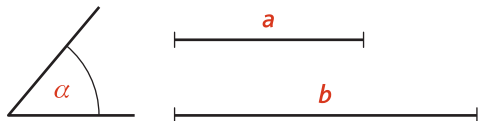
- A:** Mindhárom négyszög tengelyesen szimmetrikus.
B: Mindhárom négyszög középpontosan szimmetrikus.
C: Mindhárom négyszög paralelogramma.
D: Mindhárom négyszög húrtrapéz.

☉ Karikázd be a hamis állítás betűjelét!

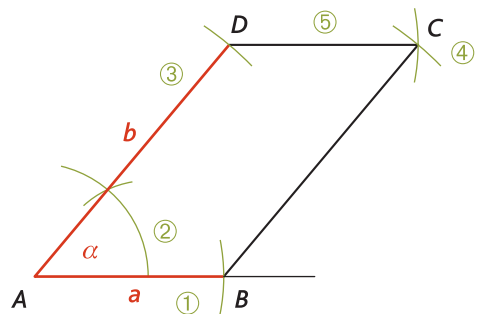
PARALELOGRAMMA SZERKESZTÉSE

2. példa

Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két oldala és az egyik szöge.



Vegyük fel az adatokat.



A szerkesztés terve:

- ① Megrajzoljuk az a oldalt.
- ② Az a szakasz A végpontjába átmásoljuk az α szöget.
- ③ Az α szög másik szárára rámérjük a b oldalt, így megkapjuk a paralelogramma harmadik csúcsát, a D pontot.
- ④ A D pontból az a oldallal, a B pontból a b oldallal körívet húzunk. A körívek metszéspontja a paralelogramma negyedik csúcsa.
- ⑤ A csúcspontokat összekötjük.

FELADATOK

- 47 Szerkessz téglalapot, ha oldalainak hossza 4 cm és 35 mm!

☉ Többféle terv alapján dolgozhatsz.

- 48 Szerkessz téglalapot, ha egyik oldala 4 cm-es és átlója

a) 3,5 cm hosszú; b) 5 cm hosszú; c) 7,5 cm hosszú!
Az adatok megmérése után számítsd ki a téglalapok kerületét és területét!

Gyakorló
5.14.

- 49 Szerkessz négyzetet, ha a) oldala 4 cm-es; b) átlója 5,7 cm hosszú!

Az adatok megmérése után számítsd ki a négyzetek kerületét és területét!

☉ Melyik paralelogramma magasságát határozhatjuk meg mérés nélkül?

- 50 Egy paralelogramma két oldala 6 cm és 4 cm hosszú. Az általuk közbezárt szög:

a) 60° ; b) 30° ; c) 90° ; d) 135° ; e) 150° .

Szerkeszd meg a paralelogrammákat!

Szerkeszd meg mindegyikben a 6 cm-es oldalhoz tartozó magasságot!

Hasonlítsd össze a magasságokat a 4 cm-es oldallal!

☉ Mit határoz meg a paralelogramma két oldala és az átlója?
Mikor nincs megoldás?

- 51 Egy paralelogramma két oldala 5 cm és 3 cm hosszú, egyik átlója:

a) 2 cm-es; b) 4 cm-es; c) 5 cm-es; d) 6 cm-es; e) 8 cm-es.

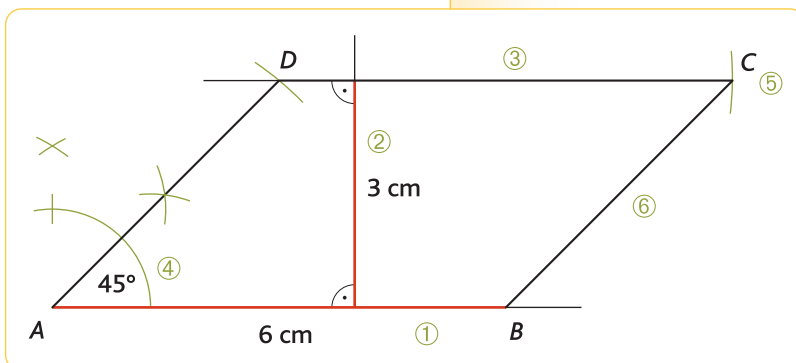
Szerkeszd meg a paralelogrammákat!

3. példa

Szerkesszünk paralelogrammát, amelynek egyik oldala 6 cm, egyik szöge 45° , a 6 cm-es oldalához tartozó magassága 3 cm.

A szerkesztés terve:

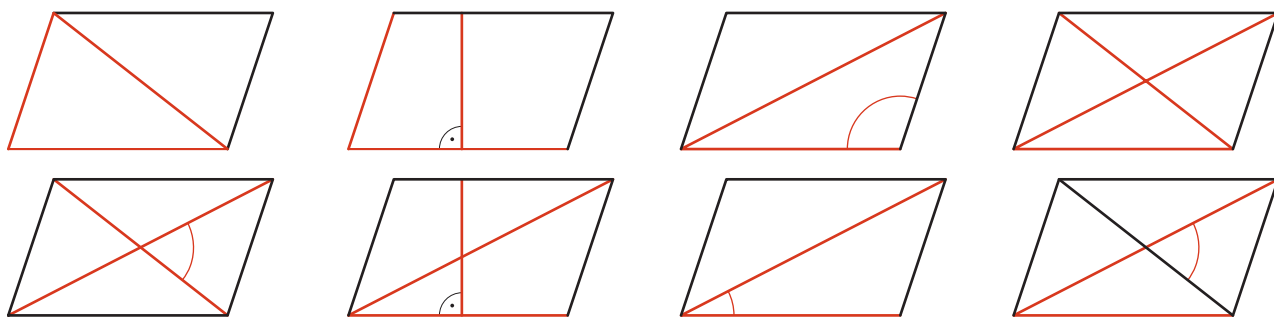
- ① Felvesszük a 6 cm-es AB oldalt.
- ② Az AB oldalra merőlegest szerkesztünk, és erre rámérjük a 3 cm-es magasságot.
- ③ Az AB oldallal 3 cm távolságra párhuzamost szerkesztünk.
- ④ Az AB oldal egyik végpontjába 45° -os szöget szerkesztünk. Ahol a szög szára metszi a párhuzamost, ott lesz a paralelogramma harmadik (D) csúcsa.
- ⑤ A párhuzamos egyenesre a D csúcsból kiindulva rámérjük a 6 cm-es szakaszt.
- ⑥ Meghúzzuk a paralelogramma negyedik oldalát.



A **paralelogramma** egy átlóval két egybevágó háromszögre bontható. A háromszög megszerkesztéséhez általában három adatra van szükség, ezért **a paralelogramma megszerkesztéséhez is elegendő három megfelelő adat.**

☉ Mikor „nem megfelelő” a három adat?

Például: A **pirossal** megjelölt adatokból mely esetben szerkeszthetünk **egyértelműen** paralelogrammát?



A **téglalap** egy átlóval két egybevágó derékszögű háromszögre bontható. Ezért **a téglalap megszerkesztéséhez két adat elegendő.**

A **rombusz szerkesztéséhez is két adat kell**, mert átlója két egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontja.

A **négyzet** egy átlóval két egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontható. Ezért **a négyzet megszerkesztéséhez elegendő egy adat.**

FELADATOK

B32

Egy paralelogramma két oldala 5 cm és 3 cm hosszú, az 5 cm-es oldalhoz tartozó magassága:

a) 2 cm;

b) 3 cm;

c) 4 cm.

Szerkeszd meg a paralelogrammát! Számítsd ki a paralelogramma területét!

☉ Mikor nincs megoldás?

Feladatgyűjtemény
4.1.24–25.

☉ *Mérd meg a szükséges adatokat a következő feladatokban is!*

Figyelj arra is, hogy egy-értelmű-e a megoldás, illetve van-e megoldása a feladatnak!

B33 Egy paralelogramma egyik átlója 6 cm, egyik oldala 5 cm hosszú, az ehhez az oldalhoz tartozó magassága:

- a) 3 cm; b) 6 cm; c) 7 cm.

Szerkeszd meg a paralelogrammát! Számítsd ki a paralelogramma területét!

B34 Egy paralelogramma egyik oldala 4 cm hosszú, egyik szöge 150° , egyik átlójának a hossza

- a) 6 cm; b) 4 cm; c) 3 cm; d) 2 cm; e) 1 cm.

Szerkeszd meg a paralelogrammát! Számítsd ki a paralelogramma területét!

B35 Egy paralelogramma egyik átlója 6 cm, egyik oldala 5 cm hosszú, a másik átlójának a hossza

- a) 8 cm; b) 7 cm; c) 6 cm; d) 4 cm; e) 18 cm.

Szerkeszd meg a paralelogrammát! Számítsd ki a területét!

B36 Egy paralelogramma egyik átlója 4 cm, egyik oldala 3 cm hosszú, az általuk bezárt szög

- a) 30° ; b) 45° ; c) 90° ; d) 150° .

Szerkeszd meg a paralelogrammát! Számítsd ki a területét!

B37 Egy paralelogramma átlói 6,4 cm és 4,8 cm hosszúak. Az általuk bezárt szög:

- a) 60° ; b) 90° ; c) 30° ; d) 75° ; e) 105° .

Szerkeszd meg a paralelogrammát! Számítsd ki a területét!

B38 Szerkessz rombuszt, ha oldala 5 cm hosszú, magassága

- a) 2,5 cm; b) 5 cm; c) 5,5 cm!

Számítsd ki a rombusz területét!

B39 Szerkessz rombuszt, ha oldala 4 cm hosszú és egyik átlójának hossza

- a) 2 cm; b) 5 cm; c) 8,5 cm!

Számítsd ki a rombusz területét!

B40 Szerkessz rombuszt, ha oldala 5 cm hosszú és egyik szöge

- a) 30° ; b) 60° ; c) 90° ; d) 120° ; e) 210° !

Számítsd ki a rombusz területét!

B41 Egy rombusz átlói 6 cm és 8 cm hosszúak. Szerkeszd meg a rombuszt!

B42 Szerkeszd meg a paralelogrammát, ha egyik szöge 30° , két magassága $m_a = 3$ cm, $m_b = 2$ cm!

☉ *Mit tudunk a rombusz átlóiról?*

A SOKSZÖGEK TERÜLETE

Értelmezés

- 1 Ha a négyzet minden oldala 1 hosszúságegység, akkor (megállapodás szerint) a négyzet területe 1 területegység. **Például:**

Az 1 m oldalhosszúságú négyzet területe: 1 m^2

Az 1 km oldalhosszúságú négyzet területe: 1 km^2

Földterületek mérésére használatosak még a következő területegységek.

A 10 m oldalhosszúságú négyzet területe: 1 ár (jele 1 a); $1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$

A 100 m oldalhosszúságú négyzet területe: 1 hektár (jele 1 ha);

$$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2 = 100 \text{ a (ár)}$$

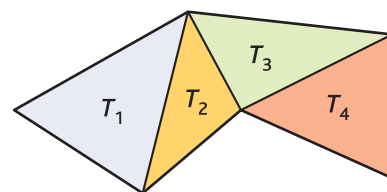
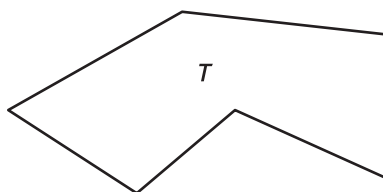
- 2 A terület mérőszáma mindig nemnegatív szám.

- 3 Az egybevágó síkidomok területe egyenlő.

- 4 Ha egy síkidomot feldarabolunk, akkor a darabok területének az összege megegyezik az eredeti síkidom területével.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

☉ Az ár területegységet Magyarországon a mindennapi gyakorlatban nem használjuk.



A területegységek közti összefüggések:

$$1 \text{ mm}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1 \text{ cm}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1 \text{ dm}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1 \text{ m}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1 \text{ ár} \xrightarrow{\cdot 100} 1 \text{ hektár} \xrightarrow{\cdot 100} 1 \text{ km}^2$$

FELADATOK

- 52 Írd be a hiányzó mérőszámokat!

a) $255,6 \text{ m}^2 = \square \square \square \square \square \square \text{ ha} = \square \square \square \square \square \square \text{ dm}^2 = \square \square \square \square \square \square \text{ cm}^2$

b) $0,225 \text{ ha} = \square \square \square \square \square \square \text{ m}^2 = \square \square \square \square \square \square \text{ dm}^2 = \square \square \square \square \square \square \text{ km}^2$

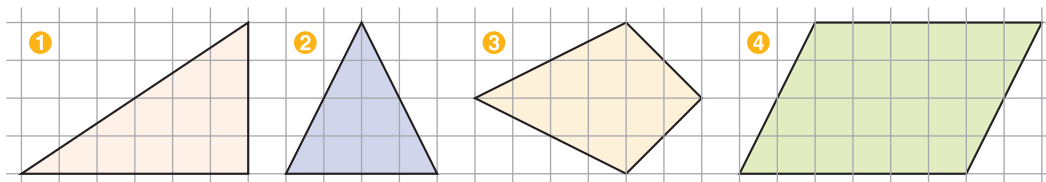
- 53 Határozd meg, majd hasonlítsd össze a sokszögek területét!

A területegység legyen

a) egy rácsnégyzet területe: $\square$

b) négy rácsnégyzet területe: $\square \square \square \square$

Többet ésszel ...



☉ Milyen összefüggés van a mértékegységek és a mérőszámok között?

A NÉGYSZÖGEK TERÜLETE

Tétel

A téglalap területe megegyezik a két szomszédos oldal szorzatával.

$$T = a \cdot b$$

Ezt korábban igazoltuk arra az esetre, amikor az oldalak mérőszáma természetes szám volt.

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges oldalú téglalapra igaz ez a tétel.

Bizonyítás

Ha a négyzet minden oldala 1 hosszúságegység, akkor a négyzet területe 1 területegység.

Az egységnyi oldalhosszúságú négyzetet az egyik oldala mentén nyújtjuk (nyomjuk össze) a -szorosára, akkor belátható, hogy a területe is a -szorosára változik, a létrejött téglalap területe a területegység.

A kapott téglalapot a másik oldala mentén nyújtjuk (nyomjuk össze) b -szeresére, területe is b -szeresére változik, a létrejött téglalap területe $a \cdot b$ területegység:

$$T = a \cdot b$$

A négyzet speciális téglalap. Területe:

$$T = a \cdot a = a^2$$

FELADATOK

54 Számítsd ki a téglalap kerületét és területét, ha oldalainak hossza:

a) $\frac{12}{25}$ m, $\frac{15}{18}$ m; b) $\frac{16}{45}$ m, $\frac{25}{36}$ m; c) $\frac{13}{20}$ m, $\frac{17}{10}$ m; d) $\frac{10}{75}$ m, $\frac{18}{50}$ m!

Add meg a kerületet centiméterrel és deciméterrel, a területet négyzetcentiméterrel és négyzetdeciméterrel is!

55 Számítsd ki a téglalap kerületét, ha a téglalap egyik oldala és területe:

a) $a = \frac{2}{5}$ m, $T = \frac{18}{35}$ m²; b) $a = \frac{3}{4}$ m, $T = \frac{27}{24}$ m²; c) $a = \frac{12}{25}$ m, $T = \frac{1}{5}$ m²!

Figyelempróba

☉ A számolás előtt végezz becslést!

56

Gergő vállalta egy 20 m-szer 40 m-es téglalap alakú terület felását. Ezért a munkáért 4000 Ft jár. A gazda azt szeretné, hogy az egész, 30 m-szer 60 m-es kertet ássa fel, és ezért 8000 Ft-ot kínál Gergőnek. Melyikük járna jól ezzel az ajánlattal, és miért?

A: Gergő járna jól, mert 1,5-szer akkora területért 2-szer akkora bért kapna.

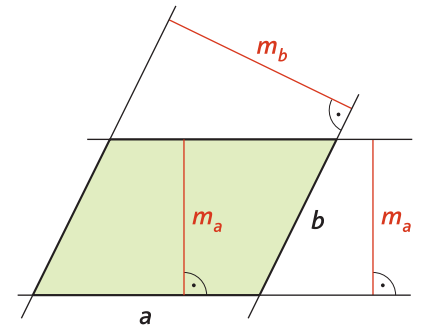
B: A gazda járna jól, mert ekkora terület felásásáért 9000 Ft-ot kellene fizetnie.

C: A gazda járna jól, mert ekkora terület felása 12 000 Ft-ba kerülne.

Emlékeztető

A paralelogramma magasságának nevezzük a párhuzamos oldalegyeseinek a távolságát.

Mivel a paralelogrammának két párhuzamos oldalpárja van, ezért magassága is kettő van. Az a oldalhoz tartozó magasságot m_a , a b oldalhoz tartozó magasságot m_b jelöli.



Tétel

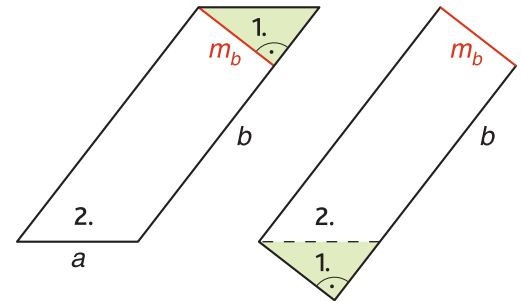
A paralelogramma területe megegyezik egyik oldalának és az oldalhoz tartozó magasságának szorzatával.

$$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$$

Bizonyítás

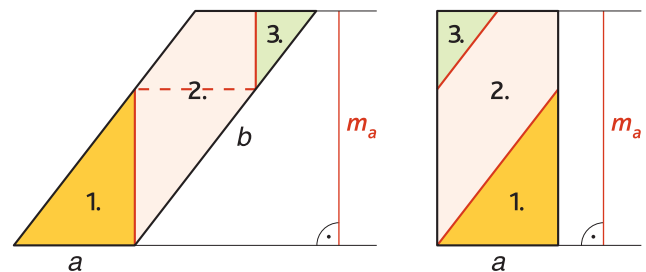
Minden paralelogramma átdarabolható olyan téglalappá, amelyeknek az egyik oldala megegyezik a paralelogramma egyik oldalával, a másik oldala az ehhez az oldalhoz tartozó magasság.

Mivel a paralelogrammának két magassága van, ezért általában kétféle téglalapot kaphatunk.



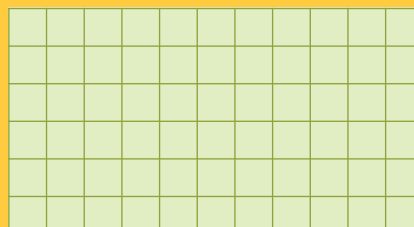
Előfordul, hogy az átdarabolás csak több vágással hajtható végre.

Itt az a és a b , illetve az m_a és az m_b különböző számok, ennek ellenére az $a \cdot m_a$ és a $b \cdot m_b$ szorzatnak meg kell egyeznie, hiszen ugyanannak a síkidomnak a területe. Ha a számítást mindkét módon elvégezzük, akkor ellenőrizhetjük munkánk pontosságát.

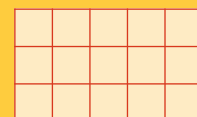


A két téglalapot összesen egy egyenes vágással darabold fel úgy, hogy a darabokból egy négyzetet állíthass össze!

☞ Először ügyesen helyezd el a két téglalapot egymás mellé!



Többet ésszel ...



Emlékeztető

Az olyan négyszöget, amelynek két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú, **deltoidnak** nevezzük.

A deltoidnak van csúcsein átmenő szimmetriatengelye, vagyis van **szimmetriaátlója**.

A tengelyes szimmetriából következik, hogy **a deltoid átlói merőlegesek egymásra, és a szimmetriaátló felezi a másik átlót**.

A deltoid területe megegyezik a két átló szorzatának a felével.

$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$

A deltoid területét például téglalappá történő kiegészítéssel határozhatjuk meg.

Igazold, hogy a konkáv deltoidra is igaz a képlet!

A **rombusz** speciális paralelogramma és speciális deltoid.

A területét kiszámíthatjuk, ha ismerjük az oldalát és a magasságát, illetve ha ismerjük az átlóit.

A **rombusz területe**:

$$T = a \cdot m_a = \frac{e \cdot f}{2}$$

FELADATOK

57

Az ➊ táblázat paralelogrammákra, a ➋ táblázat deltoidokra vonatkozó adatokat tartalmaz. Számítsd ki a hiányzó adatokat!

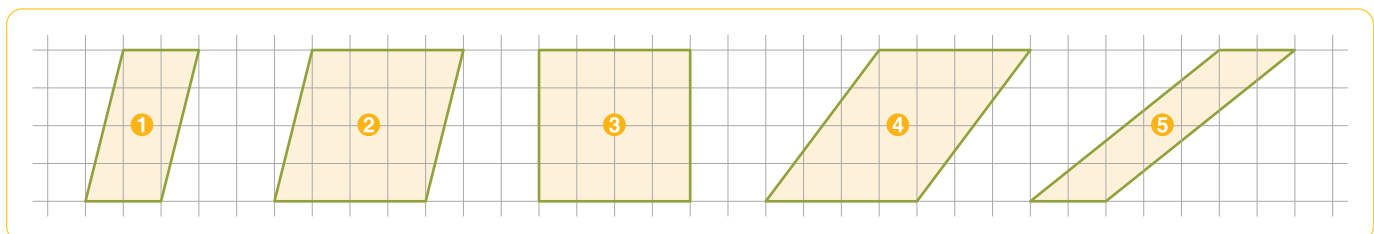
➊	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a (cm)	5	4,5	10	3,8		4,8
m_a (cm)	4	3	6	5,5	12,5	
T (cm ²)					100	36

➋	g)	h)	i)	j)
e (cm)	5	3,2	12,5	
f (cm)	4	10		3,5
T (cm ²)			50	7

☞ **Hogyan darabolhatók át a paralelogrammák téglalappá?**

58

Határozd meg, majd hasonlítsd össze a paralelogrammák területét! A paralelogrammák (egyik) magassága mindig 4 egység:



59 Számítsd ki a rombusz területét, ha

- a) $a = 5,2 \text{ cm}$, $m_a = 3,6 \text{ cm}$; b) $e = 4 \text{ cm}$, $f = 6 \text{ cm}$;
c) $e = 0,5 \text{ dm}$, $f = 0,08 \text{ m}$!

60 Szerkessz egymástól 2 cm távolságra párhuzamos egyenespárt! Szerkessz olyan paralelogrammát, amelynek $2,5 \text{ cm}$ -es oldalai a párhuzamos egyenespáron vannak, másik két oldaluk

- a) 2 cm ; b) $2,5 \text{ cm}$; c) 3 cm ; d) $1,5 \text{ cm}$; e) $3,5 \text{ cm}$!

Melyik nem szerkeszthető meg? Miért?

Számítsd ki, majd hasonlítsd össze az így megszerkesztett paralelogrammák kerületét és területét!

☉ *Mekkora a paralelogrammák (egyik) magassága?*

61 Szerkessz olyan paralelogrammát, amelynek szomszédos oldalai $2,5 \text{ cm}$ és 4 cm , a két oldal által bezárt szög

- a) 90° ; b) 45° ; c) 60° ; d) 75° ; e) 210° ; f) 15° ; g) 105° !

Melyik nem szerkeszthető meg? Miért?

A szükséges adatok megmérése után számítsd ki és hasonlítsd össze a megszerkesztett paralelogrammák kerületét és területét!

☉ *Alkalmazhatók-e a háromszögek szerkesztéséről tanultak?*

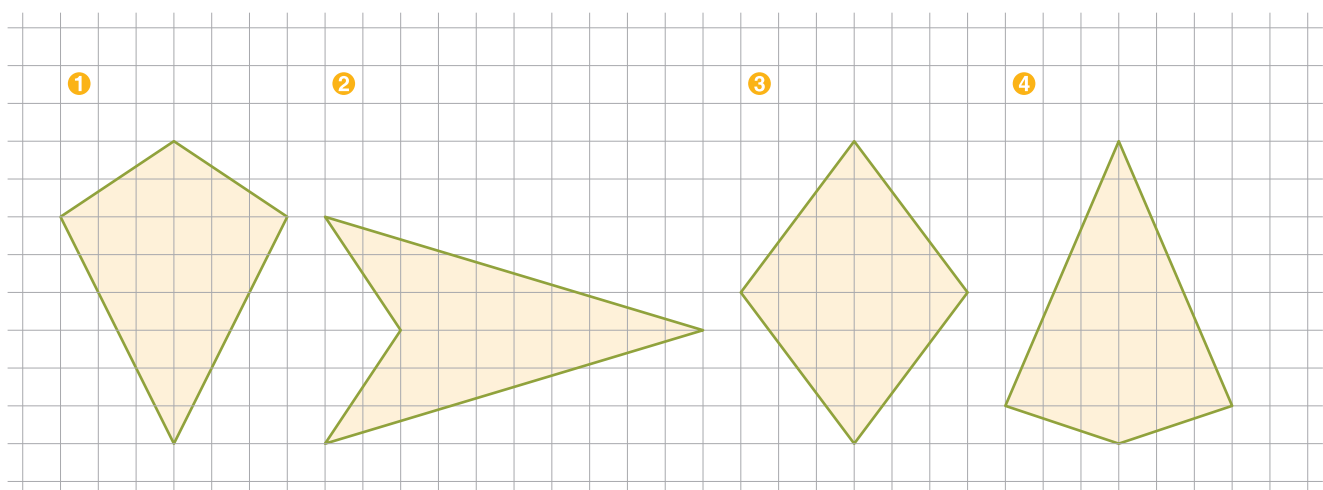
62 Szerkessz rajzlapra két 4 cm oldalhosszúságú rombuszt, amelynek egy szöge 30° !

- a) Az egyik rombuszt darabold át téglalappá úgy, hogy a keletkezett téglalap egyik oldala egyezzen meg a rombusz magasságával! Mekkora lesznek ennek a téglalapnak az oldalai, és mekkora a területe?
b) A másik rombuszt darabold át téglalappá az átlói mentén történő vágással! Mekkora lesznek ennek a téglalapnak az oldalai, és mekkora a területe?
c) Mekkora a megszerkesztett rombusz területe? Kétféle terv alapján számolj!

Kísérletezz!

☉ *Párban dolgozhattok. Tervezzétek meg a munkát!*

63 Határozd meg, majd hasonlítsd össze a deltoidok területét! A deltoidok egyik átlójának a hossza 8 hosszúságegység, a másik átlóé 6 hosszúságegység.



☉ Készíts vázlatot!



64

a) Bálint deltoid alakú sárkányt készít. Egy 1,2 m és egy 0,8 m hosszú nád-szálat köt össze, ez a sárkány váza. Mekkora területű papírral vonja be a sárkányt, ha 10%-ot rászámít a visszahajtásra?

b) Szerkessz három egybevágó háromszöget, amelyek oldalhosszai $a = 2$ cm; $b = 2,5$ cm; $c = 3,5$ cm! Tükrözd egyiket az a oldal, a másikat a b oldal, a harmadikat a c oldal egyenesére!

Az eredeti és a tükrözött háromszög együtt milyen síkidom? Számítsd ki a keletkezett síkidomok kerületét! A szükséges adatok megmérése után számítsd ki a keletkezett síkidomok területét!

c) Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, amelynek az **alapja**: $a = 3$ cm; **szára**: $b = 2,5$ cm hosszú!

Szerkessz ugyanerre az alapra egy másik egyenlő szárú háromszöget, amelynek az **alaphoz tartozó magassága** kétszerese az előző háromszög magasságának! A két háromszög együttesen milyen síkidomot alkot?

Hány megoldása van a feladatnak? A szükséges adatok megmérése után számítsd ki a keletkezett síkidom kerületét és területét!

Tétel

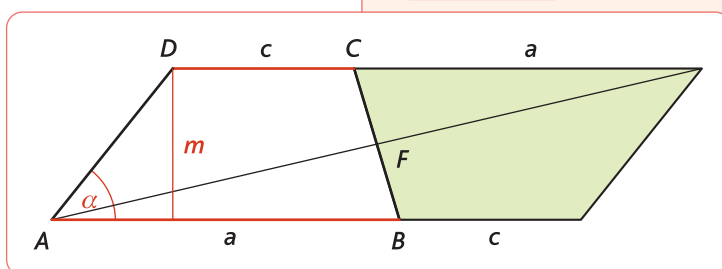
A trapéz területe a két alap számtani közepének, vagyis a **középvonal** hosszának és a magasságnak a szorzata.

$$T = k \cdot m = \frac{a + c}{2} \cdot m$$

A trapéz **középvonala** a szárak felezőpontját összekötő szakasz. Hosszúsága a két alap hosszúsága összegének a fele.

Rajzolható olyan trapéz, amelyet az előző ábrán látható módon nem darabolhatunk át. Ezért a bizonyításhoz más észrevételből kell kiindulnunk.

Bizonyítás



A trapézt egyik szárának felezőpontjára tükrözve paralelogrammát kapunk. A paralelogramma egyik oldala a trapéz két alapjának az összege, az ehhez az oldalhoz tartozó magasság a trapéz magassága. A trapéz területe a kapott paralelogramma területének a fele:

$$T = \frac{(a + c) \cdot m}{2}$$

☉ Igazold, hogy a trapéz területére kapott két képlet azonos!

Többet ésszel ...

☉ Hány megoldást találtál?



Rajzolj négyzetrácsos lapra 9-szer 20 egység oldalhosszúságú téglalapot! Vágd négy darabra úgy, hogy a darabokból két négyzetet rakhass össze!



Rajzolj 6 egység oldalhosszúságú négyzetet! Vágd öt darabra úgy, hogy a darabokból két négyzetet rakhass össze!

FELADATOK

65 Számítsd ki a trapéz területét, ha tudjuk a következő adatokat:

- a) $a = 5 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$, $m = 4 \text{ cm}$;
 b) $a = 4,2 \text{ m}$, $c = 3,6 \text{ m}$, $m = 2,4 \text{ m}$;
 c) $a = 36 \text{ cm}$, $c = 1,8 \text{ dm}$, $m = 0,04 \text{ m}$;
 d) $a = 0,6 \text{ dm}$, $c = 28 \text{ cm}$, $m = 0,12 \text{ m}$;
 e) $a = 24 \text{ mm}$, $c = 0,62 \text{ dm}$, $m = 4,4 \text{ cm}$;
 f) $a = 0,64 \text{ dm}$, $c = 6,6 \text{ cm}$, $m = 34 \text{ mm}$

☉ Átváltottad a mértékegységeket?

66 Az $A(9; 1)$, $B(1; 1)$, $C(3; 5)$ pont egy trapéz három csúcspontja.

Számítsd ki a trapéz területét, ha a trapéz negyedik csúcspontja

- a) $D(7; 5)$, b) $D(9; 5)$, c) $D(11; 5)$, d) $D(15; 5)$!

☉ Honnan látod, hogy tényleg trapézzal van szó?

67 Számítsd ki a trapéz hiányzó adatát!

- a) Alapok: $a = 5 \text{ cm}$, $c = 9 \text{ cm}$, $m = ?$ $T = 42 \text{ cm}^2$
 b) Alapok: $a = 7 \text{ cm}$, $c = ?$ $m = 4 \text{ cm}$, $T = 40 \text{ cm}^2$
 c) Alapok: $a = 6 \text{ cm}$, $c = ?$ $m = 8 \text{ cm}$, $T = 48 \text{ cm}^2$

Gyakorló
5.08–5.25.;
Feladatgyűjtemény
4.1.26.

A HÁROMSZÖG TERÜLETE

Tétel

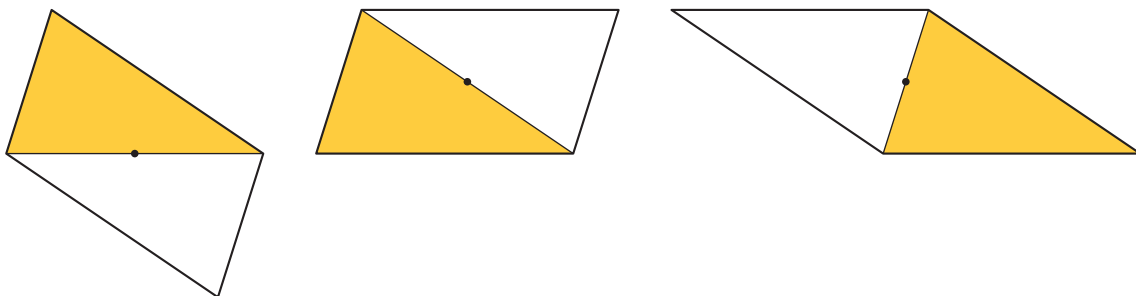
A háromszög területét megkapjuk, ha egyik oldalának és a hozzá tartozó magasságnak a szorzatát osztjuk 2-vel.

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

Bizonyítás

A paralelogrammát egy átlója két egybevágó háromszögre bontja. Ezért a háromszöget az átlója mentén kettévágott paralelogramma egyik darabjának tekinthetjük. Például a sárgára színezett háromszög háromféleképpen egészíthető ki paralelogrammává. Az így kapott paralelogrammák magasságai egyúttal a háromszög magasságai is.

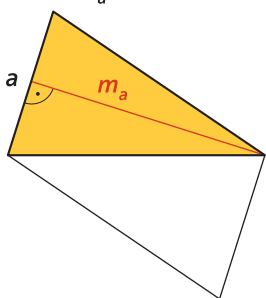
»»



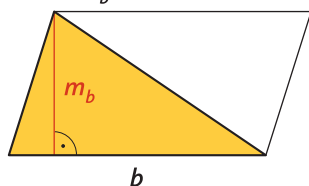


A paralelogrammák területe:

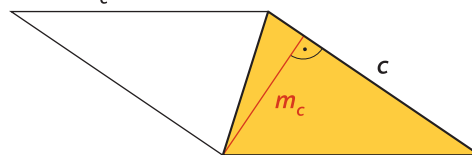
$$T = a \cdot m_a$$



$$T = b \cdot m_b$$



$$T = c \cdot m_c$$



E paralelogrammák mindegyikének kétszer akkora a területe, mint a háromszögé. Ezért a háromszög területét megkapjuk, ha ezeknek a paralelogrammáknak a területét megfelezzük.

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} \quad \text{Ezt kellett bizonyítanunk.}$$

FELADATOK

☉ **Mekkora a háromszögek magassága?**

68 Derékszögű koordináta-rendszerben ábrázold az $A(-2; 2)$, $B(6; 2)$ pontot!

A C pont jelzőszámai: $(x; 5)$. Rajzolj néhány $ABC\triangle$ -et, amelyeket úgy kapsz, hogy az x helyére tetszőleges számot írsz! Színezd pirossal a lehetséges C pontok halmazát! Számítsd ki a megrajzolt háromszögek területét! A területegység egy rácsnégyzet területe.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
a (cm)	9	4,5	9	4,5		15	6,4		12,5
m_a (cm)	4	4	2	2	20			25	
T (cm ²)					100	60	67,2	12,5	50

69 A táblázat háromszögek adatait tartalmazza. Pótold a hiányzó adatokat!

☉ **A c) feladatban adott adatokról melyik fontos összefüggés jut eszedbe?**

☉ **A szükséges adatokat mérd meg!**

Gyakorló
5.26–5.33.

☉ **Indokold válaszod!**

70 Szerkessz olyan háromszöget, amelynek oldalai

- a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm; b) $a = 3,5$ cm, $b = 3,0$ cm, $c = 4,0$ cm;
c) $a = 7,5$ cm, $b = 3,0$ cm, $c = 2,5$ cm!

Számítsd ki háromféleképpen a háromszög területét!

71 Adott különböző háromszögek egyik oldala és a hozzá tartozó magassága. Melyik háromszög területe nem 36 cm²?

A: $a = 8$ cm, $m_a = 9$ cm; **B:** $a = 12$ cm, $m_a = 6$ cm; **C:** $a = 10$ cm, $m_a = 7$ cm

- 72** a) Két háromszög egybevágó. Biztosan egyenlő a területük?
b) Két háromszög területe egyenlő. Biztosan egybevágók?

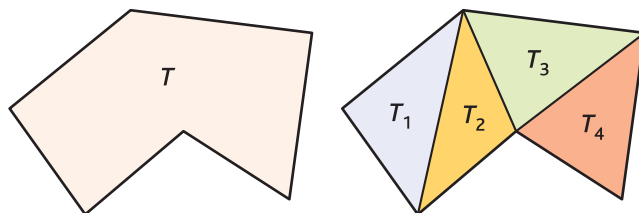
TETSZŐLEGES SOKSZÖG TERÜLETE

Figyeld meg!

Egy n oldalú sokszöget az átlóival $n - 2$ darab háromszögre darabolhatunk. Ekkor a darabok területének az összege megegyezik az eredeti sokszög területével:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \dots$$

A sokszög területének kiszámítását visszavezethetjük háromszögek területének kiszámítására.



1. példa

Ez egy gyümölcsös térképvázlata.

- Mennyi a térképen látható sokszög területe?
- Hány hektár a gyümölcsös területe, ha a térkép méretaránya 1 : 100000?

- Az ötszög három háromszögre bontható.

A szükséges adatokat méréssel határozzuk meg:

$$a_1 = 38 \text{ mm}, m_1 = 24 \text{ mm}$$

$$a_2 = 52 \text{ mm}, m_2 = 18 \text{ mm}$$

$$a_3 = 36 \text{ mm}, m_3 = 28 \text{ mm}$$

A háromszögek területe:

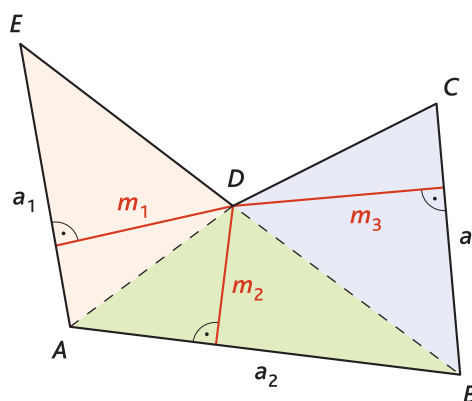
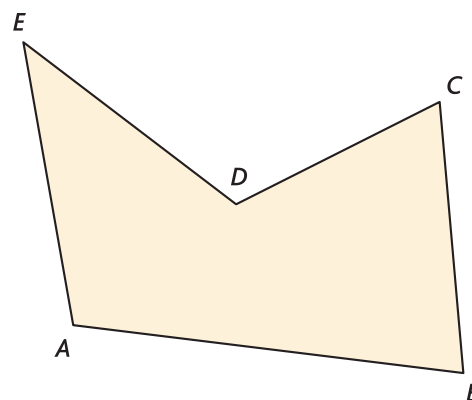
$$T = \frac{38 \cdot 24}{2} \text{ mm}^2 = 456 \text{ mm}^2$$

$$T = \frac{52 \cdot 18}{2} \text{ mm}^2 = 468 \text{ mm}^2$$

$$T = \frac{36 \cdot 28}{2} \text{ mm}^2 = 504 \text{ mm}^2$$

A sokszög területe:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 456 \text{ mm}^2 + 468 \text{ mm}^2 + 504 \text{ mm}^2 = 1428 \text{ mm}^2$$



- A méretarány 1 : 100000, tehát ami a térképen 1 mm, az a valóságban 10 000-szer annyi:

$$10\,000 \text{ mm} = 10 \text{ m}$$

Ami a térképen 1 mm^2 , az a valóságban $(10 \cdot 10 \text{ m}^2) = 100 \text{ m}^2$.

Ami a térképen 1428 mm^2 , az a valóságban $142\,800 \text{ m}^2 = 14,28 \text{ ha}$.

Mivel az adatokat méréssel határoztuk meg, az eredményt csak közelítő értéknek tekinthetjük. A gyümölcsös területe körülbelül 14 ha; $T \approx 14 \text{ ha}$

☉ **Emlékeztető:**

$$1 \text{ ha} = 100 \cdot 100 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ m}^2$$

VEGYES FELADATOK

- B43** a) Rajzolj egy háromszöget! Szerkessz többféleképpen kétszer akkora területű háromszöget! Melyik adatot változtattad meg?
- b) Rajzolj egy háromszöget, a csúcsait jelöld A -val, B -vel, C -vel! Szerkeszd meg a háromszög m_c magasságát! Számítsd ki a területét!
- Az AB oldal felezőpontja legyen F . Mekkora az $AFC\Delta$ területe?
- c) Rajzolj egy ABC háromszöget! Szerkeszd meg az m_c magasságvonalát!
- A **magasságszakasz** felezőpontja legyen F . Számítsd ki az $ABC\Delta$ és az $ABF\Delta$ területét!
- d) Egy háromszög egyik oldala 18 cm, a hozzá tartozó magasság 4 cm. Szerkessz ezzel a háromszöggel egyenlő területű négyzetet!

- B44** Rajzolj tetszőleges, de nem szabályos hatszöget! A szükséges adatok megmérése után számítsd ki a területét!

- B45** Az $A(0; 0)$, $B(0; 12)$, $C(4; 8)$ pont egy háromszög három csúcspontja.
- a) Számítsd ki a háromszög területét!
- b) Kösd össze az AC és a BC oldal felezőpontját! Számítsd ki az így kapott két sokszög területét!
- c) Hogyan aránylik egymáshoz az előbbi két terület?

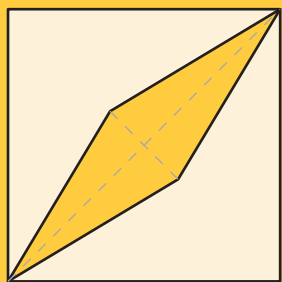
© Rajzold meg a háromszöget!

A hosszúságegység egy rácsbeosztás.

Többet ésszel ...

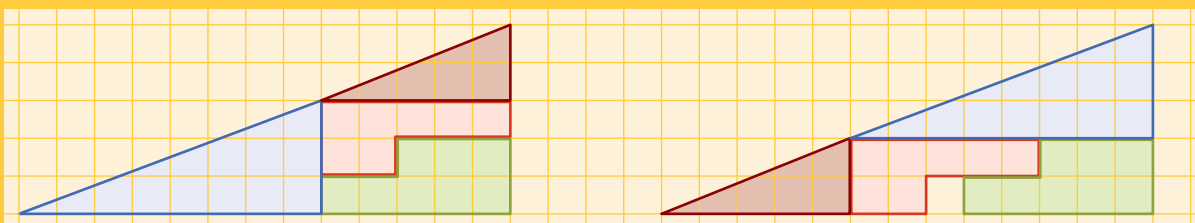
© Ellenőrzésképpen szerkeszd meg a háromszöget!

- B46** a) Egy háromszög kerülete 64 cm. Oldalainak aránya $1 : 2 : 5$. Mekkora a háromszög oldalai?
- b) Egy háromszög egyik oldala 5 cm-rel kisebb a másiknál, és 20%-kal kisebb a harmadiknál. Mekkora a háromszög oldalai, ha a két kisebb oldal összegének a 150%-a ugyanannyi, mint a háromszög kerülete?



- Egy négyzet átlója 6 cm. A négyzetlapból kivágunk egy rombuszt az ábrának megfelelően. Mekkora a rombusz másik átlója, ha a maradék síkidom területe $\frac{3}{4}$ része a négyzet területének?

- Ödömér átdarabolt egy háromszöget, de egy kis négyzet üresen maradt. Vajon miért? Magyarázd meg Ödömérnek!



B47

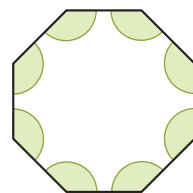
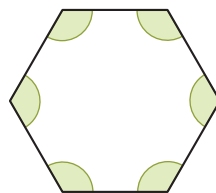
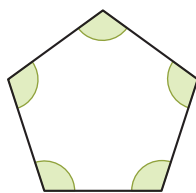
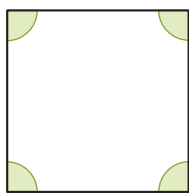
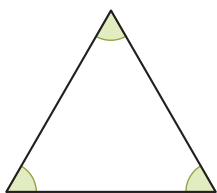
- a) Egy trapéz alakú szántóföld két párhuzamos, egymástól 320 m távolságban lévő út között terül el. A párhuzamos oldalainak a hosszúsága 230 m és 270 m. Mekkora a szántóföld területe? Mennyi kukorica termett rajta, ha egy hektáron 8,4 t kukorica termett?
- b) Egy trapéz alakú kert párhuzamos oldalainak hossza 52 m és 44 m, a párhuzamos oldalak távolsága 15 m. A kert 75%-a gyümölcsös, $\frac{1}{5}$ része veteményes, a fennmaradó részbe virágot ültettek. Mekkora a kert egyes részeinek a területe?
- c) Egy téglalap alakú telek oldalainak hossza 96 m és 60 m.
Egy trapéz alakú telek párhuzamos oldalai közül az egyik 80 m-es, a két párhuzamos oldal távolsága 60 m. Mekkora a trapéz alakú teleknek a 80 m-es oldallal szemközi oldala, ha a két telek egyenlő területű?
- d) Egy trapéz alakú erdő két párhuzamos oldala 3,7 km és 2,4 km hosszú. A párhuzamos oldalak egymástól való távolsága 2,6 km. Az erdőben 156 hektár fenyves, 351 hektár akácos van. A fennmaradó terület tölgyes. Az erdő hány százaléka fenyves, akácos, illetve tölgyes?

Gyakorló
5.34–5.42.;
Feladatgyűjtemény
2.4.06–08., 2.5.17.,
2.8.29., 4.1.28–30.

▶ SZABÁLYOS SOKSZÖGEK

Emlékeztető

A szabályos sokszögnek minden oldala és minden belső szöge egyenlő.



2. példa

Határozzuk meg a szabályos ötszög egy belső szögének nagyságát.

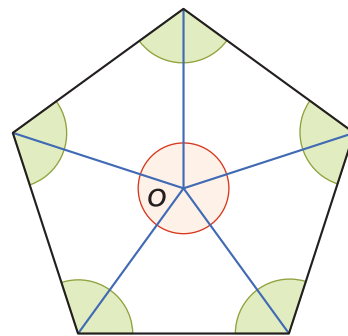
A szabályos ötszög köré írható kör O középpontját a csúcsokkal összekötve öt egybevágó egyenlő szárú háromszöget kapunk. Ugyanis bármelyik háromszög az O pont körül a 72° többszöröseivel elforgatva a többi háromszöggel fedésbe hozható.

Az öt háromszög belső szögeinek összege összesen:

$$5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$$

Az ötszög belső szögeinek összegét megkapjuk, ha a 900° -ból kivonjuk az O csúcsú öt szárszög összegét: $900^\circ - 360^\circ = 540^\circ$

Az ötszög egy belső szögének nagysága: $540^\circ : 5 = 108^\circ$

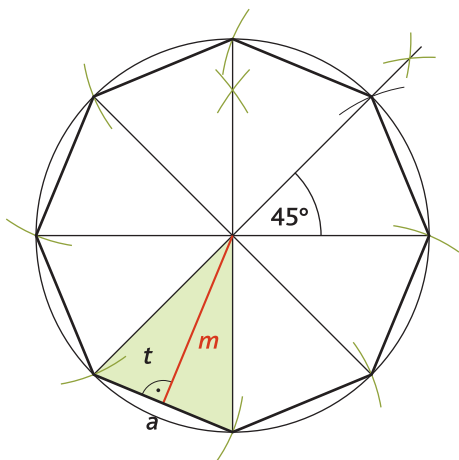


Átdarabolással igazold, hogy a 2 cm sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög területe 12 cm^2 !

Fejtörő!

3. példa

Határozzuk meg a 2,6 cm sugarú körbe szerkesztett szabályos nyolcszög területét.



1. megoldás

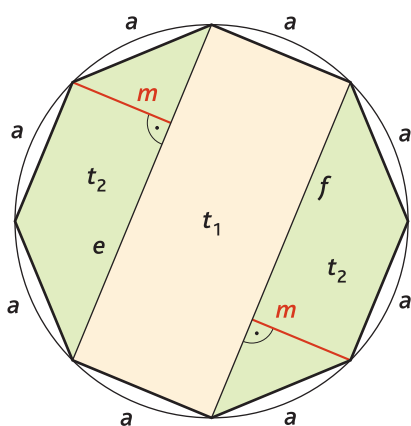
A 2,6 cm sugarú körbe 45°-os középponti szöget szerkesztünk, és a hozzá tartozó ívet nyolcszor felmérjük a körvonalra.

Ily módon nyolc egybevágó középponti háromszögre darabolható a nyolcszög.

Egy ilyen középponti háromszög alapja $a \approx 2,0$ cm hosszú, az alaphoz tartozó magassága $m \approx 2,4$ cm. Területe:

$$t = \frac{a \cdot m}{2} \approx \frac{2,0 \cdot 2,4}{2} \text{ cm}^2 = 2,4 \text{ cm}^2$$

A nyolcszög területe: $T = 8 \cdot t \approx 19,2 \text{ cm}^2$



2. megoldás

A nyolcszög két párhuzamos átlóval egy téglalapra és két trapézra darabolható. A párhuzamos átlók hosszúsága: $e = f \approx 4,8$ cm

A trapézok magassága: $m \approx 1,4$ cm

A téglalap területe:

$$t_1 = a \cdot f \approx 2,0 \cdot 4,8 \text{ cm}^2 = 9,6 \text{ cm}^2$$

A trapéz területe:

$$t_2 = \frac{e + a}{2} \cdot m \approx \frac{4,8 + 2,0}{2} \cdot 1,4 \text{ cm}^2$$

$$t_2 \approx 4,8 \text{ cm}^2$$

A nyolcszög területe: $T = t_1 + 2 \cdot t_2 \approx 19,2 \text{ cm}^2$

FELADATOK

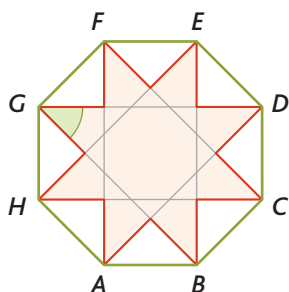
Gyakorló
7.25–7.32.

B48 Szerkessz 2 cm oldalú szabályos hatszöget!

a) A szükséges adatok megmérése után számítsd ki a területét!

b) Mekkora a szabályos hatszög egy belső szöge?

B49 Határozd meg a szabályos tizenötszög egy belső szögének nagyságát!



A szabályos nyolcszögben meghúztuk azokat az átlókat, amelyek minden harmadik csúcsot kötnék össze. Az átlók egy nyolcágú csillagot határolnak körül. Hány fokok a G csúcsnál lévő szög? Indokold a választod!

> A KÖR

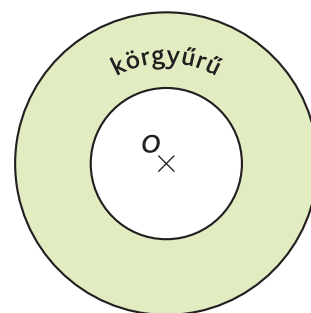
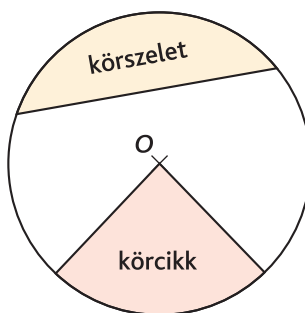
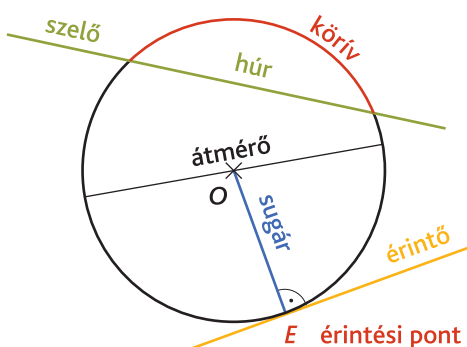
Értelmezés

Egy síkban egy adott ponttól megadott (0-tól különböző) távolságra lévő pontok halmazát **körvonalnak** (körnek), az adott pontot a kör középpontjának nevezzük.

Egy síkban egy adott ponttól a megadottnál nem nagyobb távolságra lévő pontok halmazát **körlapnak** nevezzük.

Ha nem érthető félre, akkor a körlapot is szokták körnek nevezni.

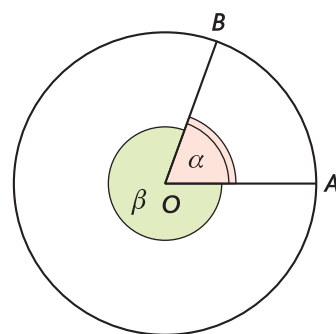
☉ *Korábban a körvonalat, illetve a körlapot adott tulajdonságú pontok halmazaként értelmeztük.*



Értelmezés

A kör két sugara által alkotott szöveget **középponti szögeknek** nevezzük.

Az ábrán α és β középponti szögek.



Tétel

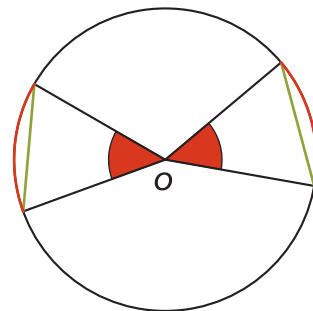
Ugyanabban a körben vagy egyenlő sugarú körökben egyenlő középponti szögekhez egyenlő körívek és egyenlő húrok tartoznak.

Igaz az előző összefüggésnek a megfordítása is:

Ugyanabban a körben (vagy egyenlő sugarú körökben) egyenlő körívekhez, illetve egyenlő húrokhoz egyenlő középponti szögek tartoznak.

A körív hossza egyenesen arányos a hozzá tartozó középponti szög nagyságával.

Az általános iskolában a fenti tételeket a szemlélet alapján elfogadjuk, nem bizonyítjuk.



A KÖR KERÜLETE

1. példa

Becsüljük meg az 1 dm sugarú félkörív hosszát.

A félkörívbe húrokból töröttvonalat húzunk, és a **körív hosszát a töröttvonal hosszával közelítjük**.

- 1 A félkörívet három ívre osztjuk úgy, hogy a sugarat húrként háromszor rámérjük. Így kapjuk az 1. (narancssárga) töröttvonalat, az ívhosszat ennek hosszával közelítjük:
 $\text{ív hossz} \approx 1. \text{ töröttvonal hossza} = 3 \text{ dm}$
- 2 Az előző lépésben kapott íveken osztópontokat veszünk föl (például megfelezzük az íveket). Ezeket összekötve kapjuk a 2. (zöld) töröttvonalat.
 $\text{ív hossz} \approx 2. \text{ töröttvonal hossza} \approx 3,1 \text{ dm}$
- 3 Az előző lépéshez hasonlóan a kapott íveken újra osztópontokat veszünk föl, és megrajzoljuk a 3. (piros) töröttvonalat. Ennek a hosszúsága jobban megközelíti a félkörív hosszát, mint az 1. vagy a 2. töröttvonalé.

Az eljárást (gondolatban) a végtelenségig folytathatjuk: az íveken minden lépésben új osztópontokat veszünk föl, és húrokkal összekötjük azokat. Úgy vesszük föl az osztópontokat, hogy a húrok egyre rövidebbek legyenek (például megfelezzük az íveket).

A keletkezett töröttvonalak hosszával egyre pontosabban határozhatjuk meg a félkörív hosszát.

$\text{ív hossz} \approx 3. \text{ töröttvonal hossza} \approx 3,13 \text{ dm};$

$\text{ív hossz} \approx 4. \text{ töröttvonal hossza} \approx 3,14 \text{ dm};$

$\text{ív hossz} \approx 5. \text{ töröttvonal hossza} \approx 3,141 \text{ dm};$

$\text{ív hossz} \approx 6. \text{ töröttvonal hossza} \approx 3,1415 \text{ dm};$

$\text{ív hossz} \approx 7. \text{ töröttvonal hossza} \approx 3,1416 \text{ dm};$

$\vdots$

Legtöbbször elegendő a következő közelítő értékkel számolnunk:

Az 1 dm sugarú félkörív hossza $\approx 3,14 \text{ dm}$.

Hogyan határozhatjuk meg tetszőleges sugarú félkörív hosszát? Például ha egy vetítővel 2-szeresére, 3-szorosára nagyítjuk vagy 0,5-szeresére kicsinyítjük a félkört, akkor hosszúsága is ugyanannyiszorosára változik:

A 2 dm sugarú félkörív hossza $\approx 2 \cdot 3,14 \text{ dm};$

a 3 dm sugarú félkörív hossza $\approx 3 \cdot 3,14 \text{ dm};$

a 0,5 dm sugarú félkörív hossza $\approx 0,5 \cdot 3,14 \text{ dm};$

$\vdots$

az r sugarú félkörív hossza $\approx r \cdot 3,14$.

»»

»»

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a félkörív és a sugár hosszának aránya megközelítően 3,14.

A pontos arányt a görög **periféria** („perifereia” = kerület) szó kezdőbetűjéről π -vel (**pi**, olvasd: pí) jelöljük.

A matematikusok bebizonyították, hogy a π nem írható föl két egész szám hányadosaként, tehát a π nem racionális szám (hanem irracionális szám). Ezért a π olyan végtelen tizedestört, amelyben nincsenek újra és újra ismétlődő szakaszok.

A π az első tíz tizedesjegyre:

$$\pi \approx 3,141\,592\,653\,5$$

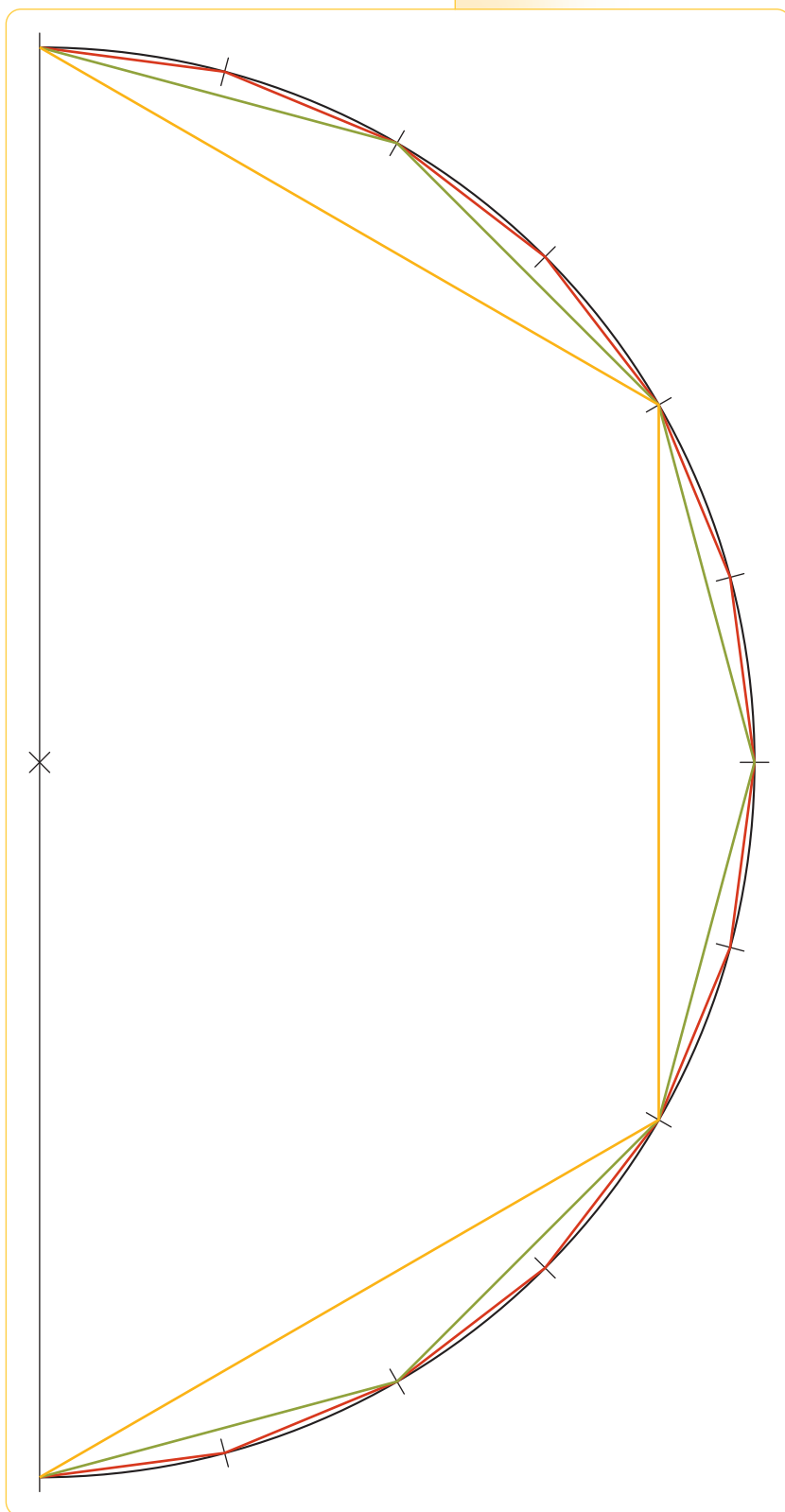
A π minél pontosabb meghatározásával sokat foglalkoztak a matematikusok. Az egyiptomiak 4000 évvel ezelőtt a $\pi \approx 3,16$ közelítő értékkel dolgoztak.

2300 évvel ezelőtt Arkhimédész szabályos sokszögekkel közelítve már három tizedesjegy pontossággal határozta meg a π -t.

Az V. században Cu Csung-cse kínai matematikus 24 576 oldalú szabályos sokszöggel közelítette meg a kör kerületét, és 7 tizedesjegy pontossággal határozta meg a π -t.

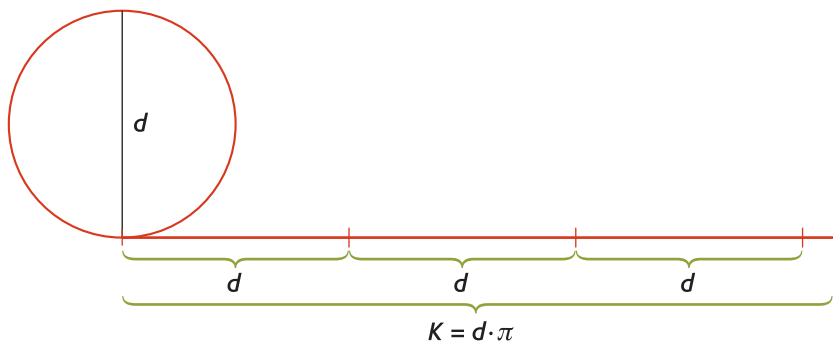
Az 1500-as évek végén Ludolph van Ceulen holland matematikus már 35 tizedesjegy pontossáig jutott el. Róla nevezték el a π -t Ludolph-féle számnak.

Számítógép alkalmazásával tetszőleges pontossággal, több tízezer tizedesjegyre is meghatározhatjuk a π -t.



A kör kerülete a teljes körvonal hossza, a félkörív hosszának a kétszerese.

Jegyezd meg!



A kör kerülete a sugár hosszával kifejezve:

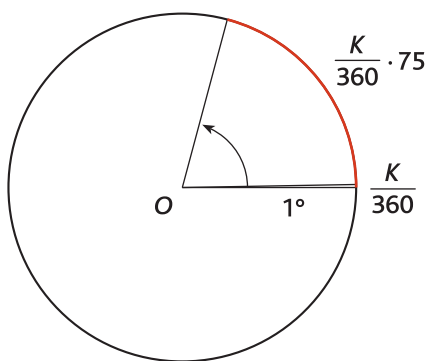
$$K = 2 \cdot r \cdot \pi \approx 2 \cdot r \cdot 3,14$$

A kör kerülete az átmérő hosszával kifejezve:

$$K = d \cdot \pi \approx d \cdot 3,14$$

2. példa

Határozzuk meg a 75° -os középponti szöghöz tartozó körív hosszát, ha a kör sugara: $r = 4$ cm.



A teljes szöghöz tartozó körív a kör kerülete:

$$K = 2 \cdot r \cdot \pi \approx 2 \cdot 4 \cdot 3,14 \text{ cm} \approx 25,1 \text{ cm}$$

$$360^\circ\text{-hoz tartozó körív: } K \approx 25,1 \text{ cm}$$

$$1^\circ\text{-hoz tartozó körív: } \frac{K}{360}$$

$$75^\circ\text{-hoz tartozó körív: } i = \frac{K}{360} \cdot 75$$

$$i \approx \frac{25,1}{360} \cdot 75 = 5,2 \text{ cm}$$

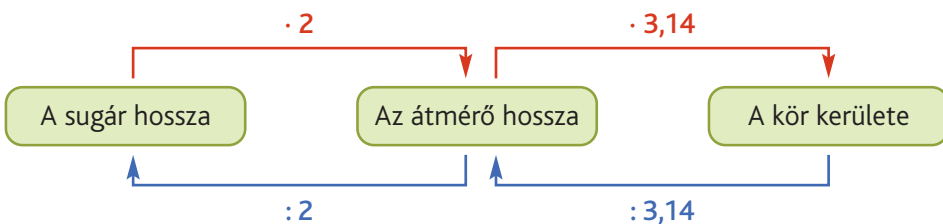
A 75° -os szöghöz tartozó körív: $i \approx 5,2$ cm

FELADATOK

73 Számítsd ki a kör kerületét, ha

- a) $r = 4$ dm; b) $r = 4$ cm; c) $r = 4$ mm; d) $r = 4$ m;
e) $r = 4,3$ dm; f) $r = 4,30$ dm; g) $r = 5,6$ m; h) $r = 22,35$ m!

74 Egy kör kerülete 201 mm. Mekkora a kör átmérője, illetve sugara?



75 Írd be a táblázatba a körök hiányzó adatait!

Sugár (cm)	4,2		5,0				
Átmérő (cm)		8,4					100
Kerület (cm)				12,56	7,54	14,45	

76

- a) 2,5 cm átmérőjű, henger alakú vasmagra rézhuzalt tekercselnek föl egy rétegben. Milyen hosszú huzalból készíthetnek 100 menetes tekercset?
- b) 1,4 cm átmérőjű, henger alakú vasmagra 220 cm hosszú rézhuzalt tekercselnek föl egy rétegben. Hány menetes lesz a tekercs?
- c) Egy kerék 440 m hosszú úton pontosan 200-at fordul. Mekkora a kerék átmérője?

Figyelempróba

77

- Egy falióra nagymutatója 12 cm hosszú. Mekkora utat tesz meg a mutató végpontja
- a) 1 óra; b) $\frac{1}{4}$ óra; c) $\frac{3}{4}$ óra; d) $\frac{7}{4}$ óra alatt;
- e) 1 perc; f) 1 nap; g) 1 hét; h) 1 naptári év alatt?

78

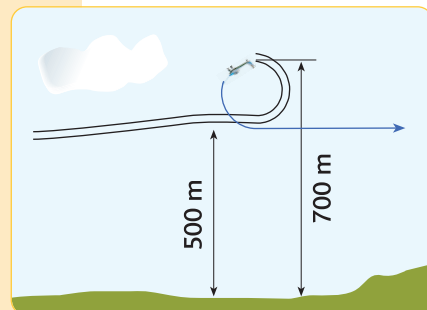
- Határozd meg az r sugarú körív hosszát, ha a körívhez tartozó középponti szög α , és
- a) $r = 10$ mm, $\alpha = 45^\circ$; b) $r = 15$ cm, $\alpha = 135^\circ$; c) $r = 1,3$ dm, $\alpha = 54^\circ$!

79

- Egy sportrepülőgép függőleges síkban körpályán repül. A körpálya legmagasabb pontja a földfelszíntől számítva 700 m magasan, míg a legalsó pontja 500 m magasan van.
- Mekkora utat tesz meg a repülőgép, mialatt egyszer végigrepül a körpályán?

☉ **Karikázd be a helyes válasz betűjelét!**

- A:** $2 \cdot 700 \cdot \pi \approx 4400$ m-t; **B:** $2 \cdot 500 \cdot \pi \approx 3140$ m-t;
- C:** $2 \cdot 200 \cdot \pi \approx 1256$ m-t; **D:** $2 \cdot 100 \cdot \pi \approx 628$ m-t



- a) MÉRJÜK meg egy hengeres edény átmérőjét, majd egy fonal segítségével a kerületét. Vizsgáljuk meg, milyen pontossággal tudjuk meghatározni a π értékét!
- b) Nézzünk utána a világhálón, hány tizedesjegyet határozták meg a π -nek.
2010 nyarán már 5000 milliárd tizedesjegynél tartottak.
- c) MÉRJÜK meg egy kerékpár (roller, gépkocsi stb.) kerekének az átmérőjét. Hányat fordul 1 km távon ez a kerék?
- d) Nézzünk utána a világhálón, hogy a szélörművek egy-egy lapátja milyen hosszú lehet. Számítsuk ki, mekkora a lapát végpontjának sebessége, ha élénk szélben a szélkerék 3 másodperc alatt tesz meg egy teljes fordulatot!

Gyűjtőmunka

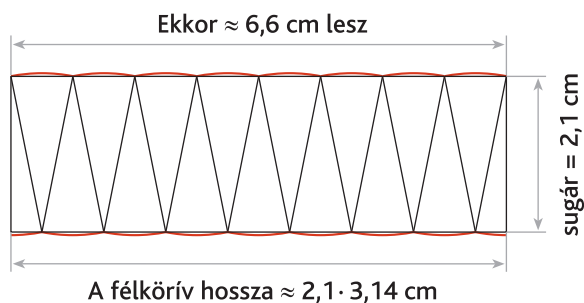
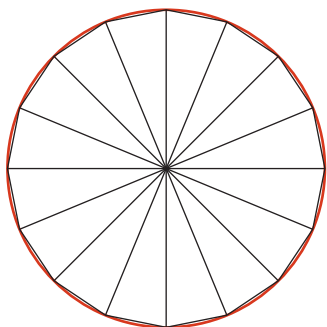
☉ **Mérjetelek, számoljatek!**

A KÖR TERÜLETE

3. példa

Becsüljük meg a 2,1 cm sugarú kör területét.

A 2,1 cm sugarú körbe írható szabályos tizenhatszög területével közelítjük a kör területét. Daraboljuk át az ábra szerint téglalappá:



A téglalap egyik oldalának hossza megközelítően a félkör hosszával, a másik oldalának hossza megközelítően a kör sugarával egyezik meg.

A kör területe megközelítően:

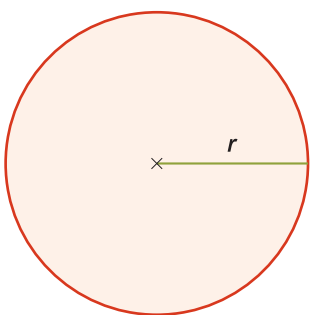
$$T \approx 2,1 \cdot (2,1 \cdot 3,14) \text{ cm}^2 = 2,1^2 \cdot 3,14 \text{ cm}^2 \approx 13,85 \text{ cm}^2$$

A példában felismert összefüggés magasabb matematikai módszerekkel általánosan is bizonyítható.

Jegyezd meg!

A kör területe: $T = r^2 \cdot \pi \approx r^2 \cdot 3,14$

Vagyis a kör területe megközelítően 3,14-szorosa egy olyan négyzet területének, amelynek az oldala egyenlő a kör sugarával.



≈



4. példa

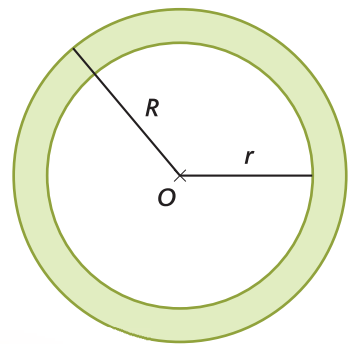
Határozzuk meg a körgyűrű területét, ha a határoló két kör sugara:
 $r = 4$ cm, $R = 5$ cm

A körgyűrű területét a két kör területének a különbségeként kapjuk:

$$T_{\text{körgyűrű}} = T_1 - T_2 = R^2\pi - r^2\pi$$

$$T_{\text{körgyűrű}} = 5^2\pi - 4^2\pi = (25 - 16) \cdot \pi = 9\pi \approx 28,3$$

A körgyűrű területe: $T_{\text{körgyűrű}} \approx 28,3 \text{ cm}^2$



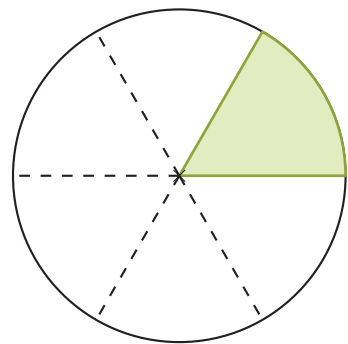
5. példa

Számítsuk ki az 5 cm sugarú körcikk területét, ha a körcikkhez tartozó középponti szög 60° .

A kör területe: $T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi \approx 5^2 \cdot 3,14 \text{ cm}^2 = 78,5 \text{ cm}^2$

A 60° -os középponti szöghöz tartozó körcikk a kör $\frac{1}{6}$ része:

$$T_{\text{körcikk}} = r^2 \cdot \pi : 6 \approx (78,5 \text{ cm}^2) : 6 \approx 13,1 \text{ cm}^2$$



FELADATOK

80

a) Rajzolj 3 cm sugarú kört! Jelöld középpontját C -vel! Rajzold meg egy sugarát (r), egy átmérőjét (d), egy szelőjét (s), egy húrját (h), egy érintőjét (e)! Ezek közül melyek egyenesek? Hogyan nevezzük a leghosszabb húrt?

b) Végezd fel egy adott kör kerületén egy E pontot!

Szerkessz egyenest, amely az E pontban érinti a kört!

c) Hány szimmetriatengelye és hány szimmetria-középpontja van egy körnek?

d) Rajzolj egy 3,5 cm sugarú, C középpontú kört! Szerkessz szelőt, amely a C ponttól 2,1 cm távolságra halad! Mérd meg, hogy a szelő mekkora húrt metsz ki a körből!

☉ *Ismételjük át az elnevezéseket! Lásd a 233. oldalon az ábrát.*

81

Hány négyzetdeciméter a kör területe, ha sugara

a) $r = 1,6$ dm; b) $r = 3,3$ dm; c) $r = 1,5$ dm; d) $r = 0,25$ dm;

e) $r = 10$ cm; f) $r = 15$ cm; g) $r = 1$ m; h) $r = 0,12$ m?

82

a) Egy kör sugara 8 cm. Mennyi a területe?

b) Mennyi a kétszer akkora sugarú kör területe?

c) Mennyi a feleakkora sugarú kör területe?

*Gyakorló
 5.43–5.48.;
 Feladatgyűjtemény
 4.1.47–48.*

Figyelempróba



83

Egy kis, 20 cm átmérőjű serpenyőben készített palacsintához 4 kanál maszsát használ fel Anna. Hány kanállal kell ugyanebből a masszából beletennie egy 28 cm átmérőjű serpenyőbe, ha ugyanolyan vastag palacsintát szeretne sütni?

- A: Körülbelül 6 kanállal, mert közel 1,5-szeresére nőtt a serpenyő sugara.
 B: Körülbelül 8 kanállal, mert közel 2-szeresére nőtt a serpenyő alapterülete.
 C: Körülbelül 8 kanállal, mert 4 cm-rel nőtt a serpenyő sugara.

84

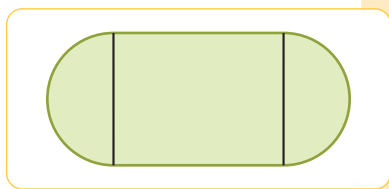
Egy parkba kör alakú pázsitot terveznek, amelynek átmérője 10 m.

- a) Hány kilogramm fűmagot vegyenek, ha négyzetméterenként körülbelül 5 dkg magot számítanak?
 b) A pázsit szélére keskeny szegélyt terveznek. Milyen hosszú ez a szegély?

85

Egy sportpálya téglalap alakú, a két végén egy-egy félkör alakú rész van. A téglalap alakú pálya 90 m hosszú és 70 m széles. Az egész területet futópálya határolja.

- a) Hány méter hosszú a futópálya?
 b) A futópálya által határolt területet füvesítik. Hány négyzetméter területet kell fűmaggal bevetniük?



86

Határozd meg a körgyűrű területét, ha adott a két határoló körvonal sugara:

- a) $r_k = 8$ cm, $r_b = 2$ cm; b) $r_k = 4,5$ cm, $r_b = 2,5$ cm!

87

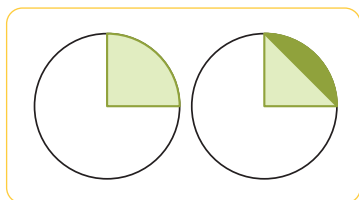
Határozd meg a körgyűrű területét, ha adott az egyik határoló körvonal sugara és a körgyűrű d „szélessége”:

- a) $r_k = 12$ cm, $d = 2$ cm; b) $r_b = 5$ cm, $d = 1,5$ cm!

88

Határozd meg az r sugarú körcikk területét, ha a hozzá tartozó középponti szög α , és

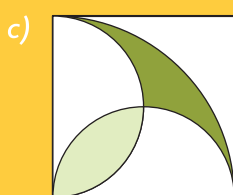
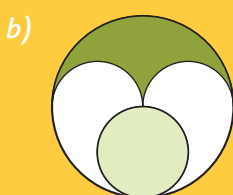
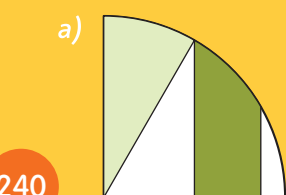
- a) $r = 10$ mm, $\alpha = 45^\circ$; b) $r = 15$ cm, $\alpha = 135^\circ$!



89

a) 3 cm sugarú körből kivágtunk egy 90° -os középponti szöghöz tartozó körcikket. Mennyi ennek a területe?

- b) Mennyi a sötétebbre színezett körszelet területe?



Melyik ábrán egyezik meg a világosabbra és a sötétebbre színezett rész területe?

SOKSZÖGLAPOKKAL HATÁROLT TESTEK

A geometriában eddig pontokkal, egyenesekkel és más vonalakkal, síkokkal, síkdarabokkal, felületekkel, testekkel ismerkedtünk meg. Mindezek az alakzatok a térben helyezkednek el. Például a kör, a szögtartomány, a téglalap is a térben helyezkedik el, mégis **síkbeli alakzatnak** nevezzük őket, mivel minden pontjuk egy síkra illeszkedik. A kocka, a téglatest, a gömb és bármilyen más **test** nem síkbeli alakzat. A **térgeometria** ilyen, nem síkbeli alakzatokkal foglalkozik.



A budapesti CET-épület

FELADATOK

90

Hány **lapja**, hány **éle** és hány **csúcsa** van egy **téglatestnek**?

Sorold fel a téglatest tulajdonságait!

Hogyan számítjuk ki a téglatest **felszínét**, és **térfogatát**?

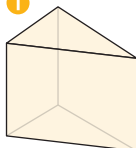
☉ Idézzük fel korábbi térgeometriai ismereteinket.

91

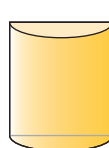
Az ábrán lévő testek közül melyekre igazak a felsorolt állítások?

- A: Csak síklapok határolják.
- B: Minden lapja sokszög.
- C: Van párhuzamos lappárja.
- D: Van párhuzamos él párja.
- E: Két egybevágó sokszög és annyi paralelogramma határolja, ahány oldalú a két sokszög.
- F: Egy vágással két egybevágó testre bontható.
- G: Van olyan sík, amelyre szimmetrikus.

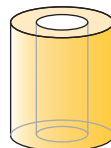
1



2



3



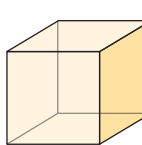
4



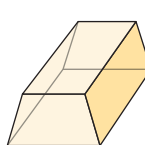
5



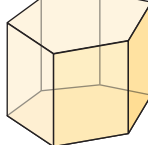
6



7



8



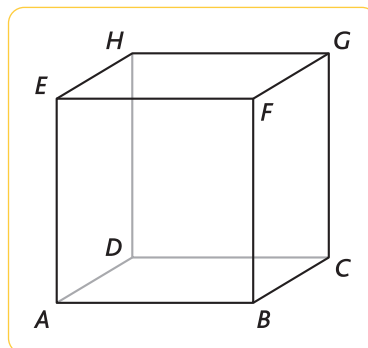
92

Sorold föl a kockának azokat az

- 1 éleit; 2 lapjait, amelyek
 - a) merőlegesek az AB élre;
 - b) párhuzamosak az AB éllel;
 - c) nincsenek egy síkban az AB éllel;
 - d) merőlegesek az $ABCD$ lappal;
 - e) párhuzamosak az $ABCD$ lappal!

Mely élek kitérők?

Mikor párhuzamos egy egyenes és egy sík?



Kísérletezz!

☉ Keresd meg a világhálón az oktaéder rajzát!

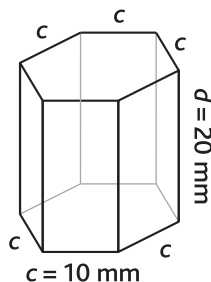
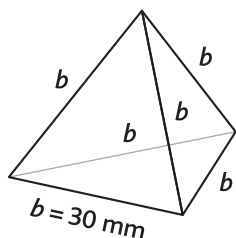
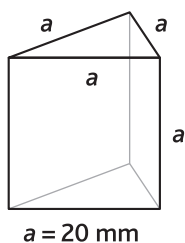
Gyakorló
5.01., 5.08–5.09.

93

Minden feladatban rajzold le a testek hálóját, jellemezd a fölépített testeket! A mérések elvégzése után határozd meg a felszínüket! Építs testeket

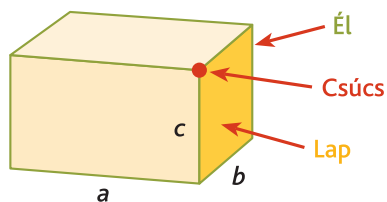
- hat darab 3 cm hosszú oldalú négyzetből (hexaéder);
- négy darab 3 cm-es oldalú szabályos háromszögből (tetraéder);
- nyolc darab 3 cm-es oldalú szabályos háromszögből (oktaéder);
- két darab 3 cm-es oldalú négyzetből és négy darab 3 cm × 6 cm méretű téglalapból;
- két darab 3 cm-es oldalú szabályos háromszögből és három db 3 cm × 6 cm méretű téglalapból;
- hat darab 3 cm-es oldalú egybevágó rombuszból;
- egy darab 3 cm hosszú oldalú négyzetből, egy darab 3 cm × 6 cm méretű téglalapból és egy darab 3 cm-es alapú egyenlő szárú háromszögből;
- négy darab 3 cm-es alapú egyenlő szárú (nem szabályos) háromszögből!

94



Szerkeszd meg az ábrán látható testek hálóját, majd készítsd el a testeket!
Határozd meg a felszínüket!

Emlékeztető



Az előző feladatokban olyan testekkel foglalkoztunk, amelyeket **sokszöglapok határolnak**. Ilyen test a kocka és a téglatest is.

A sokszöglapokkal határolt testek lapjait **élek**, éleit **csúcsok** határolják.

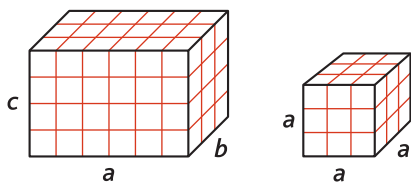
A sokszöglapokkal határolt test **felszínét úgy számítjuk ki, hogy a határoló lapjai területét összegezzük**. A felszín jele: **A** (area = terület)

Például az a , b , c élű **téglatest felszíne**:

$$A = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c$$

Az a élű **kocka felszíne**: $A = 6 \cdot a^2$

A nem szomszédos csúcsokat összekötő szakaszok az átlók. Ha az átló egyazon lap két csúcsát köti össze, akkor **lapátlóról**, ellenkező esetben **testátlóról** beszélünk.



Építsetek különböző testeket! Lásd például a képet.

Ábrázoljátok a **felül**-, az **elöl**- és az **oldalnézeteiket**!

Határozzátok meg a lapjaik, az éleik és a csúcsaik számát! **Hogyan értelmeztük az „él” és a „csúcs” fogalmát?**

Számítsátok ki a felszínüket!

> A HASÁB

> A HASÁB SZÁRMAZTATÁSA, HÁLÓJA, FELSZÍNE

A sokszöglapokkal határolt testek építése során megismerkedhettünk a **hasábbal**.



Értelmezés

A **hasáb** olyan test, amelynek két lapja egymással egybevágó és párhuzamos sokszög, ezek a hasáb **alaplappjai**, a többi lapja pedig paralelogramma, ezek a hasáb **oldallapjai**.

A hasábnak annyi oldallapja van, ahány oldalú sokszög az alaplappja.

Az oldallapokból álló felület a hasáb **palástja**.

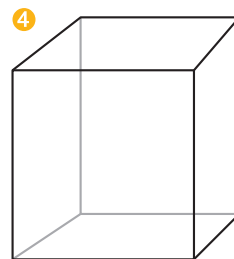
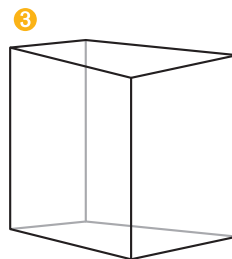
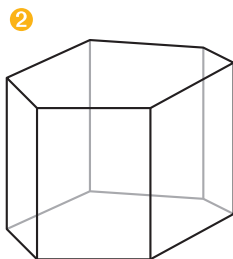
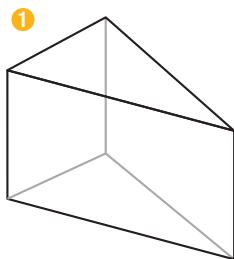
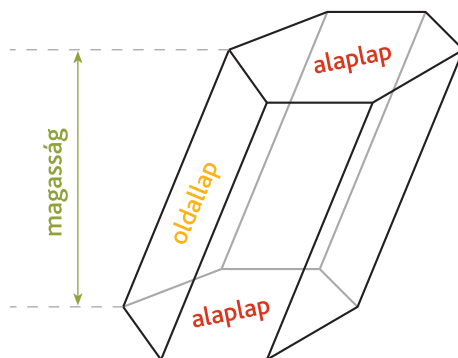
Az alaplappokat határoló élek a hasáb **alapélei**, a hasáb többi élét **oldalélnek** nevezzük.

A hasáb oldalélei egyenlő hosszúak.

Az alaplappok síkjának távolsága a hasáb **magassága**.

Ha az oldalélek merőlegesek az alaplapp síkjára, akkor **egyenes hasábot kapunk**. Az egyenes hasáb magassága megegyezik az oldalélek hosszával.

Az egyenes hasáb két alaplappja egymással egybevágó és párhuzamos sokszög, az oldallapjai téglalapok.



A téglatest és a kocka is egyenes hasáb.



Egy felül nyitott, téglatest alakú kartondoboz alapéleinek hossza 4 cm és 3 cm, az oldaléle 5 cm-es. Beleteszünk a dobozba egy 7 cm hosszú egyenes acéltűt (esetleg szívószáldarabot). A tű legkevesebb hány centiméteres szakasza lóg ki a dobozból?



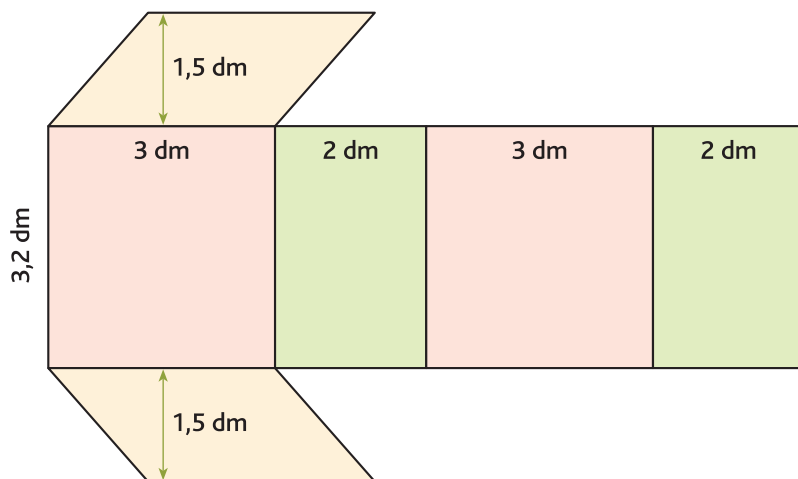
Egy kocka élleinek hossza 5 cm. Szerkeszd meg a kocka egy testátlóját, mérd meg a testátló hosszát!

Többet ésszel ...

© Kísérletezz!
Készíts vázlatot!
Szerkessz!
Mérj!

1. példa

Határozzuk meg a 3,2 dm magas, paralelogramma alapú egyenes hasáb felszínét. A hasáb alaplapja olyan paralelogramma, amelynek az oldalai: 3 dm és 2 dm hosszúak, a hosszabbik oldalhoz tartozó magassága 1,5 dm.



Vázoljuk fel a hasáb **hálóját**.

A **testháló** megrajzolásakor ügyelünk az oldallapok sorrendjére és az alaplapok megfelelő helyzetére.

Az alaplap paralelogramma, ennek a területe:

$$T_{\text{alap}} = a \cdot m_a = 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ (dm}^2\text{)}$$

Az oldallapok téglalapok.

Egyik oldaluk megegyezik az oldaléllel (3,2 dm), a másik oldaluk az egyik alapéllel (2 dm vagy 3 dm).

A hasáb **palástját** kiterítve olyan **téglalapot** kapunk, amelynek egyik oldala az alaplap kerülete, a másik oldala a **hasáb magassága** (3,2 dm).

$$T_{\text{palást}} = (3 + 2 + 3 + 2) \cdot 3,2 = 10 \cdot 3,2 = 32 \text{ (dm}^2\text{)}$$

A hasáb felszíne:

$$A = 2 \cdot T_{\text{alap}} + T_{\text{palást}} = 2 \cdot 4,5 \text{ dm}^2 + 32 \text{ dm}^2 = 41 \text{ dm}^2$$

Értelmezés

A hasáb felszíne a határoló lapok területének összege, vagyis az alaplapok és a palást területének összege:

$$A = 2 \cdot T_{\text{alap}} + T_{\text{palást}}$$

FELADATOK

© Odafigyeltél a mértékegységekre?

95 Vázold fel a téglatest hálóját, majd határozd meg a felszínét, ha élei:

- a) 3,4 cm, 50 mm, 1,25 dm; b) 0,4 dm, 15 mm, 12 cm;
c) $\frac{4}{3}$ m, $\frac{3}{2}$ m, $\frac{5}{6}$ m; d) $1\frac{1}{5}$ m, $\frac{1}{2}$ m, 0,8 m!

96 Nevezd meg olyan egyenes hasábot, amelynek

- a) minden határoló lapja négyzet; b) minden határoló lapja téglalap;
c) minden lapja négyszög, de pontosan két határoló lapja négyzet;
d) egyetlen lapja sem négyzet, de minden lapja négyszög!

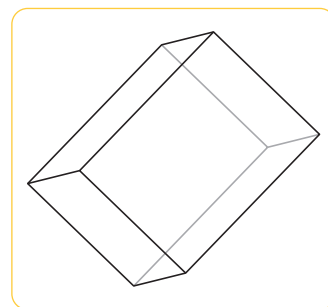
Vázold fel a hasábok testhálóját!

97

Egy téglatest egy csúcsában találkozó három éle 3,2 cm, 4 cm és 2 cm.

Melyik lap lehet a téglatest **alaplapja**?

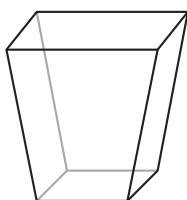
Határozd meg a téglatest felszínét és térfogatát!



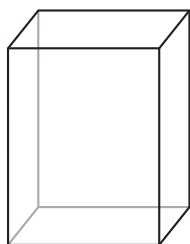
98

Válaszd ki az egyenes hasábokat! Vázold föl a testhálójukat!

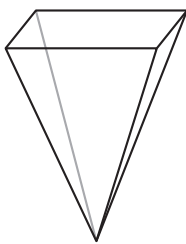
1



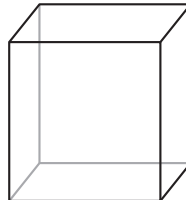
2



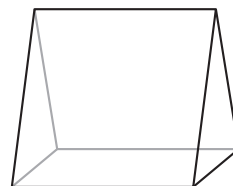
3



4



5



99

Vázold fel a test hálóját! A szükséges adatok megmérése után határozd meg (közelítő pontossággal) a hasáb felszínét!

- a) Az egyenes hasáb magassága 4 cm, alaplapja olyan rombusz, amelynek oldalai 3 cm-esek, a párhuzamos oldalai közötti távolság pedig 2,5 cm.
b) A szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapéle 3 cm hosszú, magassága 25 mm.

☉ *Mekkora a rombusz magassága?*

100

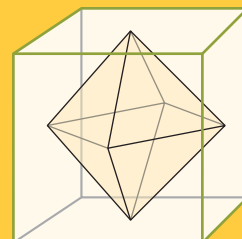
Dönts el, hogy a következő állítások közül melyek igazak, melyek hamisak!

- A:** Az egyenes hasáb alapélei egyenlő hosszúak.
B: Van olyan egyenes hasáb, amelynek **alapélei** ugyanolyan hosszúak, mint az **oldalélei**.
C: Az egyenes hasáb alapélei nem feltétlenül egyenlő hosszúak.
D: Az egyenes hasáb oldalélei nem feltétlenül egyenlő hosszúak.
E: Van olyan egyenes hasáb, amelynek alapélei különböző hosszúak, **oldalélei** egyenlő hosszúak.
F: Minden egyenes hasábnak van olyan lapja, amelyik párhuzamos egy másik lappal.
G: A téglatest egyenes hasáb.
H: Van olyan egyenes hasáb, amelyiknek minden lapja négyzet, de a lapok között vannak nem egybevágók is.
I: Egyenes hasábnak legalább öt lapja van.

☉ *Írd az állítások után az I vagy a H betűt!*



Egy kocka lapjainak középpontjait a szomszédos lapok középpontjaival összekötő szakaszok egy másik test élei. Hány csúcsa, hány éle és hány lapja van ennek a testnek? A test csúcsai közül hányféleképpen választható ki négy olyan, amely négyzetet határoz meg?



AZ EGYENES HASÁB TÉRFOGATA

FELADATOK

101 A téglatest alaplapjának élei 5 cm és 4 cm hosszúak, az oldaléle 10 cm.

- Határozd meg a téglatest térfogatát!
- Hogyan változik a téglatest térfogata, ha az alapéleket változatlanul hagyjuk, de az oldaléleket 0,1-szeresére; 0,5-szeresére; 1,5-szeresére; 2-szeresére; 10-szeresére változtatjuk?
- Milyen összefüggés van a téglatest oldaléle és a térfogata között, ha az alaplap változatlan?

☉ Gondolj a szorzat változásaira!

☉ A feldarabolás után mennyi lesz a két test térfogatának összege?

☉ Odafigyeltél a mértékegységekre?

☉ Mivel egyenlő az egy csúcsban találkozó élek mérőszámának szorzata?

102 Darabolj fel egy 240 cm^3 térfogatú, 12 cm-es oldalélű téglatestet az alaplapjával párhuzamos síkkal két darabra úgy, hogy a részek oldaléleinek az aránya 1 : 2 legyen! Jellemezd az így kapott testeket! Mennyi az így kapott testek térfogata?

103 Határozd meg a téglatest térfogatát, ha élei:

- 3,2 dm, 20 cm, 125 mm;
- 0,4 dm, 40 mm, 4,0 cm;
- $\frac{2}{3} \text{ m}$, $\frac{3}{2} \text{ m}$, $\frac{5}{4} \text{ m}$;
- $\frac{2}{5} \text{ m}$, $\frac{1}{4} \text{ m}$, $\frac{1}{4} \text{ m}$!

104 Egy 64 cm^3 térfogatú téglatest éleinek mérőszáma egész szám. Mekkora lehetnek a téglatest élei? A 64 cm^3 térfogatú téglatestek közül melyiknek a legkisebb a felszíne?

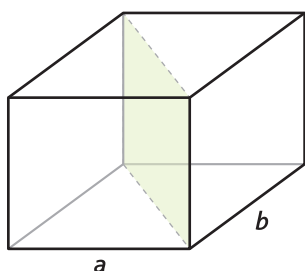
105 Írd be a mérőszámokat!

a) $55,6 \text{ dm}^3 = \text{ } \text{ m}^3 = \text{ } \text{ cm}^3 = \text{ } \text{ mm}^3 = \text{ } \text{ hl}$

b) $4,25 \text{ hl} = \text{ } \text{ m}^3 = \text{ } \text{ dm}^3 = \text{ } \text{ cm}^3 = \text{ } \text{ l}$

c) $2,5 \text{ l} = \text{ } \text{ dl} = \text{ } \text{ cl} = \text{ } \text{ ml} = \text{ } \text{ dm}^3 = \text{ } \text{ cm}^3$

d) $2,54 \cdot 10^2 \text{ m}^3 = \text{ } \text{ dm}^3 = \text{ } \text{ cm}^3 = \text{ } \text{ hl}$

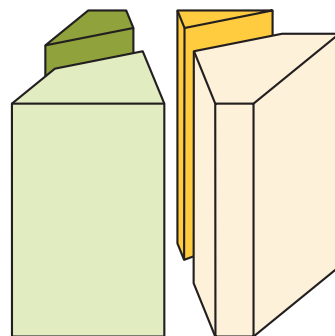
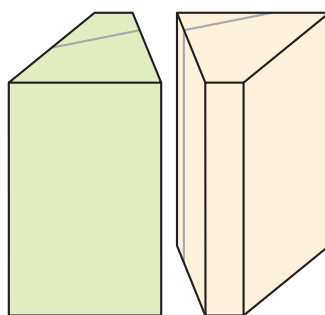
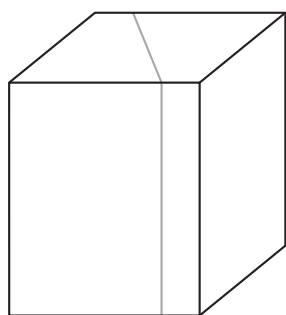


106 A téglatestet az alaplapra merőleges átlósíkkal elmetsszük.

- Hány részre osztja az átlósík a téglatestet? Jellemezd a keletkezett testeket!
- Határozd meg a keletkezett testek térfogatát, ha $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 2 \text{ cm}$!
- Szerkeszd meg a keletkezett testek hálóját!
- Hány testet kapunk, ha a téglatestet mindkét, az alaplapra merőleges átlósíkkal elmetsszük? Mennyi az így kapott testek térfogatának az összege?

Értelmezés

- ❶ Ha a kocka minden oldala 1 hosszúságegység, akkor (megállapodás szerint) a kocka térfogata 1 térfogategység. **Például:**
 Az 1 mm élhosszúságú kocka térfogata 1 mm^3 ;
 az 1 cm élhosszúságú kocka térfogata 1 cm^3 ;
 az 1 dm élhosszúságú kocka térfogata 1 dm^3 ;
 az 1 m élhosszúságú kocka térfogata 1 m^3
- ❷ A térfogat mérőszáma mindig nemnegatív szám.
- ❸ Az egybevágó testek térfogata egyenlő.
- ❹ Ha egy testet feldarabolunk, akkor a darabok térfogatának az összege megegyezik az eredeti test térfogatával.



A térfogategységek közti összefüggések:

$$1 \text{ cm}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ mm}^3 = 10^3 \text{ mm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ mm}^3 = 10^6 \text{ mm}^3 = 1\,000\,000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 = 10^9 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ mm}^3 \xrightarrow{\cdot 1000} 1 \text{ cm}^3 \xrightarrow{\cdot 1000} 1 \text{ dm}^3 \xrightarrow{\cdot 1000} 1 \text{ m}^3 \xrightarrow{\cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000} 1 \text{ km}^3$$

Az űrtartalom és a térfogat mértékegységei közti összefüggések:

$$1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3 = 0,001 \text{ dm}^3;$$

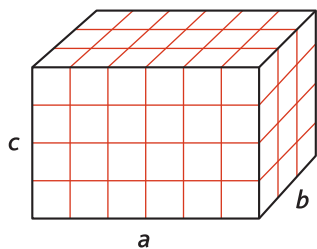
$$1 \text{ cl} = 10 \text{ ml} = 10 \text{ cm}^3 = 0,01 \text{ dm}^3;$$

$$1 \text{ dl} = 10 \text{ cl} = 100 \text{ ml} = 100 \text{ cm}^3 = 0,1 \text{ dm}^3;$$

$$1 \text{ l} = 10 \text{ dl} = 100 \text{ cl} = 1000 \text{ ml} = 1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3 = 0,001 \text{ m}^3;$$

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ l} = 100 \text{ dm}^3 = 0,1 \text{ m}^3$$

Az előző összefüggéseket alkalmazva a téglatest térfogatának ismeretében meghatározhatjuk más egyenes hasáb térfogatát.

**Tétel**

A téglatest térfogata az egy csúcsában találkozó három él szorzata.

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Bizonyítás

Ezt könnyű igazolnunk, ha az élek mérőszáma egész szám.

Lássuk be tetszőleges élű téglatestre az összefüggést:

- 1 Ha az egységkockát a -szorosára nyújtjuk (összenyomjuk) az egyik éle mentén, akkor belátható, hogy a térfogata is a -szorosára változik, az így létrejött téglatest térfogata a egység.
- 2 A kapott téglatestet nyújtjuk meg (ugyanabból a csúcsából kiindulva) egy másik éle mentén b -szeresére, akkor a térfogata is b -szeresére változik.

Olyan téglatestet (egyenest hasábot) kapunk, amelynek a két alapéle a és b egység, a magassága: 1 egység;

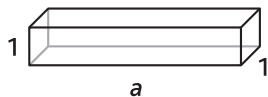
alaplajának a területe: $T = a \cdot b$;

térfogata: $V = a \cdot b \cdot 1 = T \cdot 1$

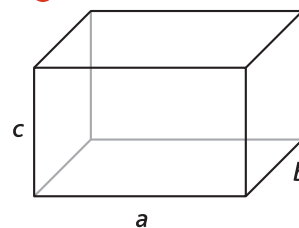
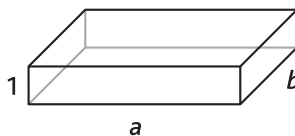
1



2



3



- 3 A kapott réteg magasságát nyújtjuk meg c -szeresére, akkor a térfogata is c -szeresére változik. A keletkezett téglatest térfogata:

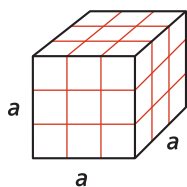
$$V = a \cdot b \cdot c$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Következmény

A kocka speciális téglatest, térfogata:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

**Tétel**

Az egyenes hasáb térfogata egyenlő az alapterületének és magasságának szorzatával:

$$V = T \cdot M$$

Bizonyítás

Figyeljük meg, hogy a téglatest mint hasáb magassága megegyezik az oldalélel. Ezért másképp is megfogalmazható az összefüggés.

»»

»»

A téglatest térfogatát úgy határozhatjuk meg, hogy az (egyik) alaplappja területét (T) megszorozzuk a hozzá tartozó magassággal (M).

$$V = T \cdot M$$

Megfelelő átdarabolásokkal igazolható, hogy ez az összefüggés minden egyenes hasábra érvényes.

A paralelogramma területét úgy határoztuk meg, hogy átdaraboltuk téglalappá.

A paralelogramma alapú hasáb térfogatát úgy határozhatjuk meg, hogy az alaplappjára merőleges síkkal átdaraboljuk téglatestté. Az átdarabolással megváltozik a hasáb alakja, néhány éle. **Az átdarabolás nem változtatja meg a hasáb magasságát, alapterületét és a térfogatát.**

Mindkét test alapterülete: T ; magassága: M ; térfogata: V

Az átdarabolással kapott téglatest térfogata és ezért **a paralelogramma alapú hasáb térfogata is megegyezik az alapterület és a magasság szorzatával:**

$$V = T \cdot M$$

A háromszög területét úgy határoztuk meg, hogy egy az átlója mentén kettévágtott paralelogrammának tekintettük.

A háromszög alapú hasábot a paralelogramma alapú hasábból úgy nyerhetjük, hogy az alaplappjára merőleges átlósíkkal két egybevágó testre vágjuk.

A háromszög alapú hasáb alapterülete és térfogata egyaránt fele a paralelogramma alapú hasáb alapterületének, illetve térfogatának.

Ezért **a háromszög alapú hasáb térfogata is megegyezik az alapterülete és a magassága szorzatával.**

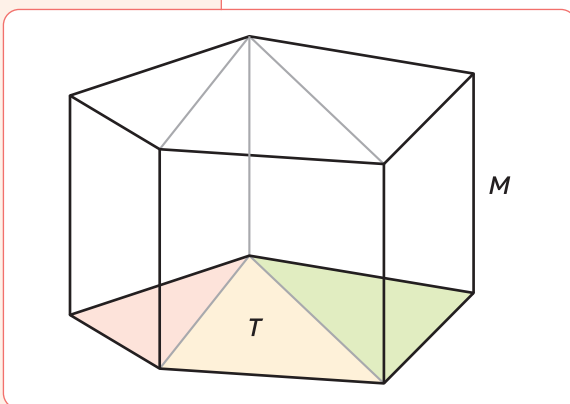
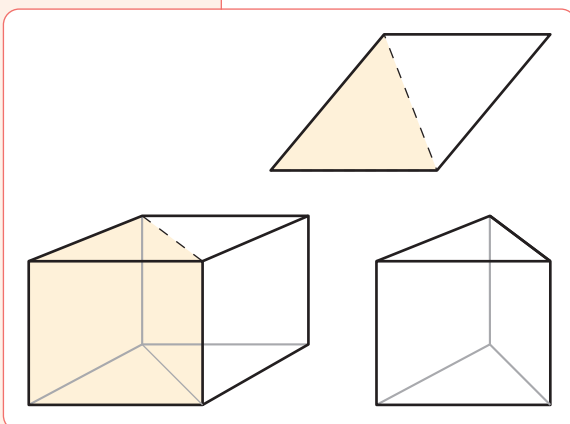
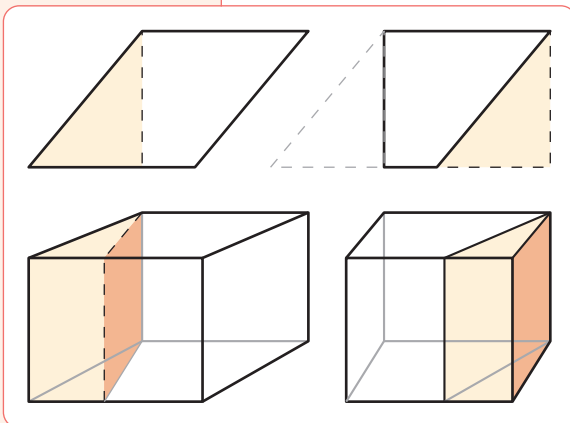
Bármely sokszög területét meghatározhatjuk, ha háromszögekké daraboljuk.

Tetszőleges egyenes hasáb térfogatát meghatározhatjuk, ha az alaplappjára merőleges síkokkal háromszög alapú hasábokká daraboljuk.

A teljes hasáb térfogata megegyezik a feldarabolással kapott háromszög alapú hasábok térfogatának összegével, a teljes alapterület ezek alapterületének összegével, és a magasságuk egyenlő (M). A háromszög alapú hasábok mindegyikének a térfogata az alapterületének magasságszorosa.

Ezért tetszőleges egyenes hasábra is érvényes az összefüggés. Vagyis **a tetszőleges egyenes hasáb térfogata megegyezik az alapterülete és a magassága szorzatával.**

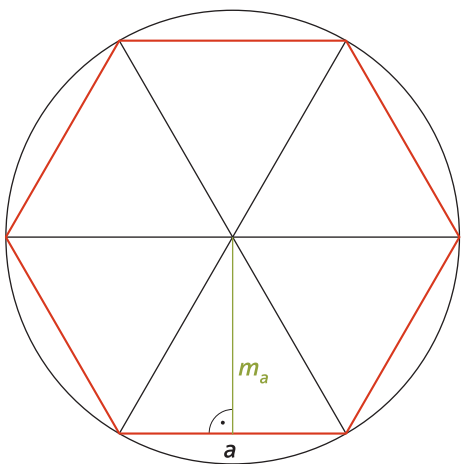
Emlékeztető: Tetszőleges **egyenes hasáb** magassága megegyezik bármelyik oldal-éle hosszával, mivel az oldalélek merőlegesek az alaplappra. **Nem egyenes hasáb** esetén nem áll fenn ez az összefüggés.



© Lásd a 243. oldalon a fénykép alatti ábrát.

2. példa

Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapéle 3 cm, oldaléle 5 cm hosszú. Határozzuk meg a hasáb térfogatát.



Szerkesszük meg a szabályos hatszöget, bontsuk fel egybevágó szabályos háromszögekre. Egytized centiméter pontossággal megmérjük egy háromszög magasságát, majd (közelítő pontossággal) kiszámítjuk a területét. A háromszög területe:

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot m_a}{2} \approx \frac{3,0 \cdot 2,6}{2} \approx 3,9 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Az alapterület a háromszög területének 6-szorosa:

$$T_a = 6 \cdot T_{\Delta} \approx 6 \cdot 3,9 \text{ cm}^2 = 23,4 \text{ cm}^2$$

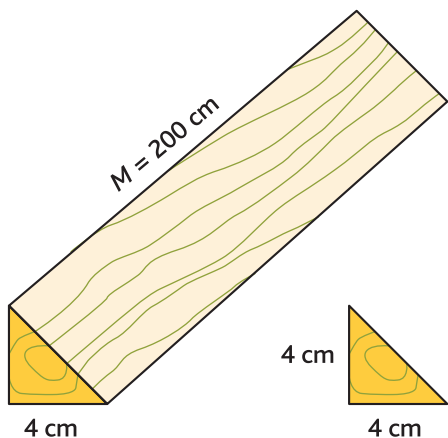
A hasáb térfogata ($M = 5,0 \text{ cm}$):

$$V = T_a \cdot M \approx 23,4 \cdot 5 \text{ cm}^3 = 117 \text{ cm}^3$$

3. példa

Egy 2 m hosszú, bükkfából készült lécs keresztmetszete egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelynek a befogója 4 cm.

Mennyi a lécs tömege, ha a bükkfa sűrűsége $\rho = 0,75 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?



A lécs háromszög alapú hasáb, magassága

$M = 200 \text{ cm}$, alapterülete:

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

A hasáb térfogata: $V = T_{\Delta} \cdot M$

$$V = 8 \cdot 200 \text{ cm}^3 = 1600 \text{ cm}^3$$

A bükkfa sűrűsége $\rho = 0,75 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Ez azt jelenti, hogy 1 cm^3 bükkfa tömege $0,75 \text{ g}$.

1600 cm^3 bükkfa tömege:

$$1600 \cdot 0,75 \text{ g} = 1200 \text{ g} = 1,2 \text{ kg}$$

FELADATOK

- 107 a) Egy téglatest minden éle $\frac{2}{5} \text{ m}$. Mi a neve ennek a téglatestnek? Mennyi a felszíne és a térfogata?
- b) Mekkora a téglatest felszíne, ha egyik éle $3,2 \text{ m}$, a másik éle $2,5 \text{ m}$ hosszú, és a térfogata 12 m^3 ?

108

- a) Az 1 m^3 térfogatú téglatest élei (deciméterrel megadva) egész számok. Mekkora lehetnek ennek a téglatestnek az élei?
Az ilyen téglatestek közül melyiknek a legkisebb, illetve a legnagyobb a felszíne?
- b) Egy téglatest minden élének hossza (centiméterrel megadva) egész szám. Az egyik lapjának területe 24 cm^2 , legyen ez az alaplapp. Az oldaléle 5 cm-rel rövidebb a hosszabbik alapélnél. Mennyi a téglatest felszíne és térfogata?
- c) Egy téglatest egyik éle 15 cm hosszú, a második él ennek $\frac{6}{5}$ része, a harmadik él a második él $\frac{3}{2}$ része. Mekkora a téglatest felszíne és térfogata?
- d) Egy téglatest egyik éle 20 cm hosszú, a második él ennek a 150%-a, a harmadik él a másodiknak a 80%-a. Mekkora a téglatest felszíne és térfogata?

☉ Az 1 m^3 hány köbdeciméter?

☉ Hány ilyen téglatestet találtál?

109

- a) Egy háromszög alapú egyenes hasáb alapéleinek hossza 1,5 cm, 2 cm, 2,5 cm; oldaléle 6 cm-es. Szerkeszd meg a hasáb alaplaját! A szükséges adatok megmérése után határozd meg a hasáb térfogatát!
- b) Hogyan változik az a) feladatban vizsgált egyenes hasáb térfogata, ha változatlan alap mellett a magasságát
..... felére; egyharmadára; kétszeresére változtatjuk?
- c) Határozd meg a hétszög alapú egyenes hasáb térfogatát, ha az alaplajára merőleges síkokkal olyan háromszög alapú hasábokra darabolható, amelyek magassága 10 cm, alapterülete:
 $T_1 = 3,8 \text{ cm}^2$; $T_2 = 4,3 \text{ cm}^2$; $T_3 = 1,3 \text{ cm}^2$; $T_4 = 2,0 \text{ cm}^2$; $T_5 = 2,9 \text{ cm}^2$!
- d) Egy hasáb alakú vályú keresztmetszete olyan derékszögű háromszög, amelynek mind a két befogója 3,2 dm-es. Legfeljebb hány liter víz fér a vályúba, ha a hossza 2,0 m?

☉ Mekkora a hétszög alapú hasáb alaplajának területe?

☉ Milyen okai lehetnek annak, hogy nem fér el benne a kiszámított vízmennyiség?

110

- Szerkeszd meg az alaplapot, majd vázold föl a hasáb hálóját!
- Határozd meg a hasáb felszínét! Határozd meg a hasáb térfogatát!
- a) A 3,0 cm magasságú, szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 2,3 cm hosszú.
- b) Az egyenes hasáb magassága 4 cm, alaplajja háromszög. A háromszög oldalainak hossza 3 cm; 4 cm; 5 cm.
- c) Az egyenes hasáb magassága 2,5 cm, alaplajja olyan háromszög, amelynek oldalai 3 cm; 3,5 cm; 5,5 cm hosszúak.
- d) Az egyenes hasáb magassága 1 cm, alaplajja olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja 3 cm hosszú, szárjai 2 cm-esek.

☉ A szükséges hiányzó adatot szerkesztéssel, méréssel határozd meg!



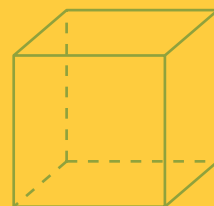
Egy kockát egy S síkkal két egybevágó részre vágunk. Van-e olyan megoldás, ahol az S sík nem párhuzamos a kocka egyetlen lapjával sem?

Van-e olyan megoldás, ahol az S sík nem merőleges a kocka egyetlen lapjára sem?



Egy kockát kékre festünk. Hogyan vághatjuk hat egybevágó részre úgy, hogy minden darabjának legyen eredetileg kékre festett négyzetlapja?

Fejtörő!



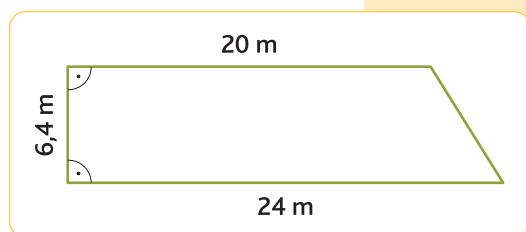
© A szükséges hiányzó adatot szerkesztéssel, méréssel határozd meg!

Gyakorló
5.61–5.83.;
Feladatgyűjtemény
4.3.06–09.

- 111 Szerkeszd meg az alaplapot, majd vázold föl a hasáb hálóját! Határozd meg a hasáb felszínét, térfogatát!
- Az egyenes hasáb magassága 1,4 cm, alaplaja olyan deltoid, amelynek szomszédos oldalai 3,2 cm; 4 cm hosszúak, szimmetriaátlója 4,5 cm-es.
 - Az egyenes hasáb magassága 2 cm, alaplaja olyan rombusz, amelynek átlói: 4 cm; 3 cm hosszúak.
 - Az egyenes hasáb magassága 2,5 cm, alaplaja olyan rombusz, amelynek oldalai 3 cm-esek, egyik szöge 30° .

- 112 Egy ötszög alapú egyenes hasáb térfogata $299,4 \text{ cm}^3$, alaplajának területe $24,95 \text{ cm}^2$. Milyen magas a hasáb?

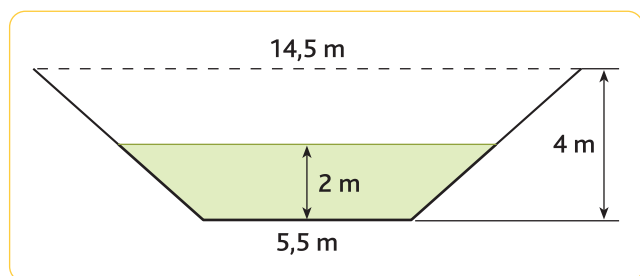
© Készíts vázlatot a gát keresztmetszetéről!



- 113 a) Egy gát keresztmetszete 3,6 m magas húrtrapéz, amelynek alapjai 13,5 m és 6,5 m hosszúak. A gát 20 m-es szakaszon átszakadt. Hány köbméter földet hordtak a kijavításához?

Hányszor fordult az a teherautó, amelyre egyszerre 8 t terhet rakhattak föl, ha egy köbméter föld tömege 1,6 t volt?

- b) Az ábra egy előcsarnok alaprajza. A csarnok magassága 3,8 m. Hány gyerek tartózkodhat benne, ha mindegyikükre 6 m^3 levegőt számítunk?



- 114 Egy csatorna keresztmetszete húrtrapéz az ábrán föltüntetett méretekkel. Hány köbméter vizet szállít a csatorna naponta, ha a vízmélység 2 m, és a víz másodpercenként 1,2 m-t halad?

Fejtörő!

© Jelöld meg a helyes választ!



Csanád téglatest alakú akváriumának alapéleinek hossza 60 cm, 40 cm, oldal-élének hossza 50 cm. Az akvárium térfogatának 95%-áig van megtöltve vízzel. Ekkor Csanád 8 kg kavicsot tesz az akváriumba.

Mi történik, ha 1 cm^3 kavics tömege 2,5 g?

- Túlcsoordul az akvárium, kiömlik belőle 14 l víz.
- Színültig megtelik az akvárium.
- Nem fog megtelni az akvárium, még 7 kg kavics férne bele.
- Nem fog megtelni az akvárium, még pontosan 6 l víz férne bele.

© A háromszög magasságát szerkesztéssel, méréssel megkaphatod.



Egy szabályos háromoldalú hasáb palástjának területe hatszorosa az alaplaj területének.

Mekkora a hasáb felszíne és térfogata, ha az alapéle 6 cm?

AZ EGYENES KÖRHENGER

AZ EGYENES KÖRHENGER SZÁRMAZTATÁSA

A (felbontatlan) konzervdoboz, a pénzérme olyan test, amelyet két párhuzamos körlap és egy görbe felület határol (eltekintve a geometriai vizsgálatok számára érdektelen részletektől).

Az ilyen test **egyenes henger**.

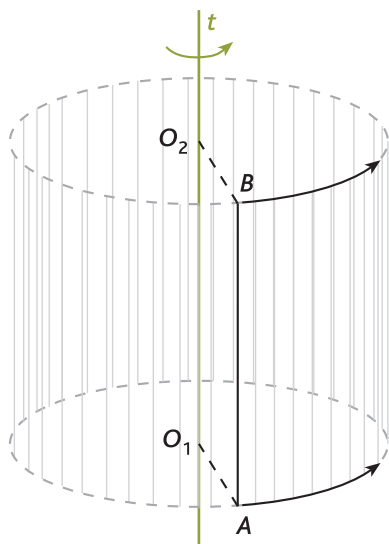
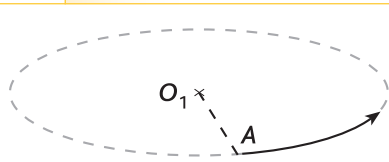
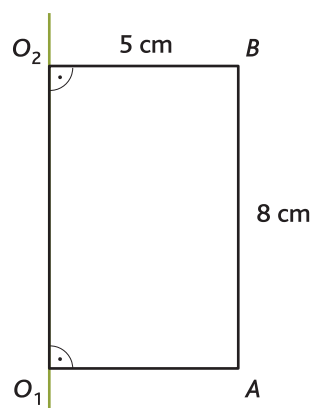


1. példa

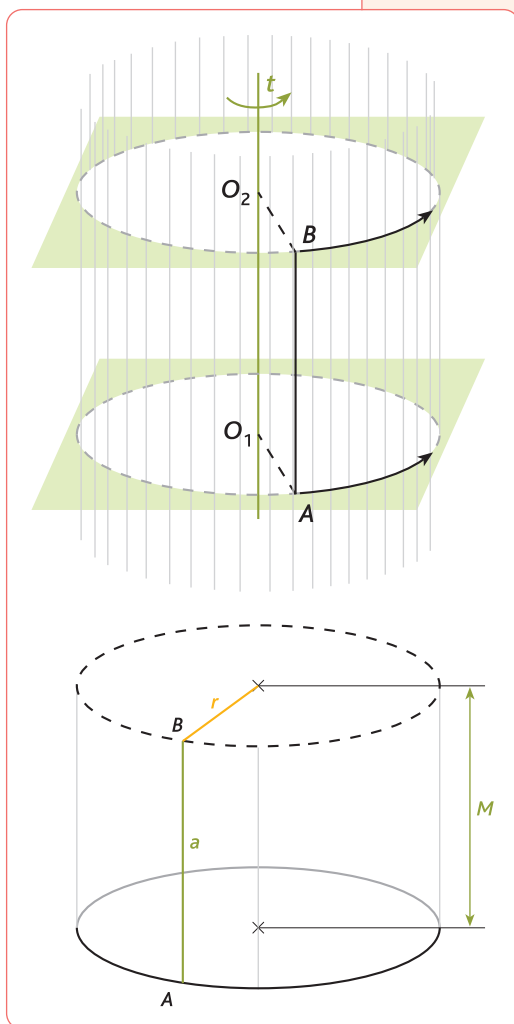
Készítsünk az ábra alapján hurkapálcikából és rajzlapból modellt. A hurkapálca mint tengely körül forgassuk el 360° -kal a rajzlapot.

Megfigyeléseink

- 1 Az A pont olyan körvonal mentén mozog, amelynek a középpontja a forgástengely O_1 pontja, sugara az O_1A szakasz.
A B pont is körvonal mentén mozog, a két körvonal egybevágó.
- 2 Az O_1A szakasz és az O_2B szakasz a forgatás közben egy-egy körlapot „súrol”.
A két körlap egybevágó és párhuzamos.
A két körlap távolsága AB .
- 3 Az AB szakasz által súrolt felület nem síkfelület.
A felület minden pontja egyenlő (O_1A) távolságra van a forgástengelytől.
Azokat a szakaszokat, amelyek a két körvonal pontjait kötik össze és párhuzamosak a tengellyel, az AB szakasznak a tengely körüli forgatásával kaptuk. Ezért ezeknek a szakaszoknak minden pontja illeszkedik a görbe felületre.
- 4 A két egybevágó körlap és a görbe felület a tér egy részét közrefogja.



Értelmezés



Az AB egyenes **hengerfelületet** sűrol, ha egy vele párhuzamos t egyenes körül 360° -kal elforgatjuk. Ez a t egyenes a **hengerfelület tengelye**. Ha ezt a felületet a tengelyre merőleges két síkkal elmetsszük, akkor a két metsző sík és a hengerfelületnek a metsző síkok közé eső darabja egy véges testet határol, amelyet **egyenes körhengernek** nevezünk.

A metsző síkokban elhelyezkedő két egybevágó körlap a **henger alaplappjai** (alap- és fedőlap). A két alaplapp közötti felületrészt a **henger palástjának** nevezzük. Az AB egyenes elforgatásával egymással párhuzamos egyenesek jöttek létre. Ezeknek az egyeneseknek a két körlap közé eső szakaszai a **henger alkotói**.

Az alkotó minden pontja a palástra illeszkedik.

Az alaplappok síkjának távolsága a henger magassága.

Az egyenes **henger magassága** megegyezik az alkotói hosszával.

Az AB egyenes minden pontja (például az A pont vagy a B pont) az elforgatás során egy körvonalat ír le. Ezeknek a köröknek a középpontja a hengerfelület tengelyére illeszkedik.

A hengerfelület forgásfelület, az egyenes körhenger forgástest.

A hengerfelületet másképp is értelmezhetjük:

Ha egy körvonal pontjain át párhuzamosokat húzunk egy egyenessel, amelyik a kör síkjára merőleges, akkor egy (végtelen) hengerfelületet kapunk.

Hengerfelületet sűrol a körvonal, ha a síkjára merőleges irányban mozgatjuk a térben.

FELADAT

- 115 a) Nelli pogácsát süt. A tésztából 3 cm vastag réteget nyújt ki, majd kör keresztmetszetű pogácsaszaggatóval kivág a tésztából egy darabkát. Jellemezd a keletkezett testet!
- b) Vizsgáld meg a henger tulajdonságait (például érmével vagy konzervdobozzal modellezhető)! Milyen lapok határolják?
- Léteznek-e olyan egyenes szakaszok, amelyeknek minden pontja a határoló „görbe” felületre illeszkedik?

☉ A henger alaplappjával párhuzamos síkok mentén vágunk.

Kísérletezz!

☉ Például krinolinnal vagy lecsókolbással kísérletezhetsz te is.

☉ Gondolatban csomagolj be egy ferde, 10 Ft-osokból álló pénzérmetornyot.



Hengerecki Pál hengerfelületekkel kísérletezik.

- a) Milyen alakú síkmetszeteket kap, ha az egyenes hengerfelületet a tengelyére nem merőleges, de egymással párhuzamos két síkkal metsz? Hogyan néz ki az így kapott henger, ha az alaplappjára „állítja”? Vajon téglalap alakú-e az így kapott henger palástja?
- b) Milyen testet sűrol, ha egy körlapot a síkjára nem merőleges és azzal nem is párhuzamos szakasz mentén mozgat a térben? Különbözik-e az így létrehozott test az a) feladatban kapott testtől?

AZ EGYENES KÖRHENGER FELSZÍNE

2. példa

Henger alakú konzervdoboz palástját papírral borították be.

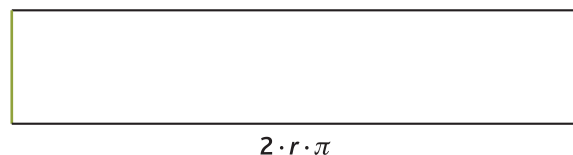
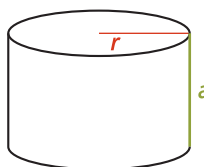
Alaplapjának sugara $r = 4$ cm; alkotója $a = 5$ cm.

Mekkora a papírral beborított felület (vagyis a palást területe)?

Mekkora az egész doboz felszíne?

Vágjuk el egy alkotó mentén a palástot borító papírt, és fejtsük le a dobozról. Ez a papír kiteríthető a síkban.

A palást kiterítésével olyan téglalapot kapunk, amelynek két szemközti oldala a henger alkotója (a), a másik két oldala az alaplapok kerülete (K).



A palást területe:

$$T_{\text{palást}} = K \cdot a = (2 \cdot r \cdot \pi) \cdot a$$

$$T_{\text{palást}} \approx 2 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 5 \text{ cm}^2 = 125,6 \text{ cm}^2$$

A doboz felszíne a két alaplap és a palást területének az összege:

$$A_{\text{henger}} = 2 \cdot T_{\text{alaplap}} + T_{\text{palást}}$$

$$\text{A körlapok területe: } T_{\text{alap}} = r^2 \cdot \pi \approx 4^2 \cdot 3,14 \text{ cm}^2 = 50,24 \text{ cm}^2$$

$$\text{A felszín: } A_{\text{henger}} \approx (2 \cdot 50,24 + 125,6) \text{ cm}^2 \approx 226,1 \text{ cm}^2$$

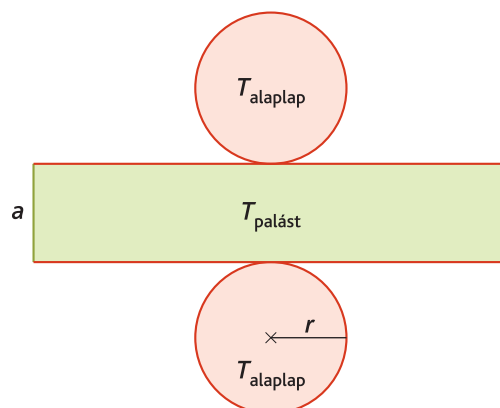
Értelmezés

Az egyenes henger felszíne a két alaplap és a palást területének összege.

$$A_{\text{henger}} = 2 \cdot T_{\text{alaplap}} + T_{\text{palást}}$$

$$A_{\text{henger}} = 2 \cdot r^2 \pi + 2r\pi \cdot a = 2r\pi (r + a)$$

A π nem racionális szám, végtelen nem szakaszos tizedestört alakban írható fel: $\pi = 3,1415926535\dots$ Ha számításainkban nagyobb pontosságra törekszünk, akkor a 3,14 helyett a 3,142 vagy a 3,1416 stb. közelítő értékkel kell számolnunk.



FELADATOK

116 Egy kör kerülete éppen megegyezik egy téglalap egyik oldalával.

a) Milyen test borítható be két ilyen körlappal és egy ilyen téglalappal?

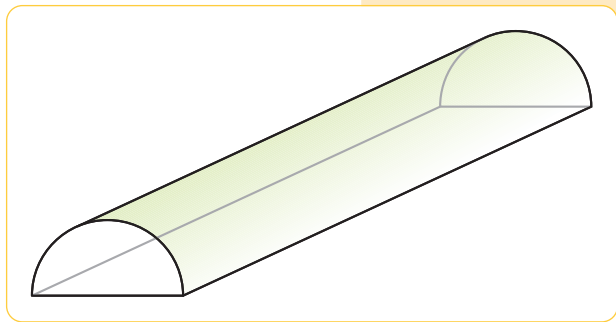
b) Írd fel a test felszínét a szokásos jelölésekkel!

Gyakorló
5.85., 5.87.

© Figyelsz a mértékegységekre?



© Hány megoldást találtál?



117 Mekkora a felszíne az egyenes hengernek, ha alkotója (a) és alapkörének sugara (r):

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $a = 5$ cm, $r = 3$ cm; | b) $a = 0,3$ cm, $r = 1,2$ cm; |
| c) $a = 1$ cm, $r = 1$ dm; | d) $a = 1,5$ dm, $r = 32$ cm; |
| e) $a = 1,2$ m, $r = 15$ dm; | f) $a = 2,50$ m, $r = 120$ cm; |
| g) $a = 12$ mm, $r = 2,1$ cm; | h) $a = 0,2$ dm, $r = 30$ mm? |

- 118
- Egy henger alakú hirdetőoszlop 2 m magas, átmérője 90 cm. Hány négyzetméter lemez kellett az oszlop (palást) elkészítéséhez?
 - Egy ház esőcsatornája félhenger alakú. Mennyi bádóg kellett a 3,6 m hosszú csatorna elkészítéséhez, ha átmérője 15 cm?
 - Egy festőhenger átmérője 5,8 cm. A henger 14-szer fordul meg a tengelye körül, míg egyszer végighúzzuk a falon. Milyen magasságig festjük le vele így a falat?
 - Egy szivaccsal borított festőhenger átmérője kétszerese a c) feladatban leírt henger átmérőjének. Hányszor fordul meg a tengelye körül ez a henger, ha ugyanolyan magasan festjük le vele a falat, mint az előző feladatban?
 - Számítsd ki a 36 cm sugarú, 76 cm magasságú, egyenes henger alakú fedett bádó tartályhoz szükséges lemez mennyiséget! (Összeforrasztáshoz a felszín 8%-át kell még anyagszükségletként figyelembe venni!)
 - Egy egyenes henger síkba kiterített palástja olyan téglalap, amelynek oldalai: 31,4 cm és 15,7 cm hosszúak. Mekkora a henger alapkörének a sugara? Mekkora ennek a hengernek a felszíne?
 - Egy henger alapkörének átmérője fele a magasságának. A henger felszíne $502,4 \text{ cm}^2$. Mekkora a henger sugara és magassága?

- h) Egy 15 m hosszú és 4 m széles téglalap alakú paprikaágys fölé fóliasátort emeltek, amely mint egy „fél henger”, védi a növényeket a hideg levegőtől. A fóliasátor két végét egy-egy félkörlet zárja le. Hány négyzetméter fóliát használtak fel, ha 15%-nyi ráhagyással kellett dolgozniuk?

Többet ésszel ...

© Jelöld meg a helyes választ! Indokold meg a választ!

© Kísérletezz például egy fazékkal és egy fakanállal! Gondolkozz! Készíts vázlatot! Szerkessz! Mérj! Számolj!



Egy doboz festéssel 18 db zárt, henger alakú kis fémhordó felületét tudjuk lefesteni. A kis hordók alaplapijának átmérője 40 cm, magasságuk 60 cm. Egy ugyanilyen doboz festéssel hány nagy zárt hordó felülete festhető le, ha a hordók alaplapijának átmérője 60 cm, magasságuk 90 cm?

A: 27 db; B: 12 db; C: 9 db; D: 8 db



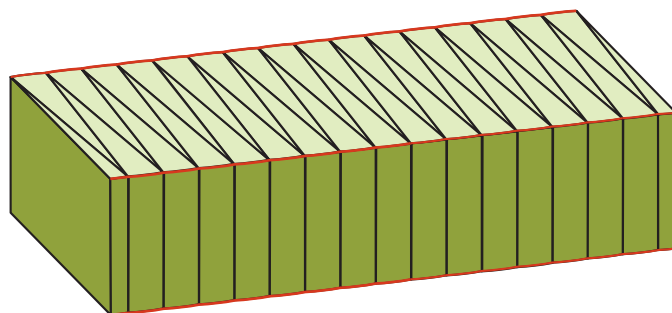
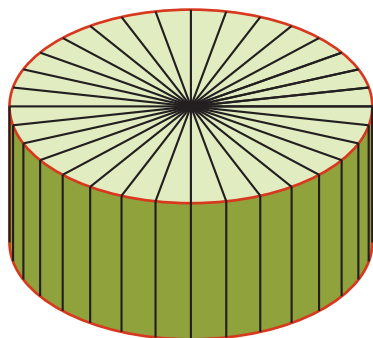
Mekkora a felül nyitott, henger alakú műanyag hordónak a tömege, ha az elkészítéséhez használt műanyag 1 négyzetdeciméterének tömege 45 g? A hordó alaplapijának átmérője 60 cm, és ha beleteszünk egy 150 cm hosszú gereblye-nyelet, akkor annak legalább egyharmad része kilóg az alaplapiján álló hordóból?

AZ EGYENES KÖRHENGER TÉRFOGATA

3. példa

Játékos vetélkedőn egy 32-es létszámú osztály tortát nyert. Az alaplapokra merőlegesen 32 egybevágó szeletre vágták a tortát. Mivel nem volt kör alakú tálcájuk, egy téglalap alakú tálcán rendezték el a szeleteket. (Ehhez egy szeletet még ketté kellett vágniuk.)

Ez az elrendezés adta a következő kérdés ötletét. Hogyan becsülhetjük meg a torta térfogatát? A torta átmérője 24 cm, a magassága 10 cm volt.



Az egyenes hengert téglateszterű testté darabolhatjuk át.

Ezért a torta térfogatára a következő becslést adhatjuk:

A „téglatest” alapterülete megegyezik a henger alapkörének területével:

$$T = r^2 \cdot \pi = 12^2 \cdot \pi \text{ cm}^2 = 144 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 452,16 \text{ cm}^2$$

A „téglatest” magassága a henger alkotója: $a = 10 \text{ cm}$

A térfogat: $V = T \cdot M$

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot a \approx 452,16 \cdot 10 \text{ cm}^3 = 4521,6 \text{ cm}^3$$

Az átdaraboláskor kapott, téglateszterű testből kétféleképp készíthetünk téglatestet. Ha lefaragunk a szeletekből annyit, hogy az oldalak síklapok legyenek, akkor az így keletkezett test V_k térfogata kisebb, mint a torta V térfogata.

Ha hozzátapasztunk a szeletekhez annyit, hogy az oldalak síklapok legyenek, akkor az így keletkezett test V_n térfogata nagyobb a torta V térfogatánál.

$$V_k < V < V_n$$

Ha a felosztást finomítjuk, vagyis egyre kisebb beosztást veszünk föl az alapkör kerületén (egyre több egybevágó szeletre vágjuk a hengert), akkor a kapott alakzat egyre jobban megközelíti a téglatestet. Ezért a belső téglatest, a henger és a külső téglatest térfogata közti különbség egyre kisebb lesz.

Magasabb matematikai ismeretek birtokában ez a gondolatmenet pontosabbá tehető és bizonyítható.

Tétel

Az egyenes körhenger térfogata alapterületének és magasságának szorzatával egyenlő. Ha az alapkör sugara r , az alkotó a , akkor:

$$V = T \cdot M = r^2 \cdot \pi \cdot a$$

FELADATOK

Kísérletezz!

© Kartonpapírból kivágott négyzetet ragassz rá szívószálra (öntapadó ragasztószalaggal a feltételeknek megfelelően)!



Gyakorló
5.84 – 5.92.;
Feladatgyűjtemény
4.3.10.

119

- a) Egy 8 cm oldalú négyzetet forgass körbe oldalegyenese mint tengely körül! Mekkora a létrejövő forgástest felszíne és térfogata?
- b) Hogyan változik a felszín, ha ugyanezt a négyzetet az egyik oldalfelező merőlegese körül forgatjuk? Hogyan változik a térfogat?
- c) Az a) és a b) feladat megoldása során két egyenes hengert kaphattunk. Mennyi a két henger térfogatának aránya?

120

- Egy téglalap oldalai 4 cm és 6 cm. A téglalapot forgasd meg
- a) a 6 cm-es oldala körül; b) a 4 cm-es oldala körül;
- c) a 6 cm-es oldal felezőmerőlegese körül!
- Milyen testet vág ki a térből a megforgatott téglalap?
- Mekkora a kapott testek felszíne és térfogata?

121

- a) Egy körhenger alakú főzőedény belső átmérője 18,0 cm, magassága 16,0 cm. Hány deciliter víz fér az edénybe?
- b) Egy körhenger alakú lábos belső átmérője 18,0 cm, magassága 8,0 cm. Hány deciliter víz fér a lábosba?
- c) Hány deciliter fér a körhenger alakú bögrébe, ha a belső átmérője 9,0 cm, magassága 8,0 cm?

122

- a) Henger alakú víztartály belső átmérője 2,30 m. Mennyit emelkedik a víz felszíne, ha a tartályba 10 hl vizet engedünk?
- b) Milyen magas az egyenes henger alakú „literes mérőedény”, ha alapkörének átmérője 8 cm?
- c) Egy egyenes henger alakú pohár átmérője 8 cm. Mekkora a pohár magassága, ha 500 ml víz fér bele?
- d) Egy henger alakú zárt tartály térfogata $19\,000\text{ dm}^3$, alapkörének sugara 12,3 dm. Mekkora a tartály magassága és felszíne?
- e) Egy gépkocsimotor négy hengerének 1107 cm^3 az együttes térfogata. Egy henger átmérője 72 mm. Mekkora a henger magassága (lökethossza)?

Többet ésszel ...

© A henger alaplapjával párhuzamos síkok mentén vágunk.



Egyenes henger formájú tűzifa gépi fűrészeléséért munkabért kapsz. Az első ajánlat: 3 részre vágásért 30 Ft jár. A második ajánlat: 6 részre vágásért 65 Ft-ot adnak. Te melyik ajánlatot tartod előnyösebbnek? Miért? (A bérten felül a rezsi költség is a munkáltatót terheli.)



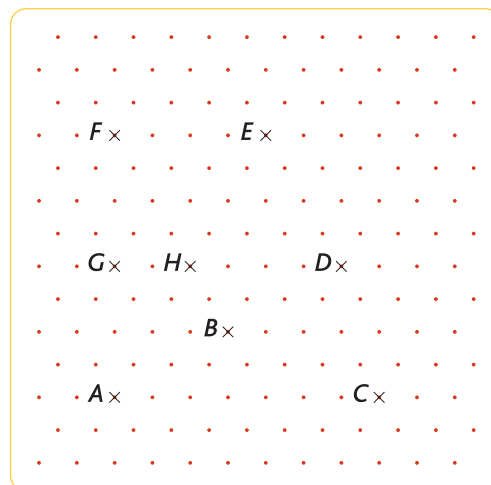
Egy látványpékségben ugyanabból a tésztából kétféle méretű pogácsát sütenek. A „mini” pogácsa 4 cm átmérőjű és 4 cm magas. Ára darabonként 20 Ft. A „maxi” pogácsa átmérője és magassága 5 cm, viszont az ára darabonként 30 Ft. Tízóráira 60 Ft-ért szeretnél pogácsát venni. Melyik méretűből vásárolnál? Miért?

FEJTÖRŐ FELADATOK

B50 Egyenlő oldalú háromszögpontrácson megjelöltünk néhány pontot.

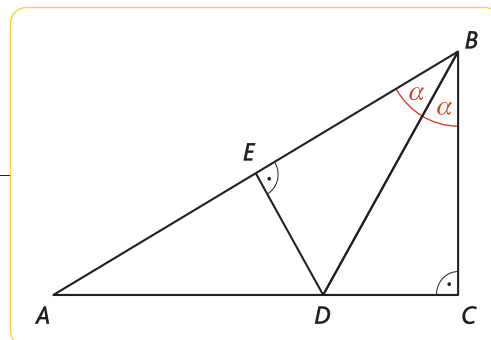
- Válassz ki a megjelölt pontok közül 3-3 pontot úgy, hogy azokat összekötve egyenlő szárú háromszöget kapjál!
- Állapítsd meg a háromszög belső szögeit!
- Állapítsd meg a háromszög területét, ha a területegység: 

A háromszög csúcsai	Belső szögek (fok)	Terület (területegység)
A		



B51 Az ábrán $\alpha = 30^\circ$. Keres egyenlő szakaszokat és egyenlő szögeket az ábrán!

A háromszögek egybevágóságának alapeseteit alkalmazva igazold, hogy csakugyan egyenlők!

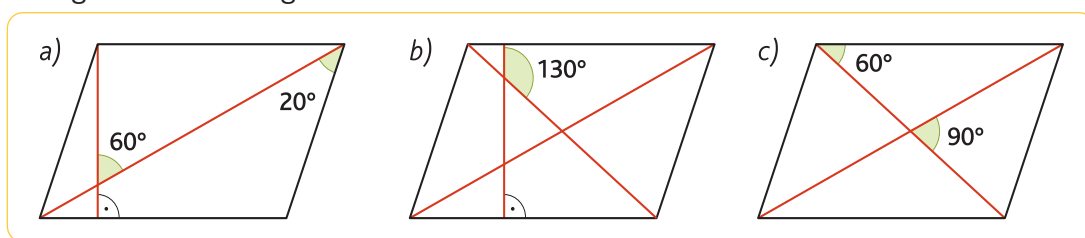


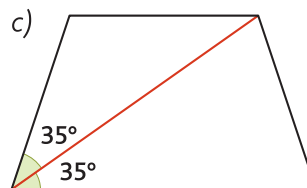
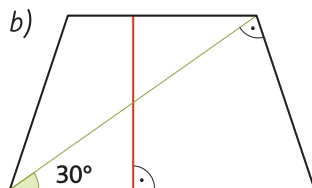
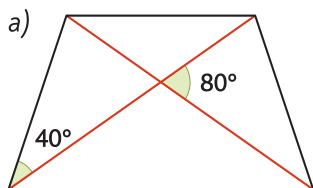
B52 a) Egy rombusz egyik szöge 80° . A rombuszt két átlójával négy háromszögre vágtuk. Mekkora a keletkezett háromszögek szögei?

- Egy háromszög két szöge 50° és 100° . A háromszöget az egyik oldalával párhuzamos egyenessel két síkidomra vágtuk. Mekkora a keletkezett síkidomok belső szögei?
- Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 50° . Mekkora a háromszög belső és külső szögei?
- Egy trapéz egyik szöge 40° , a másik 80° . Számítsd ki a többi szögének nagyságát! Mekkora lehetnek az egy-egy alapon fekvő szögek?
- Egy deltoid két szöge 80° és 120° . A deltoidot két átlójával négy háromszögre vágjuk. Mekkora a keletkezett háromszögek belső szögei?

B53 Mekkora a paralelogramma belső szögei?

☉ Az ábra csak vázlat!



B54 Mekkora a húrtrapéz belső szögei?

☉ *Többféleképpen számolhatsz.*

☉ *Hány szöget kell megmérned?*

☉ *Hány megoldás van?*

B55 Hajtsd végre a következő szerkesztéseket!

- Szerkessz rombuszt, amelynek oldala 4 cm-es, egyik szöge 45° ! Húzd meg az egyik átlóját! Hány megoldás van? Mekkora a keletkezett háromszögek külső és belső szögei? Számítsd ki a rombusz területét!
- Szerkessz paralelogrammát, ha oldalainak hossza 4 cm és 5 cm, egyik szöge 150° ! Húzd meg a hosszabbik átlóját! Mekkora a keletkezett háromszögek külső és belső szögei? A szükséges adatok megmérése után számítsd ki többféleképpen a paralelogramma területét!
- Szerkessz deltoidot, amelynek átlói 5,5 cm és 3,2 cm hosszúak, egyik oldala 5 cm hosszú! Számítsd ki minden esetben a deltoid területét!
- Szerkessz húrtrapézt, ha két alapja 5 cm és 3 cm hosszú, egyik szöge 75° ! A szükséges adatok megmérése után számítsd ki a trapéz területét!

B56 a) Egy téglalap egyik oldala 0,8 m hosszú, a területe 1840 cm^2 . Mekkora a kerülete?

- Egy téglalap egyik oldala 138 cm-es, kerülete 516 cm. Mekkora a területe?
- Egy téglalap minden oldala $\frac{5}{8}$ m hosszú. (Mi a neve ennek a téglalapnak?) Mekkora a kerülete? Mekkora a területe?
- Rajzolj tetszőleges téglalapot! Vágd (szerkesztéssel) két részre úgy, hogy a részek területének az aránya 3 : 5 legyen!
- Egy négyzet egyik oldalát 5 cm-rel növelve, a másikat 5 cm-rel csökkentve téglalapot kapunk. Hasonlítsd össze az eredeti négyzet és a kapott téglalap területét és kerületét!

B57 a) A háromszög a oldalát 2-szeresére növelem, a hozzá tartozó magasságot nem változtatom. Hogyan változik a háromszög területe?

- A háromszög a oldalát nem változtatom, a hozzá tartozó magasságot 2-szeresére növelem. Hogyan változik a háromszög területe?
- A háromszög a oldalát és a hozzá tartozó m_a magasságot kétszeresére növelem. Hogyan változik a háromszög területe?

☉ *Hogyan igazolható és általánosítható a c) feladatban felismert összefüggés?*

Fejtörő!



Kocka alakú tortát csokimázzal vontak be, és két réteg diókrémmel töltötték meg. Hogyan osztható szét 9 gyermek között ez a torta úgy, hogy mindegyikük ugyanannyi tésztát, csokimázot és diókrémet kapjon?

B58

- a) Négy egybevágó kockából testet építünk úgy, hogy teljes lapokkal érintkezzenek. Hányféle test építhető, ha azonosnak tekintjük az egybevágókat? Hány egyenes hasáb van az építhető testek között?
- b) Vázolj fel olyan testet – a kockán kívül –, amelynek minden határoló lapja egymással egybevágó négyzet!
- c) Hány részre osztják a teret a kocka lapsíkjai?

B59

- a) Egy trapéz alakú halastó két párhuzamos, egymástól 640 m távolságban lévő út között terül el. A párhuzamos oldalainak a hosszúsága 220 m és 280 m. Mekkora a víztükör területe?

Mennyi víz van benne, ha a tó átlagos mélysége 4,2 m?

- b) Egy trapéz alakú kiskert párhuzamos oldalainak hossza 11,4 m és 1,42 m, a párhuzamos oldalak távolsága 12,5 m. A kiskert 60%-a gyeplő, negyedrésze virágágyás, a fennmaradó részt kőlapok borítják. Mekkora a kiskert egyes részeinek a területe?

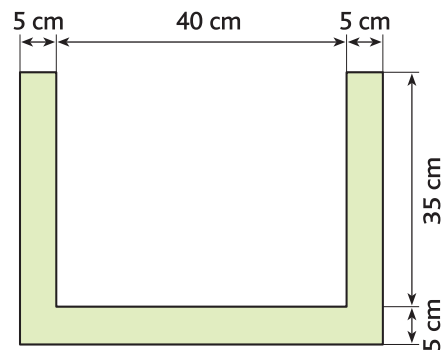
☉ Készíts olyan vázlatot, amelyen feltünteted az adatokat!

B60

- Téglalap keresztmetszetű csatornán a víz $2,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel folyik (1 s alatt 2,0 m-t halad előre a víztömeg). Mennyi vizet vezet el másodpercenként; percenként; óránként; naponta; évente a csatorna, ha 1,5 m széles és 0,8 m mély?

B61

- a) Egy acélidom hossza 750 mm, keresztmetszete 20 mm oldalú négyzet. Mekkora a tömege, ha az acél sűrűsége $\rho = 7,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?
- b) Egy 12 m hosszú, betonból készült csatorna keresztmetszetének méretei leolvashatók az ábráról. Hány tonna betont használtak fel a készítéséhez, ha a beton sűrűsége $\rho = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?



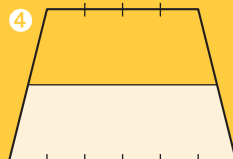
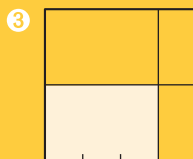
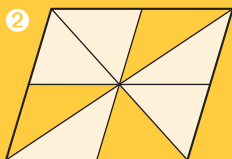
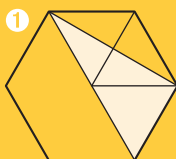
Egybevágó kis kockákból egy nagyobbát próbáltak összeállítani. Ha (a rendelkezésre álló kis kockákból) a lehető legnagyobbat rakták össze, akkor még 137 kis kocka maradt. Ha viszont minden él mentén egy kis kockával többet helyeztek volna el, akkor ennek a nagyobb kockának a teljes összeállításához még 32 kis kockára lett volna szükségük.

Hány darab kis kocka volt?

Fejtörő!



A sokszögek területének mekkora része fehér?



FELELETVÁLASZTÁSOS FELADATOK

☉ Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!

☉ A szokásos jelöléseket alkalmaztuk.

☉ Indokold válaszod!

☉ Rajzold meg a koordináta-rendszert!

B62 Megmértük a háromszögek két szögét. Melyiknek nincs tükörtengelye?

A: 90° és 45° ; B: 60° és 60° ; C: 120° és 30° ; D: 80° és 40°

B63 Mely adatokból szerkeszthető háromszög?

① $a = 4,7$ cm, $b = 8,3$ cm, $c = 3,5$ cm; ② $a = 4,5$ cm, $c = 3,8$ cm, $\beta = 75^\circ$

A: Csak az ① adatokból szerkeszthető. B: Csak a ② adatokból szerkeszthető.

C: Az ① és a ② adatokból is szerkeszthető háromszög.

B64 Egy trapéz három csúcspontja a derékszögű koordináta-rendszerben a $(9; 1)$, $(1; 1)$, $(3; 5)$ pont.

A trapéz területe 28 területegység (28 rácsnégyzet területe). A következő pontok közül melyik a trapéz negyedik csúcspontja?

A: $A(7; 5)$; B: $B(9; 5)$; C: $C(11; 5)$; D: $D(15; 5)$

B65 125 darab 1 cm^3 -es kis kockából fölépítünk egy tömör kockát.

a) Mekkora a kocka éle?

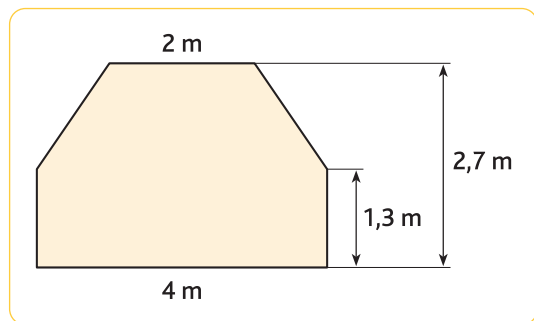
A: 25 cm; B: 15 cm; C: 5 cm; D: 10,5 cm

b) Az így felépített nagy kocka minden csúcjáról elveszünk egy egységkockát. Hogyan változik a keletkezett test térfogata?

A: 6 cm^3 -rel csökken. B: 8 cm^3 -rel csökken. C: 12 cm^3 -rel csökken.

c) Hogyan változik a keletkezett test felszíne?

A: 8 cm^2 -rel csökken. B: 24 cm^2 -rel csökken. C: Nem változik.



B66 Egy beépített padlástér két szemköztes falának méreteit az ábra mutatja. A többi fala téglalap alakú, és a szoba hosszúsága 5 m.

Négy fűtőtest közül választhatunk. Ezek 50 m^3 , 80 m^3 , 120 m^3 , illetve 150 m^3 légteret képesek befűteni. Melyik fűtőtestet szereltesük föl? Azt amelyik

A: 50 m^3 légtér befűtésére elegendő;

B: 80 m^3 légtér befűtésére elegendő;

C: 120 m^3 légtér befűtésére elegendő;

D: 150 m^3 légtér befűtésére elegendő.

☉ Számítsd ki a vizsgált szabályos sokszögek belső szögeinek nagyságát!

B67 Két szabályos sokszög közül az egyiknek a belső szöge másfélszerese a másik sokszög belső szögének. Melyik lehet ez a két szabályos sokszög?

A: A háromszög és a hatszög.

B: A négyszög és a nyolcszög.

C: Az ötszög és a tízsög.

D: A hatszög és a tizenkétszög.

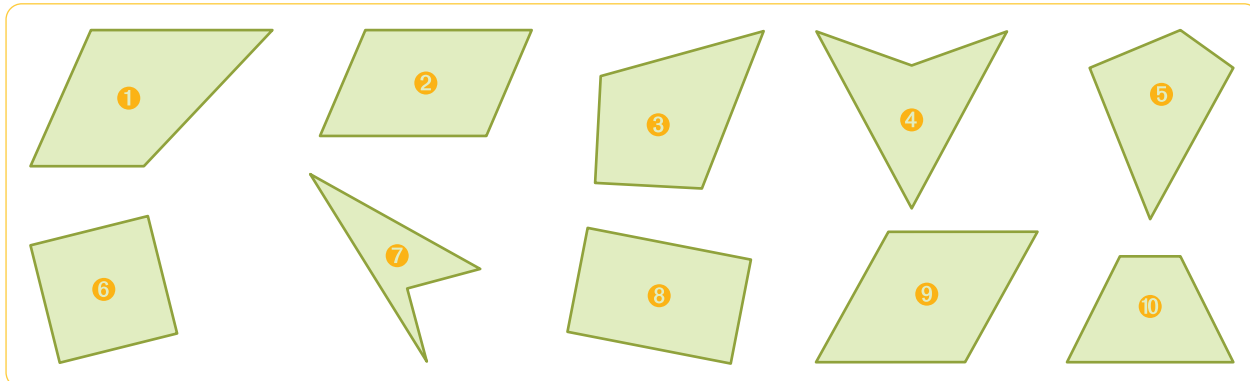
B68 Melyik körnek 2 cm az átmérője, ha a kerülete

A: $K = 4 \cdot \pi$ cm; B: $K = 3 \cdot \pi$ cm; C: $K = 2 \cdot \pi$ cm; D: $K = 1 \cdot \pi$ cm?

TUDÁSPRÓBA

123 A feleletválasztásos feladatok esetén mindig egy választ jelöljünk meg.

1



A fenti négyszögekre vonatkozó állítások közül melyik hamis?

- A:** Az 1, a 2, a 6, a 8, a 9 és a 10 trapéz, a többi négyszög nem az.
B: Csak a 6 és a 9 rombusz, a többi négyszög nem rombusz.
C: Csak a 3, a 4 és a 9 deltoid, a többi négyszög nem deltoid.
D: Csak a 6, a 8 és a 10 húrtrapéz, a többi négyszög nem húrtrapéz.

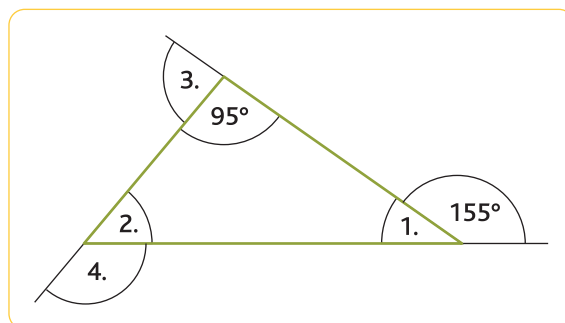
☉ A hamis állítás betűjelét jelöld meg!

2

Számítsd ki, hogy hány fokok a rajzon megszámozott szögek!

☉ Jelöld meg a hibásan megadott szöget!

- A:** $\angle 1 = 25^\circ$; **B:** $\angle 2 = 55^\circ$;
C: $\angle 3 = 85^\circ$; **D:** $\angle 4 = 120^\circ$;



3

Melyik átváltás helyes?

- A:** $0,65 \text{ ha} = 6,5 \cdot 10^3 \text{ m}^2$; **B:** $0,65 \text{ ha} = 6,5 \cdot 10^2 \text{ m}^2$; **C:** $0,65 \text{ ha} = 6,5 \cdot 10^6 \text{ m}^2$

☉ A hektár rövidítése: ha.

4

Melyik átváltás helyes?

- A:** $0,65 \text{ m}^3 = 6,5 \cdot 10^1 \text{ hl}$; **B:** $0,65 \text{ m}^3 = 6,5 \cdot 10^2 \text{ l}$; **C:** $0,65 \text{ m}^3 = 6,5 \cdot 10^4 \text{ dl}$

☉ A helyes átváltás betűjelét jelöld meg!

5

Egy egyenes körhenger alakú konzervdoboz alapköre átmérőjének a hosszúsága $d = 5,2 \text{ cm}$, magassága $m = 3,4 \text{ cm}$.

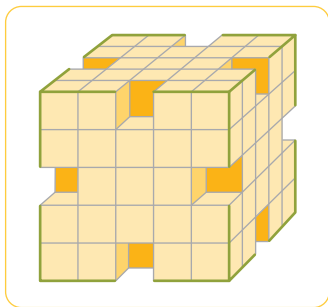
a) Mennyi a felhasznált lemez területe?

- A:** $2 \cdot 5,2^2 \cdot \pi + 3,4 \cdot 5,2 \cdot \pi \approx 255 \text{ cm}^2$; **B:** $2 \cdot 2,6^2 \cdot \pi + 3,4 \cdot 2,6^2 \cdot \pi \approx 111 \text{ cm}^2$;
C: $2 \cdot 5,2 \cdot \pi + 3,4 \cdot 2,6^2 \cdot \pi \approx 105 \text{ cm}^2$; **D:** $2 \cdot 2,6^2 \cdot \pi + 3,4 \cdot 5,2 \cdot \pi \approx 98 \text{ cm}^2$

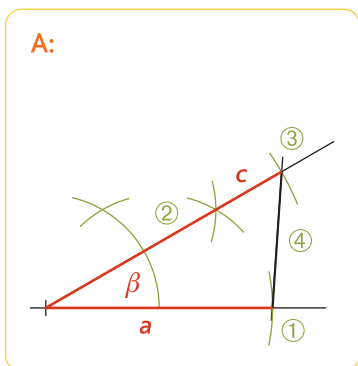
☉ Mindkét kérdésnél jelöld meg a helyes számítást!

b) Mennyi paradicsompüré fér ebbe a dobozba?

- A:** $3,4 \cdot 5,2^2 \cdot \pi \approx 289 \text{ cm}^3$; **B:** $5,2 \cdot 3,4^2 \cdot \pi \approx 189 \text{ cm}^3$;
C: $2,6^2 \cdot \pi \cdot 3,4 \approx 72 \text{ cm}^3$; **D:** $2,6 \cdot 3,4^2 \cdot \pi \approx 94 \text{ cm}^3$



☉ A megszokott jelöléseket használjuk.



☉ A helyes szerkesztési terv, illetve a helyes értékek betűjelét karikázd be!

☉ A megszokott jelöléseket használjuk.

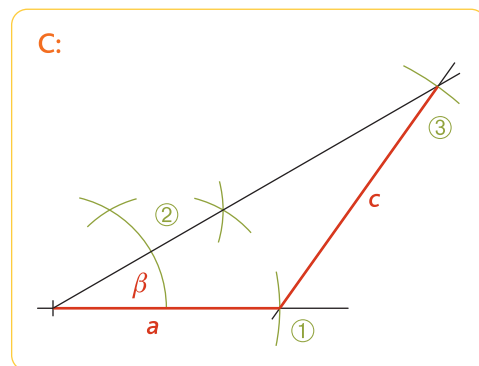
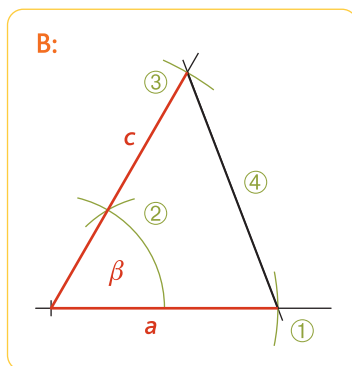
☉ Jelöld meg a helyes válasz betűjelét!

6 125 darab 1 cm^3 -es kis kockából fölépítünk egy tömör kockát. Az így fölépített nagy kocka minden élének közepéről elveszünk egy egységkockát.

- a) Hogyan változik a keletkezett test térfogata?
A: 6 cm^3 -rel csökken. **B:** 8 cm^3 -rel csökken. **C:** 12 cm^3 -rel csökken.
- b) Hogyan változik a keletkezett test felszíne?
A: 24 cm^2 -rel csökken. **B:** 24 cm^2 -rel nő. **C:** Nem változik.

7 Szerkessz háromszöget, ha $a = 3\text{ cm}$; $c = 3,6\text{ cm}$; $\beta = 30^\circ$.

a) Melyik szerkesztési terv helyes?



- b) Szerkessz meg, majd határozd meg az a oldalhoz tartozó m_a magasságot! Melyik érték helyes?
A: $m_a = 3,6\text{ cm}$; **B:** $m_a = 2,8\text{ cm}$; **C:** $m_a = 2,4\text{ cm}$; **D:** $m_a = 1,8\text{ cm}$
- c) Mennyi a háromszög területe?
A: $T = 10,8\text{ cm}^2$; **B:** $T = 5,4\text{ cm}^2$; **C:** $T = 2,7\text{ cm}^2$; **D:** $T = 3,2\text{ cm}^2$

8 Melyik három adatból nem szerkeszthető meg egyértelműen a háromszög?

- A:** $a = 4\text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 105^\circ$; **B:** $a = 4\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$;
C: $a = 4\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$, $c = 5\text{ cm}$; **D:** $a = 4\text{ cm}$, $c = 5\text{ cm}$, $\beta = 75^\circ$

9 Egy kertész 5 m átmérőjű kör alakú ágyás füvesítését tervezte. Négyzetméterenként 40 g fűmagot kellett elvetnie.

- a) Összesen hány dekagramm fűmagot kellett elvetnie a terv alapján?
A: $62,8\text{ dkg}$ -ot; **B:** $78,5\text{ dkg}$ -ot; **C:** $125,6\text{ dkg}$ -ot; **D:** 314 dkg -ot
- b) Az 5 m átmérőjű kör alakú ágyás szegélyére, egymástól egyenlő távolságra 50 virágpalántát kívánt elültetni. Új terv szerint viszont úgy növelték az ágyás átmérőjét, hogy 50 palánta helyett már 70 -re volt szükség ahhoz, hogy ugyanakora távolságra legyenek a palánták egymástól, mint az eredeti terv szerint. Hogyan változott az új terv szerint a füvesítésre szánt fűmag mennyisége?
A: Mintegy 2 -szeresére nőtt. **B:** Körülbelül $1,4$ -szeresére nőtt.
C: Mintegy 4 -szeresére nőtt. **D:** Körülbelül 20 dkg -mal nőtt.

6. ÖSSZEFOGLALÓ



> SZÁMTAN, SZÁMELMÉLET, ALGEBRA

FELADATOK

- 1 a) Írd föl a következő számokat tíz hatványként!
Tíz; száz; tízezer; egymillió; ezermillió; tízbillió; ezertrillió
- b) Írd föl a következő számokat számjegyekkel, majd normálalakban!
Négyszázhuszonöt; ezerötszázhuszonnyolc;
kétezer-ötszázharminckilenc; huszonötezer-kétszáz;
tizenkétfélmillió-ötvenkétezer; tizenötezermillió-húszezer

- 2 Határozd meg az ismeretlen kitevőket!

- a) $150 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^2 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^x \text{ m} = 1,5 \cdot 10^y \text{ dm} = 1,5 \cdot 10^z \text{ mm}$
b) $150 \text{ hl} = 1,5 \cdot 10^x \text{ l} = 1,5 \cdot 10^y \text{ dl} = 1,5 \cdot 10^z \text{ cl} = 1,5 \cdot 10^u \text{ ml}$
c) $150 \text{ t} = 1,5 \cdot 10^x \text{ kg} = 1,5 \cdot 10^y \text{ dkg} = 1,5 \cdot 10^z \text{ g} = 1,5 \cdot 10^u \text{ mg}$

- 3 1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 35; 36; 640; 750; 2000; 3675; 42 576; 88 200
A felsorolt számok közül válaszd ki

- a) a **prímszámokat**, illetve az **összetett számokat**;
b) a 2-vel, az 5-tel, illetve a 10-zel osztható számokat;
c) a 4-gyel, a 25-tel, a 20-szal, az 50-nel, a 100-zal osztható számokat;
d) a 3-mal, illetve a 9-cel osztható számokat;
e) a 6-tal, a 15-tel, illetve a 36-tal osztható számokat!

- 4 A hányadost két tizedesjegy pontossággal határozd meg!

- a) $245,6 : 12$; b) $47,2 : 23$; c) $207,8 : 2,5$; d) $65,1 : 92,6$;
e) $5 : 0,01$; f) $7,5 : 0,1$; g) $0,009 : 0,0001$; h) $3,5 : 0,0005$

- 5 Számítsd ki a műveletsorok eredményét!

- a) $40 - 12,5 \cdot 0,8$; b) $40 - 12,5 \cdot 80$; c) $(40 - 12,5) \cdot 0,8$;
d) $25 + 10 : 0,4$; e) $2,5 + 10 : 0,04$; f) $(2,5 + 10) : 0,4$;
g) $0,05 \cdot 200 - 20 \cdot 0,5$; h) $0,05 \cdot (200 - 20 \cdot 0,5)$; i) $(0,05 \cdot 200 - 20) \cdot 0,5$

A második világháború után a világtörténelem legsúlyosabb inflációja volt Magyarországon. Az inflációt 1946-ban a forint bevezetése szüntette meg. Ekkor 1 forint négyszáz-ezerkvadrillió pengővel lett egyenértékű. Írd le számjegyekkel és normálalakban ezt a számot!

☉ *Ismételjük át az osztóhatósági szabályokat.*

☉ *Ellenőrizd számításod helyességét!*

☉ *Ügyelj a helyes műveleti sorrendre!*



Fejezzük ki a 100-at az egyjegyű természetes számok egyszeri felhasználásával, összeadással és szorzással.

Fejtorló!

☉ *Hogyan módosítja a zárójel a műveleti sorrendet?*

- 6 Számítsd ki a műveletsorok eredményét!
- a) $(15 - 25) \cdot (42 - 20)$; $15 - 25 \cdot (42 - 20)$; $15 - (25 \cdot 42 - 20)$;
b) $[45 - 75 : (-3)] \cdot 5$; $45 - 75 : (-3 \cdot 5)$; $(45 - 75) : (-3) \cdot 5$;
c) $40 \cdot [-8 : (-2) - 14]$; $40 \cdot (-8) : (-2 - 14)$; $40 \cdot (-8) : (-2) - 14$;
d) $[75 - (-25)] : [25 + (-5)]$; $75 - (-25) : 25 + (-5)$; $[75 - (-25)] : 25 + (-5)$

- 7 Számítsd ki a műveletsorok eredményét!

a) $\frac{5}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1$; b) $\frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{2}{3}$; c) $\frac{12}{45} - \frac{15}{20} + \frac{2}{3} - 2\frac{1}{4}$;
d) $\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{5} - \frac{4}{5} : 8$; e) $\frac{8}{7} : \frac{16}{21} \cdot \frac{2}{3}$; f) $\frac{32}{25} : \frac{16}{25} + \frac{3}{4} \cdot 1\frac{5}{3}$

☉ *Hogyan értelmezzük egy 0-tól különböző szám nulladik hatványát?*

- 8 Számítsd ki a következő hatványok értékét!
- a) 5^3 ; b) 5^1 ; c) 5^0 ; d) $(-5)^3$; e) $(-5)^4$; f) $\left(\frac{5}{2}\right)^3$

☉ *Vigyázz az előjelekre a zárójelek felbontásakor!*

- 9 Írd föl egyszerűbb alakban a következő kifejezéseket, és számítsd ki az értéküket, ha $a = 10$; $b = -5$!
- a) $3(2a + 4b) + 2(3a - b)$; b) $5(3a - 2b) - 3(5a - 5b)$;
c) $(-4)(a - b) - (5a - 2b)$; d) $15a - [2b + 2(a - 5b)]$

☉ *Ellenőrizd a megoldást!*

- 10 Oldd meg a következő **egyenleteket**! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$. Az egyenletek közül melyik **azonosság**?
- a) $3a + 15 = -2(5 + a)$; b) $3(2b - 4) = 9b - (5 + 3b)$; c) $8c - 10 = 4 \cdot (2c - 2,5)$;
d) $15 : d - 4 = -\frac{1}{2}$; e) $\frac{6e - 12}{3} = 5e - (3e + 4)$; f) $\frac{5f}{12} - \frac{3}{4} = \frac{f}{6} + \frac{5}{3}$

☉ *Hogyan ellenőrizhető a megoldás?*

- 11 Oldd meg a következő **egyenlőtlenségeket**! Az alaphalmaz a $\mathbb{Q}$. Melyik **azonos egyenlőtlenség**?
- a) $2a - 2,5 \geq -2 \cdot (2 + 0,5a)$; b) $2 \cdot (2b - 4) > 3b - (2 - b) - 0,2$;
c) $0,8c - 1,2 > -2(1 - 0,4c)$; d) $1,5d - 2 \cdot (4,25d - 2) \geq -\frac{5}{2}$

Figyelempróba

☉ *Értelmezd a feladatot! Írd fel az adatok közti összefüggést! Becsüld meg, majd számítsd ki az eredményt! A szöveg alapján ellenőrizd a megoldást!*

- 12 a) Bélának 3-szor annyi, Csabának 30-cal több könyve van, mint Andrásnak. Hány könyvük van külön-külön, ha összesen 255 könyvük van?
b) Katinak kevesebb pénze van, mint Lillának és Móninak együtt. Hány forintjuk lehet külön-külön, ha Katinak háromszor annyi, Lillának 150 Ft-tal több pénze van, mint Móninak?
c) Gondoltam egy számot. megszorozom 2-vel, és hozzáadok nyolcat. Ha 200-ból elveszem az így képzett összeget, akkor a gondolt szám kétszeresénél nagyobb számot kapok. Melyik természetes számra gondolhattam?
d) Kati zsebpénzének a 45%-áért könyvet vásárolt. A zsebpénz 20%-ánál 150 Ft-tal többet költött mozijegyre. Ekkor még több pénze maradt, mint az eredeti zsebpénz 30%-a. Mennyi pénze lehetett eredetileg?

B1

A 0, 2, 4, 5, 6, 9 számjegyekből hány háromjegyű szám képezhető, ha mindegyik számjegyet csak egyszer használhatjuk föl?

Az így képzett háromjegyű számok közül hány osztható

a) 2-vel; b) 3-mal; c) 4-gyel; d) 5-tel; e) 9-cel; f) 25-tel?

B2

Bontsd prímszámok szorzatára a számokat!

a) Számítsd ki a számok legnagyobb közös osztóját!

(180; 450), (240; 480), (450; 480), (180; 450; 240)

b) Egyszerűsítsd a törtet! $\frac{180}{450}$; $\frac{240}{480}$; $\frac{480}{450}$

c) Számítsd ki a számok legkisebb közös többszörösét!

[180; 450], [240; 480], [450; 480], [180; 450; 240]

d) Végezd el az összevonásokat!

$\frac{1}{450} + \frac{7}{180}$; $\frac{107}{240} - \frac{7}{480}$; $\frac{7}{180} - \frac{1}{450} + \frac{50}{240}$

☉ Tankönyv 29. oldal.

☉ Tankönyv 36. oldal.

☉ Tankönyv 30. oldal.

☉ Tankönyv 37. oldal.

B3

Számítsd ki a műveletsor eredményét!

a) $\left(0,85 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{2}{9} \cdot 0,9\right)$; b) $\left(0,05 - 0,6 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{7}{9} : \frac{5}{9}\right)$;

c) $\left(1,35 - \frac{5}{4} + \frac{7}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} : \frac{1}{8}\right)$; d) $\left(0,75 - 0,7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3}\right)$;

e) $500 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - 0,4\right)$; f) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{5}{4} - 0,3\right)$

☉ Meggondoltad, hogy a szám törtalakja, illetve tizedestört alakja közül melyikkel célszerű számolnod?
Ha ésszerűen dolgozol, akkor az eredményt „fejben” is megkaphatod.

B4

- a) Két szám összege 2, az egyik szám 1-gyel nagyobb a másikonál. Melyik ez a két szám?
- b) Az ásványvízzel telt üveg 128 Ft-ba kerül. Az ásványvíz 80 Ft-tal drágább, mint az üveg. Hány forint az üres üveg?
- c) 2 m 60 cm vászonból szoknyát és blúzt varrnak. Mennyi anyagra van szükség a szoknya varrásához, ha a szoknyához 20 cm híján kétszer annyi vászon kell, mint a blúzhoz?
- d) A 7. osztály kirándulni ment. Tíz perc híján 3 óra hosszat tartott a kirándulás. 50 perccel többet mentek gyalog, mint busszal, más járműre nem szálltak. Mennyi ideig gyalogoltak?
- e) Három könyvespolcon összesen 720 könyv van. Az első polcon 15 könyv híján háromszor annyi van, mint a másodikon. A harmadikon annyi van, mint az első és a második polcon összesen. Hány könyv van az egyes polcokon?
- f) Egy 25 m hosszú, 4 kg tömegű dróttekereszt kétfelé vágnak. Az egyik rész 800 g-mal több, mint a másik. Milyen hosszú a két rész külön-külön?
- g) Amikor én 5 éves voltam, a bátyám 9 éves volt. Hány éves vagyok most, ha összesen 36 évesek vagyunk?

Figyelempróba



☉ **Ügyelj a helyes műveleti sorrendre!**

A zárójel hogyan módosítja a műveletek sorrendjét?

B5 Mennyi az algebrai kifejezések helyettesítési értéke, ha $p = 4,5$; $q = 2,5$; $r = -2,5$; $s = -2$?

- | | | | |
|----|--------------------------|------------------------|------------------------|
| a) | $(2p - 2,5) \cdot 2^2$; | $2p - 2,5 \cdot 2^2$; | $(2p - 2,5 \cdot 2)^2$ |
| b) | $2(p - 1,5) \cdot s^2$; | $2p - (1,5s)^2$; | $2(p - 1,5s)^2$ |
| c) | $2(p - q) \cdot s^2$; | $2p - qs^2$; | $(2p - qs)^2$ |
| d) | $2(p - r) \cdot s^2$; | $2p - rs^2$; | $(2p - rs)^2$ |

B6 Írd föl algebrai kifejezéssel:

- a) az a szám 5-szörösénél 3-mal nagyobb számot;
 b) a b szám $\frac{3}{4}$ részénél 2-vel kisebb számot;
 c) a c -edik pozitív páros szám után következő páratlan számot;
 d) a d és az e szám különbségének 15-szörösét!

☉ **Mely tagok vonhatók össze?**

- B7** Vond össze!
- | | | | |
|----|---|----|---|
| a) | $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} - \frac{1}{2} + 1$; | b) | $\frac{b}{4} + \frac{b}{6} - \frac{2}{3}$; |
| c) | $\frac{7c}{15} - \frac{15}{20} + \frac{c}{3} - \frac{1}{4}$; | d) | $\frac{d}{5} + d - \frac{12}{35} + 1$; |
| | | e) | $\frac{3e}{14} - \frac{1}{3} - \frac{e}{6}$ |

☉ **Hogyan ellenőrizöd munkád helyességét?**

B8 Írd föl szorzatalakban a következő kifejezéseket!

- a) $8a^2 - 4ab + 6a$; b) $9b^3 - 6ab^2 + 12ab$; c) $5abc^2 - 10a^2bc + 5ab$

Figyelempróba

B9 Az itt látható fejtörő neve **logigrafika**. A táblázatban egyes mezőket ki kell színezní, így egy kép alakul ki.

	3	3	5	3	9	3	5	3	4
$(3a - b) - 2(a - b)$									
$a - b + 2b + a + 2c$									
$3(a - 2c) + 2(2a + 3c)$									
$3(2a - a) + 4a$									
$(2 \cdot 3)a + b - (a + b)$									
$b + 4(a - c) + (10c - 8a) : 2$									
$(2b + 3c) : 2 + (2a + c) : 2$									
$3(b + c) - 2(b - a)$									
$2(6a + 10b) : 4$									
$5a - 7(b - 5c + c - b + 4c)$									

Az oszlopok tetején látható számok azt jelzik, hogy a színes négyzetek milyen csoportokban helyezkednek el az adott oszlopban, például az $5 \ 2$ azt jelenti, hogy egymástól legalább egy-egy fehér mezővel elválasztva egy ötös és egy kettes színes csoport található valahol; a 4 magában azt jelenti, hogy csak egy összefüggő négyes csoport van az oszlopban.

A feladványt azzal nehezítettük, hogy a sorok mellé nem írtuk ki a számokat, azokat neked kell az algebrai kifejezésekből leolvasnod. Ezek a számok sorban az a , b , c változók összevonás utáni együtthatói lesznek. (Pl. $a + b + 2c \rightarrow 1 \ 1 \ 2$) Jó szórakozást!

☉ **Egy példa:**

		1		1	3	2
1	2					
3						
1	1					

- B10** a) Mely számok írhatók le 2 db 9-essel?
 b) Fejezd ki a 100-at 10 db 9-essel!

B11 Amikor Bolditól megkérdezték, hogy hány éves, a következő választ adta: Éveim száma egész szám. A húgom 2 évvel fiatalabb, a bátyám 3 évvel idősebb nálam. Ha húgom életkorának a hatszorosához hozzáadjuk a bátyám életkorának a négyszeresét és még 5-öt, akkor 25-tel osztható számot kapunk. Hány éves lehet Boldi, ha tudjuk, hogy iskolába jár?

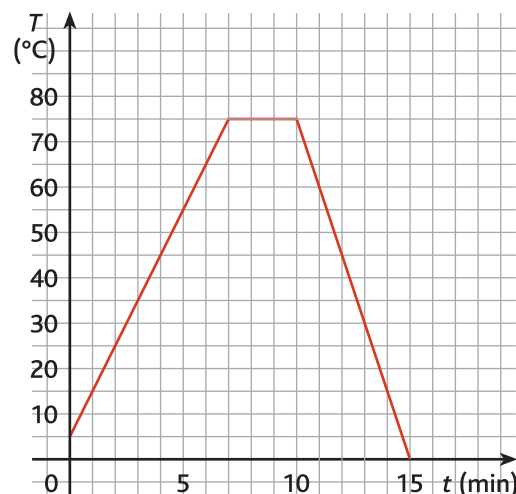
FÜGGVÉNYEK

13

Egy folyadékot forráspontjáig felmelegítenek, egy darabig forralják, majd hűlni hagyják. A **grafikon** segítségével egészítsd ki a táblázatot!

t (min)	0	1	2	6	7	9	10	15
T (°C)	5							

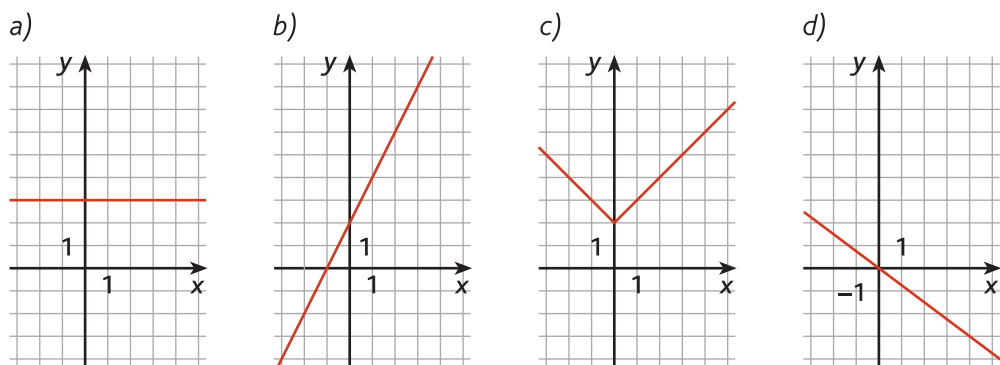
- A grafikon időtengelyén húzd meg kézzel azt a szakaszt, ahol az anyag hőmérséklete csökkent!
- Jelöld pirossal azt az időpontot, amikor a folyadék hőmérséklete 55 °C!
- Percenként hány fokkal nőtt az anyag hőmérséklete?
- A melegítés megszűntével percenként hány fokkal csökkent az anyag hőmérséklete?



14

A következők közül melyik grafikon tartozhat **lineáris függvényhez**? A lineáris függvények esetén írd föl az összefüggés szabályát!

A lineáris függvények közül melyik **elsőfokú függvény**, melyik **egyenese arányosság**, melyik **nulladfokú függvény**?



15

Rajzold meg a következő lineáris függvények grafikonját, ha az **alaphalmaz** és a **képhalmaz** a $\mathbb{Q}$!

- | | | | |
|----|----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| a) | $x \mapsto 1,5x;$ | $x \mapsto 1,5x + 3;$ | $x \mapsto 1,5x - 3;$ |
| b) | $x \mapsto -2x;$ | $x \mapsto -2x + 3;$ | $x \mapsto -2x - 3;$ |
| c) | $x \mapsto \frac{2}{3}x;$ | $x \mapsto \frac{2}{3}x + 2,5;$ | $x \mapsto \frac{2}{3}x - 2,5;$ |
| d) | $x \mapsto -\frac{3}{2}x;$ | $x \mapsto -\frac{3}{2}x + 4;$ | $x \mapsto -\frac{3}{2}x - 4;$ |
| e) | $x \mapsto \frac{5}{4}x;$ | $x \mapsto -\frac{5}{4}x + 3;$ | $x \mapsto \frac{4}{5}x - 4;$ |

☉ **Hogyan állapítható meg a grafikon meredeksége? Hol metszi a grafikon az y tengelyt?**



Milyen összefüggés van az 1 cm oldalhosszúságú n oldalú szabályos sokszög oldalainak száma (n) és a sokszög

- a) átlóinak száma; b) kerülete; c) belső szögeinek összege között?

☉ **A vizsgált összefüggések közül melyik egyenes arányosság, melyik lineáris függvény?**

16 Válaszd ki az **egyenes**, illetve a **fordított arányosságokat**!

- Ha egy mennyiséget kétszeresére, háromszorosára, ... növelünk, akkor a hozzá tartozó értékek is kétszeresére, háromszorosára, ... növekednek.
- Ha egy mennyiséget felére, harmadára, ... csökkentünk, akkor a hozzá tartozó értékek kétszeresére, háromszorosára, ... növekednek.
- Ha egy mennyiséget kettővel, hárommal, ... növelünk, akkor a hozzá tartozó értékek kettővel, hárommal, ... csökkennek.
- Ha egy mennyiséget felére, harmadára, ... csökkentünk, akkor a hozzá tartozó értékek felére, harmadára, ... csökkennek.

☉ *Hogyan számítható ki a százaléérték, ha ismert az alap és a százalékláb?*

☉ *Hogyan kerekítjük a kapott értékeket?*

☉ *Hogyan számítható ki az alap a százaléérték és a százalékláb ismeretében?*

☉ *Hogyan számítható ki a százalékláb, ha az alap és a százaléérték adott?*

17 a) Mennyi az 500 kg | 1%-a; | 10%-a; | 25%-a; | 38%-a; | 100%-a; | 150%-a? |

b) Három tanuló papírhulladékért 540 Ft-ot kapott. A teljesítménynek megfelelően a pénz 25%-a Olgaé, 48%-a Péteré, a fennmaradó rész Robié lett. Hány forintot kaptak külön-külön a tanulók?

c) Balázs a megtakarított 1500 €-ját kamatozó kötvényben helyezte el évi 12%-os kamatra. Mennyi pénzt kapott vissza két év múlva?

18 a) Egy kertész a bevételeinek 24%-át, 60 000 Ft-ot szállításra költött. Mennyi volt a bevétele?

b) A rozsdamentes acélötvözet 18%-a króm, 9%-a nikkel, a fennmaradó része acél. Hány tonna acélötvözet készítéséhez használtak fel 360 kg nikkelt? Mennyi krómot használtak fel ennyi ötvözethez?

19 a) A 400 €-nak hány százaléka a
| 20 €; | 48 €; | 200 €; | 312 €; | 362 €; | 400 €; | 700 €? |

b) Az 1,5 t-nak hány százaléka a
| 15 kg; | 60 kg; | 150 kg; | 157,5 kg; | 750 kg; | 1500 kg; | 3450 kg? |

20 Az ábrán egy park térképe látható. Mérd meg a távolságokat a térképen!

Számítsd ki a tereptárgyak valódi távolságát az adott **méretarányok** esetén!



	Térképen (cm)	Valóságban	
		1 : 2000	1 : 10 000
Kút – út			
Kút – szobor			
Út – szobor			
Kapu – kút			
Kút – tó			
Kapu – szobor			
Szobor – tó			
Fenyőfa – tó			

- B12** a) Péter és Robi testmagasságának az **aránya** 4 : 5. Milyen magas Robi, ha Péter 124 cm?
- b) Egy tervrajz méretaránya 1 : 25. Mennyi a valóságban az a hosszúság, ami a tervrajzon 12 cm?
- c) Egy térkép méretaránya 1:25 000. Mennyi a valóságban az a távolság, ami a térképen 1,2 cm?
- d) 96 g ötvözetben az arany és az ezüst aránya 7 : 5. Hány karátos ez az ötvözet, ha egy karát $\frac{1}{24}$ rész aranytartalmat jelent?
- e) Egy háromszög belső szögeinek aránya 3 : 4 : 5. Mekkora a háromszög szögei? Szerkeszd meg ezeket a szögeket!

☉ *Ami a tervrajzon 1 cm, az a valóságban hány centiméter?*

☉ *Mennyi a háromszög belső szögeinek az összege?*

B13 Hogyan változik az arány értéke, ha az arányban az

- a) osztandót 4-gyel szorozzuk; b) osztót 4-gyel szorozzuk;
 c) osztandót és az osztót 4-gyel szorozzuk;
 d) osztandót és az osztót fölcseréljük?

☉ *Gondolj a hányados változásaira!*

- B14** a) Egy udvart 3 munkás 12 óra alatt betonoz le. Mennyi idő alatt betonozná le ezt az udvart 1; 2; 4; 6; 9; 12; 18; ... munkás?
- b) Ági édesanyja 1360 Ft-os kolbászt vesz. Mennyit fizet, ha 20 dkg-ot; 50 dkg-ot; 0,75 kg-ot; 2,5 kg-ot vásárol?
- c) Ági édesanyja 1440 Ft-ért kolbászt vásárol. Mennyit vehet a 720 Ft-os; a 960 Ft-os; a 2160 Ft-os kolbászból ezért a pénzért?

☉ *A munkatempót változatlanul feltételezve.*

- B15** 1 cm³ fenyőfa tömege 0,5 g. Mennyi a tömege 2 cm³; 2,5 cm³; 4 cm³; 6 cm³; 40 cm³; x cm³ fenyőfának?

☉ *Milyen összefüggés van adott sűrűség mellett a térfogat és a tömeg között?*

B16 Mekkora a térfogata 24 g tömegű anyagnak, ha a sűrűsége

- a) $\rho = 0,1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; b) $\rho = 0,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; c) $\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; d) $\rho = 2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?

☉ *Milyen összefüggés van adott tömeg mellett a térfogat és a sűrűség között?*

- B17** Milyen összefüggés van a trapéz két alapja között, ha a területe 40 cm², és a magassága 5 cm?

☉ *Emlékszel a trapéz területképletére? (Lásd 226. oldal.)*

B18 Oldd meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket! Alaphalmaz a $\mathbb{Q}$.

- a) $2x - 3 = -x + 6$; b) $x + 2 = -2x - 4$; c) $2x + 2 < -2x - 6$;
 d) $2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 4$; e) $x - 5 \geq -\frac{3}{4}x + 2$; f) $\frac{x}{3} + 2 \leq 3x - 6$

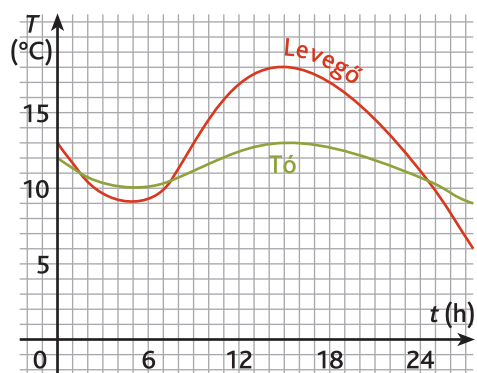
☉ *Rajzold meg a bal, illetve jobb oldalon álló kifejezésekkel értelmezett függvények grafikonját! Hogyan olvasható le a megoldás?*

Négy turista a 36 km-es utat 9 óra alatt tette meg. Ugyanilyen sebességet feltételezve mennyi idő alatt tette volna meg ezt az utat 3 turista?

Többet ésszel ...

☉ A kert területének hány százalékát gyomlálta ki Dénes?

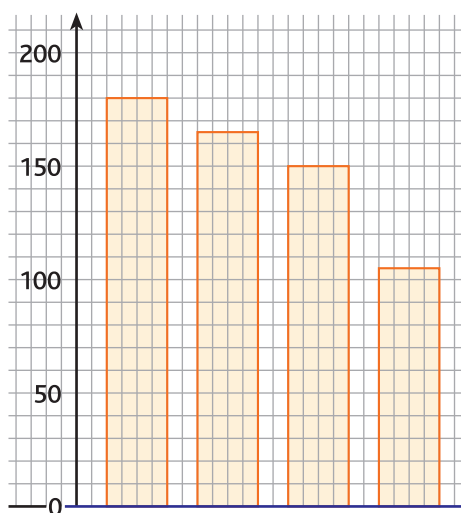
B19 Négy fiú kigyomlált egy veteményeskertet. Albert a kert 20%-át, Béla 25%-át, Csaba 40%-át, Dénes 60 m²-t gyomlált ki. Mekkora volt a kert?
Mekkora területet gyomlált ki egy-egy fiú?



B20 Egy tó és a levegő hőmérsékletének változását szemlélteti a grafikon.

Karikázd be pirossal a grafikon időtengelyén azokat az időpontokat, amelyekben a tó vizének és a környező levegőnek a hőmérséklete megegyezett!

Színezd késsel a grafikon időtengelyén azokat az időpontokat, amelyekben a víz hőmérséklete magasabb, mint a levegőé!



B21 Januárban egy üzemben ugyanabból a típusból négy színben (arany, bordó, ezüst, fekete) gyártottak kerékpárokat.

A különböző színben legyártott kerékpárok darabszámát az **oszlopdiagram** szemlélteti. Információink szerint az ezüst színűből 15-tel kevesebbet gyártottak, mint a bordóból, de 45-tel többet gyártottak, mint a feketéből.

a) Írd a grafikon egyes oszlopai alá a megfelelő szín kezdőbetűjét!

b) Hány kerékpárt gyártottak januárban összesen ebből a típusból?

A: 600-at; B: 460-at; C: 545-öt; D: 750-et

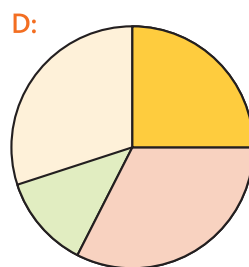
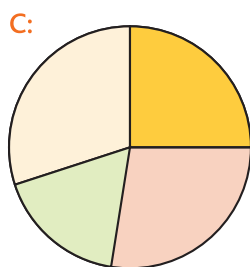
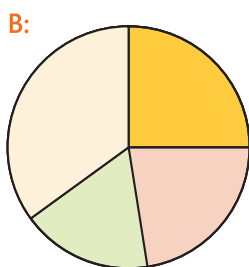
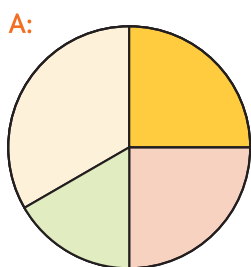
c) Az adott típusú kerékpárok hány százaléka volt arany színű?

A: 180%-a; B: 60%-a; C: 45%-a; D: 30%-a

☉ A helyes válasz betűjelének megjelölésével válaszolj a kérdésre! Indokold meg válaszod!

☉ Jelöld meg a helyes diagram betűjelét!

B22 A következő **kördiagramok** közül melyik szemlélteti az előző feladatban szereplő kerékpárok számának színek szerinti eloszlását?



☉ *Fibonacci* az arab számírásról 1202-ben írt könyvében található ez a feladat.



Hány pár nyúl lesz n hónap múlva, ha a (matek)nyulak örökké élnek és az első hónapban csak egyetlen újszülött nyúlpár van; az újszülött nyúlpárok két hónap elteltével válnak termékennyé; minden termékeny nyúlpár minden hónapban egy újabb párt szül?

GEOMETRIA, MÉRÉS

21 Minden esetben rajzolj egy $ABC\triangle$ -et és tetszőlegesen egy A' pontot! Szerkeszd meg azt az $A'B'C'\triangle$ -et, amely az $ABC\triangle$ képe, ha az **egybevágósági transzformáció**

- a) **eltolás**; b) **tengelyes tükrözés**; c) **középpontos tükrözés**!

Nevezd meg a szerkesztésekben kapott **szögpárokat**!

☉ *Sorold föl az adott egybevágósági transzformáció tulajdonságait!*

22 Szerkessz derékszögű háromszöget 4 cm-es és 5 cm-es befogókkal!
Forgasd el a háromszöget a derékszög csúcsa körül 180° -kal!
Jelöld meg a **váltószögeket**!

☉ *Hogyan nevezzük más szóval a 180° -os forgatást? Miért?*

23 Szerkessz rombuszt, ha oldala 3 cm, egyik szöge 75° !
Tükrözd tengelyesen a rombuszt, ha a **tükrőtengely**

- a) a rombuszon kívül van; b) a rombusz egyik oldalegyenese;
c) a rombusz egyik átlója; d) az egyik oldal felezőmerőlegese!

☉ *Hogyan szerkeszthető meg a 75° -os szög?*

24 Szerkessz 4 cm oldalú négyzetet! Átlóinak metszéspontját tükrözd mind a négy
a) oldalegyenesére; b) csúcspontjára!

Mindkét esetben kösd össze a tükrözéssel kapott négy pontot!

Mennyi az új alakzat és az eredeti négyzet területének aránya?

25 Egy négyzet alakú park négy sarkán szökőkút van. A parkot kétszer akkora területű, négyzet alakú parkká kívánják kibővíteni úgy, hogy a szökőkutak továbbra is a park szélén maradjanak. Hogyan oldható meg ez a bővítés?

Többet ésszel ...

26 Számítsd ki a **háromszög területét**, ha $a = 8$ cm, $m_a = 6$ cm!

☉ *Tankönyv 227. oldal.*

27 Szerkessz háromszöget, ha három oldala
a) 2,5 cm, 1,5 cm, 2 cm; b) 2 cm, 3 cm, 4 cm; c) 5 cm, 2 cm, 2,5 cm!

Számítsd ki a háromszögek kerületét! Mérd meg a háromszögek szögeit!

Melyik oldallal szemben van a legnagyobb szög?

☉ *Tankönyv 199. oldal.*

28 Szerkessz háromszöget, ha két oldala 4 cm, 3 cm,
az általuk közbezárt szög: a) 75° ; b) 90° ; c) 120° !

Mindegyik háromszögben szerkeszd meg a **magasságvonalakat**!

Számítsd ki a háromszögek területét! (A szükséges adatokat mérd meg!)

☉ *Tankönyv 198. oldal.*

29 Szerkessz háromszöget, ha egyik oldala 5 cm, a rajta fekvő két szög
a) 75° , 60° ; b) 60° , 30° ; c) 30° , 45° !

Számítással határozd meg a háromszögek harmadik szögét!

☉ *Tankönyv 199. oldal.*

☉ *A szögeket is szerkeszd!*

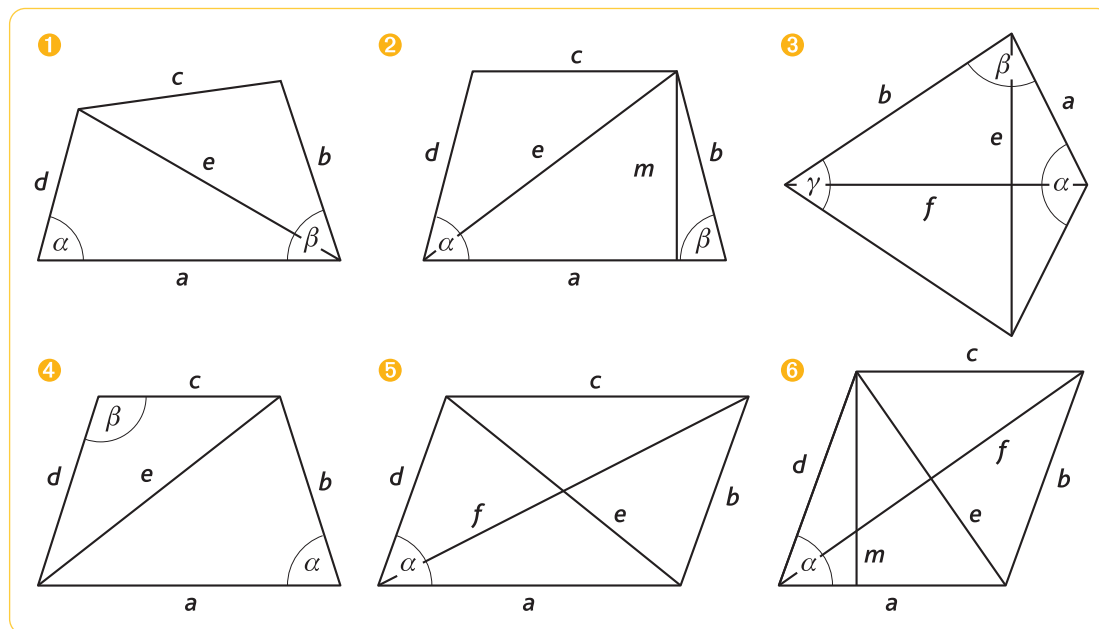
© Tankönyv 200., illetve 207. oldal.

© Számítsd ki a háromszögek területét!

- 30 Szerkessz háromszöget, ha egyik oldala 4 cm, egyik szöge 60° és a szöggel szemkötti oldal a) 4 cm; b) 5 cm; c) 3,5 cm; d) 2,5 cm!

- 31 Szerkessz **egyenlő szárú háromszöget**, ha a) a szára 5 cm, a szárszög 30° ; b) az alapja 4 cm, a szára 2,5 cm!

- 32 Nevezd meg a speciális négyszögeket! Sorold fel a speciális négyszögek tulajdonságait!



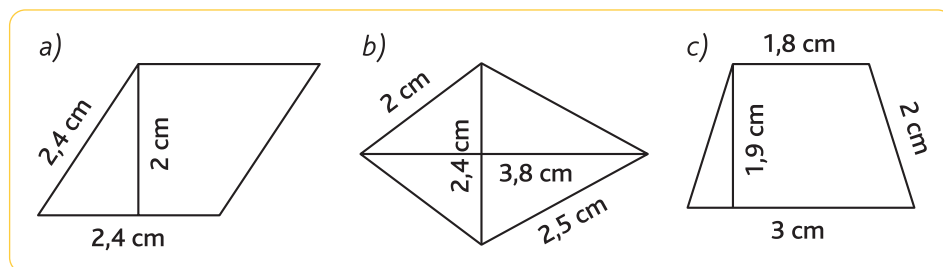
A szükséges adatok megmérése után számítsd ki a **négyszögek területét** és **területét**!

© Tankönyv 236., illetve 238. oldal.

- 33 Számítsd ki a **kör területét, területét**, ha a) sugara: $r = 5$ cm, $r = 75$ mm; b) átmérője: $d = 8$ cm, $d = 48$ mm!

- 34 Egy dobozban kockacukor van, amelyből egy szem tömege $2\frac{2}{9}$ g. A doboz élei mentén 6, 5, illetve 15 szem kockacukor fér el. Mennyi a tömege az egész doboz cukornak?

- 35 Hány olyan téglatest van, amely éleinek mérőszáma egész szám és a térfogata a) 120 cm^3 ; b) 123 cm^3 ; c) 125 cm^3 ? Számítsd ki a felszínüket! Van-e az ilyen téglatestek között kocka?



- 36 Mekkora a 3 cm magas **egyenes hasáb térfogata és felszíne**, ha az alaplapja az ábrán látható sokszögek valamelyike? Rajzold meg a **hasábok hálóját**!

© Tankönyv 254–257. oldal.

- 37 Vázold föl az **egyenes henger** hálóját, számítsd ki a **felszínét, térfogatát**! a) $r = 2$ cm, $M = 1,8$ cm; b) $d = 5$ cm, $M = 4$ cm

B23 a) Hány másodperc $2\frac{1}{4}$ min; $7\frac{2}{5}$ min; $9\frac{5}{6}$ min; $1\frac{13}{15}$ min; $5\frac{11}{2}$ min?

b) Az egyenesszöget jelölje π . Szerkessz olyan szöget, amelynek nagysága

$\frac{1}{3}\pi$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{7}{4}\pi$; $\frac{11}{12}\pi$; $\frac{13}{12}\pi$! Hány fokosak ezek a szögek?

☉ A min a perc jele (minutum = perc).

☉ Hány fokos az egyenesszög?

☉ Hogyan szerkesztjük meg egy szakasz felező-pontját?

B24 Szerkessz meg egy 7 cm hosszú szakasz $\frac{3}{8}$ részét! Számítsd ki a hosszúságát!

B25 A karát az ötvözetek nemesfém tartalmának a mérőszáma. 1 karát $\frac{1}{24}$ rész nemesfém tartalmat jelent.

Hány gramm arany van abban a 18 karátos ékszerben, amelynek a tömege $5\frac{4}{5}$ g? Mennyi benne az ezüst, ha az aranyat csak ezüsttel ötvözték?

Gyűjtőmunka

☉ Nézz utána! A gyémánt esetében mit jelent a „karát”? Honnan ered a „karát” elnevezés?

B26 Pótold a hiányzó **mérőszámokat, mértékegységeket** és (a normálalakban írt mérőszám esetén) a kitevőket!

a) $5,3 \text{ m}^2 = \square \cdot 10^{\square} \text{ dm}^2 = \square \text{ cm}^2 = \square \cdot 10^{\square} \text{ cm}^2 = \square \cdot 10^{\square} \text{ mm}^2$

b) $\square \text{ m}^2 = 7,2 \text{ dm}^2 = \square \text{ cm}^2 = \square \cdot 10^{\square} \text{ cm}^2 = \square \text{ mm}^2$

c) $0,5 \text{ ha} = \square \text{ m}^2 = \square \text{ km}^2 = \square \text{ dm}^2 = \square \cdot 10^{\square} \text{ dm}^2$

B27 Pótold a hiányzó mérőszámokat, mértékegységeket és kitevőket!

a) $9,2 \text{ hl} = \square \text{ m}^3 = 9200 \square = 9,2 \cdot 10^{\square} \text{ cm}^3 = 9,2 \cdot 10^2 \square$

b) $4,35 \text{ m}^3 = \square \text{ dm}^3 = \square \cdot 10^{\square} \text{ l} = \square \cdot 10^4 \square = 4,35 \cdot 10^{\square} \text{ ml}$

c) $0,04 \text{ hl} = \square \text{ l} = \square \text{ m}^3 = \square \text{ dm}^3 = \square \cdot 10^{\square} \text{ dl}$

B28 A számítás előtt a **vegyesszámot** sokszor célszerű törtalakban felírni.

a) Egy téglalap két oldala $3\frac{5}{6}$ cm és $2\frac{3}{5}$ cm. Mekkora a kerülete, területe?

b) Mekkora a téglalap kerülete, ha egyik oldala $2\frac{3}{5}$ cm, területe $3\frac{3}{12} \text{ cm}^2$?

☉ Gyakoroljuk a törtekkel végzett műveleteket is.

B29 Számítsd ki a **trapéz kerületét, területét**! Az a és c a trapéz **alapjait**, b és d a **szárait**, az m a **magasságát** jelöli.

a) $a = 8 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$, $d = 4 \text{ cm}$, $m = 2,4 \text{ cm}$

b) $a = 1,3 \text{ cm}$, $b = 3,9 \text{ cm}$, $c = 5,5 \text{ cm}$, $d = 4,5 \text{ cm}$, $m = 3,6 \text{ cm}$

c) $a = 6,8 \text{ cm}$, $b = 3,7 \text{ cm}$, $c = 6,8 \text{ cm}$, $d = 3,7 \text{ cm}$, $m = 3,0 \text{ cm}$

d) $a = 4,3 \text{ cm}$, $b = 2,5 \text{ cm}$, $c = 3,8 \text{ cm}$, $d = 3,1 \text{ cm}$, $m = 5,8 \text{ cm}$

☉ Ha megpróbálsz meg-szerkeszteni a trapézt, akkor felismerheted a csapdát.

A speciális trapéz esetén hogyan számolhatsz?

© Tankönyv 236., illetve 238. oldal.

© Rajzold meg a háromszögeket!

© Tankönyv 192. oldal.

© Hány megoldása van a feladatnak?



Figyelempróba

- B30** Egyenes arányosság van-e a kör
a) sugara és a kerülete között, b) átmérője és területe között?

- B31** A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög két csúcsa $A(-3; 0)$, $B(7; 0)$, az m_c 5 egység, és a C csúcs rácspon. Mik lehetnek a C csúcs koordinátái, ha a háromszög
a) derékszögű; b) tompaszögű; c) hegyesszögű?
Hány egység az egyes **háromszögek területe**?

- B32** Mely szöghármas lehet egy háromszög **külső szöge** (γ') és a nem mellette fekvő két **belső szöge**?
a) $\alpha = 78^\circ$, $\beta = 42^\circ$, $\gamma' = 60^\circ$; b) $\alpha = 58^\circ$, $\beta = 42^\circ$, $\gamma' = 100^\circ$

- B33** a) Egy **paralelogramma** két csúcspontjának koordinátái: $(1; 5)$ és $(7; 2)$, **szimmetria-középpontja** $(7; 5)$. Határozd meg a paralelogramma másik két csúcsának koordinátáit!
b) Egy paralelogramma három csúcspontjának koordinátái: $(-4; 0)$, $(-2; 4)$, $(4; 6)$. Határozd meg a paralelogramma negyedik csúcspontjának koordinátáit!

- B34** a) Egy 12 m hosszú, 8 m széles épület alá pincét is építettek, ezért 2,5 m mély gödröt ástak. Hány köbméter földet termeltek ki? Hányszor kellett fordulnia a földet elszállító erőgépnak, ha egyszerre 4 m^3 földet rakhattak fel rá?
b) Egy téglalap alapú medence hosszúsága 25 m, szélessége 16 m. A medencében 1,8 m mély víz van. Hány köbméter víz van a medencében? Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha másodpercenként 50 l vizet engednek bele?
c) Egy kocka alakú kötőmb élei 80 cm-esek. Hány kilogramm ez a kötőmb, ha 1 cm^3 ilyen kő tömege 2,2 g?
d) Egy téglatest alakú benzintartály három éle: 25 cm, 60 cm, 35 cm. Hány liter benzin fér a tartályba?
Hány kilogramm benzin fér a tartályba, ha 1 m^3 benzin 760 kg?

- B35** a) Egy henger alakú hordó alapköre 50,24 dm kerületű, a magassága pedig 90 cm. Hány liter víz fér bele?
Milyen magasan tölti meg a hordót 602,9 l víz?
b) Egy henger alakú lábas átmérője 20 cm, magassága 16 cm. Hány literes a lábas? Mennyi bádogot használtak fel az elkészítéséhez, ha a gyártási hulladék 20%?
c) 1 m^3 víz 7,96 m hosszú csőszakaszt tölt meg. Mekkora a cső átmérője?

- B36** Mekkora a 0,2 cm átmérőjű, 150 m hosszú rézhuzal tömege, ha a réz sűrűsége $\varrho = 8,96 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$?



KISLEXIKON

A dőlt betűvel szedett fogalmak külön szócikkben is megtalálhatók.

Zárójelben, zöld számjegyekkel szedve utalunk azokra az oldalakra, ahol az adott fogalmat értelmezzük, illetve ahol az adott fogalmat más fogalmak értelmezésére alkalmazzuk.

Abszolútérték: (10. oldal).

Alap: 1. hatványalap (14. oldal), 2. egyenlő szárú háromszög oldalai az alap és a két egyenlő hosszúságú szár (190. oldal), 3. trapéz alapjai a trapéz párhuzamos oldalpárja (210. oldal). 4. százalékszámítás esetén a 100%-nyi érték (50. oldal).

Alapfogalom: (70., 185. oldal).

Alaphalmaz: a vizsgálatban szóba jövő elemek összessége. → Egyenlet (155. oldal); reláció (71. oldal), függvény (73. oldal), algebrai kifejezés (137. oldal).

Alaplap: → Hasáb (243. oldal), henger (254. oldal).

Alaptétel: → Axióma (185. oldal).

Algebrai kifejezés: (137. oldal). Algebrai egész kifejezés, algebrai törtkifejezés (137. oldal).

Alkotó: → Henger (254. oldal).

Ár: A földterület mérésének Magyarországon nem használatos egysége, a 10 m oldalú négyzet területe. Jele: a (221. oldal).

Arány: két szám (mennyiség) hányadosa (47. oldal).

Arányos osztás: (48. oldal).

Asszociatív művelet: → Csoportosíthatóság (135. oldal).

Átfogó: derékszögű háromszögben a derékszöggel szemkötti oldal (201. oldal). → Háromszög

Átló: a sokszög vagy sokszöglapokkal határolt test két nem szomszédos csúcsát összekötő szakasz (187., 242. oldal).

Átmérő: körben, gömbben a középponton átmenő húr. → Kör (233. oldal).

Axióma: Olyan alapvető matematikai állítás, alaptétel, amelyet bizonyítás nélkül igaznak fogadunk el, és felhasználunk más matematikai állítások bizonyítására. (185. oldal).

Azonosság (azonos egyenlőség): olyan egyenlet, amely az alaphalmaz minden megengedett elemére igaz (155. oldal).

A műveleti tulajdonságokat azonosságokkal is leírhatjuk (135. oldal).

Azonos egyenlőtlenség: olyan egyenlőtlenség, amely az alaphalmaz minden elemére igaz (155. oldal).

Befogó: derékszögű háromszögben a derékszöget közrezáró két oldal neve (201. oldal). → *Háromszög*

Belső szög: a háromszög belső szögeinek összege (193. oldal). oldal). → *Sokszög*.

Biztos esemény: a kísérlet vagy megfigyelés során minden esetben bekövetkező esemény. → *Valószínűség*.

Csoportosíthatóság: Műveleti tulajdonság, több szám összeadása, illetve szorzása esetén tetszőlegesen helyezhetjük el a zárójeleket, az eredmény nem változik (135. oldal).

Csúcs: 1. A szög csúcsa. 2. Sokszög oldalai csúcsokban találkoznak (187. oldal). 3. Sokszöglapokkal határolt test élei csúcsokban találkoznak (242. oldal).

Csúcsszögek: (123. oldal).

Definíció: valamely fogalom meghatározása, értelmezése (185. oldal).

Deltoid: olyan négyszög, amelynek két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú. A négyzet és a többi rombusz is deltoid; területe (224. oldal).

Diagram: szalagdiagram, oszlopdiagram, töröttvonal-diagram, kördiagram (57. oldal).

Dodekaéder: szabályos test, 12 szabályos ötszöglap határolja, 30 éle, 20 csúcsa van.

Egész számok halmaza: $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ (9. oldal). → *Racionális számok*

Egyállású szögek: → *Szögpárok* (122. oldal).

Egybevágó: két alakzat, ha valamilyen mozgatással vagy tükrözéssel (egybevágósági *transzformációval*) kölcsönösen átvihetők egymásba (103. oldal).

Egybevágósági transzformációk: (103. oldal).

Egyenes arányosság: (79. oldal); az egyenes arányosság mint speciális *lineáris függvény* (82., 86. oldal).

Egyenes hasáb: (243. oldal) → *Hasáb*

Egyenlet: (155. oldal); megoldása, *mérlegelv* (156–161. oldal) grafikus megoldás (177–180. oldal).

Egyenlőtlenség: (155. oldal); megoldása, *mérlegelv* (162–164. oldal).

Egynemű: → *Algebrai kifejezés* (141. oldal).

Egyértelmű hozzárendelés: (71. oldal) → *Hozzárendelés*

Egyszerű sokszög, egyszerű sokszögvonal → *Sokszög* (187. oldal).

Egytagú algebrai kifejezés: változókból és számokból csupán szorzással (hatványozással, osztással) előállítható (146. oldal) → *Algebrai kifejezés*.

Együttható: Egy- vagy többváltozós egytagú algebrai kifejezésnek változókat nem tartalmazó tényezője (137. oldal).

Él: síkfelületek metszésvonala. → *Sokszöglapokkal határolt test* lapjai élekben találkoznak (242. oldal).

Elem: → *Halmaz*.

Elemi esemény: a valószínűségi *kísérlet* vagy megfigyelés egy konkrét kimenetele.

Ellentett: (10. oldal).

Előtag: Valamely mértékegység többszöröseit és törtrészeit előtagokkal, más szóval prefixumokkal fejezik ki. (15. oldal).

Elsőfokú: elsőfokú *függvény* (86. oldal), elsőfokú algebrai *egyenlet*, *egyenlőtlenség* (155. oldal).

Eltolás: (104. oldal); tulajdonságai (112. oldal).

Eratoszthenész: görög matematikus; eratoszthenészi szita (27. oldal).

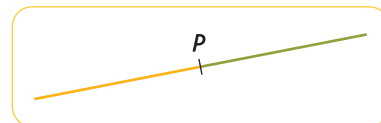
Értelmezési tartomány: → *Függvény* (73. oldal).

Értékkészlet: → *Függvény* (73. oldal).

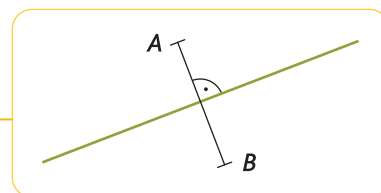
Esemény: egy *kísérlet* vagy megfigyelés valamilyen meghatározott kimeneteleinek az összessége. → *Valószínűség* (60. oldal).

Felcserélhetőség: műveleti tulajdonság, két vagy több szám összeadása, illetve szorzása esetén a tagokat, illetve a tényezőket felcserélhetjük, az eredmény nem változik meg (135. oldal).

Félegyenes: Egy egyenest egy P pontja két félegyenesre bontja. A P pont mindkét félegyenes kezdőpontja.



Felezőmerőleges: Az AB szakasz felezőmerőlegese azoknak a pontoknak a halmaza a síkban, amelyek az A és B ponttól egyenlő távolságra vannak. A felezőmerőleges az AB szakasz szimmetriatengelye.



Felszín: jele A . Bizonyos testeknek értelmezhetjük a felszínét. Például a *sokszöglapokkal határolt test* felszínét úgy számítjuk ki, hogy a testet határoló lapok területét összegezzük (242. oldal). → *Hasáb* (244. oldal); *henger* (255. oldal).

Fordított arányosság: (94. oldal).

Forgatás: (105., 126–128. oldal), **forgásszimmetria:** (130. oldal).

Független események: Két (vagy több) esemény független, ha egyikük bekövetkezése vagy be nem következése a *kísérlet* vagy megfigyelés során a másik esemény valószínűségét nem változtatja meg. → *Valószínűség* (60. oldal).

Függvény: független változó, függvényérték (73. oldal).

Geometriai transzformáció: (103. oldal) → *Transzformáció*.

Gömb; gömbfelület: egy (adott) ponttól, a gömb középpontjától, adott (nem nulla) távolságra lévő pontok halmaza a térben;

Gömbtest: egy (adott) ponttól, a gömb középpontjától, egy adott (nullától különböző) távolságnál nem nagyobb távolságra lévő pontok halmaza a térben.

Görög ábécé kisbetűi: α (alfa), β (béta), γ (gamma), δ (delta), ε (epszilon), ζ (zéta), η (éta), ϑ (théta), ι (iota), κ (kappa), λ (lambda), μ (mű), ν (nü), ξ (kszi), $\omicron$ (omikron), π (pi), ρ (ró), σ (szigma), τ (tau), υ (üpszilon), φ (fi), χ (khi), ψ (pszi), ω (omega).

Grafikon: (70., 76. oldal)

Grafikus megoldás: → *Egyenlet, egyenlőtlenség* (177–180. oldal)

Gyakoriság: → *Valószínűség* (60. oldal).

Halmaz, elem, eleme a halmaznak: a matematika olyan *alapfogalmi*, amelyeket nem vezetünk vissza egyszerűbb fogalmakra (70. oldal).

Üres halmaz: olyan halmaz, amelynek egy eleme sincs, jele: $\emptyset$; $\{ \}$

Részhalmaz: az A halmaz egy részhalmaza csak olyan elemeket tartalmaz, amelyek az A -nak is elemei. Az A halmaz részhalmazai közé tartozik maga az A halmaz és az üres halmaz is.

Kiegészítő halmaz: egy halmaz kiegészítő halmazát, más szóval **komplementerét** az *alaphalmaznak* azok az elemei alkotják, amelyek az adott halmaznak nem elemei.

Közös rész: két (vagy több) halmaz közös részét, más szóval **metszetét** azok az elemek alkotják, amelyek mindkét (mindegyik) halmaznak elemei.

Unió: két (vagy több) halmaz unióját, más szóval **egyesítettjét** azok az elemek alkotják, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei.

Háromszög: Csoportosítása: hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű; egyenlő szárú vagy szimmetrikus (tükrös) háromszög; egyenlő oldalú vagy szabályos háromszög (190. oldal). Területe (227–228. oldal).

Háromszögek egybevágóságának alapesetei: (201. oldal).

Háromszög-egyenlőtlenség: A háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál (192. oldal).

A háromszög belső szögeinek összege: 180° (193. oldal).

Hasáb: (243. oldal); hálójá, felszíne (244. oldal); térfogata (249. oldal).

Hatvány: (14. oldal); műveletek hatványokkal (16–18. oldal).

Hektár: A földterület mérésének egyik egysége, a 100 m oldalú négyzet területe. Jele: ha. (221. oldal)

Helyettesítési érték: (139. oldal) → *Algebrai kifejezés*.

Helyiérték: (19. oldal)

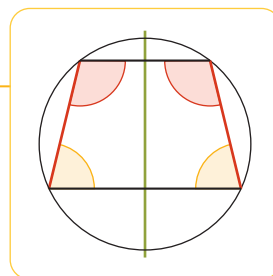
Henger; hengerfelület; egyenes körhenger: (253–254. oldal); hálójá, felszíne (255. oldal); térfogata (257. oldal).

Hexaéder: (kocka) szabályos test, 6 szabályos négyszöglap (négyzet) határolja, 12 éle, 8 csúcsa van.

Hozzárendelés: *reláció*, megfeleltetés (70. oldal).

Húrtrapéz: az alap felezőmerőlegesére szimmetrikus trapéz. A húrtrapéz két szára egyenlő hosszúságú (210. oldal). → *Trapéz*.

Igazsághalmaz: Megoldjuk az *egyenletet* (*egyenlőtlenséget*), ha megkeressük az adott *alaphalmaznak* azokat az elemeit, amelyeket behelyettesítve az egyenletbe (egyenlőtlenségbe), igaz állításokat kapunk. Ezek az elemek az egyenlet (egyenlőtlenség) megoldásai. A megoldások összessége az egyenlet (egyenlőtlenség) igazsághalmaza (155. oldal).



Ikozaéder: szabályos test, 20 szabályos háromszög lap határolja, 30 éle, 12 csúcsa van.

Irracionális szám: (10. oldal)

Kamat: A pénz használata után fizetendő használati díj. Az egy évre szóló kamatot a százalékosan adott **kamatláb** határozza meg. Nem teljes évre az évi kamat időarányos részét kell fizetni. (55. oldal).

Kamatos kamat: Több évi pénzhasználat esetén, ha az esedékes kamatot nem veszik ki (vagy nem fizetik meg), akkor a kamatot az eredeti pénzösszeghez hozzászámítják, és a következő évben már ez a megnövekedett összeg kamatozik (55. oldal).

Kedvező eset, kedvező kimenetel: → *Valószínűség* (61–62. oldal).

Kép, képelem: → 1. *Reláció* (71. oldal), *függvény* (73. oldal). 2. *Geometriai transzformáció* (103. oldal).

Képhalmaz: → *Reláció* (71. oldal), *függvény* (73. oldal).

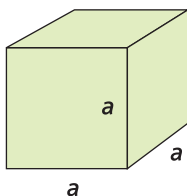
Kerület: Bizonyos síkidomoknak értelmezhetjük a kerületét. A *sokszög* kerülete a sokszöget határoló töröttvonal hossza (187. oldal). A kör kerülete: $K = 2r \cdot \pi$ (236. oldal). → *Kör*

Kiemelés: többtagú *algebrai kifejezés* szorzattá alakítása (151. oldal).

Kísérlet: A valószínűség-számításban a szokásostól eltérő értelemben használjuk ezt a kifejezést. Olyan jelenség megfigyelését nevezzük kísérletnek, amelynek lefolyása a véletlentől függ, függetlenül attól, hogy a jelenséget mesterségesen idéztük elő (kockafeldobás) vagy sem (időjárás) (60. oldal).

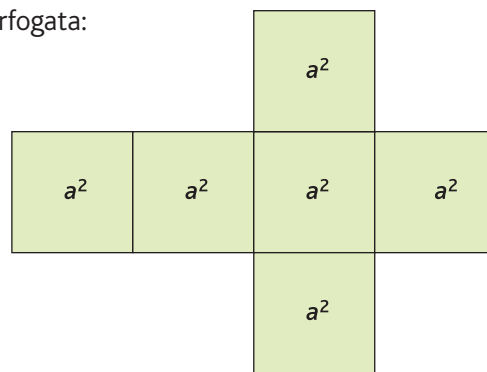
Kitevő: Például az a^3 hatvány kitevője a 3. → *Hatvány* (14. oldal)

Kocka: olyan téglatest, amelyiknek minden lapja négyzet.



Az a élű kocka felszíne: $A = 6a^2$, térfogata:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3. \rightarrow \text{Hexaéder.}$$



Kommutatív művelet: → Felcserélhetőség.

Konkáv: nem konvex síkidom, test.

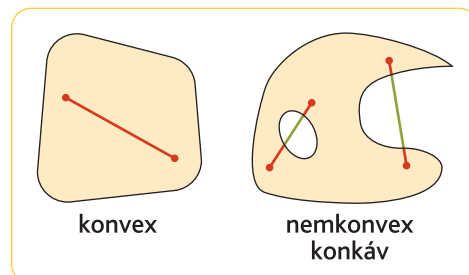
Konstans függvény: (88. oldal) → Lineáris függvény

Konvex: síkidom, test (186. oldal)

Konvex sokszög: minden szöge konvex.

Konvex szög: 180° -nál nem nagyobb szög.

Nemkonvex szög: homorúszög.



Kör: (233. oldal); a kör kerülete: $K = 2r \cdot \pi$ (236. oldal); ahol $\pi = 3,14159$; területe $T = r^2 \cdot \pi$ (238. oldal).

Körvonal: azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek a sík egy (adott) pontjától, a kör középpontjától ugyanakkora (nem nulla) távolságra vannak.

Körlap: azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek a sík egy (adott) pontjától, a kör középpontjától egy adott (nullától különböző) távolságnál nem nagyobb távolságra vannak.

Átmérő: a kör középpontján átmenő húr, a sugár kétszerese ($d = 2r$).

Érintő: az e egyenes a kör érintője, ha egy közös pontja van a körrel.

Húr: a körvonal két pontját összekötő szakasz.

Körcikk: a körlapot a kör két sugara két körcikkre osztja.

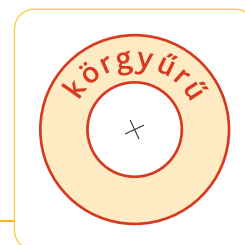
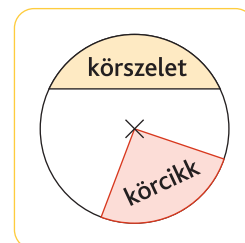
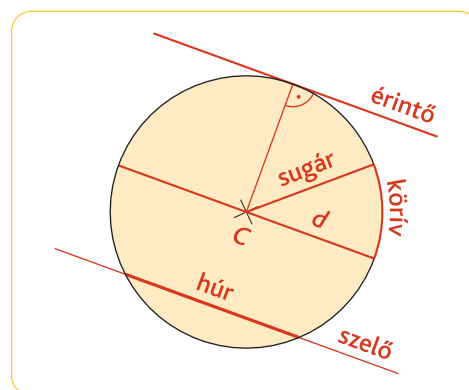
Körgyűrű: két közös középpontú (koncentrikus) kör által határolt síkidom.

Körív: a körvonalat két pontja két körívre bontja.

Körselet: a körlapot a kör egy húrja két körseletre osztja.

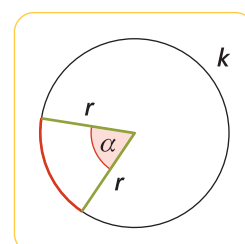
Sugár: a kör középpontját a körvonal egy pontjával összekötő szakasz.

Szelő: olyan egyenes, amelynek két közös pontja van a körrel. A középponton átmenő bármely szelő a körnek szimmetriatengelye.



Kördiagram: (57. oldal)

Középponti szög: Olyan szög, amelynek csúcsa a kör középpontjában van. A körnek azt az ívét, amelyik a szög belsejébe esik, a középponti szöghöz tartozó körívnek nevezzük. A középponti szög és a hozzá tartozó körív egymást kölcsönösen meghatározza (233. oldal).



Középpontos tükrözés: (105., 116–118. oldal); középpontos szimmetria (120. oldal).

Középvonal: A trapéz két szárának felezőpontját összekötő szakasz a trapéz középvonala, amely a trapéz alapjaival párhuzamos (226. oldal).

Különnemű: algebrai kifejezések (141. oldal).

Külső szög: Konvex sokszög belső szögeinek mellékszögeit a sokszög külső szögeinek nevezzük. → Háromszög külső szögei (190. oldal); a háromszög külső szögeinek összege (194. oldal).

Lap: 1. A síknak vonallal (vonalakkal) határolt része, tartománya. → Sokszöglap (187. oldal); körlap (233. oldal). **2.** Testet határoló sík felület. → Sokszöglapokkal határolt testek (242. oldal); hasáb alaplapjai, oldallapjai (243. oldal); henger alaplapjai (254. oldal);

Lapátló: sokszöglapokkal határolt testek valamely határoló lapjának átlója (241–242. oldal) → Átló.

Lapszög: Egy egyenesből kiinduló két félsík a teret két lapszögre bontja. A lapszöget azzal a szöggel mérjük, amelynek csúcsa a lapszög élén van, szárai a lapszög lapjaira illeszkednek, és a lapszög élére merőlegesek.

Legkisebb közös többszörös: (30. oldal). → Osztó; többszörös.

Legnagyobb közös osztó: (29. oldal). → Osztó; többszörös.

Lehetetlen esemény: olyan esemény, amely a kísérlet vagy megfigyelés során sohasem következhet be. → Valószínűség (60. oldal).

Lineáris függvény: elsőfokú és nulladfokú függvény közös neve; az egyenes arányosság is lineáris függvény. A lineáris függvény grafikonja egyenes (89. oldal).

Magasság: háromszögé, a háromszög magasságvonalai (203. oldal); trapézé (210. oldal); paralelogrammáé (223. oldal); hasábé (243. oldal).

Medián: → Mennyiségi sor középítő értéke (56. oldal).

Megoldás: → Egyenlet, egyenlőtlenség (155. oldal).

Mellékszög: (122. oldal).

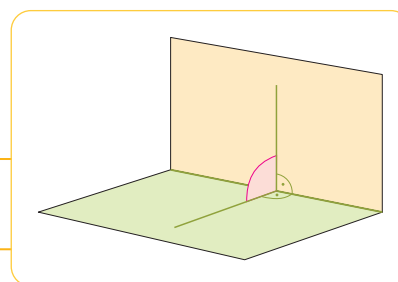
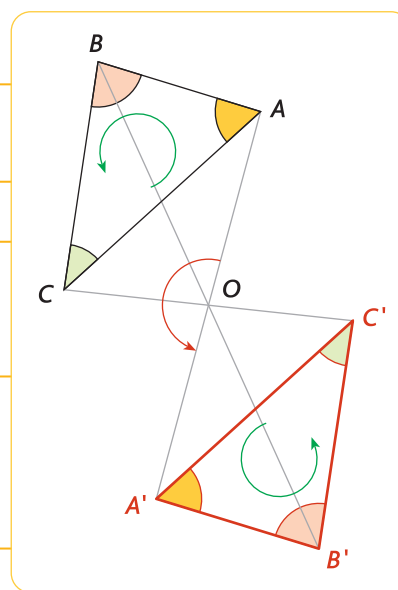
Mennyiségi sor: növekvő sorrendbe rendezett adatsor (56. oldal).

Meredekség: (82., 83. oldal).

Mérlegelv: egyenlet (156–161. oldal), egyenlőtlenség (162–164. oldal) megoldása.

Módusz: A legtöbbször előforduló adat (57. oldal).

Nagy számok törvénye: (60. oldal).



Negatív szám: negatív egész számok (9. oldal), negatív számok összeadása, kivonása (32. oldal); szorzása, osztása (38. oldal). → *Racionális szám*.

Négyszög: olyan sokszög, amelynek négy oldala van. A négyszög belső szögeinek összege 360° (208–209. oldal).

Négyzet: (speciális *téglalap*, így speciális *húrtrapéz*, illetve speciális *rombusz*, így speciális *deltoid*) szabályos négyszög; minden oldala és minden szöge egyelő. Az a oldalú négyzet kerülete: $K = 4a$; területe: $T = a^2 \rightarrow$ Szabályos sokszög.

Normálalak: (19. oldal).

Nulladfokú függvény: (88. oldal). → *Lineáris függvény*.

Nyíldiagram: (69. oldal).

Nyitott mondat: (155. oldal).

Oktaéder: szabályos test, 8 szabályos háromszöglap határolja, 12 éle, 6 csúcsa van.

Oldal: → *Sokszög* (187. oldal).

Oldalél, oldallap: → *Hasáb* (243. oldal).

Oszlopdiagram: más néven gyakorisági diagram (57. oldal).

Oszthatósági szabályok: (22–25. oldal).

Osztó: egy *természetes szám* osztója, többszöröse (21. oldal). → *Összetett szám*; *törzsszám* vagy *prímszám*. *Legnagyobb közös osztó*.

Osztópár: (21., 26. oldal).

Összetett szám: Kettőnél több osztója van (27. oldal). → *Osztó*.

Összevonás: (32. oldal).

Palást: *hasábé* (243–244. oldal), *hengeré* (254–255. oldal).

Paralelogramma: (speciális *trapéz*) olyan *négyszög*, amelynek két-két szemközti oldala *párhuzamos* (paralel = párhuzamos). A *négyzet*, a többi *téglalap* és a többi *rombusz* is paralelogramma (210., 214–215. oldal), területe (223. oldal).

Párhuzamos: 1. Két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk vagy egybeesnek, 2. Két sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk vagy egybeesnek, 3. Egy egyenes és egy sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk vagy az egyenes illeszkedik a síkra.

Párhuzamos szárú szögek: egyállású szögek, társszögek, mellékszögek (122. oldal); váltószögek, csúcsszögek (123. oldal).

Pont-pont függvény: → *Geometriai transzformáció* (103. oldal).

Pozitív egész számok: (9. oldal).

Prímszám vagy törzsszám: Pontosan két osztója van (27. oldal). → *Osztó*.

Prímtényezős felbontás: (28. oldal).

Racionális számok: felírhatók két egész szám hányadosaként, illetve véges *tizedestört* vagy végtelen szakasos *tizedestört* alakban (9–10. oldal). Végtelen sok nem racionális (irracionalis) szám van. A racionális számok halmazának jele: $\mathbb{Q}$

Reciprok: (10. oldal). A 0-nak nincs reciproka.

Reláció: két *halmaz* elemei közti kapcsolat, hozzárendelés, megfeleltetés (69–71. oldal), az általános iskolában *alapfogalomnak* tekintjük.

Relatív gyakoriság: Egy esemény relatív gyakorisága azt mutatja meg, hogy az összes megfigyelt esetnek hányad részében következett be az esemény. Például, ha egy valószínűségi kísérletben 50-szer dobunk egy kockával és az az esemény, hogy hármast dobunk, 11-szer következik be, akkor ennek az eseménynek a relatív gyakorisága ebben a *kísérletben* $\frac{11}{50}$. (60. oldal) $\rightarrow$ Valószínűség.

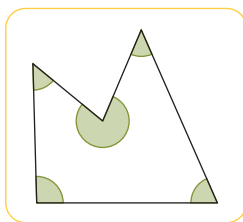
Relatív prímszámok: (29. oldal)

Rombusz: (speciális *paralelogramma*, illetve speciális *deltoid*) olyan *négyszög*, amelynek mind a négy oldala egyenlő. A *négyszet* is rombusz. Tulajdonságai (216. oldal), területe (224. oldal).

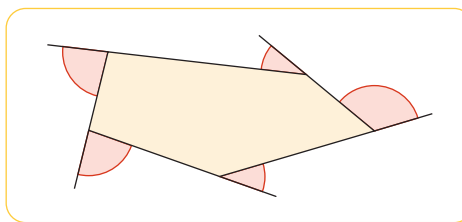
Síkidom: (186. oldal).

Sokszög: sokszögvonal, sokszöglap; egyszerű sokszög (187. oldal), területe (229. oldal).

A sokszög belső szögei:



A sokszög külső szögei:



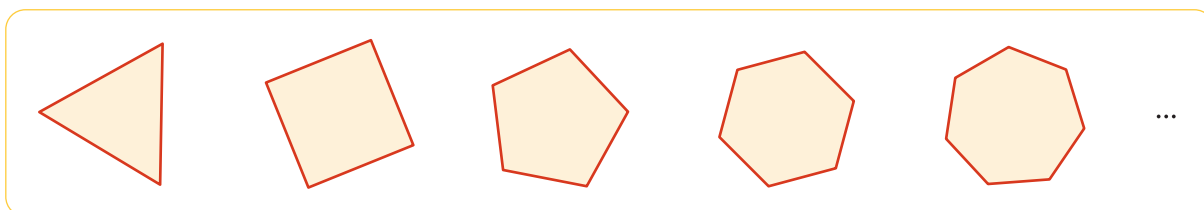
Sokszöglapokkal határolt testek: (241–242. oldal).

Sorozat: (90. oldal).

Statisztika: 1. Megfigyelhető vagy mérhető adatok feldolgozása. 2. Azok az adatgyűjtemények, amelyeket a statisztikai feldolgozás során kapnak. 3. Az a tudomány, amely az adatgyűjtés és -feldolgozás elméletével foglalkozik (56–57. oldal).

Sugár: $\rightarrow$ Kör (233. oldal).

Szabályos sokszög: minden oldala és minden szöge egyenlő (231. oldal).



Szabályos test: A szabályos testek görög eredetű elnevezései a testek lapjainak számára utalnak. → *Tetraéder; Hexaéder; Oktaéder; Dodekaéder; Ikozaéder.*

Szakasz: Az AB szakasz az egyenesnek az a része, amelyik az A és a B pont közé esik. Az A és a B pont az AB szakasz végpontjai.

Szalagdiagram: (56. oldal).

Szám-szám függvény: (73. oldal).

Számtani átlag: (56. oldal).

Számtani sorozat: (91. oldal).

Szár: → *Háromszög, egyenlő szárú háromszög (190. oldal), trapéz (210. oldal).*

Százalék: alap; százalékték; százalékláb (50. oldal).

Szelő: → *Kör (233. oldal).*

Szóródás: adatsorban az adatok közti eltérések statisztikai jellemzésére szolgáló érték (56. oldal).

Szóródás terjedelme: (56. oldal).

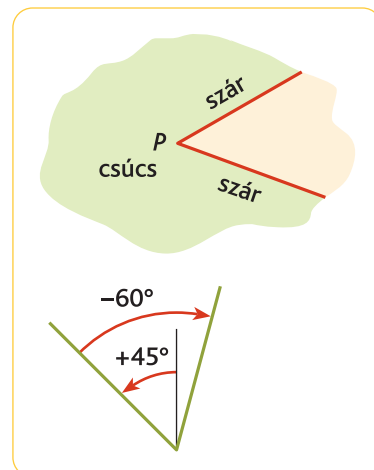
Szög: szögvonala, szögtartomány. A szögmérés egyik egysége az

1° (fok), a teljesszög $\frac{1}{360}$ része.

A szöget tekinthetjük egy egységsugarú kör középponti szögének. Ekkor a szög nagyságát jellemezhetjük a középponti szöghöz tartozó körív nagyságával is. Egységsugarú körben az egyenesszöghöz tartozó körív hosszúsága éppen π .

Ezért például a 60° -os szög nagysága $\frac{1}{6}\pi$.

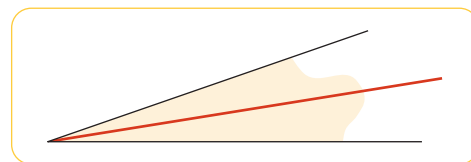
A szögek fajtái: nullszög ($\alpha = 0^\circ$), hegyesszög ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), derékszög ($\alpha = 90^\circ$), tompaszög ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), egyenesszög ($\alpha = 180^\circ$), homorúsög ($180^\circ < \alpha < 360^\circ$) és teljesszög ($\alpha = 360^\circ$).



Forgásszög: Az elfordulásokat irányított szöggel jellemezzük. A pozitív elfordulás az óramutató járásával ellentétes irányú. Az elfordulás abszolútértéke a teljesszögnél nagyobb is lehet (124. oldal).

Szögpárok: (122. oldal).

Szögfelező: A szögfelező a szög csúcsából induló olyan félegyenes, amely a szögtartományt két egyenlő részre osztja; a szögtartomány szimmetriatengelyének a szögtartományba eső fél-egyenes. *Konvex szögeknél* azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek a szög két szárától egyenlő távolságra vannak a szögtartományban.

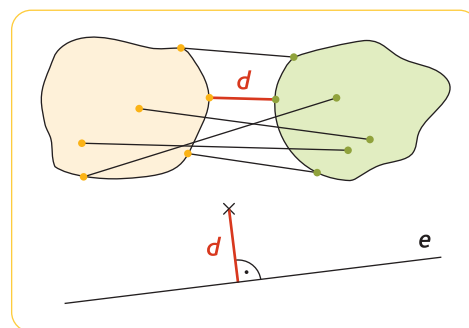


Társszögek: (122. oldal).

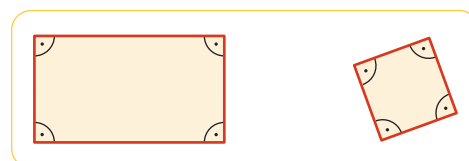
Távolság: Az A és a B pont távolsága a síkban és a térben az AB szakasz hossza. Jele: d_{AB} (distancia = távolság).

Két alakzat távolsága egy-egy pontjuk között húzható legrövidebb szakasz hossza.

Egyenes és pont távolsága: a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza.

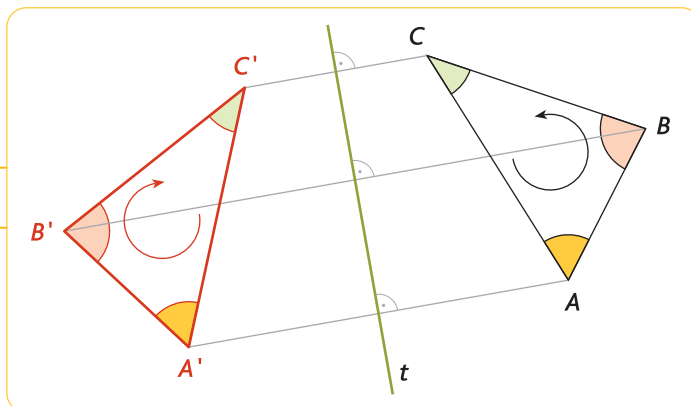


Téglalap: (speciális *paralelogramma*, illetve *húrtrapéz*) olyan négyszög, amelyiknek minden szöge egyenlő (derékszög). A négyzet is téglalap. Területe (222. oldal); tulajdonságai (210., 216 oldal).



Téglatest: (speciális hasáb) olyan test, amelyet hat téglalap határol. A kocka is téglatest. Térfogata (248. oldal).

Tengelyes tükrözés, tengelyes szimmetria: (104., 113–114. oldal).



Tételek: pont, vonal, egyenes, felület, sík.

Térfogatmérés: (247. oldal). A térfogatot V -vel jelöljük (volumen = térfogat, terjedelm). Téglatest térfogata (248. oldal), hasáb térfogata (249. oldal), egyenes körhenger térfogata (257. oldal).

Természetes számok: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$. (Megállapodhatunk úgy is, hogy a 0-t nem tekintjük természetes számnak.) (9. oldal) $\rightarrow$ Racionális számok.

Területmérés: (221. oldal). A területet általában T -vel jelöljük. Téglalap területe (222. oldal), paralelogramma területe (223. oldal), trapéz területe (226. oldal), deltoid területe (224. oldal), háromszög területe (227. oldal), kör területe (238. oldal), sokszög területe (229. oldal).

Test: Ha a teret felületekkel feldaraboljuk, akkor testeket kapunk. A kocka, a hasáb, a henger, a gömb stb. testek.

Testátló: sokszöglapokkal határolt test olyan átlója, amely nem lapátló. $\rightarrow$ Átló; lapátló.

Tetraéder: Négy háromszöglap által határolt test, 6 éle, 4 csúcsa van.

Szabályos tetraéder: Szabályos test, 4 szabályos háromszöglap határolja.

Tizedestört: racionális számok véges, illetve végtelen szakaszos tizedestört alakja (10. oldal).

Tovább nem egyszerűsíthető tört: (36. oldal).

Többszörös: (21. oldal). → *Osztó; legkisebb közös többszörös.*

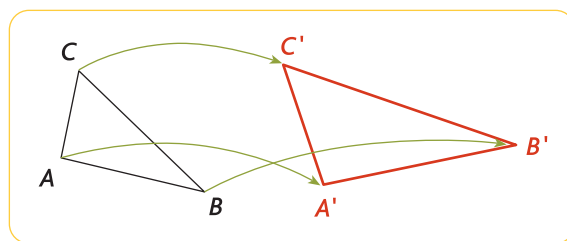
Töröttvonal: → *Sokszög* (187. oldal).

Töröttvonal-diagram: (57. oldal).

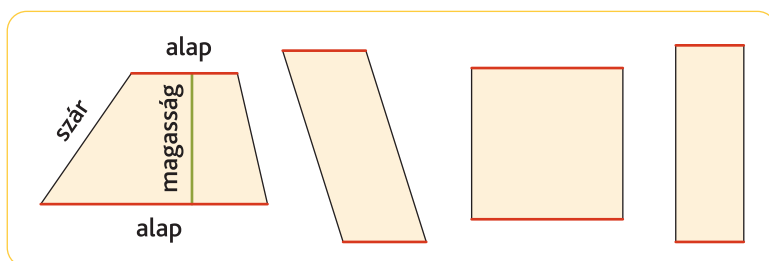
Tört: tört egyszerűsítése, a tört tovább nem egyszerűsíthető alakja (36. oldal); összeadása, kivonása (33. oldal); szorzása, osztása (38–39. oldal); törtrész (42. oldal).

Törzsszám vagy prímszám: Pontosan két osztója van a természetes számok körében (27. oldal). → *Osztó.*

Transzformáció: (geometriai) (103. oldal).



Trapéz: Olyan *négyszög*, amelynek van párhuzamos oldalpárja. A *négyzet*, a többi *téglalap* és a többi *paralelogramma* is trapéz (210. oldal); a trapéz *magassága* a két alapjának távolsága; területe (226. oldal).



Üres halmaz: → *Halmaz.*

Valószínűség: Minden véletlen eseményhez hozzárendelhető egy 0 és 1 közé eső szám, az esemény valószínűsége, amely azt fejezi ki, hogy sok *kísérlet* végrehajtása során az eseteknek körülbelül mekkora hányadában következik be a megfigyelt esemény. A *lehetetlen esemény* valószínűsége 0, a *biztos esemény* valószínűsége 1 (60. oldal).

Váltószögek: (123. oldal).

Változó: → *Algebrai kifejezés* (137. oldal); *függvény független változója* (73. oldal).

Véges tizedestört: (10. oldal). → *Racionális számok.*

Végtelen szakaszos tizedestört: (10. oldal). → *Racionális számok.*

Vegyesszám: törtek vegyesszám alakja (11. oldal).

Vektor: (107. oldal).

Zárójel: Zárójelek használata (44. oldal) → *Csoportosíthatóság* (33., 135. oldal). Összeg, különbség szorzása (135., 148., 151. oldal). A zárójel módosíthatja a művelet elvégzésének sorrendjét (139. oldal). A törtvonal zárójel helyettesít (139. oldal).