

Matematika

tankönyv

6

tengely

tükörkép

szimmetria

számelmélet

alakzatok

különbség

statisztika

arányosság

egész

téglatest

átlag

szögek

tört

tengely



MATEMATIKA 6. TANKÖNYV

A kiadvány 2021. február 4-től 2026. augusztus 31-ig tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/119-7/2021. számú határozattal.

A tankönyv megfelel a Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról megnevezésű jogszabály alapján készült Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyama számára megnevezésű kerettanterv matematika tantárgy előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértő: Szentés Katalin

Tananyagfejlesztők: Csahóczi Erzsébet, Csátár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné

Kerettantervi szakértő és lektor: Hegyi Györgyné, Kulman Katalin

Szaktanácsadó: dr. Csapodi Csaba

Szerkesztette: dr. Wintsche Gergely

Fedélterv: Slezák Ilona, Bánáti János

Illusztráció: Simó Eszter

Szakábrák: Szalóki Dezső

Fotók: 4. o. Kolodko Mihály: Gombóc Artúr szobra (orszagalbum.hu/RosszQtya), 6. o. Magyar Posta forgalmi bélyegei (Magyar Posta Zrt.), 70. o. Néprajzi tárgyak (szerzői fotó), 149. o. Almaszeletek (szerzői fotó), 221. o. Forint bankjegyek (Magyar Nemzeti Bank, wikimedia/Timur lenk)

Shutterstock Képügynökség: 7., 14., 20., 31., 32., 34., 37., 39., 40., 51., 53., 54., 55., 59., 60., 61., 66., 67., 78., 85., 86., 87., 90., 92., 96., 97., 99., 106., 107., 108., 110., 111., 112., 114., 136., 138., 139., 141., 156., 159., 160., 163., 165., 166., 167., 169., 171., 173., 175., 178., 179., 182., 215., 216., 217., 218., 220., 221., 223., 224., 226., 227., 228., 230., 232., 233., 234., 235., 237., 238., 244., 247., 248., 250., 254., 260.

Shutterstock szerkesztői képek (/Shutterstock.com): 8. o. vitfoto; 46. o. Pajor Pawel; 55. o. Art Konovalov; 55. o. dsajo; 60. o. Thiago B Trevisan; 84. o. Pabkov; 84. o. Piotr Gibowicz; 87. o. Hetman Bohdan; 88. o. Zoltan Katona; 89. o. Lestertair; 89. o. Lestertair; 89. o. rook76; 169. o. Leon Rafael; 177. o. Dignity 100; 205. o. Stepniak; 217. o. katacarix; 225. o. Paolo Bona; 226. o. pendakisolo; 227. o. Sombat Muycheen; 228. o. Riccardo de Luca – Update; 244. o. DavidNNP; 244. o. Levent Konuk; 247. o. Martchan; 258. o. Geza Kurka Photos

Thinkstock Képügynökség: 21., 55., 239.

© Oktatási Hivatal, 2021

ISBN 978-615-6256-32-4

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.

Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor mb. elnök • Raktári szám: OH-MAT06TB

Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos

Műszaki szerkesztő: Karácsony Orsolya • Grafikai szerkesztő: Téglásy György

Nyomdai előkészítés: Fried Katalin

Terjedelem: 33,99 (A/5) ív, tömeg: 730 gramm • 1. kiadás, 2021

A könyvben felhasználtuk Csahóczi Erzsébet, Csátár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Szeredi Éva Matematika 6. feladatgyűjtemény című művet. Raktári szám: AP-060809

Ez a tankönyv a Széchenyi 2020 Emberi Erőforrás Fejlesztési Operatív Program EFOP-3.2.2-VEKOP-15-2016-00001. számú, „A köznevelés tartalmi szabályozóinak megfelelő tankönyvek, taneszközök fejlesztése és digitális tartalomfejlesztés” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen

Felelős vezető: György Géza vezérigazgató

A nyomdai megrendelés törzsszáma

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFECTETÉS A JÖVŐBE

Előszó

Ne vágd el azt, amit kibogozhatsz
Joubert (19. századi filozófus)

Kedves gyerekek!

Ezt a könyvet és a hozzá tartozó munkafüzetet nektek írtuk. Szeretnénk, ha gondolkodva használnátok, és magatok fedeznétek fel a matematika újabb és újabb rejtelseit a kitűzött feladatok megoldásán keresztül. Természetesen egy felfedezőnek is el kell sajátítania bizonyos ismereteket, ezeket így jelöltük:

TUDNI KELL!

A tankönyvben a következő jelölésekkel fogtok még találkozni:



Most még nem tanulhatunk meg mindent, a jövőben szóba kerülő ismeretekre utal.



Emlékeztető a korábban tanult ismeretekről.



Így jelöltük azokat a feladatokat, amelyeket elkészíthettek, kivághattok, modellezhettek.



Internettel támogatott feladatok.

A matematika történetéről is olvashattok a könyvben.

Minden tananyagot egy-egy feladatsor követ. A feladatok sorszámát megkülönböztető jellel láttuk el:

-  1. Az új ismeretek elsajátítását, megértését igénylő alapfeladat, ezt meg kell tudnod oldani ahhoz, hogy továbbhaladhass!
-  2. Az új ismeret alkalmazását, tudásod rögzítését, elmélyítését segítő feladat.
-  3. Többféle ismeret és képesség alkalmazását igénylő feladat.
-  4. Fejtörők, versenyfeladatok azoknak, akik további érdekes feladatokat szeretnének megoldani.

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a „pótold!” típusú feladatoknál mindig a füzetetekbe dolgozzatok! A feladatok szövegéből az is kiderül, hogy melyeket ajánljuk **páros** vagy **csoportmunkára**.

A tankönyvben szereplő megoldott bevezető **példák** segítséget nyújtanak a tananyag megértéséhez, és a tankönyvi feladatok megoldásához is ötleteket adnak.

Időnként találkoztok **projektfeladatokkal** is, amelyek megoldására több nap áll rendelkezésetekre. Ezeket vagy egyénileg, vagy kisebb csoportokban kell elkészíteni. A kész munkákat az osztály előtt fogjátok majd bemutatni.

Javasoljuk, hogy az interneten található matematikai oldalakat is keressétek fel szabadidőtökben, ahol gyakorló- és versenyfeladatokat találtok, matematikatörténeti érdekességek után kutakodhattok.

Eredményes tanulást kívánunk: *a szerzők és a kiadó*

Hány eset van?

1. példa



Dacos Dani hazafelé ballag az iskolából az első tanítási nap után. Azon morfondírozik, hogy mivel töltsse el a nap hátralevő részét. „Először is kellene egy kicsit tanulni, de legfeljebb egy tárggyal fogok első nap foglalkozni: vagy átnézem a nyelvtani szabályokat, vagy átfutok a történelmi eseményeken, vagy egy picit matekozom. Utána bringázni vagy focizni fogok. Este esetleg olvasom a nyári kötelező olvasmányt, vagy tévét nézek.” Hányféleképpen töltheti Dani a nap hátralevő részét?

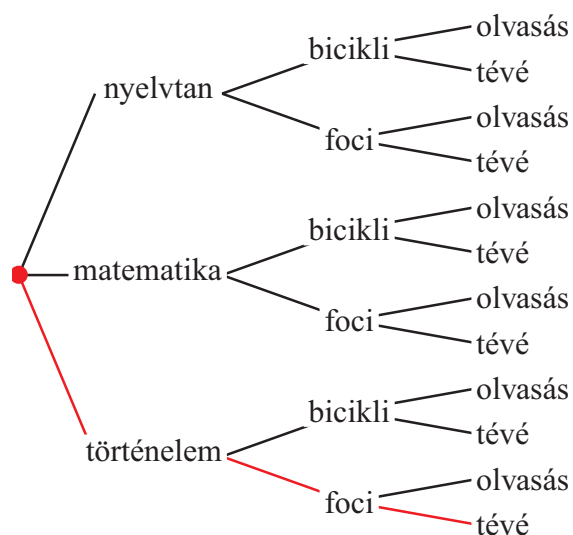
Megoldás

a) Lerajzoltuk a Dani gondolatmenetének megfelelő ábrát.

Például a piros vonal mentén haladva leolvashatjuk, hogy Dani történelmet tanult, majd focizott, és este tévét nézett.

Ezt az ábrát **fadiagramnak** nevezzük.

Ezen könnyen összeszámolhatjuk, hogy Dani 12-féleképpen tudja eltölteni a nap hátralevő részét.



2. példa



Gombóc Artúr elhatározta, hogy fogyókúrázni fog. Ezért csak minden második nap eszik meg egy-egy tábla csokit.

a) Első elhatározásakor úgy döntött, hogy csak hétfőn, szerdán és pénteken eszik csokit. Így vásárolt egy tábla mogyorósat, egy tábla kókuszosat és egy tábla rizseset. Hányféle sorrendben tudja elfogyasztani a csokikat?

b) Artúr meggondolta magát, és úgy döntött, hogy inkább kedden, csütörtökön, szombaton és vasárnap eszik csokit. Így vett még egy tábla töltött csokit is. Hányféle sorrendben tudja elfogyasztani a 4 tábla csokit?

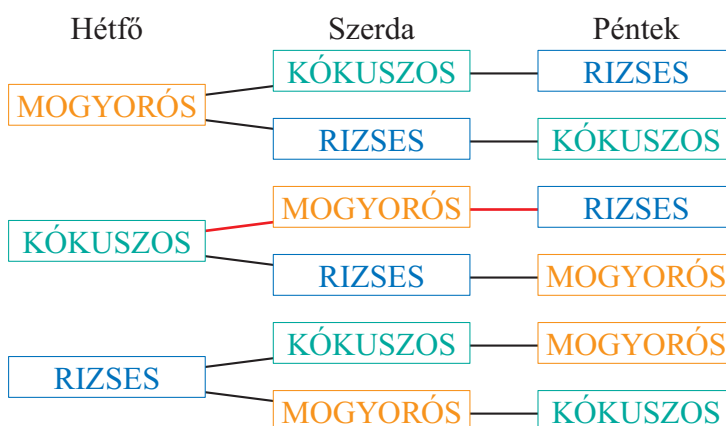
Megoldás

Most is felrajzoljuk a Gombóc Artúr gondolatmenetének megfelelő ábrát.

a) A fadiagramról leolvashatjuk, hogy Gombóc Artúr a 3-féle csokit 6-féle sorrendben eheti meg.

A fadiagram elkészítése elég munkaigényes, ezért célszerű megnézni a feladat logikai megoldását is.

Első nap a 3-féle csoki bármelyikét megeheti, míg a következő alkalommal már csak a megmaradt 2 tábla csoki közül választhat. Ez már $3 \cdot 2 = 6$ -féle lehetőséget jelent. A harmadik alkalommal megeszi a megmaradt csokit, ez már nem befolyásolja az esetek számát.



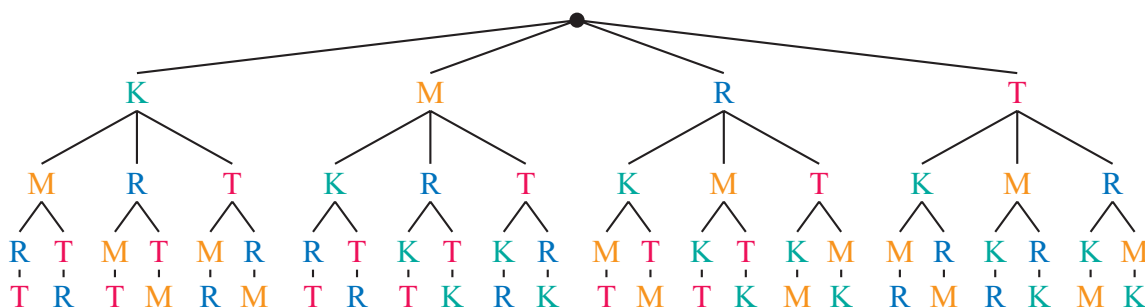
b) Nézzük például az a) megoldásban pirossal megjelölt sort! A töltött csokit eheti:

Kedd	Csütörtök	Szombat	Vasárnap
TÖLTÖTT	KÓKUSZOS	MOGYORÓS	RIZSES
KÓKUSZOS	TÖLTÖTT	MOGYORÓS	RIZSES
KÓKUSZOS	MOGYORÓS	TÖLTÖTT	RIZSES
KÓKUSZOS	MOGYORÓS	RIZSES	TÖLTÖTT

A három csoki egy sorrendje az új csoki hozzávételével megnégyszereződött.

Természetesen ugyanígy négyszereződik meg az eddigi 6-féle sorrend is, így a 4 csoki elfogyasztásának a sorrendje: $4 \cdot 6 = 24$ (amely a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ szorzat eredménye).

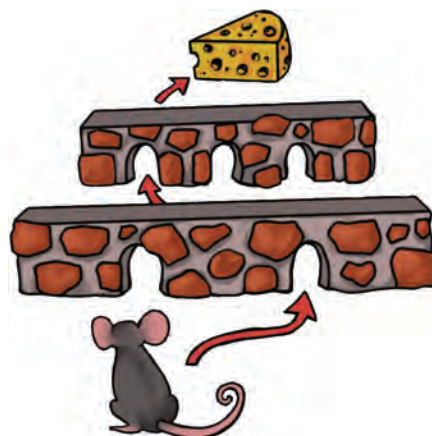
A fadiagramos megoldás:



Feladatok

- Hányféle úton tud eljutni a kisegér a sajthoz, ha két falon kell átmennie?

Az első falon 2, a másodikon pedig 3 olyan lyuk van, amelyen keresztül tud bújni. Mekkora az esélye, hogy az ábrán nyíllal megjelölt úton fog haladni a kisegér, ha minden útvonalon azonos eséllyel megy a sajthoz?



2. Hencidából Boncidába 2 út, Boncidából Piripócsra 3, míg Piripócsról Kukutyinba 4 út vezet.



Ha mindig kelet felé haladunk, akkor hányféleképpen juthatunk el Hencidából

- a) Piripócsra Boncidán keresztül; b) Kukutyinba Boncidán és Piripócsra keresztül?

3. Az erkélyen beépített virágosládák vannak. Mindegyikbe egy-egy fehér, rózsaszín és piros begóniát akarunk ültetni. Hány láda esetén valósítható meg, hogy mindegyikben más sorrendben legyenek a virágok?

4. Ági, Zsuzsi, Marcsi és Jutka moziba mennek.

- a) Hányféleképpen tudnak leülni egymás melletti székekre?
b) Ha Ági és Zsuzsi mindenképpen egymás mellé szeretne ülni, akkor hányféle sorrend lehetséges?

5. Hányféle sorrendben lehet a borítékra felragasztani egymás mellé

- a) egy 275 Ft-os, egy 390 Ft-os és egy 515 Ft-os,
b) egy 275 Ft-os, egy 390 Ft-os, egy 515 Ft-os és egy 540 Ft-os bélyeget?



6. „A mi családjunkban nincs két ember, aki egyformán inná a kávé – meséli Joli néni. – Van, aki hidegen issza, van, aki melegen szereti; van, aki cukorral, van, aki édesítővel issza; van, aki tesz bele tejet, van, aki nem.”

Joli néni 80. születésnapjára összejött a család. Ha még valaki jött volna, akkor már nem ihatott volna mindenki másképpen elkészített kávé. Hányan ittak kávé a születésnapon?

7. A fiúknak testnevelésórán a kötelező bemelegítés után rúdra vagy kötélre kell mászniuk, majd medicinlabdázniuk vagy súlyozniuk kell, s csak ezután lehet labdajátékot választaniuk: kosár-, zsinórlabda vagy foci közül. Hány edzési lehetősége van egy-egy fiúnak a testnevelésórán?

8. a) Hány ötjegyű számot lehet kirakni az 1, 2, 3, 4, 5 számkártyákból? Hány 5-re végződő lesz a kirakott számok között?
b) Hány ötjegyű számot lehet kirakni a 0, 1, 2, 3, 4 számkártyákból?

9. Hat jó barát biciklitúrára ment. A vita elkerülése érdekében azt találták ki, hogy minden napszakban más-más sorrendben kerekeznek. Délelőtt és délután is tekertek.

- Megvalósíthatták-e a tervüket, ha 2 hetes volt a túra?
- Hány napos lenne a túra, ha az összes lehetséges sorrendben bicikliznének?



10. Az iskolai matematikaversenyen 8 kitűzött feladat volt. Jóska végigolvasta azokat, s eldöntötte, hogy az utolsó példát hagyja utoljára, és a harmadik feladatot fogja először megoldani.

Hányféle sorrendben oldhatná meg a fennmaradó hat feladatot?

11. Lilla 5-5 begóniapalántát ültetett a virágládákba, mindegyikbe 2 fehérét és 3 pirosat. Hány ládát tud úgy beültetni, hogy

- különböző színű palánták kerüljenek egymás mellé?
- mindegyik virágláda két szélső virága különböző színű legyen?

12. Egy 32 lapos magyar kártyacsomagban 4-féle szín van: piros, zöld, tök, makk.

- Legalább hány lapot kell kihúzni a csomag kártyából, hogy minden színből legalább egy legyen a kezünkben?
- Hány lapot kell kihúznunk, hogy a kihúzott lapok között biztosan legyen négy piros?



13. 5, 10 és 20 eurós bankjegyeink vannak, mindegyikből több is van. Fizetéskor természetesen csak a bankjegyek értéke számít, azok sorrendje érdektelen.

- Hányféleképpen tudjuk velük kifizetni a 20 eurós bevásárlásnál elköltött pénzünket?
- Hányféleképpen tudjuk velük kifizetni az 50 eurós számlánkat?



14. Tanultatok már ezeket az igekötőket: be, ki, le, fel, meg, el, át, rá, ide, oda, szét, össze, vissza. Illeszd ezeket hozzá a következő igékhez: fog, ír, hív, olvas, megy!

Hány szót tudsz így alkotni?

Melyik igével kapod a legtöbb olyan szót, amelyet a mindennapi életben is használunk?

Műveletek egész számokkal

Mit tudunk az egész számokról?



Egyiptomban már 4000 évvel ezelőtt – i. e. 2000-ben, és mindössze négy jellel – le tudták írni 10 000-ig a pozitív egész számokat. A 0 sokkal később jelent meg – az i. sz. I. században –, és hosszú ideig nem is tartották igazi számnak. A neve is ezt jelenti: üresség, semmi. Csak a hiányzó helyi értékek megjelölése volt a feladata.

Ha a 0 a helyén áll, az igen helyes,
sőt tiszta haszon, mit megszerezni érdemes,
mert hisz a 0 az 1-ből egyből 10-et csinál,
ha érdeme szerint szerényen a sor végére áll:
értékét meg-10-szerezi az a világ,
amely önnön 0-inak ilyképp elébe vág;
ámde minden tüstént 1/10-ére lapped,
ott, hol a 0 arcátlanul az élre kaptat:
ha 0-nk a sornak e-végére áll,
az minden értéknek 9/10 halál.

Fenti 10 sor arról szólt, hogy minek hol jó lenni,
s ezek során tán kiderült, hogy a 0 nem épp semmi.

(Fodor Ákos: A bolond dala a nulláról)

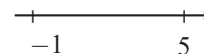
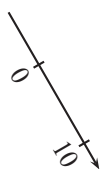


Borsos Miklós: „0” kilométerkő

Még később nyertek állampolgárságot a számok birodalmában a negatív számok. Európában alig 600 éve használják őket. Eleinte csak az adósság és a vagyon jelölésére szolgáltak, és úgy különböztették meg őket, hogy p (plusz) és m (mínusz) jeleket írtak eléjük.

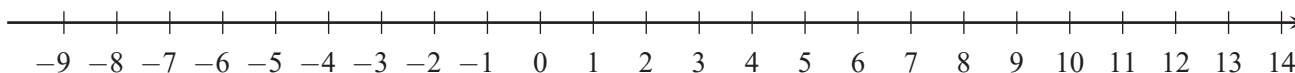
A $p12 + m23 = m11$ például a $(+12) + (-23) = (-11)$ műveletet jelentette.

A számokat számegyenesen lehet szemléltetni:



Az egyenesek állása akármilyen lehet, és elég két tetszőleges szám helyét kijelölni rajtuk.

Szokás a számegyeneset így is megadni: a vízszintesen rajzolt számegyenesen bármely számtól jobbra a nála nagyobb, balra pedig a nála kisebb számok állnak. A nyíl jelzi a pozitív irányt.

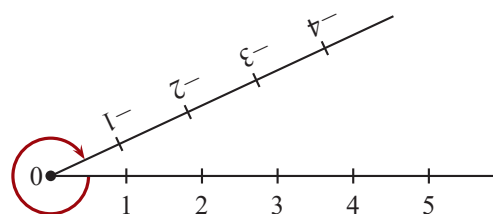


Hajtsuk össze a 0-nál a számegetenest!

A nullától egyenlő távol levő számok egymás **ellentettjei**.

Például: a 3 ellentettje (-3) , (-8) ellentettje 8.

Ezek a számok előjelükben különböznek, abszolút értékükben megegyeznek.

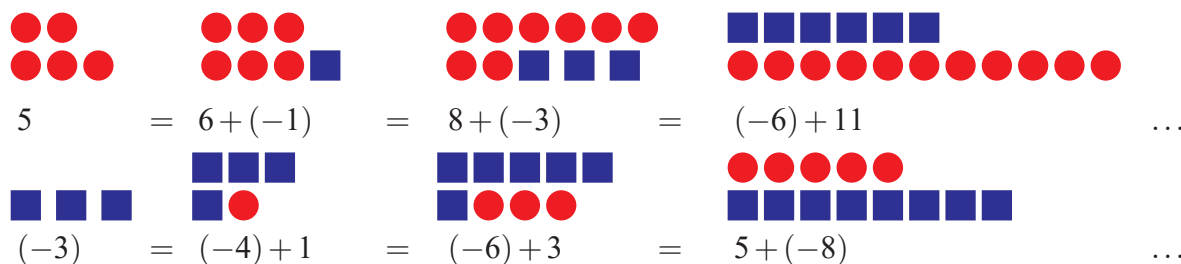


Egy szám **abszolút értéke** a 0-tól való távolsága a számegetenesen.

A 0-nak az abszolút értéke és az ellentettje is 0. Az abszolút érték mindig nemnegatív szám.

Az egész számokat szemléltethetjük adóssággal és készpénzzel. Minden számot végtelen sokféleképpen szemléltethetünk vagyoni helyzetként. A rajzokon a ● 1 készpénzt, a ■ pedig 1 adósságot jelöl.

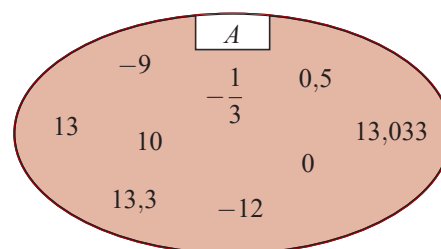
Például:



Feladatok

1. Válaszolj a kérdésekre az A halmaz elemeit vizsgálva!

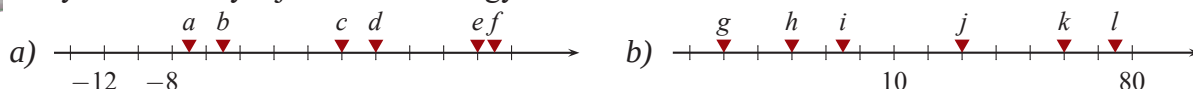
- Melyik a legnagyobb szám?
- Melyik a legnagyobb abszolút értékű szám?
- Melyik a legkisebb szám?
- Melyik a legkisebb abszolút értékű szám?
- Mennyi a legnagyobb és a legkisebb abszolút értékű szám összege?
- Mennyi a legnagyobb és a legkisebb abszolút értékű szám különbsége?



2. Az 1. feladatban megadott A halmaz elemeiről mondunk állításokat. Döntsd el, melyik igaz, melyik nem!

- A legnagyobb abszolút értékű szám a legkisebb.
- A legnagyobb abszolút értékű szám a legnagyobb.
- A legkisebb abszolút értékű szám a legkisebb.
- A legkisebb abszolút értékű szám a legnagyobb.

3. Mely számok helyét jelöltük a számegyenesen?



4. Állítsd a számokat növekedő sorrendbe!

- -11 $+12$ -7 -5 0 $+3$
- $\frac{5}{4}$ $-\frac{3}{4}$ $\frac{7}{4}$ 1 -2 $-\frac{1}{4}$
- $+150$ -60 -180 $+210$ $+100$ -15 $+10$ -75

5. Írj a letakart szám helyére a füzetedbe olyan egész számokat, amelyek igazá teszik a nyitott mondatokat!

- $-\square = (-5)$
- $-\square = (+5)$
- $-\square = 12$
- $(-3) < -\square < 7$
- $0 < -\square < 5$
- $(-2) < -\square < 3$

6. Ábrázold számegyenesen azokat a számokat, amelyek

- kisebbek, mint (-2) ;
- nem kisebbek, mint 5 ;
- nagyobbak, mint (-10) ;
- nem kisebbek, mint (-15) , és kisebbek, mint 9 !

7. Ábrázold számegyenesen azokat a számokat, amelyek abszolút értéke

- nem több, mint 10 ;
- 4 ;
- 3 és 4 közé esik;
- (-5) ;
- minimum 3 és maximum 8 ;
- legfeljebb 6 !

8. Ábrázold számegyenesen azokat a számokat, amelyek ellentettje

- kisebb, mint (-2) ;
- legalább 5 ;
- nagyobb vagy egyenlő 5 -tel;
- legfeljebb (-6) ;
- (-6) és 4 közé esik;
- maximum (-10) !

9. A megadott számokat vagyoni helyzetként kell felírni. Minden esetben megadtuk vagy az adósság, vagy a készpénz mennyiségét. Pótold a hiányzó adatokat!

Egész szám	-9	15	-22	7	-12	-5
Adósságcédula	11 db	13 db		8 db		99 db
Készpénzcédula			3 db		22 db	

10. Szemléltesd adósság- és készpénzcédulákkal a következő számok mindegyikét legalább három-féleképpen vagyoni helyzetként!

-6 3 0 -1

Egész számok összeadása és kivonása



1. példa

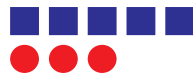
Mennyi $8 + (-6)$, $(-5) + 3$, $(-7) - (-4)$, $(-8) - 2$, $7 - 11$, $2 - (-5)$?

Megoldás

A megoldásokat megkaphatjuk úgy, hogy a negatív számokat adósságcédulákkal, a pozitívokat készpénzzel szemléltetjük.



$$8 + (-6) = 2$$



$$(-5) + 3 = (-2)$$



$$(-7) - (-4) = (-3)$$

A többi esetben nem tudjuk ilyen könnyen elvégezni a kivonást. Ahhoz, hogy -8 -ból el tudjunk venni 2 -t, a -8 -at olyan vagyontként célszerű elképzelnünk, amelyik legalább 2 készpénzt tartalmaz.



$$(-8) - 2 = (-10 + 2) - 2 = (-10)$$

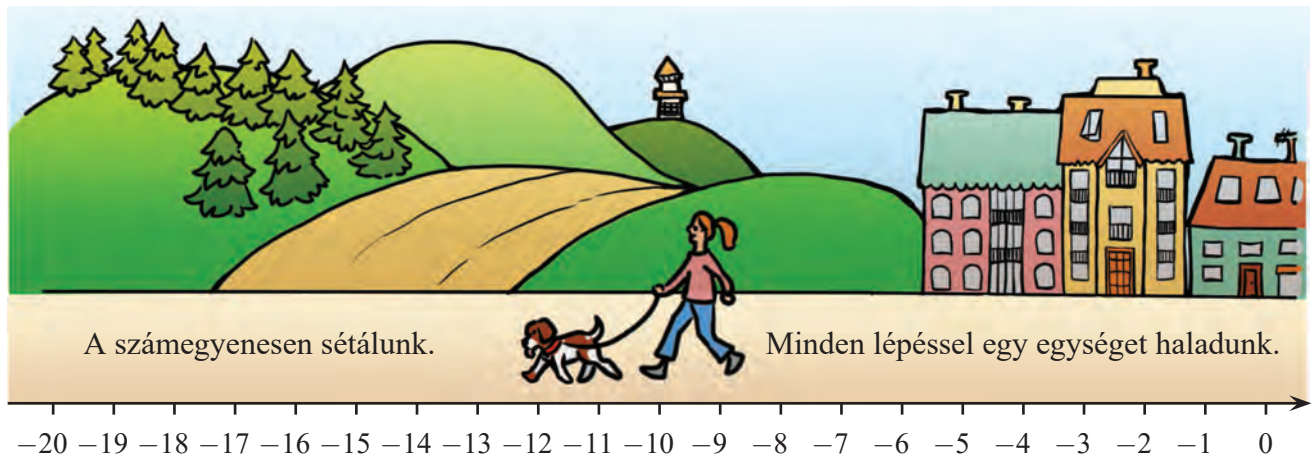


$$7 - 11 = [11 + (-4)] - 11 = (-4)$$



$$2 - (-5) = [7 + (-5)] - (-5) = 7$$

2. példa



Válassz egy számot, tedd rá a ceruzádat! Hová jutunk, ha

- a) balra sétálunk 5 lépést; b) jobbra sétálunk 5 lépést; c) hozzáadunk (-5) -öt;
d) elveszünk (-5) -öt; e) a számunkat 5 -tel növeljük; f) a számunkat 5 -tel csökkentjük;
g) hozzáadunk $(+5)$ -öt; h) elveszünk belőle $(+5)$ -öt; i) eltávolodunk a kiindulási helytől 5 -tel?

Megoldás

Először figyeljük meg, hogy mely esetekben növeltük, és mely esetekben csökkentettük a kiinduló számot!

Az a), c), f) és h) esetekben balra léptünk 5 -öt, tehát csökkent a szám, a b), d), e) és g) esetekben pedig jobbra léptünk 5 -öt, tehát növekedett a számunk, függetlenül attól, hogy honnan indultunk. Az i) esetben aszerint nő vagy csökken a kiindulási érték, hogy melyik irányba indultunk el.

Egy szám csökken, ha negatív számot adunk hozzá, vagy pozitív számot vonunk ki belőle.

Egy szám nő, ha negatív számot vonunk ki belőle, vagy pozitív számot adunk hozzá.

Most azt figyeljük meg, mely esetekben kaptuk ugyanazt az eredményt!

Ha például a (-12) -ről indulok, az $a)$, $c)$, $f)$ és $h)$ esetekben a (-17) -re jutok, a $b)$, $d)$, $e)$ és $g)$ esetekben pedig a (-7) -re.

$$(-12) + (-5) = (-12) - (+5) = (-12) - 5 = -17$$

$$(-12) + (+5) = (-12) - (-5) = (-12) + 5 = -7$$

Láthatjuk, hogy a -5 kivonása és a $+5$ hozzáadása ugyanarra az eredményre vezet. Hasonlóan a $+5$ kivonása és a -5 hozzáadása is ugyanazt az eredményt adja.

Egy szám kivonása és az ellentettjének a hozzáadása ugyanarra az eredményre vezet.

Az eddig megfigyelt tulajdonságok alapján könnyen ki lehet számítani a számok összegét és különbségét is. Mivel bármilyen szám kivonása helyettesíthető az ellentettjének hozzáadásával, elég csak az összeadásokkal foglalkoznunk.

3. példa

Mennyivel egyenlő

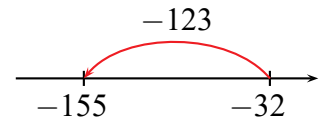
$a) (-32) + (-123);$

$b) 51 + (-72);$

$c) (-235) + 12?$

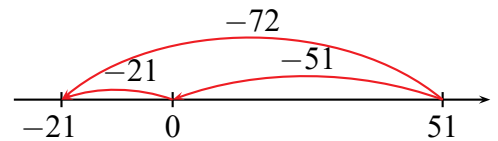
Megoldás

$a)$ A számegyenesen a (-123) hozzáadása azt jelenti, hogy a szám 123-mal kisebb lesz, tehát a számegyenesen (-32) -től indulva 123-at balra lépünk. Ekkor a 0-tól $32 + 123 = 155$ távolságra leszünk, éppen a (-155) számnál.



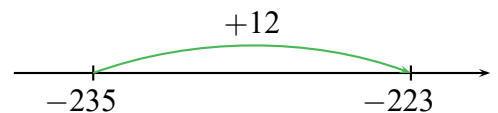
$(-32) + (-123) = -155$. Ebben az esetben az abszolút értékek összeadódnak.

$b)$ A számegyenesen a (-72) hozzáadása azt jelenti, hogy a szám 72-vel kisebb lesz, tehát az 51-től indulva 72-t lépünk balra. Először elmegyünk 51 lépéssel a 0-ig, ezután már csak $72 - 51 = 21$ lépés marad. Így a végén 21 egységnyi távolságra leszünk a 0-tól, a -21 pontnál.



$51 + (-72) = -21$. Ekkor a nagyobb abszolút értékű számból kivontuk a kisebb abszolút értékű számot.

$c)$ A számegyenesen a 12 hozzáadása azt jelenti, hogy a (-235) -től indulva 12-t jobbra lépünk, a 0-hoz 12 lépéssel közelebb kerülünk. $235 - 12 = 223$ távolságra, a (-223) számnál leszünk.



$(-235) + 12 = (-223)$. Ekkor is kivonással állapítottuk meg az eredmény abszolút értékét.

Egész számok összegének kiszámításakor két dolgot kell meghatározunk:

az eredmény előjelét

az eredmény abszolút értékét

Az előjel meghatározásában segíthet, ha a számokat készpénzként, illetve adósságcédulaként képzeljük el.

$(+2387) + (+1123)$	$(-2387) + (-1123)$	$(-2387) + (+1123)$	$(+2387) + (-1123)$
Itt az összeg pozitív, hiszen csupa készpénzünk van.	Itt az összeg negatív, hiszen csupa adósságcédulánk van.	Itt az összeg negatív, mivel több adósságunk van, mint készpénzünk.	Itt az összeg pozitív, mivel több pénzünk van, mint adósságunk.

Az eredmény **abszolút értékének** kiszámítása történhet írásban is.

$\begin{array}{r} 2387 \\ + 1123 \\ \hline 3510 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2387 \\ + 1123 \\ \hline 3510 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2387 \\ - 1123 \\ \hline 1264 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2387 \\ - 1123 \\ \hline 1264 \end{array}$
$(+2387) + (+1123) =$ $= (+3510)$	$(-2387) + (-1123) =$ $= (-3510)$	$(-2387) + (+1123) =$ $= (-1264)$	$(+2387) + (-1123) =$ $= (+1264)$

Ha egyező előjelű számokat adunk össze, akkor az eredmény abszolút értékét összeadással kapjuk meg. Ha különböző előjelű számokat adunk össze, akkor az eredmény abszolút értékét kivonással kapjuk meg.

Feladatok

1. A gyerekek között vannak-e olyanok, akiknek egyenlő a vagyonuk?

a) Anna vagyona:



b) Béla vagyona:



c) Cili vagyona:



d) Dóri vagyona:



e) Erika vagyona:



f) Ferkó vagyona:



g) Gábor vagyona:



h) Hugó vagyona:



Közülük kitől lehet kapni 5 készpénzcédulát? Mennyi vagyona marad, ha elkérünk tőle 5 készpénzcédulát?

2. Írd le a matematika nyelvén a szövegeket, és számold ki, kinek mennyi vagyona lesz!

a) Anna vagyona (+12), és kap (+8)-at.

b) Erika vagyona (+5), és költ 8 készpénzt.

c) Böbe vagyona (-2), és kap (+21)-et.

d) Fanni vagyona (-3), és költ (+11) készpénzt.

e) Csaba vagyona (-8), és szerez 11 adósságcédulát.



Nézz utána, mit jelentenek, honnan erednek vagyon és pénz szavaink! Miért a „kész” szóval kezdődik a készpénz szavunk?

3. Mi történhetett? Írj róla műveletet!

a) Ancsának ennyi vagyona volt: ● ● ● ,

és ennyi lett: ■ ■ .

b) Béci vagyona ennyi volt: ● ● ● ● ● ● ,

és ennyi lett: ■ ■ ■ ■ .

c) Csongor vagyona ennyi volt: ■ ■ ■ ■ ,

és ennyi lett: ■ .

d) Dini vagyona ennyi volt: ■ ■ ■ ■ ■ ,

és ennyi lett: ● ● .

e) Editke vagyona ennyi volt: ■ ,

és ennyi lett: ● ● ● ● ● ● ● ● .

4. Végezd el a változtatásokat összeadással és kivonással is!

a) Növelsd a (-8) -at 3-mal!

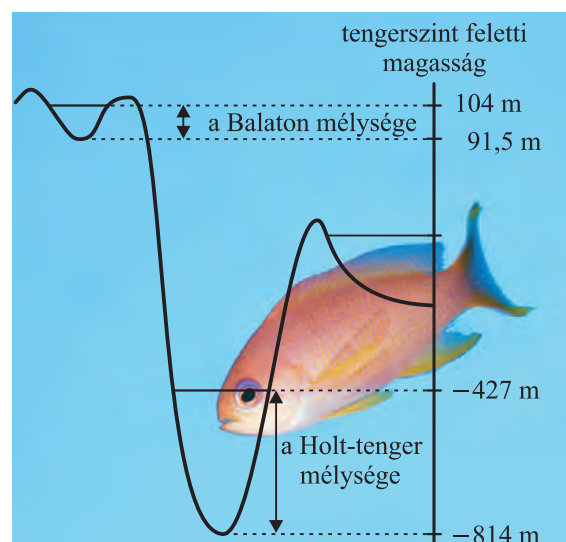
b) Növelsd a $(+6)$ -ot 7-tel!

c) Csökkentsd a (-12) -t 6-tal!

d) Csökkentsd a $(+9)$ -et 9-cel!

5. Megadjuk a Föld néhány nagy állóvizének mélységét. Ezt a mélységet természetesen a víz felszínétől számítják. Megadjuk a felszínek tengerszint feletti magasságát is. Számítsd ki minden állóvíz aljának a tengerszint feletti magasságát! Az adatok alapján válaszolj a kérdésekre!

Tó neve	Tengerszint feletti magassága	Maximális mélysége
Bajkál-tó	455 m	1642 m
Balaton	104 m	12,5 m
Kaszipi-tenger	-28 m	1025 m
Csorba-tó	1346 m	20 m
Michigan-tó	176 m	281 m
Aral-tó	29 m	37 m
Holt-tenger	-427 m	387 m
Ontario-tó	75 m	244 m



Melyik van magasabban? Mennyivel?

a) A Balaton felszíne vagy a Bajkál-tó alja?

b) Az Aral-tó fenéke vagy a Michigan-tó alja?

c) A Kaszipi-tenger fenéke vagy a Holt-tenger felszíne?

d) Az Ontario-tó alja vagy a Csorba-tó felszíne?



Nézz utána, hogyan nevezik a Csendes-óceán legmélyebb pontját! Találsz-e ennél mélyebb helyet a többi óceánban?

6. a) Készíts összeadásokat úgy, hogy az egyik összeadandót a $\{-183; -15; +762\}$ halmazból, a másikat pedig a $\{-17; +13; -120; +85\}$ halmazból választod!

b) Hány eset lehetséges? Végezd el az összes lehetséges összeadást!

7. Az $a - b$ különbségben az a értékét a $\{-42; +27; -13\}$, a b értékét pedig a $\{-37; -48; +13; -42\}$ halmazból választjuk. Végezd el a kivonást az összes lehetséges esetben!

8. Válassz egy számot a számegyenesen! A feladatok mindegyikében erről a számról indulj!

- a) Vonj le belőle (-10) -et! b) Vonj ki belőle (-9) -et! c) Lépj jobbra 9-et!
d) Lépj balra 18-at! e) Csökkentsd 9-cel! f) Növeld 18-cal!
g) Vonj ki belőle (-18) -at! h) Adj hozzá 9-et! i) Növeld 10-zel!
j) Csökkentsd 6-tal! k) Vonj ki belőle 6-ot! l) Végj el belőle 6-ot!

Csoportosítsd az utasítások betűjeleit aszerint, hogy a kiinduló értéknél nagyobb vagy kisebb számhoz jutottál!

Válaszd ki az azonos jelentésű utasításokat!

9. Egy sorozat első tagja legyen 10, a második tag legyen 5-tel több, a harmadik tag legyen 4-gyel több, mint az előző! Mindig 1-gyel kisebb legyen a különbség, mint a korábbi két tag különbsége volt!

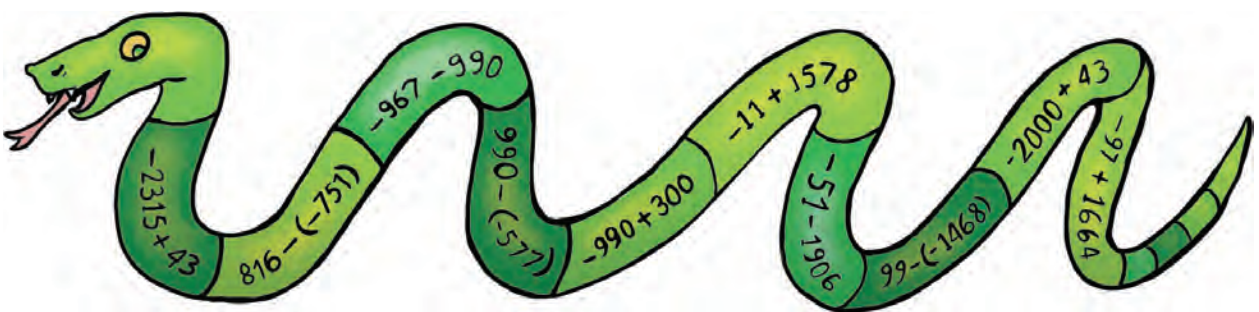
- a) Mennyi lesz az 5. tag? b) Mennyi lesz a 8. tag? c) Mennyi lesz a 20. tag?

10. A következő műveletek mindegyikében az egyik szám abszolút értéke 663, a másiké 521. Minden lehetséges módon előjeleket adtunk nekik, majd összeadásokat és kivonásokat készítettünk belőlük. Számold ki őket! Gondold meg a számolások elvégzése előtt, hogy hányféle eredményt kapsz, és hogy melyik feladatok vezetnek azonos eredményre!

- a) $(+663) + (-521)$ b) $(-521) - 663$ c) $(-663) - (-521)$
d) $(+663) - 521$ e) $521 - 663$ f) $(-521) - (-663)$
g) $(-663) + 521$ h) $521 - (-663)$ i) $663 - (-521)$
j) $(-521) + 663$ k) $(-663) + (-521)$ l) $663 + 521$
m) $521 + (-663)$ n) $(-521) + (-663)$ o) $(-663) - 521$

11. Mi az elrejtett szó? Írd le a füzetedbe a kígyó hátán álló műveletek eredményeinek megfelelően az azokkal egyenlő értékű betűket!

$$B = -738 - 1219 \quad K = -1523 + (-749) \quad A = 956 - (-611) \quad L = -641 + (-49)$$



Ezekből a betűkből más szavakat is ki lehet rakni. Készíts egy másik rejtvényt! Nem baj, ha ennél a kígyónál rövidebb lesz.

12. Mi lehet a sorozat szabálya? Folytasd a sorozatot 3-3 taggal mindkét irányban az általad kitalált szabály szerint!

- a) ..., 40, 30, 21, 13, 6, ... b) ..., 5, 4, 6, 3, ... c) ..., 66, 67, 68, 55, 56, 57, 44, ...

13. Írd le műveletekkel, és számítsd ki az eredményt!

- a) (-5) és $(+3)$ különbségéhez add hozzá az összegüket!
- b) (-7) abszolút értékéhez add hozzá a (-8) és a (-3) különbségét!
- c) (-10) és $(+10)$ különbségéhez adj hozzá (-3) -at!
- d) (-5) -höz add hozzá a $(+3)$ ellentettjét!
- e) (-5) -ből vedd el az ellentettjét!
- f) (-5) -höz add hozzá az ellentettjét!

14. Tedd igazzá a nyitott mondatokat!

- a) $17 - (-2) = 17 + \square$
- b) $(-32) - 7 = (-32) + \square$
- c) $32 + 8 = 32 - \square$

15. Tedd igazzá a nyitott mondatokat!

- a) $\square - 7 = (-12)$
- b) $\square - 12 = 7$
- c) $5 - \square = (-13)$

16. Tedd igazzá a nyitott mondatokat!

- a) $\square - (-5) = 0$
- b) $\square + (-21) = (-3)$
- c) $3 + (-\square) = 10$

17. Kinek az állítása igaz, kié hamis a gyerekek közül?

Dávid: Ha egy számhoz hozzáadok valamit, akkor nagyobb számhoz jutok.

Gyöngyvér: Lehet egy számhoz hozzáadni valamit úgy, hogy kisebb számhoz jussunk.

Ági: Pozitív szám hozzáadása a számot növeli.

Juli: Negatív szám hozzáadásával is növelhetjük a számot.

Pali: Pozitív szám hozzáadásával és negatív szám kivonásával is növelhetünk egy számot.

Robi: Kivonás helyett mindig végezhetünk összeadást.



18. Találd meg az elrejtett szót! Mennyit adjunk hozzá

M: (-90) -hez, hogy $(+230)$ -at kapjunk;

S: (-90) -hez, hogy (-230) -at kapjunk;

R: 124 -hez, hogy (-400) -at kapjunk;

Z: 124 -hez, hogy 400 -at kapjunk;

K: 5117 -hez, hogy $(+60)$ -at kapjunk;

A: 5117 -hez, hogy (-60) -at kapjunk;

U: (-5117) -hez, hogy $(+60)$ -at kapjunk;

P: (-5117) -hez, hogy (-60) -at kapjunk?

Írd a betűket a füzetedbe az alább megadott eredményeknek megfelelő sorrendben! Mi lett az elrejtett szó?

-5057	-524	-5177	$+320$	$+5057$	$+5177$	-140	$+276$
---------	--------	---------	--------	---------	---------	--------	--------

19. Helyezd el az $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$ számkártyákat és a körökbe az előjeleket úgy, hogy a megadott végeredményeket kapd!

a) $\bigcirc \square \square \square - \bigcirc \square \square = 613$

b) $\bigcirc \square \square + \bigcirc \square \square \square = (-882)$

c) $\bigcirc \square \square - \bigcirc \square \square \square = (-922)$

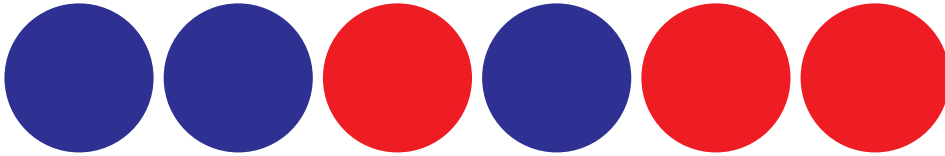
d) $\bigcirc \square \square + \bigcirc \square + \bigcirc \square \square = 27$

Készíts te is rejtvényeket az osztálytársaidnak!

Több tag összege, különbsége



Játék – A játékot párban játsszátok! Vegyetek elő 6-6 piros-kék korongot! Egyikőtök tegye le tetszőleges sorba a 6 korongot, például így:



Majd írjon rá mindegyik korongra egy-egy pozitív vagy negatív számot! A társa másolja le pontosan ezt a készletet! Ekkor mindkettőtök előtt ugyanaz a korongsor áll. Fordítsátok meg ezután a korongokat, és a másik oldalukra írjátok rá a szám ellentettjét! Tehát például a kék +5-ös korong másik (piros) oldalára -5 kerül.

Mindketten markoljátok fel a korongjaitokat, rázzátok meg a korongokat, majd dobjátok le, és rendezétek el véletlenszerű sorrendben! Ezután írjátok róla műveletsort úgy, hogy minden piros korong elé az összeadás jelét, minden kék korong elé a kivonás jelét írjátok!

Mivel csak összeadások és kivonások vannak a műveletsoraitokban, mindig indíthatjátok azokat 0-val. Számoljátok ki a kapott műveletsor eredményét, és hasonlítsátok össze padszomszédotok eredményeivel!

Ismételjétek meg többször is a játékot! Mit vesztek észre?

Példa



Összeadás esetén a tagok sorrendje felcserélhető akkor is, ha előjeles számokat adunk össze.



$$(+3) + (+5) + (-3) = (-3) + (+5) + (+3) = (+3) + (-3) + (+5) = 0 + 5 = 5$$

Nézzük meg, hogy a tagok sorrendje felcserélhető-e akkor is, ha az összeadások mellett kivonások is szerepelnek!

Megoldás

Az előző játékban leírtak szerint elkészítettünk hat korongot. Ezek mindkét oldala itt látható:



A korongokkal sokféle műveletsort rakhatunk ki. A korong színe határozza meg a műveleti jelet. A fenti korongkészlet például ilyen műveletsorokat jelenthet:

$$0 + (-23) - (+5) + (+8) - (-15) - (+7) + (-1) \text{ vagy } 0 - (-8) + (-23) + (-5) - (+1) + (+15) + (-7)$$

Ugyanezeket a korongokat bárhogyan ledobva és összekeverve más műveletsorhoz, de ugyanahhoz az eredményhez jutunk. Ez azért van így, mert a +5 korong vagy így esett le: +5, ekkor a (+5) kivonását jelenti, vagy így: -5, ekkor a (-5) hozzáadását jelenti, és azt már tudjuk, hogy egy szám kivonása mindig helyettesíthető ellentettjének hozzáadásával.

Ebben a modellben a **műveleti jelet a korong színe jelenti**. Mivel tetszőlegesen keverhetjük és forgathatjuk a korongokat, megtehetjük, hogy mindegyik korongot úgy fordítjuk, hogy

1. negatív szám legyen felül:

$$0 + \text{negatív}(-23) + \text{negatív}(-5) - \text{negatív}(-8) - \text{negatív}(-15) + \text{negatív}(-7)$$

2. pozitív szám legyen felül:

$$0 - \text{pozitív}(+23) - \text{pozitív}(+5) + \text{pozitív}(+8) + \text{pozitív}(+15) - \text{pozitív}(+7)$$

3. a kék oldal legyen felül, azaz csak kivonást végzünk:

$$0 - \text{kék}(+23) - \text{kék}(+5) - \text{kék}(-8) - \text{kék}(-15) - \text{kék}(+7)$$

4. a piros oldal legyen felül, azaz csak összeadást végzünk:

$$0 + \text{piros}(-23) + \text{piros}(-5) + \text{piros}(+8) + \text{piros}(+15) + \text{piros}(-7)$$

Azokat a műveletsorokat, amelyekben csak pozitív és negatív számok összeadása és kivonása szerepel, sokféleképpen átalakíthatjuk azért, hogy a műveletsort könnyebb legyen elvégezni.

Feladatok

1. a) Írj két különböző számot, amelyek összege 0!

b) Írj három különböző számot, amelyek összege 0!

c) Írj két különböző számot, amelyek különbsége 0!

2. Írj egy pozitív és egy negatív számot úgy, hogy az összegük

a) pozitív legyen;

b) 0 legyen;

c) negatív legyen!

3. Három számot összeadtunk, és az összeg a tagok mindegyikénél kisebb lett. Hogyan lehetséges ez? Írj rá példákat!



4. -27 $+12$ -30 Írj a korongokról műveletsort úgy, ahogyan azt a fejezet bevezető példájában leírtuk! Számítsd ki az eredményét!

Forgasd úgy a korongokat, hogy

a) egy negatív szám legyen felül;

b) csak kék legyen felül;

c) csak piros legyen felül;

d) csak pozitív szám legyen felül!

5. Készíts korongokat a műveletsornak megfelelően!

a) $(+73) - (+141) + (-129) - (-27) - (-41)$

b) $(-379) + (-17) - (-270) - (-97) + (-21)$

6. Végezd el a műveleteket! A feladatokban csak összeadások és kivonások szerepelnek, ezért a műveletvégzés sorrendje tetszőleges, de ne feledd, hogy a számokat csak az előttük álló műveleti jellel együtt szabad cserélgetni!

a) $(-41) - (-55) + 51 - (-5)$

b) $18 - 23 + (-17) - (-2)$

c) $(-26) + 32 - 4 - (-18)$

d) $33 - 128 + 8 - (-13)$

e) $7200 - 12 - 399 - (-800) - 1$

f) $56 + (-479) - (-15) + (-95) + 24$

g) $(-1) + 31 - 28 + (-49) + 69 + (-22)$

h) $176 - 53 - 16 + 14 - (-53) + 72$



7. A hőmérséklet megváltozásakor a hőmérséklet-különbséget úgy számoljuk ki, hogy a változás után kapott értékből kivonjuk a kezdeti értéket.

Ha például hétfő reggel -1 fok volt, és kedd reggelre $+7$ fok lett, akkor a hőmérséklet-különbség $(+7) - (-1) = (+8)$ fok.

Ha ezután szerda reggel -3 fokot mérnek, akkor a hőmérséklet-különbség $(-3) - (+7) = (-10)$ fok. Így a hőmérséklet-különbségre kapott érték abszolút értéke megmutatja, hogy mennyivel változott a hőmérséklet, az előjele pedig elárulja, hogy melegedett vagy hűlt az idő.

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat	Vasárnap
Reggeli hőmérséklet	-1	$+7$	-3	-3	0	-5	-12
Déli hőmérséklet	$+4$	$+8$	0	-1	$+6$	-9	-11
Esti hőmérséklet	$+8$	$+4$	-1	-2	-1	-10	-9

- Mennyi a hőmérséklet-különbség hétfő reggel és vasárnap este között?
- Reggeltől délig általában emelkedett a hőmérséklet. Volt-e olyan nap, amikor csökkent?
- Déltől estig általában csökkent a hőmérséklet. Volt-e olyan nap, amikor emelkedett?
- Melyik időszakban volt a változás abszolút értéke a legnagyobb? Mennyi ez az érték?
- Melyik időszakban volt a változás abszolút értéke a legkisebb? Mennyi ez az érték?
- Melyik időszakban volt a hőmérséklet-különbség a legnagyobb? Mennyi ez az érték?
- Melyik időszakban volt a hőmérséklet-különbség a legkisebb? Mennyi ez az érték?
- Készíts hőmérséklet-grafikont az adatok alapján!



8. A következő feladatok megoldása során Panni az **1**-gyel, illetve a **2**-vel jelölt írásbeli összeadást, illetve kivonást végezte el. Találd ki, melyik feladathoz melyik művelet tartozik!

$$\begin{array}{r} 730 \\ +174 \\ \hline \end{array}$$

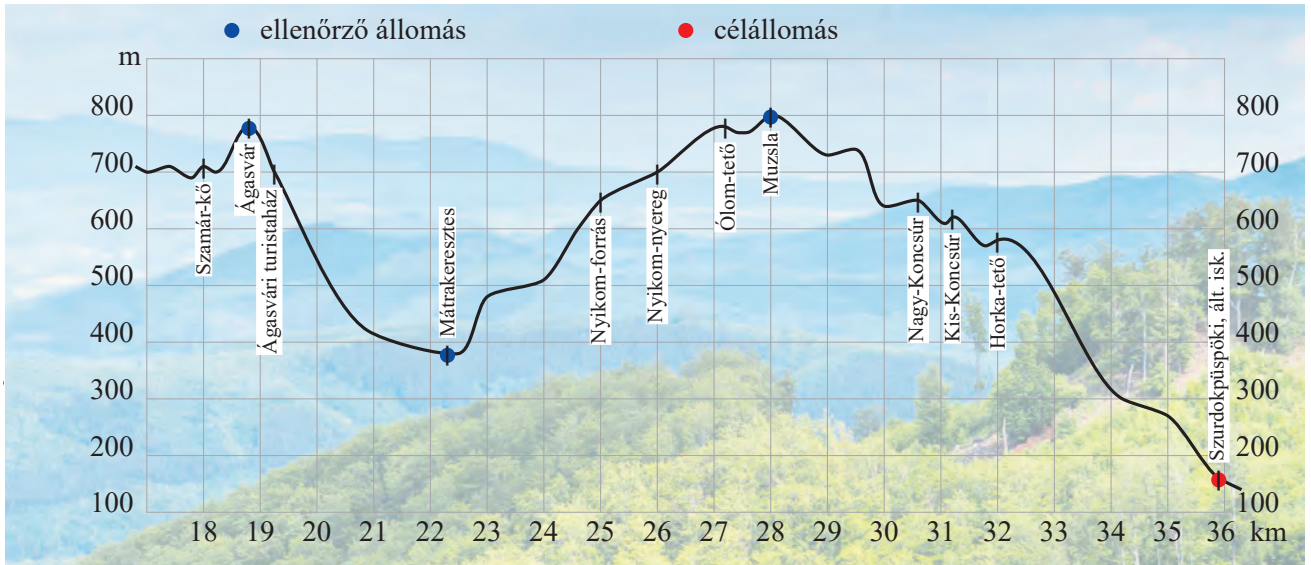
1

$$\begin{array}{r} 730 \\ -174 \\ \hline \end{array}$$

2

- Mennyivel több a 730 a 174-nél?
- Mennyi (-730) és (-174) összege?
- Mennyi (-730) és 174 különbsége?
- Mennyi (-730) és 174 összege?
- Mennyi (-730) és (-174) különbsége?
- Mennyivel több a 730 a (-174) -nél?
- Mennyi 730 és (-174) távolsága a számegyenesen?
- Melyik az a szám, amely éppen 174-gyel kevesebb (-730) -nál?
- Mennyi 174 és (-730) távolsága a számegyenesen?
- Mennyi (-174) és (-730) távolsága a számegyenesen?

9. Miklós nagy kiránduló. Minden évben részt vesz a Hanák Kolos teljesítménytúrán. A 36 km-es túra Kékestetőről indul, és Galyatetőn, Ágasváron és Muzslán át Szurdokpüspökibe vezet. A rajzról leolvashatod az egyes pontok tengerszint feletti magasságát (a rajz a túra második felét tartalmazza).



A tengerszint feletti magasságok eltérését szintkülönbségnek nevezzük. Az előjeles szintkülönbség azt is megmutatja, hogy felfelé vagy lefelé vezet az út.

Például Mátrakeresztestől Muzsláig az út 391 méterről 805 méter magasra megy fel, a szintkülönbség $805 - 391 = 414$ méter. Ágasvártól Mátrakeresztesig 391 méterre ereszkedik le 778 méterről, a szintkülönbség $391 - 778 = -387$ méter.

- Olvasd le a rajzról a megjelölt helyek tengerszint feletti magasságát!
- Mennyi az előjeles szintkülönbség Muzsla és Szurdokpüspöki között?
- Mennyi az előjeles szintkülönbség Mátrakeresztes és a Nyikom-nyereg között?

10. Nézzünk egy egyszerű kifejezést: $\triangle - 3$. A kifejezés értéke lehet pozitív, negatív vagy nulla, attól függően, hogy milyen számot írunk a $\triangle$ helyére.

Például: ha $\triangle = 7$, akkor a $\triangle - 3$ kifejezés értéke pozitív, hiszen $7 - 3 = 4$,
 ha $\triangle = -1$, akkor a $\triangle - 3$ kifejezés értéke negatív, hiszen $-1 - 3 = -4$,
 ha $\triangle = 3$, akkor a $\triangle - 3$ kifejezés értéke nulla, hiszen $3 - 3 = 0$.

Színezzük ki a számegetenest a $\triangle - 3$ kifejezés szerint!

Legyen **fekete** az a szám, amelyiknél a kifejezés értéke nulla!

Legyen **piros** az a szám, amelyiknél a kifejezés értéke pozitív!

Legyen **kék** az a szám, amelyiknél a kifejezés értéke negatív!



Rajzolj a füzetedbe számegetenest, és színezd ki a példa alapján a megadott kifejezésekhez tartozó számokat!

- $\triangle + 5$
- $\triangle - 5$
- $5 - \triangle$
- $|\triangle|$

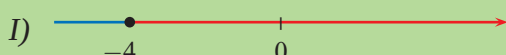
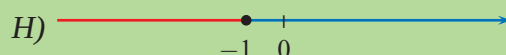
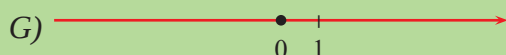
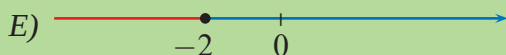
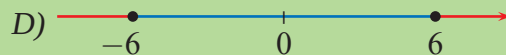
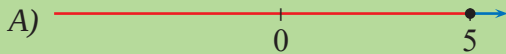


11. Mindegyik kifejezéshez kiszíneztünk egy számegeyenest úgy, hogy **pirosra** színeztük azokat a számokat, amelyek pozitívvá teszik a kifejezést, **kékre** azokat, amelyekre a kifejezés értéke negatív, és **feketere** azokat, amelyekre a helyettesítési érték 0.

Melyik számegeyenest melyik kifejezéshez színeztük ki?

a) $-\square - 1$ b) $\square + 4$ c) $5 - \square$ d) $|\square|$ e) $-(\square + 2)$

f) $-|\square|$ g) $|\square - 6|$ h) $|\square| - 6$ i) $-\square$ j) $\square$



12. A gyerekek egy túrán 153 m magasról indultak, és 357 m magasra érkeztek. Azt is tudjuk, hogy összesen 725 méter szintkülönbséget tettek meg felfelé. Mennyi volt a szintkülönbségek összege az ereszkedő szakaszokon?

13. Egy kirándulás 413 méter magasan kezdődött, és 151 méter magasan fejeződött be. Azt is tudjuk, hogy a felfelé és lefelé mászások során a szintkülönbségek abszolút értékeinek összege 1220 méter volt. Meg tudod-e mondani, ebből az 1220 méterből mennyi volt a felfelé kapaszkodás, és mennyi volt a lefelé ereszkedés? Ha igen, számold is ki!



Szorzás és osztás egész számokkal

Összeadni és kivonni már nem csak pozitív számokat tudunk. De a szorzásnak csak akkor tudjuk az értelmét, ha a szorzó pozitív egész szám. Tudjuk például, hogy



$$(+3) \cdot 2 = (+3) + (+3) = (+6),$$



$$(-3) \cdot 4 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = (-12).$$

Bizonyos esetekben osztani is tudunk előjeles számokat.



$$(-8) : 2 = (-4), \quad (-8) \text{-nak a fele } (-4). \quad (-8) : (-2) = 4, \quad (-8) \text{-ban a } (-2) \text{ 4-szer van meg.}$$

Azt tehát tudjuk, hogy $(-3) \cdot (+4) = (-12)$. De mennyi lehet a $(-3) \cdot (-4)$? Ezt nem tudjuk összeadásra visszavezetni, mivel nincsen olyan összeg, amelyben az összeadandók darabszáma (-4) lenne.

Figyeljük meg a szorzások sorozatát!

A szorzót $+4$ -től kezdve egyesével csökkentjük, a szorzandó pedig mindegyikben $+3$.

$$(+3) \cdot (+4) = (+12)$$

$$(+3) \cdot (+3) = (+9)$$

$$(+3) \cdot (+2) = (+6)$$

$$(+3) \cdot (+1) = (+3)$$

$$(+3) \cdot 0 = 0$$

$$(+3) \cdot (-1) = (-3)$$

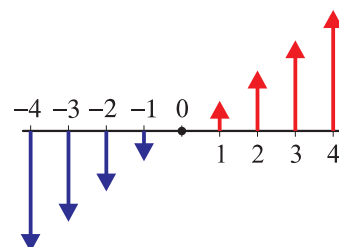
$$(+3) \cdot (-2) = (-6)$$

$$(+3) \cdot (-3) = (-9)$$

$$(+3) \cdot (-4) = (-12)$$

Látjuk, hogy a szorzat értéke sorról sorra hárommal csökken.

Folytassuk e szerint a szabály szerint a sorozatot!



Észrevehetjük, hogy a $+3$ -at egy negatív számmal megszorozva negatív számot kapunk.

A $(+3) \cdot (-4)$ abszolút értéke megegyezik a $(+3) \cdot (+4)$ abszolút értékével, csak az előjelük különböző.

Legyen most a szorzandó negatív szám, a $+3$ ellentettje, vagyis a -3 ! A szorzót most is csökkentjük egyesével! Azt már láttuk, hogy $(-3) \cdot (+4) = (-12)$.

$$(-3) \cdot (+4) = (-12)$$

$$(-3) \cdot (+3) = (-9)$$

$$(-3) \cdot (+2) = (-6)$$

$$(-3) \cdot (+1) = (-3)$$

$$(-3) \cdot 0 = 0$$

$$(-3) \cdot (-1) = (+3)$$

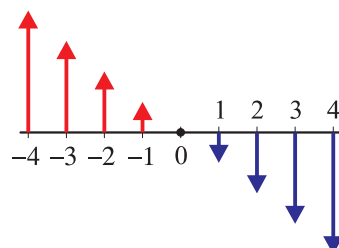
$$(-3) \cdot (-2) = (+6)$$

$$(-3) \cdot (-3) = (+9)$$

$$(-3) \cdot (-4) = (+12)$$

Látjuk, hogy ilyenkor a szorzatok értéke sorról sorra hárommal növekszik.

Folytassuk tovább e szerint a szabály szerint a sorozatot!



Észrevehetjük, hogy a -3 -at egy negatív számmal szorozva pozitív számot kapunk.

Hasonlítsuk össze a

$$(+3) \cdot (+4) = (+12)$$

$$(-3) \cdot (-4) = (+12)$$

$$(+3) \cdot (-4) = (-12)$$

$$(-3) \cdot (+4) = (-12) \text{ szorzatokat!}$$

A szorzat abszolút értéke mindegyik esetben megegyezik.

A szorzat abszolút értéke egyenlő a tényezők abszolút értékének szorzatával.

Két megegyező előjelű szám szorzata pozitív.

Két különböző előjelű szám szorzata negatív.

Ezek alapján már tudunk osztani is, hiszen az osztás próbája a szorzás.

$$(+8) : (+4) = (+2),$$

mert

$$(+2) \cdot (+4) = (+8).$$

$$(-8) : (+4) = (-2),$$

mert

$$(-2) \cdot (+4) = (-8).$$

$$(+8) : (-4) = (-2),$$

mert

$$(-2) \cdot (-4) = (+8).$$

$$(-8) : (-4) = (+2),$$

mert

$$(+2) \cdot (-4) = (-8).$$

Figyeljük meg az előjeleket! Észrevehetjük, hogy az előjelek az osztásnál ugyanúgy viselkednek, mint a szorzásnál.

Két különböző előjelű szám szorzata és hányadosa is negatív szám.

Két egyező előjelű szám szorzata és hányadosa is pozitív szám.

Feladatok

1. Írd fel szorzat alakban, és számítsd ki!
 a) $5+5+5+5+5$ b) $(-3)+(-3)+(-3)+(-3)$ c) $(-122)+(-122)+(-122)$
2. Írd fel összeg alakban, és számítsd ki!
 a) $(-72) \cdot 2$ b) $(-15) \cdot 4$ c) $(-99) \cdot 5$ d) $(-33) \cdot 3$
3. Számítsd ki fejben!
 a) $(-25) \cdot (+4)$ b) $(-25) \cdot (-8)$ c) $(-45) \cdot (+20)$ d) $(-213) \cdot (+1000)$
 e) $(+250) : (-50)$ f) $(-400) : (+80)$ g) $(-1000) : (+8)$ h) $(-630) : (-90)$
4. Két szám szorzata 60. Mennyi lehet a két tényező, ha tudjuk, hogy mindkettő
 a) természetes szám; b) egész szám?
5. Két szám hányadosa 5. Mennyi lehet az osztó és az osztandó, ha tudjuk, hogy mindkettő
 a) természetes szám; b) egész szám?
6. Számítsd ki, mennyi $(-15) \cdot (+8)$!
 Hogyan változik a szorzat, ha egyik tényezőjét
 a) kétszeresére változtatjuk, a másikat nem változtatjuk;
 b) harmadrészére változtatjuk, a másikat nem változtatjuk;
 c) háromszorosára, a másikat kétszeresére változtatjuk;
 d) harmadrészére, a másikat felére változtatjuk?
7. Számítsd ki, mennyi $(-48) : (+8)$!
 Hogyan változik a hányados, ha az osztandót
 a) a felére változtatjuk, és az osztót nem változtatjuk;
 b) és az osztót is felére változtatjuk;
 c) és az osztót is háromszorosára változtatjuk;
 d) kétszeresére és az osztót negyedrésszére változtatjuk;
 e) kétszeresére és az osztót négyszeresére változtatjuk?
8. Hasonlítsd össze a megadott szorzatokat, illetve hányadosokat! A műveletek elvégzése nélkül próbáld meg kitalálni, melyik hányszorosa a másiknak!
 a) $5 \cdot (-10)$ és $20 \cdot (-10)$ b) $(-32) \cdot 18$ és $(-8) \cdot (-18)$
 c) $24 \cdot 35$ és $(-6) \cdot 70$ d) $(-36) \cdot (-55)$ és $(-360) \cdot 11$
 e) $100 : (-20)$ és $200 : (-20)$ f) $50 : (-25)$ és $(-500) : 25$
 g) $280 : 35$ és $(-40) : 5$ h) $333 : 37$ és $111 : (-111)$
9. $\bigcirc \cdot 3$ Gyűjts olyan egész számokat, amelyeket 3-mal megszorozva
 a) 0-nál kisebb számot kapunk; b) 0-nál nagyobb számot kapunk; c) 0-t kapunk!
10. $\bigcirc \cdot (-2)$ Gyűjts olyan egész számokat, amelyeket (-2) -vel megszorozva
 a) 0-nál kisebb számot kapunk; b) 0-nál nagyobb számot kapunk; c) 0-t kapunk!

11.  : (-5) Gyűjts olyan egész számokat, amelyeket (-5)-tel osztva

- a) 0-nál kisebb számot kapunk; b) 0-nál nagyobb számot kapunk;
c) 0-t kapunk; d) (-8)-nál nagyobb számot kapunk;
e) 50-nél kisebb számot kapunk; f) (-8)-nál kisebb számot kapunk!

12. Egy sorozat első tagja 12. Minden tag legyen az előzőnek a (-2)-szerese!

- a) Mennyi lesz a 3. tag? b) Milyen lesz a 15. tag előjele?

13. a) Egy egész számot (-4)-gyel megszorozva (+8)-nál nagyobb számot kapunk. Mi lehet a szám?

b) Egy egész számot (-4)-gyel elosztva (+8)-nál kisebb számot kapunk. Mi lehet a szám?

14. Számítsd ki!

- a) $(-32) \cdot (+512)$ b) $(-328) \cdot (-45)$
c) $(-615) : (+75)$ d) $(-1218) : (-24)$ e) $(+41) \cdot (-41)$

15. Tedd igazzá a nyitott mondatokat! Lehet, hogy több megoldás is van.

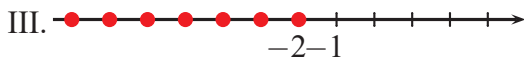
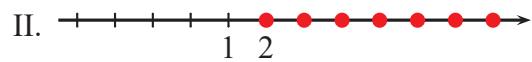
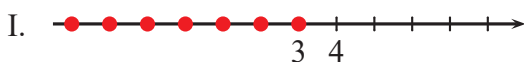
- a) $\square \cdot \square = 4$ b) $\triangle \cdot \triangle = 100$ c) $\square \cdot \square = 0$ d) $\square \cdot \square = (-100)$ e) $\square \cdot \square = (-4)$

16. Tedd igazzá a nyitott mondatokat!

- a) $(-2) \cdot \square = 14$ b) $3 \cdot \square = (-6)$ c) $\square \cdot (-5) = (-10)$
d) $\square : (-9) = 7$ e) $23 \cdot \square = (-69)$ f) $(-14) \cdot (-\square) = 28$
g) $(-\square) \cdot 5 = -50$ h) $(-12) \cdot (-\square) = -60$ i) $\square : (-6) = 110$
j) $250 : \square = (-5)$ k) $(-637) : \square = 7$ l) $(-\square) : 28 = -1$

17. A nyitott mondatok megoldásait számegegyenesen ábrázoltuk. Az egész számok között kerestük a megoldásokat. Párosítsd össze a nyitott mondatokat a számegegyenesekkel!

- a) $(-2) \cdot \square < 0$ b) $(-2) \cdot \square \geq 4$ c) $3 \cdot \square < 10$ d) $5 \cdot \square \geq 6$



18. Játék – Mindenki rajzoljon be a füzetébe egy ilyen ábrát!

$\bigcirc \square \square \cdot \bigcirc \square \square$

A játék során ki kell tölteni az üresen hagyott helyeket. A körökbe + vagy - előjelet kell írni, a téglalapokba 1 és 6 közötti számokat.

Az üres helyek kitöltése a következőképpen történik: tanárotok feldob egy piros-kék korongot, ha a piros oldalára esik, akkor válasszatok ki valamelyik üres kört, és írjátok bele egy + előjelet, ha a kék oldalára, akkor pedig egy - előjelet!

Ezután megint feldobja a korongot, és ti a másik körbe írjátok bele a korong színének megfelelően a + vagy - előjelet. Most a tanár egy szabályos dobókockával dob, ti pedig válasszatok tetszőlegesen egy üres téglalapot, majd írjátok bele a kapott számot! Tanárotok addig dob a kockával, amíg az összes téglalapotok be nem telik.

Ilyen módon a kitöltés után két előjeles kétjegyű szám szorzatát fogjátok kapni. Az győz, aki a végén, a számok összeszorozása után a legnagyobb számot kapja eredményül.



19. Helyezd el a 3, 5, 2, 1 számkártyákat és a körökben az előjeleket úgy, hogy a megadott végeredményeket kapd! Keress többféle megoldást!

a) $\square \square \square \cdot \square \square \square = -1113$

b) $\square \square \square \cdot \square \square \square = 480$

c) $\square \square \square \cdot \square \square \square = -1563$

d) $\square \square \square \cdot \square \square \square = 676$

Készíts te is rejtvényeket az osztálytársaidnak!

20. A 6, 3, 4, 5, 0 számkártyák közül válogass! Egy kártyát többször is felhasználhatsz. A körökbe a + vagy - előjelek kerülhetnek. Keress többféle megoldást!

a) $\frac{\square \square \square}{\square \square \square} = \frac{1}{2}$

b) $\square \square \square \square : \square \square \square = -126$

c) $\square \square \square \square : \square \square \square = -15$

d) $\frac{\square \square \square \square}{\square \square \square} = \frac{50}{7}$

Több egész szám szorzása, osztása

1. példa

Számítsd ki minél egyszerűbben! $(-25) \cdot (+32) \cdot (-8) \cdot (+125) \cdot (-4)$

Megoldás

A tényezőket ügyesen csoportosítva így számolhatunk:

$$(-25) \cdot (+32) \cdot (-8) \cdot (+125) \cdot (-4) = \underbrace{(-25) \cdot (-4)}_{100} \cdot \underbrace{(+125) \cdot (-8)}_{-1000} \cdot (+32) = -3\,200\,000$$

2. példa

Mi lesz az előjele? $(+39) \cdot (-17) \cdot (-171) \cdot (+1002) \cdot (-83) \cdot (-2) \cdot (+5)$

Megoldás

Tudjuk, hogy két negatív szám szorzata pozitív szám, így a negatív tényezőket kettesével csoportosítva azt kapjuk, hogy a szorzat pozitív szám lesz.

3. példa

Bontsd egész számok szorzatára a (-72) -t úgy, hogy a tényezők között

a) ne legyen negatív szám;

b) pontosan 1 negatív szám legyen;

c) pontosan 2 negatív szám legyen;

d) pontosan 3 negatív szám legyen!

Megoldás

a) Lehetetlen, mert pozitív számok szorzata pozitív szám.

b) $(-72) = (-9) \cdot (+8) = (-2) \cdot (+6) \cdot (+6)$

c) Lehetetlen, mert ekkor a szorzat nemnegatív lenne.

d) $(-72) = (-2) \cdot (-6) \cdot (-6) = (-3) \cdot (-4) \cdot (-6)$

Még más szorzatokat is írhatunk a b) és a d) feladatokhoz, de az összes példában megfigyelhetjük, hogy a szorzat előjelének meghatározásához elég a negatív szorzótényezők darabszámát tudni.

Ha egy többtényezős szorzatban a negatív tényezők darabszáma páros, akkor a szorzat pozitív vagy nulla.

Ha egy többtényezős szorzatban a negatív tényezők darabszáma páratlan, akkor a szorzat negatív vagy nulla.

Feladatok

1. Írd fel a számokat szorzat alakban! Gyűjts minél többféle szorzat alakot!

a) $660 = 33 \cdot 20 = 66 \cdot (-5) \cdot (-2) = \dots$ b) -6 c) 21 d) -19 e) 120 f) -24

2. Többet ésszel, mint erővel! Ha ügyesen csoportosítod a műveleteket, könnyen kiszámolhatod a végeredményt.

a) $(-25) \cdot (+5) \cdot (+4) \cdot (-2)$ b) $(+32) \cdot (-8) \cdot (+125)$
 c) $(+25) \cdot (+25) \cdot (-4) \cdot (-4)$ d) $(+55) \cdot (-17) : (-11) : (+17) \cdot (-2)$
 e) $(-48) \cdot (+15) \cdot (-11) : (+24) : (-3)$ f) $(+39) \cdot (-45) : (-9) : (+13) \cdot (+2)$

3. A következő műveletekről azt kell megállapítanod, hogy pozitív vagy negatív-e a végeredmény.

a) $(-3222) : (-2) \cdot (313) \cdot (-25)$ b) $(-6666) : 729 : (-11) \cdot (-3) \cdot (-215)$
 c) $7840 : (-7) : (-10) \cdot 523$ d) $(-5900) \cdot (-39) : (-130) : (-5)$
 e) $6428 \cdot (-3) \cdot (-12) \cdot 0 : 52 : (-4)$ f) $(-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) : (-1) : (-1)$

4. Bontsd a -120 -at egész számok szorzatára úgy, hogy a tényezők között

a) ne legyen negatív szám; b) pontosan 1 negatív szám legyen;
 c) pontosan 2 negatív szám legyen! d) Hány negatív szám lehet egy ilyen szorzatban?

5. Bontsd a $+725$ -öt egész számok szorzatára úgy, hogy a tényezők között

a) ne legyen negatív szám; b) pontosan 1 negatív szám legyen;
 c) pontosan 2 negatív szám legyen! d) Hány negatív szám lehet egy ilyen szorzatban?

6. $-36 = ?$ Minden számnak sok neve van! Keresd a -36 különböző neveit!

Például: $-36 = -50 + (+14)$, ez a név azt mutatja meg, hogy a -36 mennyivel több, mint a -50 .
 Olyan nevet keress, amelyből látszik, hogy a -36

a) mennyivel kevesebb, mint 50; b) melyik számnál kisebb 16-tal;
 c) melyik számnak a kétszerese; d) milyen távol van a 0-tól;
 e) hányadrésze a 3600-nak, f) osztható 12-vel;
 g) többszöröse a 9-nek; h) hányszorosa a 18-nak!

Műveletek sorrendje

Ebben a fejezetben eddig olyan műveletsorokkal foglalkoztunk, amelyekben vagy csak szorzás, illetve osztás, vagy csak összeadás, illetve kivonás szerepelt. Ezekben az esetekben a műveletvégzés sorrendje tetszőleges. Most olyan műveletsorok következnek, amelyekben az alpműveletek vegyesen fordulnak elő, és zárójelek is szerepelhetnek bennük. Ilyenkor a műveletvégzés sorrendje nem tetszőleges, a szabályok ugyanazok, mint a természetes számok esetében.



- A zárójelben lévő műveletek elvégzése megelőzi a zárójelen kívüli műveletek elvégzését.
- A szorzások és osztások elvégzése megelőzi az összeadások és kivonások elvégzését.

A példákban azt a műveletet jelöltük meg **pirossal**, amelyet abban a lépésben végeztünk el.

$$\begin{array}{l} 33 : [(-5) - 6] + 23 \\ 33 : (-11) + 23 \\ -3 + 23 \\ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -10 + 5 \cdot (-3) - 9 \\ -10 + (-15) - 9 \\ -34 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} [15 + (-3)] \cdot (12 - 16) \\ 12 \cdot (-4) \\ -48 \end{array}$$

Az utolsó művelet összeadás, ezért ezt a műveletsort **összegnek** nevezzük.

Az utolsó műveletsor csak összeadást, illetve kivonást tartalmaz, ezt is **összegnek** nevezzük.

Az utolsó művelet szorzás, ezért ezt a műveletsort **szorzatnak** nevezzük.

Feladatok

1. Számítsd ki!

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) $(-28) : (-7) + 12 \cdot (-4)$ | b) $560 : (-28) - (-25) \cdot 120$ |
| c) $231 - 15 \cdot (-19)$ | d) $[(-3) + 251] \cdot (-4) + (-211)$ |
| e) $(-190) - 333 : (-9)$ | f) $(-6) : [(-10) + 7]$ |
| g) $[(-120) + 1800] : 6$ | h) $63 + [(-2) \cdot 5 + 20] \cdot (-91)$ |

2. Építs számokat a -7 , 2 , 6 számokból a $+$, $-$ műveleti jelekkel és **zárójelek** felhasználásával! Például így: $(-7) \cdot (2 + 6) + 6 \cdot (2 + 6)$, $(-7) \cdot 2 + 6 \cdot 2 + (-7) \cdot 6 + 6 \cdot 6$.

Építs minél többfélt! Keress ugyanahhoz az értékhez többféle műveletsort is!

3. Írd le műveleti jelekkel, majd számítsd ki!

- a -25 és a 6 összegének a kétszerese
- a -25 kétszeresének és a 6 -nak az összege
- a -25 kétszeresének és a 6 kétszeresének az összege
- a -25 -nek és a 6 kétszeresének az összege
- a -39 és a 15 összegének a harmada
- a -39 harmadának és a 15 harmadának az összege
- a 15 harmadának és a (-39) -nek a különbsége
- a -39 és a 15 különbségének a harmada



4. A műveletek elvégzése előtt gondold meg, melyeknek lesz egyforma a végeredménye! Számold is ki az eredményeket!

- | | | |
|---------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $[15 - (-75)] \cdot 3$ | b) $5 \cdot (-4) + 8 \cdot (-4)$ | c) $15 : 3 - (-75) : 3$ |
| d) $(5 + 8) \cdot (-4)$ | e) $15 \cdot 3 - (-75) \cdot 3$ | f) $(5 \cdot 8) \cdot (-4)$ |
| g) $[15 - (-75)] : 3$ | h) $5 + 8 \cdot (-4)$ | i) $5 \cdot (-4) \cdot 8 \cdot (-4)$ |
| j) $15 + (-75) : (-3)$ | k) $15 - (-75) : 3$ | l) $[(-5) + (-8)] \cdot 4$ |

5. Tedd igazzá a nyitott mondatokat!

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\square \cdot (-4) - 6 = -50$ | b) $(5 + \square) \cdot (-8) = -16$ | c) $(\square - 4) \cdot (-18) = 0$ |
| d) $13 \cdot (-25) \cdot \square \cdot 2 = 0$ | e) $(5 - \square) \cdot (3 - \square) = 0$ | f) $\square : (-2) + 20 = -60$ |
| g) $(15 + \square) : (-10) = -1$ | h) $(-22) : (15 + \square) = 1$ | i) $(12 - \square) \cdot (20 - \square) = 0$ |

6. Melyik összeg, melyik szorzat? Számítsd ki a műveletsorok végeredményét!

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $13 + (-2) - 18 \cdot (-3)$ | b) $[13 + (-2) - 18] \cdot (-3)$ |
| c) $(-42 - 8) \cdot (-23 + 33)$ | d) $(-42) - 8 \cdot (-23) + 33$ |
| e) $(-25) + [-3 - (-13) + 5] \cdot 7$ | f) $(-25) + (-3) - (-13) + 5 \cdot 7$ |

7. Számolhatsz vagy okoskodhatsz. Tedd ki az $=$, $<$, $>$ jeleket!

- | | |
|--|--|
| a) $(-25) + (-3) \cdot 2$ $\square$ $[-25 + (-3)] \cdot 2$ | b) $(-13) \cdot (-5) + 17$ $\square$ $(-3) \cdot 5 + 17$ |
| c) $110 : (-2) - 28$ $\square$ $(110 - 28) : 2$ | d) $44 + (-5) \cdot 20$ $\square$ $[44 + (-5)] \cdot 20$ |

8. Gondolj egy számra! Helyettesítsd be a $\square \cdot (-5)$ kifejezésbe!

Ha a kifejezés értéke nulla lett, akkor a szám fekete legyen! A 0 fekete, mert $0 \cdot (-5) = 0$.

Ha a kifejezés értéke pozitív lett, a szám piros legyen! A (-2) piros, mert $(-2) \cdot (-5)$ pozitív.

Ha a kifejezés értéke negatív lett, akkor a szám kék legyen! A 3 kék, mert $3 \cdot (-5)$ negatív.

Így színezzük a számegetest:



Színezz mindegyik kifejezéshez egy-egy számegetest!

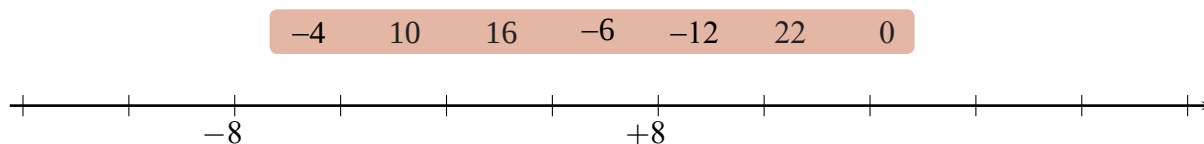
- | | | |
|----------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a) $3 \cdot \square - 6$ | b) $(\square + 4) \cdot 5$ | c) $\frac{\square}{2}$ |
| d) $\frac{\square}{5} - 2$ | e) $(\square - 3) : (-1)$ | f) $(\square - 3) \cdot (-4)$ |

9. Tedd próbára a tudásodat! Keresd meg a helyes utat a munkafüzet 2. mellékletében!

Indulj a RAJT-ról! A nyitott mondat megoldása után arra a szomszéd mezőre lépj, amelyiknek a színes sarkában a megoldást látod! Itt újabb nyitott mondatot kell megoldanod. Így haladj, amíg a CÉL-ba nem érsz!

Tudáspróba

1. Másold le a füzetedbe a számegyenest, és ábrázold rajta a számokat!



Válaszolj a kérdésekre! A megadott számok közül válogass!

- a) Melyik a legnagyobb szám?
- b) Melyik a legnagyobb abszolút értékű szám?
- c) Melyik a legkisebb szám?
- d) Melyik a legkisebb abszolút értékű szám?
- e) Mennyi a legkisebb szám abszolút értéke?
- f) Mennyi a legnagyobb szám ellentettje?
- g) Válaszd ki azokat a számokat, amelyek abszolút értéke kisebb, mint 8!
- h) Válaszd ki azokat a számokat, amelyek ellentettje több, mint 5!

2. Végezd el a műveleteket!

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| a) $(-1294) + (-2275)$ | b) $(-851) - (-6684)$ |
| c) $(-27) \cdot (-82)$ | d) $357 : (-7)$ |

3. Végezd el a műveleteket!

- a) $73 - (-113) + (-23) + 7$
- b) $(-28) \cdot (-3) : 7 \cdot (-5) : 6$
- c) $1218 \cdot (-23) : (-6) \cdot 0 : 332$

4. Számítsd ki!

- a) $(-55) : (-5) - 102 \cdot (-5)$
- b) $35 \cdot [(-25) - (-35)] + 120 : (-6)$

5. Írd le műveleti jelekkel, majd számítsd ki!

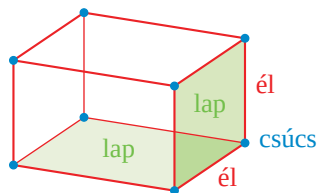
- a) a (-71) és az 51 összegének a (-4) -szerese
- b) a (-31) és a 4 különbségének az ötödrésze
- c) a 25 ötödrészeének és a -22 -nek a különbsége
- d) a (-23) (-2) -szeresének és a 4 -nek az összege
- e) a -71 (-4) -szeresének és a 15 (-2) -szeresének az összege

6. Tedd igazzá a nyitott mondatokat!

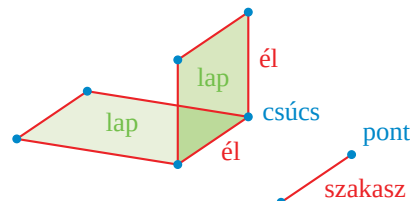
- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\square \cdot (-8) + (-21) = 11$ | b) $(12 - \square) \cdot (-7) = -70$ |
| c) $(\square + 19) : 10 = -6$ | d) $(-99) : (3 - \square) = -11$ |

Alakzatok távolsága, tengelyes tükrözés

Alakzatok távolsága

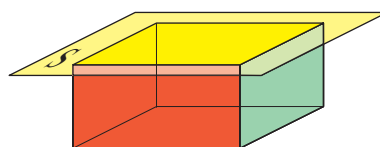
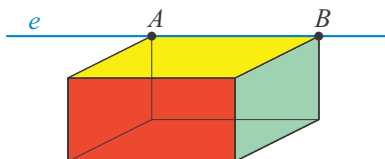


A testet határoló síklapok a test **lapjai**. A síklapok találkozását **él-nek**, az élek találkozását **csúcsnak** nevezzük.



Minden él egy-egy **szakasz**. Minden csúcs egy-egy **pont**.

A téglatest élére egyenest (e), lapjára síklapot (S) fektethetünk.



Jelölések

A pontokat az ábécé nagybetűivel, a szakaszokat, az egyeneseket és a félegyeneseket az ábécé kisbetűivel jelöljük. *Például:*

Pont

P

Szakasz



Egyenes



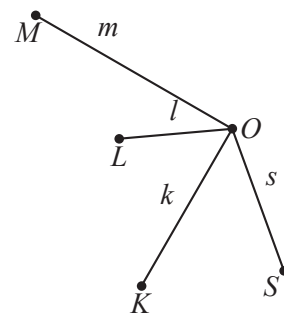
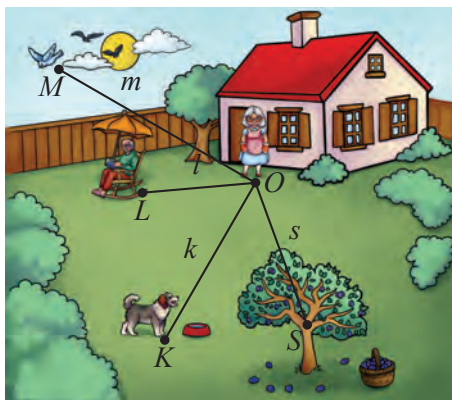
Félegyenes



1. példa

Olga néni és Laci bácsi telkének részletét látod az első ábrán. Olga néni (O), Laci bácsi (L), Madár (M), Kiskutya (K), Szilvafa (S) helye van megjelölve rajta.

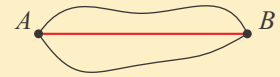
- Ki vagy mi van legközelebb a ház bejáratánál álló Olga nénihez?
- Ki vagy mi van legtávolabb a ház bejáratánál álló Olga nénitől?
- Méréssel ellenőrizzük a fenti két válaszunkat! Vonalzóval mérjük meg a második ábrán lévő szakaszok hosszát!



Megoldás

- Laci bácsi van legközelebb a ház bejáratánál álló Olga nénihez.
- A madár van legtávolabb a ház bejáratánál álló Olga nénitől.
- $l = 1,5 \text{ cm}$, $m = 3 \text{ cm}$.

Két pont távolsága a két pont által meghatározott szakasz hossza.



2. példa

- Az előző példa 2. ábrája alapján írjuk fel növekvő sorrendben a feltüntetett pontok O ponttól mért távolságát!
- Méréssel ellenőrizzük a sorba rendezést!

Megoldás

- $l < s < k < m$
- $l = 1,5 \text{ cm}$, $s = 2 \text{ cm}$, $k = 2,4 \text{ cm}$, $m = 3 \text{ cm}$.



3. példa

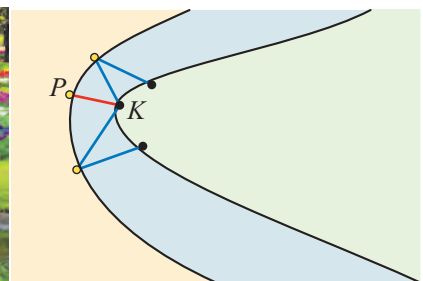
Párban dolgozzatok! Mérijétek meg mérőszalaggal a padotok hosszúságát, majd a szélességét! A mérés előtt becsüljétek meg mindketten, vajon mekkora ez a távolság! A mérést külön-külön végezzétek el, majd hasonlítsátok össze a kapott hosszúságokat! Készítsetek táblázatot a füzetbe, és jegyezzétek le az adatokat! Tudtok-e mérni a padotok tetején az előzőeknél nagyobb távolságot? Ha igen, azt is mérijétek meg!

Kijelölt pontpárok	Becslés	Mérés	Eltérés	Kinek a becslése jobb?
1.				
2.				
⋮				

Két alakzat távolsága

4. példa

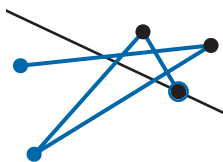
- Hová kerüljön a patak fölé tervezett híd, hogy az a legrövidebb út legyen a két virágoskert között?



Megoldás

Figyeljük meg a különböző pontokat összekötő szakaszok hosszát! A P és K pontokat összekötő, pirossal rajzolt szakasz a legrövidebb. Ez a két kert távolsága. Itt érdemes megépíteni a kerteket összekötő hidat.

b) Milyen távol van a piros virággal teli kert a fehér virágos kerttől?



Megoldás

A két kert határvonala egybeesik. A jobb oldali ábrán szemléltetjük, hogy a határvonalon felvett pont mindkét kerthez hozzátartozik. Ez azt jelenti, hogy a két kert távolsága 0.

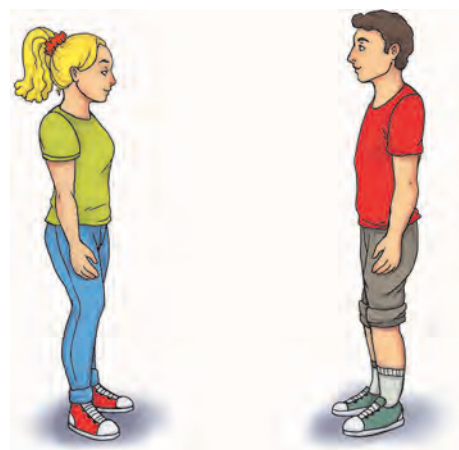
Két alakzat távolsága az őket összekötő szakaszok közül **a legrövidebb szakasz hossza**.

Ha két alakzatnak **van közös pontja**, akkor a **távolságuk 0**.

Csoportmunka

Háromfős csoportokban dolgozzatok! A csoport két tagja álljon egymással szembe! A harmadik tanuló mérje meg a távolságukat különböző testtartásban:

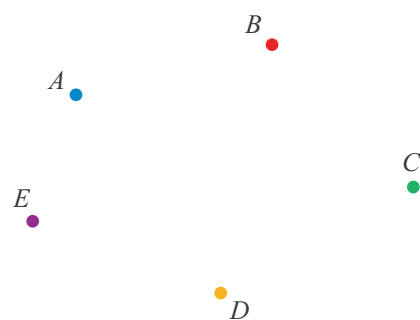
- a) egyenesen állva, b) előrehajolva,
- c) egymáshoz érve, d) saját beállítás szerint!



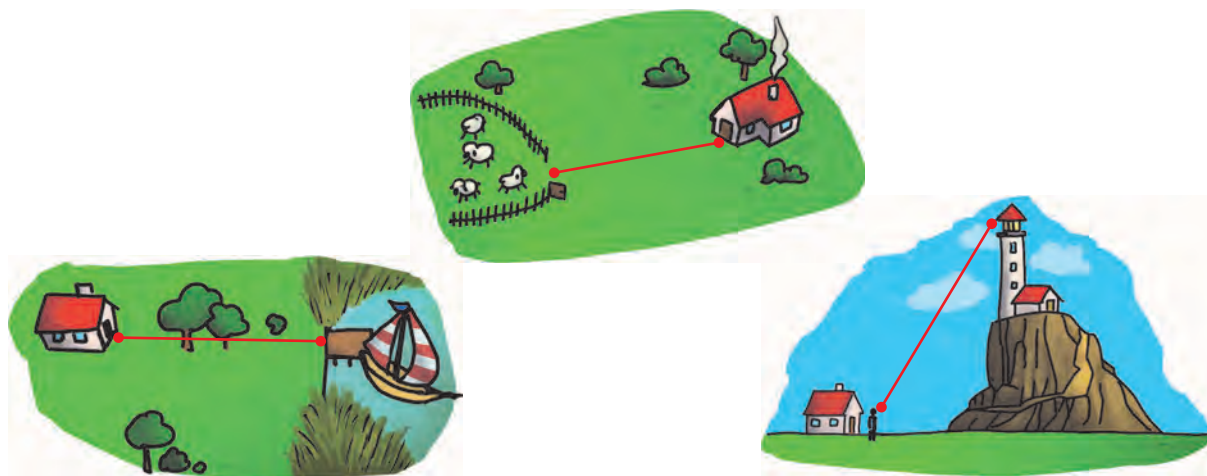
Feladatok

- Vonalzóval mérd meg az ábrán, hány mm hosszú a felsorolt pontpárok hossza!

A és B, A és D, D és E, B és C, C és E, A és E

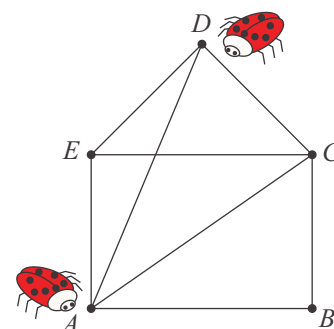


- Mérd meg vonalzóval az ábrán megjelölt távolságokat! Hány méter hosszúak ezek a távolságok, ha az ábrán mért 1 cm a valóságban 10 m-nek felel meg?





3. a) „Tudós Katica” a borítékon jelölt A csúsból a D csúcsban várakozó „barátnőjéhez” igyekszik. Csak a berajzolt „utakon” haladhat. Melyiket válassza, hogy a legkevesebbet kelljen „gyalogolnia”?



- b) Vonalzó segítségével mérd meg a felsorolt utak hosszát, és állítsd azokat növekvő sorrendbe!

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$

$A \rightarrow C \rightarrow D$

$A \rightarrow D$

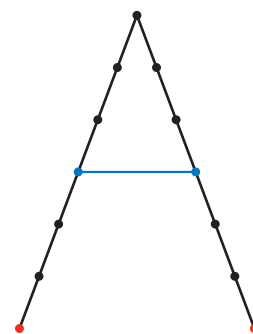
$A \rightarrow E \rightarrow D$



4. Az ábra egy kétágú létrát szemléltet. Az ábra lerajzolása után vonalzó segítségével mérd meg mm-egységben a kért hosszúságokat!

Az ábrán mért 5 mm hosszúság a valóságban 20 cm-nek felel meg.

- Milyen távolságra nyitható ki a létra két alsó vége?
- Milyen hosszú a kifeszítő kötel?
- Milyen hosszúak a létra ágai?
- Milyen magas a létra?
- Milyen távol van egymástól egy-egy lépcsőfok?



5. Keresd meg Magyarország térképén az országhatár két legtávolabbi pontját! Mekkora a távolságuk? (A munkafüzet mellékletében egy 1 : 2 000 000 léptékű térképet találsz. Ez a lépték azt jelenti, hogy ami a térképen 1 cm, az a valóságban 20 km távolság.)



6. Másold le a táblázatot a füzetedbe! Mérd meg Magyarország térképén a távolságokat, majd írd be azokat a táblázatba! (A munkafüzet mellékletében egy 1 : 2 000 000 léptékű térképet találsz. Ez a lépték azt jelenti, hogy ami a térképen 1 cm, az a valóságban 20 km távolság.)

Földrajzi helyek távolsága	A térképen mérve	A valóságban
Dunaföldvár–Szolnok	50 mm	100 km
Körmend–Márcali		
Szentes–Debrecen		
Szombathely–Balaton (tó)		
Budapest–Balaton (tó)		

Pont és egyenes távolsága

1. példa

- Egy tóparti ház vízparttól való távolságát határozzuk meg. Készítsünk felülnézeti ábrát a helyszínről úgy, hogy a házat egy H pont, a vízpartot pedig egy t egyenes szemléltesse!
- A deszkasétány pillérei a vízben állnak. Mekkora az építmény és a víz távolsága?

a)



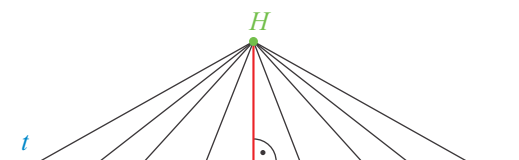
b)



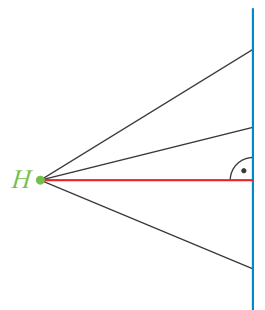
Megoldás

a) A házat jelölő H pontot és a tó partját jelölő t egyenest összekötő szakaszok közül a pirossal jelölt szakasz a legrövidebb. Ennek a szakasznak a hossza a ház és a tó távolsága. Így kell haladnunk, ha a leghamarabb el akarunk jutni a tóhoz.

b) Távolságuk nulla, hiszen a móló pontjait a vízzel összekötő legrövidebb utak hossza 0.

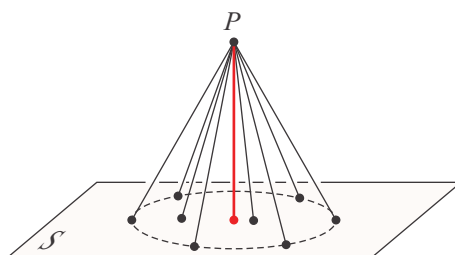
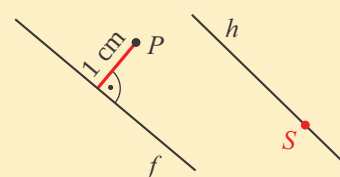


Képzeld el az összes szakaszt, amely a H pontot köti össze a t egyenes valamelyik pontjával. Ezek közül a szakaszok közül az egyenesre merőleges a legrövidebb.



A **pont és az egyenes távolsága** a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza. Az egyenesre illeszkedő pont és az egyenes távolsága 0.

Például: A P pont és az f egyenes távolsága a piros színnel jelölt szakasz hossza, vagyis 1 cm. Az S pont és a h egyenes távolsága 0.



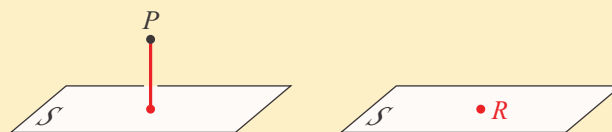
Figyeljük meg az ábrázolt távolságokat!

A P pontot a sík pontjaival összekötő szakaszok közül a síkra merőleges a legrövidebb.



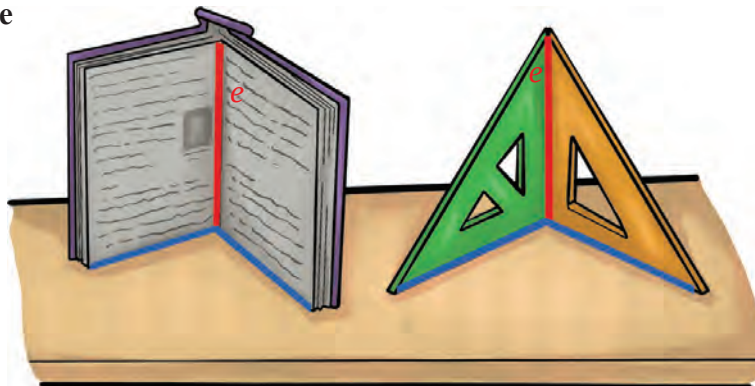
A **pont és sík távolsága** a síkra bocsátott merőleges szakasz hossza. A síkra illeszkedő pont és a sík távolsága 0.

Például:



Síkra merőleges egyenes szemléltetése

A könyv gerincére fektetett e egyenes merőleges a könyvlapok asztalon fekvő éleire, ezért az e egyenes merőleges az asztallap síkjára. Hasonlóan a derékszögű vonalzó közös élére fektetett e egyenes is merőleges az asztallap síkjára.

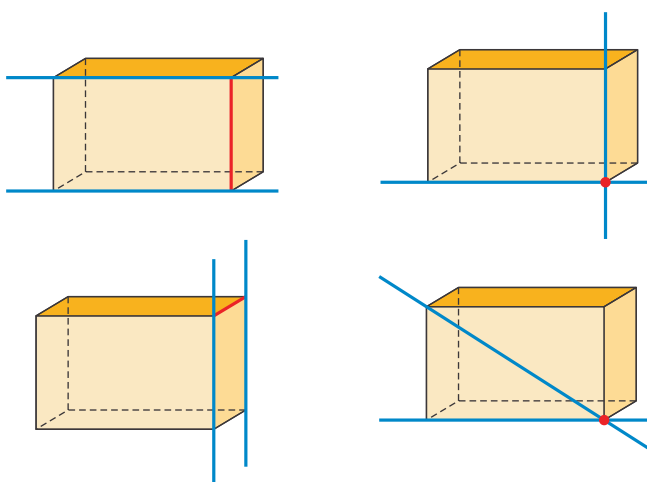


Két egyenes távolsága

2. példa

Figyeljük meg a téglatest két-két kiválasztott csúcsán áthaladó egyenesek távolságát!

A távolságokat az ábrán piros színnel jelöltük.

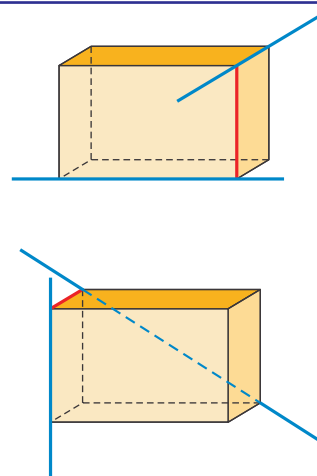


Ha két síkbeli egyenesnek nincs közös pontja, akkor **párhuzamosak**.

Távolságuk egyenlő annak a szakasznak a hosszával, amely **mindkét egyenesre merőleges**.

Ha két egyenesnek egy közös pontja van, akkor **metszők**.

Távolságuk 0.



Ha két egyenes nincs egy síkban, akkor **kitérők**.

Távolságuk egyenlő annak a szakasznak a hosszával, amely **mindkét egyenesre merőleges**.



3. példa

Párban dolgozzatok! Mérőszalaggal mérjétek meg

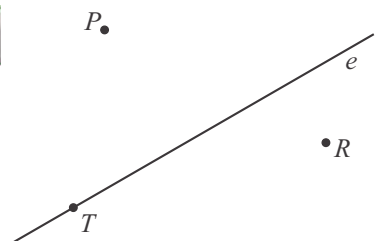
- a padotok két párhuzamos élének távolságát,
- a matematikafüzetetek két párhuzamos élének távolságát,
- a tankönyvetek két kitérő élének távolságát!



A mérés előtt becsüljétek meg a távolságokat! A becsült és a mért adatokat jegyezzétek le! A becslést és a mérést mindketten külön-külön végezzétek el, majd hasonlítsátok össze a kapott hosszúságokat!

Feladatok

1.



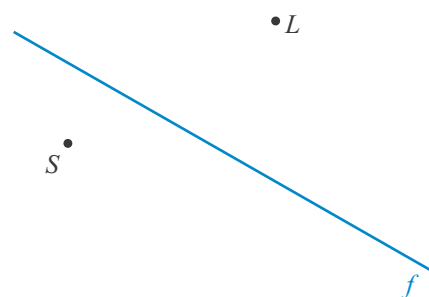
Az ábra lerajzolása után húzd be a távolságméréshez szükséges szakaszokat, majd mérd meg a P , R és T pontok távolságát az e egyenestől!

2.

Az ábrán f -fel jelölt folyó két partján állatok legelnek. Egy birka (B), egy ló (L) és egy szamár (S).

A füzetedbe kimásolt ábrán rajzold be mindhárom állatnak a folyótól való távolságát mutató szakaszt, és mérd meg azok hosszát!

Melyik állat van a legközelebb a folyóhoz?



3.

Mérd meg otthon mérőszalaggal

- a párhuzamos ruhaszárító kötelek távolságát;
- két, egymás alatti szomszédos könyvespolc távolságát;
- a televízió-képernyő vagy a számítógép-monitor két párhuzamos oldalának távolságát!

4.

Katókát kiküldi édesanyja málnát szedni. A málnabokrok a kert végében sorakoznak. Válaszd ki, melyik málnabokor van a legközelebb a ház kijáratához! Hány métert kell Katónak gyalogolnia a legtávolabbi, és hány métert a legközelebbi bokorig?

Az ábrán 1 cm a valóságban 2 m. A keresett távolságokat vonalzóval mérd meg! Mérd meg azt is, hogy a málnabokrok egyenese milyen távol van a Katókát jelölő K ponttól!



5.

Rajzold be a derékszögű koordináta-rendszerbe az $A(-3;0)$ pontot!

a) Hány rácsegységre van az A pont az alábbi pontoktól?

$L(-9;0)$, $M(-12;0)$, $N(-8;0)$, $P(2;0)$, $Q(6;0)$, $R(13;0)$

b) Az y tengelynek melyik pontja van az A -hoz legközelebb? Hány rácsegység a távolságuk?

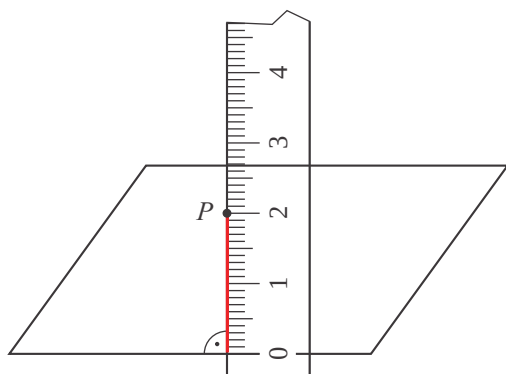
6.

Rajzolj a derékszögű koordináta-rendszerbe olyan pontokat, amelyek az x tengelytől 5 egység távolságra vannak! Add meg közülük nyolcnak a jelzőszámait!

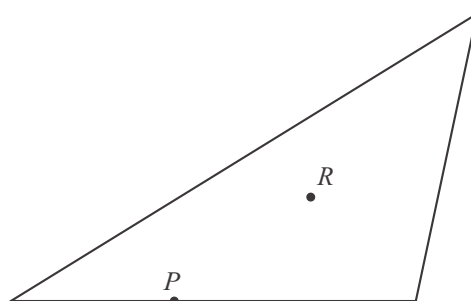


7. Az első ábrán bemutatott módon mérd meg a P , a Q és az R pontok távolságát a sokszögek oldalaitól! A méréseket másolópapír segítségével végezd el!

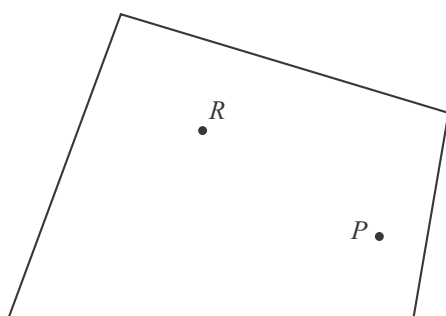
1.



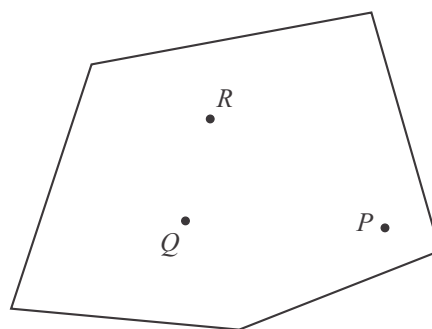
2.



3.



4.



8. Rajzold be a derékszögű koordináta-rendszerbe az $A(-1; -2)$, $B(7; -2)$, $C(0; 5)$, $D(3; 5)$ pontokat! Határozd meg, hány rácsegység a következő két-két egyenes távolsága!

a) AB egyenes és x tengely

b) AB és CD egyenes

c) BC és AD egyenes

d) AC és BD egyenes

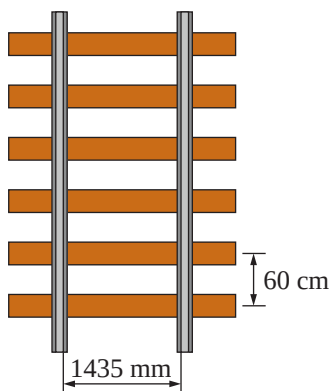


9. Magyarországon a normál nyomtávú vasúti pályákon két sínszál távolsága 1435 mm. (Ugyanekkora a villamos, a HÉV és a metró nyomtávja is.)

a) A vasúti pálya 1,5 km-es egyenes szakaszán a sínszálak között mekkora területű részt kell bazaltkővel befedni?



b)



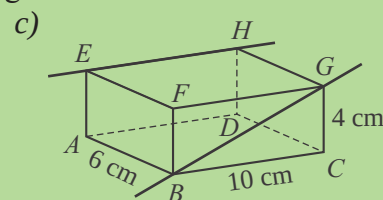
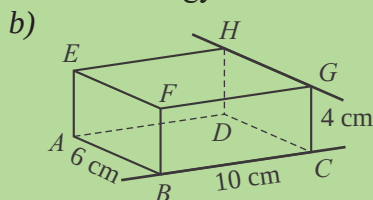
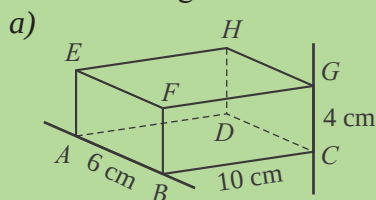
A sínszálakat talpfák kötik össze. A talpfák távolsága általában 60 cm. Határozd meg, hogy a pálya 1,5 km-es egyenes szakaszán a sínszálak stabilizálásához hány talpfát kell elhelyezni! (A talpfák szélességét nem vesszük figyelembe.) (A vasúti sínpályák építéskor ma már a talpfák vasbetonból készülnek.)



Keress Magyarországon olyan kisvasutakat, amelyek ilyen keskeny nyomtávú síneken futnak!



10. Mekkora a téglatest csúcsain átmenő kitérő egyenesek távolsága az alábbi esetekben?

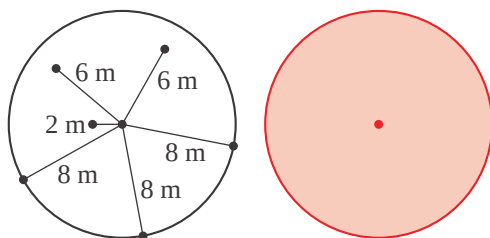


Kör és gömb

1. példa

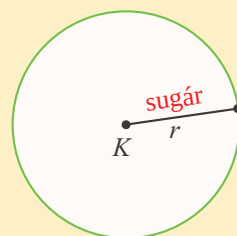
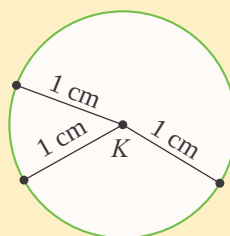
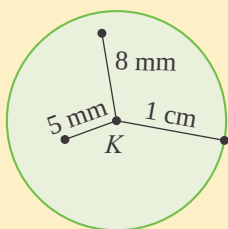
Egy kecskét 8 m hosszú kötéllel kötöttek a karóhoz. A vázlatrajzon megjelöltünk néhány olyan helyet, ahol legelhet. Milyen alakú területet legel le a kecske?

Megoldás



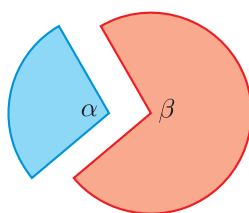
8 m-nél messzebb nem távolodhat el a karótól, de minden olyan helyre eljuthat, amely 8 m-nél közelebb van ahhoz. Kör alakú területen legelhet.

A **körvonal** olyan síkbeli alakzat, amelynek minden pontja egyenlő távolságra van egy adott ponttól. Az adott pont a kör középpontja (K), az egyenlő távolság a kör sugara, jele r (a latin rádiusz = sugár szóból ered).

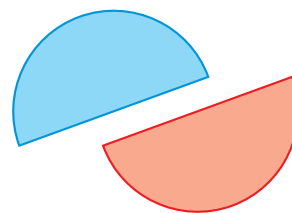


A **körlap** olyan síkbeli alakzat, amelynek pontjai nincsenek messzebb a középponttól, mint a sugár hossza.

A kör szót gyakran mindkét panthalmaz megnevezésére használják.



A körlapot két **sugara** két **körcikkre** bontja.



Az átmérő a kört két **félkörre** bontja.

A körcikket határoló sugarak által bezárt szöget **középponti szögnek** nevezzük – mivel csúcsa a kör középpontjában van. Az α és a β középponti szögek.

2. példa

- Párokat alkotva rajzoljatok körvonalakat az iskola udvarán a képen bemutatott módszerrel, egyik végén rögzített kötelet használva! A rajzolást 3 különböző hosszúságú kötéllel ismételjétek meg!
Készítsetek táblázatot, és a b), c) feladatban mért adatokat abba jegyezzétek le!
- Mérőszalaggal mérjétek meg mindhárom esetben a kör sugarát!
- Illessztek kötelet a rajzolt körvonalakra azokat teljesen lefedve, majd mérjétek meg a kötéll hosszát!
- Figyeljétek meg mindhárom esetben, milyen kapcsolat van a körvonal hossza és sugara között!



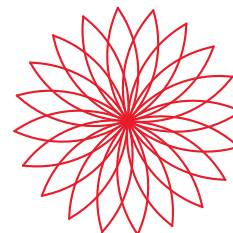
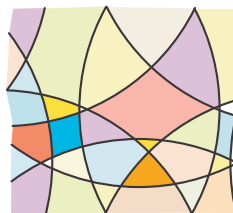
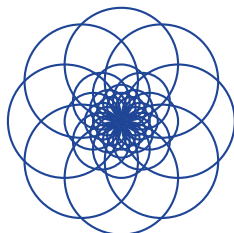
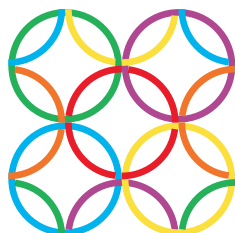
3. példa

- Gyakoroljátok a körző használatát!

Adott sugarú kör szerkesztése

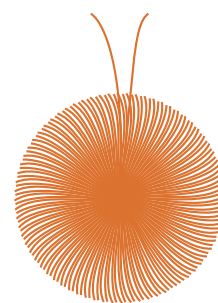
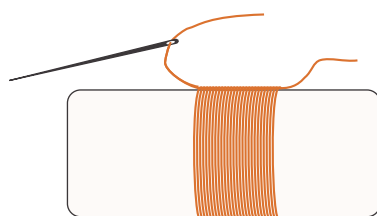
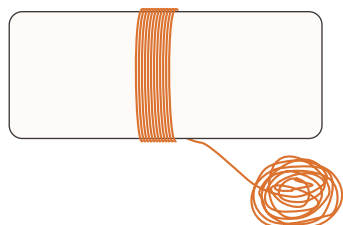
- A lapon kijelöljük a kör középpontját,
- mérőeszközön körzőnyílásba vesszük a kör sugarát,
- a kijelölt pont körül kört rajzolunk.

- Találjatok ki olyan figurákat, mintákat, amelyeket csak körző használatával lehet megrajzolni! A kapott alakzatokat tetszés szerint színezzétek ki! Készítsetek például ilyeneket:



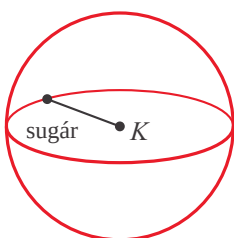
Csoportmunka

Készítsetek hármass csoportokban bojtot színes fonalból az ábra alapján! Bojt készítésekor egyenlő hosszú fonaldarabokból alakul ki a gömbölyű forma.



Vastag, színes fonalakkal ilyen bojtokat tudtok készíteni:

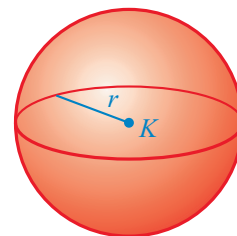




A **gömbfelület** olyan térbeli alakzat, amelynek minden pontja egyenlő távolságra van egy adott ponttól. Az adott pont a gömb középpontja (K), az egyenlő távolság a gömb sugara, jele r .

A **gömbtest** olyan térbeli alakzat, amelynek pontjai nincsenek messzebb a középponttól, mint a sugár hossza.

A **gömb** szót használjuk mindkét ponthalmaz megnevezésére.



Nagyon sok egyforma ceruzából készültek az ábrán látható alakzatok.

a)



Egyenlő hosszú ceruzák hegye a gömbfelületen van. A ceruzák hossza a gömb sugarával egyenlő.

b)

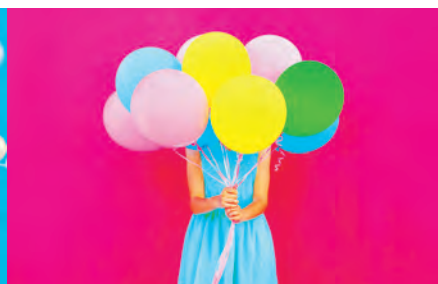


A gömb sugaránál rövidebb ceruzák hegye a gömbön belül van. Például ilyen a kék színű.

A gömb sugaránál hosszabb ceruzák hegye a gömbön kívül van. Például ilyen a piros színű.



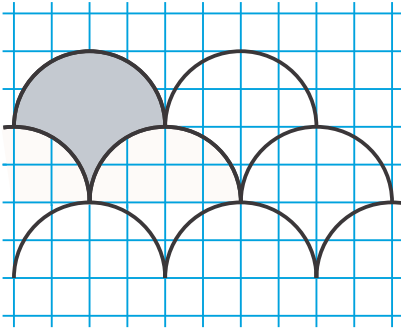
A mindennapi életben nagyon sokféle gömb alakú test vesz körül minket. Keressetek az interneten többféle, gömbökből álló kompozíciót! Az ilyen képeket felhasználhatjátok osztálytermetek dekorációjához is.



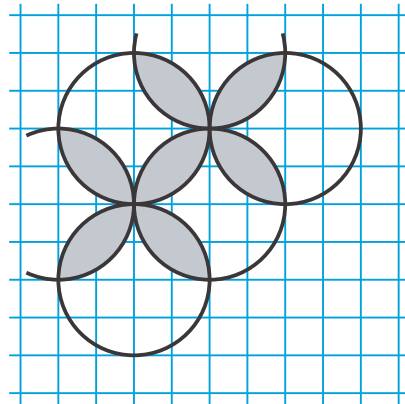
Feladatok

1. Másold le az ábrákat! Folytasd körzővel a minták rajzolását! Tetszés szerint színezd ki az ábráidat!

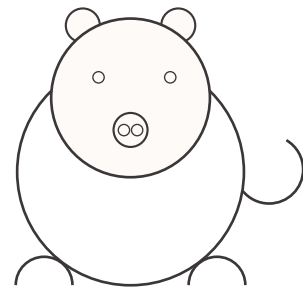
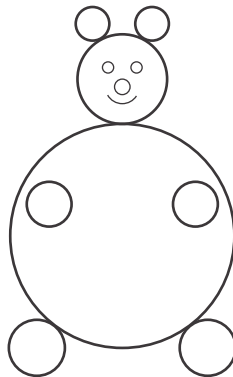
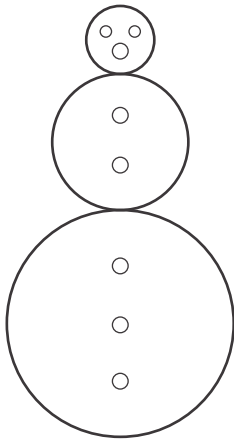
a)



b)

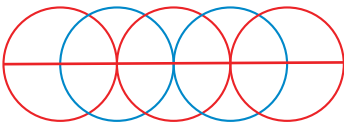


2. Csak körzőt használva készítsd el az ábrát a füzetedbe, és tetszés szerint színezd ki!

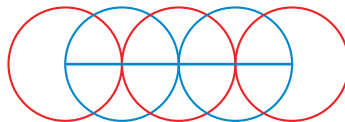


3. Az alábbi mintában egy kör sugara 1,5 cm. Milyen hosszú

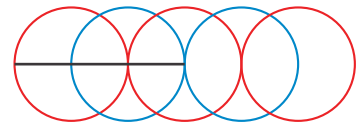
a) a piros,



b) a kék



c) a fekete szakasz?



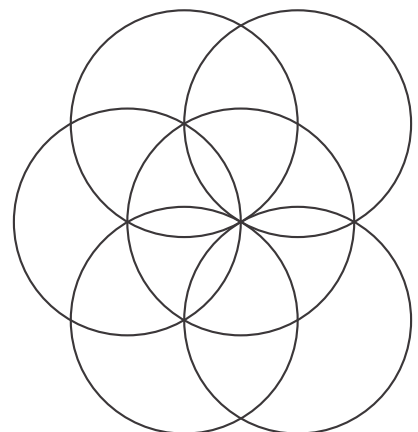
4. Egy papírlapra – 2 cm sugarú körökkel – előrajzoltuk az ábrán lévő mintát.

a) Hány kört rajzoltunk?

b) Rajzolj be még egy ugyanilyen sugarú kört, hogy a minta „teljes” legyen!

c) Színezéssel készíts belőle faliképet!

d) Legalább mekkora annak a négyzet alakú képkeretnek az oldala, amelybe ez a kép belefér?



5. Rajzolj olyan kört, amelynek középpontja a derékszögű koordináta-rendszer origója, a kör sugara pedig

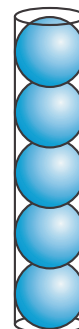
a) 3 rácsegység,

b) 5 rácsegység.

(Rácsegység a koordináta-tengelyeken felvett egység.)

Hány olyan pont van a felrajzolt körökön, amely rácspontra esik?

6. A teniszlabdákat szorosan egymás fölé rakva csomagolják az ábrán látható módon. Milyen magas a doboz, ha a teniszlabda sugara 3 cm?



Alakzatok rajzolása szerkesztőeszközökkel

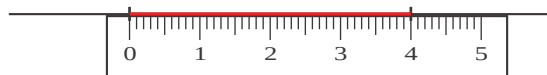
Egy ábra elkészítésénél különböző szerkesztőeszközöket használhatunk.

Például: körzőt, egyenes és derékszögű vonalzókat, szögmérőt.

1. példa

a) Szakasz rajzolása és hosszának mérése vonalzóval

Egy szakaszt megrajzolhatunk vonalzóval, hosszát a vonalzóról mm-pontossággal leolvashatjuk. A piros szakasz hossza: $4\text{ cm} = 40\text{ mm}$.



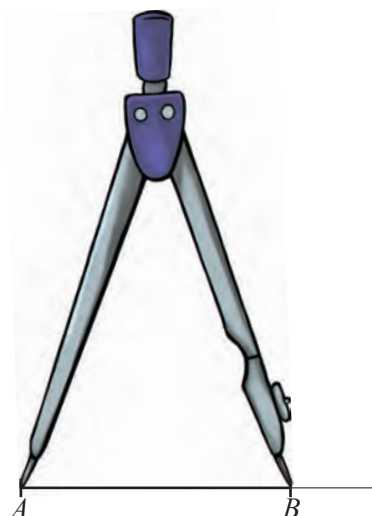
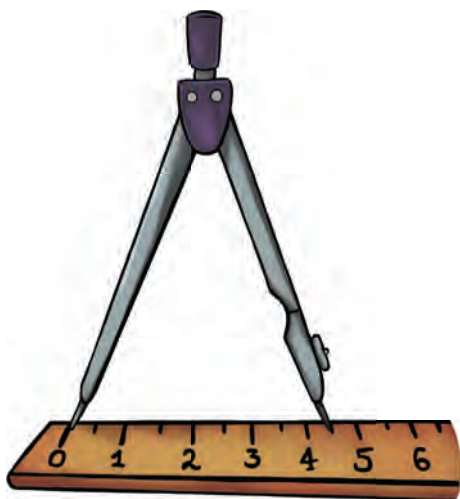
b) Adott hosszúságú szakasz szerkesztése körzővel

Felrajzolunk egy félegyenest, annak kezdőpontja lesz a szakasz egyik végpontja.



Mérőeszközön (vonalzó, mérőszalag, ...) körzőnyílásba vesszük a szerkesztendő szakasz hosszát (a körző két hegyének távolságát nevezzük körzőnyílásnak).

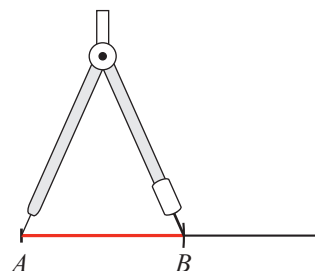
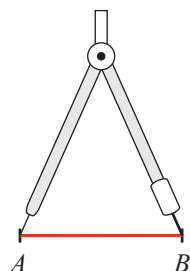
Körzővel kijelöljük a félegyenestől kiindulva a szakasz másik végpontját.



c) Szakasz másolása adott kezdőpontú félegyenesre körzővel

A másolandó szakaszt körzőnyílásba vesszük.

Körzővel kijelöljük a félegyenesen a szakasz másik végpontját.

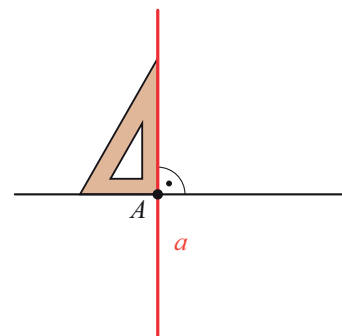


2. példa

a) Derékszögű vonalzóval rajzoljunk egy adott egyenesre merőleges egyenest!

Megoldás

Az egyenes A pontjához illesztjük a derékszögű vonalzóunk derékszögű csúcsát, és megrajzoljuk az adott egyenesre merőleges a egyenest.



b) Derékszögű vonalzó és körző segítségével rajzoljunk egy adott egyenessel párhuzamos egyenest!
Az egyenesek távolsága a kék szakasz hossza legyen.

Megoldás

1. lépés: az egyenesen kijelölünk két pontot (A és B).

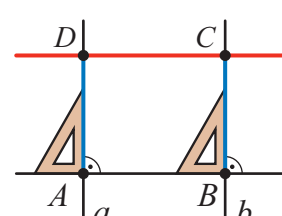
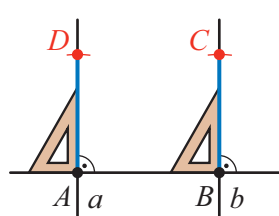
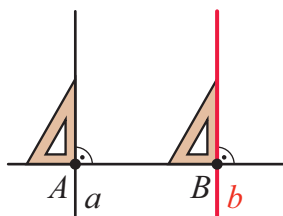
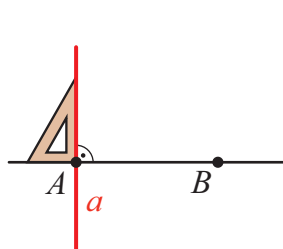


2. lépés: az A pontba illesztjük a derékszögű vonalzóunk derékszögű csúcsát, és meghúzzuk az a egyenest.

3. lépés: a B ponthoz is odaillesztjük a derékszögű vonalzóunk derékszögű csúcsát, és meghúzzuk a b egyenest.

4. lépés: a megadott kék szakasz hosszát körzővel átmásoljuk az a és a b egyenesekre az A és a B pontokból indulva. A C és a D pontokat kapjuk.

5. lépés: C és D pontokon át meghúzzuk az adott egyenessel párhuzamos egyenest.



3. példa

Rajzoljunk téglalapot derékszögű vonalzóval és körzővel, ha oldalai 2 cm és 3 cm hosszúak!

Megoldás

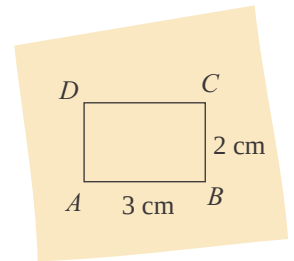
Összefüggések:

A téglalap C csúcsa rajta van az AB oldal B pontjába állított merőlegesen.

A BC oldal 2 cm hosszú, ezért C rajta van a B középpontú, 2 cm sugarú kör-vonalon.

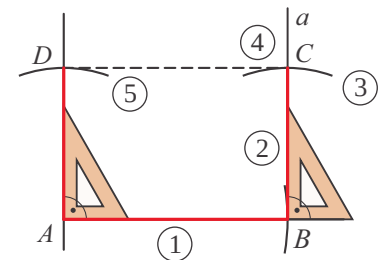
Így a C csúcs a merőleges és a körvonal közös pontja lesz.

Hasonlóan kapjuk meg a D csúcs helyét.

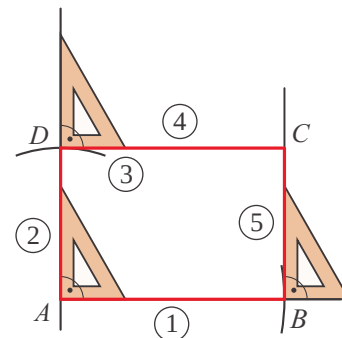
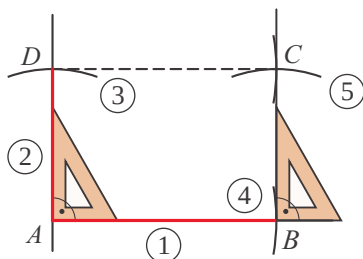


A rajzolás lépései:

1. 3 cm hosszú szakaszt rajzolunk.
2. A B pontba merőlegest állítunk, ezt jelöljük a -val.
3. B középpontú, 2 cm sugarú kört szerkesztünk. Itt csak az a egyenessel való metszéspontra van szükségünk, ezért elég az a egyenes környezetébe eső körívet megrajzolni.
4. A körív és az a egyenes metszéspontja a C csúcs.
5. Hasonló módon kapjuk a téglalap D csúcsát.
6. Megrajzoljuk az AD, a BC és a CD oldalakat.



Az alábbi két ábrán a téglalapot más módszerrel rajzoltuk meg. A szerkesztés egymást követő lépéseit bekarikázott sorszámmal jelöljük az ábrákon.



A téglalap megrajzolását háromféleképpen végeztük el. Mindhárom esetben ugyanaz a téglalap lesz a megoldás.

Feladatok

1. Rajzolj derékszögű vonalzó és körző segítségével 6 cm oldalú négyzetet!

Számítsd ki a négyzet kerületét és területét!

2. Rajzolj derékszögű vonalzóval és körzővel olyan téglalapot, amelynek oldalai az ábrán látható szakaszokkal egyenlők.



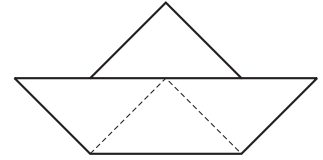
3. Rajzolj derékszögű vonalzó és körző segítségével olyan téglalapot, amelynek szomszédos oldalai

a) 3 cm és 2 cm;

b) 1 cm és 6 cm!

Számítsd ki mindkettő kerületét és területét! Melyiknek nagyobb a területe? És a kerülete?

4. Rajzolj derékszögű vonalzó és körző segítségével olyan derékszögű háromszöget, amelynek két 4 cm-es oldala merőleges egymásra! A megrajzolt háromszög másolásával készítsd el a papírhajó ábráját, majd színezd ki a kész hajót!



5. Rajzolj derékszögű vonalzó és körző segítségével olyan négyzetet, amelynek az átlója 5 cm hosszú! Mérd meg a négyzet oldalait, számítsd ki a területét és a kerületét!

6. Egy négyzet alakú kert két szomszédos sarkában, egymástól 6 méterre áll egy-egy fenyőfa, közepén pedig egy szökőkút. Rajzold meg a négyzetet derékszögű vonalzóval, és jelöld meg a szökőkút helyét! A valóságban 1 méter távolság a papíron 1 cm legyen!



Milyen távol van a szökőkút a fenyőfáktól?

7. Pisti játék katonája terepszemlére indul őrhelyéről egy sík terepen. 7 cm-t megy nyugatra. Ott megáll, és észak felé halad tovább 3,5 cm-t. Innen egyenes úton visszatér őrhelyére. Rajzold le vázlatosan a katona útjának nyomvonalát! Az adott hosszúságokkal szerkeszd meg a nyomvonalak által meghatározott alakzatot!



8. a) Rajzolj 12 cm területű négyzetet! Számítsd ki a területét!
b) Rajzolj 16 cm² területű négyzetet! Számítsd ki a kerületét!

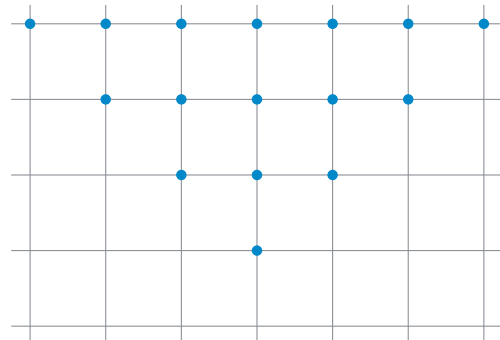
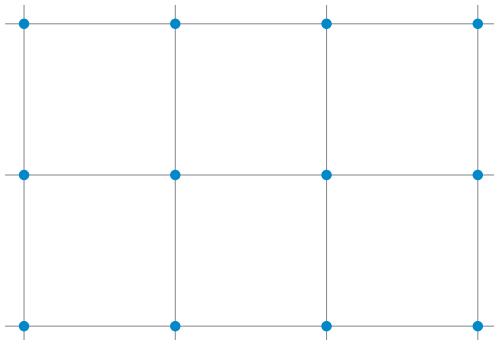
9. a) Rajzolj 12 cm területű téglalapot, oldalainak mérőszáma egész szám legyen!
b) Rajzolj 12 cm² területű téglalapot, oldalainak mérőszáma egész szám legyen!

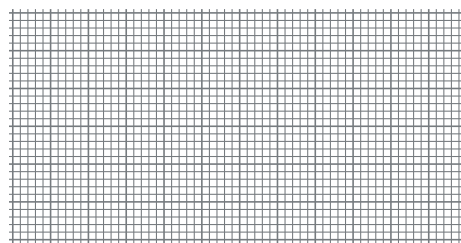
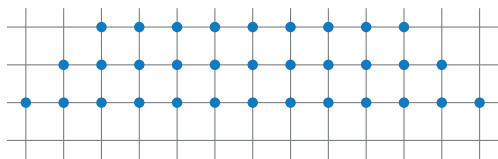
10. Rajzolj olyan 14 cm területű téglalapot, amelynek szomszédos oldalai között 1 cm a különbség! Számítsd ki a területét!

A sík pontjainak jellemzése

A síkon kiválaszthatunk egy, két, három, ... pontot.

Ha a síklapra rajzolt négyzetrács rácspontjaiban választunk pontokat, akkor azok áttekinthető rendszert alkotnak. *Például:*



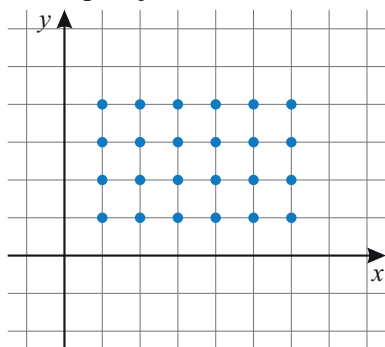


Sűrűbb rácsvonalak rácspontjai egyre többen vannak. Ha egy milliméterpapír minden rácspontját megjelölnénk, akkor ezek a pontok már nagyon sűrűn helyezkednének el a lapon. Gondolatban folytatva a pontok felvételét, elképzelhetjük, hogy a síkon akárhány pontot felvehetünk, nem csak rácspontban, hanem véletlenszerűen akárhol. Ezt úgy mondjuk a matematikában, hogy **a síkon végtelen sok pont van.**

Ha a kiválasztott pontokat valamilyen tulajdonság alapján halmazba rendezzük, akkor azok **ponthalmazt** alkotnak.

Például:

A halmaz: a koordináta-rendszer első síknegyedének rácspontjaiban felvett 24 db pont.



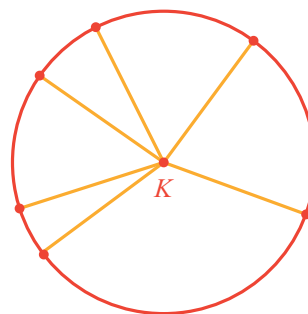
B halmaz: a négyzet belsejében lévő pontok halmaza, végtelen sok pont.



Távolsággal meghatározott ponthalmazok



Az óriáskerék tengelyétől a kabinok egyenlő távolságra vannak.



A síkban a K ponttól egyenlő távolságra lévő pontok egy, a K pont köré írható körön vannak.

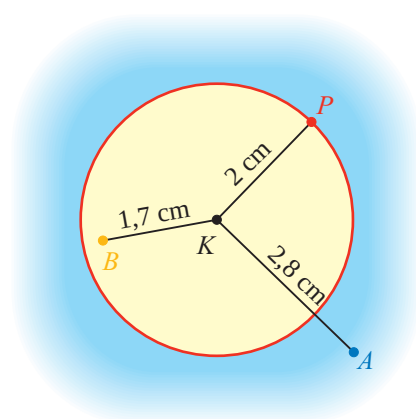
A kör K középpontjától 2 cm távolságra lévő **pontok halmaza a körvonal (piros színű)**. Egy ilyen pont például a P pont.

A kör K középpontjától 2 cm-nél nagyobb távolságra lévő pontok halmaza a kör külső tartománya (kék színű).

Egy ilyen pont például az A pont.

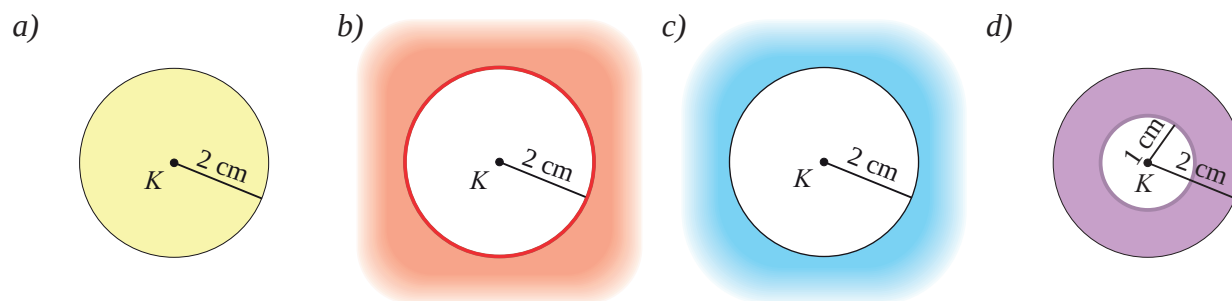
A kör K középpontjától 2 cm-nél kisebb távolságra lévő pontok halmaza a kör belső tartománya (sárga színű).

Egy ilyen pont például a B pont.



1. példa

Jellemezzük az ábrán színessel rajzolt síkrészek pontjait az adott K ponttól mért távolságukkal! (Vas-tag színes vonal jelzi, ha a körvonal pontjai is hozzátartoznak a halmazhoz.)



Megoldás

a) Kisebb 2 cm-nél.
Ez a halmaz a kör bel-ső tartománya.

b) 2 cm-nél nem ki-sebb.

c) Nagyobb, mint 2 cm.
Ez a halmaz a kör külső tartománya.

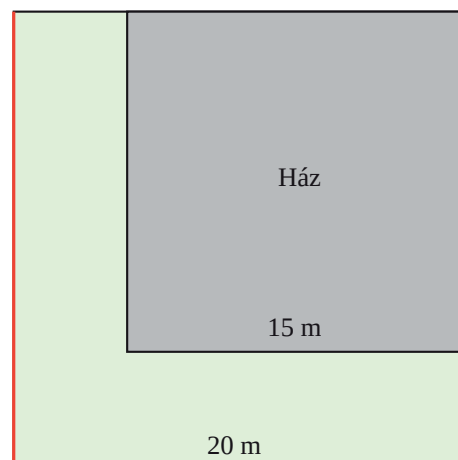
d) 1 cm-nél nem kisebb, és 2 cm-nél kisebb.

2. példa

Egy 20 méter oldalhosszú, négyzet alakú telek egyik sarkában áll egy olyan ház, amelynek alapja 15 méter oldalú négyzet.

A pirossal jelölt telekhatáron 5 m hosszú kötéllal a vendégek érkezésének idejére kikötötték a házörző kutyát.

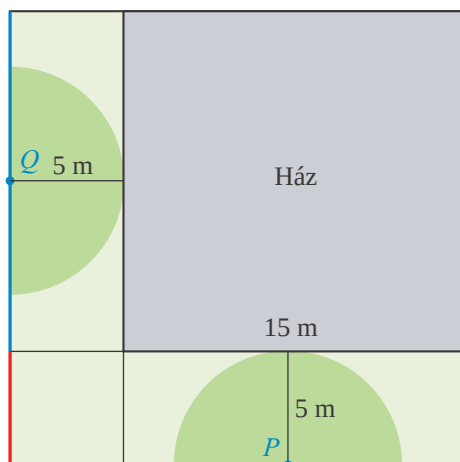
Elérheti-e a ház falát a kikötött kutya a pirossal jelölt telekhatár bármely pontjából?



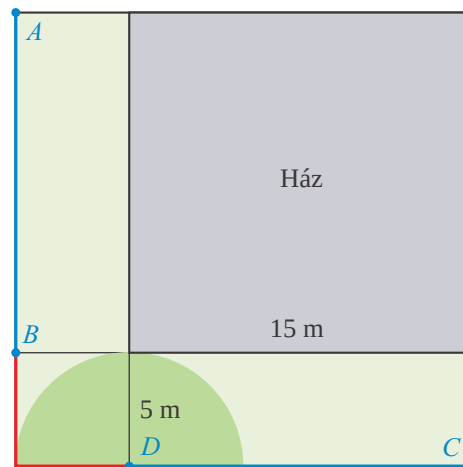
Megoldás

1. eset:

Ha a telekhatár kék színnel jelölt szakaszának bármely pontjába kötjük ki a kutyát, akkor éppen eléri a ház falát. Ilyen pont az ábrán például a P és a Q pont.

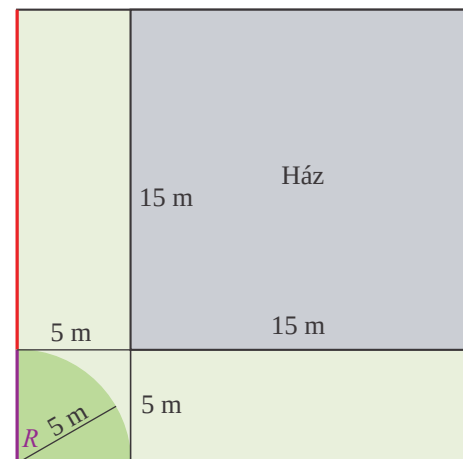
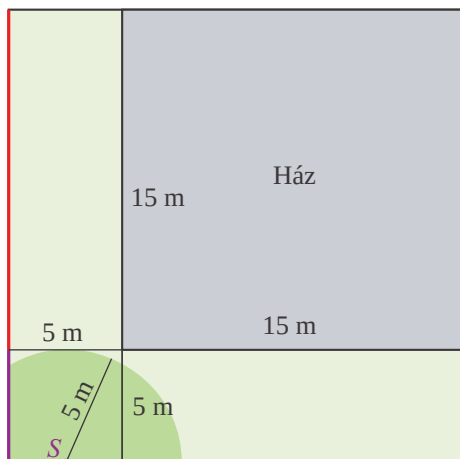


A kutya akkor is eléri a ház falát, ha a kikötési pont a kék színnel jelölt szakaszok valamelyik végpontjában van. Ilyen például az ábrán bejelölt D pont.



2. eset:

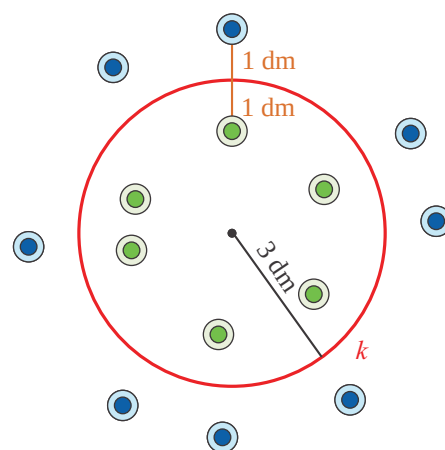
Ha a telekhatár lila színnel jelölt szakaszának bármely pontjába kötjük ki a kutyát, akkor nem éri el a ház falát. Ilyen pont az ábrán például az S és az R pont.



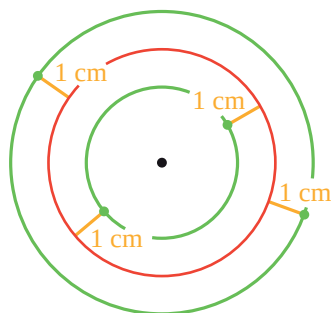
Játék

1. Vágjatok ki kartonpapírból egy 3 dm sugarú körlapot! Készítsetek elő zöld és kék bábukat a páros játékhoz! Felváltva helyezétek el a játékbábukat! Az egyik játékos a zöld, a másik a kék bábukat rakja le a körvonalától 1 dm távolságra, a körlapra a zöldeket, a körlapon kívül, a padra a kégeket. A bábuk helyett használhattok kétféle színű korongokat vagy egyéb apró tárgyakat. Az a játékos nyer, aki a feltett kérdésre először kimondja a választ.

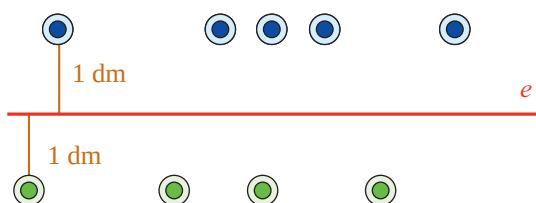
Kérdés: Milyen alakzaton lesznek a zöld, és milyenen a kék bábuknak megfelelő pontok?



Egy körvonalától egyenlő távolságra levő pontok két, azonos középpontú körvonalat alkotnak, ha az adott távolság kisebb az eredeti kör sugaránál.



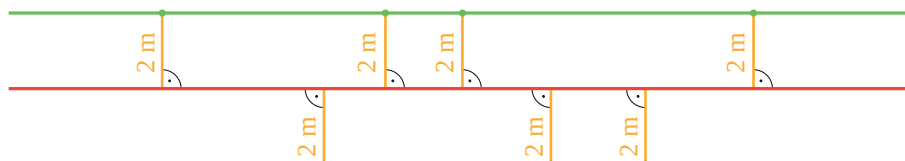
2. Helyeztetek a padra egy hurkapálcikát! Készítsetek elő zöld és kék bábukat a páros játékhoz! Felváltva helyezzék el a játékbábukat! Az egyik játékos a zöld, a másik a kék bábukat rakja le a pálcikától 1 dm távolságra, a pálcika által kettéosztott egyik síkrészen (a pad felületén) a zöldeket, a másikon a kégeket. A bábuk helyett használhattok kétféle színű korongokat vagy egyéb apró tárgyakat.



Az a játékos nyer, aki a feltett kérdésre először kimondja a választ.

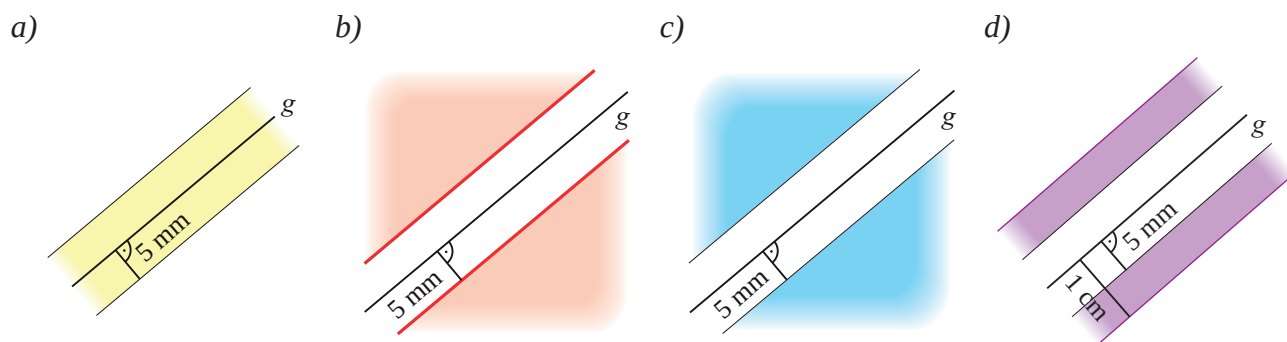
Kérdés: Milyen alakzaton lesznek a zöld, és milyenen a kék bábuknak megfelelő pontok?

Egy egyenestől egyenlő távolságra levő pontok a síkban párhuzamos egyenespárt alkotnak.



3. példa

Jellemezzük az ábrán színessel rajzolt síkrészek pontjait az adott g egyenestől mért távolságukkal! (Vastag színes vonal jelzi, ha az egyenes pontjai is hozzátartoznak a halmazhoz.)



Megoldás

- a) Kisebb 5 mm-nél. b) Legalább 5 mm. c) Nagyobb, mint 5 mm. d) Nagyobb 5 mm-nél, és legfőljebb 1 cm.

Feladatok

1.



Egy téglalap alakú terület oldalai 20 m és 40 m hosszúak. A terület közepén levő karóhoz 8 méteres kötéllel kikötnek egy birkát.

Hol legelheti le a fűvet?

Készíts ábrát, 4 m-nek 1 cm feleljen meg!

2.

Rajzold le a füzetedbe azt a területet, ahol a kincs rejtőzhet! A sombokrot S ponttal jelöld!

A kincs a sombokortól mérve 5 méteren belül van.

A térképen $\text{---} = 1 \text{ m}$ a valóságban.



3.

Egy 10 méter hosszú és 8 méter széles téglalap alakú parkban a park közepén leszúrt locsolóval öntözik a fűvet. Maximális víznyomásnál a leszúrás helyétől 2 méter távolságra érhet el a víz.

a) A füzetedbe rajzolt felülnézeti ábrán színezd be zölddel azt a területet, amelyet a locsoló akkor áraszt el vízzel, ha a csőben lévő nyomás maximális vagy annál kisebb! (1 m távolság a füzetben 1 cm legyen!)

b) A füzetedbe rajzolt felülnézeti ábrán színezd be sárgával a parknak azt a részét, amely ennél a locsolásnál nem kap vizet!



4.

Rajzolj a füzetedbe egy pontot, jelöld K-val!

a) Rajzolj kék színnel olyan pontokat, amelyek K-tól 3 cm-re vannak!

b) Pirossal jelöld a K-tól 2 cm-re levő pontokat!

c) Zölddel színezd a K középpontú, 35 mm sugarú kör külső tartományát!

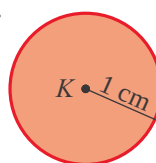
5.

Melyik megállapítás illik az ábrázolt ponthalmazokra? (Vastag színes vonal jelzi, ha a körvonal pontjai is hozzátartoznak a halmazhoz.)

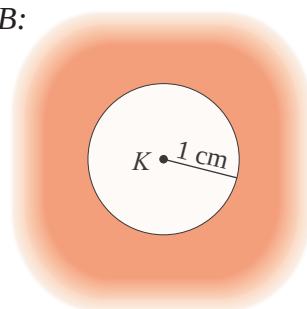
A halmaz pontjainak K ponttól mért távolsága

- nagyobb 1 cm-nél;
- kisebb vagy egyenlő, mint 1 cm;
- 1 cm-nél nem nagyobb;
- minimum 1 cm;
- 1 cm-nél nem kisebb.

A:



B:



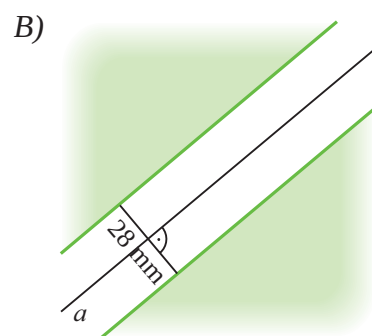
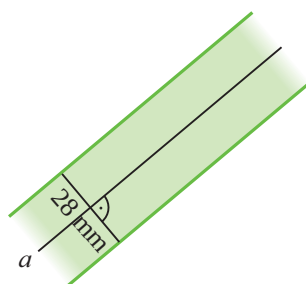
6. Egy egyenes kerékpárút két oldalára a padkától 3 méterre fákat ültetnek. Az út szélessége 2 m, a fákat 5 méterenként ültetik.

Készíts rajzot, ahol 2 m-nek 1 cm felel meg!



7. Melyik megállapítás illik az ábrázolt pontthalmazokra? A halmaz pontjainak az a egyenestől mért távolsága

- a) nagyobb 14 mm-nél;
- b) kevesebb, mint 14 mm;
- c) nagyobb vagy egyenlő, mint 14 mm;
- d) legfeljebb 14 mm.

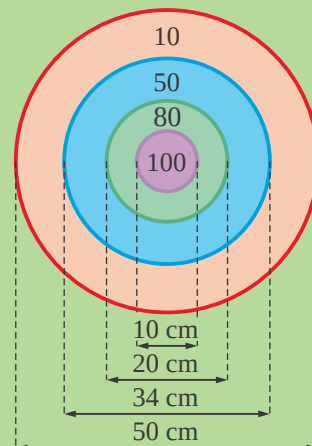


8. Milyen színű mezőben van a céltáblán az a találat, amely a középponttól

- a) legfeljebb 17 cm-re, de 10 cm-nél távolabbra került;
- b) több mint 5 cm-re, és 10 cm-nél nem messzebbre található;
- c) maximum 5 cm távol van?

9. Milyen messze van a céltábla közepétől az a találat, amely

- a) a 10 pontos mezőbe került;
- b) a két belső mező egyikébe került?

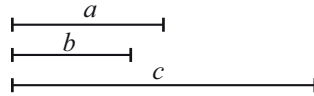


10. Marcsi szülei egy 6 méter oldalhosszú, négyzet alakú kertbe ültetik a veteményt. A kert locsolásához vásárolnak egy olyan, kör alakban locsoló eszközt, amely a leszúrás helyétől minden irányban 3 méter távolságra tud öntözni. Készíts felülnézeti ábrát a feladathoz! (1 m a rajzon 1 cm legyen!)

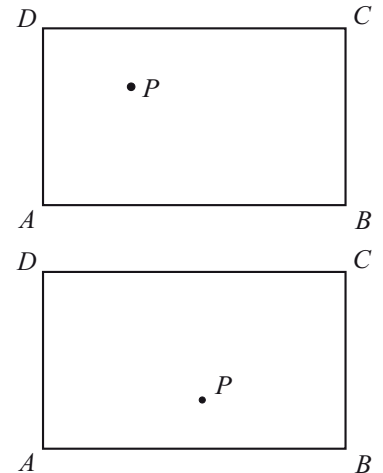
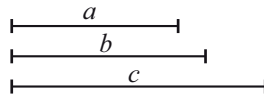
- a) Hová kell leszúrni a locsolófejet, hogy a veteményeskert lehető legnagyobb területe kapjon vizet?
- b) Színezd ki a kertnek azt a részét, amely maximális víznyomás esetén sem kap vizet!
- c) Maximális víznyomás mellett hány méter hatósugarú locsolófej tudná a kert egész területét megöntözni, ha az eszközt a kert közepén szúrják le?

Tudáspróba

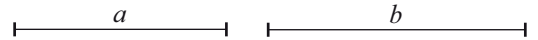
1. a) Mérd meg a P pont távolságát a téglalap AB oldalától! A felsorolt szakaszok hossza közül melyikkel egyenlő az általad mért távolság?



- b) Mérd meg a P pont távolságát a téglalap A csúcsától! A felsorolt szakaszok hossza közül melyikkel egyenlő az általad mért távolság?



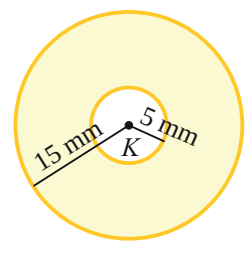
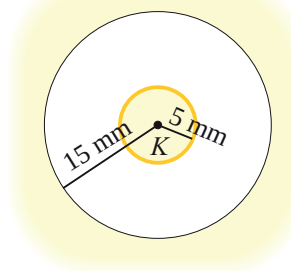
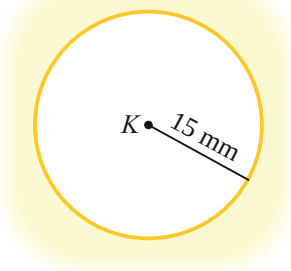
2. Derékszögű vonalzó és körző használatával rajzolj olyan téglalapot, amelynek oldalai a és b hosszúságúak! Írd le a rajzolás lépéseit!
3. Írd le szöveggel, milyen közös tulajdonsága van a beszínezett alakzatok pontjainak!



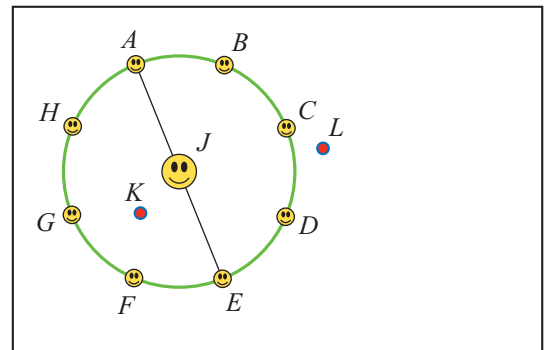
a)

b)

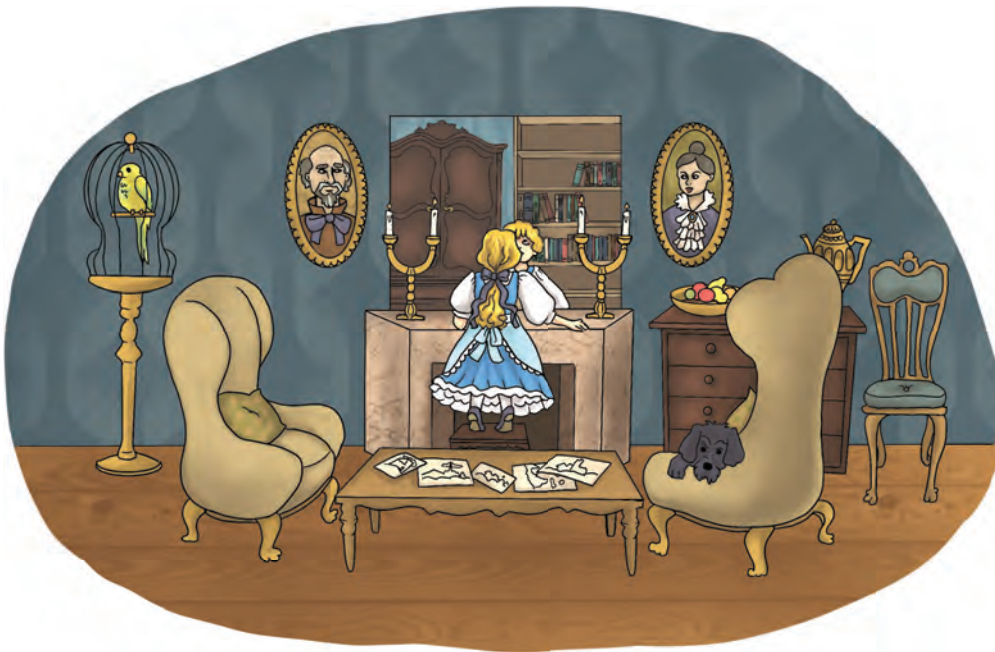
c)



4. Rajzolj vonalzóval egy egyenest!
- a) Rajzold fel azokat a pontokat, amelyek az egyenestől nem távolabb, mint 25 mm-re vannak!
- b) Rajzold fel az egyenestől nem közelebb, mint 2 cm-re, de nem távolabb, mint 4 cm-re lévő pontokat!
5. Az erdei iskolában egy téglalap alakú réten körjáratot játszanak a gyerekek. A kör vonalán két szemben álló gyerek távolsága 4 méter (az ábrán például A és E távolsága). A kör közepén áll a játékvezető (J). Kati (K) a körön belül, Laci (L) pedig a körön kívül áll.
- a) Körző és vonalzó segítségével készíts ábrát a füzetedben! Ami a valóságban 1 méter, az a füzetedben 2 centiméter legyen!
- b) Mekkora a körvonalon álló nyolc gyerek játékvezetőtől való távolsága?
- c) Jellemezd Kati és Laci helyét a játékvezetőtől való távolsággal!
- d) Színezd pirossal a rétnek azt a részét, amelynek pontjai a J ponthoz közelebb vannak, mint a körvonal pontjai!
- e) Színezd kézzel a rétnek azt a részét, amelynek pontjai a J ponttól távolabb vannak, mint a körvonal pontjai!



Képek és tükörképek



Ott a szoba a tükörben pontosan olyan, mint a mi szobánk, csak minden meg van fordítva. Mindent látok benne, ha fölállok egy székre, csak éppen a kandallóba nem látok bele. Pedig nagyon kíváncsi vagyok, hogy télen ők is begyűjtanak-e ott a tükörszobában. Igaz, hogy ha a mi kandallónk füstöl, akkor ott is ég náluk. A könyvek is mind pontosan olyanok ott, mint a mi könyveink, csak éppen visszafelé van rajtuk az írás. Odatartottam, megnéztem egyszer, onnan tudom.

Részlet Lewis Carroll *Alice Tükörországbán* című könyvéből

A fotókon együtt látod egy-egy kép eredetijét és a tükörképét. El lehet-e dönteni mindegyik esetben, melyik az eredeti, és melyik a tükörkép?



Tigris! Tigris! éjszakánk
Erdejében sárga láng,
Mely örök kéz szabta rád
Rettentő szimmetriád?

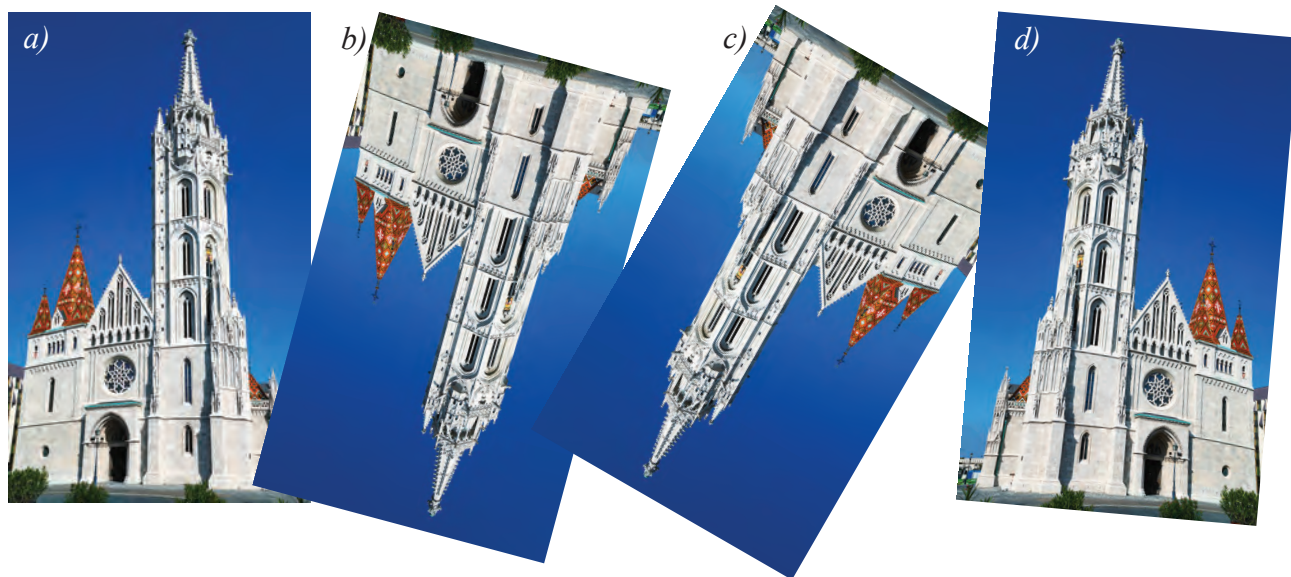
William Blake: *Tigris*

„... az ég a tengert tükrözi,
a tenger az eget.”

Radnóti Miklós: *Trisztánnal ültem...*

1. példa

Még nehezebb dönteni, ha különválasztjuk a tükörképeket az eredetijüktől. Itt most fotókat látsz – ugyanazt több példányban is –, de a fotók némelyike Alice tükörszobájából való. Szét tudjuk-e válogatni, melyik az igazi, és melyik a tükörkép?



Megoldás

Csak az tudja, hogy melyik kép az igazi, aki ismeri a Mátyás-templomot a budai várban.

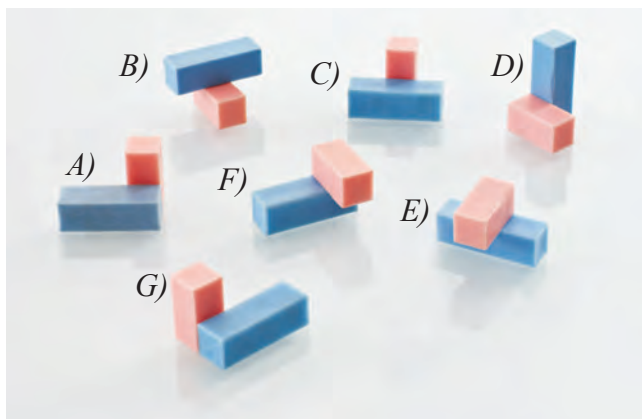
Az a) jelű kép igazi, a b) jelű pedig tükörkép. Ha egy átlátszó papírra vázlatosan rárajzoljuk az a) jelű képet, akkor ezt megpróbálhatjuk ráilleszteni a többire. Amelyikre átfordítás nélkül ráillik, az az igazi, amelyekre átfordítva illik csak rá, az a tükörszobából való kép.

2. példa



Építsük meg az ábrán látható, rózsaszín és kék rúdból alkotott testeket! Próbáljuk ki, melyik mozgatható egy másik helyére, melyek mozgathatók tükrös helyzetbe!

- Találunk-e olyan párokat, amelyek tükrös helyzetbe mozgathatók?
- Gyűjtsük csoportokba azokat, amelyek közül egyik a másik helyére mozgatható!
- Találhatunk-e olyan párokat, amelyek egymás helyére is mozgathatók, és ugyanakkor tükrösen is elhelyezhetők?
- Keressünk olyan párokat is, melyek tükrös helyzetbe elmozgathatók, de egymás helyére nem!



Megoldás

- Tükrös helyzetbe mozgatható: **A-D** ; **A-G** ; **F-D** ; **F-G** ; **B-C-E** .
- Egymás helyére mozgatható: **A-F** ; **G-D** ; **B-C-E** .
- Tükrös helyzetbe és egymás helyére is mozgatható: **B-C-E** .
- Tükrös helyzetbe mozgatható, de egymás helyére nem: **A-D** ; **A-G** ; **F-D** ; **F-G** .

Feladatok



1. Nézd meg a tükörben a szövegeket!

AKRAT IOBO IOBO
 RÀÀLADJA ÜJÜTAYTUK, RÀTAYTUK, RÀTAYTUK
 KISZIK KISZIK KISZIK KISZIK KISZIK
 INDUL A GÖRÖG ALUDNI
 GÈΣ KÈK AΣÈΣ

Te is próbálj tükrírással írni!

Könnyebb lesz, ha egyszerre próbálsz jobb és bal kézzel írni.

iool boci

EEETEETEETEN A LISZICIBE-NEP IS
 EP TUKREBEN GATSIK AS EG IS

Weöres Sándor



A székely-magyar rovásírás hagyományosan jobbról balra halad. Nézz utána, milyen nyelvek írása követi még ezt az irányt!



2. Tedd a tükröt úgy, hogy a megadott szót lásd benne!

Például Ha a RUHA szóban a tükröt függőlegesen a H betű közepére teszed, és hátulról nézel bele, akkor az AHA szót látod a tükörben.

a) OMEGA – OMO b) EMMA – AMA c) VALAMI – IMI d) AVAT – TAVAT

Te is készíts ilyen rejtvényeket!

3. Válogasd szét a képeslapokat, melyik igazi, és melyik való Tükörországból!

a)



b)



c)



f)



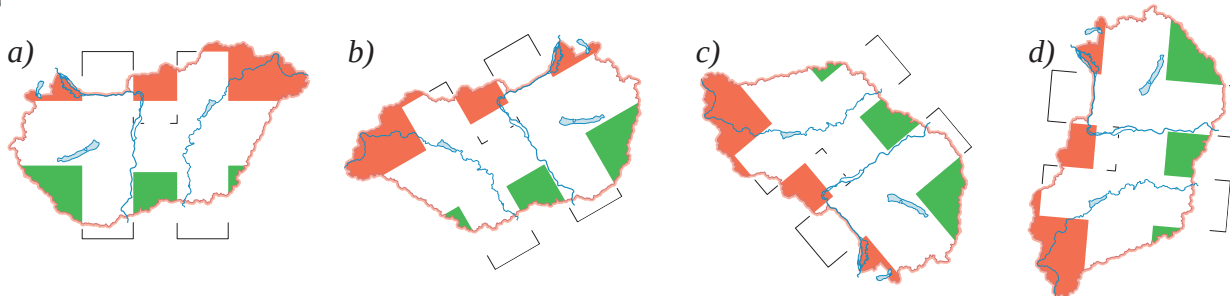
d)



e)



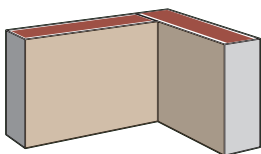
4. Melyik a kép, melyik a tükörkép?



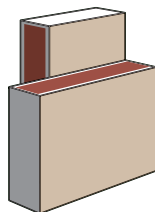
5. Építsd meg két gyufásdobozból a következő nyolc testet!

Keress olyan párokat, amelyek egymás tükörképei lehetnek, azaz tükörös helyzetbe mozgathatók!

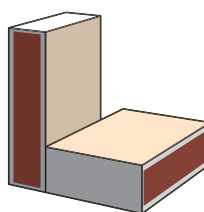
A)



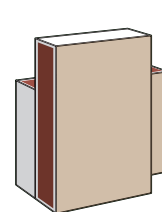
B)



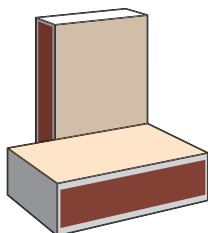
C)



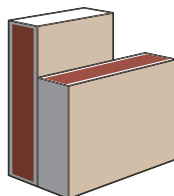
D)



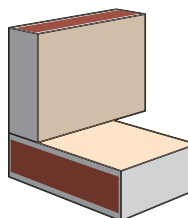
E)



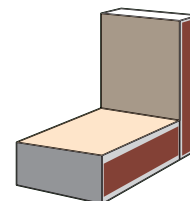
F)



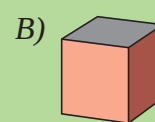
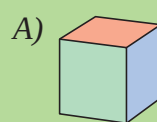
G)



H)



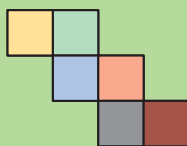
7. A képen látható kockák egymás tükörképei. Párosítsd össze a kockákat a hálókcal! Van-e olyan háló, amelyből ezek a kockák nem építhetők meg?



1.



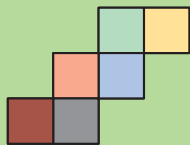
2.



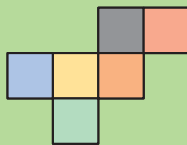
3.



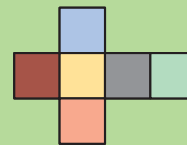
4.



5.



6.



Tükrözés mozgatóással

Egy síkbeli rajzot és a tükröképét látjuk a képeken úgy, hogy csak a tükrözési szög változik. Például a középső kép azt az esetet mutatja, amikor a tükrözési szög és a rajz síkja derékszöget zár be.



Ha egy síkbeli alakzatot tükrözünk, és a tükrözési szög merőlegesen áll a síkra, akkor a tükrökép ugyanabban a síkban van, mint az eredeti ábra. A továbbiakban ezt az esetet vizsgáljuk.

A rajzhoz a tükröképet tükrözés nélkül is könnyen elkészíthetjük. Elég annak az egyenesnek a helyét tudnunk, amelyikre a tükröt állítottuk. Ez az egyenes a **tükrötengely**.

A tükröképet legegyszerűbben másolópapír segítségével állíthatjuk elő. Tegyük a másolópapírt (a képen sárga színű) az ábrára, másoljuk át a rajzot és az egyenest is, majd a másolópapírt emeljük fel, és tegyük le úgy, hogy a tükrötengely pontjai önmagukra kerüljenek, de a tengely két partja felcserélődjön!

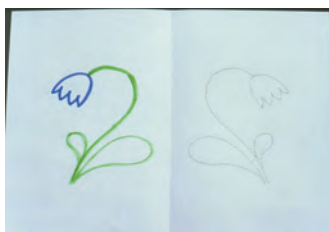


Ahhoz, hogy a tengely pontjait pontosan önmagukra tudjuk illeszteni, meg kell jelölnünk rajta egy pontot, és ezt a másolópapírra is át kell másolni.

Ha ezután az eredeti rajzot újra átmásoljuk a másolópapírra, megkapjuk együtt az eredeti rajzot és a tükröképét.

Ha a síkot úgy mozgatójuk el, hogy a tengely minden pontja önmagára kerül, és a tengely által határolt két félsík helyet cserél, akkor a **tengelyes tükröképet** kapjuk.

Hajtogatással is könnyen lehet tükröképet készíteni. A három kép közül az elsőn egy festékpaca tükröképét állítottuk elő hajtogatással, a másodikon egy összehajtott papír átszurkálásával készítettünk tükrös alakzatokat. A harmadikon kivágással készült papírterítő látható.

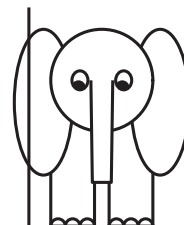
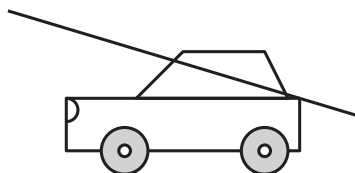
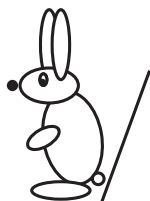


Tükrözésnél a rajz minden részletét kétszer látjuk, minden pontnak van egy párja a tükröképen, és fordítva. A tengely mentén kettéhajtott papíron éppen az **egymásnak megfelelő pontok** fedik egymást.

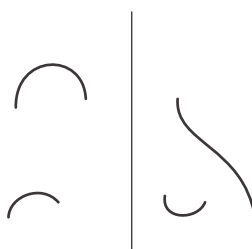
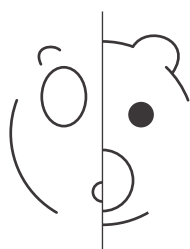
Feladatok



1. Készítsd el másolópapír segítségével az alakzat tükörképét! Mindegyik képhez megadtuk a tengelyt. A végén a másolópapírodon legyen együtt a kép és a tükörkép is! Azután ezt ragaszd be a füzetedbe!

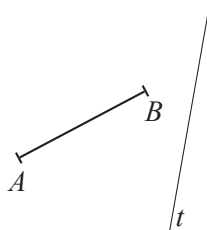


2. Tükrözd másolópapír segítségével a széttördelt ábrákat! Előtte próbáld meg kitalálni, mit fogsz látni a képen!

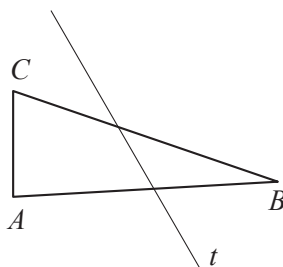


3. Végezd el a tükrözést másolópapírral!

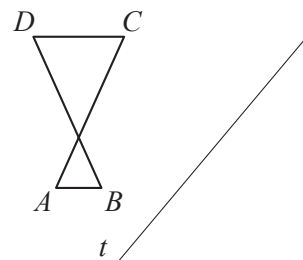
a)



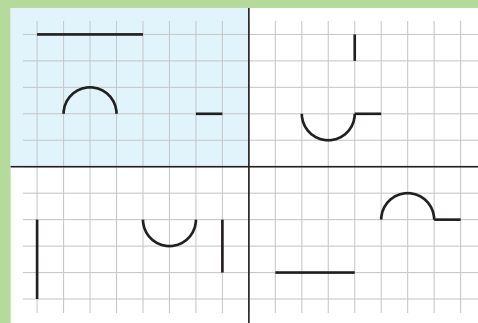
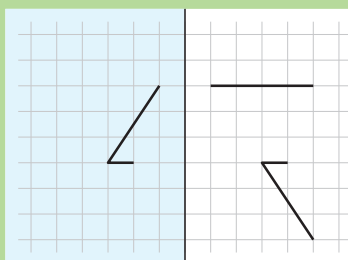
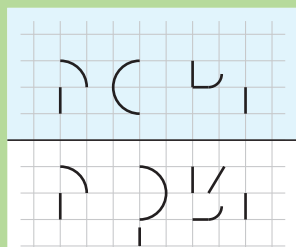
b)



c)



4. Az ábrákat szétszedtük, és némely részletüknek csak a tükörképét rajzoltuk meg. Ha a berajzolt tengelyekre tükrözzük, megkapjuk az eredeti ábrát. Próbáld meg kitalálni, mi az eredeti kép, és utána másolópapír segítségével ellenőrizd a tippedet!



A tengelyes tükrözés tulajdonságai

A képen egyforma színnel egymásnak megfelelő részleteket jelöltünk meg.

Az A képe az A' , és az A' képe az A .

Ezt röviden így jelöljük: $A \rightarrow A'$ és $A' \rightarrow A$.

Az A és az A' egymásnak megfelelő pontok.

Röviden: $A \leftrightarrow A'$.

PQ és $P'Q'$ egymásnak megfelelő szakaszok.

Pirossal az egymásnak megfelelő szögeket jelöltük. A **kék**, illetve a **sötétkék** részletek is egymásnak megfelelő alakzatpárok.

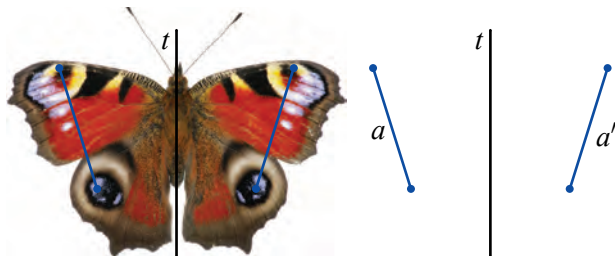
Az egyforma színű részletek egymás tükörképei. Átlátszó papír segítségével egymásra mozgathatjuk őket.



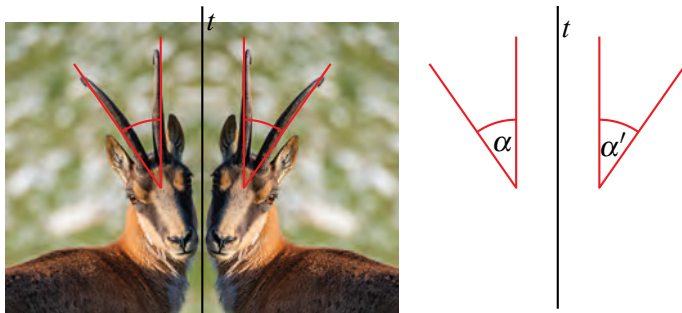
Vajdahunyad vára, Budapest

Vizsgáljuk meg a tengelyes tükrözés tulajdonságait!

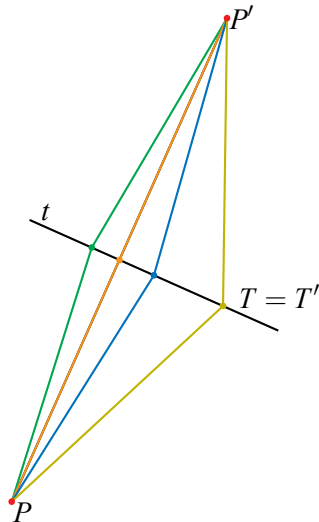
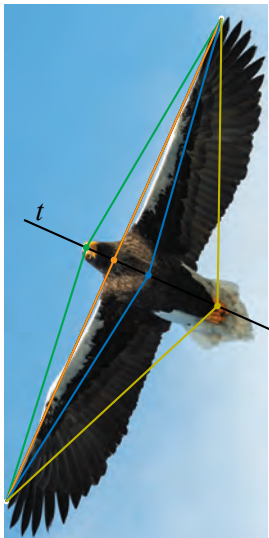
A kép és a tükörkép egymásra mozgathatók, ezért minden távolság és minden szög nagysága is változatlan marad a tükrözés során.



A szakasz hossza megegyezik a tükörképének hosszával.



A szög nagysága megegyezik a tükörképének nagyságával.

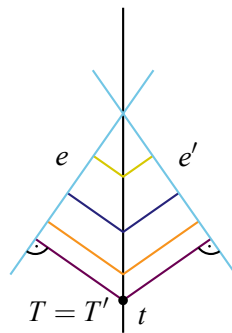
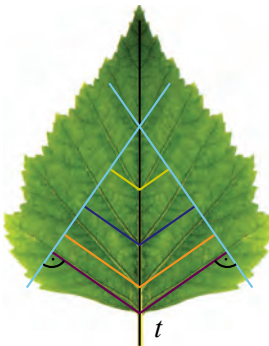


A tengely pontjai helyben maradnak, ezért ha például a P pont képe P' , és T a tengely tetszőleges pontja, akkor PT és $P'T'$ egymásnak megfelelő szakaszok, vagyis egyenlők.

Pont és a tükörképe a tengely bármelyik pontjától egyenlő távol vannak.

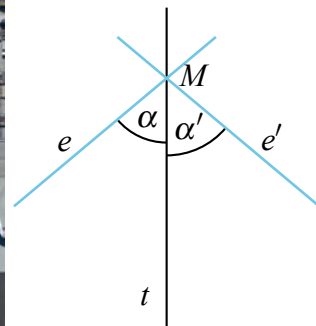
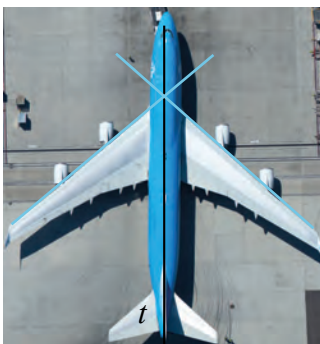
Két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok olyan egyenest alkotnak, amelyik merőleges a két pont összekötő szakaszára, és felezi azt.

A tengely felezőmerőlegese a pontot a tükörképével összekötő szakasznak.



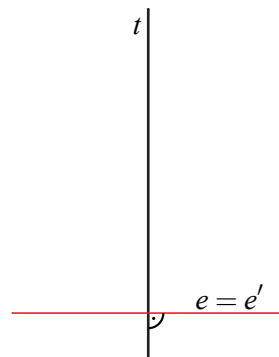
Ha az e egyenes képe e' , és T a tengely egy tetszőleges pontja, akkor a T pont e -től való távolsága ugyanakkora, mint a T pont e' -től való távolsága.

Egy egyenestől és tükörképétől a tengely minden pontja egyenlő távolságra van.



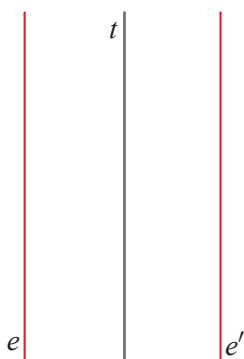
Ha az e egyenes metszi a tengelyt – az M pontban –, akkor az e egyenes e' tükörképe is metszi a tengelyt, még hozzá ugyanabban az M pontban. Mivel az M pont képe önmaga, ezért az e egyenes és a t tengely hajlásszöge megegyezik az e' egyenes és a t tengely hajlásszögével, hiszen ezek egymás tükörképei.

Egyenes és tükörképe ugyanakkora hajlásszöget zárnak be a tengellyel. A tengely tehát felezi az egyenes és a tükörképe által bezárt szöget.



Ha az egyenes merőleges a tengelyre, akkor egybeesik a képével.

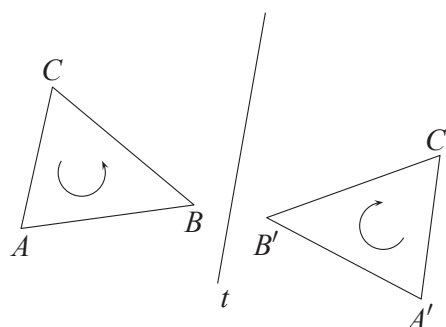
A tengelyre merőleges egyenes képe önmaga.



Ha az egyenes nem metszi a tengelyt, akkor a tükörképe sem metszheti azt.

A tengellyel párhuzamos egyenes képe is párhuzamos a tengellyel, és attól ugyanolyan távol van.

Hogyan lehet akkor, hogy sok esetben mégis meg tudjuk különböztetni a képeket a tükörképektől, az igazi órákat a tüköróráktól, a csiga házát a tükörképétől, az írást a tükörírástól? Valamit mégis megváltoztat a tükrözés. Ez pedig nem más, mint a forgásirány.



Tükörországban az órák fordítva járnak.

Egy csiga házán a spirál iránya ellentétes a tükörcsiga spiráljának irányával.

Ha körbejársz egy háromszöget az óramutató járásával ellentétes irányban, akkor a nekik megfelelő pontok a tükörképen az óramutató járásával egyező irányban sorakoznak.

A tengelyes tükrözés megváltoztatja a körüljárás irányát.

Feladatok

1. Egymásnak megfelelő részleteket keresünk.

a) Például: az a) ábrán: JF szakasz képe CD szakasz.

Röviden: $JF \rightarrow CD$.

Mi lesz a képe a következő részleteknek?

GH szakasz képe: $GH \rightarrow ?$

F pont képe: $F \rightarrow ?$

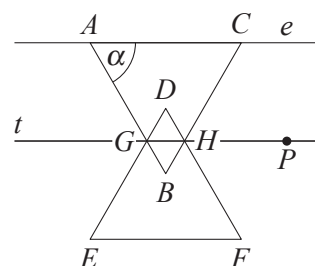
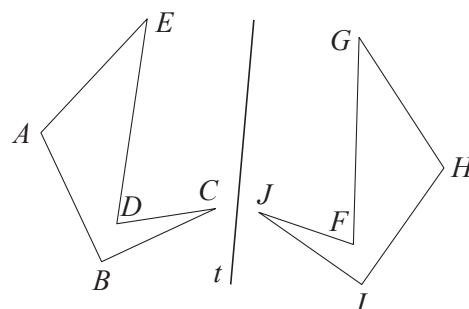
EDC szög képe: $EDC \rightarrow ?$

b) $\alpha \rightarrow ?$ CB egyenes $\rightarrow ?$

$e \rightarrow ?$ DB szakasz $\rightarrow ?$

$A \rightarrow ?$ $PHC \rightarrow ?$

$H \rightarrow ?$ PG egyenes $\rightarrow ?$



2. Nevezd ki az O ponton átmenő egyenesek közül valamelyiket tengelynek, jelöld meg például egy szívószállal!

Keress az ábrán egymásnak megfelelő

- a) pontokat; b) egyeneseket;
c) szögeket; d) szakaszokat;
e) háromszögeket!

3. A 2. feladatban ábrázolt hatszögről szólnak a következő kérdések is. Lehet-e, hogy az alábbiakban megadott két-két alakzat egymásnak tükörképe valamilyen egyenesre nézve? Ha igen, akkor add meg a tengelyt! Ha nem, indokold meg, miért nem!

FGM és LOM

AF és CD

$HIDF$ és $CALK$

POK és HOL

FGM és FML

LOM és KOR

AFG és FEL

FAL és HAL

FGM és SKE

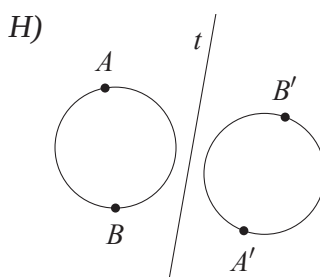
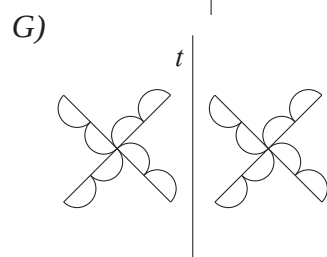
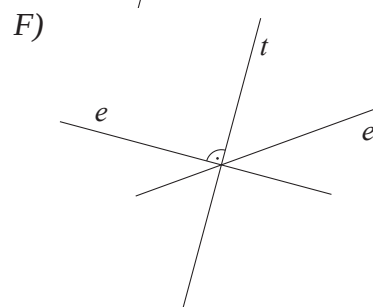
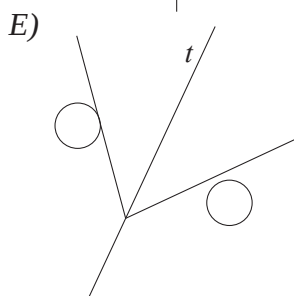
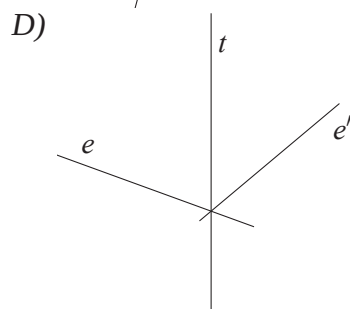
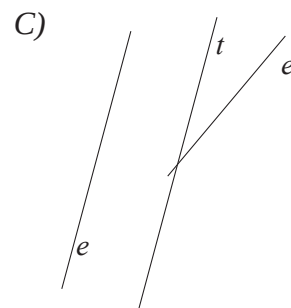
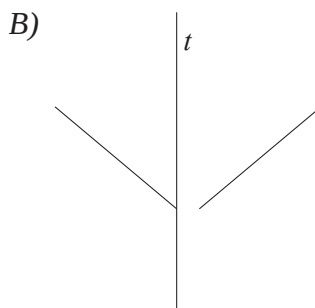
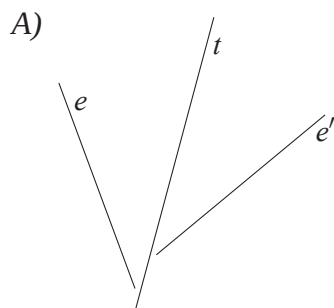
FAL és FEG

AGH és KJO

$EKDO$ és $BOCI$

4. A következő tükrözések mindegyike hibás. Ezt anélkül is könnyen beláthatod, hogy másolópapírral ellenőriznéd, mivel a rajzoló mindegyik esetben megsértette a tükrözés valamelyik fontos tulajdonságát.

- a) Keresd meg a hibát! b) Mindegyik esetben fogalmazd meg, mit rontott el a rajzoló!



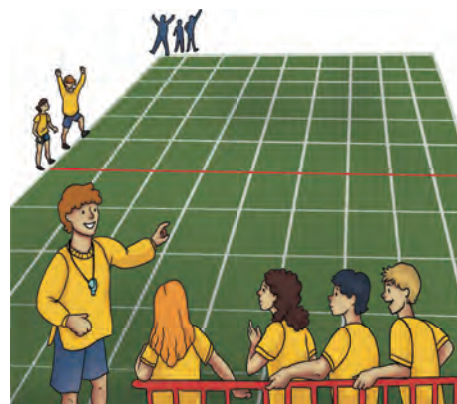
Alakzatok pontjainak tükrözése

Példa

A gyerekek sportnapra készülődtek. A testnevelő tanár segítségével négyzethálót rajzolt fel a tornaterem padlójára. A pálya közepén egy egyenest **pirossal** megjelölt.

Ilyen gyakorlatokat végeztetett a gyerekekkel:

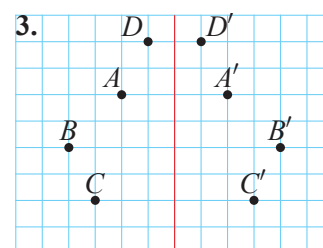
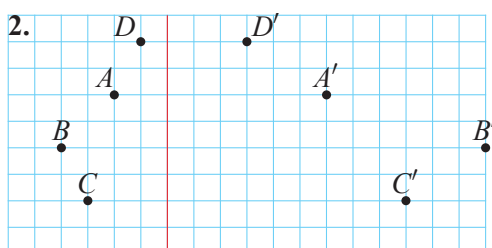
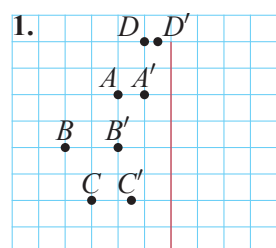
- I. Sípszóra mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez, és utána tovább még ugyanannyit!
- II. Sípszóra mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez, és utána vissza feleannyit!
- III. Sípszóra mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez, és utána tovább még háromszor annyit!



a) Párosítsuk össze a gyakorlatokat az ábrákkal!

b) Melyik szabálynál kerülnek a gyerekek a **piros** egyeneshez képest a tükörképük helyére?

Az ábrákon Anna eredeti helyét A , az új helyét pedig A' jelöli. B és B' Béla, C és C' Csaba, D és D' pedig Dani helyét jelöli.



Megoldás

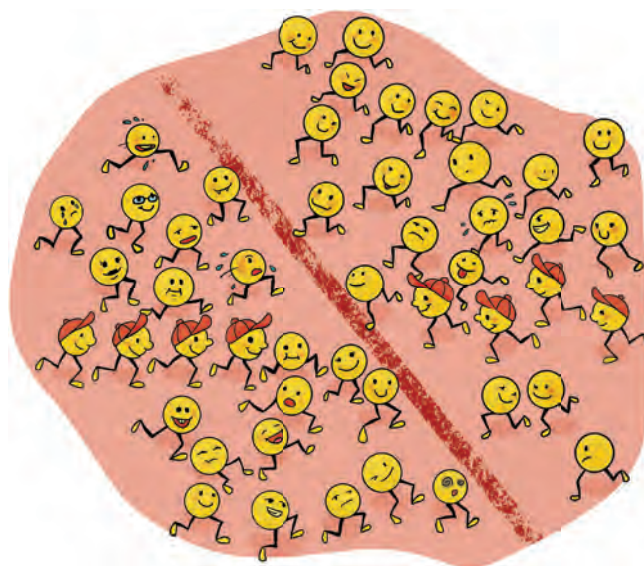
a) I.-3.; II.-1.; III.-2.

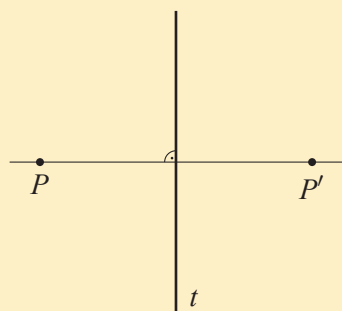
b) Az I. szabály éppen az indulási helyük tengelyes tükörképébe juttatja a gyerekeket.

Elképzelhetjük az egész síkot úgy, mint egy végtelenbe nyúló, hatalmas sportpályát, amelynek a pontjai – akár a gyerekek – át tudnak rendeződni különböző szabályok szerint. Például ha a síkon adott egy egyenes, akkor a pontok ilyen utasítást kaphatnak:

Sík pontjai, figyelem! Mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez, és onnan irányváltás nélkül szaladjon tovább még ugyanannyit!

Ez az utasítás a tengelyes tükörképükbe juttatja a sík pontjait. Ilyen módszerrel minden ponthoz hozzápárosítunk, vagyis **hozzárendelünk** egy másikat. Ezt az eredeti pont **képének** nevezzük, és az eredeti pont betűjelével és egy utánaírt vesszővel jelöljük.





Adott egy t egyenes. Egy P pont tengelyes tükrképét úgy kaphatjuk meg, hogy a P pontból merőlegest állítunk a t tengelyre, majd ennek a meghosszabbításán megkeressük azt a pontot, amely a tengelytől ugyanolyan messze van, mint az eredeti P pont.

Ez a P' pont a P pont t tengelyre vonatkozó tükrképe.

A tengely bármely pontjának önmaga a képe.

Feladatok

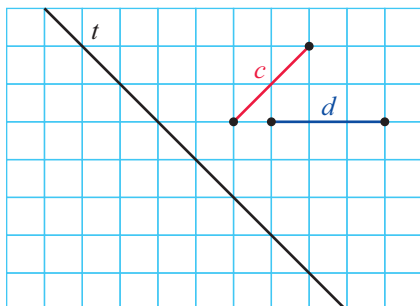
1. Másold át az ábrát a füzetedbe! Tükrözd a pontokat

a) a piros, b) a kék

egyenesre!

A pontokat A, B, C betűkkel, a tükrképeket mindkét ábrán A', B', C' betűkkel jelöld.

2. Másold át az ábrát a füzetedbe! Tükrözd a c és a d szakaszokat a megadott t tengelyre!

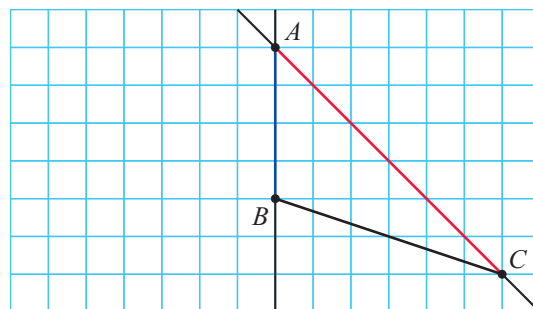


3. Másold át az ábrát a füzetedbe! Tükrözd az ABC háromszöget

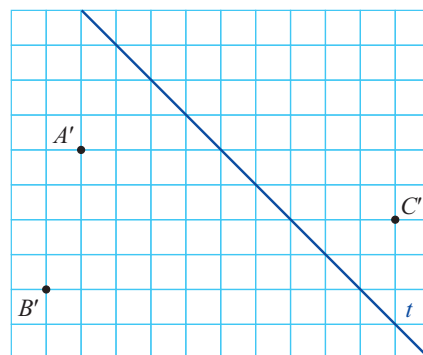
a) az AC oldal egyenesére!

b) az AB oldal egyenesére!

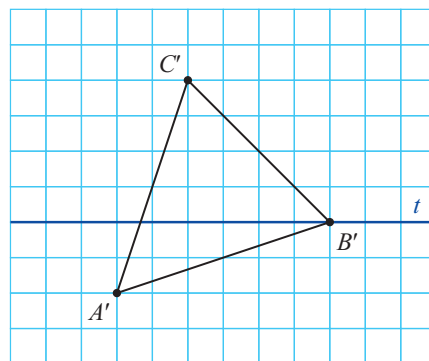
Az eredeti háromszögben és a tükrképében is rajzold be a forgásirányt!



4. Az A, B és C pontokat a t tengelyre tükröztük. Az ábrán a tükrkép pontokat láthatod. Rajzold be az eredeti pontokat!



5. Egy ABC háromszöget tükröztünk a t tengelyre. Az $A'B'C'$ háromszöget kaptuk. Rajzold meg az eredeti ABC háromszöget!

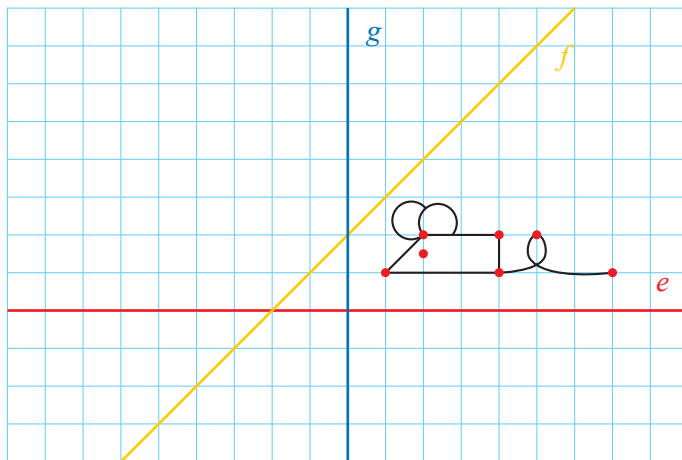


6. Másold át az egeret a füzetedbe! (A **pirossal** jelölt pontok egymáshoz képest pontosan úgy helyezkedjenek el, mint az ábrán, a többi részletet pedig szabad kézzel egészítsd ki!)

Másold át a színessel rajzolt tengelyeket is! Mindegyik tengelyhez készíts külön-külön rajzot!

Tükrözd a megadott pontok segítségével az egeret

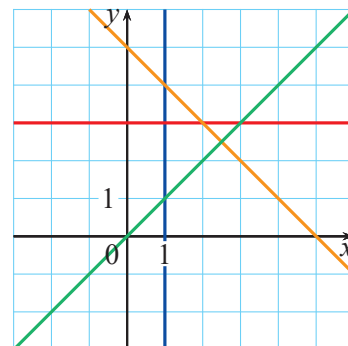
- az e egyenesre, és a kép legyen **piros**;
- az f egyenesre, és a kép legyen **sárga**;
- a g egyenesre, és a kép legyen **kék**!



7. Add meg az $A(2;2)$, $B(3;1)$ és $C(-1;-2)$ pontok tükörképeit, ha a tengely

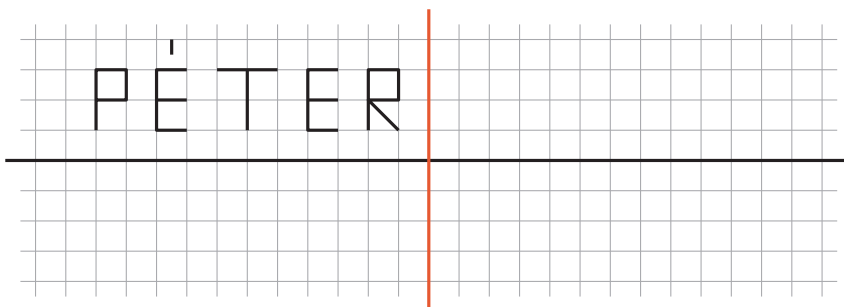
- a **piros** egyenes;
- a **kék** egyenes;
- a **zöld** egyenes;
- a **narancssárga** egyenes!

Készíts külön rajzot az a), b), c) és d) feladatrészekhez!



8. Másold a füzetedbe a feliratot és a tengelyeket, majd tükrözd a feliratot

- először a fekete, majd a piros tengelyre;
- először a piros, majd a fekete tengelyre!



9. Ábrázold koordináta-rendszerben a megadott pontokat, és kösd össze őket a felsorolás sorrendjében!

$A(2;3)$, $B(4;5)$, $C(5;1)$

Keresd meg a pontok képeit a megadott szabályok szerint, és azokat is kösd össze!

1. szabály: *Sík pontjai, figyelem! Fussatok a legrövidebb úton az y tengelyhez, és onnan egyenesen tovább még ugyanannyit! Rajzold meg a képet **pirossal**!*
2. szabály: *Sík pontjai, figyelem! Fussatok a legrövidebb úton az x tengelyhez, és onnan egyenesen tovább kétszer annyit! Rajzold meg a képet **kékkel**!*
3. szabály: *Sík pontjai, figyelem! Fussatok a legrövidebb úton a $(0;0)$ ponthoz, és onnan tovább kétszer annyit! Rajzold meg a képet **zölddel**!*

Melyik tengelyes tükrözés a három szabály közül?

Hasonlítsd össze mindegyik szabály szerint az

- a) AC szakasznak és a képének a hosszát; b) ABC szögnek és a képének a nagyságát!

10. Ábrázold koordináta-rendszerben a megadott pontokat, és kösd össze őket a felsorolás sorrendjében!

$A(6;-2)$, $B(1;3)$, $C(4;6)$, $D(4;4)$, $E(6;4)$, $F(3;1)$

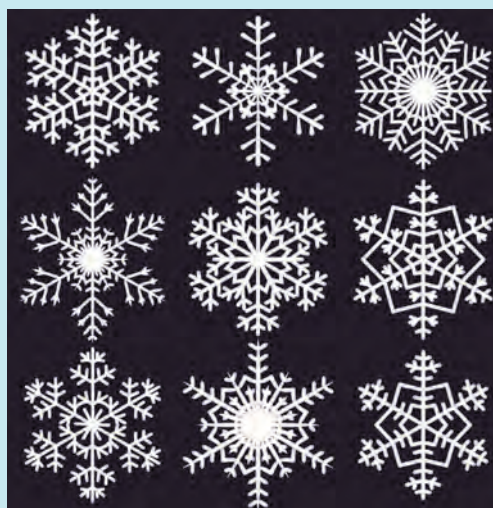
Keresd meg a pontok képeit a megadott szabályok szerint, és azokat is kösd össze!

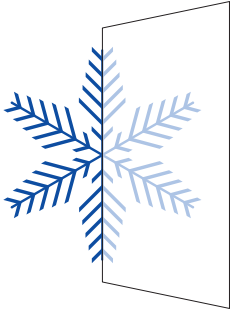
- a) Minden ponthoz rendeld hozzá azt a pontot, amelyet úgy kapsz, hogy a pont első jelzőszámát változtatlanul hagyod, a másodiknak pedig az ellentettjét veszed! Rajzold meg **pirossal** az új alakzatot!
- b) Minden ponthoz rendeld hozzá azt a pontot, amelyet úgy kapsz, hogy a pont első jelzőszámát szorozod -2 -vel, a másodikat pedig változtatlanul hagyod! Rajzold meg **zölddel** az új alakzatot!
- c) Hasonlítsd össze mindkét szabály szerint a
 - BA szakaszt a képével;
 - CDE szöget a képével!

Szimmetrikus alakzatok

A hópelyhek titka az embert évszázadok óta izgatja. Az első írásos emlékek erről több mint kétezer évesek, és Kínából származnak. Már akkor megfigyelték a hópelyhek hatszögletű alakját. Európában először **Johannes Kepler** (1571–1630; matematikus, csillagász) ismerte fel a hópelyhek hatos szimmetriáját, és 1611-ben tanulmányt írt róla.

Még sohasem sikerült két teljesen egyforma hópelyhet megfigyelni.



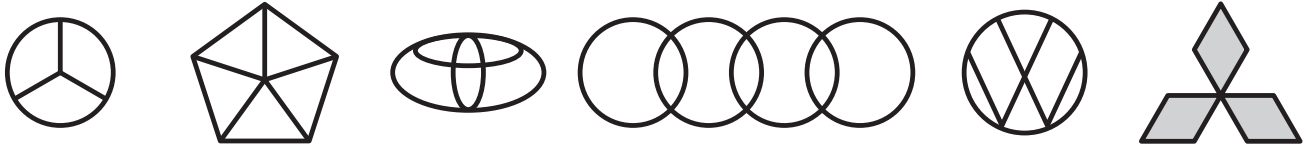


A hópehelyek között a legtöbb szimmetrikus. Vagyis rá tudjuk tenni a tükröt úgy, hogy ugyanazt lássuk, mint tükör nélkül.

Ha egy alakzathoz van olyan tengelyes tükrözés, amely önmagába viszi, akkor az alakzatot tengelyesen tükrösnek vagy **tengelyesen szimmetrikusnak** nevezzük.

Ez azt jelenti, hogy az alakzatnak van tükörtengelye. Esetleg több is.

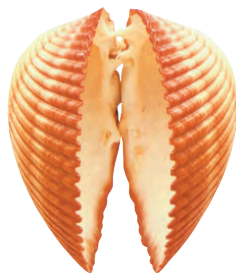
Keress tengelyeket a képekhez!



Térbeli testek is lehetnek **tükörszimmetrikusak**. A síkbeli alakzatoknak tükörtengelyük, a térbeli testeknek tükörsíkjuk van.

A minket körülvevő világban rengeteg tükörszimmetrikus tárgy és élőlény található.

Nézz körül, keress te is ilyeneket! Figyeld az épületeket is!



*Szent István-templom,
Kerekegyháza*

Pont, egyenes, kör és szögtartomány szimmetriái



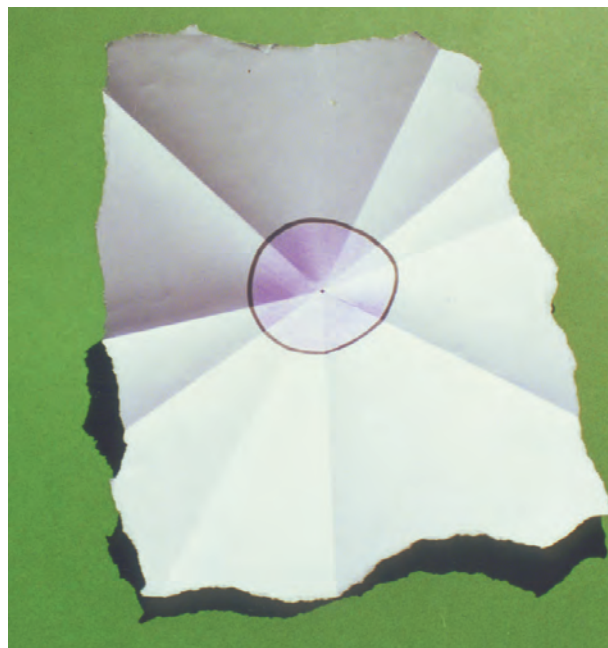
Páros munka. Nyolc kisebb papírlapra rajzoljatok egyesével egy pontot, egy kört, egy egyenest, egy párhuzamos egyenespár által határolt végtelen sávot, egy szakaszt, egy körívet, egy körcíkket és egy hegyesszöget! Hajtogatással keressetek szimmetriatengelyeket ezekhez az alakzatokhoz! Ezután hasonlítsátok össze a megoldásaitokat a tankönyvben látható képekkel!

Pont



Egy pont minden egyenesre szimmetrikus, amely áthalad rajta. A pontnak végtelen sok szimmetriatengelye van.

Kör



Egy kör minden egyenesre szimmetrikus, amely áthalad a középpontján.

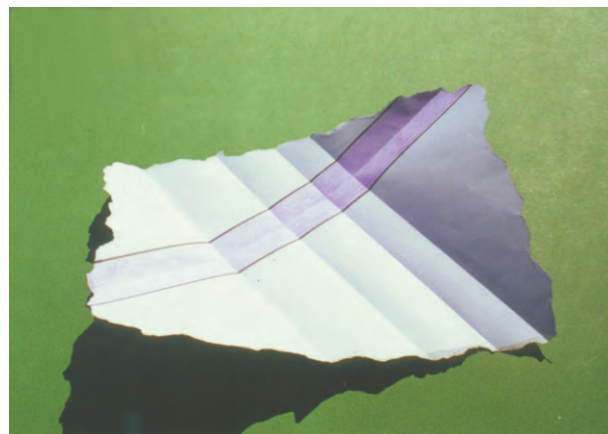
A körnek is végtelen sok szimmetriatengelye van.

Egyenes



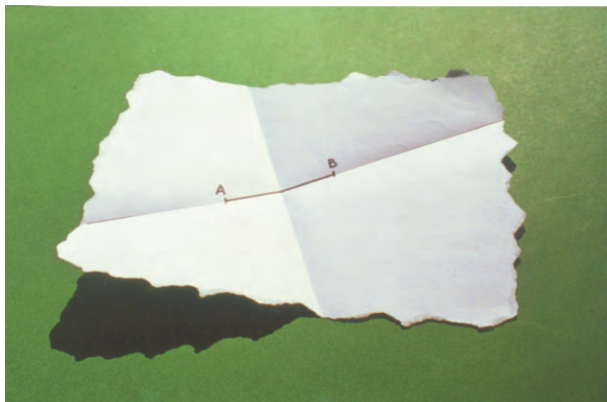
Egy egyenesnek szimmetriatengelye önmagá, és minden olyan egyenes, amely merőleges rá.

Az egyenesnek is végtelen sok szimmetriatengelye van.



Egy végtelen sávnak szimmetriatengelye a határegyenesektől egyforma távol haladó **középpárhuzamos**, és minden olyan egyenes, amely merőleges a határoló egyenesekre.

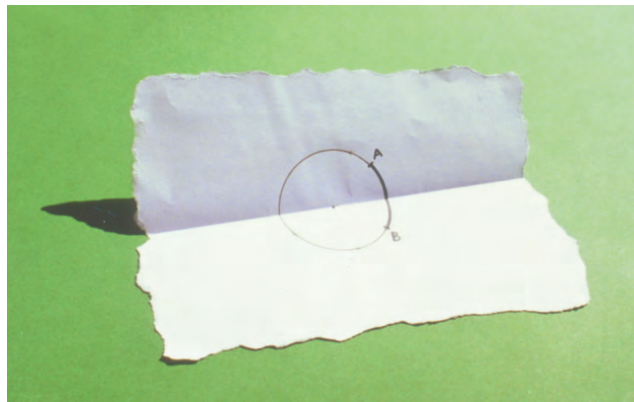
Szakasz



A szakasz egyenesére merőleges szimmetriatengelyek közül csak a szakasz felezőpontján áthaladó tengely viszi a két végpontot egymásba.

A szakasz szimmetrikus a felezőmerőlegesére és a szakaszt végpontjain túl meghosszabbítva kapott egyenesre.

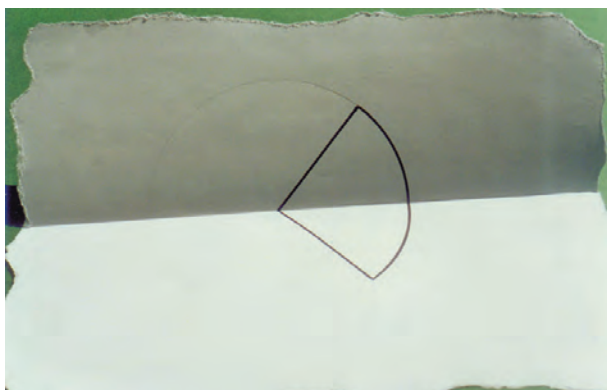
Körív



A kör középpontján áthaladó szimmetriatengelyek közül csak az ív felezőpontján áthaladó tengely viszi a két végpontot egymásba.

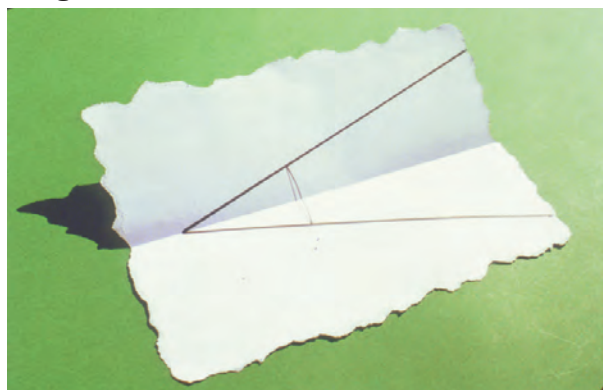
A körív szimmetrikus a felezőpontján áthaladó sugár egyenesére.

Körcikk



Egy körív szimmetriatengelye felezi a körívet és a hozzá tartozó körcikk középponti szögét is.

Szög



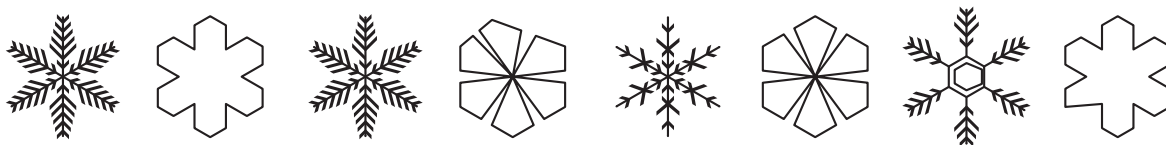
A szög szimmetriatengelye megegyezik a beleillesztett körcikk tengelyével.

A szögtartomány szimmetrikus a szögfelezőre.

Azt a félegyenest, amely a szögtartományt két egyenlő szögtartományra vágja szét, **szögfelezőnek** nevezzük. A szögfelező a szög szimmetriatengelye, tehát minden pontja egyenlő távolságra van a szög két szárától.

Feladatok

1. Keresd ki a „selejtes” hópolyheket! Melyiknek hány szimmetriatengelye van?



2. Válaszd ki a képek közül azokat, amelyek kis hibáktól eltekintve tengelyesen szimmetrikusak!

a) J. R. R. Tolkien (ejtsd: tolkín) híres angol író A Gyűrűk Ura című meseregényében olvashatsz a tünde törzsekről, amelyek címerei közül választottunk néhányat.



Finwé



Idril Celebrindal



Gil-galad



Szilmarilok

b) Híres hősök címerei:



Trójai Hektór



Artúr király



Júdás Makkabeus



Julius Caesar

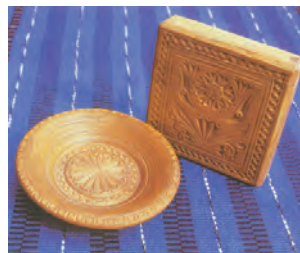


A címerek vizsgálatával és készítésének szabályaival foglalkozik a *heraldika* nevű tudományág. Nézz utána, hogy milyen szabályokat kell betartania egy címerkészítőnek!



3. Készíts címert magadnak, családodnak, osztályodnak!

4. Válaszd ki a tárgyak közül azokat, amelyeknek van tükörsíkja! Melyiknek hány tükörsíkja van?





5. Dolgozzatok **csoportban**, 5-6 gyerek együtt! Gyűjtsetek képeket tengelyesen szimmetrikus alakzatokról és síkra szimmetrikus testekről! Készítsetek tablót! Tegyétek ki az osztályotokban!



6. Négy pont egy tengelyre szimmetrikusan helyezkedik el. Lehetséges-e, hogy

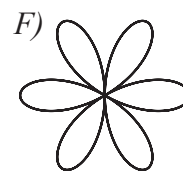
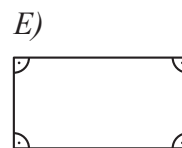
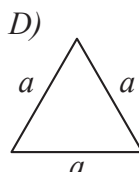
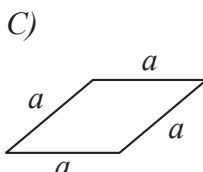
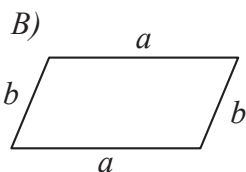
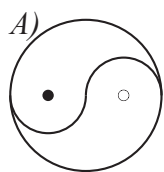
- a) közülük egyik sincs a tengelyen;
- b) közülük pontosan 3 van a tengelyen;
- c) közülük pontosan 2 van a tengelyen;
- d) közülük pontosan 1 van a tengelyen?



7. Öt pont egy tengelyre szimmetrikusan helyezkedik el. Hány pont eshet közülük a tengelyre?



8. Állapítsd meg mindegyik alakzatról, hány szimmetriatengelye van!



A 8. feladat 1. ábrája egy ősi kínai szimbólum, amely a jin és jang jelét olvasztja össze. Nézz utána, mit is jelentenek ezek a fogalmak a kínai bölcsek számára!



9. a) Vágj ki két egymásra illesztett papírból két egyenlő sugarú kört! Helyezd el ezeket egy lapon úgy, hogy a kettő együtt egy tengelyesen szimmetrikus alakzatot alkosson! Rajzold körül ebben a helyzetben az alakzatot! Keresd meg a tükrötengelyt!

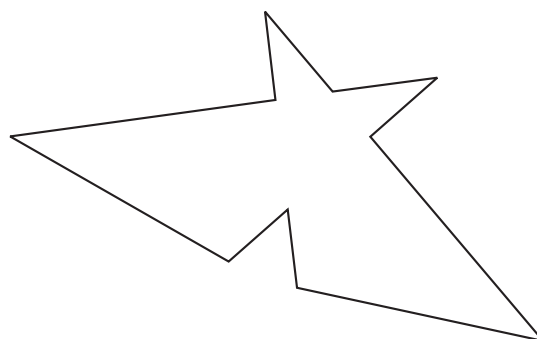
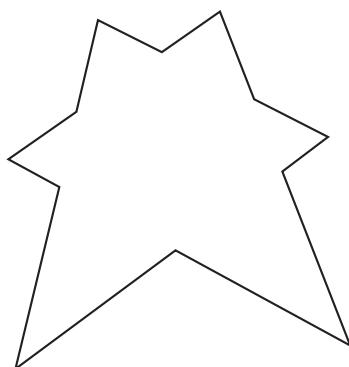
b) Vágj ki két különböző sugarú kört! Jelöld meg mindkettőben a középpontot! Helyezd el a köröket egy lapon úgy, hogy a kettő együtt egy tengelyesen szimmetrikus alakzatot alkosson! Keresd meg a tengelyt! Állíts elő többféle alakzatot!



10. Vágj ki két egymásra illesztett papírból két egybevágó háromszöget!

a) Helyezd el ezeket egy lapon úgy, hogy azok egy tengelyegesen szimmetrikus alakzatot alkoszanak! Rajzold körül ebben a helyzetben az alakzatokat!

b) Áron a két háromszöget egymásra tette, majd a kapott sokszöget körülrajzolva ezeket az ábrákat kapta. Szimmetrikusak-e Áron ábrái?



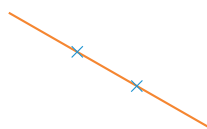
Dolgozz másolópapírral!

Minden esetben határozd meg, hol van a sokszög tükrötengelye! Állítsd elő másolópapíron azt a háromszöget, amit Áron kivágott!

Szerkesztések körzővel és egyenes vonalzóval

Szerkesztéskor csak meghatározott eszközökkel dolgozhatunk, ezek a körző és az egyélű vonalzó. Megállapodás szerint szerkesztőeszközeinkkel az alábbi hat alaplépést végezhetjük.

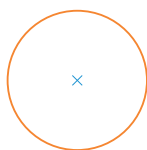
Két ponton átmenő egyenest húzhatunk.



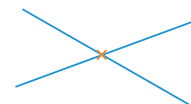
Két pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.



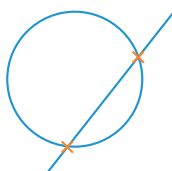
Adott pont körül adott sugárral kört rajzolhatunk.



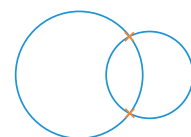
Két metsző egyenes metszéspontját megadhatjuk.



Kör és az azt metsző egyenes metszéspontjait megadhatjuk.



Két egymást metsző kör metszéspontjait megadhatjuk.



A továbbiakban szerkesztéskor csak ezeket a lépéseket használjuk.

Tükörkép szerkesztése

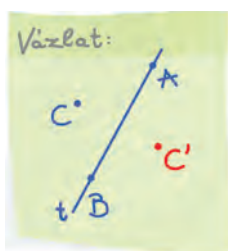
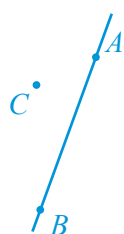
Szerkesztéseknél először felvesszük az adatokat, azután vázlatot készítünk. Ez azt jelenti, hogy elképzeljük, milyen lenne a kész ábra. A vázlatot szabad kézzel rajzoljuk, **pirossal** azt, amit meg akarunk szerkeszteni, és **kékkel** az adatainkat. A vázlaton összefüggéseket keresünk az adatok és a megszerkesztendő alakzat között, majd megtervezzük a szerkesztés lépéseit.

1. példa

Adott három pont, amelyek nem illeszkednek egy egyenesre. Körző segítségével szerkessz egy negyedik pontot úgy, hogy a négy pont tengelyesen szimmetrikus alakzatot alkosson!

Megoldás

Adatok:

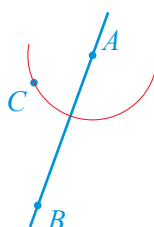


Összefüggések:

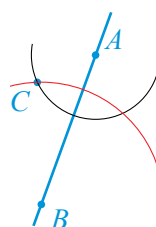
AC képe AC' . BC képe BC' . Tehát $AC = AC'$ és $BC = BC'$. Ezért a C' rajta van az A körül rajzolt AC sugarú körön is, és a B körül rajzolt BC sugarú körön is.

A szerkesztés lépései:

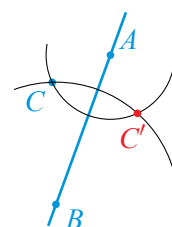
1. Az A pont körül AC sugárral kört rajzolunk.



2. A B pont körül BC sugárral kört rajzolunk.



3. Az egyik metszéspont a C , a másik a keresett C' pont.



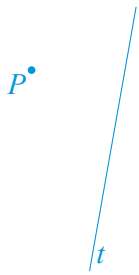
A szerkesztés tervének lejegyzésekor a szöveget helyettesítheted egy vázlatos képsorral, amelyben minden újabb lépésben újabb vonallal vagy ponttal egészítjük ki a korábbi képet. Minden képen az utolsó vonal **piros**, ezzel jelezzük a szerkesztési lépés eredményét.

2. példa

Most csak egyetlen P pontunk és egy t tengelyünk van. Szerkesszük meg a P tükörképét úgy, hogy a szerkesztéshez csak körzőt használunk!

Megoldás

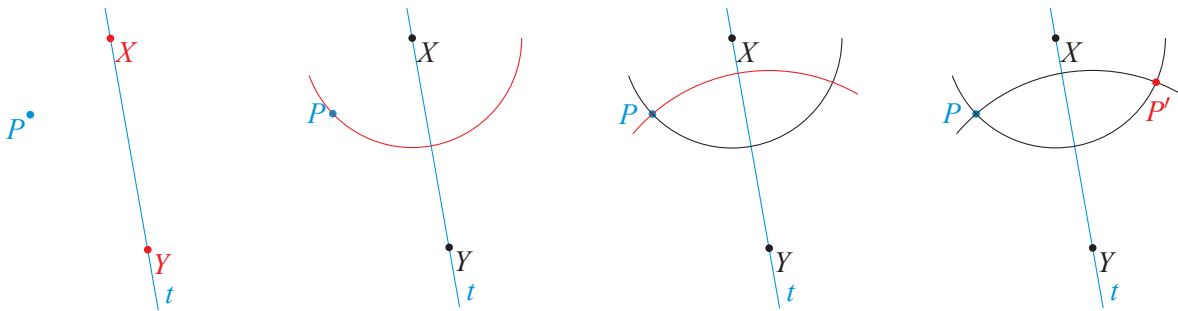
Adatok:



1. megoldás

Vezessük vissza a feladatot az első példában látott problémára! Válasszunk a tengelyen tetszőlegesen két pontot! Innen a megoldás ugyanaz, mint az előző feladatban volt.

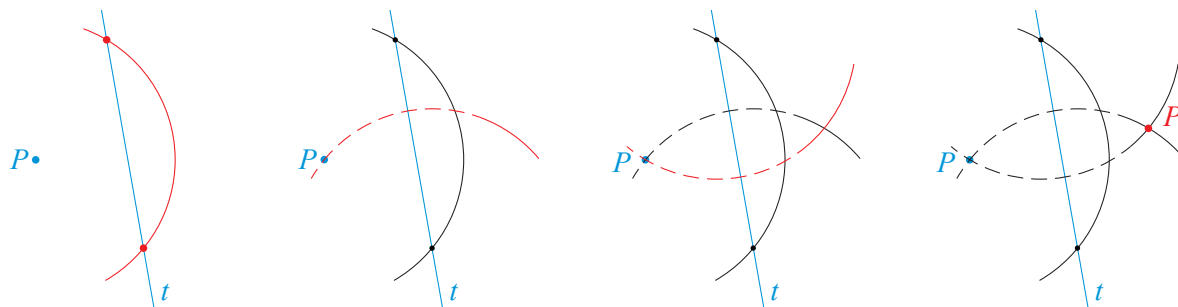
A szerkesztés menete:



2. megoldás

Dolgozhatunk úgy is, hogy csak egyféle körzőnyílást használunk. A szerkesztés menetét az ábra mutatja.

A szerkesztés menete:



1. P körül a tengelyt metsző kört rajzolunk.

2. A t -n keletkezett metszéspontokból változatlan körzőnyílással köríveket rajzolunk.

3. Ezen körök metszéspontjai adják a keresett P' pontot.

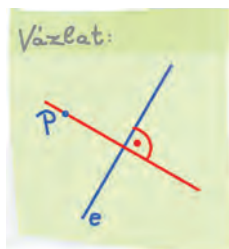
Egyenesre külső ponton át merőleges szerkesztése

3. példa

Szerkesszünk adott egyeneshez adott pontból merőlegest csak körző és egyenes vonalzó segítségével!

Megoldás

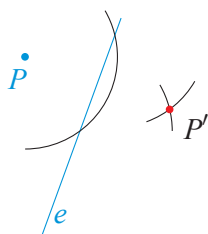
Adatok:



Összefüggés:

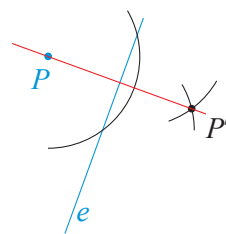
A pontot a tükörképével összekötő egyenes merőleges a tükrötengelyre.

A szerkesztés menete:



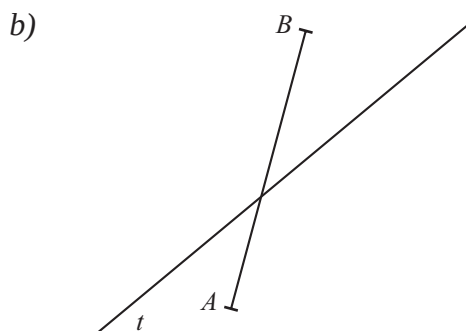
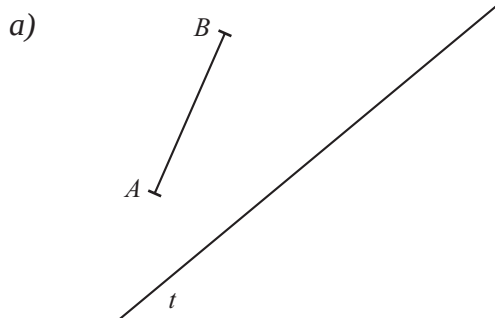
1. Megszerkesztjük a P pont P' tükörképét.

2. Megrajzoljuk a PP' egyenest.

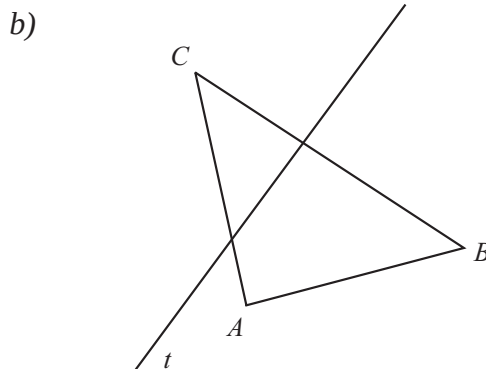
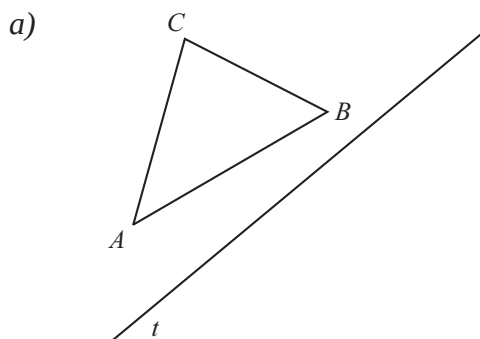


Feladatok

1. Vegyél fel a füzetedben egy tengelyt és egy szakaszt! Szerkeszd meg a szakasz tükörképét!

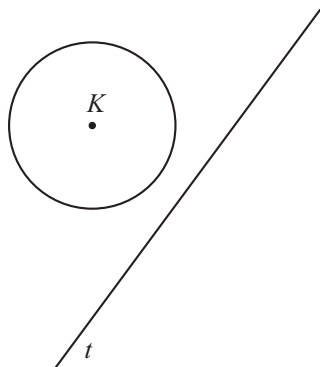


2. Rajzolj egy egyenest és egy háromszöget! Tükröld a háromszöget az egyenesre!

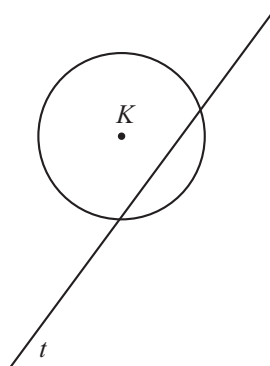


3. Vegyél fel a füzetedben egy egyenest és egy kört! (A körnek jelöld be a középpontját!) Tükrözd a kört az egyenesre!

a)



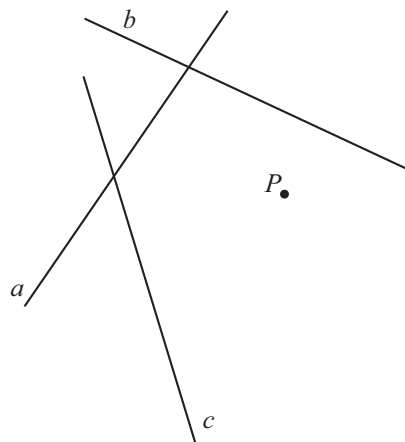
b)



4. Vegyél fel egy egyenest és egy pontot! Szerkessz a pontból az egyenesre merőlegest!

5. Vegyél fel egy e egyenest és egy P pontot! Szerkessz meg azt a szakaszt, amelynek hossza egyenlő a pont és az egyenes távolságával!

6. Vegyél fel az ábrán látható módon három egyenest és egy P pontot! Határozd meg a P pont távolságát mindhárom egyenestől! Szerkessz meg azokat a szakaszokat, amelyeket megmérve megkapod a távolságokat!

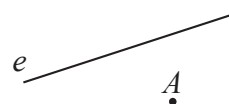


7. Rajzolj téglalapot, amelynek oldalai 3 cm és 5 cm hosszúak!

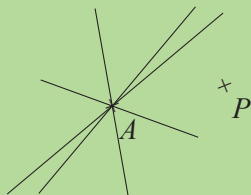
8. Rajzolj 4 cm oldalú négyzetet!

9. Rajzolj téglalapot, amelynek egyik oldala háromszor akkora, mint a másik!

10. Rajzolj négyzetet! Vegyél fel egy egyenest (e), ez legyen a négyzet egyik oldalegyenese! Vegyél fel egy pontot is (A), ez legyen a négyzet egyik csúcsa! Például úgy, ahogy az ábrán látható.

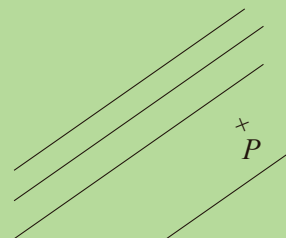


11.



Rajzolj a füzetedbe egy A pontot és rajta átmenő egyeneseket! Vegyél fel egy P pontot, és tükrözd az egyenesekre! Milyen alakzaton helyezkednének el a képpontok, ha a sík A ponton áthaladó összes egyenesére tükröznél?

12. Rajzolj a füzetedbe párhuzamos egyeneseket és egy P pontot! Tükrözd a P pontot az egyenesekre! Milyen alakzaton helyezkednének el a képpontok, ha az összes párhuzamos egyenesre tükröznél?



Szimmetriatengelyek szerkesztése

Szimmetriatulajdonságok alapján meg tudjuk szerkeszteni a szakasz, a körív és a szög szimmetriatengelyét.

Szakaszfelező merőleges szerkesztése

1. példa

Szerkesszük meg az AB szakasz felezőmerőlegesét!

Megoldás

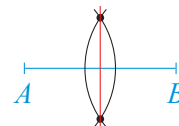
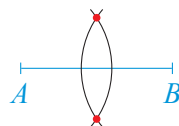
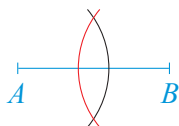
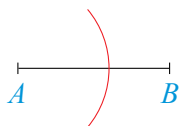
Adatok:



Összefüggések:

A felezőmerőleges a szakasz szimmetriatengelye, tehát minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól.

A szerkesztés menete:

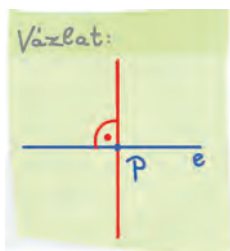


1. Az A pontból a szakasz felénél nagyobb sugarú körívet húzunk.
2. A B pontból az előzővel egyenlő sugarú ívet húzunk.
3. Az ívek metszéspontjai a tükrötengelyre esnek.
4. Meghúzzuk a tengelyt, amely éppen a keresett szakaszfelező merőleges.

Merőleges egyenes szerkesztése egyenes adott pontjában

2. példa

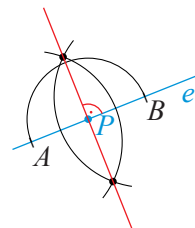
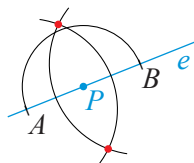
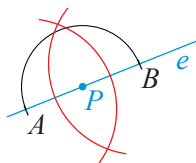
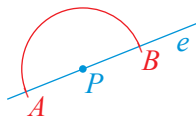
Adatok:



Összefüggések:

Kijelölhetünk A és B pontokat az e egyenesen úgy, hogy a P pont az AB szakasz felezőpontja legyen. A keresett egyenes az AB szakasz felezőmerőlegese, ezt az előző példa alapján szerkeszthetjük meg.

A szerkesztés menete:



Feladatok

1. Színezd a síkot!

Vegyél fel a síkon két pontot, A -t és B -t!

Legyenek **pirosak** azok a pontok, amelyek A -tól és B -től is egyenlő távolságra vannak!

Legyenek **kékek** azok a pontok, amelyek közelebb vannak A -hoz, mint B -hez!

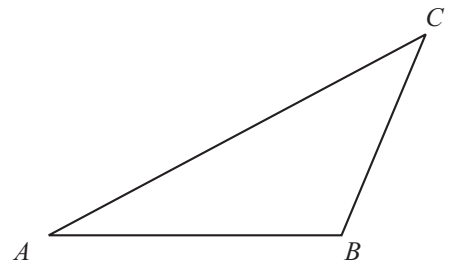
Legyenek **zöldek** azok a pontok, amelyek közelebb vannak B -hez, mint A -hoz!

2. Színezd ki a háromszöget!

a) Színezd pirossal a háromszögben azokat a pontokat, amelyek ugyanolyan messze vannak az A csúcstól, mint a B csúcstól!

b) Színezd zölddel a háromszögben azokat a pontokat, amelyek közelebb vannak az A csúcshoz, mint a B csúcshoz!

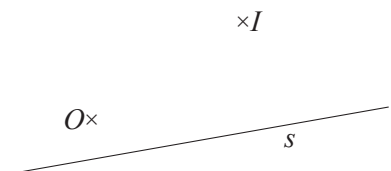
c) Színezd kékkel a háromszögben azokat a pontokat, amelyek közelebb vannak a B csúcshoz, mint az A csúcshoz!



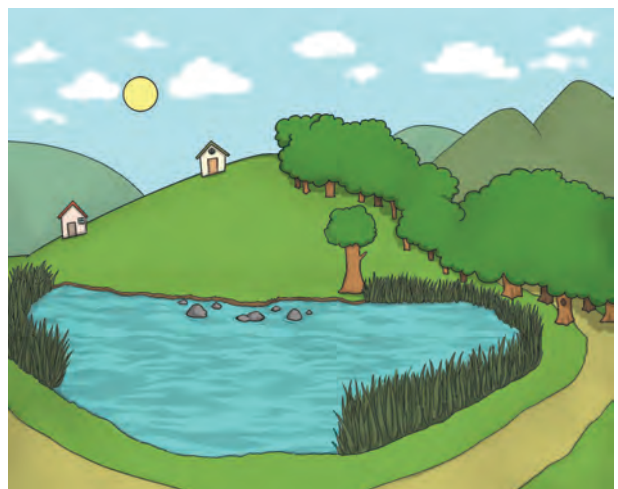
3. Ezen a térképvázlaton s jelenti a falu főutcáját, I pont az iskola, O pedig az óvoda helyét.

Matyi a főutcában lakik, éppen egyenlő távolságra az óvodától és az iskolától.

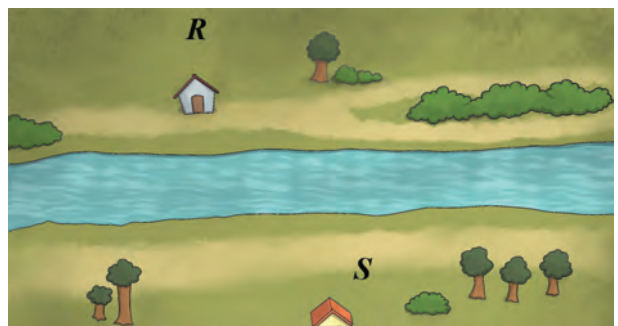
Rajzolj hasonló térképvázlatot a füzetedbe, és szerkeszd meg rajta Matyiék házának helyét!



4. Dani és Pál mindketten szeretnek horgászni. Nyaralóik a tóhoz közeli domboldalon állnak. Elhatározták, hogy közösen építenek horgászstéget a tóparton. Tervezd meg a stég helyét úgy, hogy mindkét barát nyaralójától azonos távolságra álljon! Készíts vázlatot! A házak helyét egy-egy ponttal jelöld!



5. Rozi és Sári unokatestvérek. Otthonukat a rajzon láthatod. Nagymamájuk mindkét kislánytól ugyanolyan messzire lakik a folyó partján. Készíts vázlatot! A házak helyét pontokkal jelöld! Szerkeszd meg, hol lehet a nagyi háza!



6. A gyerekek golyót gurítanak célba. Az A, B és C pontokban térdelnek. A gödröcske, amelybe bele kell gurítani a golyókat, mindegyik gyerektől egyforma messze van. Készíts a feladat szövegének megfelelő rajzot, amelyen a gyerekek helyét egy-egy ponttal jelölöd!

Szerkeszd meg a gödör helyét!



Nézz utána, hol áll, és mit ábrázol Szanyi Péter *Einstand* című szobra!



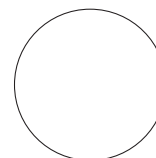
7. Rajzolj a füzetedbe egy háromszöget! Szerkeszd meg mindhárom oldalának a felezőmerőlegesét! Mit tapasztalsz?



8. Adott egy kör és egy szakasz.

Szerkessz olyan pontot, amely a szakasz mindkét végpontjától egyenlő távolságra van, és rajta van a körön!

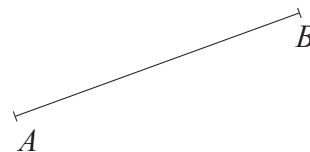
Ha máshová rajzolnánk meg a kört, biztosan találnánk ilyen tulajdonságú pontot?



9. Ismerd meg hazádat! Fektesz a munkafüzet 1. mellékletében lévő Magyarország-térképre egy átlátszó papírt! Jelöld be rajta Szeged és Veszprém helyét!

Szerkeszd meg az átlátszó papíron a két pont által alkotott szakasz felezőmerőlegesét!

Ennek segítségével keress olyan településeket, amelyek Szegedtől és Veszprémtől egyenlő távolságra vannak!



Jártál-e már ezekben a városokban? Tudsz-e valamit róluk? Ha nem, akkor kutass fel mindegyik városról legalább egy nevezetességet!



10. A képeken egy város valamelyik nevezetes épülete látható. A város nevét kell kitalálnod.



Azt tudjuk róla, hogy a távolsága légvonalban Szekszárdtól ugyanannyi, mint Székesfehérvártól, valamint Szegedtől és Budapesttől való távolsága is egyenlő (légvonalban).

Másolópapíron dolgozz a munkafüzet 1. mellékletében található Magyarország-térképen!



Melyik híres magyar manufaktúrában készültek az épület majolikadíszei? Mit jelent a majolika szó?

11. Szerkessz a térképen! A munkafüzet 1. mellékletében található Magyarország-térkép segítségével készíts magad is a 9–10. feladathoz hasonló rejtvényeket! Legyen a zöld mondat a szöveg, ahova neked kell megfelelő **városokat**, illetve **számot** találnod, és ha sikerült, akkor feladhatod osztálytársaidnak.

Gondoltam egy városra. Elárulom, hogy és városoktól egyenlő távolságra van, és várostól éppen km távol fekszik. Melyik városra gondoltam?



12. Rajzolj egy négyzetet! Vegyél fel a belsejében egy P pontot!

Színezd a négyzetlapnak azokat a pontjait, amelyek közelebb vannak a P ponthoz, mint a négyzet bármelyik csúcsához!

Nevezzük ezeket a P pont rokonainak!

a) Milyen alakzatot alkotnak a P pont rokonai?

b) Oldd meg a feladatot úgy is, hogy egy háromszögben veszed fel a P pontot, és a háromszöglapon keresed a P pont rokonait!

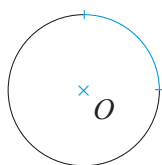
Körívet felező sugár szerkesztése

1. példa

Szerkesszük meg az O középpontú körön adott ív felezősugarának egyenesét!

Megoldás

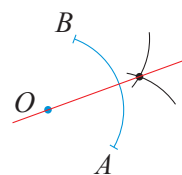
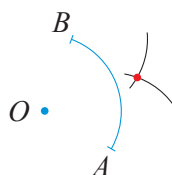
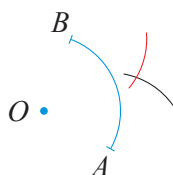
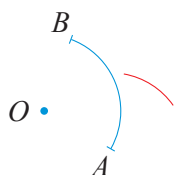
Adatok:



Összefüggések:

A körívet felező sugár egyenese a körív szimmetria-tengelye, tehát minden pontja egyenlő távolságra van a körív végpontjaitól.

A szerkesztés menete:



1. A középpontú kör-ívet húzunk.

2. Ugyanezzel a kör-ízzel a B középpontú ívet húzunk.

3. Az ívek metszéspontja rajta van a keresett sugár egyenesén.

4. Meghúzzuk az ívet felező egyenest.

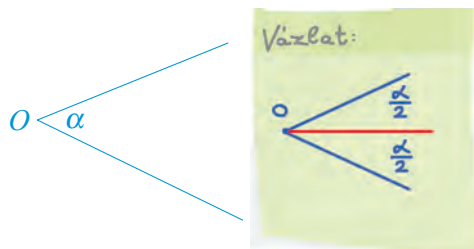
Szögfelező szerkesztése

2. példa

Szerkesszük meg az O csúcsú α szög szögfelezőjét!

Megoldás

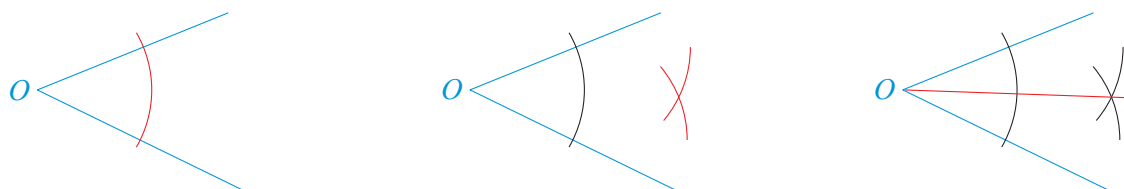
Adatok:



Összefüggések:

A szögfelező felezi a szög szárai közé rajzolt körívet is. Tehát ha először a szög csúcsa körül tetszőleges sugárral kört rajzolunk, majd a szárak által kivágott ívet megfelezzük, akkor éppen a szögfelezőt kapjuk.

A szerkesztés menete pontosan megegyezik az **1. példában** látott szerkesztéssel.



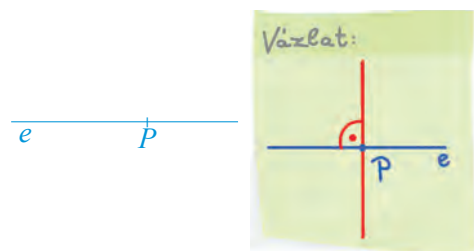
Merőleges egyenes szerkesztése egyenes adott pontjában másképp

3. példa

Állítsunk merőleget az e egyenesre egy adott P pontjában!

Megoldás

Adatok:



Összefüggések:

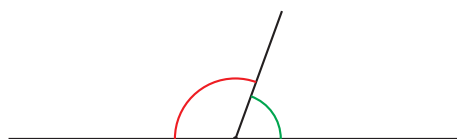
A merőleges egyenes felezi a P pontnál levő egyenesszöget, ezért elég ennek a szögnek a szögfelezőjét megszerkesztenünk.

A szerkesztés menete:



Feladatok

- Rajzolj a füzetedbe tetszőleges sugárral egy kört! A középpontját nevezd O -nak! Vegyél fel rajta két pontot, A -t és B -t! Rajzold be az AB húrt! Szerkeszd meg az
 - AB ív felezőpontját;
 - AB szakasz felezőmerőlegesét;
 - AOB szög szögfelezőjét! Hány szerkesztést kellett elvégezned?
- Rajzolj a füzetedbe szögmérő segítségével egy 58° -os, egy 150° -os és egy 210° -os szöget! Mindegyiknek szerkeszd meg a szögfelezőjét! Szögmérővel ellenőrizd szerkesztésed pontosságát!
- Vegyél fel a füzetedben egy 10 cm hosszúságú szakaszt! Szerkessz olyan pontokat, amelyek a szakaszt négy egyenlő részre osztják! Méréssel ellenőrizd, milyen pontossággal dolgoztál!
- Vegyél fel egy egyenest! Jelölj ki rajta egy pontot! Állíts merőlegest az egyenesre ebben a pontban! Szerkeszd meg a kapott derékszög negyedrészt!
- Vegyél fel a füzetedben egy hegyesszöget! Szerkeszd meg a szögfelezőjét! Vegyél fel a szögtartományban egy olyan P pontot, amely a szögfelezőn van, és egy olyan Q pontot, amely nincs a szögfelezőn! Szerkeszd meg P és Q távolságát mindkét szögszártól! Melyik szárhoz van közelebb P , és melyik szárhoz van közelebb Q ?
- Rajzolj a füzetedbe ilyen ábrákat! Szerkeszd meg a megjelölt szögek szögfelezőit! Mérd meg, mekkora szöget zárnak be egymással ezek a szögfelezők! Próbáld meg megindokolni az észrevételedet!



- Színezd a szögtartományt! Rajzolj egy hegyesszöget! A szárait jelöld a -val, illetve b -vel! Legyenek **pirosak** azok a pontok, amelyek mindkét szártól egyenlő távolságra vannak! Legyenek **kékek** azok a pontok, amelyek az a szárhoz vannak közelebb! Legyenek **zöldek** azok a pontok, amelyek a b szárhoz vannak közelebb!

- Hol a kincs? A kincsről annyit tudunk, hogy egyforma messze van az omladozó kőfaltól és a folyótól, továbbá hogy egyenlő távolságra van a két öreg fenyőtől is. Rajzolj térképvázlatot a füzetedbe, és szerkeszd meg a kincs helyét!



9. Rajzolj a füzetedbe egy háromszöget! Szerkeszd meg mindhárom szögének a szögfelezőjét! Mit tapasztalsz?

10. Vegyél fel egy egyenest és két pontot, az egyik pont legyen az egyenesen, a másik pedig az egyenesen kívül! Szerkessz téglalapot, melynek az adott pontok csúcsai, az adott egyenes pedig a téglalap egyik oldalegyenese!

11. Rajzolj egy egyenest!

- Szerkessz olyan pontokat, amelyek 2 cm távolságra vannak az egyenestől! Hol helyezkednek el ezek a pontok? Legyenek ezek a pontok pirosak!
- Színezd a lapodon kékkel azokat a pontokat, amelyek az egyenestől több mint 2 cm-re vannak!
- Színezd zölddel azokat a pontokat, amelyek távolsága az egyenestől kevesebb mint 2 cm!

12. a) Rajzolj egy négyzetet! Az oldalait jelöld a, b, c, d betűkkel!

Hol vannak a négyzetben azok a pontok, amelyek közelebb vannak az a oldalhoz, mint a négyzet bármelyik másik oldalához?

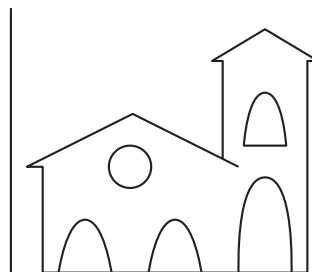
b) Rajzolj egy háromszöget! Az oldalait jelöld a, b, c betűkkel!

Hol vannak a háromszögben azok a pontok, amelyek közelebb vannak az a oldalhoz, mint a háromszög bármelyik másik oldalához?

13. Igaz-e, hogy két metsző egyenes szögeinek szögfelezői merőlegesek egymásra? Válaszodat indokold!

Tudáspróba

1. Készítsd el a tükörképét másolópapír segítségével!



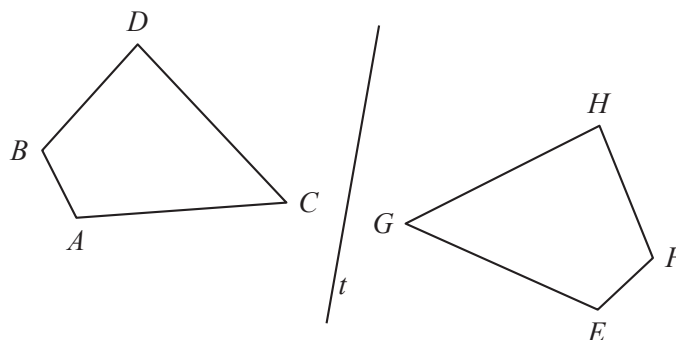
2. Mi a képe a következő részleteknek?

AC szakasz

BAC szög

EF szakasz

FGH szög



3. Egy négyszög csúcsainak koordinátái: $A(-2;5)$, $B(-6;-1)$, $C(0;6)$, $D(1;2)$.

Ábrázold a négyszöget!

a) Tükrözd a négyszöget az y tengelyre!

b) Tükrözd a négyszöget az AD átlójára, és ábrázold a tükörképet pirossal!

4. Hány szimmetriatengelye van

a) egy félkörnek,

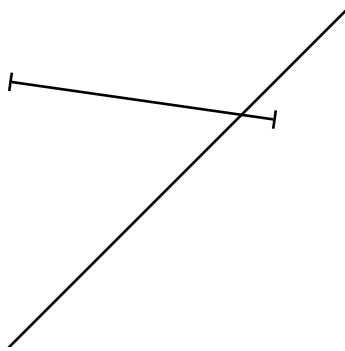
b) egy szakasznak,

c) egy körívnek,

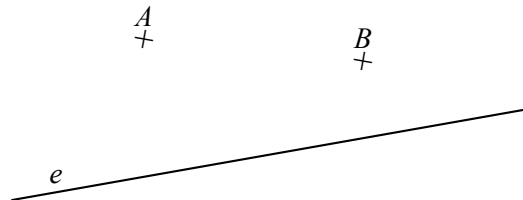
d) egy téglalapnak,

e) egy körnek?

5. Rajzolj egy egyenest és egy szakaszt! Tükrözd a szakaszt az egyenesre!



6. Szerkeszd meg az egyenesnek azt a pontját, amelyik az A és a B ponttól egyenlő távolságra van!



7. Rajzolj egy hegyesszöget! Jelöld a szárait e , illetve f betűkkel!

a) Keresd meg a szögtartományban azokat a pontokat, amelyek mindkét szögszártól egyenlő távolságra vannak!

b) Rajzolj be az ábrádon öt olyan pontot, amelyek közelebb vannak az e szögszárhoz, mint az f szárhoz!

8. Tükrözd a téglalapot az egyik átlójára!



Számelmélet

Ritmusok, periódusok

Az élet szinte minden területén találkozunk olyan jelenségekkel, eseményekkel, motívumokkal, amelyek szabályosan ismétlődnek. Néhány példát mutatunk, ti is keressetek hasonlókat!

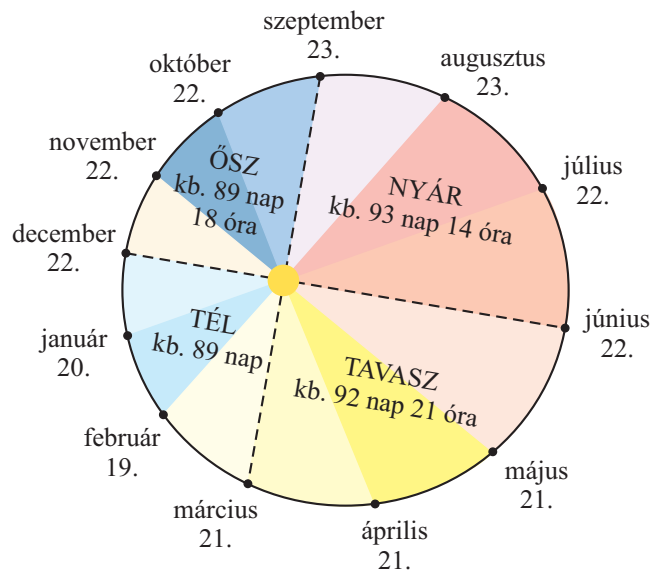
Naptári rendszerek

A **naptári** rendszerek, a népek ünnepeinek egy része a Nap, illetve a Hold szabályos mozgásához igazodnak. Az egyiptomiak a Nap járását, a mohamedánok a Hold járását vették alapul naptárjuk elkészítésekor.

„Jupiter ekkor az ősi tavaszt rövidebbre szorítván tél, lobogó-hevű nyár, s hol langyos, hol hideg ősz jött, s kurta tavasz: velük így négy részre tagolta az évet.”

(Ovidius: *Átváltozások*)

Az évnek ez a négyes tagolása ment át a mai nyelvhasználatba. Egyiptomban azonban csak három évszakot használtak, a kelták csak kettőt: a világos, fényes, meleg nyári és a sötét, hideg téli fél évet.



Életjelenségek

Az emberi szív működése is szabályos, egy felnőtt ember szíve percenként átlagosan 70-szer húzódik össze, a szívbillentyűk ennyiszer zárnak és nyílnak. A diagram egy egészséges szív működéséről készült.



Művészetek

Az emberek gyakran díszítik alkotásaikat szabályosan ismétlődő, szemet gyönyörködtető mintákkal.



A Mátyás-templom cserépfedése



Hollókői népviselet

Példa



Szabályosan ismétlődő mozgásokat vizsgálunk. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

a) Egy lány sétál a Balaton partján. Milyen lesz az 57. lábnyoma a homokban, ha az első két lépésének nyoma látszik a képen? Melyik a helyes válasz?

A)



B)



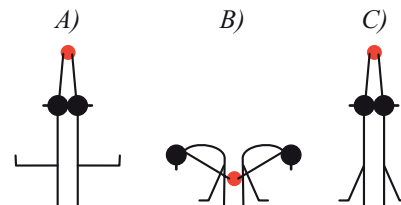
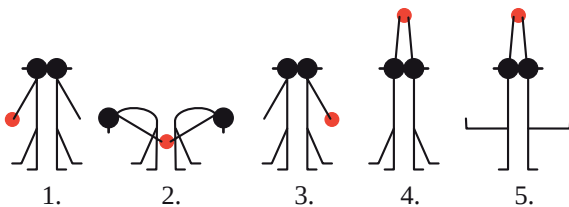
b) A fényképen látható táncospárok egyszerű táncot járnak. Kettőt lépnek jobbra, kettőt balra ..., és ezt ismételtetik, amíg el nem hallgat a zene. Milyen lesz a 33. lépésük, ha jobbra léptek először? Melyik a helyes válasz?

A) jobbra lépnek

B) balra lépnek



c) Testnevelésórán egy páros nyújtógyakorlat öt ütemét kell ismételtetniük a 6. osztályos gyerekeknek. Milyen lesz a 22. ütem? Adjuk meg a betűjelét!



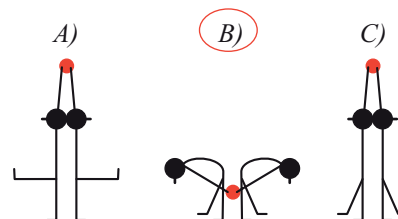
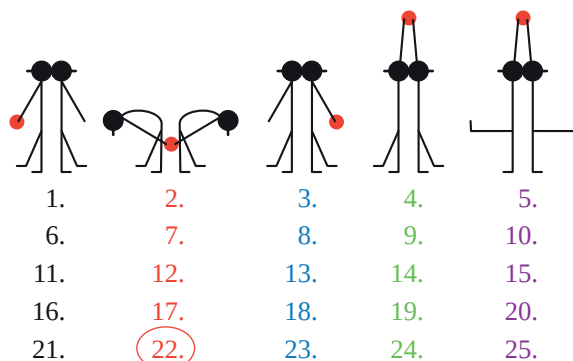
Megoldás

a) A helyes válasz: B). **Jobb**láb lesz az 57. lábnyom.

Minden **páratlan** lépést **jobb** lábbal, minden **páros** lépést **bal** lábbal tesz meg a sétáló lány.

b) A helyes válasz: A). Négyesével ismétlődnek a tánc lépései, ezért a 32. lépésben balra lépnek, a 33.-ban pedig **jobbra**.

c) A helyes válasz: B).



Ötösével ismétlődnek a gyakorlat ütemei.

Az **1.** ütemmel megegyeznek a **6., 11., 16., 21., ...** ütemek. Ezek a számok **5-tel osztva 1-et adnak maradékul**. Röviden: az ötös maradékuk 1.

A **2.** ütemmel megegyeznek a **7., 12., 17., 22., ...** sorszámúak. Ezek a számok **5-tel osztva 2-t adnak maradékul**. Röviden: az ötös maradékuk 2.

A **3.** ütemmel megegyeznek a **8., 13., 18., 23., ...** sorszámúak. Ezek a számok **5-tel osztva 3-at adnak maradékul**. Röviden: az ötös maradékuk 3.

A **4.** ütemmel megegyeznek a **9., 14., 19., 24., ...** sorszámúak. Ezek a számok **5-tel osztva 4-et adnak maradékul**. Röviden: az ötös maradékuk 4.

Az **5.** ütemmel megegyeznek a **10., 15., 20., 25., ...** sorszámúak. Csupa **5-tel osztható szám**. Ezek a számok **5-tel osztva 0-t adnak maradékul**. Röviden: az ötös maradékuk 0.



22 lufit nem tudunk 5 gyerek között egyenlően szétosztani. Minden gyereknek tudunk adni 4-et, és még 2 megmarad. A 22 öttel osztva 2-t ad maradékul, mert

$$22 = 5 \cdot 4 + 2.$$

A 22 nem többszöröse az 5-nek, az 5 pedig nem osztója a 22-nek.

Más a helyzet, ha 20 lufit akarunk igazságosan szétosztani 5 gyerek között. Minden gyerek kap 4 lufit, és nem marad egy sem, mert

$$20 = 5 \cdot 4.$$

A 20 többszöröse az 5-nek, az 5 pedig osztója a 20-nak.

20 lufit 1, 2, 4, 5, 10 vagy 20 gyerek között tudunk igazságosan szétosztani. Ezeket a számokat a 20 osztóinak nevezzük, a 20-at pedig e számok **többszörösének**.

A $20 = 2 \cdot 5 \cdot 8$, de a 2,5-et mégsem nevezzük a 20 osztójának, mert nem egész szám.

A -20 és a $+20$ osztói ugyanazok a számok: $-20, -10, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10, 20$.

Ezt úgy is mondjuk, hogy a 20 és a -20 osztható ezekkel a számokkal.

Mi csak a pozitív egész számok körében vizsgáljuk az oszthatóságot, ezért csak a $+20$ -ról és annak is csak a pozitív osztóiról beszélünk.

Minden pozitív egész szám osztható 1-gyel és önmagával. A nullának minden pozitív egész szám osztója, mert minden pozitív egész szám megvan benne maradék nélkül. A nulla minden számnak többszöröse (nullaszorosa).

Feladatok

1. Zsuzsának és Anikónak is Samu tetszik, aki minderről persze semmit sem tud. A lányok egy-egy akácfalevelet „fagatnak” szívük választottjának érzelmei felől. Miközben a levélkéket tépegetik, ezt a mondókát mondják:

„Szeret, nem szeret, szívből, színből, igazán, szeret, nem szeret...”

Anikó akácfalevelén 21 levélke van, Zsuzsién 17. Kit „szeret” Samu?



2. A szív működéséhez szokták hasonlítani a motorok működését. A járművek, munkagépek két-ütemű vagy négyütemű motorokkal működnek. A **kétütemű** motorok mindössze két ütem alatt nyernek az üzemanyagból energiát: az **első** ütemben történik az üzemanyag **szívása** és **sűrítése**, a **második** ütemben történik a **robbanás** és a **kipufogás**. A **négyütemű** motor négy ütemben hajtja végre ezt a ciklust: **szívás** – **sűrítés** – **robbanás** – **kipufogás**.

a) Mi lesz egy kétütemű motorral működő motorkerékpár, és mi lesz egy négyütemű motorral működő sportkocsi motorjának 33. és 100. üteme?



b) **Csoportmunka**

Mit gondoltok, melyik környezetszennyezőbb, a kétütemű motor vagy a négyütemű? Milyen új típusú motorokkal igyekszik az emberiség a környezetszennyezést csökkenteni?



Nézz utána, milyen találmányával írta be nevét Bánki Donát és Csonka János magyar gépészmérnök az autógyártás történetébe!

3. A szökőév 366 napos év, amelyben egy nap hozzáadódik a február hónaphoz. Bármely év, amelynek évszáma osztható 4-gyel, szökőév. A két nullára végződők közül csak azokat az éveket tekintjük szökőéveknek, amelyek oszthatók 400-zal.

a) Szökőév volt-e 1222, 1514, 1848, 2000, 2012, 2020?

b) Milyen nevezetes esemény fűződik ezekhez az évszámokhoz? Melyik évszám a „kakukktojás”?

A) a magyar forradalom és szabadságharc B) az egyik londoni olimpia

C) a Dózsa György-féle parasztfelkelés D) az Aranybulla kiadása

E) a tokiói olimpia, amely elmaradt a koronavírus-járvány miatt



Keress még olyan nevezetes évszámokat, amelyek szökőévek voltak!

4. A **vetésforgó** olyan földművelési rendszer, amelynek lényege, hogy egyazon területen évente és periodikusan váltogatják a termesztett növényfajokat. Ennek módja országonként és tájanként változik. Ma is sok gazda használja ezt a 18. század óta ismert vetésforgót:

kapásnövények	árpa	lóhere	búza
---------------	------	--------	------

Egy gazda 2011-ben ezt a vetésforgót alkalmazta a négy részre osztott szántóföldjén. Az első évben földje első negyedébe kapásnövényeket ültetett. A következő évben a vetésforgó szerint így veteményezett:

árpa	lóhere	búza	kapásnövények
------	--------	------	---------------

Mit ültetett, illetve mit fog ültetni a 3., 5., 10., 20. évben földje első negyedébe, ha továbbra is ezt a vetésforgót használja?

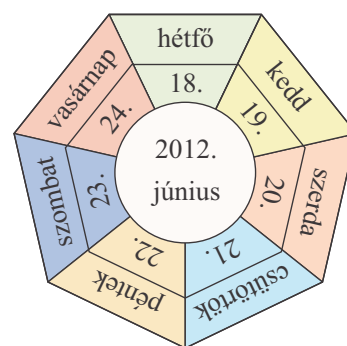


Gróf Széchenyi István szobra a Magyar Tudományos Akadémia előtt áll. Ő volt az a haladó szellemű nagybirtokos, aki elsőként szorgalmazta a vetésforgó alkalmazását az ország növénytermesztésében. Saját birtokain sikerrel valósította meg elképzeléseit.

Az egyik budapesti híd építését is ő kezdeményezte, és annak megvalósulásához a legnagyobb adományt is ő adta. Melyik ez a híd?

5. Határozd meg, hogy a hét milyen napjára estek 2012-ben a következő nevezetes napok!

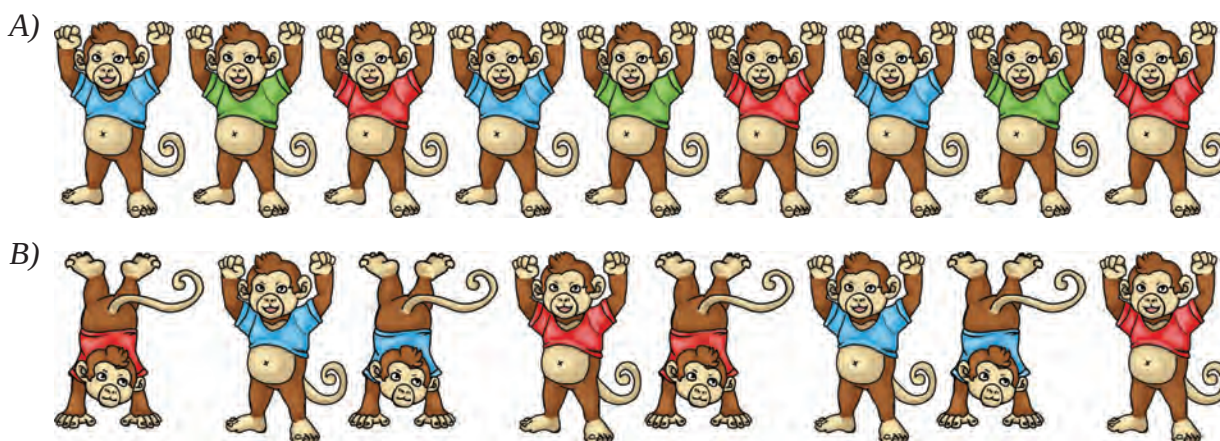
- június 23. (1868-ban ezen a napon nyújtotta be az általános tankötelezettségről szóló törvényjavaslatát Eötvös József valóság- és közoktatásügyi miniszter.)
- június 15. (Ezen a napon határozták el 1876-ban, hogy hazánk áttér a méterrendszerre.)
- június 1. (nemzetközi gyermeknap)
- április 1. („bolondok napja”)
- egy márciusi születésű osztálytársad születésnapja
- A hét melyik napjára esnek idén a feladatban szereplő dátumok?



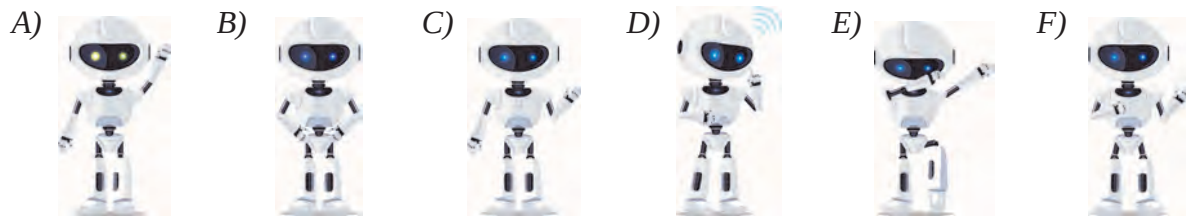
Hány éves kortól hány éves korig kötelezte az 1868-as törvény a szülőket gyermekeik elemi iskolába való járatására?

6. Az egyes sorokban a majmok állását és a mezük színét változtattuk valamilyen szabály szerint.

- Mi lehet a szabály?
- Milyen lesz a 12., a 20., a 35. és a 100. majom az egyes sorokban?



7. A 2010-es évek végén már megvásárolhatóak voltak olyan robotok, amelyeket többek között mozgássérült gyerekek tornáztatására is alkalmaznak. A robot programozható, így a gyógytornász által összeállított, a fejlesztés céljának megfelelő gyakorlatot tanítja meg a gyerekeknek. A képen látható gyakorlat hat elemből áll. Ezt a mozgássort ismételteti a robot.



- a) Milyen jelű mozgást végez a robot a 13., a 33. és a 66. ütemben?
 b) Milyen lehet azoknak az ütemeknek a sorszáma, amelyekben a robot a D) jelű mozgást végzi?
 c) 6-tal osztva milyen számot ad maradékul azoknak az ütemeknek a sorszáma, amelyek E) jelűek?

8.



Ezt a forgót a szél az óramutató járásával megegyező irányban 450 fokkal elforgatta. Melyik ábra mutatja helyesen a forgó elforgatás utáni képét?



9. Ha ma délelőtt esett a hó Sopronban, 84 órával később lehet-e napos idő?

Példa

Három testvér, Győző, Lajos és Zoli a karácsonyra kapott ajándékokat szeretnék szétosztani maguk között úgy, hogy mindenki ugyanannyi darabot kapjon. Sikerülhet-e?

- a) A nagybácsitól ólomkatonákat kaptak.



24 gyalogost



15 trombitást



12 lovast

- b) A nagypapa a bélyeggyűjteményének legszebb darabjaival lepte meg a gyerekeket.



22 cicással



17 halassal



18 madarassal

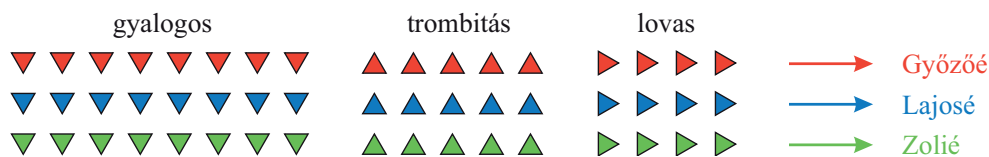
A számok maradékaival számolunk

- c) A nagymama ajándéka 37 ínycsiklandozó mézeskalács volt. A gyerekek 4-et a nagyapának adtak, 6-ot a karácsonyfára akasztottak. Szét tudták-e osztani a maradékot hármójuk között úgy, hogy mindenkinek ugyanannyi darab jutott?



Megoldás

- a) Az ólomkatonákat igazságosan el tudják osztani. A gyalogosokból 8, a trombitásokból 5, a lovasokból pedig 4 jut minden gyereknek.



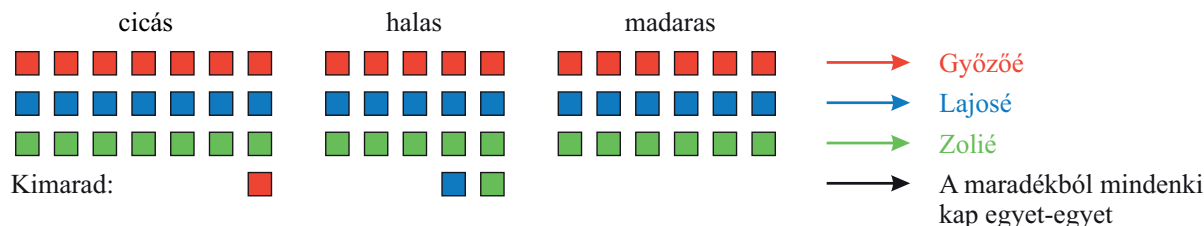
Ugyanerre az eredményre jutunk, ha az 51 katonát 3 sorba felsorakoztatjuk, és minden gyerek kap egy sort, azaz 17 katonát.

Ha egy összeg minden tagja osztható egy számmal, akkor az összeg is osztható azzal.

$24 + 15 + 12 = 51$. Az összeg 3-mal való osztási maradéka 0.

$0 + 0 + 0 = 0$. A tagok 3-mal való osztási maradéka is 0.

- b) A bélyegeket is el tudják harmadolni úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapjon.



Ugyanerre az eredményre jutunk, ha az 57 bélyeget három egyenlő részre osztjuk: minden gyereknek 19 bélyeg jut.

Az összeg osztási maradéka úgy is lehet 0, hogy a tagok maradéka külön-külön nem az, de a maradékok összege osztható a számmal.

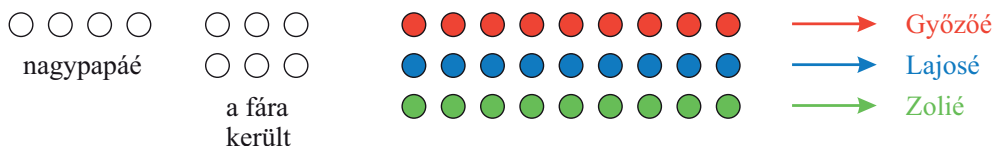
$22 + 17 + 18 = 57$. Az összeg 3-mal való osztási maradéka 0.

$1 + 2 + 0 = 3$. A maradékok összegének 3-mal való osztási maradéka 0.

Az ólomkatonák és a bélyegek szétosztásakor egy-egy összegről kellett eldönteni, hogy osztható-e 3-mal. Ezt az összeadás elvégzése nélkül is meg tudtuk állapítani.

Az összeg maradéka megállapítható a tagok maradékának összegéből.

- c) A mézeskalácsokat is el tudják igazságosan osztani.



Ugyanerre az eredményre jutunk, ha 37-ből elveszünk összesen 10 mézeskalácsot, és a maradék 27 darabot harmadoljuk: minden gyereknek 9 jut.

A mézeskalácsok szétosztásakor egy különbség maradékára voltunk kíváncsiak.

A különbség maradéka is megállapítható a tagok maradékának különbségéből.

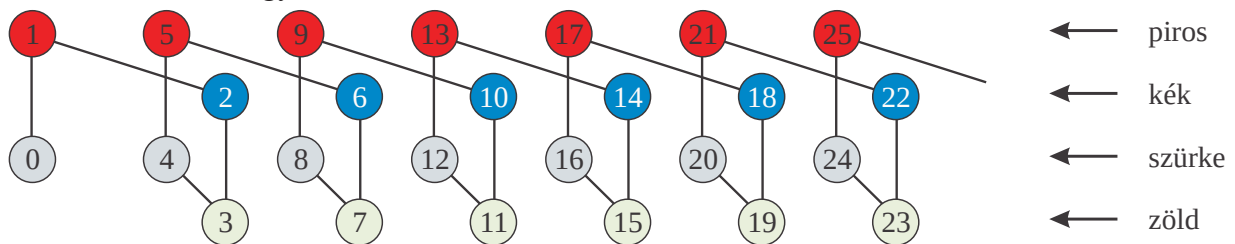
$37 - 10 = 27$. A különbség 3-mal való osztási maradéka 0.

$1 - 1 = 0$. A tagok 3-mal való osztási maradékának különbsége is 0.

Ha egy különbségben a kisebbítendő és a kivonandó ugyanakkora maradékot ad egy bizonyos számmal osztva, akkor a különbségük osztható lesz ezzel a számmal.

Feladatok

1. Feltekertük a számegyenesest.



a) Milyen tulajdonságúak a szürke, a piros, a kék és a zöld számok?

b) Milyen színűek lennének ezek a számok?

50, 60, 100, 120, 130, 222, 555, 666, 777, 999, 1010

c) Milyen színűek lennének ezek az összegek, illetve különbségek? A műveletek elvégzése nélkül próbáld megválaszolni!

$50 + 60$, $100 + 120 + 777$, $1010 + 555$, $999 - 777$, $999 - 666 - 100$

2. Három számkártyánk van, de egyet lefordítottunk. Milyen egyjegyű szám lehet az egyes esetekben ezen a kártyán, ha igazak az állítások?

a) A számok közül ki lehet választani kettőt úgy, hogy azok összege osztható legyen 4-gyel.

1001



8008

b) A három szám összege osztható 4-gyel.

c) Bármely kettő szorzata osztható 4-gyel.

d) A számok közül ki lehet választani kettőt úgy, hogy azok különbsége osztható 4-gyel.

3. Három szám közül kettő osztható 3-mal, egy pedig nem. Melyik igaz és melyik hamis a következő állítások közül?

a) Lehet, hogy a három szám összege osztható 3-mal.

b) Biztos, hogy a három szám összege osztható 3-mal.

c) Lehet, hogy a három szám összege nem osztható 3-mal.

d) Biztos, hogy a három szám összege nem osztható 3-mal.

4. Három szám egyike sem osztható 3-mal. Döntsd el, hogy igazak-e a következő állítások!

a) Lehet, hogy a három szám összege osztható 3-mal.

b) Biztos, hogy a három szám összege osztható 3-mal.

c) Lehet, hogy a három szám összege nem osztható 3-mal.

d) Biztos, hogy a három szám összege nem osztható 3-mal.

5. a) A Sástón táborozó gyerekek, egy 32 fős, egy 24 fős és egy 16 fős csoport, csónakázni mentek. El lehet-e osztani őket négy személyes csónakokba úgy, hogy minden csónak tele legyen?

b) Az ebédlőben 6 fős asztalokhoz ültették le ugyanezeket a gyerekeket. Csak akkor lehetett új asztalhoz leülni, ha az előző asztalnál már minden széket elfoglaltak. Hány gyerek ült az utolsó, még nem üres asztalnál?



6.



Róza asszonyék a húsvéti vásárra hímes tojásokat készítettek. Hétfőn 100, kedden 93, szerdán 185 db tojást festettek. Marad-e ki hímes tojás, ha azokat kilencesével kis kosarakba rakják?

7. Négy szám összege osztható 4-gyel. Lehet-e, hogy közülük

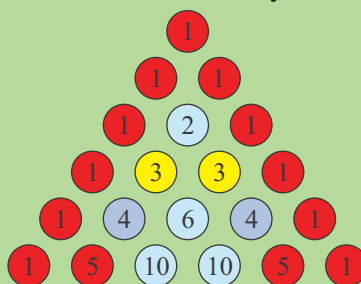
- a) egyik sem osztható 4-gyel,
- b) egyik osztható 4-gyel, a másik három nem,
- c) kettő osztható 4-gyel, kettő nem,
- d) három osztható 4-gyel, egy nem?

8. Tóth úr, a zöldséges, öt láda almából 3 kg-os csomagokat akar készíteni. Sikerülhet-e neki, ha a ládákban egyenként 15 kg, 9 kg, 12 kg, 8 kg és 18 kg alma van?

9. Tekintsük a természetes számokat 20-tól 30-ig! Páros vagy páratlan az összegük? Szét lehet-e osztani két csoportra ezeket a számokat úgy, hogy az egyes csoportokban lévő számok összege egyenlő legyen?

10. a) Keresz szabályt, és folytasd! b) A számokat színeztük. Mi lehet a színezés szabálya?

		1			
	1		1		
	1	2	1		
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1



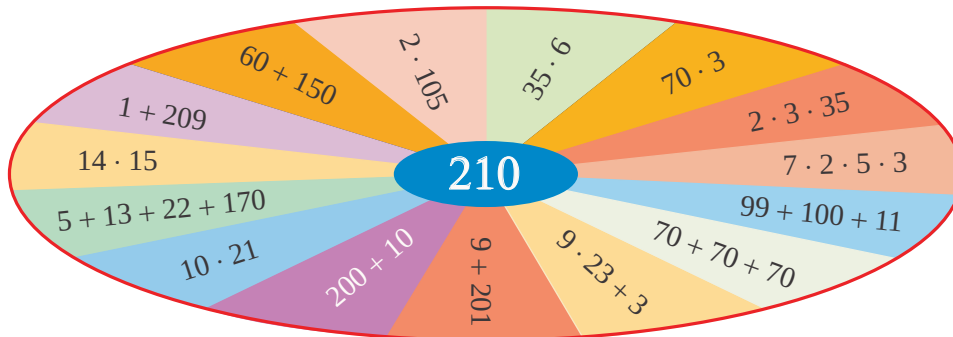
Blaise Pascal (ejtsd: blez paszkál; 1623–1662)

Az ábrákon a Pascal-háromszög első hat sorát láthatod. Ki volt Pascal?

Keressünk osztókat!

Példa

a) A **210**-et sokféle alakban felírtuk. Ezeknek a segítségével keressük a 210 osztóit!



b) Melyik alakból tudjuk a legtöbb osztót leolvasni?

Megoldás

a) Az osztókat legkönnyebben a szorzat alakból ismerhetjük fel.

A **10 · 21** alakból leolvasható, hogy a **210** osztható 10-zel és 21-gyel,

a **2 · 105** alakból látható, hogy a **210** osztható 2-vel és 105-tel.

Az összeg általában nem osztható a tagjaival.

Például a **9 + 201** nem osztható sem 9-cel, sem 201-gyel.



Ha az összeget szorzat alakban fel tudjuk írni, akkor azt mondjuk, hogy a közös tényezőt **kiemeljük** az összeg tagjaiból.

Például: $9 + 201 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 67 = 3 \cdot (3 + 67) = 3 \cdot 70$.

Ugyanazt az összeget többféleképpen is fel tudjuk írni szorzat alakban.

Nézzük a **70 + 70 + 70** összeget!

$$7 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10 = 7 \cdot (10 + 10 + 10) = 7 \cdot 30 = 7 \cdot 3 \cdot 10 = 10 \cdot (7 + 7 + 7) = 10 \cdot 21$$

$$5 \cdot 14 + 5 \cdot 14 + 5 \cdot 14 = 5 \cdot (14 + 14 + 14) = 5 \cdot 42 = 5 \cdot 3 \cdot 14 = 14 \cdot (5 + 5 + 5) = 14 \cdot 15$$

A szorzat alakból mindig tudunk osztókat leolvasni, de nem mindegyik összeget tudjuk egyszerűen szorzattá alakítani.

Például a **99 + 100 + 11** összeg tagjaiban nem találunk közös tényezőt.

b) Abból az alakból tudjuk a legtöbb osztót leolvasni, amelyikben a legtöbb tényező szerepel.

Ha a szorzat tényezőit tovább tudjuk bontani, újabb osztókat olvashatunk le.

$$\text{A } \mathbf{210} = \mathbf{70 \cdot 3} = 7 \cdot 10 \cdot 3 = \mathbf{7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3}.$$

A 210-nek osztója a 70, mert a 210 éppen a 3-szorosa.

A 210-nek osztója a 7, mert a 210 éppen $(2 \cdot 3 \cdot 5)$ -szöröse.

Hasonlóan a $(7 \cdot 5)$ osztója a 210-nek, mert $(2 \cdot 3)$ -mal megszorozva 210-et kapunk.

Akárhány tényezős egy szorzat, mindig osztható bármelyik tényezőjével és azok szorzatával.

Játék

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

A: A kihúzott számok szorzata páros.

B: A kihúzott számok szorzata páratlan.

C: A kihúzott számok szorzata osztható 4-gyel.

D: A kihúzott számok szorzata osztható 7-tel.

E: A kihúzott számok szorzata osztható 16-tal.

F: A kihúzott számok szorzata osztható 9-cel.

G: A kihúzott számok szorzata osztható 22-vel.

H: A kihúzott számok szorzata nullára végződik.

- a) Mindenki válasszon egyet a betűvel megjelölt cédulák közül! Ezután húzzatok ki 2 számkártyát, és az kap pontot, akinek a kihúzott számkártyákról igazat mond a választott cédulája! A játékot legalább ötször játsszátok el!
- b) Módosítsátok a játékszabályt! Hat számkártyát húzzatok ki! A többi feltétel változatlan.

Feladatok

1. Egy számról tudjuk, hogy a 6 pontosan 122-szer van meg benne.

a) Osztható-e ez a szám

A) 122-vel, B) 12-vel, C) 3-mal, D) 61-gyel?

b) Ha osztható, akkor hányszor van meg benne?

2. a) Kéttényezős szorzatok összegét adtuk meg. Az összegekről négy állítást írtunk a színes cédulákra. Melyik igaz közülük?

A) $2 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ B) $3 \cdot 5 + 3 \cdot 7$ C) $5 \cdot 11 + 5 \cdot 7$

Az A) összeg osztható 2-vel, mert az összeg mindkét tagja páratlan szám.

A B) összeg osztható 12-vel, mert $3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 3 \cdot (5 + 7) = 3 \cdot 12$.

A C) összeg osztható 5-tel, mert mindkét tagja többszöröse az 5-nek.

A C) összeg 18-szorosa az 5-nek.

b) Ti is válasszatok ki a megadott szorzatok közül kettőt-kettőt!

$2 \cdot 3$ $5 \cdot 7$ $3 \cdot 5$ $3 \cdot 7$ $5 \cdot 11$

Úgy válasszatok, hogy az összegük osztható legyen

A) 2-vel, B) 3-mal, C) 5-tel, D) 7-tel, E) 9-cel, F) 30-cal!

3. A szorzás elvégzése nélkül válaszolj a kérdésekre! Osztható-e a $12 \cdot 15$ szorzat
 a) 2-vel, b) 3-mal, c) 5-tel, d) 7-tel, e) 9-cel, f) 30-cal?
 Ha osztható, hányszor van meg benne az adott szám?

4. A következő kártyákra négytényezős szorzatokat írtunk.

$$5 \cdot \blacksquare \cdot \blacktriangle \cdot 2$$

$$3 \cdot \blacksquare \cdot 2 \cdot \spadesuit$$

$$3 \cdot \diamondsuit \cdot 4 \cdot \heartsuit$$

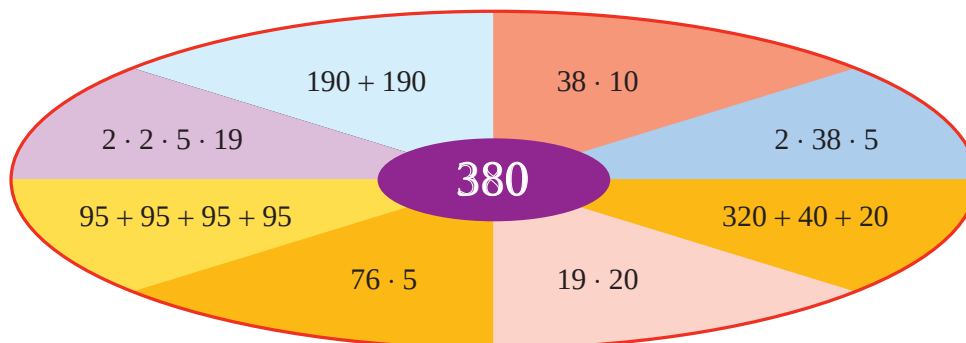
$$5 \cdot 7 \cdot \blacktriangledown \cdot \clubsuit$$

A hiányzó tényezők pozitív egyjegyű számok.

Pótold a hiányzó tényezőket úgy, hogy a szorzatok

- a) 10, b) 6, c) 12, d) 15, e) 100
 többszörösei legyenek!

5. Keresd meg a 380 osztóit a szám különböző alakjaiból!



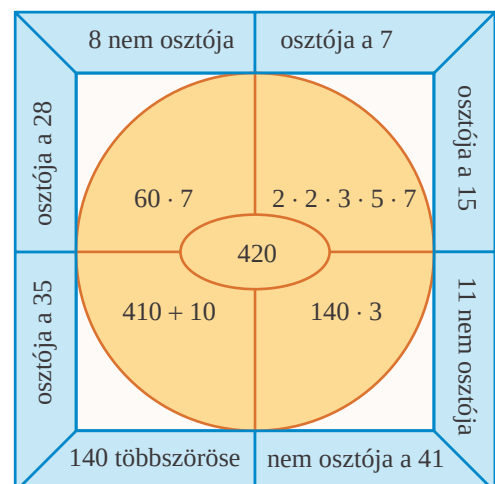
6. A $48 + 36$ összeg szorzattá alakításával megkaphatjuk az összeg osztóit.

Például: $48 + 36 = 2 \cdot 24 + 2 \cdot 18 = 2 \cdot (24 + 18) = 2 \cdot 42$. A $48 + 36$ összegnek ebből a szorzatból kiolvasható osztói: 2, 42

Szorzattá alakítás segítségével keresd a következő összegek osztóit!

- a) $14 + 48$ b) $13 + 39 + 26$ c) $45 + 75$ d) $11 + 77 + 121$

7. A 420 különböző alakjait és számtulajdonságait adtuk meg az ábrán. Minden alak a szám valamilyen tulajdonságát fedi fel. Párosítsd össze a szám tulajdonságait azokkal az alakjaival, amelyekről azok könnyen leolvashatók!



8. Többet ésszel, mint erővel!

Fejben számolj! Melyik műveletsor eredménye osztható 8-cal, melyik nem?

- a) $8888 + 888 + 88 + 8$ b) $8888 - 888 + 88 - 8$
 c) $10 \cdot 88 + 5 \cdot 88 - 2 \cdot 88$ d) $1008 \cdot (777 + 222)$
 e) $16 \cdot 27 + 11 \cdot 24 + 9 \cdot 31$ f) $33 \cdot (899 - 419)$

9. Négy szám egyike sem osztható 4-gyel. Döntsd el, hogy igazak-e a következő állítások!

- Lehet, hogy a négy szám összege osztható 4-gyel.
- Biztos, hogy a négy szám összege osztható 4-gyel.
- Lehet, hogy a négy szám szorzata osztható 4-gyel.
- Biztos, hogy a négy szám szorzata osztható 4-gyel.

10. Korai cseresznyét árultak a piacon kicsi kupacokban. Egy-egy kupacban 11-11 szem cseresznye volt. Apa tíz, anya hat kupacot vett a négy gyerekének egymás tudta nélkül. Szét tudták-e osztani a szülőktől kapott összes cseresznyét úgy, hogy minden gyereknek ugyanannyi szem jusson?



11. Igaz-e?

- Ha egy kéttényezős szorzat osztható 5-tel, akkor mindkét tényezője osztható 5-tel.
- Ha egy szorzat osztható 5-tel, akkor legalább az egyik tényezője osztható 5-tel.
- Ha egy szorzat osztható 20-szal, akkor legalább az egyik tényezője osztható 20-szal.
- Ha egy kéttényezős szorzat osztható 4-gyel, akkor mindkét tényezője páros.

12. Többet ésszel, mint erővel!

Ugyanazokat a számokat többféle alakban is megadtuk. Válaszd ki az egyenlőeket!

Például: $A3 = D1$

	A	B	C	D
1	$8 \cdot 19 + 8 \cdot 80$	$11 \cdot 5 \cdot 3$	$4 \cdot 9 \cdot 11$	$5 \cdot 17 + 5 \cdot 21$
2	$8 \cdot (100 - 1)$	$50 \cdot 3 + 5 \cdot 3$	$8 \cdot 99$	$5 \cdot (11 + 11 + 11)$
3	$5 \cdot (17 + 21)$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$	$55 + 55 + 55$	$2 \cdot 6 \cdot 33$

- 13.** a) Mennyi a 7 tizenháromszorosának és tizenhétszeresének az összege?
 b) Mennyi az 5 tizenhatszorosának és ötszörösének a különbsége?

14. Melyik megoldási terv helyes az egyes feladatokban? (Lehet több is!) Oldd is meg a feladatot! Fejben számolj!

- A nyári vándortáborra hétfőn tizenhárom gyerek fizette be a 7000 Ft-os részvételi díjat, kedden a maradék tizenhét gyerek is behozta a pénzt. Hány forintot fizettek be a gyerekek összesen?
 A) $13 \cdot 7000 \text{ Ft} + 17 \cdot 7000 \text{ Ft}$ B) $7000 \text{ Ft} \cdot 13 + 17$ C) $7000 \text{ Ft} \cdot (13 + 17)$
- Béla általában nem tart magánál készpénzt. Ma is a bankautomatából vett fel 16 darab 5000 Ft-os bankjegyet. Ebből a pénzből megadta tartozását barátjának: 5 db 5000 Ft-ossal fizette ki. Hány forintja maradt Bélának ezután készpénzben?
 A) $5000 \text{ Ft} \cdot 16 - 5$ B) $5000 \text{ Ft} \cdot (16 - 5)$ C) $16 \cdot 5000 \text{ Ft} - 5 \cdot 5000 \text{ Ft}$

- c) A képen azt látjuk, amikor átvizsgálják a tojásokat egy gép segítségével egy családi tojásüzemben. Így csak a hibátlanok kerülhetnek a dobozokba. A tojástartókba a méretüknek megfelelően kerülnek a tojások. Az XL-lel jelzettek 73 grammnál nehezebbek. Ma az ennek a szabványnak megfelelő tojásokat 10 darabos dobozokba és 30 darabos tálcákra rakják. Már 25 tálca tojást előkészítettek a szállításra.



Hány dobozt kellett még teletölteni, ha összesen 1050 tojást szállítottak el?

Melyik megoldási terv helyes? Az egyenlőségekben -tel jelöltük a dobozok számát.

A) $25 \cdot 30 + \square \cdot 10 = 1050$ B) $\square = (1050 - 25 \cdot 30)$ C) $10 \cdot (75 + \square) = 1050$



Mekkora a tömege az L betűvel jelzett tojásoknak?

15. Az idei farsangon nyolcszor annyi alsós indult a jelmezversenyen, mint felsős. Összesen 108 gyerekek közül kellett kiválasztania a zsűrinek a tíz legjobbat. Hány felsős indult a jelmezversenyen?



alsós bohóc



felsős bohóc



16. Két természetes szám összege 15 257. Az egyik szám végén nulla áll. Ha ezt a nullát elhagyjuk, akkor éppen a másik számot kapjuk. Melyik ez a két szám?
17. Igaz-e, hogy ha egy tetszőleges pozitív egész számot kétszer egymás mellé írunk, akkor az így kapott szám osztható lesz az eredeti számmal?
18. A 10-nél nem nagyobb pozitív egész számokat két csoportba lehet-e rakni úgy, hogy az egyes csoportokban lévő számok
- összege egyenlő legyen;
 - szorzata egyenlő legyen?

Milyen oszthatóságokat árulnak el a számok utolsó számjegyei?

A számok összeg alakjából többféle oszthatóságot tudunk megállapítani.

1. példa

Oszthatóság 2-vel, 5-tel és 10-zel

a) $684 = \underbrace{68 \cdot 10}_{\substack{\text{osztható} \\ 2\text{-vel, } 5\text{-tel és } 10\text{-zel}}} + \underbrace{4}_{\substack{\text{osztható} \\ 2\text{-vel,} \\ \text{de nem osztható} \\ 5\text{-tel és } 10\text{-zel}}} \rightarrow \underbrace{684}_{\substack{\text{osztható} \\ 2\text{-vel,} \\ \text{de nem osztható} \\ 5\text{-tel és } 10\text{-zel}}}$

b) $680 = \underbrace{68 \cdot 10}_{\substack{\text{osztható} \\ 2\text{-vel, } 5\text{-tel és } 10\text{-zel}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{osztható} \\ 2\text{-vel, } 5\text{-tel és } 10\text{-zel}}} \rightarrow \underbrace{680}_{\substack{\text{osztható} \\ 2\text{-vel, } 5\text{-tel és } 10\text{-zel}}}$

Azok és csak azok a pozitív egészek oszthatók 2-vel, amelyek 0-ra, 2-re, 4-re, 6-ra, 8-ra végződnek. Ezeket a pozitív egészeket páros számoknak nevezzük.

Azok és csak azok a pozitív egészek oszthatók 5-tel, amelyek 5-re vagy 0-ra végződnek.

Azok és csak azok a pozitív egészek oszthatók 10-zel, amelyek legalább egy nullára végződnek.

Mivel a tízesek oszthatók 2-vel is és 5-tel is, ezért a 2, illetve az 5 minden olyan számnak osztója, amelyben az utolsó jegy osztható 2-vel, illetve 5-tel.

2. példa

Oszthatóság 4-gyel, 25-tel és 100-zal

a) $2360 = \underbrace{23 \cdot 100}_{\substack{\text{osztható} \\ 4\text{-gyel, } 25\text{-tel és } 100\text{-zal}}} + \underbrace{60}_{\substack{\text{osztható} \\ 4\text{-gyel,} \\ \text{de nem osztható} \\ 25\text{-tel és } 100\text{-zal}}} \rightarrow \underbrace{2360}_{\substack{\text{osztható} \\ 4\text{-gyel,} \\ \text{de nem osztható} \\ 25\text{-tel és } 100\text{-zal}}}$

b) $2350 = \underbrace{23 \cdot 100}_{\substack{\text{osztható} \\ 4\text{-gyel, } 25\text{-tel és } 100\text{-zal}}} + \underbrace{50}_{\substack{\text{osztható} \\ 25\text{-tel,} \\ \text{de nem osztható} \\ 4\text{-gyel és } 100\text{-zal}}} \rightarrow \underbrace{2350}_{\substack{\text{osztható} \\ 25\text{-tel,} \\ \text{de nem osztható} \\ 4\text{-gyel és } 100\text{-zal}}}$

c) $2300 = \underbrace{23 \cdot 100}_{\substack{\text{osztható} \\ 4\text{-gyel, } 25\text{-tel és } 100\text{-zal}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{osztható} \\ 4\text{-gyel, } 25\text{-tel és } 100\text{-zal}}} \rightarrow \underbrace{2300}_{\substack{\text{osztható} \\ 4\text{-gyel, } 25\text{-tel és } 100\text{-zal}}}$

A százasok oszthatók 4-gyel, ezért elegendő csak a szám végén álló kétjegyű számot vizsgálni.

Azok és csak azok a pozitív egész számok oszthatók 4-gyel, amelyek utolsó két számjegyéből alkotott szám osztható 4-gyel.

A százasok oszthatók 25-tel, ezért elegendő csak a szám végén álló kétjegyű számot vizsgálni.

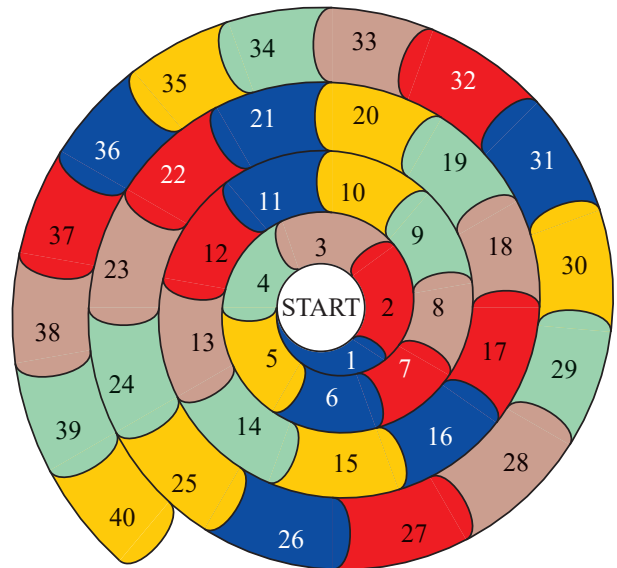
Azok és csak azok a pozitív egész számok oszthatók 25-tel, amelyek utolsó két számjegyéből alkotott szám osztható 25-tel.

Azok és csak azok a pozitív egészek oszthatók 100-zal, amelyek legalább két nullára végződnek.

Játék

Ketten játsszatok!

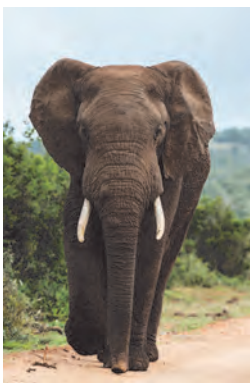
- A START-ról indítsátok a közös bábút! A játékosok felváltva lépjenek a bábuval legalább egyet, legfeljebb 4-et! Az a játékos nyer, aki rálép a 40-es mezőre. (Csak előre lehet lépni!)
- Módosítjuk a játékszabályt így: a játékosok legalább 1-et és legfeljebb 9-et léphetnek. A többi feltétel változatlan.
- Módosítjuk az a), majd a b) játékszabályt így: az veszít, aki rálép a 40-es mezőre.



Feladatok

1. Lehet-e sok-sok ugyanilyen

- elefántnak összesen 101 agyara? Lehet-e 608 lába?
- zöld gyíknak összesen 62 lába? Lehet-e 420 lábujja?
- hóembernek összesen 106 szeme? Lehet-e 1005 gombja?



Védett állat-e hazánkban a zöld gyík?

2. A következő számoknak letakartuk egy-egy számjegyét.

34 , 457 , 3 472, 30

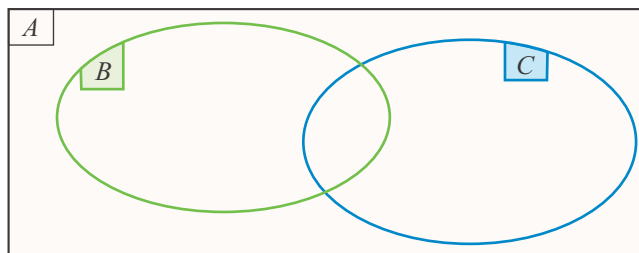
A füzetedben pótolod a számjegyeket úgy, hogy a számok oszthatók legyenek

- a) 2-vel; b) 5-tel; c) 10-zel!

3. Ezek a számkártyáink vannak, mindegyikből egy: 0, 1, 4, 5

Készítsd el belőlük a lehetséges összes háromjegyű számot!

- a) Hány lesz közülük páros?
b) Hány lesz közülük 5-tel osztható?
c) Hány lesz közülük 10-zel osztható?
d) A füzetedbe másold le a halmazábrát! Írd be a számokat a halmazábra megfelelő részébe!
e) Milyen tulajdonságú számok kerülnek a két halmaz metszetébe?



$A = \{\text{Háromjegyű számok}\}$

$B = \{\text{2-vel osztható}\}$

$C = \{\text{5-tel osztható}\}$

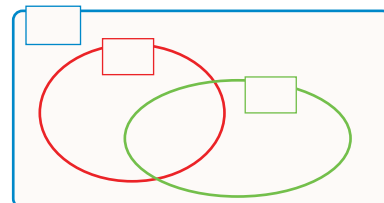
4. a) Hogyan címkéznéd meg ezeket a halmazokat? A halmazábrákat másold le a füzetedbe, és írd a halmazábra minden részébe 3-3 odaillő számot, ha van olyan!

$A = \{\text{2-vel osztható számok}\}$

$B = \{\text{5-tel osztható számok}\}$

$C = \{\text{kétjegyű számok}\}$

- b) Milyen tulajdonságú számok kerülhetnek a két halmaz közös részébe?



5. a) Egy állítást és annak megfordítását írtuk le. Az állítás:

Ha a szám osztható 10-zel, akkor a szám osztható 5-tel.

Az állítás megfordítása:

Ha a szám osztható 5-tel, akkor a szám osztható 10-zel.

Négy gyerek véleményét írtuk le ezekről az állításokról. Kivel értesz egyet?

Adél: „Az állítás és a megfordítása is igaz.”

Benő: „Csak az állítás igaz.”

Csongor: „Az állítás és a megfordítása is hamis.”

Dani: „Csak az állítás megfordítása igaz.”

- b) Ha az üres cédulákat kicseréled egy-egy megírt cédulával, akkor a számok oszthatóságával kapcsolatos állításokat kapsz. Készítsetek igaz állításokat!

Ha , akkor .

Ezek közül a megírt cédulák közül választhatsz:

a szám osztható 2-vel a szám osztható 10-zel a szám osztható 5-tel

a szám vége 5 a szám osztható 100-zal a szám vége 8 a szám vége 555

a szám végén pontosan két nulla áll a szám végén pontosan egy nulla áll

a szám számjegyei között csak 5-ös és 0 van

- c) A megírt cédulákból válogassatok! Amennyiben lehetséges, írjatok olyan állításokat, amelyeknek a megfordítása is igaz! Ha nem találtok két ilyen kártyát, akkor ti készítetek ilyeneket!

6. Hogyan címkéznéd meg ezeket a halmazokat? A halmazábrákat másold le a füzetedbe, és ha lehetséges, írd a halmazábra minden részébe 3-3 odaillő számot!

a) $A = \{5\text{-tel osztható számok}\}$

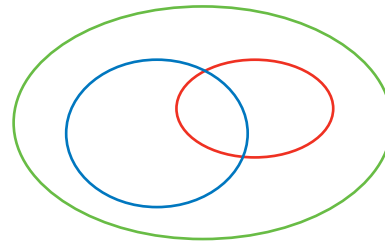
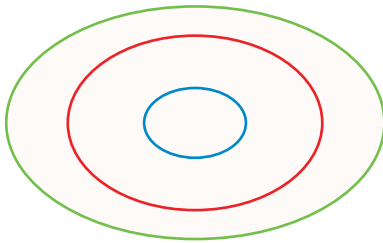
$B = \{10\text{-zel osztható számok}\}$

$C = \{100\text{-zal osztható számok}\}$

b) $A = \{2\text{-vel osztható számok}\}$

$B = \{5\text{-tel osztható számok}\}$

$C = \{\text{kétjegyű számok}\}$



7. A következő számoknak letakartuk egy-egy számjegyét.

34 4,

457 .

3 472,

30 .

A füzetedben pótolod a számjegyeket úgy, hogy a számok oszthatók legyenek

a) 4-gyel;

b) 25-tel;

c) 50-nel;

d) 100-zal!

8. Melyik egyszerűsíthető az adott törtek közül

a) 2-vel; b) 5-tel; c) 10-zel; d) 4-gyel; e) 20-szal; f) 25-tel; g) 100-zal?

$$\frac{4}{10}$$

$$\frac{10}{15}$$

$$\frac{8}{24}$$

$$\frac{105}{100}$$

$$\frac{125}{200}$$

$$\frac{140}{200}$$

$$\frac{75}{125}$$

$$\frac{1008}{1000}$$

$$\frac{400}{1000}$$

$$\frac{150}{275}$$

9. Fogalmazz meg szabályt a 20-szal és az 50-nel való oszthatóságra! Szóban egészítsd ki a mondatokat úgy, hogy igazak legyenek az állítások!

Azok és csak azok a számok oszthatók 20-szal, amelyek ...és ... oszthatók.

Azok és csak azok a számok oszthatók 50-nel, amelyek ... és ... osztható.

10. Ezek a számkártyáink vannak, mindegyikből egy: 0, 1, 2, 5

Készíts belőlük háromjegyű számokat az összes lehetséges módon!

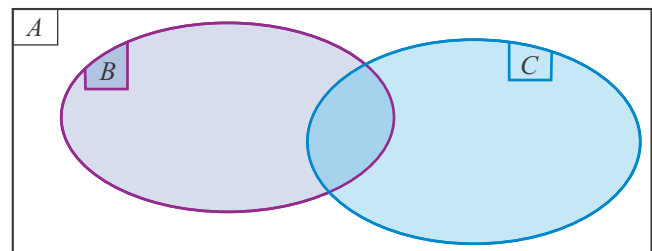
a) Hány lesz közülük 4-gyel osztható?

b) Hány lesz közülük 5-tel osztható?

c) Hány lesz közülük 20-szal osztható?

d) Másold le a füzetedbe a halmazábrát! Írd be a számokat a halmazábra megfelelő részébe!

e) Milyen tulajdonságú számok kerülnek a két halmaz metszetébe?



$A = \{\text{Háromjegyű számok}\}$

$B = \{4\text{-gyel osztható}\}$

$C = \{5\text{-tel osztható}\}$



11. Képezz sorozatot, amelynek elemei az 5-nek pozitív többszörösei! Írd le a sorozat néhány elemét! Biztos, lehetséges vagy lehetetlen, hogy ebben a sorozatban két tetszőleges elem
- a) összege osztható 5-tel;
 - b) különbsége osztható 5-tel;
 - c) szorzata osztható 5-tel;
 - d) összege osztható 10-zel;
 - e) különbsége osztható 10-zel;
 - f) szorzata osztható 10-zel?
12. Hány nulla áll a szorzat végén, ha összeszoroztuk a pozitív egész számokat
- a) 1-től 10-ig;
 - b) 1-től 20-ig;
 - c) 1-től 30-ig?

Milyen oszthatóságokról árulkodik a szám számjegyeinek összege?

1. példa



Kitalálom, hogy milyen számot kaptál.

Gondolj egy pozitív egész számot, add hozzá a házszámodat, és azt, hogy hányas cipőt hordasz! Az összeget szorozd meg 9-cel! Add össze a kapott szám számjegyeit, ha többjegyű számot kaptál, annak is add össze a számjegyeit, egészen addig, amíg egyjegyű számot nem kapsz! Ez az egyjegyű szám (ha jól számoltál) a 9. Igaz?

Hogyan magyarázható ez a „gondolatosolvasó” trükk?

Megoldás

Írjuk le betűkkel, mit is csináltunk!

$$(\text{Gondolt szám} + \text{házszám} + \text{cipőméret}) \cdot 9$$

Ez a szorzat biztosan osztható 9-cel, hiszen egyik tényezője a 9. Azt tapasztaljuk, hogy a 9-cel osztható számok számjegyeit összeadva (esetleg többszöri összeadás után is) 9-cel osztható számot kapunk.

A 9-cel való oszthatóság szabálya

2. példa

Végezzük el az osztásokat összeadandókra bontva!

a) $234 : 9$

b) $123 : 9$

Megoldás

a) $234 : 9 = (200 + 30 + 4) : 9 = 200 : 9 + 30 : 9 + 4 : 9$

a hányadosok összege $\longrightarrow 22 + 3 + 0 = 25$

a maradékok összege $\longrightarrow 2 + 3 + 4 = 9$

Vegyük észre, hogy a **szám számjegyeinek összege** éppen az egyes helyi értékeken kapott **maradékok összege**, azaz $2 + 3 + 4 = 9$! Mivel a maradékok összege 9, ezért a 9 még 1-gyel többször megvan

az eredeti számban. Így 234 osztható 9-cel, és a hányados 26. Azt tapasztaljuk, hogy ha egy szám számjegyeinek összege osztható 9-cel, akkor a szám is osztható 9-cel.

$$b) \quad 123 : 9 = (100 + 20 + 3) : 9 = 100 : 9 + 20 : 9 + 3 : 9$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{a hányadosok összege} & \longrightarrow & 11 & + & 2 & + & 0 = 13 \end{array}$$

$$\text{a maradékok összege} \longrightarrow 1 + 2 + 3 = 6$$

Vegyük észre, hogy a szám számjegyeinek összege éppen az egyes helyi értékeken kapott **maradékok** összege, azaz $1 + 2 + 3 = 6$! Mivel a maradékok összege nem többszöröse a 9-nek, ezért a 123 nem osztható 9-cel, a hányados 13, és a maradék 6. Azt tapasztaljuk, hogy ha egy szám számjegyeinek összege nem osztható 9-cel, akkor a szám sem osztható 9-cel.

A 3-mal való oszthatóság szabálya

3. példa

Végezzük el az osztást összeadandókra bontva!

$$a) \quad 123 : 3 \qquad b) \quad 124 : 3$$

Megoldás

$$a) \quad 123 : 3 = (100 + 20 + 3) : 3 = 100 : 3 + 20 : 3 + 3 : 3$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{a hányadosok összege} & \longrightarrow & 33 & + & 6 & + & 1 = 40 \end{array}$$

$$\text{a maradékok összege} \longrightarrow 1 + 2 + 0 = 3$$

A **maradékok** összege ($1 + 2 + 0 = 3$) is osztható 3-mal, ezért a 123 osztható 3-mal, a hányados 41.

Vegyük észre, hogy a szám számjegyeinek összege ($1 + 2 + 3 = 6$) is többszöröse a 3-nak!

Azt tapasztaljuk, ha egy szám számjegyeinek összege osztható 3-mal, akkor a szám is osztható 3-mal.

$$b) \quad 124 : 3 = (100 + 20 + 4) : 3 = 100 : 3 + 20 : 3 + 4 : 3$$

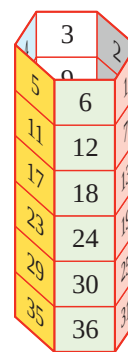
$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{a hányadosok összege} & \longrightarrow & 33 & + & 6 & + & 1 = 40 \end{array}$$

$$\text{a maradékok összege} \longrightarrow 1 + 2 + 1 = 4$$

Sem a **maradékok** összege ($1 + 2 + 1 = 4$), sem a szám számjegyeinek összege ($1 + 2 + 4 = 7$) nem osztható 3-mal. Ezért a 124 nem osztható 3-mal, a hányados 41, és a **maradék** 1. Azt tapasztaljuk, ha egy szám számjegyeinek összege nem osztható 3-mal, akkor a szám sem osztható 3-mal.

A 6-tal való oszthatóság szabálya

Egy hatoldalú hasáb oldalapjaira, 1-gyel kezdve, ráírtuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendben az ábrán látható módon.



A rózsaszínű oldalon **1 7 13 19**, a sárga lapon **5 11 17 23** áll, és a számok mindegyike páratlan. Ha mindig 6-tal növelve folytatjuk a számok sorát, akkor a többi is páratlan lesz, ezért ezeken az oldalakon nem állhat 6-tal osztható szám.

A kék oldalon **4 10 16 22**, a szürke színű lapon **2 8 14 20** áll, és a számok mindegyike páros. Mindkét esetre igaz, hogy a 3-mal nem osztható első számot 3-mal osztható számmal növelve, nem kaphatunk 3-mal oszthatót, így 6-tal oszthatót sem.

A fehér oldalon a **3 9 15 21** páratlan, a zöld lapon a **6 12 18 24** páros. Mindkét lapon 3-mal osztható számok állnak. A fehér lap minden száma páratlan, ezért nem állhat rajta 6-tal osztható szám. A zöld lapon álló számok mindegyike osztható 6-tal, mert a legkisebb 6-tal osztható számmal kezdődik a számok sorozata, és a másodiktól kezdve a rá következő mindig 6-tal nagyobb az öt megelőzőnél.

Azok és csak azok a számok oszthatók 6-tal, amelyek 2-vel és 3-mal is oszthatók.

4. példa

Oszthatók-e az alábbi számok 6-tal?

A) 66 666 663

B) 36 666 662

C) 123 456

Megoldás

A) Nem osztható, mert páratlan szám.

B) Nem osztható, mert páros ugyan, de számjegyeinek összege nem osztható 3-mal:

$$3 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 2 = 41.$$

C) Igen, osztható, mert utolsó számjegye osztható 2-vel, számjegyeinek összege osztható 3-mal:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Játék

Ketten játsszátok ezt a játékot! A két játékost nevezzük **A**-nak és **B**-nek! **A** és **B** felírnak egy 12 jegyű számot úgy, hogy az egyes számjegyeit felváltva írják egymás után. A szám számjegyeit csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek közül válogathatják. A **B** játékos azt akarja, hogy osztható legyen a 12 jegyű szám 9-cel, az **A** játékos azt akarja, hogy ne. Elérheti-e célját **B**, ha **A** kezd? Ha igen, hogyan?

Feladatok

1. A következő számok mindegyikének letakartuk egy számjegyét.

32 1,

457 .

3 973,

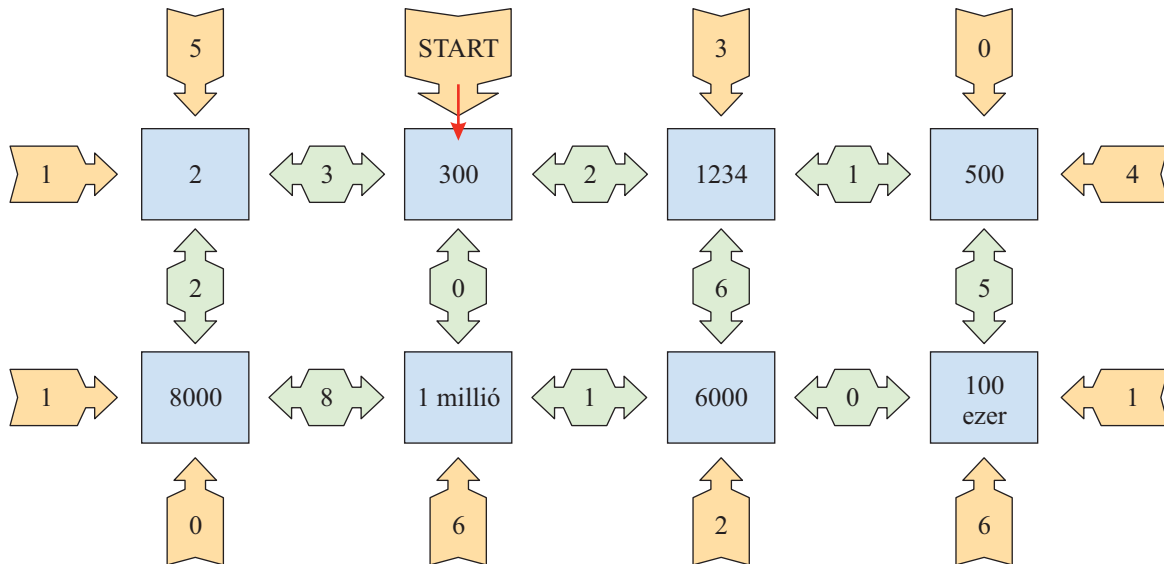
4 122 30 .

Pótold a számjegyeket úgy, hogy a számok oszthatók legyenek

a) 3-mal,

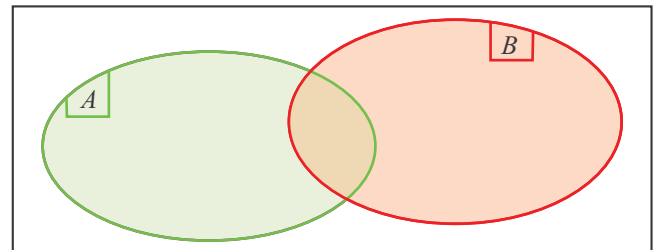
b) 9-cel!

2. a) A négyzetben lévő számok 9-cel való osztási maradékát mutató nyíl irányában haladj!
Melyik sárga nyílon lévő számhoz jutottál?
- b) Hová jutsz, ha a 3-mal való osztási maradékok szerint haladsz?



3. 38 766, 24 345, 2332, 100 008, 8888, 133 100, 6626, 3192, 4554, 777 777

- a) Melyek oszthatók 3-mal, illetve 9-cel a felsorolt számok közül?
- b) Rajzolj egy ilyen halmazábrát a füzetedbe! Írd a számokat a halmazábra megfelelő részébe! Milyen tulajdonságú számok kerülnek a két halmaz közös részébe?
- c) Van-e olyan része a halmazábrának, ahova nem kerülhet szám?



$A = \{9\text{-cel osztható számok}\}$

$B = \{3\text{-mal osztható számok}\}$

4. A műveleteknek csak a 9-cel való osztási maradékát határozd meg! Arra a kártyára lépj, amelynek az elején a kapott maradékot látod! Ha jól oldottad meg a feladatot, a kártyákon lévő betűket összeolvasva egy világhírű magyar matematikus nevét kapod meg.



Ki volt ő? Búvárkodjatok!

START	$3003 + 604$	E	5	$(1234 + 567) \cdot 89$	P
6	$9112 + 721$	S	7	$7594 - 42$	R
1	$333 \cdot 2001$	D	8	$100\,000 + 1000 + 10$	Á
3	$99 \cdot 100 + 101$	L	0	$2000 + 200 + 20$	Ő

5. Ezek a számkártyáid vannak: $\boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{0}, \boxed{4}$

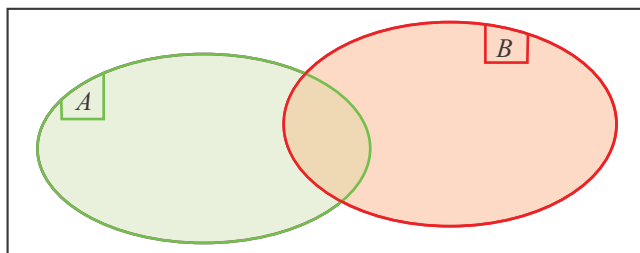
Készítsd el belőlük az összes lehetséges négyjegyű számot!

- Hány lesz a számok közül páros?
- Hány lesz a számok közül 3-mal osztható?
- Hány lesz a számok közül 6-tal osztható?

d) Hány lesz a számok közül olyan, amely sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható?

e) Rajzolj egy ilyen halmazábrát a füzetedbe! Helyezd el a számokat a halmazábra megfelelő részébe!

f) Milyen tulajdonságú számok kerülnek a két halmaz közös részébe?



$A = \{2 \text{ többszörösei}\}$ $B = \{3 \text{ többszörösei}\}$

6. A hindu matematika annak idején nagy hatással volt az európai matematika fejlődésére. Az indiai iskolai oktatásban pedig sok európai módszer honosodott meg, hiszen India hosszú ideig angol gyarmat volt.

A hinduk régen a számításaikat nem papíron, hanem porral és homokkal meghintett táblákon végezték, és letörölték azokat a számjegyeket, amelyekre már nem volt szükségük. A számjegyek törlése lehetetlenné tette a részeredmények ellenőrzését, ezért többféle módszert dolgoztak ki a számítások utólagos ellenőrzésére. A legnépszerűbb ezek közül a „kilences próba” volt. Ennek alapja az, hogy ha egy számot elosztunk 9-cel, akkor az osztási maradék megegyezik a szám (osztandó) számjegyei összegének 9-cel való osztási maradékával.

Válaszd ki a „kilences próba” használatával a **biztosan** hibás eredményt!

- A) $777 : 9 = 86$, maradék 3. B) $8182 : 9 = 909$, maradék 2. C) $12\,345 : 9 = 1371$, maradék 8.

7. Ezek a számkártyáid vannak: $\boxed{3}, \boxed{0}, \boxed{0}, \boxed{7}$

a) Készítsd el belőlük az összes lehetséges négyjegyű számot!

b) Hány lesz közülük 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 6-tal, illetve 9-cel osztható?

8. A 2001-es szám végére írd még egy számjegyet úgy, hogy

- a 4-es,
- a 3-as,
- a 9-es maradéka ne változzon!

9. Írd olyan számokat, amelyek minden számjegye 1-es, és osztható

- 3-mal,
- 9-cel!

10. Írd olyan számokat, amelyek minden számjegye 2-es, és osztható

- 3-mal,
- 4-gyel,
- 6-tal,
- 9-cel!



11. Egy háromjegyű szám kilences maradéka 4. Két tetszőleges számjegyet felcseréljük. Mennyi lesz az így kapott szám kilences maradéka?

Az eredeti és a felcserélt számot összeadjuk. Mennyi lesz az összeg kilences maradéka?

Az eredeti és a felcserélt számok közül a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket. Mennyi lesz a különbség kilences maradéka?

Számok osztói, közös osztók

Többszörös, osztó, osztható

Egy-egy számegyenesen tekertünk fel két hasáb palástjára az ábrákon látható módon.



Az első hasáb piros lapján a 3 pozitív többszörösei szerepelnek: $3 \cdot 1 = 3$, $3 \cdot 2 = 6$, $3 \cdot 3 = 9$, $3 \cdot 4 = 12$, $3 \cdot 5 = 15$, $3 \cdot 6 = 18$, $3 \cdot 7 = 21$, $3 \cdot 8 = 24$, ...

A második hasáb piros lapján a 4 pozitív többszörösei szerepelnek: $4 \cdot 1 = 4$, $4 \cdot 2 = 8$, $4 \cdot 3 = 12$, $4 \cdot 4 = 16$, $4 \cdot 5 = 20$, $4 \cdot 6 = 24$, ...

Azok a számok, amelyek mindkét hasáb piros lapján szerepelnek, a 3-nak és a 4-nek közös többszörösei: 12, 24, 36, ...

- A **24 többszöröse a 8-nak**, mert $8 \cdot 3 = 24$, azaz van olyan pozitív egész szám, amellyel a 8-at megszorozva 24-et kapunk.
- A **8 osztója a 24-nek**, mert $8 \cdot 3 = 24$, azaz van olyan pozitív egész szám, amellyel a 8-at megszorozva 24-et kapunk.
- **24 osztható 8-cal**, mert $8 \cdot 3 = 24$, azaz van olyan pozitív egész szám, amellyel a 8-at megszorozva 24-et kapunk.

1-gyel és **önmagával** minden pozitív egész szám osztható. Ezeket a számok **nem valódi osztóinak** nevezzük.

Például: A 24-nek **nem valódi osztói** az **1** és a **24**.

A 24-nek **valódi osztói** a **2, 3, 4, 6, 8** és a **12**.

Az egyiptomi matematika forrása az Eufrátesz partján elterülő Babilon volt. Az általuk használt írás 60-as alapú, helyi értékes számrendszer volt. Ugyanezt alkalmazzuk napjainkban is az idő és a szög mérésére. Ez a számrendszer megkönnyíti az osztás műveletét, hiszen a 60 számos osztóval rendelkezik, és így egyszerűbb a törtekkel való számolás. (Az agyagtáblán számok láthatók írással.)



1. példa

Keressük meg a 60 összes osztóját!

Megoldás

Az osztókat legegyszerűbb osztópárok segítségével megkeresni, így:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \cdot 60 \\ 2 \cdot 30 \\ 3 \cdot 20 \\ 4 \cdot 15 \\ 5 \cdot 12 \\ 6 \cdot 10 \end{array} \right\} 60.$$

A 60 osztói: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

2. példa

Hány gyerek között lehet igazságosan elosztani egy 16 „kockás” csokit és egy 12 szeletes sárgadinnyét?

A csokikockákat és a dinnyeszeleteket nem darabolhatjuk fel apróbb részekre.



Megoldás

Minden gyereknek ugyanannyi szelet dinnyét és ugyanannyi csokikockát kell adni. Gyűjtsük össze a lehetőségeket!

gyerekek száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
csokikockák száma	16	8	—	4	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	1
dinnyeszeletek száma	12	6	4	3	—	2	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—

A táblázatból kiolvasható, hogy 1, 2 és 4 gyerek esetén tudjuk igazságosan elosztani a csokit és a dinnyét. Annyi lehetőség van, ahány közös osztója van a két számnak.

Több szám **közös osztói** azok a számok, amelyek az adott számok mindegyikének osztói.

Például: A 16-nak és a 12-nek három **közös osztója** van: 1, 2 és 4.

A számok közös osztói közül a legnagyobbat legnagyobb közös osztónak nevezzük.

Például: 16-nak és 12-nek a legnagyobb közös osztója a 4.

Osztójáték

Ketten játsszátok! Állapodjatok meg egy pozitív egész számban, majd felváltva mondjátok ennek **valódi osztóit**! Ha egy osztó elhangzott már, annak osztóját nem lehet egy játék során többször mondani. Az a gyerek veszít, aki nem tud már ilyen számot mondani.

Például: Legyen **24** a szám, amiben megállapodtak a játékosok!

Kezdő játékos: 8 (ezután már nem lehet mondani sem a 2-t, sem a 4-et, sem a 8-at)

Második játékos: 3

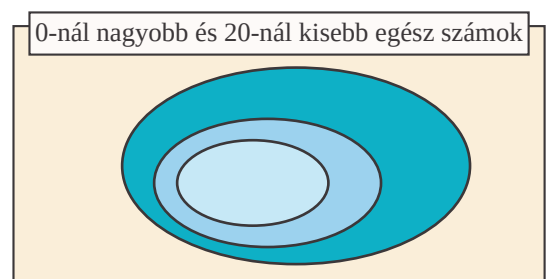
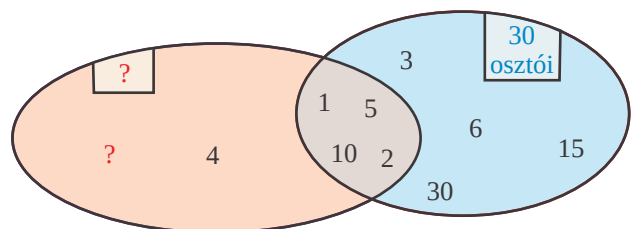
Kezdő játékos: 6

Második játékos: 12

Kezdő játékos: nem tud már olyan osztót mondani, amely az eddigieknek nem osztója.

Feladatok

1. a) Osztópárok segítségével keresd meg a következő számok összes osztóját!
 A) 45 B) 66 C) 72 D) 112 E) 119
 b) Az a) feladatban szereplő számok közül melyiknek van pontosan annyi *nem valódi osztója*, mint a 60-nak?
 c) Melyiknek van ugyanannyi *valódi osztója*, mint a 60-nak?
- @ Milyen nyomait találjuk napjainkban a hatvanas számrendszernek?
2. Megadtuk egy szám összes valódi osztóját. Melyek a nem valódi osztók?
 a) 2, 5 b) 2, 4, 5, 10 c) 3 d) 2, 4, 8 e) 3, 9
 f) 2, 3, 5, 6, 10, 15 g) 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 h) 5, 25, 125
3. Melyik az a legnagyobb szám,
 a) amellyel az összes páros szám osztható,
 b) amellyel az összes nullára végződő szám osztható?
4. Határozd meg a következő számpárok és számhármaskok összes közös osztóját! Melyik a legnagyobb?
 a) 16 és 20 b) 20 és 36 c) 32 és 40 d) 33 és 35 e) 16, 20 és 32 f) 20, 32 és 40
5. a) Osztópárok segítségével keresd meg a 18, 25, 40, 8, 18, 30, 100 számok összes osztóját!
 b) Alkoss törteket minden lehetséges módon!
 A számlálókat a 18, 25, 40 számok közül, a nevezőket a 8, 18, 30, 100 közül válaszd!
 Add meg a legegyszerűbb alakját is a kapott törteknek!
6. Két számnak egy híján az összes osztóját beírtuk a halmazábrákba.
 Mi a hiányzó címke, és mi a hiányzó szám?
7. a) Hova írnád a címkéket?
 $A = \{16 \text{ osztói}\}$
 $B = \{8 \text{ osztói}\}$
 $C = \{4 \text{ osztói}\}$
 b) Másold le a füzetedbe a halmazábrát, és írd be a megfelelő részébe a 20-nál kisebb pozitív egész számokat! A sárga részbe elegendő négy számot beírnod.
8. A 6 osztói: 1, 2, 3, 6. Ha a 6 kivételével összeadjuk az osztókat, akkor éppen 6-ot kapunk eredményül. A régi görögök az ilyen számokat tökéletes számoknak nevezték. A 20 és a 30 között is van egy ilyen tökéletes szám. Melyik az?



9.



Egy esküvőn 416 poharat és 224 tányért tettek ki az asztalokra. Minden ünnepelőnek ugyanannyi pohárral és ugyanannyi tányérral terítettek.

Hányan lehettek az esküvői vacsorán, ha tudjuk, hogy 30-nál többen fogadták el a meghívást?

10.

Egy ballagó osztály diákjainak 72 fehér és 96 piros rózsából készítették ugyanolyan csokrokat. Hányan ballaghattak, ha ebben az iskolában legfeljebb 30 gyerek jár egy osztályba?



11. Hány olyan, tovább már nem egyszerűsíthető, 0 és 1 közötti tört van, amelynek 100 a nevezője?

12. Lucának két testvére van. Hármójuk életkorának szorzata 30, összege 14. Hány évesek külön-külön? (A három gyerek életkora egész szám.)

Számok többszörösei, közös többszörösök

Példa

Karácsonykor a kertünkben lévő fenyőre sok apró villanyégőt tettünk. A sárgák 2 másodpercenként, a pirosak 3, a kékék 4 másodpercenként villantak fel. Hány másodpercenként villantak fel egyszerre az égők?

Megoldás

Olyan számokat kell keresnünk, amelyek a 2-nek, a 3-nak és a 4-nek is többszörösei.

2 többszörösei: 0, 2, 4, 6, 8, 10, **12**, 14, 16, 18, 20, 22, **24**, ...

3 többszörösei: 0, 3, 6, 9, **12**, 15, 18, 21, **24**, 27, ...

4 többszörösei: 0, 4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, ...

Az égők 12 másodpercenként villannak fel egyszerre, a 12., 24., 36., 48., ... másodpercben. Ezek a számok a 12 többszörösei. Végtelen sok ilyen szám van.

Minden pozitív természetes számnak **végtelen sok többszöröse** van. Bármely két vagy több számnak is **végtelen sok közös többszöröse** van.

A számok közös többszörösei közül a legkisebbet legkisebb közös többszörösnek nevezzük.

Például: 2, 3 és 4 legkisebb közös többszöröse a 12.



Feladatok

1. Színezd a számegyenesen sárgával a 3, kékkel a 4 többszörőseit! Mely számok lettek zöldek?
2. Ha két pozitív egész számot összeszorozunk, akkor a szorzatuk biztosan többszöröse mindkettőnek. Az alábbi számpárok közül melyek azok, amelyeknek van a szorzatuknál kisebb közös többszöröse? Adj meg legalább egy ilyen közös többszöröst!
a) 2 és 10 b) 18 és 9 c) 4 és 10 d) 6 és 7 e) 9 és 10 f) 6 és 14 g) 25 és 30
3. Melyik többszöröse a 6-nak a szorzat alakban megadott számok közül? Hányszorosa?
a) $2 \cdot 2 \cdot 3$ b) $2 \cdot 3 \cdot 5$ c) $3 \cdot 3 \cdot 5$ d) $2 \cdot 2 \cdot 5$ e) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ f) $2 \cdot 3 \cdot 3$ g) $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3$
4. Melyik számhármastak nincs olyan közös többszöröse, amelyik kétjegyű szám? Válaszodat indokold meg!
a) 2, 3, 5 b) 2, 4, 5 c) 3, 6, 12 d) 3, 5, 30 e) 4, 9, 72 f) 2, 6, 8 g) 5, 7, 9
5. Napjainkban a harangok többségét már elektronikusan vezérik, ezért egyenlő időközönként követik egymást a harangütések. Délben három harang hangját halljuk egyszerre. Az egyik 4, a másik 6, a harmadik 8 másodpercenként kondul meg.
a) Mennyi idő múlva halljuk először újra egyszerre megkondulni a három harangot?
b) Válaszd ki az alábbi időtartamok közül azokat, amelyekre igaz, hogy a három harang 12 óra után ennyi másodperc elteltével kondul meg újra egyszerre! Add meg a helyes válaszok betűjelét!
A) 35 B) 44 C) 48 D) 60 E) 96 F) 120



Páros játék

Tippeljete a 8. feladatban megadott A), B) és C) események közül az egyikre! Tippelhettek ugyanarra is, mint amire a társatok. Dobjatok! Aki jól tippelt, kap egy pontot. Az a játékos nyer, aki 10 fordulóban több pontot szerez.

8. Feldobunk két szabályos dobókockát, és a dobott számokat összeszorozzuk. Az alábbi három lehetőség közül melyikre van a legnagyobb esélyünk, melyikre a legkisebb?
A) A szorzat 2 többszöröse.
B) A szorzat 7 többszöröse.
C) A szorzat 10 többszöröse.

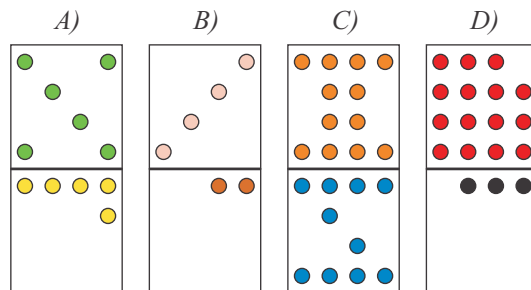


9. a) Határozd meg a négy dominó felső részén lévő zöld, rózsaszín, narancssárga és piros pöttyök számának közös többszörösei közül a legkisebbet!

b) Határozd meg a négy dominó alsó részén lévő sárga, barna, kék és fekete pöttyök számának közös többszörösei közül a legkisebbet!

c) Meg lehet-e fordítani a dominók közül egyet úgy, hogy a dominók felső felén lévő pöttyök legkisebb közös többszöröse megegyezzen az alul lévőkével?

Ha igen, akkor melyiket, és hány lehetőség van?



10. A kikötőben 4 hajó horgonyoz. Egyszerre indulnak útnak. Az első hajó 2 hetenként, a második 4 hetenként, a harmadik 8 és a negyedik 12 hetenként tér vissza.

Hány hét múlva találkozik újra legközelebb mind a négy hajó a kikötőben?



11. Döntsd el, hogy az alábbiak közül melyik állítás igaz (I), melyik lehetséges, de nem biztos (NB), és melyik lehetetlen (L)! Az állítások két különböző pozitív egész számra vonatkoznak. Válaszodat indokold meg!

A) Két szám közös többszöröse nagyobb mindkét számnál.

B) Két szám közös osztója kisebb mindkét számnál.

C) Két szám szorzata közös többszöröse mind a két számnak.

D) Két szám minden közös többszöröse osztható a két szám minden közös osztójával.

12. Egy 3×3 -as táblázat mezőibe 1-től 9-ig beírtuk a pozitív egész számokat, majd soronként és oszloponként összeszoroztuk azokat. Minden sor és oszlop végére odaírtuk a megfelelő szorzatokat. Találd ki a szorzatokból, milyen számok állnak a táblázat mezőiben!

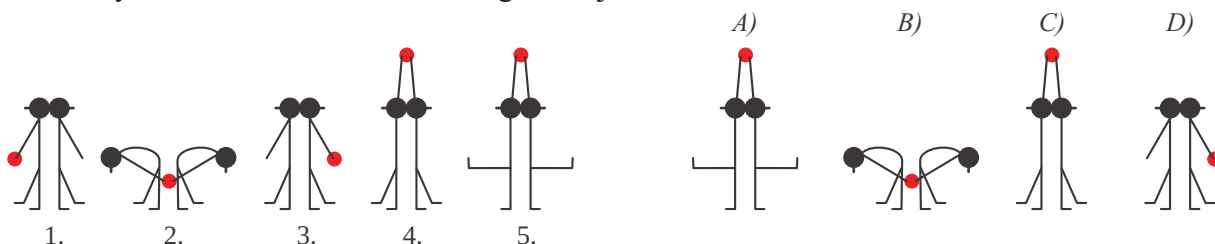
			15
			168
			144
70	32	162	



13. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely az első tíz pozitív egésznek többszöröse?

Tudáspróba

1. Testnevelésórán egy páros nyújtógyakorlat öt ütemét kell ismételtetniük a 6. osztályos gyerekeknek. Milyen lesz az 58. ütem? Add meg a betűjelét!

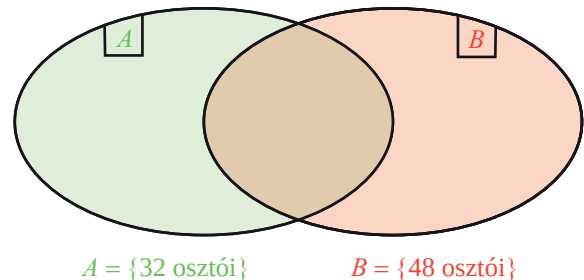


2. a) Osztópárok segítségével sorold fel a 150 összes osztóját!
 b) Karikázd be az osztók közül a nem valódi osztókat!
3. Osztható-e? Készíts táblázatot a füzetedbe a minta alapján, és igennel vagy nemmel válaszolj!
 Ha nem osztható, írd oda a maradékot is!

	2-vel	5-tel	10-zel	100-zal	3-mal	9-cel
2000						
234						
1675						

4. Döntsd el, hogy igaz vagy hamis az állítás! A hamis állítások esetén véleményedet ellenpéldával igazold!
- a) Minden 9-cel osztható szám osztható 3-mal is.
 b) Ha egy szám osztható 3-mal, akkor 9-cel is.
 c) Ha egy szám osztható 10-zel, akkor osztható 2-vel és 5-tel is.
 d) Ha egy kéttagú összeg osztható 10-zel, akkor mindkét tagja osztható 5-tel és 2-vel is.
 e) Ha egy szorzat osztható 10-zel, akkor legalább az egyik tényezője osztható 5-tel.
5. Milyen számjegyet írhatunk a helyébe, hogy a szám osztható legyen 3-mal? Az összes megoldást keresd meg!
- a) 413 b) 123 c) 55 d) 27

6. a) Osztópárok segítségével keresd meg a 32 és a 48 összes osztóját!
 b) Másold le a füzetedbe a halmazábrát! Írd be a kapott osztókat a halmazákra megfelelő részébe!
 c) Növekvő sorrendben írd le a 32 és a 48 közös osztóit!



7. Petiek karácsonyi ajándékot gyűjtöttek a városuk kórházában fekvő beteg gyerekeknek. Összesen 96 kisautó, 120 tábla csoki és 168 darab mandarin gyűlt össze. Mindezt csomagokba szeretnék rakni úgy, hogy minden csomag egyforma legyen, és minden ajándék belekerüljön a csomagokba.
- a) Legfeljebb hány csomagot tudnak így készíteni? Mi kerül bele ebben az esetben egy-egy ilyen csomagba?
 b) Lehet-e 20 egyforma csomagot készíteni? Lehet-e 12 egyforma csomagot készíteni?
 c) Hány egyforma csomag lenne, ha egy-egy csomagba a következőket raknák a gyerekek?
 16 kisautó, 20 tábla csoki, 28 mandarin
8. a) Két óra közül az egyiket 4 naponként, a másikat 16 naponként kell felhúzni. Hány naponként húzzák fel a két órát egyszerre?
 b) Két gőzkalapács közül az egyik 8 másodpercenként, a másik 12 másodpercenként koppant egyet. Milyen időközönként hallatszik a két koppantás egynek?

Háromszögek, szabályos sokszögek

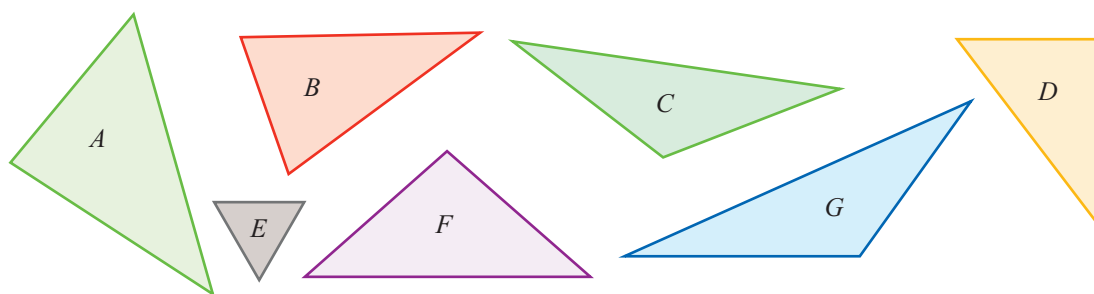


A tangram játékból kirakott repülőn és a hídszerkezet fotóján háromszögeket, négyszögeket fedezhetünk fel. A kerámia mozaikpadlón ezeken kívül öt- és hatoldalú sokszögeket is látunk.



A háromszögek fajtái

1. példa

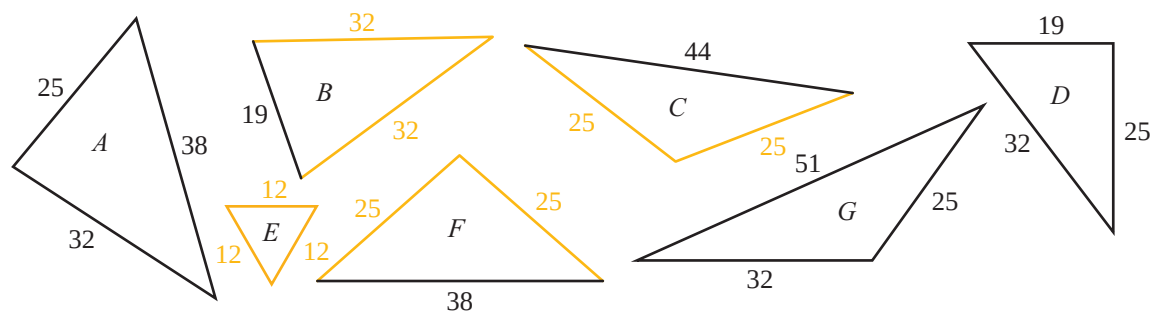


Csoportosítsuk a háromszögeket az oldaluk hossza szerint!

- Mérjük meg az ábrán látható háromszögek oldalait!
- Válasszuk ki azokat a háromszögeket, amelyeknek három oldala különböző hosszúságú!
- Válasszuk ki azokat a háromszögeket, amelyeknek van két egyenlő hosszúságú oldaluk!
- Válasszuk ki azokat a háromszögeket, amelyeknek minden oldaluk egyenlő hosszúságú!
- Soroljuk fel azokat a háromszögeket, amelyek a b), c), d) csoportok közül többhöz is tartoznak!

Megoldás

a) Az oldalakon látható mérőszámok milliméterben mért eredményt jelölnek.



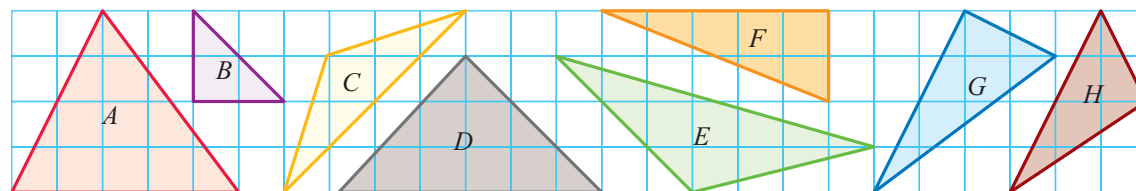
b) Minden oldala különböző: A, D, G

c) Van két egyenlő oldala: B, C, E, F

d) Mindhárom oldala egyenlő: E

e) c)-hez és d)-hez is tartozik az E. Minden szabályos háromszög egyenlő szárú háromszög.

2. példa



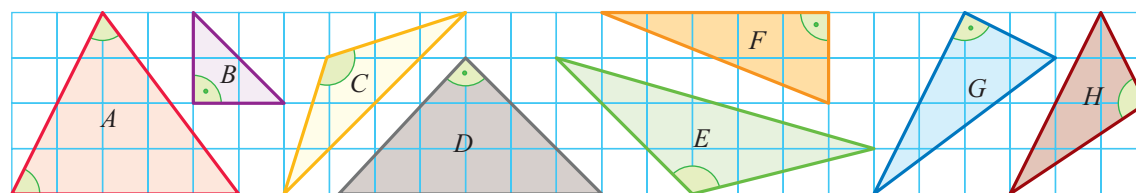
Csoportosítsuk a háromszögeket szögeik szerint!

a) Válasszuk ki azokat a háromszögeket, amelyeknek minden szöge hegyesszög!

b) Válasszuk ki azokat a háromszögeket, amelyeknek van derékszög!

c) Válasszuk ki azokat a háromszögeket, amelyeknek van tompaszög!

Megoldás



a) Minden szöge hegyesszög: A. Legnagyobb szöge (szögei) hegyesszög(ek).

b) Van derékszög: B, D, F, G. Legnagyobb szöge a derékszög.

c) Van tompaszög: C, E, H. A legnagyobb szöge tompaszög.

A háromszögeket csoportosíthatjuk a legnagyobb szögük, illetve oldalaiuk összehasonlítása alapján.

		A háromszögek oldalainak hossza közül		
		mind különböző	kettő egyenlő	mind egyenlő
A háromszögek legnagyobb szöge	hegyesszög			
	derékszög			
	tompaszög			

A **hegyesszögű háromszögek** minden szöge hegyesszög.

A **derékszögű háromszögek** egyik szöge derékszög, másik két szöge hegyesszög. A merőleges oldalakat **befogóknak**, a derékszöggel szemközti oldalt **átfogónak** nevezzük.

A **tompaszögű háromszögek** egyik szöge tompaszög, másik két szöge hegyesszög.

Ha a háromszög oldalai mind különböző hosszúságúak, akkor szögei is különböző nagyságúak.

Az **egyenlő szárú háromszögeknek** legalább két egyenlő hosszúságú oldaluk van. Az egyenlő oldalakat **száraknak**, a harmadik oldalt **alapnak** nevezzük. Ha a háromszög mindhárom oldala egyenlő hosszú, akkor az **szabályos** vagy **egyenlő oldalú háromszög**.

Megjegyzés: Az egyenlő szárú derékszögű háromszög szárjai a befogók, alapja az átfogó.

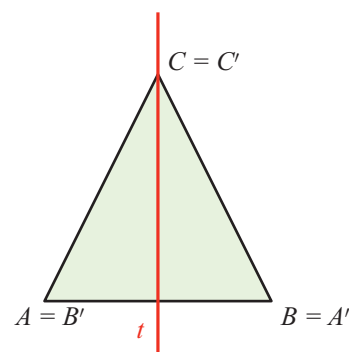
Tengelyesen szimmetrikus háromszögek

3. példa

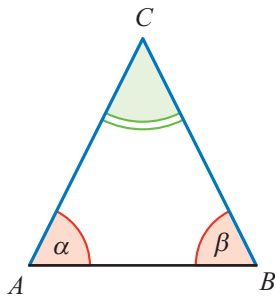
Három, nem egy egyenesen lévő pont egy megadott tengelyhez képest csak úgy helyezkedhet el szimmetrikusan, hogy az egyik pont a tengelyen van, a másik kettő pedig tükörképe egymásnak.

Három ilyen tulajdonságú pontot összekötve kapjuk a tengelyesen szimmetrikus, vagyis tükrös háromszögeket.

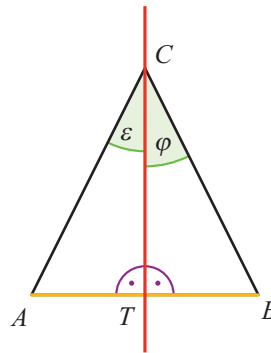
Keressünk egyenlő szakaszokat és egyenlő szögeket az ábrán!



Megoldás



CA szakasz képe
CB szakasz
 $CA = CB$
 $\angle BAC \hat{=} \angle ABC$
 $\alpha = \beta$

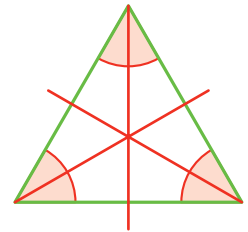


AT szakasz képe
BT szakasz
 $AT = BT$
a tengely az alpra
merőleges
 $\angle ACT \hat{=} \angle BCT$
 $\epsilon = \phi$

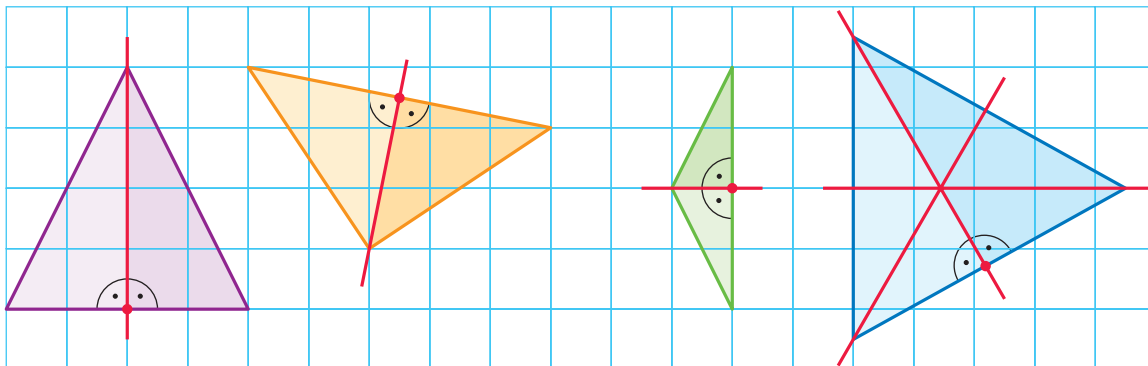
Ha egy háromszög tengelyesen szimmetrikus, akkor egyenlő szárú, és van két egyenlő szöge. A két egyenlő szöget **alapon fekvő szögeknek**, a szárak szögét **szárszögnek** nevezzük.

A tengelyesen szimmetrikus háromszög szimmetriatengelye a háromszög **alapjának felezőmerőlegese**, és ez a tengely **felezi a háromszög szárszögét** is.

Ha egy háromszög a másik két oldalfelező merőlegesére is szimmetrikus, akkor bármely két oldala tükörképe egymásnak, a háromszögnek három szimmetriatengelye van. Az ilyen háromszög minden oldala és minden szöge egyenlő.



Derékszögű háromszögek



Az egyenlő szárú háromszöget a szimmetriatengelye két egyforma derékszögű háromszögre bontja. Az egyenlő oldalú háromszög szimmetriatengelyei hat nagyobb és hat kisebb derékszögű háromszöget határoznak meg.

A derékszögű háromszög és a befogójának egyenesére tükrözött képe együtt egyenlő szárú háromszöget alkot.

4. példa

Írjuk cédulákra a szimmetrikus háromszögekkel kapcsolatban felfedezett tulajdonságokat!

a háromszög egyenlő szárú

a háromszögnek van két egyenlő oldala

a háromszögnek van szimmetriatengelye

a háromszög egyik oldalának felezőmerőlegese felezi a szemközti szöget

a háromszögnek van két egyenlő szöge

Ha tetszőlegesen kiválasztunk két tulajdonságot, és az egyik elé tesszük a „ha”, a másik elé az „akkor” szócskát, akkor biztosan igaz állítást kapunk. Vagyis a fenti tulajdonságok bármelyikéből bármelyik következik. Készítsünk ilyen igaz állításokat!

A megoldásban csak a legfontosabbakat adtuk meg.

Megoldás

Ha **a háromszög egyenlő szárú**, akkor **a háromszögnek van két egyenlő oldala**.

Ha **a háromszögnek van két egyenlő oldala**, akkor **a háromszögnek van két egyenlő szöge**.

Ha **a háromszög egyenlő szárú**, akkor **a háromszögnek van két egyenlő szöge**.

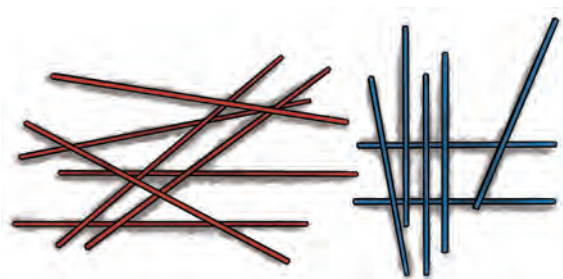
Ha **a háromszögnek van két egyenlő szöge**, akkor **a háromszög egyenlő szárú**.

Ha **a háromszög egyenlő szárú**, akkor **a háromszögnek van szimmetriatengelye**.

Ha **a háromszögnek van szimmetriatengelye**, akkor **a háromszög egyenlő szárú**.

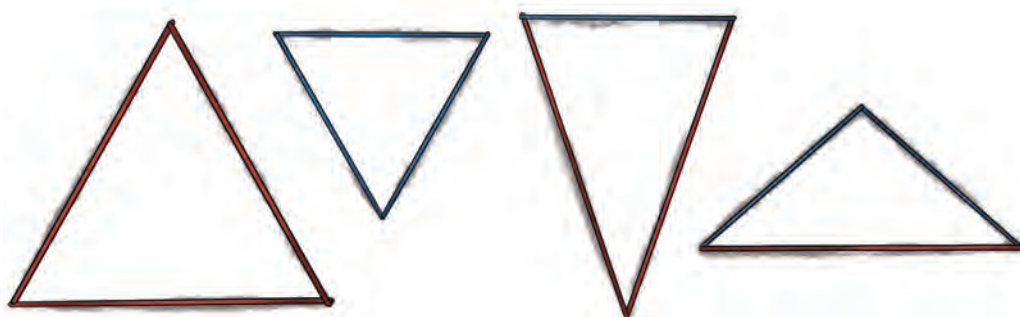
5. példa

4 cm és 6 cm hosszú hurkapálcika darabokból illesztünk össze hármat-hármat úgy, hogy különféle egyenlő szárú háromszögek oldalait alkossák!



Megoldás

Négy különböző eset lehetséges:



Feladatok

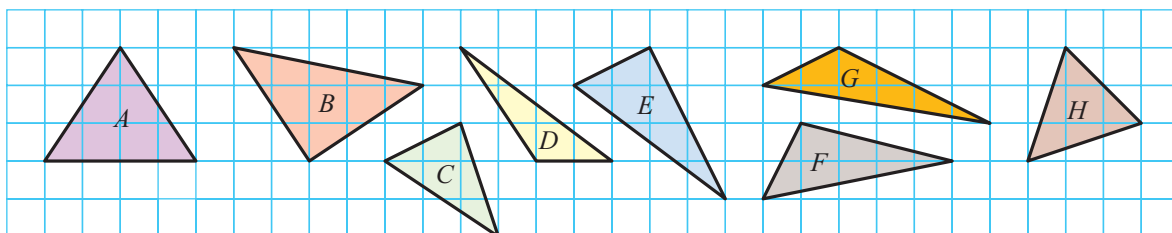


1. 4 cm és 8 cm hosszú rudakból választhatsz. Illessz össze hármat-hármat úgy, hogy egyenlő szárú háromszögek oldalait alkossák! Hányféle megoldás lesz?



2. 5 cm és 7 cm hosszú rudakból választhatsz. Illessz össze hármat-hármat úgy, hogy egyenlő szárú háromszögek oldalait alkossák! Hányféle megoldás lesz?

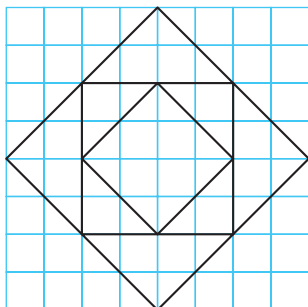
3. a) Válogasd ki azokat a háromszögeket, amelyeknek van derékszögük!



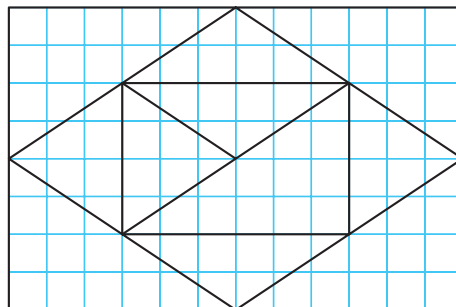
b) Sorold fel azoknak a háromszögeknek a betűjelét, amelyeknek van derékszögnél nagyobb szögük!

c) Milyen tulajdonságú háromszögek maradtak ki?

4. a) Számold meg, hány derékszögű, illetve hány egyenlő szárú háromszög látható az ábrán!



- b) Rajzold le az ábrát a füzetedbe! Színezd azonos színnel az egyforma egyenlő szárú háromszögeket! Rajzold körül azonos színnel az egyforma derékszögű háromszögek határvonalát!



5. Döntsd el, hogy igaz vagy hamis az állítás!

A: A téglalapot egy átlója két egyforma derékszögű háromszögre bontja.

B: A téglalapot két átlója négy egyforma egyenlő szárú háromszögre bontja.

6. Döntsd el, hogy igaz vagy hamis az állítás!

A: A háromszög derékszögű, ha rövidebb oldalára tükrözve a háromszög és képe együtt egyenlő szárú háromszöget alkot.

B: Ha egy háromszögnek van két szimmetriatengelye, akkor a háromszög szabályos.

7. Csoportosítsd az ábrán látható háromszögeket!

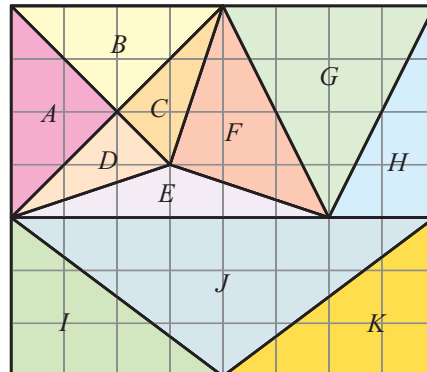
- a) Válaszd ki az egyenlő szárú háromszögeket!

Sorold fel a betűjelüket!

- b) Válaszd ki a derékszögű háromszögeket!

Sorold fel a betűjelüket!

- c) Hány olyan háromszög van, amelyek az a) és a b) feltételnek egyaránt megfelel?

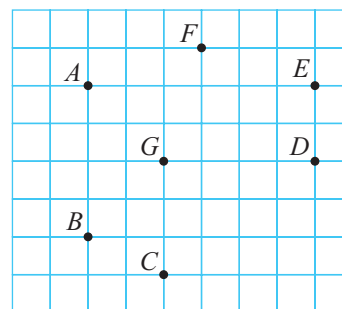


8. I. Válassz az ábráról három pontot úgy, hogy azok derékszögű háromszög csúcsai legyenek!

Keress minél több megoldást!

II. Válassz az ábráról három pontot úgy, hogy azok egyenlő szárú háromszög csúcsai legyenek!

Keress minél több megoldást!



9. Vegyél fel a füzetedben egy AB szakaszt tetszőlegesen! Tudjuk, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú. Keresd meg, hogy hol lehet a C csúcs, ha az AB szakasz a háromszög

a) alapja,

b) szára!

A kapott pontok közül jelöld pirossal azokat, amelyek hegyesszögű, kékkel azokat, amelyek derékszögű, és zölddel azokat, amelyek tompaszögű ABC háromszög csúcsai!

10. Minden feladathoz rajzolj a füzetedbe egy-egy hatszöget és nyolcszöget az ábra alapján!

I. a) Bontsd fel a hatszöget egyenlő szárú háromszögekre!

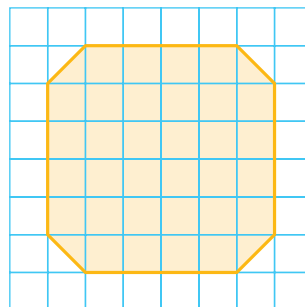
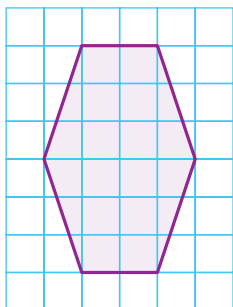
b) Bontsd fel a nyolcszöget egyenlő szárú háromszögekre!

Minél kevesebb háromszöggel oldd meg a feladatot!

II. a) Bontsd fel a hatszöget derékszögű háromszögekre!

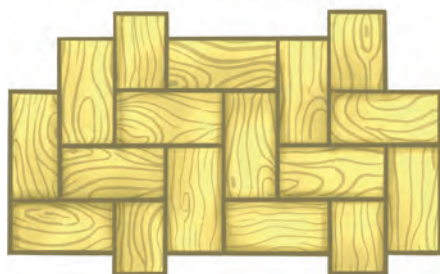
b) Bontsd fel a nyolcszöget derékszögű háromszögekre!

Minél kevesebb háromszöggel oldd meg a feladatot!

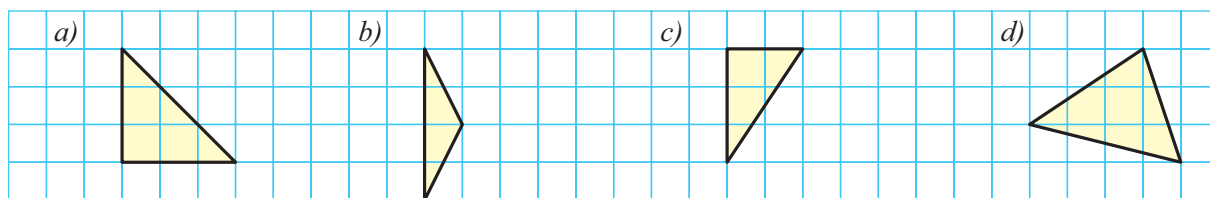


A háromszögek belső szögei

A sík parkettázása azt jelenti, hogy egy rétegben és hézagmentesen befedjük a síkot síkbeli alakzatokkal. Példák különböző parketta- és csempemintázatokra:

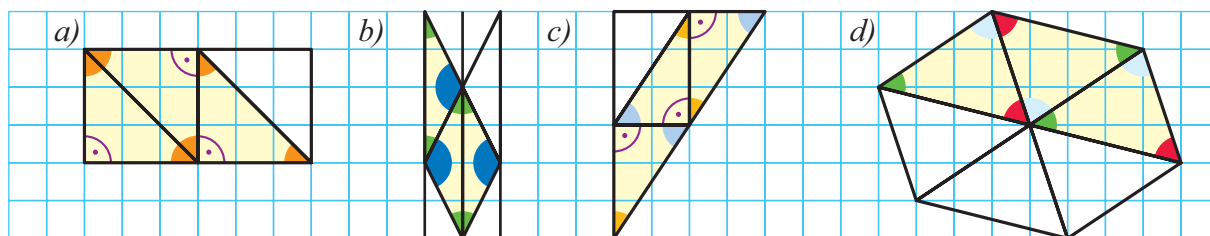


1. példa



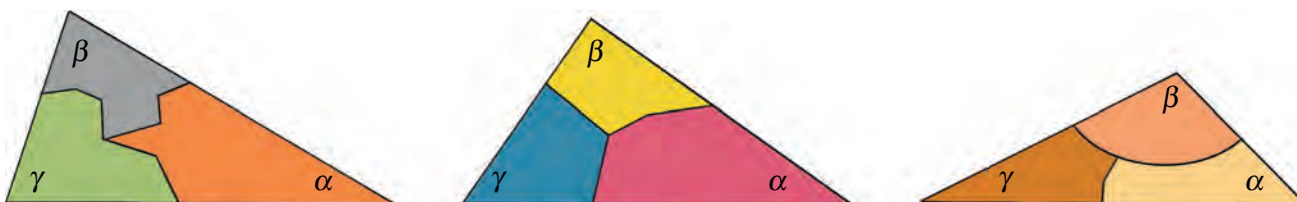
Egyforma háromszögekből készítsünk parkettázásokat úgy, hogy a háromszögek csúcsai csak csúcspontokkal találkozzanak! Figyeljük meg az egy sorban lévő háromszögek egymás mellé került belső szögeit!

Megoldás



A négy ábra mindegyikén az egyforma háromszögek egyenlő szögeit azonos színnel jelöltük. Az egymás mellé került három belső szög egyenesszöget alkot. A három belső szög összege 180° .

2. példa



Állapítsuk meg a háromszögek szögeinek összegét!

Megoldás

Illesszük sorban egymás mellé az α , a β és a γ nagyságú szögtartományt! Legyenek közösek a szögek csúcsai, és kerüljenek egymásra sorban a szögcsúcsok!



A három szög együttesen egyenesszöget alkot.

A háromszög szögeit **belső szögeknek** is nevezik. A háromszög belső szögeinek összege 180° .

3. példa

Számítsuk ki az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha

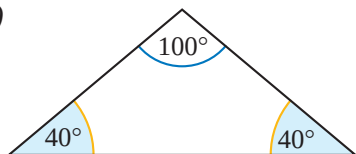
- a szárszöge 80° ;
- az egyik szöge A) 40° ; B) 110° ; C) 60° !

Megoldás

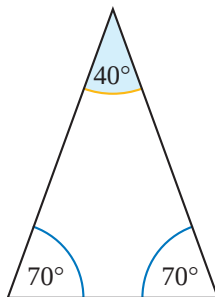
a) Mivel a háromszög belső szögeinek összege 180° , az alapon fekvő szögek nagysága: $(180^\circ - 80^\circ) : 2 = 50^\circ$.

b) Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők. Egy szög nem lehet egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge, ha a kétszerese 180° vagy annál több.

A)



Ha a háromszög **alapon fekvő két szöge** 40° , a szárszöge $180^\circ - (40^\circ + 40^\circ) = 100^\circ$.

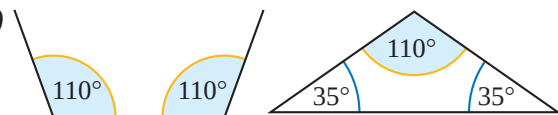


Ha a **szárszög** 40° , akkor az alapokon fekvő két szög összege

$$180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

Az alapon fekvő szögek 70° -osak.

B)

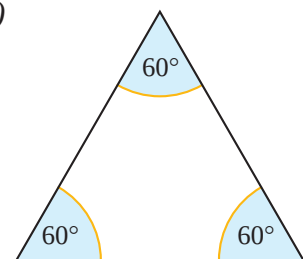


Csak a szárszög lehet tompaszög.

A másik két szög egyenlő, összegük 70° .

Az alapon fekvő szögek 35° -osak.

C)

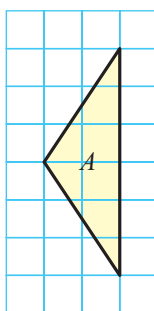


Akár szárszög, akár alapon fekvő szög a 60° -os szög, a másik két szög is 60° -os. A háromszög egyenlő oldalú.

Az egyenlő oldalú háromszög belső szögei 60° -osak.

Feladatok

1. Készíts parkettázást egyforma háromszögekből! A háromszögek csúcsai csak csúcspontokkal találkozzanak.



2. Számítsd ki a háromszög harmadik szögének nagyságát, ha szögei

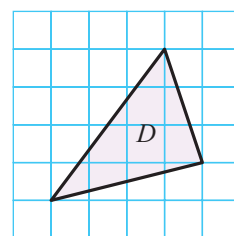
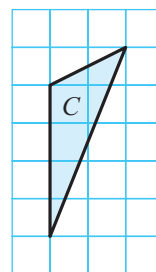
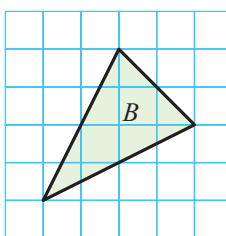
a) 79° és 30° ,

b) 26° és 102° ,

c) $45^\circ 20'$ és 60° ,

d) $65,3^\circ$ és $48,2^\circ$!

Szögei szerint milyenfajta a háromszög?



3. Mekkora az egyenlő szárú háromszög szögei? A háromszög

a) szárszöge 48° ;

b) alapon fekvő szöge 68° ;

c) egyik szöge 30° .

Szögei szerint milyenfajta a háromszög?

4. Számítsd ki a derékszögű háromszög szögeinek nagyságát, ha egyik szöge

a) 30° ,

b) 59° ,

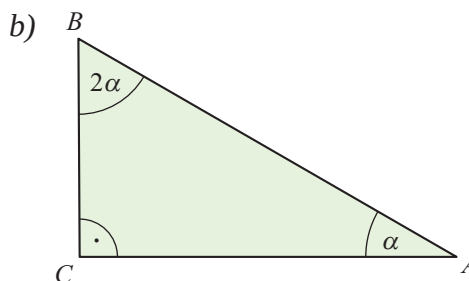
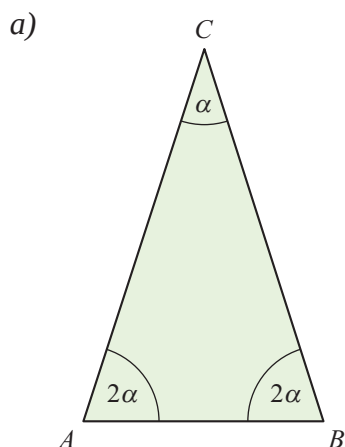
c) 45° ,

d) $70^\circ 30'$,

e) $28,13^\circ$!

5. Mekkora szöget zár be az egyenlő oldalú háromszög két belső szögének szögfelezője?

6. Számítsd ki a háromszög szögeit!



7. Számítsd ki a derékszögű háromszög ismeretlen szögeinek nagyságát, ha a háromszög

- legkisebb szöge harmada a legnagyobb szögnek,
- egyik hegyesszöge ötször akkora, mint a másik hegyesszög!

8. Mekkora az egyenlő szárú háromszög szögei, ha a háromszög szárszöge 15° -kal nagyobb az alapon fekvő szögénél?

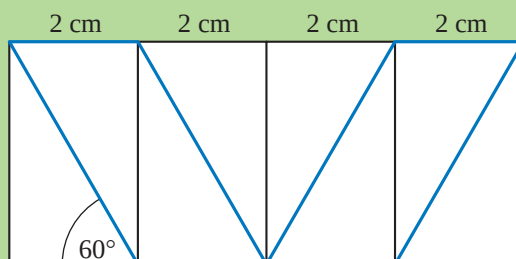
9. Mekkora a háromszög szögei, ha a legkisebb szöge fele a legnagyobbnak, a középső szöge pedig 12° -kal nagyobb a legkisebb szögnél?

10. Döntsd el, igazak-e vagy hamisak az alábbi megállapítások! Válaszaidat indokold!

- Egy háromszögnek nem lehet két derékszöge.
- Minden háromszögnek van két hegyesszöge.
- Tompaszögű háromszögnek lehet derékszöge.
- Derékszögű háromszög hegyesszögeinek összege tompaszög.
- Hegyeszögű háromszög két hegyesszögének összege mindig tompaszög.



11. Hány centiméter a kék vonal hossza?



Szögek összehasonlítása, szerkesztése

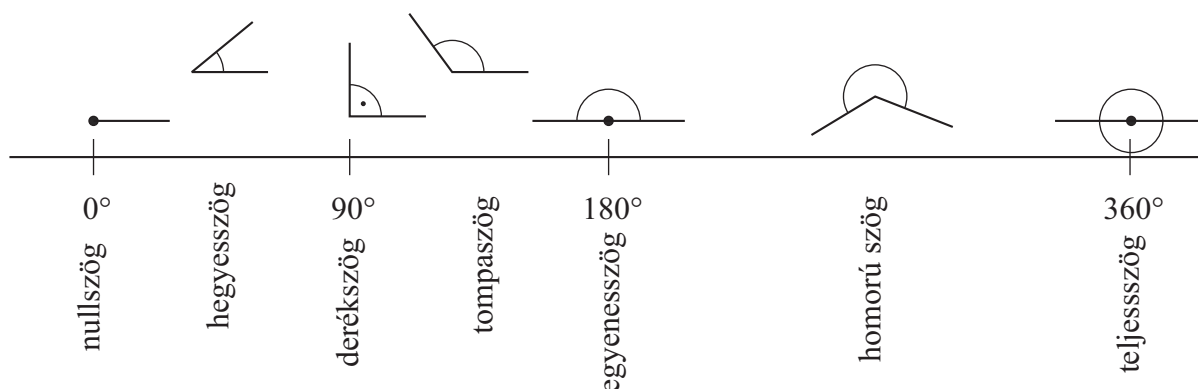
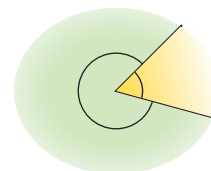
Szögek



Két közös kezdőpontú félegyenes a síkon két **szögtartományt** határoz meg. A félegyenesek a **szög szárai**, a közös kezdőpont a **szög csúcsa**.

A szögmérés egysége a fok ($^{\circ}$), kisebb egységei a szögperc ($'$) és a szögmásodperc ($''$).

$$1^{\circ} = 60' \quad 1' = 60'' \quad 1^{\circ} = 3600''$$



Szögek összehasonlítása

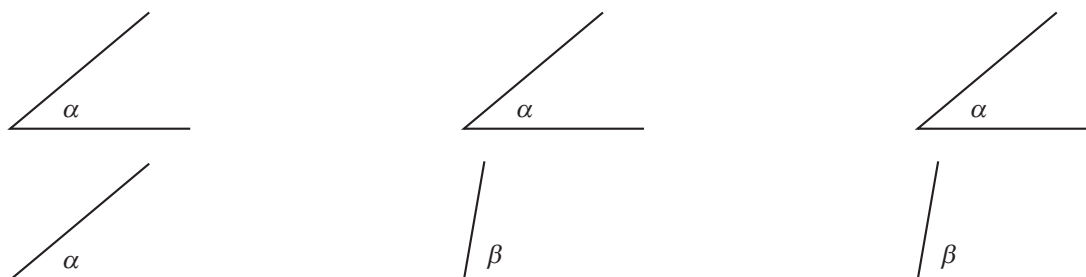
Szakaszok hosszát könnyen össze tudjuk hasonlítani körző segítségével anélkül, hogy vonalzóval megmérnénk azokat. Szögek nagyságát is össze tudjuk hasonlítani szögmérő nélkül is, körző segítségével.

1. példa

Az ábrán kétféle méretű szöget láthatunk. Az egyenlőket azonos betűvel jelöltük meg.

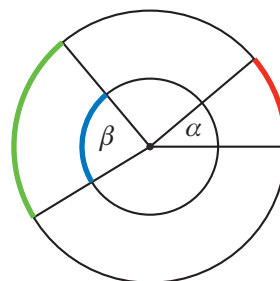
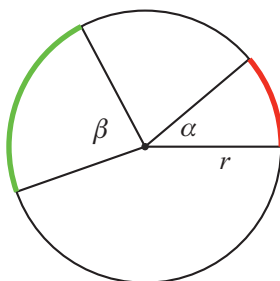
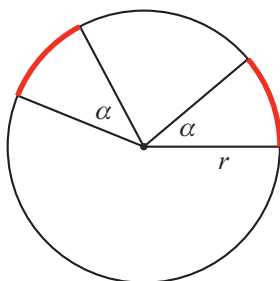
Figyeljük meg, mit tapasztalunk, ha a szögek csúcsa körül, a szögek belsejében azonos sugárral köríveket húzunk!

Figyeljük meg azt is, mi történik, ha különböző sugarú köröket rajzolunk a szögekbe!



Megoldás

Legyenek a szögek egy-egy kör középponti szögei! Vizsgáljuk meg, mi történik, ha a körök egyenlő vagy különböző sugarúak!

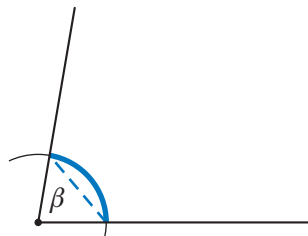
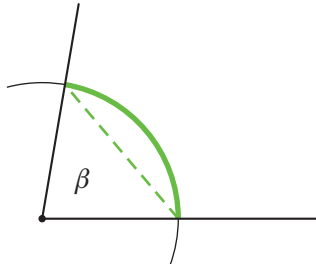
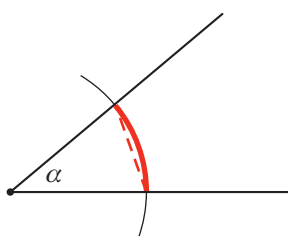
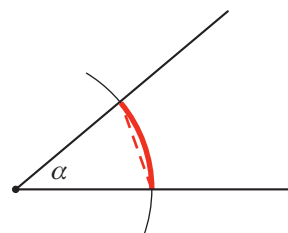
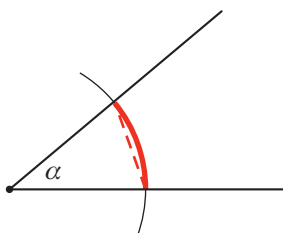
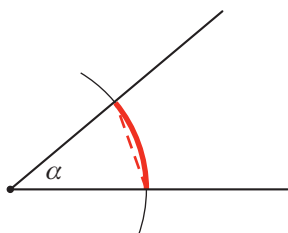


Egyenlő sugarú körökből egyenlő szögek egyenlő íveket vágnak ki.

Egyenlő sugarú körökből nagyobb szögek nagyobb ívet vágnak ki.

Különböző sugarú körök segítségével nem tudjuk összehasonlítani a szögeket.

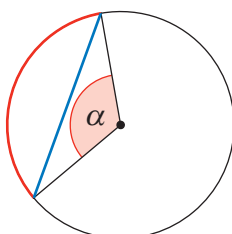
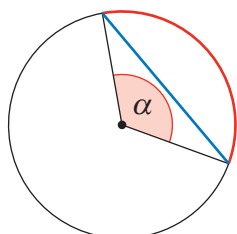
Ha két szöget össze akarunk hasonlítani, elég a szögek csúcsa körül egyenlő sugarú köríveket rajzolnunk, és az ívek hosszát összehasonlítani.



Egyenlő sugarú körökben az egyenlő ívekhez egyenlő középponti szögek tartoznak.

Egyenlő sugarú körökben az egyenlő ívekhez egyenlő húrok tartoznak.

A félkörnél kisebb ívek hosszát a hozzájuk tartozó húrok segítségével hasonlítjuk össze.



Szerkesztések körzővel és egyenes vonalzóval

Szögmásolás

2. példa

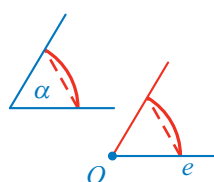
Szerkesszünk adott nagyságú szöget adott O kezdőpontú e félegyenesre!

Megoldás

Adatok



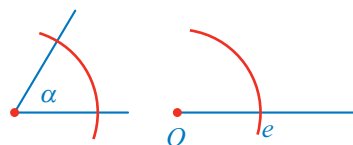
Vázlat



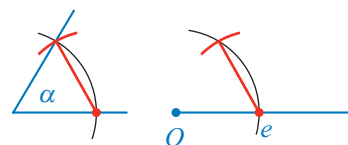
Összefüggések

Egyenlő sugarú, egyenlő ívű körcikkek középponti szöge egyenlő. Az egyenlő íveket egyenlő húrok jelölik ki.

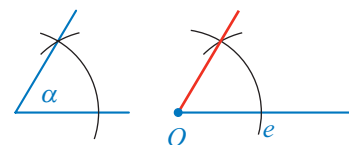
A szerkesztés lépései



1. Egyenlő sugarú íveket rajzolunk.

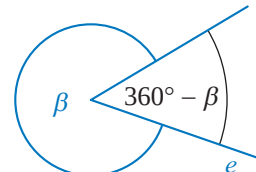


2. Körzővel átmásoljuk a körcikk húrját.



3. A metszéspontot összekötjük az O ponttal.

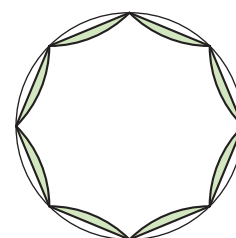
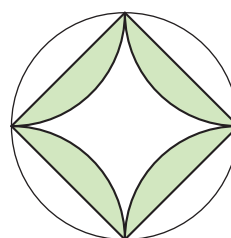
Ha az adott szög 180° -nál nagyobb, akkor azt a szöget másoljuk át, amelyik az adott homorú szöget teljesszögre egészíti ki.



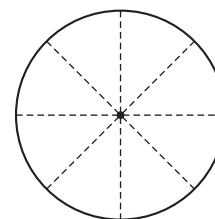
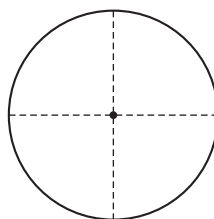
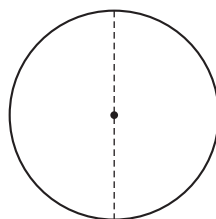
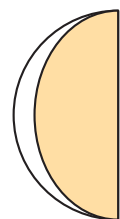
Nevezetes szögek szerkesztése



Vágjunk ki írólapból 5 cm sugarú köröket! Hajtogassunk ezekből négyzetet és egyenlő oldalú nyolcszöget!



Így dolgozzunk:



A hajtogatásnál egyenlő középponti szögek keletkeznek: 180° , 90° , 45° .

3. példa

Rajzoljunk egy O középpontú, 2 cm sugarú kört, és rajzoljuk meg a körnek a 2 cm hosszúságú AB húrját! Mekkora az AOB középponti szög?

Megoldás

Az ABO háromszög minden oldala 2 cm, ezért a háromszög egyenlő oldalú.

Belső szögeinek nagysága 60° .

Az O középpontnál egy 60° -os és egy 300° -os szög van.

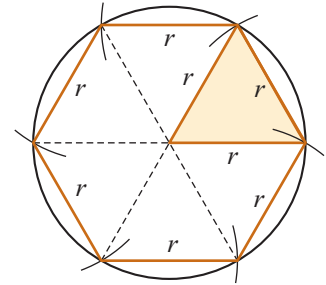
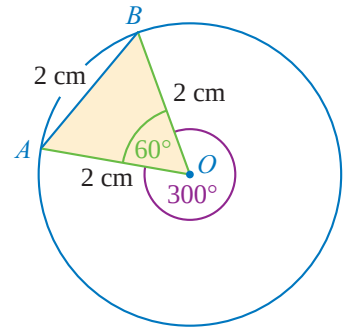
Megjegyzés:

Tetszőleges r sugarú körben a középpont és egy r hosszúságú húr két végpontja egyenlő oldalú háromszög csúcsait jelöli ki, melynek szögei 60° -osak.

Hat egymáshoz csatlakozó r hosszúságú húr rajzolható a körbe.

A hat középponti szög együttesen teljesszöget alkot.

A középponti szögek 60° többszörösei: 60° , 120° , 180° , 240° , 300° , 360° .



4. példa

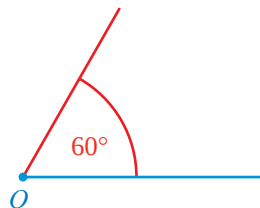
Szerkesszünk 60° -os szöget adott félegyenesre!

Megoldás

Adatok

O

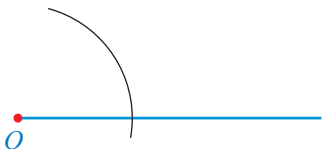
Vázlat



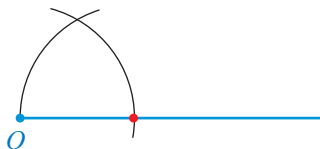
Összefüggés

Ha az O pont köré kört rajzolunk, és a félegyestől sugár hosszúságú húrzt jelölünk ki a körben, akkor 60° -os középponti szöget kapunk.

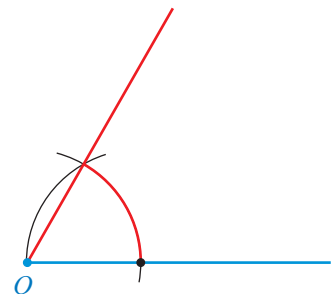
A szerkesztés lépései



1. O körül tetszőleges sugarú kör rajzolása.



2. A kör és a félegyenes metszéspontjából a sugár felmérése.



3. Az O pontból induló és a kapott ponton átmenő félegyenes megrajzolása.

Szögmásolással, szögfelezéssel és a szerkesztett szögek összevonásával újabb szögeket szerkeszthetünk. Például: 30° , 15° , 75° , 90° , 120° .

5. példa

Szerkesszük meg az óra nagy- és kismutatója által bezárt szöget, ha az óra 1 órát, 3 órát, 4 órát mutat!

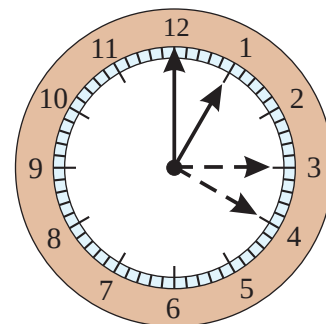
Megoldás

Összefüggések

Az óra két mutatója által bezárt szög 1 órakor $360^\circ : 12 = 30^\circ$,

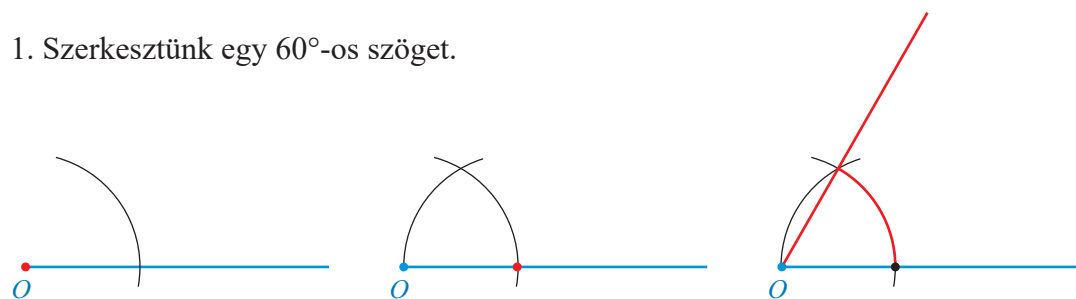
3 órakor 90° és 4 órakor 120° .

$$30^\circ = 60^\circ : 2; \quad 90^\circ = 60^\circ + 30^\circ; \quad 120^\circ = 60^\circ \cdot 2$$

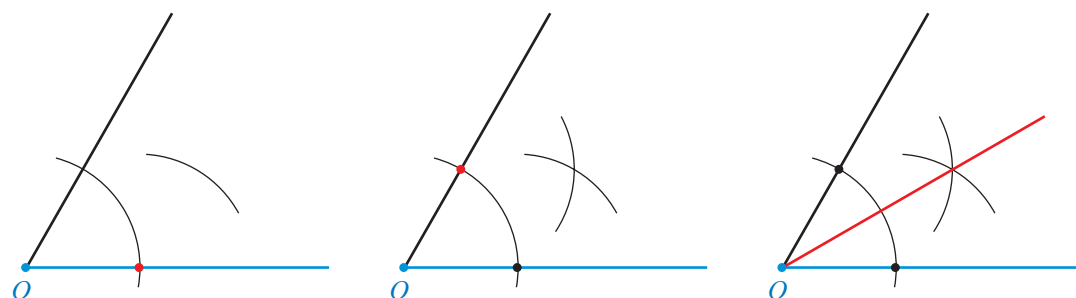


A szerkesztés lépései

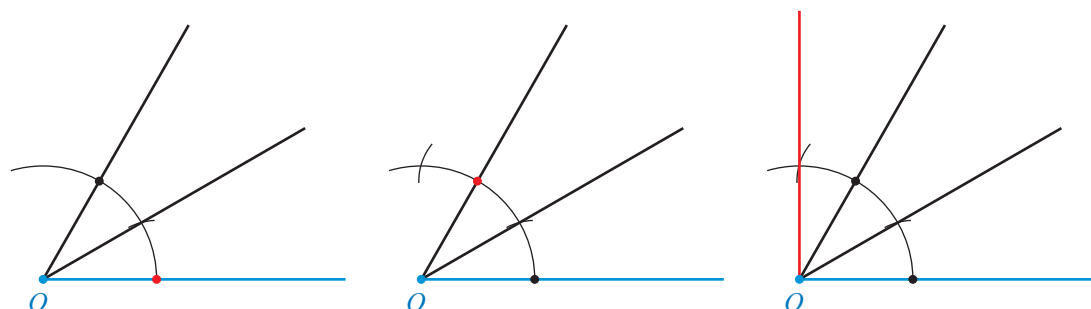
1. Szerkesztünk egy 60° -os szöget.



2. Szögfelezéssel megszerkesztjük a 30° -os szöget.

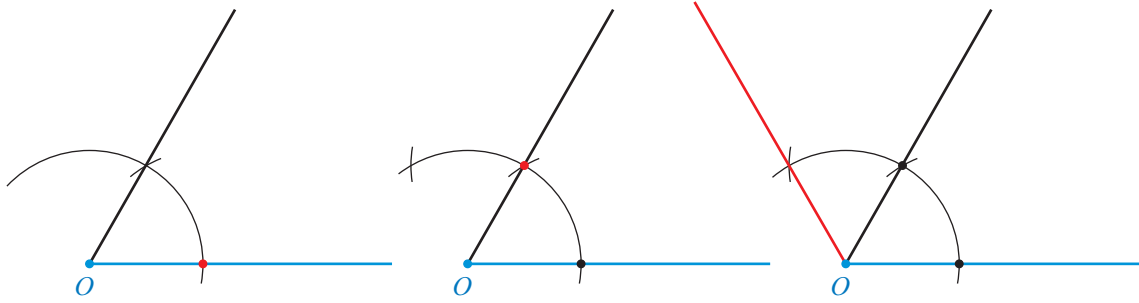


3. Szögmásolással összeadjuk a 60° -os és a 30° -os szöget $\rightarrow 90^\circ$ -os szög.



A 90° -os szöget a 180° felezésével is megszerkeszthetjük.

4. Szögmásolással megszerkesztjük a 60° -os szög kétszeresét $\rightarrow 120^\circ$ -os szög.



6. példa

Szerkesszünk körzővel és egyenes vonalzóval 105° -os szöget!

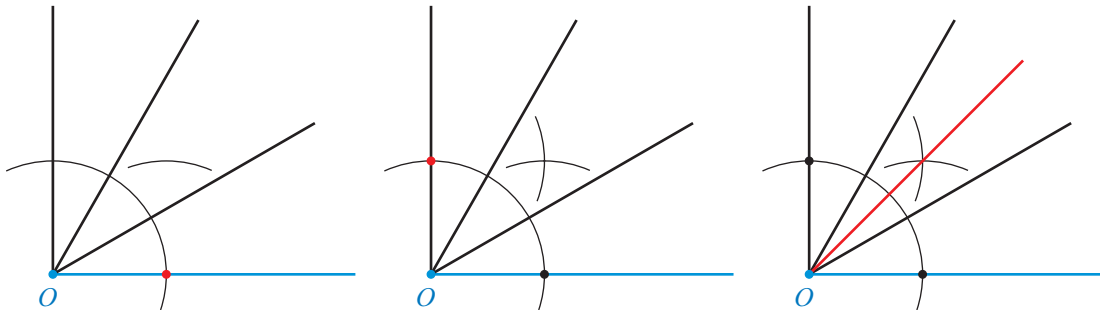
Megoldás

Összefüggések

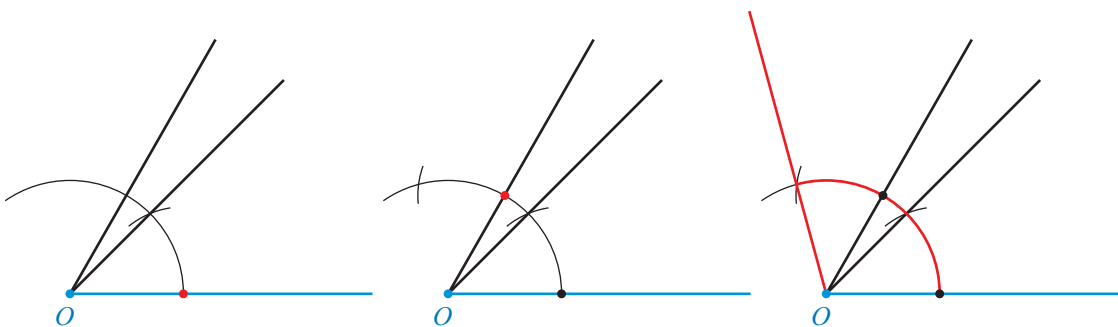
$$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ \text{ és } 45^\circ = 90^\circ : 2$$

A szerkesztés lépései

1. Szögfelezéssel megszerkesztjük a 90° -os szög felét $\rightarrow 45^\circ$ -os szög.



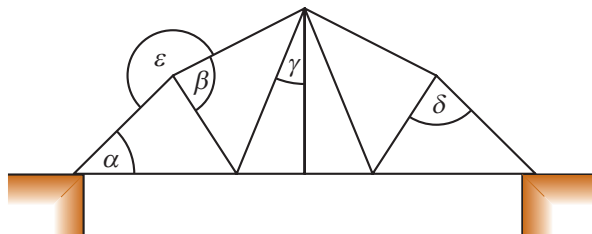
2. Szögmásolással összeadjuk a 60° -os és a 45° -os szögeket $\rightarrow 105^\circ$ -os szög.



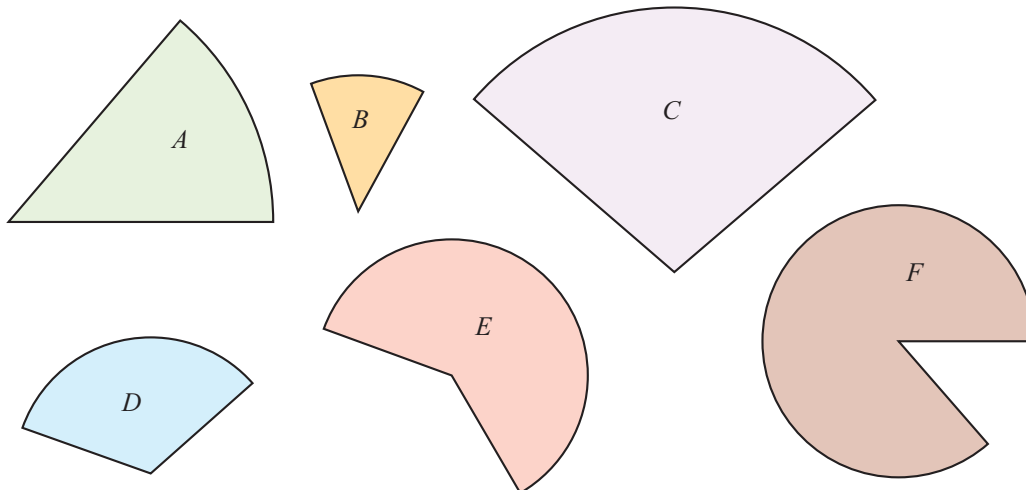
Megjegyzés: A 105° szerkesztését más összefüggések alapján is elvégezhetjük. Például $105^\circ = 90^\circ + 15^\circ$, $15^\circ = (60^\circ : 2) : 2$.

Feladatok

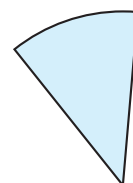
1. a) Mérd meg a megjelölt szögeket!
b) Keresd a hídszerkezet rajzán egyenlő szögeket!



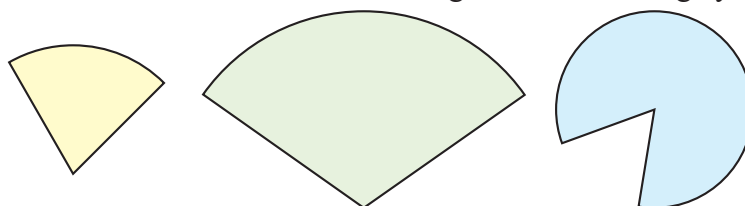
2. Mérd meg a körcikkek sugarát, húrját, középponti szögét! Foglald táblázatba az adatokat!



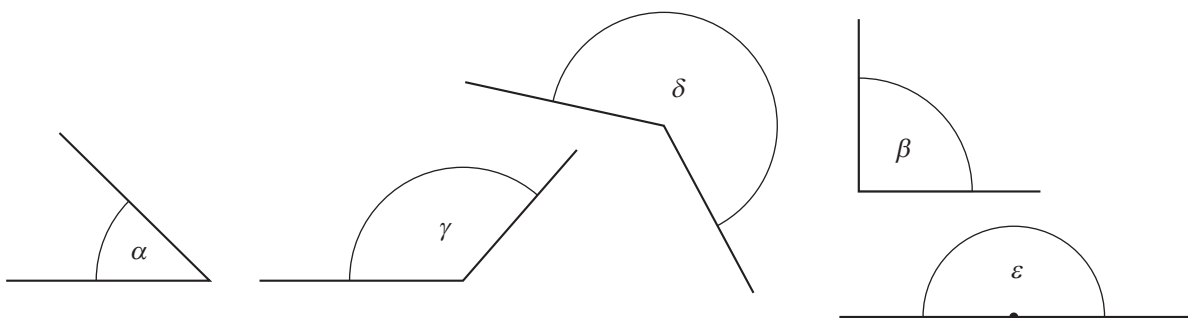
3. Szerkessz az ábrán láthatónál 2-szer, 3-szor, 4-szer nagyobb középponti szögű körcikket! Hányszor nagyobb középponti szögű körcikk éri el vagy lépi túl a teljesszöget? Becsüld meg az eredeti körcikk középponti szögeit!



4. Másold át a füzetedbe a körcikkeket, és szerkeszd meg a szimmetriatengelyüket!



5. Körző és egyenes vonalzó segítségével másold át a szögeket a füzetedbe! Szerkesztésedet ellenőrizd méréssel!

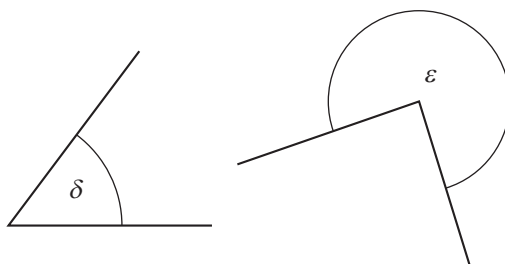




6. Szögmérő használata nélkül állapítsd meg!

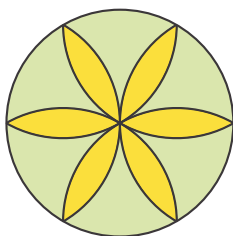
a) Nagyobb-e 90° -nál a δ szög kétszerese?

b) Melyik nagyobb? A 135° -os szög vagy az ε szög fele?

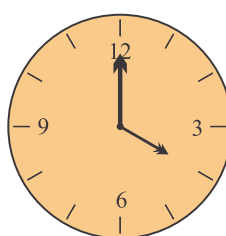


7. Készítsd el az ábrákat egy-egy 4 cm sugarú körben! Tetszés szerint színezd az ábráidat!

a)



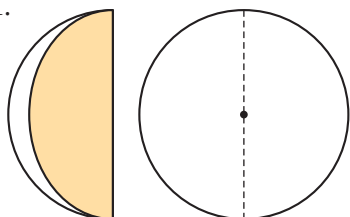
b)



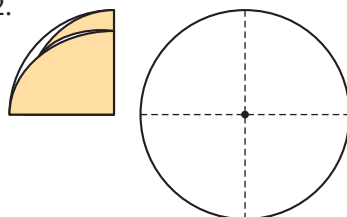
8. Vágj ki 5 cm sugarú köröket!

Hajtogass szabályos háromszöget és egyenlő oldalú hatszöget az ábrák alapján!

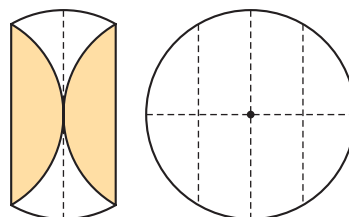
1.



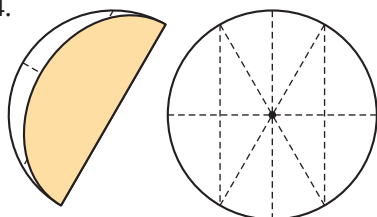
2.



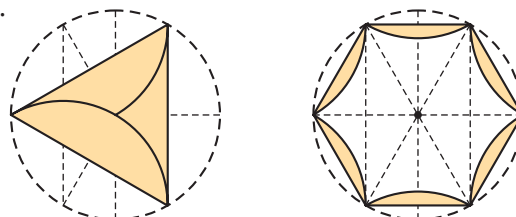
3.



4.



5.



9. Szerkessz egy 4 cm sugarú körbe olyan négyzetet, amelynek csúcsai a körvonalon vannak!

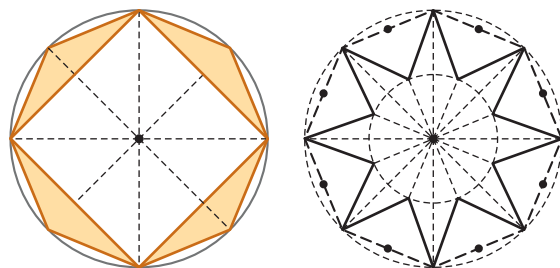


10. Szerkessz egy 3 cm sugarú körbe olyan téglalapot, amelynek az átlói 60° -os szöget zárnak be!

- 11.** Készítsd el körzővel és egyenes vonalzóval az ábrákat egy-egy 4 cm sugarú körben, egyenlő oldalú nyolcszögekből kiindulva.

A belső kör sugara 2 cm.

A rajzon az oldalak felezőpontjait jelöltük.



- 12.** Minden részfeladathoz szerkessz egy 4 cm sugarú kört, és rajzold meg egy sugarát! A sugártól indulva szerkessz egymáshoz csatlakozó egyenlő nagyságú középponti szögeket, ha a szög

a) 120° , b) 30° , c) 90° , d) 45° , e) 75° !

Hány középponti szöget tudtál szerkeszteni az egyes esetekben anélkül, hogy egy korábbi szöget lefedtél volna?

Volt-e olyan eset, amikor a már megszerkesztett szögek még nem fedték le a teljes kört, de a következő szög szerkesztésénél már átfedés keletkezett?

- 13.** Szerkessz 180° -os szöget! Szerkessz szögmásolással, szögfelezéssel

a) 90° , b) 270° , c) 45° , **d) 135°** , **e) 225° nagyságú szöget!**

- 14.** Szerkessz 60° -os szöget! Szerkessz szögmásolással, szögfelezéssel

a) 30° , b) 120° , c) 240° , **d) 15°** , **e) 75° nagyságú szöget!**

- 15.** Szerkessz szabályos háromszöget, ha oldalának hossza

a) 2 cm, b) 4 cm, c) 6 cm.

A b) és c) szerkesztésnél használd fel az a) szerkesztés ábráját, ha tudod.

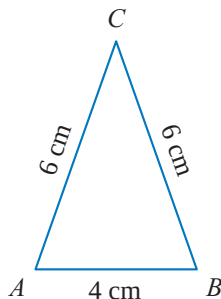
Háromszögek szerkesztése

1. példa

Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, amelynek alapja 4 cm, szárai 6 cm hosszúak!

Megoldás

Adatok, vázlat



Összefüggések

A háromszög C csúcsa az A és B csúcsoktól 6 cm távolságra van, tehát rajta van az A középpontú 6 cm sugarú és a B középpontú 6 cm sugarú körön is. C a két kör metszéspontja.

A szerkesztés lépései

1. Megszerkesztjük a 4 cm hosszú szakaszt. (A szakasz két végpontja a háromszög A és B csúcsa.)
2. A középpontú, 6 cm sugarú kört szerkesztünk. (Elég a körből a várt metszésponthoz közeli pontokat megrajzolni.)
3. B középpontú, 6 cm sugarú kört szerkesztünk. (Elég a körből a várt metszésponthoz közeli pontokat megrajzolni.)
4. Megjelöljük a két kör metszéspontjait (C_1, C_2).
5. Összekötjük az A, B, C_1 és A, B, C_2 pontokat.

Ellenőrzés

Az így szerkesztett C pont rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén, tehát a megszerkesztett háromszög egyenlő szárú.

Két ugyanolyan háromszöget kaptunk. Az AB szakaszt a síkon bárhol felvehetjük, akkor is az előzőekkel azonos háromszöget kapunk. Ezek a háromszögek kölcsönösen fedésbe hozhatók egymással.

Megjegyzés:

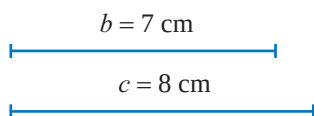
Az egymással fedésbe hozható háromszögeket **egybevágó háromszögeknek** nevezzük. Az egybevágó háromszögek közül elég egyet megszerkesztetni.

2. példa

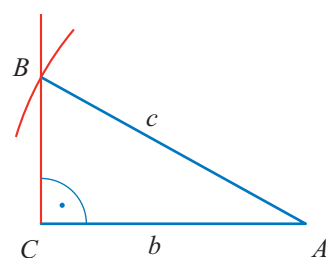
Szerkesszünk derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója 7 cm, az átfogója 8 cm hosszú!

Megoldás

Adatok



Vázlat

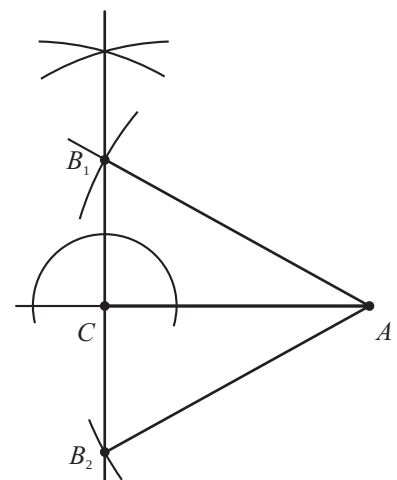


Összefüggések

A befogók merőlegesek egymásra. Az átfogó a derékszöggel szemközi oldal. A B csúcs az A ponttól 8 cm-re, az AC -re C -ben állított merőlegesen van.

A szerkesztés lépései

1. Megszerkesztjük a 7 cm hosszúságú szakaszt. (A szakasz két végpontja a háromszög A és C csúcsa.)
2. Az AC egyenesre C pontban merőlegest szerkesztünk. (A derékszög új szára a BC befogó egyenese.)
3. A középpontú 8 cm sugarú kört szerkesztünk.
4. Megjelöljük a kör és a befogó egyenesének metszéspontjait. (B_1 és B_2)
5. Összekötjük az AB_1C és AB_2C pontokat.



Ellenőrzés

Az így szerkesztett B pont rajta van az AC -re C -ben állított merőlegesen, tehát a háromszög derékszögű. Két egybevágó háromszöget szerkesztettünk.

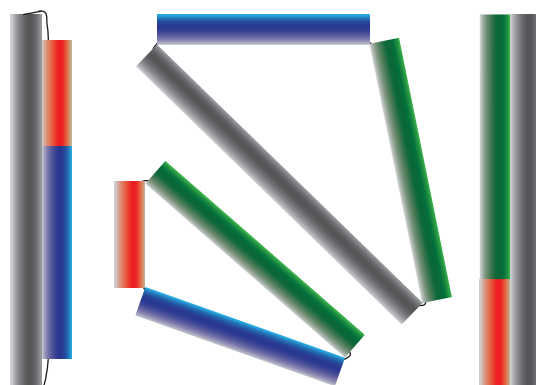
3. példa

Vágjunk le szívoszálból 2 cm, 4 cm, 5 cm és 7 cm hosszú darabokat! Hármát felfűzve készítsünk háromszöget!

- Hányféle háromszög alakítható ki? Melyik három darabból nem készíthető háromszög?
- Szerkesszük meg a legkisebb kerületű háromszöget!

Megoldás

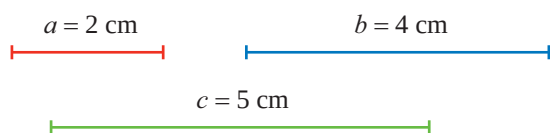
a) Négy esetet kell megvizsgálnunk. Két esetben háromszög alakul ki. A 2 cm, a 4 cm és az 5 cm hosszú darabokból, valamint a 4 cm, az 5 cm és a 7 cm hosszú szálakból lesz háromszög. Nem záródik a 2 cm, 4 cm, 7 cm hosszú darabok felfűzése, nem alkot háromszöget a 2 cm, 5 cm, 7 cm hosszú szakasz sem. Bármelyik szakaszt fűzzük középre, ezt az eredményt kapjuk.



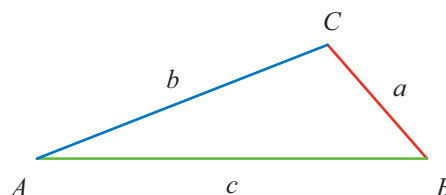
- A két háromszög kerülete 11 cm és 16 cm.

Adatok

a kisebb kerületű háromszög oldalai:



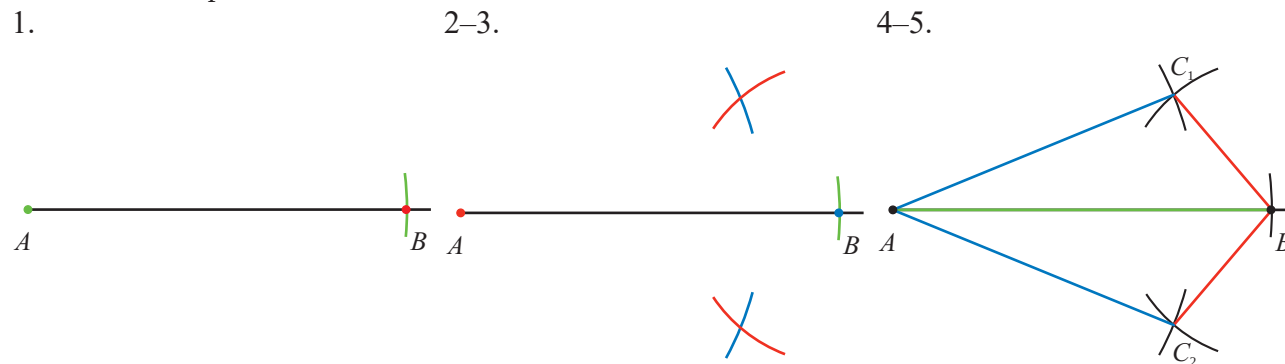
Vázlat



Összefüggések

A C csúcs az 5 cm-es oldal végpontjaitól 4 cm-re, illetve 2 cm-re van.

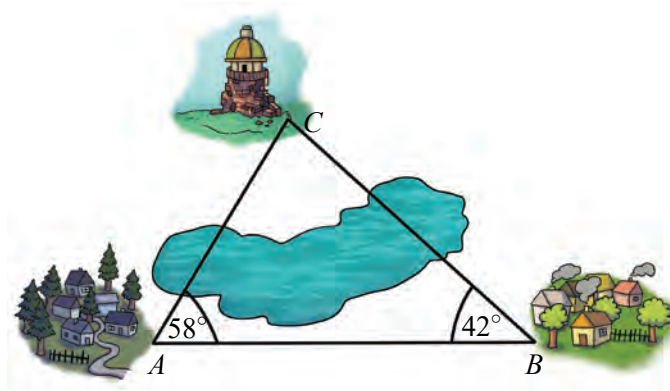
A szerkesztés lépései



4. példa

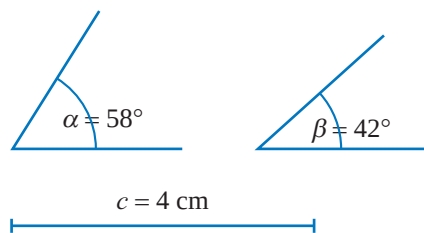
A és B község távolsága 4 km. A tó túloldalán lévő C torony B-től való távolságát a terep miatt nem lehet megmérni. Ezért a CAB szöget és a CBA szöget mértük meg. Kicsinyített ábrát készítve, mérés után kiszámíthatjuk a CB távolságot.

Szerkesszük meg az ABC háromszöget kicsinyítve úgy, hogy 1 km-nek 1 cm feleljen meg! Hány km a CB távolság?

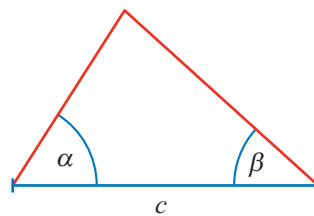


Megoldás

Adatok



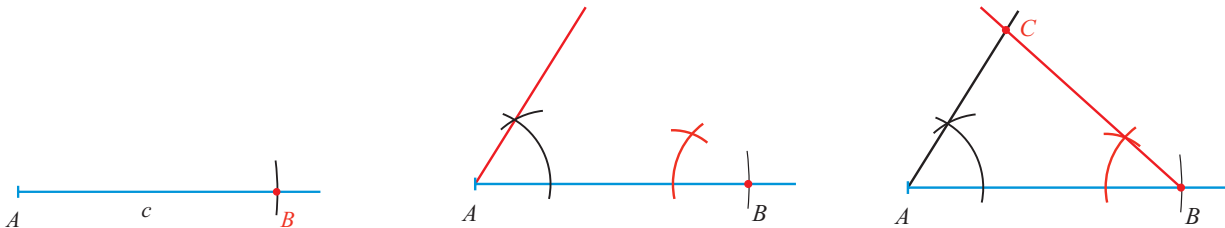
Vázlat



Összefüggések

A C csúcs a 4 cm-es szakaszra felmért 58° -os és 42° -os szögek szarainak metszéspontja.

A szerkesztés lépései

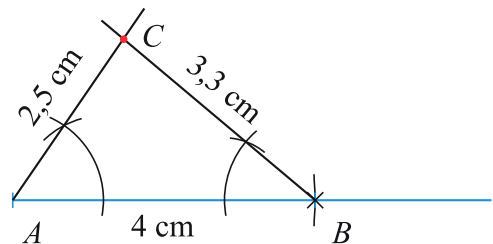


1. Átmásoljuk a C hosszúságú szakaszt.
- 2–3. A C szakaszra átmásoljuk az α és β szöget.
4. Megjelöljük a szögszárak metszéspontját.

Az ABC háromszög a feltételeknek megfelelő háromszög.

A CB szakasz hossza $\approx 3,3$ cm.

A valódi távolság $\approx 3,3$ km = 3300 m.



Háromszögek szerkesztésekor megfigyelhettük, hogy

- a háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál,
- a háromszög bármely két belső szögének összege kisebb 180° -nál.

Feladatok

1. Marcsinak olyan háromszög alakú virágoskertje van az udvaron, amelynek minden oldala 2 méter. Szerkeszd meg a háromszög alakú kert „kicsinyített” képét úgy, hogy 2 méternek a rajzodon 4 cm feleljen meg!

2. Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, amelynek
a) alapja 5 cm, szárai 6 cm hosszúak;
b) alapja 6 cm, szárai 5 cm hosszúak!

3. Szerkessz szimmetrikus háromszöget, amelynek oldalai

- a) 4 cm és 3 cm,
b) 2,5 cm és 6 cm,
c) 3 cm és 5 cm!

Hányféle háromszöget kaptál az egyes esetekben?

Mely esetekben kaptál hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszöget?

4. Szerkessz derékszögű háromszöget, ha

- a) befogói 12 cm és 5 cm hosszúak!
b) egyik befogója 5 cm hosszú, és az átfogóval bezárt szöge 60° !
c) átfogója 6 cm, és egyik hegyesszöge 45° !

Mérés után számítsd ki a háromszögek területét!

5. A „Vigyázz Rám” Nemzeti Park védett növényekkel borított területére sem járművel, sem gyalogosan nem lehet rámenni. A szigorúan védett terület alakja derékszögű háromszög, aminek a határán végig út halad. Szerkeszd meg az utak ábráját 100 000-szeres kicsinyítésben, ha a két hosszabb oldal 7,5 km és 6 km! Mérés segítségével számítsd ki, mekkora a határvonal legrövidebb szakasza!



Nézz utána az interneten, hány nemzeti park van Magyarországon! Hány km^2 -e parkok összterülete?

6. Szerkessz derékszögű háromszöget, amelynek adott

- a) két befogója,



- b) az egyik befogója és az átfogója!

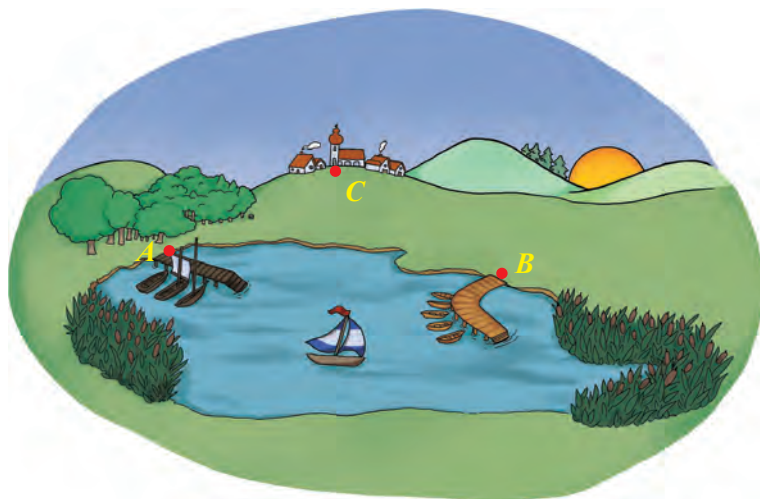


7. Szerkeszd meg a háromszöget, ha oldalainak hossza

- a) 4 cm; 7 cm; 10 cm;

- b) 2,5 cm; 6 cm; 6,5 cm!

8. Egy háromszög két oldala 3 dm és 5 dm. Igaz-e, hogy a harmadik oldal hossza
- nem lehet nagyobb 7 dm-nél;
 - kisebb lehet, mint 5 dm;
 - kisebb lehet, mint 3 dm;
 - kisebb lehet, mint 8 dm;
 - nagyobb lehet, mint 8 dm;
 - kisebb lehet, mint 2 dm?
9. Szerkeszd meg a háromszöget, ha oldalainak hossza
- 4 cm, 5 cm, 6 cm,
 - 5 cm, 3 cm, 3 cm,
 - 3 cm, 4 cm, 5 cm!
- Szögei és oldalai szerint milyen háromszög keletkezett?
Ellenőrizd az alábbi állításokat!
A hosszabb oldallal szemközi szög a nagyobb.
Egyenlő oldalakkal szemközt egyenlő szögek vannak.
10. Szerkessz háromszöget a megadott szakaszból!
- 3 cm, 6 cm, 10 cm
 - 
11. Szerkessz háromszöget, ha adott két oldala és az általuk közrezárt szög! A szögeket szögmérő nélkül szerkeszd!
- 4 cm, 7 cm, 60°
 - 4 cm, 5 cm, 120°
 - 5,5 cm, 5,5 cm, 150°
12. Szerkessz háromszöget, ha adott egy oldala (c) és azon az oldalon lévő két szöge (α , β)!
- $c = 85$ mm, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$
 - $c = 70$ mm, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$
13. Szerkeszd meg a háromszöget, ha minden csúcsa ugyanazon a 2 cm sugarú körön van! Mérd meg a harmadik oldalának hosszát, és számítsd ki a háromszög területét, ha két oldalának hossza
- 3 cm és 3,5 cm;
 - 2 cm és 2 cm;
 - 2 cm és 4 cm;
 - 3 cm és 5 cm!
14. Rajzolj a füzetedbe egy háromszöget! Szerkeszd meg mindhárom oldalának a felezőmerőlegesét! Mit tapasztalsz?
15. A rajzon C Csikóvár helyét, A az Alsó-kikötőt, B a Belső-kikötőt jelöli. Csikóvár az Alsó-kikötőtől 1,2 km, a Belső-kikötőtől 2,5 km távolságra van. A CA és CB szakaszok által bezárt szög 68° -os.



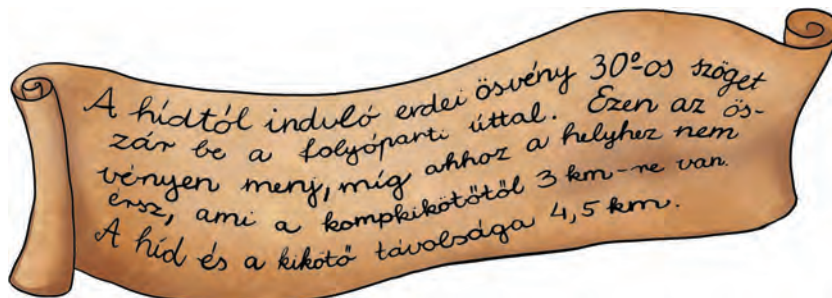
Készíts méretarányos ábrát, mérd meg az AB szakasz hosszát a rajzodon, majd számítsd ki a valódi távolságot!

16. a) Tervezz játszótér! Készíts vázlatrajzot! Helyezd el úgy a fészekhintát (F), a mászóvárat (V) és az ivóvizet adó kutat (K), hogy a kút 12 méter távolságban legyen mindkét játékszer-től, a hinta és a vár távolsága 14 méter legyen!



- b) Szerkeszd meg a tervrajzot! Ami a valóságban 2 méter, az legyen a rajzodon 1 centiméter!

17. A hatodikosok akadályversenyére ilyen térképvázlat és utasítás készült.



- a) Szerkesszük meg az utasításban említett helyet (a térképvázlat T pontját)! A füzetedben 100 000-szeres kicsinyítést alkalmaz!
- b) Mekkora utat kell megtenni az ösvényen a találkozóhelyig a hídtól indulva? Mérj és számolj!

18. Adj meg négy olyan egész számot, hogy bármely három lehessen egy háromszög három oldalának mérőszáma azonos egységekben mérve!

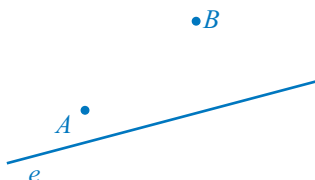
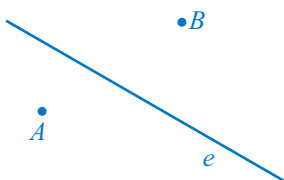
19. Adj meg négy olyan szakaszt, hogy semelyik háromból ne lehessen háromszöget szerkeszteni!

20. Vegyél fel a füzetedben egy e egyenest, valamint A és B pontokat az ábrához hasonlóan!

Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, amelynek C csúcsa az e egyenesen van, és

- a) a háromszög alapja az AB szakasz,

- b) a háromszög szára az AB szakasz!



Szabályos sokszögek

Az alábbi fotókon közel szimmetrikusak a virágok, elképzelhetjük a szimmetriatengelyeiket.



pletyka virág



pipacs



petúnia



nácisz

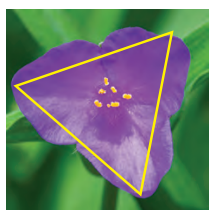


májvirág



salátaboglárka

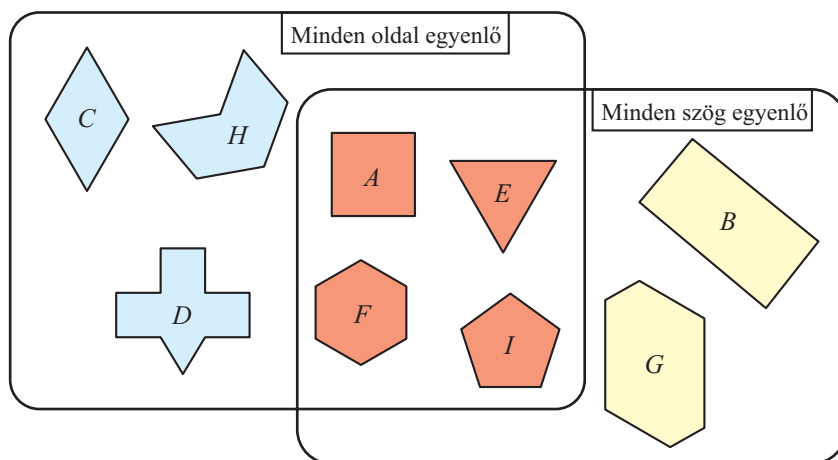
A virágokat sokszögekkel modellezhetjük.



Néhány sokszöget oldalaik és szögeik egyenlősége alapján csoportosítottunk.

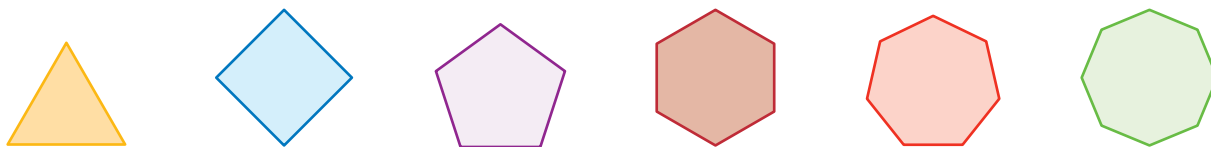
A sokszögek között találunk olyanokat, amelyekben vannak egyenlő oldalak, és olyanokat, amelyekben vannak egyenlő szögek.

A két halmaz közös elemei olyan sokszögek, amelyeknek minden oldala és minden szöge egyenlő. Ezeket **szabályos sokszögeknek** nevezzük.

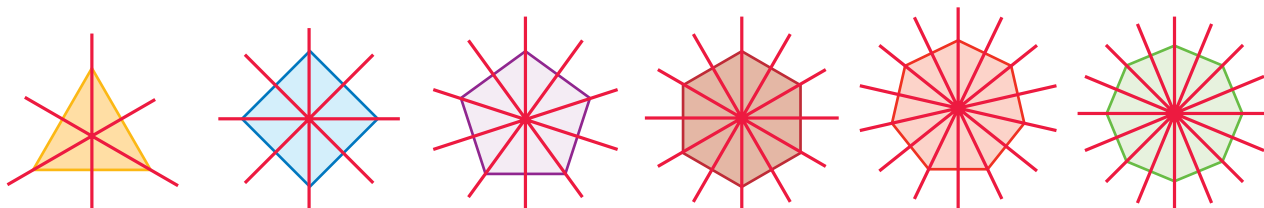


Példa

Másolópapír segítségével keressük meg a következő szabályos sokszögek szimmetriatengelyeit!



Megoldás



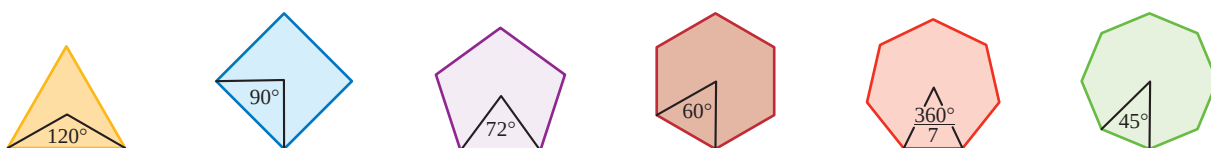
A tengelyek metszéspontja minden csúctól egyenlő távolságra van.

A szabályos sokszögek csúcsai egy körön vannak.

A megfelelő szárszögű egybevágó, egyenlő szárú háromszögekből szabályos sokszöget szerkeszthetünk.

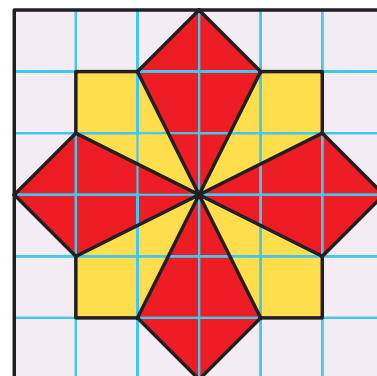
Például:

3 db 120° -os szárszögű tükrös háromszög szabályos háromszöget alkot. A szabályos ötszög középponti szöge 72° .

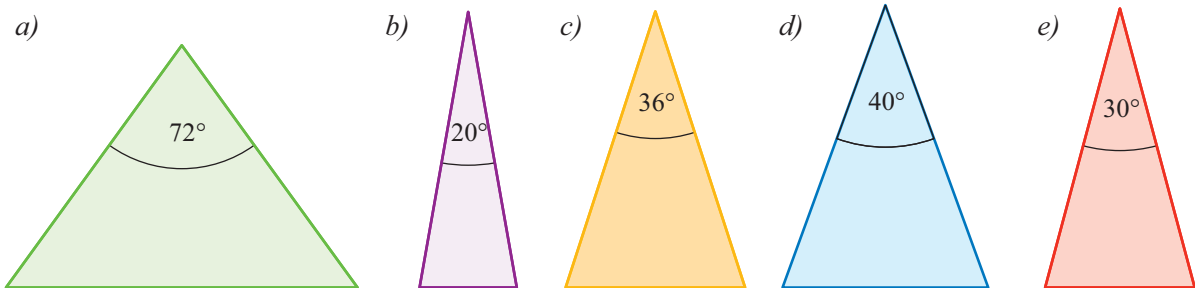


Feladatok

1. a) Szerkessz 2 cm oldalú szabályos hatszöget, és rajzold be a szimmetriatengelyeit!
b) Szerkessz 1,5 cm oldalú szabályos nyolcszöget, és rajzold be a szimmetriatengelyeit!
2. a) Van-e szimmetriatengelye a díszcsempén lévő minta által határolt sokszögnek? Ha igen, akkor hány?
b) Szabályos-e ez a sokszög? Válaszodat indokold!

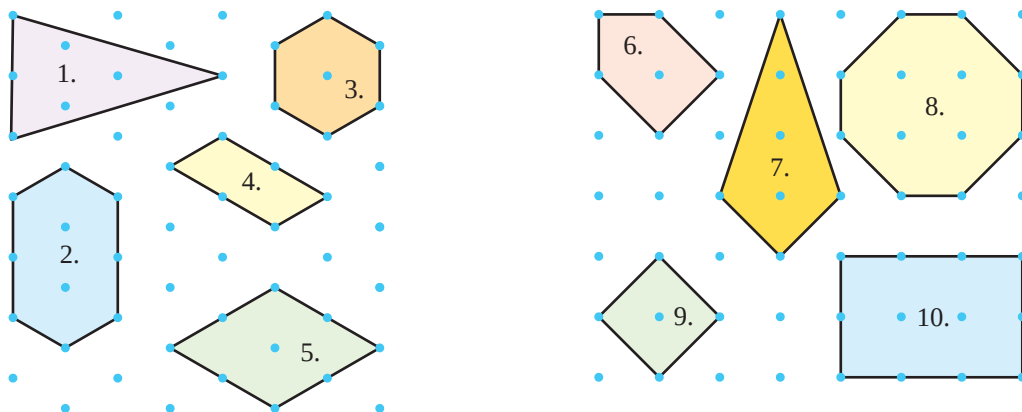


3. Egybevágó, egyenlő szárú háromszögeket illesztünk sorban egymás mellé úgy, hogy a szárszögeik csúcsai közös pontba kerüljenek, és száraik fedjék egymást. Hány háromszöget kell egymás mellé raknunk az egyes esetekben, hogy körbeérjünk? Milyen sokszöget alkotnak az egymás mellé rakott háromszögek alapjai?



4. Válaszd ki a tíz sokszög közül

- a) a szabályos sokszögeket; b) a tengelyesen szimmetrikus sokszögeket!



5. 2020-ban Magyarországon az év vadvirága a nemes májvirág lett. A képeken a májvirágnak hét-, nyolc- és kilencszirmú változatát látjuk.



- Számítsd ki a szabályos kilencszög középponti szögének nagyságát!
- Számítsd ki, mekkora szöget zár be a szabályos kilencszög két szomszédos oldala!
- Hány szimmetriatengelye van a szabályos kilencszögnek?
- Hány átlója van a szabályos kilencszögnek?

6. a) Milyen egyenlő szárú háromszög tükrözésével kaphatunk szabályos három-, négy-, öt-, hat-, tíz-, tizenkétyszöget? Hol helyezkedjen el a tengely?
- Hány szimmetriatengelye van a szabályos három-, négy-, öt-, hat-, tíz-, tizenkétyszögnek?
 - Számítsd ki egy szabályos három-, négy-, öt-, hat-, tíz-, tizenkétyszög belső szögeit!
 - Hány átlója van egy szabályos három-, négy-, öt-, hat-, tíz-, tizenkétyszögnek?

7. a) Minden szabályos sokszög megkapható-e valamilyen szimmetrikus háromszög egymás utáni tükrözésével?

b) Bármely szimmetrikus háromszög tükrözésével szabályos sokszöget kapunk?

8. Van-e olyan sokszög, amelynek minden oldala egyenlő, de szögei nem egyenlőek? Ha van, rajzolj ilyen

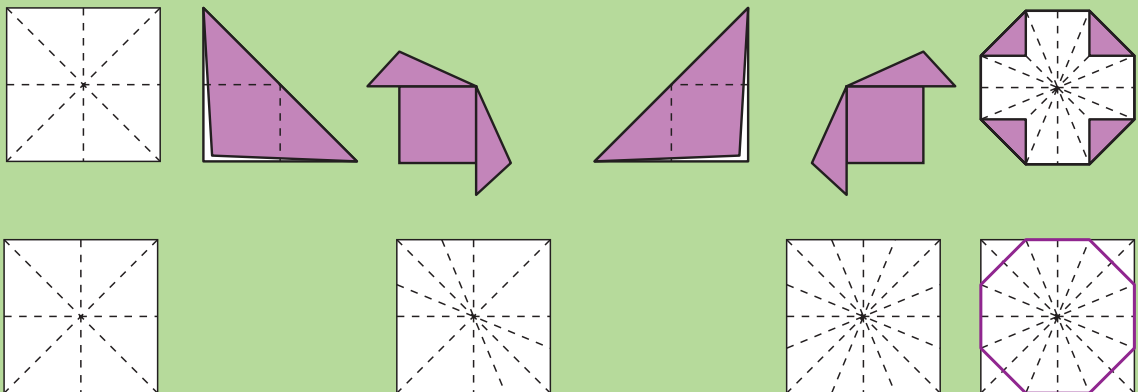
a) háromszöget; b) négyszöget; c) hatszöget; d) nyolcszöget!

9. Van-e olyan sokszög, amelynek minden szöge egyenlő, de oldalai nem egyenlőek? Ha van, rajzolj ilyen

a) háromszöget; b) négyszöget; c) hatszöget; d) nyolcszöget!

10. a) Az ábrák alapján hajtogass egy négyzetlapból szabályos nyolcszöget!

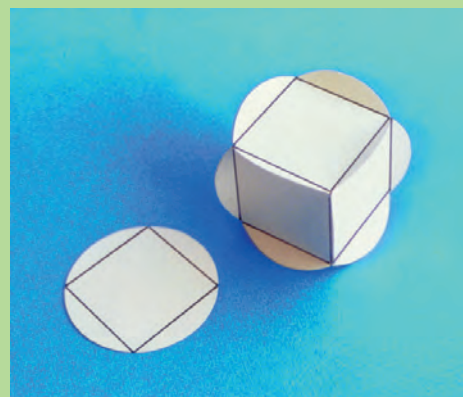
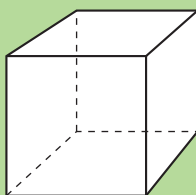
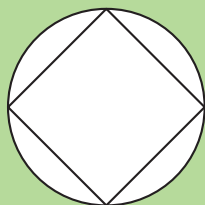
b) Egy 6 cm oldalú négyzetben szerkeszd meg az utolsó ábrán látható nyolcszöget!



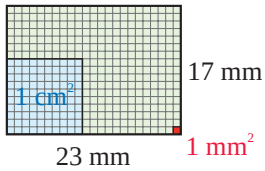
11. Készítsd el a „füles kockát” hat darab körlapból!

1. Szerkeszd meg a körlapokra a négyzeteket!

2. A körlapok négyzeteken kívüli részeit ragaszd egymáshoz! (A húroknál meg kell hajtogatni a lapokat.)



Derékszögű háromszögek kerülete, területe

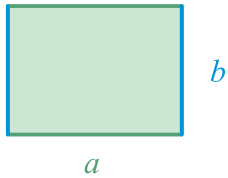
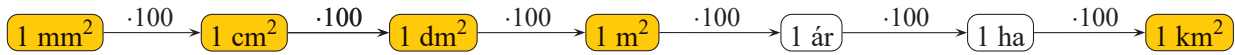


A téglalap kerülete: $17 \cdot 2 + 23 \cdot 2 = 80 \text{ mm}$.

$$K = 80 \text{ mm} = 8 \text{ cm}.$$

A téglalap területe $23 \cdot 17$ db 1 mm^2 területű kis négyzet területével egyenlő.

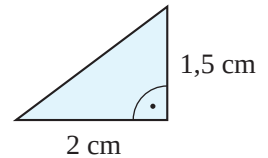
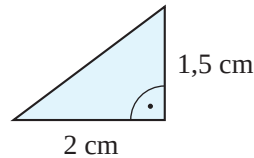
$$T = 391 \text{ mm}^2 \approx 4 \text{ cm}^2$$



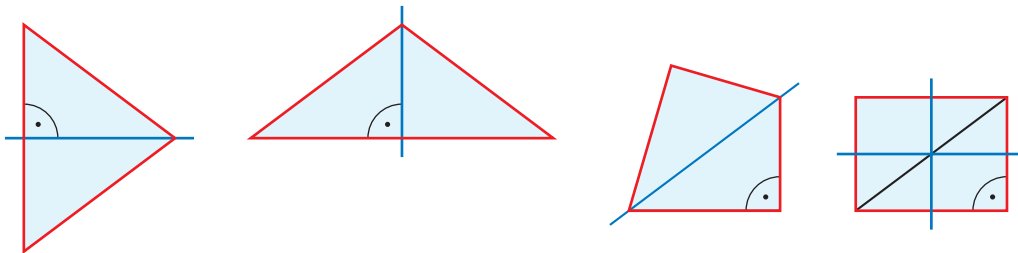
Ha azonos egységben adott a téglalap két oldalának hossza, akkor a téglalap kerülete a két oldal hosszának kétszerese hosszúságegységben mérve, területe pedig a két oldal hosszának szorzata területegységben mérve.

1. példa

Illesszünk egymás mellé két-két egybevágó derékszögű háromszöget úgy, hogy tengelyesen szimmetrikus sokszöget alkossanak! Rajzoljuk be a sokszögek szimmetriatengelyeit!

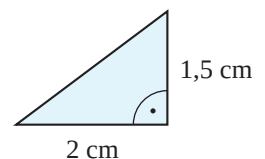


Megoldás



2. példa

- Hány mm az ábrán látható derékszögű háromszög kerülete?
- Hány mm^2 az ábrán látható derékszögű háromszög területe?



Megoldás

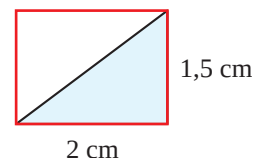
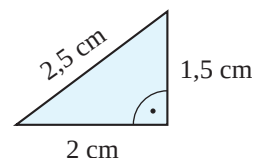
- A háromszög kerülete egyenlő oldalai hosszának összegével. Az átfogót 2,5 cm hosszúnak mértük.

$$K = 2 \text{ cm} + 1,5 \text{ cm} + 2,5 \text{ cm} = 6 \text{ cm} = 60 \text{ mm}$$

- A két derékszögű háromszög együttes területe egyenlő egy téglalap területével. A háromszög területe fele a 2 cm és 1,5 cm oldalú téglalap területének, azaz 3 cm^2 -nek. $T = (2 \cdot 1,5) : 2 = 1,5 \text{ cm}^2 = 150 \text{ mm}^2$.

A derékszögű háromszöget téglalappá kiegészítve meghatározhatjuk a háromszög területét.

A derékszögű háromszög területe fele egy olyan téglalap területének, amelynek oldalai a háromszög befogóival egyenlők.



A derékszögű háromszög területe a befogók szorzatának fele.

Feladatok

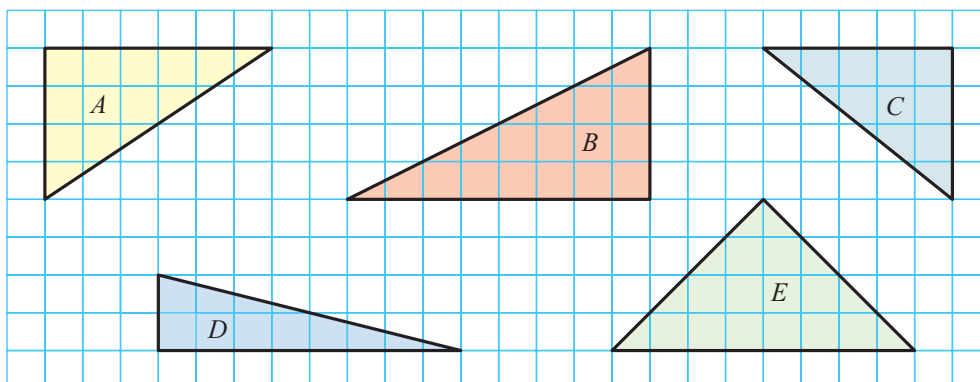
1. a) Váltsd át mm-re! $12,5 \text{ cm}$; $\frac{3}{4} \text{ m}$; $1\frac{3}{5} \text{ dm}$

b) Váltsd át méterre! $1,5 \text{ km}$; $3 \text{ dm } 4 \text{ mm}$; $\frac{7}{4} \text{ m}$

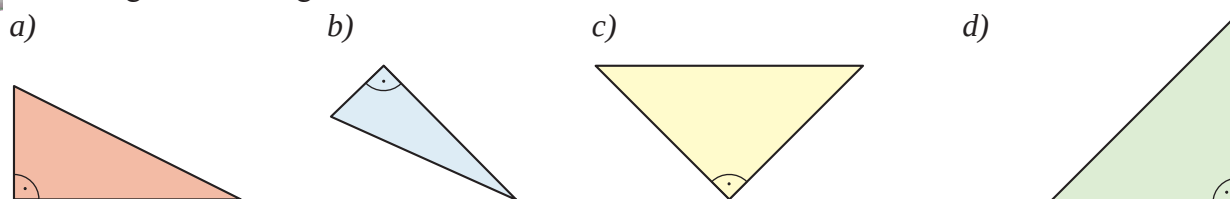
2. a) Váltsd át cm^2 -re! $3,1 \text{ m}^2$; $\frac{3}{8} \text{ dm}^2$; 49 mm^2

b) Váltsd át dm^2 -re! $4,7 \text{ m}^2$; $199,5 \text{ cm}^2$; $2\frac{4}{5} \text{ m}^2$

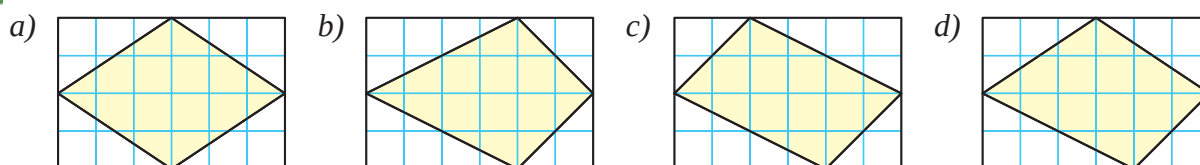
3. Határozd meg, hogy hány rácsnégyzet területével egyenlő az egyes háromszögek területe!



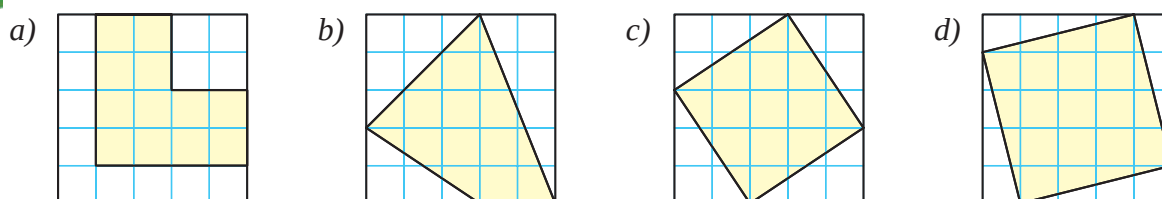
4. Mérd meg a háromszög oldalait! Számítsd ki a kerületét, területét!



5. Hányadrésze a téglalap területének a négyszög területe?



6. Az ábrán látható négyzetek közül válaszd ki azt, amelynek pontosan a fele van kiszínezve!



(Országos kompetenciamérés, 2009)

7. Számítsd ki a derékszögű háromszög területét, ha befogóinak hossza

- a) 13 mm és 23 mm, b) 7,5 cm és 28 mm, c) 42 mm és annak $\frac{3}{7}$ -e!

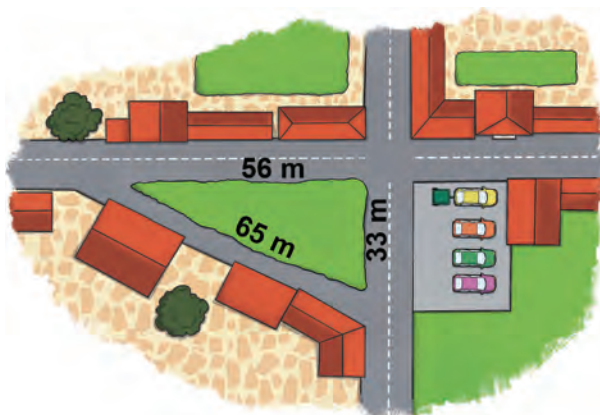
8. Számítsd ki a derékszögű háromszög kerületét és területét, ha oldalainak hossza

- a) 9 m, 12 m, 15 m, b) 12 dm, 35 dm, 37 dm!

9. Számítsd ki a derékszögű háromszög egyik befogójának hosszát, ha

- a) területe $16,25 \text{ cm}^2$, és másik befogója 5 cm hosszú,
b) területe 804 dm^2 , másik befogója 5 m hosszú!

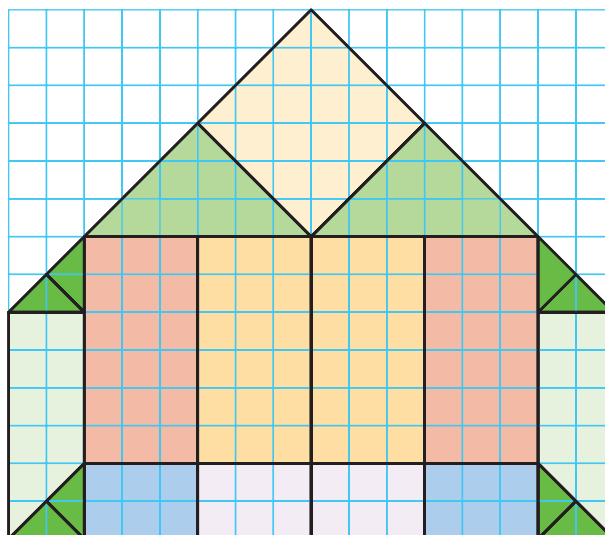
10.



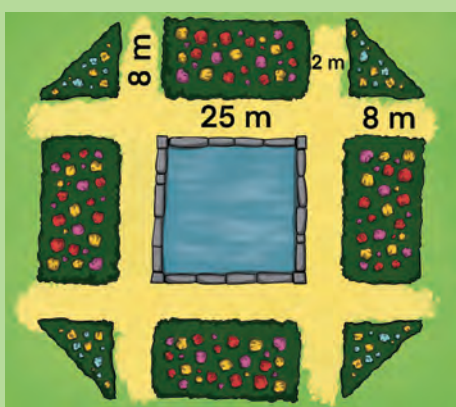
Hány m^2 zöld felületet alakítottak ki az útke-
resztveződés építéskor?

Teljesítették-e a tervet, ha legalább 1 hektár
zöldterület létrehozása volt a cél?

11. Hány m^2 -t használunk fel a különböző színű
üveglapokból az ábrán látható díszes bejárat-
hoz? 1 rácsegység a valóságban 2 dm.



12.

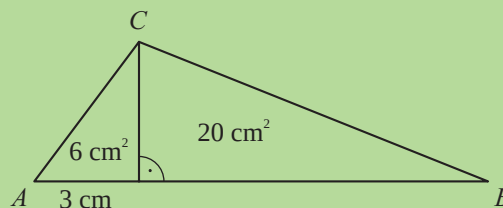


25 m oldalú, négyzet alakú medence köré virágokat ül-
tetnek a vázlatrajz szerint.

- a) Mekkora területet ültetnek be? Több lesz-e a virá-
gos rész területe 0,2 hektárnál?
b) Mennyibe kerül a virágültetés, ha 1 m^2 parkosítása
1200 Ft?
c) Mekkora a 2 méter széles utak területe összesen?

13. a) Számítsd ki az AB oldal hosszát!

b) Szerkeszd meg a háromszöget!

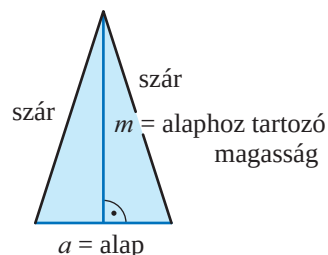
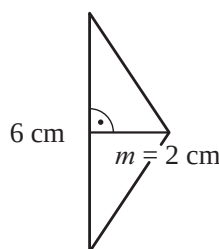
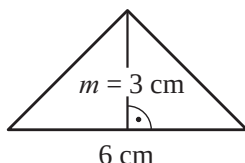
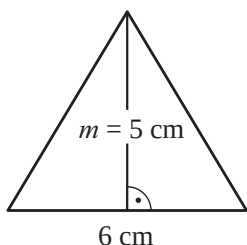


Tengelyesen szimmetrikus háromszögek kerülete, területe

Példa

Három egyenlő szárú háromszög mindegyikének az alapja 6 cm. Száraik metszéspontja az alaptól 5 cm-re, 3 cm-re, 2 cm-re van, azaz az **alaphoz tartozó magasságuk** rendre 5 cm, 3 cm, 2 cm.

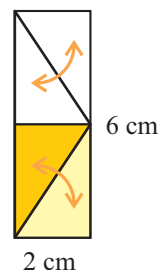
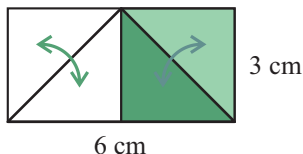
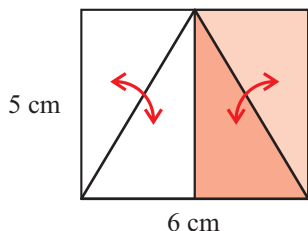
Határozzuk meg a háromszögek területét!



Megoldás

Az egyenlő szárú háromszöget olyan téglalappá egészítjük ki, amelynek egyik oldala a háromszög alapjával, másik oldala a hozzá tartozó magassággal egyenlő.

Az azonos szín két különböző árnyalatával jelölt háromszögek területe egyenlő. A szimmetrikus háromszögek területe fele a befoglaló téglalap területének.



$$T = (6 \cdot 5) : 2 = 15 \text{ cm}^2$$

$$T = (6 \cdot 3) : 2 = 9 \text{ cm}^2$$

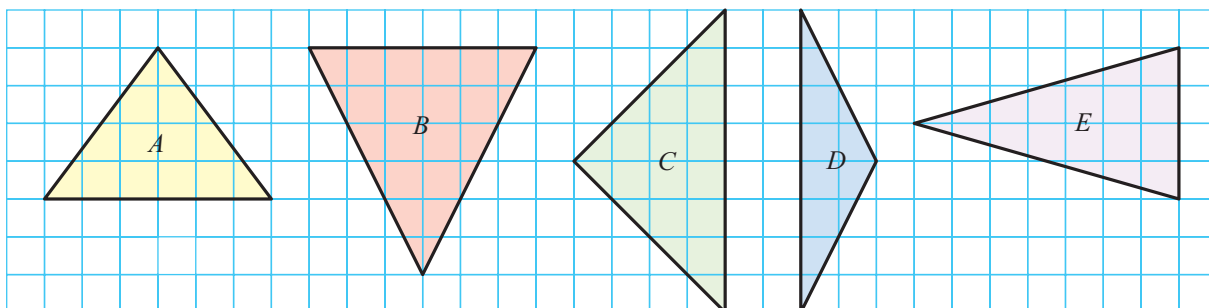
$$T = (6 \cdot 2) : 2 = 6 \text{ cm}^2$$

A tengelyesen szimmetrikus háromszög területe fele egy olyan téglalap területének, amelynek oldalai egyenlők a háromszög alapjával és az alaphoz tartozó magasságával.

A tengelyesen szimmetrikus háromszög területe az alap és az alaphoz tartozó magasság szorzatának a fele.

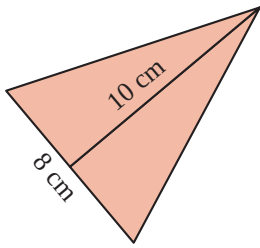
Feladatok

1. Egy rácsnégyszet területe a területegység. Mekkora a háromszögek területe?

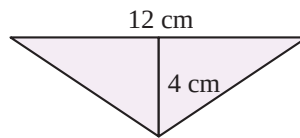


2. Számítsd ki az egyenlő szárú háromszögek területét!

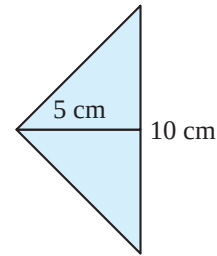
a)



b)



c)

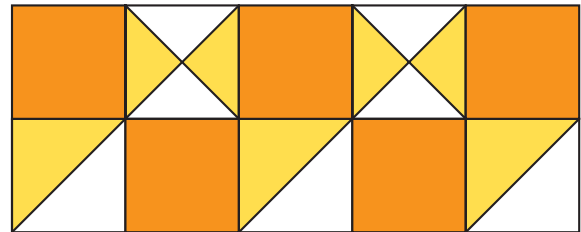


3. Mekkora az egyenlő szárú háromszög magassága, ha területe 60 cm^2 , és alapja

- a) 10 cm, b) 40 cm, c) 3 dm, d) 80 mm, e) 1,2 dm?

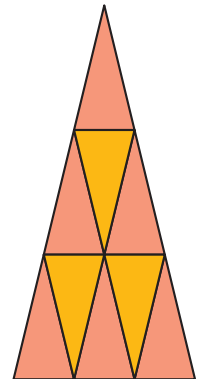
4. Julika a kézművesszakkörön foltvarrással készít falvédőt. Ennek méretei $100 \text{ cm} \times 250 \text{ cm}$.

- a) Mekkora a nagyobb fehér háromszög területe?
b) Mekkora a kisebb fehér háromszög területe?
c) Mekkora együtt a fehér háromszögek területe, és mekkora része ez a falvédő területének?



5. a) Hány tükrös háromszög van az ábrán?

- b) A legkisebb háromszög kerületének hányszorosa a legnagyobb háromszög kerülete?
c) A különböző tükrös háromszögek területe hányszorosa a legkisebb háromszög területének?
d) Ha folytatjuk az ábrát, hány új háromszög kerül a következő, negyedik sorba?



6. Szerkessz 3 cm sugarú körbe egyenlő szárú háromszöget úgy, hogy a háromszög csúcsai a körvonalon legyenek! Számítsd ki a háromszög kerületét és területét! A szükséges adatokat mérd meg! A háromszög alapja legyen

- a) 6 cm; b) 3 cm; c) 4 cm!

7. Mekkora az egyenlő szárú háromszög kerülete, illetve területe, ha

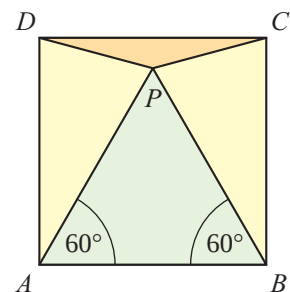
- a) alapja 7 cm, alapon fekvő szögei 30° -osak,
b) alapja és az alaphoz tartozó magassága 4 cm?

Szerkessz, mérd, számold!

8. Szerkeszd meg a 10 cm oldalú négyzetet és a P pontot! Számítsd ki a keletkezett egyenlő szárú háromszögek területét a hiányzó adatok megmérése után!

9. Egy egyenlő szárú háromszög egyik oldala 4 cm, a másik két oldala sem hosszabb 5 cm-nél. Oldalainak mérőszáma centiméterben mérve egész szám.

- a) Hány háromszög felel meg a feltételeknek?
b) Szerkeszd meg a legkisebb kerületű háromszöget, és számítsd ki a területét!



10. Hány egyenlő szárú háromszög van az ábrán? Határozd meg ezek területét! (A hosszúság egysége a rácsnégyzet oldalának hossza.)

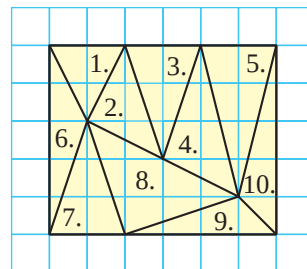
11. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 10 cm, oldalainak mérőszáma centiméterben mérve egész szám. Hány ilyen háromszög van? Szerkeszd meg azt a háromszöget, amelyiknek a legrövidebb az alapja!

Szerkesztés és mérés után számítsd ki a területüket!

12. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 16 cm, oldalainak mérőszáma centiméterben mérve egész szám. Hány ilyen háromszög van?

Szerkeszd meg azt a háromszöget, amelyiknek a legrövidebb a szára!

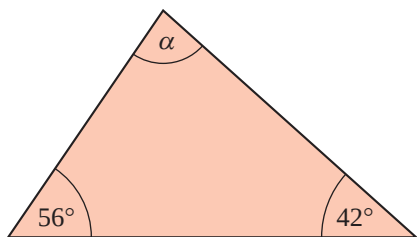
Szerkesztés és mérés után számítsd ki a kerületüket és a területüket!



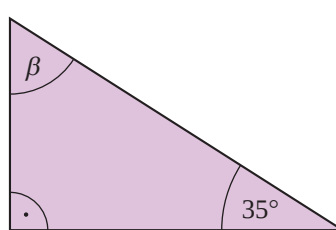
Tudáspróba

- Szerkessz egy 3 cm sugarú körbe 60° -os középponti szöget! Szerkeszd meg a szögfelezőjét!
- Számítsd ki a betűvel jelölt szögek nagyságát! Azonos betűk egyenlő szögeket jelölnek.

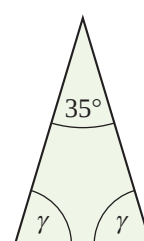
a)



b)

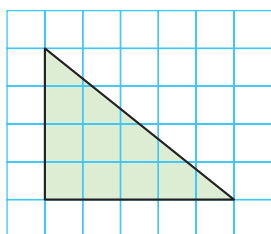


c)

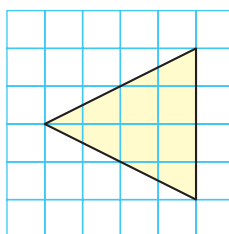


- Hány területegység a háromszögek területe? A területegység legyen egy rácsnégyzet területe!

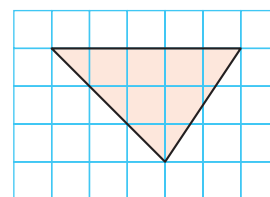
a)



b)



c)



- Szerkessz derékszögű háromszöget, ha a befogói 6 cm és 8 cm hosszúak! Mekkora az átfogó? Számítsd ki a háromszög kerületét és területét!

- Szerkessz tükrös háromszöget, ha a szárszöge 30° , és szárai 6 cm hosszúak!

6. a) Váltsd át dm-re! 510 mm, $\frac{7}{2}$ m, 34 cm

b) Váltsd át cm^2 -re! 5 dm^2 , $25\,000 \text{ mm}^2$, $0,05 \text{ m}^2$

- Igazak-e az állítások?

A: Minden háromszögnek pontosan két hegyesszöge van.

B: Nem lehet háromszöget szerkeszteni 4 cm, 6 cm és 11 cm hosszúságú szakaszokból.

C: A szabályos háromszög két belső szögfelezője 120° -os szögben metszi egymást.

Műveletek törtekkel

A tört értelmezése

A törteket többféleképpen is értelmeztük.



$\frac{3}{4}$ almát kapunk, ha egy almát 4 egyenlő részre vágunk, és ezekből veszünk 3-at.

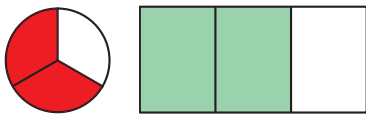
A tányéron $\frac{3}{4}$ alma van.



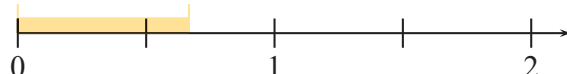
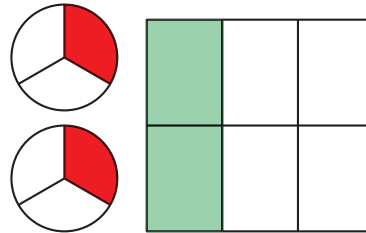
Akkor is $\frac{3}{4}$ almát kapunk, ha 3 almát osztunk fel 4 egyenlő részre.

Minden tányéron $\frac{3}{4}$ alma van.

A $\frac{2}{3}$ -ot kétféleképpen értelmezzük:



Az egészet 3 egyenlő részre osztjuk, és 2 részt veszünk, azaz egy egésznek a $\frac{2}{3}$ részét vesszük.



Két egésznek vesszük a harmadrészét, azaz 2 egészet osztunk 3 egyenlő részre.

A kétféle értelmezés ugyanahhoz az eredményhez vezet, melyet így jelölünk: $\frac{2}{3}$.

A tört alakú számoknál a következő elnevezéseket használjuk:

$\frac{2}{3}$ számláló
törtvonal (a törtvonal az osztás jele is)
nevező

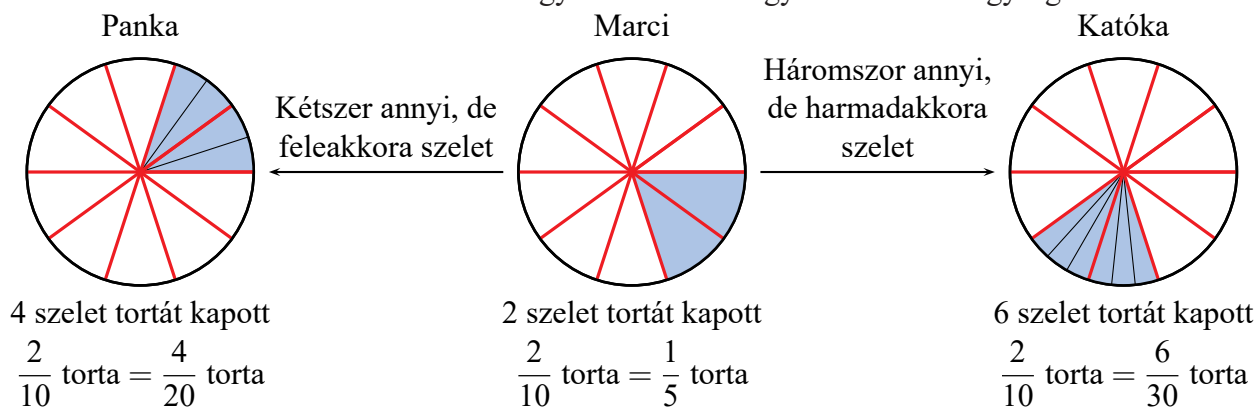
Jelenleg csak olyan tört alakú számokkal foglalkozunk, ahol a számláló és a nevező is egész szám.

Például: $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{3}$, $-\frac{4}{5}$, $\frac{23}{100}$, $\frac{7}{4}$, $-\frac{14}{7}$, $\frac{0}{8}$, ... Közülük a $\frac{6}{3}$, a $-\frac{14}{7}$ és a $\frac{0}{8}$ egész számok.

Törtek különböző alakban

Bővítés, egyszerűsítés

Katóka 10 szeletből álló születésnapi tortájából a család minden tagja 2 szeletet kapott. Katóka tányérján volt a legtöbb tortaszelet, mert édesanyja mindkét szeletet harmadolta, míg húgának, Pankának a szeleteit csak elfelezte. Természetesen így is mindhárom gyerek azonos nagyságú tortát evett meg:



A matematika nyelvén: $\frac{2}{10} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = \frac{6}{30}$, azaz ugyanannak a tört alakú számnak többféle alakja is van. A törteknek ezt a tulajdonságát már a hányados változásakor is megfigyeltük.

Például: $50:100 = \frac{1}{2}$ $5:10 = \frac{1}{2}$ $15:30 = \frac{1}{2}$

A hányados értéke nem változik, ha az osztandót és az osztót is ugyanazzal a 0-tól különböző egész számmal osztjuk vagy szorozzuk.

Ugyanúgy $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, azaz a tört értéke se változik, ha a számlálóját és a nevezőjét is ugyanazzal a 0-tól különböző egész számmal osztjuk vagy szorozzuk.

A törtet bővítjük, ha kisebb, egyenlő törtrészekből állítjuk elő.

Bővítéskor a tört számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a 0-tól különböző egész számmal szorozzuk.

Például: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{4}{20} = \frac{6}{30}$ vagy $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$

A törtet egyszerűsítjük, ha nagyobb, egyenlő törtrészekből állítjuk elő.

Egyszerűsítéskor a tört számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a 0-tól különböző egész számmal

osztjuk úgy, hogy az új számláló és az új nevező is egész szám maradjon: $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ vagy $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Vegyes törtek

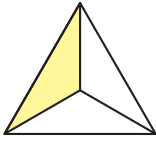
Pozitív törtelnél, ha a tört számlálója nagyobb a nevezőnél, akkor a tört nagyobb, mint 1 egész. Az ilyen törtek nagyságát jobban érzékelhetjük, ha „leválasztjuk” belőlük az egész értékeket, vagyis egy egész szám és egy tört összegeként írjuk fel:

Például: $\frac{8}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$, $\frac{19}{6} = \frac{18}{6} + \frac{1}{6} = 3 + \frac{1}{6} = 3\frac{1}{6}$, $\frac{128}{7} = \frac{126}{7} + \frac{2}{7} = 18 + \frac{2}{7} = 18\frac{2}{7}$.

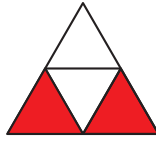
Feladatok

1. Az ábrákon látható háromszögek mekkora részét színeztük ki, ha a háromszögeket egyenlő területű részekre osztottuk egy-egy ábrán?

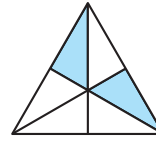
a)



b)



c)



2. Rajzolj a füzetedbe egy 5 cm hosszú szakaszt!

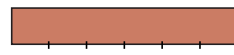
Színezd pirosra a szakasz $\frac{2}{5}$ részét! Mekkora részét nem színezted ki a szakasznak?

3. Rajzolj a füzetedbe 3 egyforma téglalapot! Színezd ki a $\frac{3}{4}$ részüket úgy, hogy minden ábra más-ként legyen kiszínezve!

4. Rajzold le a füzetedbe a területegységet, ha a lerajzolt téglalap területének értéke az alábbi:

a)  ez $\frac{1}{4}$

b)  ez $\frac{3}{5}$

c)  ez $\frac{6}{5}$

5. Írd fel az összes olyan törtet, melynek számlálója egyjegyű páros szám, nevezője pedig a 2, 3, 5 vagy 7 számok valamelyike!

a) Van köztük egész szám?

b) Van köztük olyan tört, amelyet átírhatsz vegyes törtté?

6. Írd fel az összes olyan törtet, amelynek a számlálója az $S = \{0; 4; 5\}$, a nevezője pedig az $N = \{2; 3; 7\}$ halmaz valamelyik eleme! Hány különböző törtet kapsz?

7. Írd fel az összes olyan törtet, amelynek a számlálója az $S = \{2; 3; 7\}$, a nevezője pedig az $N = \{0; 4; 5\}$ halmaz valamelyik eleme! Hány különböző törtet kapsz?

8. A  és  pozitív egész számok. Írd fel az összes olyan $\frac{\text{red square}}{\text{red triangle}}$ törtet, amelyre teljesül, hogy $\text{red square} + \text{red triangle} = 7$ és

a) $\frac{\text{red square}}{\text{red triangle}} < 1$;

b) $\frac{\text{red square}}{\text{red triangle}} = 1$;

c) $\frac{\text{red square}}{\text{red triangle}} > 1$!

9. Írj fel tört alakban 5-5 olyan pozitív számot, hogy

a) mindegyik kisebb legyen 1-nél;

b) a számláló valódi osztója legyen a nevezőnek;

c) a törtet ne lehessen egyszerűsíteni;

d) a törtet ne lehessen bővíteni;

e) mindegyik nevezője 5 és 9 közé essen, és a tört átírható legyen vegyes törtté!

10. Írj fel mindegyik törthöz 3-3 olyan törtet, amely vele egyenlő!

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{4}{6}$$

$$\frac{6}{7}$$

$$\frac{11}{9}$$

$$\frac{20}{6}$$

11. Bővítsd a $\frac{2}{9}$ törtet úgy, hogy

a) a számlálója 20 legyen;

b) a nevezője 20-nál kisebb legyen;

c) a nevezője kétjegyű szám legyen;

d) a számlálója páratlan szám legyen!

12. Keresd olyan törtet, amely nem egyszerűsíthető, és egyenlő

- a) $\frac{45}{60}$ -dal; b) $\frac{32}{128}$ -dal; c) $\frac{12}{44}$ -del; d) $\frac{38}{57}$ -del!

13. Helyezd el halmazábrába a felsorolt törtet úgy, hogy az A halmazba az $\frac{5}{4}$ -del egyenlőket, a B halmazba pedig a $\frac{2}{3}$ -dal egyenlőket teszed!

$$\frac{15}{12} \quad \frac{16}{24} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{20}{16} \quad \frac{6}{9} \quad \frac{75}{60} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{40}{60} \quad \frac{20}{24} \quad \frac{50}{60} \quad \frac{10}{15} \quad \frac{30}{24}$$

14. Másold le a feladatot a füzetedbe, majd írd számokat a keretekbe, hogy az egyenlőség igaz legyen!

a) $\frac{16}{28} = \frac{4}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{21} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

b) $\frac{5}{8} = \boxed{} : 8 = 10 : \boxed{} = \boxed{} : 24 = \frac{\boxed{}}{1000}$

15. Végezd el az alábbi átváltásokat a szükséges bővítések után!

Például: Hány perc az $\frac{1}{5}$ óra? Megoldás: $\frac{1}{5}$ óra = $\frac{12}{60}$ óra = 12 perc.

a) Hány perc $\frac{7}{12}$ óra; $\frac{5}{3}$ óra?

b) Hány óra $\frac{7}{12}$ nap; $\frac{3}{8}$ nap?

c) Hány m $\frac{9}{250}$ km; $\frac{3}{8}$ km?

d) Hány darab $\frac{1}{3}$ tucat; $\frac{25}{4}$ tucat?

16. Írd fel növekvő sorrendben a törtet!

a) $-\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{4}$

b) $\frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{3}{14}, -\frac{1}{7}, \frac{7}{10}$

c) $\frac{25}{15}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{9}{45}, \frac{45}{75}$

17. Rendezd csökkenő sorrendbe a következő törtök ellentettjeit! Milyen szót kaptál a betűk összeolvasásakor?

$$S = -\left(\frac{3}{2}\right) \quad K = \frac{4}{3} \quad A = -\left(\frac{2}{5}\right) \quad O = \left|-\frac{3}{4}\right| \quad M = \frac{0}{7} \quad Z = -\left|\frac{3}{4}\right|$$

18. Hány almán osztoztak a fiúk, ha Andris kapta az almák felét és még kettőt, Tamás kapta a megmaradt almák felét és még kettőt, Bálint az ezek után megmaradt almák felét és még kettőt kapott, így egy alma maradt a tálon? Melyik a helyes válasz?

A = 35

B = 36

C = 28

D = 48

E = 42



19. Számkártyákból kiraktuk a $\frac{\boxed{3} \boxed{a}}{\boxed{2} \boxed{0}}$ alakú, tovább nem egyszerűsíthető törtet. Milyen számok állhatnak az a helyén?

20. Számkártyákból kiraktuk a $\frac{\boxed{2} \boxed{3} \boxed{a}}{\boxed{3} \boxed{4} \boxed{b}}$ alakú, 3-mal egyszerűsíthető törtet. Milyen számok állhatnak az a és a b helyén?



21.

	●	●					
	●	●					

Ezen a rajzon egy telek alaprajza látható 4 kúttal. Hogyan lehet a telket 4 ugyanakkora és ugyanolyan alakú részre osztani úgy, hogy mindegyiken egy-egy kút legyen?

Tört alakban írt szám tizedes tört alakja



A tört alakú számokat átírhatjuk tizedes tört alakba, ha a 10-es számrendszerben megtanult helyiérték-táblázatot bővítjük 1-nél kisebb helyi értékekkel is:

...	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$	...
		3	0	2	1	4			
						5	2		
						5	2	0	

A fenti számok értéke: $100 \cdot 3 + 10 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + \frac{1}{10} \cdot 1 + \frac{1}{100} \cdot 4 = 302 + \frac{14}{100} = 302,14$

$$\frac{1}{100} \cdot 5 + \frac{1}{1000} \cdot 2 = \frac{52}{1000} = 0,052 \quad \frac{1}{100} \cdot 5 + \frac{1}{1000} \cdot 2 + \frac{1}{10\,000} \cdot 0 = \frac{520}{10\,000} = 0,0520$$

Elnevezések:

$302,14$
 egész rész ← tizedesvessző → törtrész

Tizedes törték bővítések a szám végére (a tizedesvesszőtől jobbra) tetszőleges sok nullát írhatunk: $3,4 = 3,40 = 3,400 \dots$

Tizedes törték egyszerűsítések a szám végén (a tizedesvesszőtől jobbra) álló nullákat elhagyjuk: $3,400 = 3,40 = 3,4$.

A tizedes tört alakú számokat átírhatjuk tört alakú számokká:

$$0,13 \text{ tört alakja: } \frac{13}{100} \quad 1,3 \text{ tört alakja: } 1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10}$$

$$1,25 \text{ tört alakja: } 1 + \frac{25}{100} = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ vagy } \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

Törték tizedes tört alakba való felírásakor a törtre mint egy kijelölt osztásra gondolunk, azaz a tört számlálóját elosztjuk a tört nevezőjével.

Ha a tört nevezőjét bővíteni lehet 10-re, 100-ra, 1000-re stb., akkor az átírás nagyon könnyen elvégezhető:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\frac{7}{4} = \frac{175}{100} = 1,75$$

$$\frac{3}{125} = \frac{24}{1000} = 0,024$$

Ezekben az esetekben a tört nevezője csak a 2 és az 5 számok szorzatát tartalmazhatja (ha a törtet már egyszerűsített formában írtuk fel). Ilyenkor a törtek tizedes tört alakja **véges tizedes tört**.

Ha az egyszerűsített tört nevezője a 2-n és az 5-ön kívül más tényezőt is tartalmaz, akkor nem lehet 10-re, 100-ra, 1000-re stb. bővíteni, ezért a szám tizedes tört alakja nem lehet véges.



Ha a tört nevezőjét nem tudjuk 10-re, 100-ra, 1000-re stb. bővíteni, akkor elvégezzük a kijelölt osztást:

$$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0,666\dots$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 3 \overline{) 20} \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{239}{99} = 239 : 99 = 2,414\dots$$

$$\begin{array}{r} 239 \\ 99 \overline{) 239} \\ \underline{198} \\ 410 \\ \underline{396} \\ 140 \\ \underline{138} \\ 20 \end{array}$$

A hányadosban a számjegyek ismétlődnek, amit így jelölünk: $\frac{2}{3} = 0,\dot{6}$, illetve $\frac{239}{99} = 2,\dot{4}\dot{1}$, és az ismétlődő részt szakasznak hívjuk. Az ilyen tizedes tört neve: végtelen szakaszos tizedes tört.

Természetesen ez az eljárás alkalmazható akkor is, ha a nevező 10-re, 100-ra, 1000-re stb. bővíthető:

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1000} = 0,625 \text{ bővítéssel,}$$

$$\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0,625 \text{ osztással.}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ 8 \overline{) 50} \\ \underline{40} \\ 10 \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 4 \end{array}$$

Megjegyzés: Az egész számokat és a törteket együtt racionális számoknak nevezzük, mert két egész szám hányadosaként (a nevező $\neq 0$) állnak elő. Például: $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2}$; $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$; $2,7 = \frac{27}{10}$ racionális számok.

Feladatok

1. Írd le tizedes tört alakban a táblázat számait!

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
3	2	4	5		
4	0	2	0	4	
		3	1	5	2

2. Az Akadémiai kislexikon ezt írja az asztaliteniszről:

„Az asztalitenisz 15,25 cm magas hálóval két egyenlő térfélre osztott 274,3 cm hosszú, 152,5 cm széles, 76,2 cm magas asztalnál, kézi-ütővel, celluloidlabdával játszott játék.”

Add meg az asztal méreteit (a , b , m) tovább nem egyszerűsíthető tört alakban!



Ismersz-e híres magyar asztaliteniszezőket?



3. Add meg centiméterben a hosszúságokat! Például: $\frac{2 \text{ m}}{4} = \frac{200 \text{ cm}}{4} = 50 \text{ cm}$

- a) $\frac{1 \text{ m}}{5}$ b) $\frac{3 \text{ m}}{8}$ c) $\frac{42 \text{ dm}}{7}$ d) $\frac{1 \text{ km}}{20}$ e) $\frac{7 \text{ dm}}{42}$

A fentiek közül hány hosszúságérték van 3 dm és 10 dm között?

- A: 0 B: 1 C: 2 D: 3 E: mindegyik

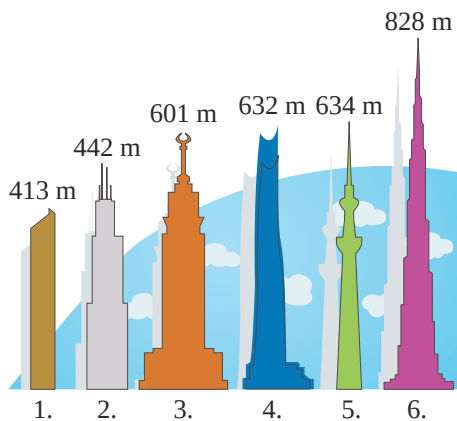
4. Add meg cm^2 -ben a területeket! Például: $\frac{2 \text{ m}^2}{5} = \frac{20\,000 \text{ cm}^2}{5} = 4000 \text{ cm}^2$

- a) $\frac{5 \text{ dm}^2}{100}$ b) $\frac{3 \text{ dm}^2}{12}$ c) $\frac{500 \text{ mm}^2}{4}$ d) $\frac{7 \text{ m}^2}{9}$ e) $\frac{4 \text{ m}^2}{200}$

Az átváltás után a kapott mérőszámok tizedes tört alakjai közül a végtelen szakaszos tizedes törték száma:

- A: 0; B: 1; C: 2; D: 3; E: 5.

5. Add meg km-ben a következő hat épület magasságát! Írd le századra, majd tizedre kerekítve is az eredményt! Kapsz-e a kerekítés után „azonos magasságú” épületeket? Készíts számegyenest a tizedre kerekített toronymagasságokról! Mit vettél észre?



1. Al Hamra Tower (Kuvaitváros, Kuvait, 2011)
2. Willis Torony (Chicago, USA, 1973)
3. Abrádzs al-Bajt (Mekka, Szaúd-Arábia, 2012)
4. Shanghai Tower (Sanghaj, Kína, 2014)
5. Tokyo Skytree (Tokió, Japán, 2011)
6. Burdzs Kalifa (Dubaj, Egyesült Arab Emírségek, 2010)



Nézz utána a híres épületek építési érdekességének, különlegességeiknek!

6. Add meg dkg-ban a tömegeket!

- a) $\frac{3 \text{ kg}}{4}$ b) $\frac{6 \text{ kg}}{10}$ c) $\frac{5 \text{ kg}}{20}$ d) $\frac{3 \text{ kg}}{7}$ e) $\frac{40 \text{ kg}}{11}$

7. Add meg literben a térfogatokat!

- a) $4,7 \text{ dm}^3$ b) $\frac{3 \text{ m}^3}{4}$ c) $\frac{80 \text{ dm}^3}{100}$ d) $\frac{120 \text{ cm}^3}{2}$ e) $\frac{330 \text{ cm}^3}{3}$

8. Állítsd növekvő sorrendbe a törtet, és tizedes tört alakba való átírással ellenőrizd!

- a) $\frac{2}{5}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}, \frac{7}{6}$ b) $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{28}, \frac{3}{11}$ c) $\frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{22}{6}, \frac{6}{22}$

9. Írd fel a törtet tizedes tört alakban!

- a) $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}$ b) $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}$ c) $\frac{5}{6}, \frac{6}{6}, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}$

Milyen érdekességet vettél észre?

- 10.** A világ leghosszabb gyíkja egy 4,75 méteres pápuavaránusz. A nevét élőhelyéről, Pápua Új-Guineáról kapta. Bár léteznek nála sokkal testesebb gyíkfélék, igen hosszú farkának köszönhetően nyerte el a „leghosszabb gyík” címet.

A világ legrövidebb gyíkja 18 mm hosszú (törpegekkó a neve, és a Brit Virgin-szigeteken él).

- Írd fel mindkét gyík hosszát először mm-ben, majd cm-ben és m-ben!
- Először becsüld meg, majd számold ki, hogy mennyivel hosszabb, illetve hányszor hosszabb a varánusz a gekkónál!



- 11.** Rendezd növekvő sorrendbe a törteket!

a) 0,3; 0,23; 0,32; 0,320; 0,032

b) $\frac{1}{4}$; 0,4; 0,4; 0,4444

c) $\frac{1}{3}$; 0,3; 0,3; 0,3333

d) 1,5; $\frac{30}{20}$; 1,055; 1,50; 1,5



- 12.** Melyik a 2000. tizedesjegy az $\frac{5}{13}$ tizedes tört alakjában?

- 13.** Melyik szám a nagyobb: $\frac{1313}{1717}$ vagy $\frac{131313}{171717}$?

Törtek összeadása és kivonása



1. példa

A kutyakölykök fejlődési szakaszai a 12. hét végéig általában a következők:

Az időszak $\frac{1}{4}$ részében a kiskutyák még teljesen önállótlanak, a következő $\frac{1}{12}$ részben már figyelnek az

őket körülvevő élőlényekre (alomtestvérek, ember).

Az ezt követő $\frac{1}{4}$ részben felfedezik tágabb környeze-

tüket is, ekkor kell elválasztani őket az anyjuktól. Végül a kölyökkor legutolsó részében kell a gazdának megtanítani a kutyát a legkülönbözőbb feladatokra.

Hányadrésze a tanítási időszak a kölyökkornak?

Melyik korszak hány napig tart?

Megoldás

Adjuk össze a törtrészeket! $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}$

A tagok sorrendjét felcseréljük: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{2}{4} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

A tanítási időszak: $1 - \frac{7}{12} = \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ része a kölyökkornak.

Mivel a 12 hét 84 nap, így az egyes korszakok időtartama:

- önállótanok a kiskutyák $84 \text{ nap} : 4 = 21 \text{ napig}$,
- figyelgetnek $84 \text{ nap} : 12 = 7 \text{ napig}$,
- felfedezőutakat is tesznek $84 \text{ nap} : 4 = 21 \text{ napig}$,
- tanítani kell őket $(84 \text{ nap} : 12) \cdot 5 = 35 \text{ napig}$.

2. példa

Mire ügyeljünk a törtek összeadásánál és kivonásánál?

Megoldás

- Közös nevezőt, azaz egy olyan számot célszerű keresni, amely mindegyik nevezőnek többszöröse.

Például: $\frac{5}{7} + \frac{7}{5} - \left(-\frac{3}{4}\right)$ Bővítünk: $\frac{5 \cdot 20}{7 \cdot 20} + \frac{7 \cdot 28}{5 \cdot 28} + \frac{3 \cdot 35}{4 \cdot 35} = \frac{100}{140} + \frac{196}{140} + \frac{105}{140} = \frac{401}{140}$

- Vizsgáljuk meg a közös nevező megkeresése előtt, lehet-e az adott törteket egyszerűsíteni!

Például: $\frac{55}{33} + \frac{6}{72} - \frac{24}{64} = \frac{5}{3} + \frac{1}{12} - \frac{3}{8}$ Közös nevezőnek a 24-et választjuk.

Bővítünk: $\frac{5}{3} + \frac{1}{12} - \frac{3}{8} = \frac{40}{24} + \frac{2}{24} - \frac{9}{24} = \frac{33}{24} = \frac{11}{8}$

Mivel a közös nevezőre hozás után a kijelölt műveleteket a számlálóban lévő számokkal kell elvégezni, takarékosági okokból szokás csak egyetlen törtvonalat és közös nevezőt írni:

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{12} - \frac{3}{8} = \frac{40}{24} + \frac{2}{24} - \frac{9}{24} = \frac{40+2-9}{24} = \frac{33}{24} = \frac{11}{8}$$

- A közös nevező megkeresése előtt célszerű csoportosítani a törteket:

Például: $\frac{4}{9} + \frac{9}{28} + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{47}{28} = \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{9}{28} + \frac{47}{28}\right) + \frac{5}{3} = \frac{9}{9} + \frac{56}{28} + \frac{5}{3} = 1 + 2 + \frac{5}{3} = 1 + 2 + 1\frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$

- Ha vegyes tört is szerepel az összeadandók között, a vegyes törteket átalakítjuk tört alakú számokká:

Például: $3\frac{1}{2} + \frac{11}{7} - 2\frac{5}{21} = \frac{7}{2} + \frac{11}{7} - \frac{47}{21}$ Közös nevezőnek a 42-t választjuk.

Bővítünk: $\frac{7}{2} + \frac{11}{7} - \frac{47}{21} = \frac{147}{42} + \frac{66}{42} - \frac{94}{42} = \frac{119}{42} = 2\frac{35}{42} = 2\frac{5}{6}$

- Az előző műveletsort más úton is elvégezhetjük.

$\frac{11}{7} > 1$, ezért ezt a törtet is célszerű átírni vegyes törtté: $\frac{11}{7} = 1\frac{4}{7}$

Felírjuk a vegyes törtet, és csoportosítunk:

$$\left(3 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{4}{7}\right) - \left(2 + \frac{5}{21}\right) = 3 + 1 - 2 + \frac{1}{2} + \frac{4}{7} - \frac{5}{21} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{4}{7} - \frac{5}{21}$$

Az egészek összeadása után elég összeadni a tört alakú számokat. A közös nevező 42 lesz.

$$2 + \frac{21}{42} + \frac{24}{42} - \frac{10}{42} = 2 + \frac{35}{42} = 2\frac{35}{42} = 2\frac{5}{6}$$

- Tört alakú szám és tizedes tört is szerepel az összeadásban, például: $\frac{3}{24} + 3,08$, illetve $\frac{5}{3} + 3,08$.
A $\frac{3}{24}$ egyszerűsítve $\frac{1}{8}$, melynek tizedes tört alakja 0,125. Ezért $\frac{3}{24} + 3,08 = 0,125 + 3,08 = 3,205$.
Az $\frac{5}{3}$ tört tizedes tört alakja végtelen szakaszos tizedes tört. Így az összeadás elvégzésekor csak kerekített értékkel tudnánk számolni, ezért a tizedes tört alakú számot kell tört alakúvá alakítani.

$$\frac{5}{3} + 3,08 = \frac{5}{3} + \frac{308}{100} = \frac{5}{3} + \frac{77}{25} = \frac{125 + 231}{75} = \frac{356}{75} = 4\frac{56}{75}$$

Feladatok

1. Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{11}{8} + \frac{3}{4}$ b) $3\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ c) $\frac{11}{12} - \frac{5}{6}$ d) $\frac{3}{7} + \frac{4}{5} + \frac{17}{70} + \frac{8}{35}$ e) $\frac{9}{10} - \frac{5}{6} + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}$

2. Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{7}{12} - \frac{3}{5} + \frac{9}{20} + \frac{1}{6}$ b) $\left(2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{4} + 1\frac{5}{6}\right)$ c) $3\frac{3}{5} - 2,6$
d) $0,35 + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ e) $2\frac{2}{3} + 4,25 - 4\frac{1}{3}$ f) $\left(1\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(0,4 + \frac{2}{4}\right)$
g) $\frac{2}{3} + 0,6$ h) $\frac{2}{3} + 0,6$ i) $5,28 + 2,3$

3. A szemüvegek erősségét dioptriában mérik. A rövidlátó szemüvegek (–) dioptriásak, míg a távollátók (+) dioptriásak. Elvileg a tökéletesen látók „ablaküveg”, azaz 0 dioptriás szemüveget viselhetnek.

a) Zsófi szemüvege –2,25 dioptriás, Taráé pedig 0,75 dioptriás. Hány dioptria az eltérés a két kislány szemüvege között?

A = 1,55 B = 1,5 C = 3

D = 3,55 E = egyik sem

b) Zsófi szemüvege –2,25 dioptriás volt, és lézeres szemműtete után 1,5 dioptriát javult a szeme. Milyen szemüveget fog ezután viselni?

A = 0,75 B = –0,75 C = 1,25

D = –1,25 E = egyiket sem



4. Írd fel a $\frac{3}{4}$ -et

- a) két különböző pozitív szám összegeként; b) két egyenlő pozitív szám összegeként;
c) négy egyenlő pozitív szám összegeként; d) két tizedes tört összegeként!

5. Többet ésszel, mint erővel! Keress egyszerű megoldást!

- a) $\frac{5}{49} - \frac{9}{14} + \frac{2}{14} + \frac{93}{49}$ b) $\frac{6}{12} - \frac{19}{36} + \frac{63}{144} - \frac{9}{144} + \frac{1}{36}$
c) $\frac{555}{999} - \frac{222}{555} + \frac{888}{777}$ d) $3\frac{5}{19} - \frac{39}{38} + \frac{20}{4}$

6. Mit írhatunk a $\triangle$ helyébe, hogy igaz állításokat kapjunk?

- a) $\frac{5}{6} + \left(\frac{7}{8} - \frac{8}{9}\right) = \triangle$ b) $\frac{62}{35} - \left(\frac{\triangle}{5} + \frac{4}{7}\right) = 0$ c) $\left(\frac{55}{33} - \frac{77}{66}\right) + \left(\frac{\triangle}{5} - \frac{7}{8}\right) = 1$

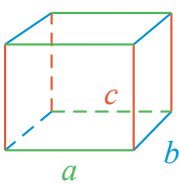
7. Mekkora a háromszög kerülete, ha oldalai $2\frac{5}{12}$ dm, 13 cm és 1,4 dm hosszúak?

8. Végezd el a füzetedben a kijelölt műveleteket!

- a)
$$\begin{array}{r} 3,05 \\ 12,1 \\ + 4,53 \\ \hline \end{array}$$
 b)
$$\begin{array}{r} 208,12 \\ - 57,84 \\ \hline \end{array}$$
 c)
$$\begin{array}{r} 108,43 \\ + 57,59 \\ \hline \end{array}$$
 d)
$$\begin{array}{r} 58,42 \\ - 42,13 \\ \hline \end{array}$$

9. Végezd el a kijelölt műveleteket!

- a) $4,58 + 19,12 + 104,6$ b) $23,7 - 12,43$ c) $(42,05 + 7,15) - (36,1 - 8,43)$

10.  Hány dm drótra van szükség a téglatest élvázának elkészítéséhez?

- a) $a = 3,4$ dm b) $a = 0,38$ m c) $a = 2\frac{1}{5}$ dm d) $a = \frac{5}{6}$ m e) $a = 28$ cm f) $a = 14\frac{1}{3}$ cm

11. Az 5,7 m mély folyóba függőlegesen bevert cölöpökön áll a horgászok stégje. A cölöp $\frac{4}{3}$ m mélyen van a földben, és $\frac{4}{5}$ m-re emelkedik ki a vízből.
Milyen hosszú a cölöp?



12. Mit írhatunk a $\square$ helyébe, hogy igaz állításokat kapjunk?

- a) $\square - \frac{3}{11} = \frac{4}{11}$ b) $\square - \frac{5}{13} = \frac{7}{39}$
c) $\square - 2\frac{1}{15} = 3\frac{4}{30}$ d) $\square + \frac{5}{54} = \frac{3}{27}$ e) $\square + \left(0,7 + \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{3}$ f) $0,3 + \square = 2$

13. Mit írhatunk a $\square$ helyébe, hogy igaz állításokat kapjunk?

a) $\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{2}\right) + \square = \frac{8}{9}$

b) $\frac{6}{7} - \square = \frac{3}{7} + \frac{1}{21}$

c) $\square - \left(-\frac{5}{6} + \frac{3}{5}\right) = 0,15$

14. Mennyivel változik az $\frac{5}{8}$ értéke, ha a számláléhoz és a nevezőhöz is hozzáadunk 2-t, illetve ha kivonunk belőlük 2-t?

15. Gondoltam egy számot, kivontam belőle $\frac{4}{7}$ -et, és $\frac{7}{15}$ -öt kaptam. Mire gondoltam?

16. Melyik az a szám, amelyik $\frac{3}{4}$ és $\frac{4}{5}$ összegénél

a) $\frac{1}{2}$ -del nagyobb;

b) $\frac{1}{2}$ -del kisebb?

c) Mennyi az a) és a b) eredményének a különbsége?

17. a) Melyik számból vettük el a $\left(+\frac{3}{4}\right)$ -et, ha az eredmény $\left(-\frac{5}{16}\right)$ lett?

b) Melyik számból vettük el a $(-0,7)$ -et, ha az eredmény 0,3 lett?

18. Márta néni vett fél kg kenyeret, 25 dkg sajtot, egy $\frac{1}{4}$ kg-

os margarint, 1,5 kg csomagolt csirkehúst és 80 dkg krumplit. Mekkora tömegű szatyrot kell hazacipelnie?

Készítsetek hasonló szöveges feladatokat a **padtársatoknak**, és oldjátok is meg azokat!

19. „Hány diákja volt Püthagorasznak, ha fele matézist tanult, negyede fizikát, hetede hallgatást, meg még van közöttük 3 kiskölyök?”

@ Nézz utána, hogy mit köszönhet az utókor Püthagorasz (görög tudós, i. e. 582–496) tanítványainak!

20. Egy háromszög két oldala 15,3 dm és 18,9 dm, kerülete 46,8 dm. Mekkora a harmadik oldal hossza?

21. Pista mesélte: „Egyik zsebemben van a pénzem $\frac{2}{3}$ része, a másikban a $\frac{2}{5}$ része, a többit a markomban tartom.” Hány forintot tarthat Pista a markában?



22. Decemberig az egyik tankönyv $\frac{1}{3}$ részét dolgozták fel a gyerekek az iskolában. Ha még 40 oldalt megtanulnak, már csak 10 oldallal van több hátra, mint amennyit elvégeztek. Hány oldalas a tankönyv?

23. Egy horgász így dicsekedett a kifogott zsákmányról: „Csak a hal feje 30 cm volt. A farka olyan hosszú volt, mint a feje és a fél teste. A teste olyan hosszú volt, mint a feje és a farka együtt.” Milyen hosszú halat fogott a horgász?





24. Mekkora az $\triangle$ és a $\square$ pozitív egészek értéke, ha $\frac{3}{5} < \frac{7}{\triangle} < \frac{9}{4} < \frac{5}{\square} < \frac{16}{\triangle + \square}$?

Törttel való szorzás



Emlékszel?

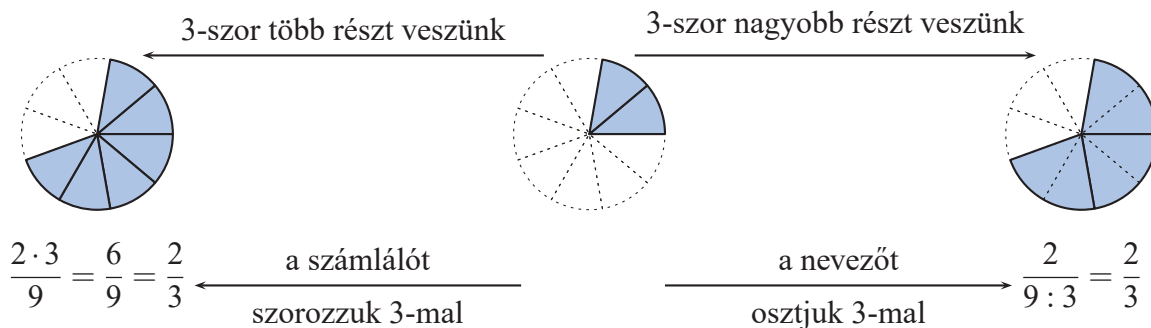
A szorzás pozitív egész számmal ismételt összeadást jelent:

$$\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$; bármely szám nullaszorosa 0.

Ha egy törtet szorzunk természetes számmal, akkor azt többféleképpen tehetjük. Pl. $\frac{2}{9} \cdot 3$ szorzásra:



Hasonlóan járunk el tetszőleges egész számmal való szorzáskor is:

Törtet egész számmal úgy is szorozhatunk, hogy a tört számlálóját megszorozzuk az egész számmal, és a nevezőt változatlanul hagyjuk.

Ha a nevező többszöröse a szorzónak, akkor a törtet egész számmal úgy is szorozhatjuk, hogy a **tört számlálóját változatlanul hagyjuk, és a nevezőt elosztjuk az egész számmal.**

Már láttuk, hogy a negatív számmal való szorzást sem lehet visszavezetni ismételt összeadásra. A tört-számmal való szorzásnak is új értelmet kell keresnünk úgy, hogy az eddig tanult szabályok továbbra is érvényben maradjanak.

1. példa



A $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ szorzat egyik jelentését mutatja ez a példa.

Egy veteményeskert $\frac{2}{3}$ részére zöldséget ültettek. Ennek a területnek a $\frac{4}{5}$ részére sárga-, illetve fehérrépát, a fennmaradó részre zellert és karalábét. A veteményeskert hányadrészébe ültettek répát?

Megoldás

$$\frac{2}{3} \text{-nak az } \frac{1}{5} \text{ része } \frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{15},$$

$$\frac{2}{3} \text{-nak a } \frac{4}{5} \text{ része megegyezik az } \frac{1}{5} \text{ részének a 4-szeresével, azaz } \frac{2}{15} \cdot 4 = \frac{8}{15}.$$

$$\text{Észrevehetjük, hogy } \frac{2}{3} \text{-nak a } \frac{4}{5} \text{ részét egyszerű szorzással kaptuk: } \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.$$

A veteményeskert $\frac{8}{15}$ részén vannak tehát répák.

Törttel való szorzással ki tudjuk számolni egy szám tört részét.

2. példa

Számítsuk ki a $\frac{2}{3}$ és $\frac{4}{5}$ egység oldalú téglalap területét!

Megoldás

Vegyünk egy egység oldalú négyzetet, egyik oldalát osszuk 3, a másik oldalát pedig 5 egyenlő részre az ábra szerint. Az osztópontokon át húzzunk párhuzamosokat a négyzet oldalával!

Így az egységnyi területű négyzetet 15 darab egybevágó kis téglalapra osztottuk fel, amelyek területe $\frac{1}{15}$ területegység.

A következő ábrán kiszíneztük a keresett téglalapot.

A beszínezett téglalap területe 8 darab kis téglalapból áll, így

$$T = \frac{8}{15} \text{ területegység.}$$

Másrészt a téglalap területe a szomszédos oldalai hosszának szorzata:

$$T = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \text{ területegység.}$$

A két eredmény ugyanannak a téglalapnak a területére vonatkozik, tehát

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}, \quad \text{azaz} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$$

Észrevehetjük, hogy:

Tört alakú számokat úgy is szorozhatunk, hogy a számlálók szorzatát osztjuk a nevezők szorzatával.

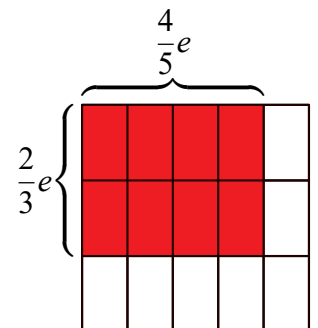
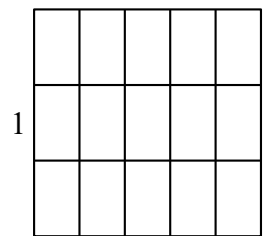
3. példa

Végezzük el a kijelölt műveleteket!

$$a) \quad 2 \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

$$b) \quad \frac{6}{7} \cdot \frac{14}{5}$$

$$c) \quad \frac{2}{3} + \frac{5}{17} \cdot \frac{51}{10} - \frac{4}{9} \cdot 0 \cdot \frac{3}{5}$$



Megoldás

a) A szorzás elvégzése előtt a vegyes törtet átalakítjuk tört alakú számmá:

$$2\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$$

b) A szorzás elvégzése előtt célszerű egyszerűsíteni, amelyet a következőképpen jelölhetünk:

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{14}{5} = \frac{6 \cdot 14}{7 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 14}{5 \cdot 7} = \frac{6}{5} \cdot \frac{14^2}{7_1} = \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{1} = \frac{12}{5}$$

c) Ennél a feladatnál két fontos dologra kell figyelniünk:

- a műveleti sorrendre: először a kijelölt szorzásokat kell elvégezni, s csak azután az összeadásokat,
- a $\frac{4}{9} \cdot 0 \cdot \frac{3}{5}$ szorzat értéke 0, mivel a szorzat egyik tényezője 0.

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{17} \cdot \frac{51}{10} - \frac{4}{9} \cdot 0 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3} + \frac{8^1}{17_1} \cdot \frac{51^3}{10_2} \text{ először egyszerűsítettünk, majd } \frac{2}{3} + \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{13}{6}$$

Mire ügyeljünk törttel való szorzáskor?

A szorzás megkezdése előtt a vegyes törtet átalakítjuk tört alakú számokká.

Megállapítjuk a szorzat előjelét, tudva, hogy két pozitív szám szorzata pozitív, két negatív szám szorzata pozitív, két ellentétes előjelű szám szorzata negatív.

A szorzat tényezői felcserélhetők.

Ha egy műveletsorban összeadás és szorzás is szerepel, akkor először a szorzást kell elvégezni.

Feladatok

1. A Földön az 1 kg tömegű tárgy súlya 10 N (N = newton ; olvasd: nyúton).

A Holdon a tárgyak súlya $\frac{1}{6}$ -szorosa a Földön mért súlyuknak.

Edwin Aldrin, az Apollo-11 űrhajósa, a második ember, aki a Holdra lépett 1969-ben



a) Pótold a füzetedben a hiányzó értékeket!

	Ember	Könyv	Káposzta	Kalapács
Földön mért súly	780 N	$\frac{25}{4}$ N		$10\frac{2}{7}$ N
Holdon mért súly			$\frac{20}{3}$ N	

b) Mennyi lenne a te súlyod, illetve a tömeged a Holdon?

2. Végezd el a kijelölt szorzásokat!

a) $2 \cdot \frac{4}{5}$

b) $8 \cdot \frac{7}{4}$

c) $8 \cdot \frac{5}{12}$

d) $\frac{13}{4} \cdot 24$

e) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$

f) $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2}$

g) $\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{10}$

h) $\frac{12}{13} \cdot \frac{26}{27}$

i) $\frac{2}{21} \cdot \frac{63}{16}$

j) $\frac{5}{12} \cdot \frac{72}{75}$

k) $\frac{17}{31} \cdot \frac{155}{68}$

l) $\frac{12}{125} \cdot \frac{65}{16}$

3. Végezd el a kijelölt szorzásokat! A kapott szorzatokat jelöld egy számegyenesen!

a) $4\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

b) $1\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{3}$

c) $2\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15}$

d) $\frac{4}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$

e) $\frac{7}{9} \cdot 3\frac{1}{2}$

4. Többet ésszel, mint erővel! Keress egyszerű megoldást!

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{6}$

c) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}$

d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$

e) $1\frac{3}{4} \cdot 5\frac{1}{7}$

f) $11\frac{11}{12} \cdot 9\frac{9}{11}$

5. Melyik nagyobb, és mennyivel?

a) $1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3}$ vagy $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3}$

b) $3\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}$ vagy $\frac{3}{4} \cdot 0 \cdot \frac{7}{5}$

c) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3}{4}$ vagy $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)$

d) $\left|-\frac{1}{2}\right| \cdot \frac{8}{3}$ vagy $-\left|\frac{1}{2}\right| \cdot \frac{8}{3}$

6. Írd le a füzetedbe a keretből hiányzó számot!

a) $\frac{3}{4} \cdot \boxed{} = \frac{9}{4}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \boxed{} = \frac{6}{9}$

c) $\frac{4}{5} \cdot \boxed{} = \frac{8}{15}$

7. Melyik számot osztottuk el

a) $\frac{3}{5}$ -del, ha a hányados $\frac{8}{3}$ lett;

b) $\frac{8}{3}$ -dal, ha a hányados $\frac{3}{5}$ lett?

8. Melyek egyenlők a szorzatok közül $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}$ -dal?

A: $\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{2}$

B: $\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{8}$

C: $\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4}$

D: $5 : 8 : 3 : 2$

E: $\left(\frac{5}{8} \cdot 3\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right)$

F: $\left(\frac{5}{8} \cdot 3\right) \cdot \left(\frac{2}{3} : 3\right)$

9. Írd fel műveleti jelekkel, és aztán számítsd is ki az értékét!

a) $\frac{1}{2}$ -nek a $\frac{3}{4}$ -e

b) $\frac{1}{2}$ -nek a $\frac{3}{4}$ -szerese

c) $\frac{3}{4}$ -nek az $\frac{1}{2}$ -e

d) $\frac{3}{4}$ -nek az $\frac{1}{2}$ -szerese

e) $\frac{5}{6}$ -nak a $\frac{3}{2}$ -e

f) $\frac{3}{2}$ -nek az $\frac{5}{6}$ -szorosa

10. Keresd meg az egyenlő értékeket!

A: $\frac{2}{3}$ -nak az $\frac{1}{4}$ része

B: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

C: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$

D: $\frac{1}{4}$ -nek a $\frac{2}{3}$ része

E: $2 \cdot 4 : 3$

F: $\frac{2+1}{3 \cdot 4}$

11. Számítsd ki a következő szorzatot! $\left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{7}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right)$

12. Játék

Padtársaddal együtt vegyetek elő egy-egy csomag számkártyát, melyeken az egyjegyű számok vannak! Véletlenszerűen üssetek fel négy, a c) kérdésnél pedig öt számkártyát, és ügyesen helyezzétek el azokat úgy, hogy a legnagyobb, majd a legkisebb szorzatot kapjátok!

Jegyezzétek fel a nyertes elrendezéseket! A játékot érdemes többször megismételni!

Jó szórakozást!

a) $\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square}$, ha csak a páratlan számkártyákat használhatjátok.

b) $\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square}$, ha bármelyik számkártyát felhasználhatjátok.

c) $\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square}$, ha bármelyik számkártyát felhasználhatjátok. (Vegyes számot szorzunk tört számmal.)

13. A levegőnek az $\frac{1}{5}$ része oxigén. Hány m^3 levegő van abban az osztályteremben, amelynek hossza 12 m, szélessége a hosszának $\frac{2}{3}$ része, magassága pedig 3 m? Körülbelül hány m^3 ebből az oxigén alkotórész?



14. Körző és vonalzó segítségével rajzold meg azt a háromszöget, amelynek egyik oldala 5 cm, és ezen az oldalon fekvő szögei a derékszög $\frac{2}{3}$ részével, illetve a derékszög felével egyenlőek!

15. Egy csövön óránként 22 hl víz folyik ki. Mennyi marad megtöltetlenül a 250 hl-es medencéből, ha a csap folyamatosan üzemel $8\frac{3}{4}$ órán át?

A: 55,4 hl

B: 57,5 hl

C: 48,6 hl

D: a medence $\frac{1}{4}$ része

E: egyik válasz sem helyes

- 16.** Keress a koordináta-rendszerben olyan pontokat, amelyek koordinátái 20-nál kisebb természetes számok, és

a) a második jelzőszám az elsőnek $\frac{3}{4}$ -szerese, ezeket rajzold pirossal;

b) az első jelzőszám a másodiknak a $\frac{4}{3}$ -szorosa, ezeket rajzold kékkel!

- 17.** Milyen messze lesz Zsuzsi Timitől, ha otthonról indulnak egy időben kerékpározni, mindketten 45 percet tekernek folyamatosan, és Zsuzsi 32 km-t tesz meg óránként, míg Timi ennek a $\frac{4}{5}$ részét, továbbá

a) azonos irányba, b) ellenkező irányba haladnak?

- 18.** Írd fel a sorozatok első öt tagját! Mennyi a legkisebb és a legnagyobb tag összege, illetve szorzata?

a) A sorozat első tagja 8. Minden tag az előtte lévőnek $\frac{3}{4}$ -szerese.

b) A sorozat első tagja 5. Minden tag az előtte lévőnek $\frac{3}{2}$ -szerese.

c) A sorozat első tagja $\frac{1}{2}$. Minden tag az előtte lévőnek $\left(-\frac{2}{3}\right)$ -szorosa.

- 19.** Egy használtautó-kereskedő 850 000 Ft-ért adott el egy autót.

Mennyiért vette ugyanezt az autót, ha a haszna az eladási ár $\frac{1}{4}$ része volt?

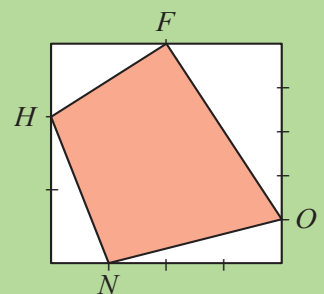


- 20.** Egy város két iskolájába összesen 1240 tanuló jár. Az egyik iskola tanulói létszámának $\frac{4}{5}$ része egyenlő a másik iskola tanulói létszámának $\frac{3}{4}$ részével.

Hány tanuló jár az egyik, és mennyi a másik iskolába?

- 21.** Egy egységnyi oldalhosszúságú négyzet oldalait 2, 3, 4, illetve 5 egyenlő részre osztottuk, és összekötöttük a megjelölt osztópontokat. Hányadrésze az így nyert színes terület az eredeti négyzet területének?

- 22.** Három vödör van, mindhárom térfogata literben mérve egész szám. Az első vödör a legkisebb, ennek térfogata a másodikénak kétharmada, a harmadikénak háromnegyede. Mindhárom vödör tele van vízzel. Ha mindegyiket beleöntöm egy 30 literes tartályba, akkor a tartály még nem lesz tele. Hány liter víz fér még a tartályba?





23. A Kovács család havi nettó bevétele (ténylegesen kézhez kapott összeg) 352 000 Ft.

A rezsire (villany-, gázszámla, ...) ennek $\frac{1}{8}$ részét kell kifizetniük. Mennyi a család rezsizámlája, és mennyi pénzzel gazdálkodhatnak a hónap folyamán?

Tizedes törttel való szorzás

1. példa

Mekkora az ábrán látható szőnyeg területe, ha oldalai 1,8 m és 2,4 m hosszúak?



Megoldás

Mivel a szőnyeg téglalap alakú, ezért a területe: $T = 1,8 \cdot 2,4 \text{ m}^2$
Ezt a szorzást kétféleképpen is ki tudjuk számolni:

Első lehetőség: a tizedes törteket átírjuk tört alakú számokká, s alkalmazzuk a törtek szorzására tanult szabályt. $1,8 \cdot 2,4 = \frac{18}{10} \cdot \frac{24}{10} = \frac{18 \cdot 24}{10 \cdot 10} = \frac{432}{100} = 4,32$

A szőnyeg tehát $4,32 \text{ m}^2$ -es.

Második lehetőség: Az adatokat átváltjuk dm-re, így két egész számot kell összeszoroznunk, és azután az eredményt visszaalakítjuk m^2 -re.

$$1,8 \text{ m} = 18 \text{ dm}, \quad 2,4 \text{ m} = 24 \text{ dm}, \quad T = 18 \cdot 24 \text{ dm}^2 = 432 \text{ dm}^2 = 4,32 \text{ m}^2$$

2. példa

Végezzük el a $3,42 \cdot 5,3$ szorzást!

Megoldás

Vegyük az első szám százszorosát, a második szám tízszeresét! Így két egész számot kell összeszoroznunk. Az eredeti szorzat értéke az egészekkel végzett szorzat 1000-ed része lesz.

$$\begin{array}{r} 342 \cdot 53 \\ 1026 \\ 1710 \\ \hline 18126 \end{array} \quad 18126 : 1000 = 18,126$$

Írásban egyszerűbben is elvégezhetjük a szorzást: a számokat úgy szorozzuk össze, mintha egész számok lennének (nem vesszük figyelembe a tizedesvesszőt). A szorzatban kijelöljük a tizedesvessző helyét a század $\cdot$ tized = ezrednek

megfelelően, mert $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$.

$$\begin{array}{r} 3,42 \cdot 5,3 \\ 1026 \\ 1710 \\ \hline 18,126 \end{array} \quad \text{A szorzat } 18,126.$$

Tizedes törteket úgy szorzunk össze, ahogyan egész számokat, de a szorzatban annyi tizedesjegyet jelölünk ki, amennyi a két tényezőben együttvéve van.

Feladatok

1. Végezd el a kijelölt szorzásokat!

- a) $5 \cdot 0,3$ b) $12 \cdot 0,4$ c) $2,4 \cdot 0,1$ d) $0,3 \cdot 0,2$
 e) $52,4 \cdot 100$ f) $52,4 \cdot 0,001$ g) $7,2 \cdot 0,02$ h) $3,4 \cdot 0,8$

2. Beninek 5 eurója, Petinek 6 amerikai dollárja volt. 2020 nyarán, az egyik napon 1 euróért 351,37 forintot, 1 amerikai dollárért 297,33 forintot kellett fizetni. Melyik fiúnak volt több pénze aznap forintban, és mennyivel?

3. Végezd el a kijelölt szorzásokat!

- a) $1,2 \cdot 45$ b) $1,2 \cdot 4,5$ c) $1,2 \cdot 0,45$ d) $1,2 \cdot 4,05$
 e) $53,8 \cdot 12,6$ f) $1\frac{3}{5} \cdot 0,6$ g) $2\frac{2}{3} \cdot 1,5$ h) $1\frac{2}{7} \cdot 1,4$

Melyik szorzás eredménye „kakuktkojás”, azaz egész szám?

4. Számítsd ki fejben

- a) a $300 \cdot 1,5$ szorzatot; 300-nak a másfélszeresét; 300 felének a háromszorosát; 300-nak a $\frac{3}{2}$ részét!
 b) 12-nek a 0,3-szeresét; 12-nek a $\frac{3}{10}$ részét; 12 tizedrészének a háromszorosát; 12 háromszorosának a tizedrészét!

5. Édesanya a piacon szeret vásárolni, mert ott maga válogathatja ki azt, amit venni szeretne.

- a) Mennyit fizetett 2,4 kg almáért?
 b) Leveszöldséget is válogatott, és a mérleg azt mutatta, hogy a sárgarépa 78 dkg, a fehérrépa 37 dkg, míg a zeller negyed kg volt. Mennyit fizetett a zöldségekért, ha egy karalábét is választott?
 c) 10 000 Ft-tal fizetett, mennyi pénzt kapott vissza?



6. Végezd el a kijelölt műveleteket, majd rendezd növekvő sorrendbe az eredményeknek megfelelő betűket! Milyen szót kaptál?

$$O = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot 0,3 \qquad Z = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot 0,3 \qquad T = \left(\frac{1}{3} + 0,25\right) \cdot 2,4$$

$$A = \frac{1}{3} + 0,25 \cdot 2,4 \qquad Sz = 0,375 \cdot \left(0,25 + \frac{1}{6}\right) \qquad R = 0,2 + 0,02 \cdot 10 + 0,3 \cdot 0,6$$

7. Egy téglalap alakú szoba hossza 6,8 m, szélessége 3,7 m. A szoba $\frac{3}{5}$ részét szőnyeg borítja. Hány m²-es ez a szőnyeg?

8. Melyik az a szám, amelyet 23,42-dal osztva a hányados 20,5?

9. Egy iskola 1215 tanulójának $\frac{2}{3}$ része angolt tanul első idegen nyelvként, közülük a haladó angolcsoportba a gyerekek 0,4-szeresét lehetett besorolni.

Hány kezdő és hány haladó csoportot kell szervezni, ha a csoportok létszáma 15–20 fő?



10. Számold ki a $613,2 \frac{3}{4}$ részének a 0,4-szeresét!

11. a) A Budapest és Debrecen közötti IC átlagsebessége $88,4 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$. Milyen messzire jut el ez a vonat az indulásától számított $\frac{1}{2}$ óra; 20 perc; 2,4 óra alatt?

- b) A képen a japán Sinkanszen vonat fotóját láthatod, amely pillanatnyilag a leggyorsabb vonat a világon. Tudni kell róla, hogy tájfun- és földrengésbiztos. Átlagos sebessége $300 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$, de el tudta érni a $443 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességet is.

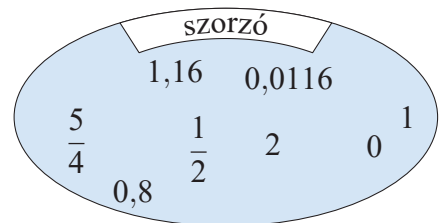
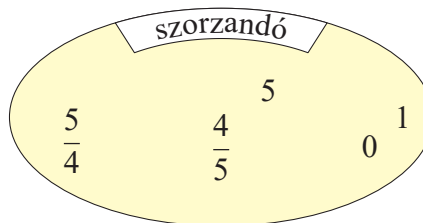


Milyen távolságokra jutna el ez a vonat a fenti időtartamok alatt, ha az átlagos sebességével halad?

- @ Nézz utána, mit jelent a „mágneses vonat” kifejezés, és hol üzemeltetnek ilyen vonatokat!

12. Válassz szorzandót és szorzót a halmazábra megfelelő halmazáiból!

- a) Hány szorzatot lehet felírni?
b) Hány esetben lesz a szorzat kisebb a szorzandónál?
c) Hány esetben lesz a szorzat 0?



13. Számítsd ki a $\frac{0,1+0,2+0,3+0,4+0,5+0,6+0,7+0,8}{0,01+0,02+0,03+0,04+0,05+0,06+0,07+0,08}$ tört értékét!

14. A kenyérsütéshez szükséges víz mennyisége a liszt tömegének 0,6 része. Sütéskor a kenyértészta tömegének $\frac{3}{25}$ részét veszti el.

Hány kg kenyeret lehet sütni 2 tonna lisztből?

Hány darab 75 dkg-os kenyér készülhet ebből a mennyiségből?



Számok reciproka

1. példa

Végezzük el a következő szorzásokat!

$$a) \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \quad b) \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} \quad c) 4 \cdot \frac{1}{4} \quad d) \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \quad e) \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-5)$$

Megoldás

A szorzat mind az öt esetben 1.

2. példa

Tegyük igazzá az alábbi nyitott mondatokat!

$$a) \frac{3}{5} \cdot \triangle = 1 \quad b) \frac{5}{4} \cdot \square = 1 \quad c) 3 \cdot \bigcirc = 1 \quad d) \square \cdot \frac{1}{7} = 1$$

$$e) \frac{244}{525} \cdot \diamond = 1 \quad f) \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \heartsuit = 1 \quad g) 0 \cdot \star = 1$$

Megoldás

A nyitott mondatok megoldása során olyan számot kell keresni, amelyet az eredeti számmal megszorozva a szorzat értéke 1 lesz.

A g) feladatnak nincs megoldása, hiszen 0-t bármilyen számmal szorzunk, a szorzat értéke csak 0 lehet.

A többi nyitott mondat megoldása:

$$\triangle = \frac{5}{3} \quad \square = \frac{4}{5} \quad \bigcirc = \frac{1}{3} \quad \square = 7 \quad \diamond = \frac{525}{244} \quad \heartsuit = -\frac{5}{4}$$

Egy szám reciprokán azt a számot értjük, amellyel az eredeti számot megszorozva a szorzat értéke 1.

A 0-nak nincs reciproka, mert nincs olyan szám, amelyet a 0-val megszorozva a szorzat 1 lenne.

3. példa

Írjuk fel az alábbi számok reciprokát!

$$\frac{5}{3} \quad 42 \quad 1\frac{5}{6} \quad -0,8 \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{5}$$

Megoldás

Minden esetben azt a számot kell megkeresni, amellyel az eredeti számot megszorozva a szorzat értéke 1 lesz. Tört alakú számoknál a szorzásról tanultak szerint ez egyszerűen azt jelenti, hogy a reciprok képzésekor az eredeti tört számlálója lesz a reciprok tört nevezője, és az eredeti tört nevezője lesz a reciprok tört számlálója.

$$\frac{5}{3} \text{ reciproka } \frac{3}{5}, \text{ mert } \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1, \quad 42 \text{ reciproka } \frac{1}{42}, \text{ mert } 42 \cdot \frac{1}{42} = 1,$$

$$1\frac{5}{6} \text{ reciproka } \frac{6}{11}, \text{ mert } \frac{11}{6} \cdot \frac{6}{11} = 1, \quad -0,8 = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} \text{ reciproka } -\frac{5}{4}, \text{ mert } \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = 1$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15} \text{ reciproka } \frac{15}{22}, \text{ mert } \frac{22}{15} \cdot \frac{15}{22} = 1$$

Feladatok

1. Keresd meg a számok reciprokat!

3 -2 $\frac{1}{7}$ $\frac{8}{5}$ $-\frac{3}{8}$ 0,2 $1\frac{1}{3}$ -2,01

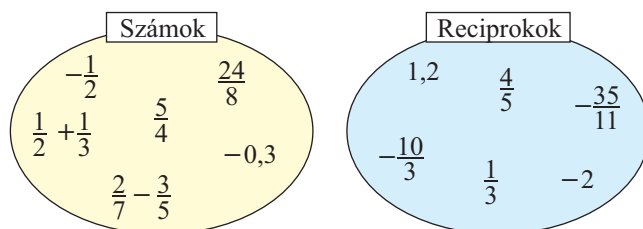
2. Milyen számokat írhat az egyes jelek helyébe, hogy igaz állításokat kapj?

a) $\frac{2}{3} \cdot \square = 1$ b) $4 \cdot \bigcirc = 1$ c) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \triangle = 1$ d) $0,3 \cdot \triangle = 1$ e) $\left(\frac{4}{5} - \frac{7}{15}\right) \cdot \diamond = 1$

3. Keresd meg az összes olyan számot, amely megegyezik a reciprokával!

Ábrázold koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyek jelzőszámait az általad talált számok alkotják! Hány pontot kaptál?

4. Az egyik halmazban a számokat, a másikban a reciprokat helyeztük el. Keresd meg a párokat, és írd le azokat a füzetedbe!



5. Gondoltam egy számra. megszoroztam $\frac{3}{5}$ -del. Mivel szorozzam meg a kapott szorzatot, hogy visszakapjam az eredeti számot?

6. Milyen számot írhat az keretbe, illetve a $\triangle$ és a $\square$ helyére? (A számokat a füzetedbe írd le!)

a) $32 \cdot \frac{2}{5} \cdot \square = 32$ b) $45 \cdot \frac{5}{9} \cdot \square = 45$ c) $23 \cdot \triangle \cdot \square = 23$ d) $-12 \cdot \triangle \cdot \square = 12$

Osztás tört alakú számmal

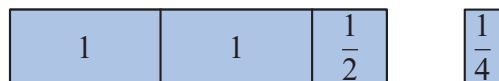
1. példa

Julcsi néni a $2\frac{1}{2}$ kg dióbelet $\frac{1}{4}$ kg-os zacskókba csomagolva visz karácsony előtt eladni a piacra. Hány zacskót tud megtölteni?

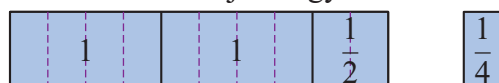


Megoldás

A feladat megoldását szemléltethetjük rajzzal:



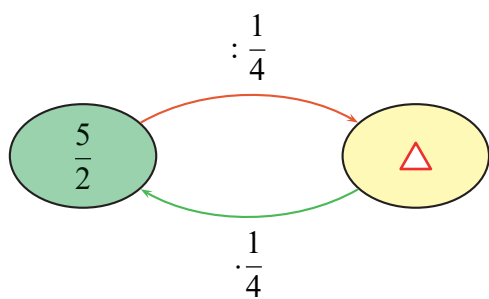
Meg kell néznünk, hogy az $\frac{1}{4}$ -nek megfelelő téglalap hányszor fér rá a $2\frac{1}{2}$ -et jelentő téglalapra. Ezért az utóbbit felosztjuk negyedekre.



$$\frac{5}{2} : \frac{1}{4} = \frac{10}{4} : \frac{1}{4} = 10$$

A feladat matematikai leírása: $2\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{5}{2} : \frac{1}{4}$

A feladatot így is szemléltethetjük:



Felírhatjuk, hogy $\triangle \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$, azaz $\triangle$ azt a számot jelenti, amelynek az $\frac{1}{4}$ része az $\frac{5}{2}$.

Innen $\triangle = \frac{5}{2} \cdot 4 = 10$,

Megfigyelhettük, hogy az $\frac{1}{4}$ -del való osztás helyett annak a reciprokával, azaz 4-gyel szoroztunk.

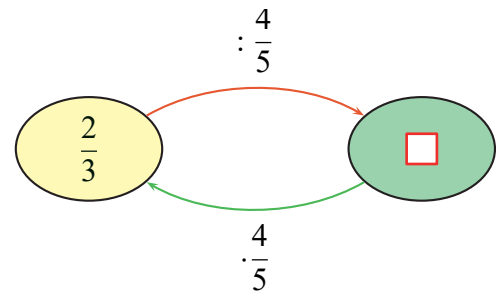
Julcsi néni tehát 10 darab $\frac{1}{4}$ kg-os zacskót tud megtölteni $2\frac{1}{2}$ kg dióbéllal.

2. példa

Mennyi $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$?

Megoldás

Ha a $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ hányadosát $\square$ -tel jelöljük, akkor ez azt jelenti, hogy $\square \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$, vagyis azt a számot keressük, melynek a $\frac{4}{5}$ része $\frac{2}{3}$.



Így a szám $\frac{1}{5}$ része a $\frac{2}{3}$ -nak a negyedrésze: $\square = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$

A szám ötödrészét ismerjük. Innen keresett hányados $\square = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$. Tehát: $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$

Megjegyzés: $\frac{8}{3} : \frac{4}{3} = 2$, mert $\frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}$. $\frac{7}{3} : \frac{4}{3} = \frac{7}{4}$, mert $\frac{7}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$.

Az azonos nevezőjű törtek esetén elegendő az osztandó számlálóját az osztó számlálójával elosztani. Vannak olyan országok, ahol a törtek közös nevezőre hozása után végzik el az osztást.

Mire ügyeljünk törttel való osztáskor?

Törttel úgy is oszthatunk, hogy az osztandót szorozzuk az osztó reciprokával.

Az osztás megkezdése előtt a vegyes törteket átalakítjuk tört alakú számokká.

Megállapítjuk a hányados előjelét, tudva, hogy egy előjeles számot ugyanolyan előjelű számmal osztva az eredmény pozitív, ellenkező előjelű számmal osztva az eredmény negatív.

Az osztásban szereplő számok törttel való osztáskor sem cserélhetők fel ($8 : 4 \neq 4 : 8$).

Ha egy művelet sorban összeadás és osztás is szerepel, akkor először az osztást kell elvégezni.

Feladatok

1. Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $3:\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3}:3$ c) $2:\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{3}:2$ e) $5:\frac{6}{5}$ f) $\frac{6}{5}:5$

2. Számítsd ki!

a) $\frac{5}{4}:\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}:\frac{1}{7}$ c) $\frac{2}{9}:\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{5}:\frac{2}{5}$ e) $\frac{4}{5}:\frac{7}{10}$ f) $\frac{21}{2}:\frac{15}{4}$

3. Végezd el az osztásokat!

a) $5\frac{1}{2}:7\frac{1}{2}$ b) $2\frac{9}{20}:1\frac{2}{5}$ c) $3\frac{1}{8}:7\frac{2}{9}$ d) $3\frac{1}{7}:2\frac{5}{14}$

4. A lecsőpaprikát $\frac{3}{4}$ kg-os hálós csomagokban árúsítják.

Hány csomag készíthető

- a) egy láda paprikából, ha az 30 kg-ot tartalmaz?
b) két és fél ugyanilyen láda paprikából?
c) Egy vendéglősnek 15 kg lecsőpaprikára van szüksége.
Hány csomagot kell vásárolnia?



5. Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{7}{3}:\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right)$ b) $\frac{4}{5}:\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right)$ c) $\left(2,4-\frac{1}{5}\right):\frac{22}{15}$ d) $2,4-\frac{1}{5}:\frac{22}{15}$

6. Keresd a párját!

A: $\frac{1}{3}:\frac{1}{2}$ B: 1,5 C: $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ D: $\frac{1}{6}$ E: $\frac{1}{3}$ -nak az $\frac{1}{2}$ része F: $\frac{2}{3}$

7. Figyelj a műveletek elvégzésének sorrendjére, és számold ki a műveletek eredményét!

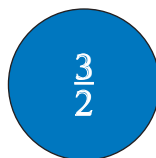
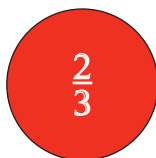
a) $17\frac{1}{5}+\frac{1}{4}:1\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{9}+\frac{4}{5}:\frac{3}{10}$ c) $\frac{1}{2}:\frac{7}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)$ d) $4\frac{5}{7}:\left(2\frac{1}{2}+1\frac{3}{5}\right)$

8. Számítsd ki az emeletes törték értékét!

a) $\frac{1}{\frac{15}{3}}$ b) $\frac{1}{\frac{1}{15}}$ c) $\frac{\frac{9}{14}}{\frac{5}{2}}$ d) $\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ e) $\frac{2\frac{1}{4}+1\frac{1}{7}}{1\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}}$



9. Játék



Padtársaddal együtt játsszatok matematikát! Készítsetek korongokat, amelyek egyik oldala piros, a másik kék! Írjátok egy törtet a piros oldalra, és annak reciprokat a kék oldalra!

A piros színű koronggal szorozni, a kékkel osztani kell. Az elvégzendő műveletsor elé mindig írjátok 1-et!

- Először egy koronggal játsszatok! Az 1-es után az egyik játékos helyezzen el egy korongot, és mindketten számoljátok ki a kívánt műveletet a korong színének megfelelően, majd fordítsátok meg a korongot, és ismét számoljátok ki a kívánt művelet eredményét! Egyeztessétek a kapott eredményeiteket!
- Beszélgétek meg néhány játék után, hogy mit tapasztaltatok!
- Ezután két koronggal játsszatok, az elsőt az egyik, a másodikat a másik játékos tegye az asztalra! A korongok színe szerint szorozzatok, illetve osszatok! Írjátok le a kapott eredményt! Ezután fordítsátok meg egy vagy két korongot, és ismét végezzétek el a megfelelő műveletet. Mit vettetek észre?
- Most 3, majd 4 koronggal játsszatok! Végezzétek el a szükséges szorzásokat, illetve osztásokat, és írjátok le az eredményt! Akármelyik korongot vagy akár többet is fordítsátok meg, és az elvégzett műveletsor eredményét hasonlítsátok össze az első eredményetekkel! Észrevételeket próbáljátok megindokolni!



10. Melyik az a legnagyobb szám, amelyet az $1 : 2 : 3 : 4$ osztásnál a zárójelek beillesztése után elő tudsz állítani?

11. Határozd meg a következő, úgynevezett lánc törték értékét!

a) $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$

b) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$

c) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$

12. Mennyi a tört értéke?

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{8} : \left[\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right]}{\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{8} \right) : 1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}$$

Osztas tizedes tört alakú számmal

1. példa

A táblázat négy állat átlagos születési tömegét, illetve átlagos felnőttkori tömegét tartalmazza.

Állatfaj	Születési tömeg	Felnőtt állat tömege
Csimpánz	2 kg	72 kg
Jegesmedve	0,4 kg	320 kg
Teknős	0,03 kg	4 kg
Kenguru	0,012 kg	45 kg

Melyik állat testtömeg-növekedése a legnagyobb?

Hányszoros ez a növekedés?



Megoldás

A **csimpánz** testtömegét megharminchatszorozza, mert $72 \text{ kg} : 2 \text{ kg} = 36$.

A **jegesmedve** esetében a $320 : 0,4$ osztást kell elvégeznünk. Kétféleképpen végezhetjük el ezt az osztást. Vagy átírjuk az osztót tört alakú számmá:



$$320 : 0,4 = 320 : \frac{4}{10} = 320 \cdot \frac{10}{4} = \frac{3200}{4} = 800,$$

vagy az osztót és az osztandót is bővítjük úgy, hogy az osztó egész szám legyen. A bővítésnél a hányados értéke változatlan marad, és egész számmal már tudunk osztani:

$$320 : 0,4 = 3200 : 4 = 800 \quad (\text{tízzel bővítettünk})$$

A jegesmedve tömege tehát felnőttkorára 800-szorosára gyarapodik.



A **teknős** esetében a $4 : 0,03$ osztás elvégzésekor az egyszerűbb, bővítéses megoldást alkalmazzuk (százzal bővítünk).

$$4 : 0,03 = 400 : 3 = 133,3$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 1 \end{array}$$

azaz a tömeg körülbelül 133-szoros lett.

A **kengurunál** is bővítünk, itt ezerrel.

$$45 : 0,012 = 45000 : 12 = 3750$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ 60 \\ 00 \\ 0 \end{array}$$

Döbbenetes eredményt kaptunk, a felnőtt kenguru 3750-szer nehezebb a születési tömegénél.



2. példa

Mennyi a hányados értéke?

$$69,168 : 5,24$$

Megoldás

Szorozzuk meg az osztandót és az osztót is 100-zal, ekkor az osztó egész szám lesz, és így végezzük el az osztást. Ezzel a bővítéssel a hányados értéke nem változik.

$$6916,8 : 524 = 13,2$$

$$1676$$

$$1048$$

$$0$$

$$\text{Ellenőrzés: } 5,24 \cdot 13,2$$

$$1572$$

$$1048$$

$$69,168$$

Mire ügyeljünk tizedes törttel való osztáskor?

Ha az osztó tizedes tört, akkor az osztandót és az osztót is bővíthetjük úgy, hogy az osztó egész szám legyen, és azután végezzük el az osztást.

Megállapítjuk a hányados előjelét, tudva, hogy előjeles számot ugyanolyan előjelű számmal osztva pozitív, ellenkező előjelű számmal osztva negatív eredményt kapunk.

Az osztásban szereplő számok sorrendje nem felcserélhető.

Ha egy műveletsorban összeadás és osztás is szerepel, akkor először az osztást kell elvégezni.

Feladatok

1. Hányszorosára nőtt a párizsi olimpiához képest a részt vevő országok, a sportolók, a sportágak száma 2016-ra, a Rio de Janeioban megrendezett olimpiára?

OLIMPIAI JÁTEKOK

	1900 Párizs	2016 Rio de Janeiro
Részt vevő országok	21	207
Sportolók	1077	10500
Sportágak száma	14	28



Nézz utána, hogy melyik országban rendeztek legtöbbször nyári olimpiai játékokat, és mely években voltak ezek!

2. A lehető legkevesebb számolással dolgozz!

a) $0,6 : 2$

b) $0,6 : 0,2$

c) $1,2 : 6$

d) $1,2 : 0,12$

e) $334,8 : 62$

f) $33,48 : 6,2$

g) $3,348 : 0,62$

h) $0,3348 : 0,062$

3. Ügyesen számolj!

a) $420 : 35$

b) $42 : 3,5$

c) $420 : 3,5$

d) $4,2 : 3,5$

4. Végezd el a kijelölt osztásokat!

a) $265,23 : 6,3$

b) $8,874 : 0,17$

c) $142,38 : 12,6$

5. Tedd igazzá az alábbi nyitott mondatokat!

a) $\frac{3}{4} \cdot \square = \frac{21}{12}$

b) $0,8 \cdot \square = 1,04$

c) $6,02 \cdot \square = 18,361$

d) $\square \cdot 2\frac{1}{2} = 3\frac{1}{8}$

e) $-1,7 \cdot \square = 21,08$

f) $4,8 : \square = 96$

6. Kérdezd meg szüleidtől születési tömegedet! Számold ki, hogy 12 éves korodra mennyivel nőtt és hányszorosára nőtt meg a születési tömeged!

7. Az Egyenlítő hossza körülbelül 40 000 km. Hány lépéssel lehetne körbejárni, ha egy lépés kb. 80 cm hosszú? Feltételezve, hogy egyenletes ütemben sétálunk, és 1 másodperc alatt 1 lépést teszünk meg, akkor hány óra, nap, illetve év alatt lehetne végigmenni az Egyenlítőn? (Ez a valóságban természetesen nem kivitelezhető séta.) Az órát egész, a napot tized, az évet század pontossággal számold!

8. Tudod-e?

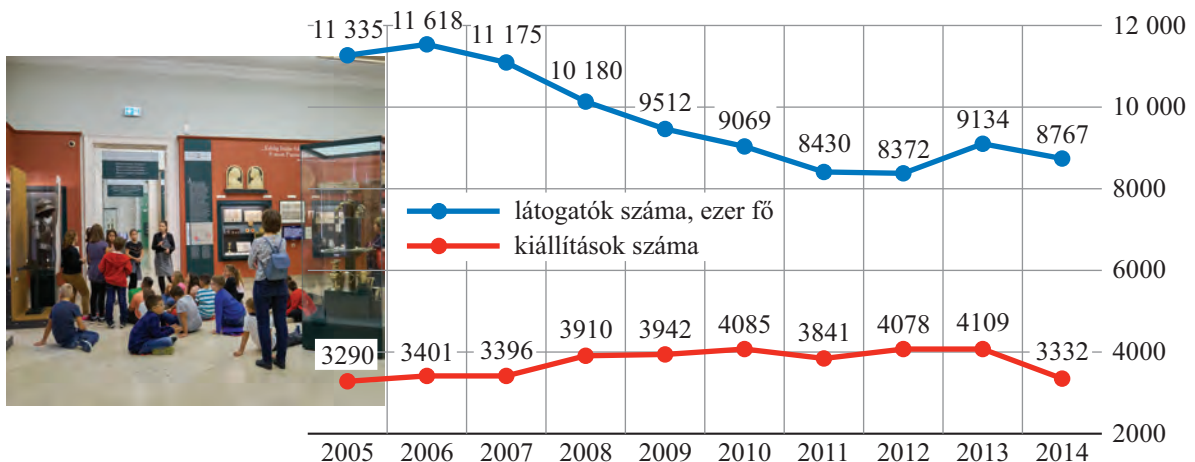
- Az emberi test egyik „legértékesebb” területének a szemben található úgynevezett sárgafoltot, az éles látás területét tartják. Ez mindössze 5 mm^2 . A szaglásért felelős terület nagysága 5 cm^2 . Hányszor nagyobb ez a terület?
- Az ember bélrendszerének hossza 7,5 m, míg a növényevő juhnek 24 m. Hányszor hosszabb és mennyivel hosszabb a juh bélrendszere az emberénél, és vajon miért?
- Az emberi bélrendszernek megfelelő hosszúságú és szélességű henger felülete $0,33 \text{ m}^2$. A bél belső felületén található bolyhocskák ezt a felületet megnövelik 200 m^2 -re. Hányszorosára nőtt a bélcsatorna felülete a táplálék felszívhatósága érdekében?



9. **Padtársaddal** tanulmányozzátok az ábrán látható grafikonokat, és beszélgetsetek a látottakról!

- Mely években növekedett a múzeumlátogatók száma, és mennyivel?
- A vizsgált időszakban hány fővel csökkent a múzeumlátogatók száma?
- Melyik évben nem volt lényeges változás a látogatók száma között, és mely évek között volt a legerőteljesebb a változás?
- A kiállítások számáról készült grafikonról tegyetek fel hasonló kérdéseket egymásnak, és válaszoljátok meg azokat!

A múzeumlátogatók és a kiállítások száma Magyarországon (2005–2014)



10. Egy téglalap területe $59,04 \text{ cm}^2$. Egyik oldala 4,8 cm hosszú. Mekkora a téglalap kerülete? Az eredményt add meg dm-ben és m-ben is!

11. Egy szoba tapétázásához $\frac{3}{4}$ m szélességű tapétából 50 m szükséges.

Hány méter tapétát kell vásárolni, ha csak 1,2 m szélességűt lehet kapni?

12.



Egy kifejlett kuvasz 52 kg, míg egy kifejlett tascó mind-össze 3,5 kg tömegű.



Hányszor nehezebb a kuvasz a tascónál?
Mennyivel nehezebb a kuvasz a tascónál?

13.

Egy angol mérföld 1,6 km. Hány km-es volt a 12 mérföldes kirándulás?
Hány mérföld a 12 km-es gyalogtúra?

14.

Beninek és Petinek egyaránt 10 000 Ft-ja volt. 2020 nyarán, az egyik napon elmentek a pénzváltóba. Beni euróra, míg Peti amerikai dollárra váltotta át az összegyűjtött zsebpénzét. 1 euróért 351,37 forintot, 1 amerikai dollárért 299,33 forintot kellett fizetni. Mennyi devizát kaptak a fiúk külön-külön?

15.

Egy csavar tömege $4\frac{5}{6}$ g. Hány csavar van abban a dobozban, amelynek tömege csomagolással együtt 1,25 kg?
(A doboz tömege 0,2 kg.)



16.

Egy vonat 1 óra 15 perc alatt 82 km-t, míg egy másik 1,3 óra alatt 78 km-t tesz meg. Melyik a gyorsabb vonat?

17.

$\frac{3}{5} = ?$ Minden számnak sok neve van. Olyan nevet keress, amelyből látszik, hogy a $\frac{3}{5}$

a) mennyivel kevesebb, mint a $\frac{4}{5}$;

b) melyik számnak a fele;

c) hányadrésze az $\frac{1}{2}$ -nek;

d) mennyivel több, mint a $\frac{3}{7}$;

e) hányszorosa a 0,2-nek;

f) hányadrésze a 0,2-nek!



18. Karácsonyi sütés előtt 4 kg diót vásároltunk, kilóját 800 Ft-ért (2020-ban). A diót megtisztítása után lemértük, és észrevettük, hogy a dióhéj tömege a dióbél tömegének a $\frac{2}{3}$ része. Mennyibe kerül a dióbél kilója?

19. Egy téglatest alakú akvárium alapélei 18 cm és 3,4 dm hosszúak. Mennyivel emelkedik meg a benne lévő víz szintje, ha beleteszünk egy 300 cm³-es követ, és az teljesen elsüllyed?

20. Jutka és Éva édesanyjuk születésnapjára ugyanolyan kézimunkát készítenek. Egy idő múlva összehasonlítják munkájukat, és megállapítják, hogy Éva feleannyit készített, mint amennyi Jutkának még hátravan. Jutkának viszont még feleannyi van hátra, mint amennyit már elkészített. Hányszorosára kell növelnie Évának az eddigi napi teljesítményét, hogy Jutkával egyszerre legyen készen?

Minek van nagyobb esélye?



- 1. Padtársaddal** együtt kísérletezzetek! Egyikőtök egy négyoldalú szabályos dobótesttel dobjon, amelyen 1, 2, 3, illetve 4 pont van! Az a szám lesz a törtetek számlálója, amelyik a dobás után nem látható. A másikatok pedig a szabályos dobókockával a tört nevezőjét fogja dobni. Készítsetek gyakorisági táblázatot a kapott törtetekről, és számoljátok ki a dobások számától függő relatív gyakoriságokat!



Készítsetek egy, az itt látható táblázathoz hasonlókat a füzetetekbe, és strigulázással jelöljétek, hogy a kapott tört melyik rubrikába írandó!

Készítsetek gyakorisági grafikont az egynél nagyobb törték darabszámáról!

Például ha a számláló és a nevező is 4, akkor a tört értéke egész szám.

Ennyi dobásból	Ennyi lett 1-nél kisebb	Relatív gyakoriság értéke	Ennyi tört értéke lett egész	Relatív gyakoriság értéke	Ennyi lett 1-nél nagyobb	Relatív gyakoriság értéke
10						
20						
30						
40						
50						

- 2. Padtársaddal** együtt kísérletezzetek! Egy csomag számkártya felhasználásával kétjegyű számokat fogtok kirakni. A számkártyák 0-tól 9-ig számozottak. Az első számjegyet az egyikőtök, a másodikat a másikatok fogja elhelyezni a padra.

Az így nyert „kétjegyű számokat” vizsgáljátok az ötrel való oszthatóság szerint. Készítsetek a lenti táblázathoz hasonlókat a füzetetekbe, és strigulázással jelöljétek, hogy a kapott szám melyik rubrikába írandó!



Például: a 0 5 vagy 3 0 számokat is kétjegyűnek és 5-tel oszthatóknak tekintjük.

A táblázat kitöltése után a kihúzott számkártyákat tegyétek vissza a saját kártyacsomagotokba, és folytassátok a kísérletezést!

Ennyi szám-ból	Ennyi lett 5-tel osztható	Relatív gyakoriság értéke	Ennyi lett 5-tel nem osztható	Relatív gyakoriság értéke
10				
20				
30				
40				
50				



3. Padtársaddal együtt kísérletezzetek!

Mindketten egy-egy szabályos dobókockával fogtok dobni. Vizsgáljátok meg, hogy melyik eseménynek lesz nagyobb az esélye, és körülbelül hányszor nagyobb, mint a másiké!

a) A dobott számok összege páros vagy páratlan.

b) A dobott számok szorzata páros vagy páratlan.

Készítsetek a füzetetekbe külön az a) és a b) feladathoz az itt látható táblázathoz hasonló táblázatot! Strigulázzátok a bekövetkezett eseményeket, majd válaszoljatok a feltett kérdésre!

Ennyi számból	Ennyi lett páros	Relatív gyakoriság értéke	Ennyi lett páratlan	Relatív gyakoriság értéke	Melyik lett gyakoribb?	Hányszorosa a gyakoribb esélye?
10						
20						
30						
40						
50						

Tudáspróba

1. Az $A = \left\{ \frac{2}{5}; \frac{1}{8}; \frac{13}{6}; \frac{11}{25}; \frac{35}{18}; \frac{4}{14}; \frac{21}{84} \right\}$ halmaz elemeiből válaszd ki azokat a törteket, amelyek tizedes tört alakja véges!

Írd fel az így kapott új halmaz legkisebb elemének a tizedes tört alakját!

2. Számítsd ki!

a) $-\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$

b) $\frac{21}{20} : \frac{7}{4}$

c) $\frac{3}{5} \cdot 0,8$

d) $199,68 : 3,2$

3. a) Melyik nagyobb, és mennyivel? $\frac{11}{14} + \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{2}$ vagy $\left(\frac{11}{14} + \frac{1}{7} \right) \cdot \frac{5}{2}$

b) Melyik nagyobb, és hányszor? 3,6-nek az $\frac{1}{5}$ része vagy 4,2-nek az $\frac{1}{6}$ része

4. Egy autó 0,016 liter benzint fogyaszt 200 m úton. Mennyit fogyaszt 100 km-en?

5. Keresd meg azokat a számokat, amelyek igazzá teszik a nyitott mondatokat!

a) $\frac{5}{3} \cdot \square = \frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \square + \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$

c) $\frac{3}{5} \cdot \square = \frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

6. Csaba a karácsonyi bevásárláskor pénze $\frac{1}{3}$ részéért édesanyjának vett könyvet, a maradék $\frac{4}{5}$ részéért édesapjának nyakkendőt, a fennmaradó 620 Ft-ját pedig kishúgára költötte. Mennyi pénze volt Csabának a vásárlás kezdetekor? Mennyiért vette az egyes ajándékokat?

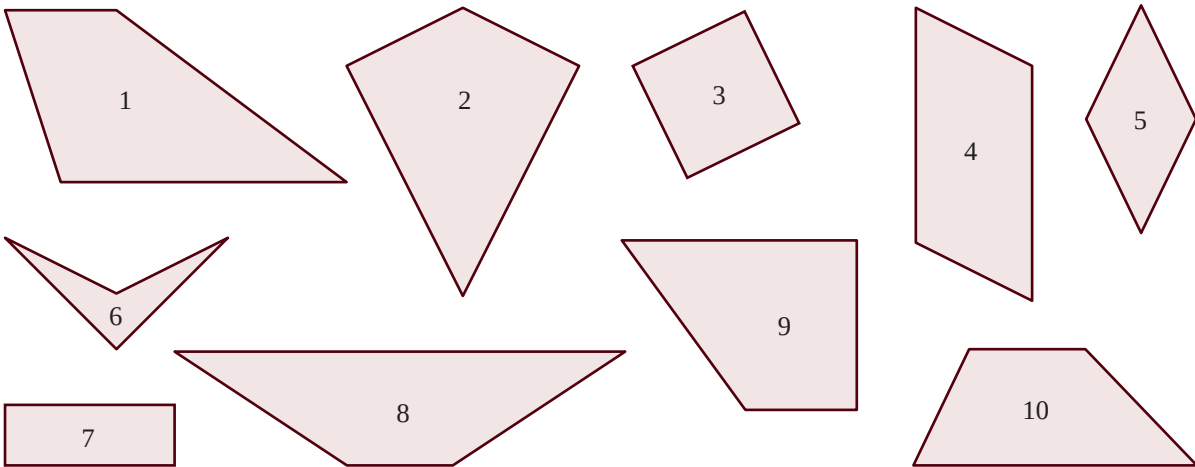
Négyszögek, téglatestek

Négyszögek fajtái

A négyszögeket többféleképpen csoportosíthatjuk. Az egyes csoportoknak nevet adunk. A négyszögeket megnevezhetjük oldalaik párhuzamossága szerint, szimmetriáik alapján, vagy aszerint, hogy csúcsaik egy körvonalra illeszkednek-e.

1. példa

Válasszuk ki az ábrán sorakozó négyszögek közül azokat, amelyeknek



a) van párhuzamos oldalpárjuk,

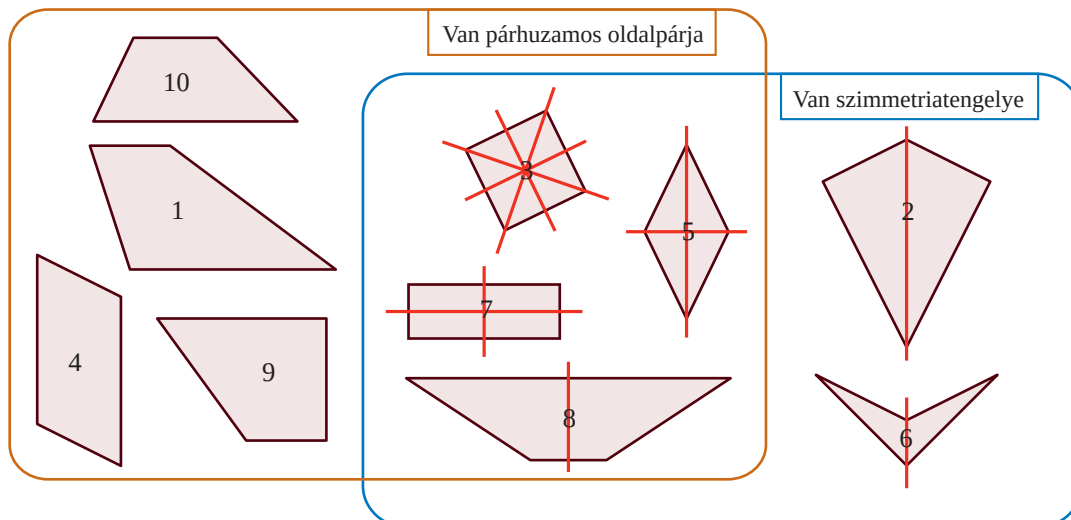
b) van szimmetriatengelyük!

Helyezzük el a négyszögeket halmazábrában!

Megoldás

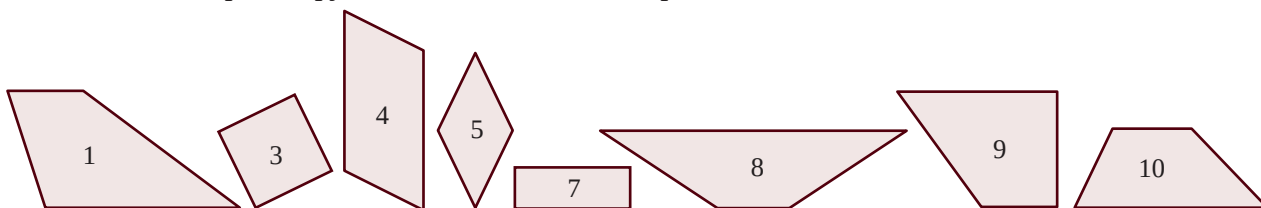
a) 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10.

b) 2, 3, 5, 6, 7, 8.

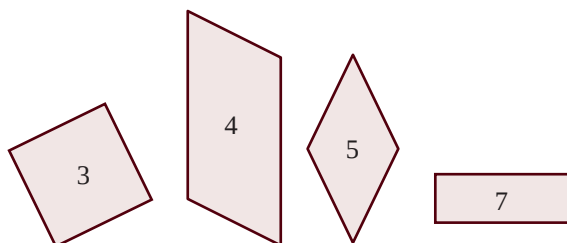




Azokat a négyszögeket, amelyeknek van párhuzamos oldalpárja, trapézoknak nevezzük. A párhuzamos oldalak a trapéz alapjai, a másik két oldal a trapéz szára.

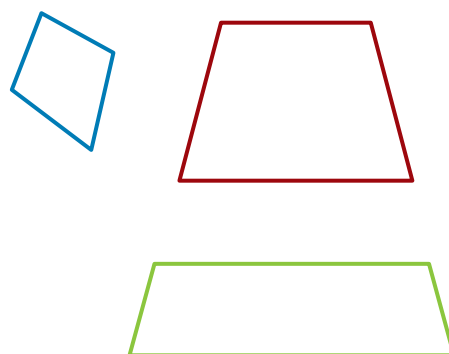
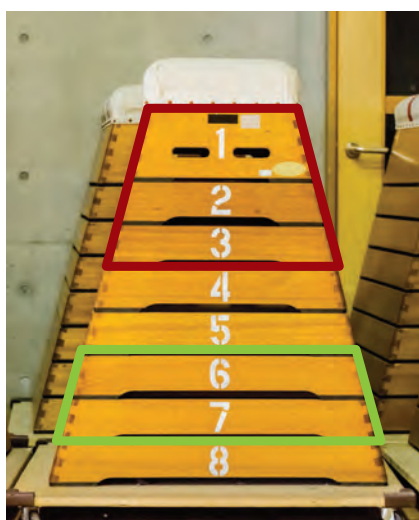


Azokat a négyszögeket, amelyeknek két párhuzamos oldalpárja van, paralelogrammáknak nevezzük.



Tengelyesen szimmetrikus négyszögek

Tengelyesen szimmetrikus négyszögek fajtái

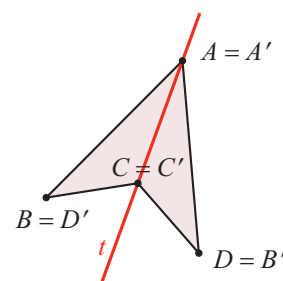
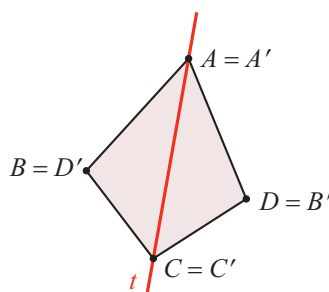


Négy pontot egy megadott tengelyhez képest többféleképpen is elhelyezhetünk szimmetrikusan, ha semelyik három pont nincs egy egyenesen.

I. A négy pont közül kettő a tengelyen van, a másik kettő pedig tükörképe egymásnak.

Ezeket a pontokat összekötve olyan tükrös négyszöget kapunk, amelynek a tengely az egyik átlója.

Ha egy négyszögnek van olyan szimmetriatengelye, amely a négyszög két szemközti csúcsát köti össze, akkor azt a négyszöget deltoidnak nevezzük.



Ha egy deltoid mindkét átlójára tengelyesen szimmetrikus, akkor a négyszöget rombusznak nevezzük.

II. A négy pont közül kettő-kettő páronként tükrösen helyezkedik el egymáshoz képest.

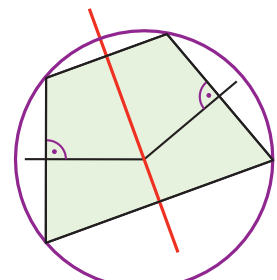
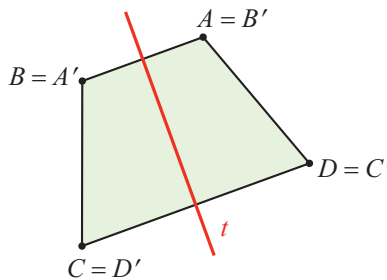
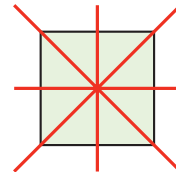
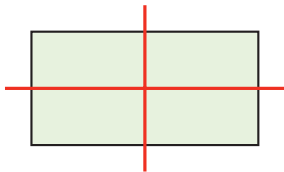
Ezeket a pontokat összekötve olyan tükrös négyszöget kapunk, amelyben a tengely a két szemközti oldal felezőmerőlegese. E két szemközti oldal párhuzamos, tehát a négyszög trapéz.

A trapéz szárainak felezőmerőlegesei a szimmetria miatt ugyanabban a pontban metszik a tengelyt. Ez a metszéspont egyenlő távolságra van a négy csúcstól, ezért a csúcsok egy körvonalra illeszkednek.

Ha egy négyszögnek van olyan szimmetriatengelye, amely a négyszög két szemközti oldalfelező pontját köti össze, akkor azt a négyszöget húrtrapéznak nevezzük.

Az olyan húrtrapéz, amelynek van két szimmetriatengelye, téglalap.

Az olyan négyszög, amelynek négy szimmetriatengelye van, négyzet.

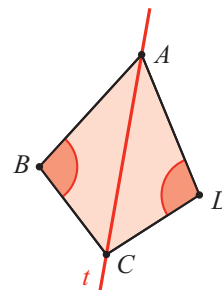
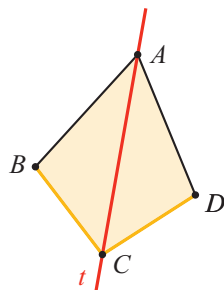
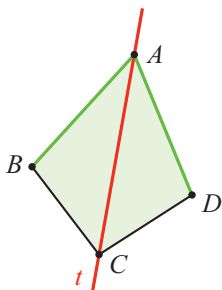


Tengelyesen szimmetrikus négyszögek tulajdonságai

2. példa

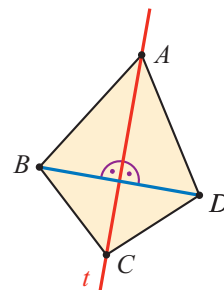
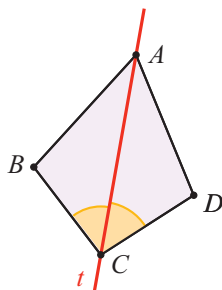
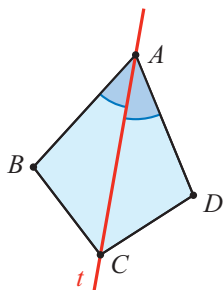
Keressünk egyenlő szakaszokat és egyenlő szögeket a deltoid ábráján!

Megoldás



A deltoidnak van két-két szomszédos, egyenlő hosszúságú oldala, amelyek tükörképei egymásnak.

A deltoidnak van két szemközti szöge, amelyek egyenlők, mert tükörképei egymásnak.



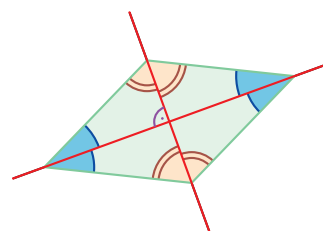
A deltoidban a szimmetriaátló felezi a négy-szög két szemközti szögét.

A deltoidban a szimmetriaátló merőlegesen felezi a másik átlót.

Ha a deltoidnak van két szimmetriatengelye, akkor rombusz.

A rombusz bármely két szomszédos oldala tükörképe egymásnak, tehát minden oldala egyenlő, és szemközti szögei egyenlők.

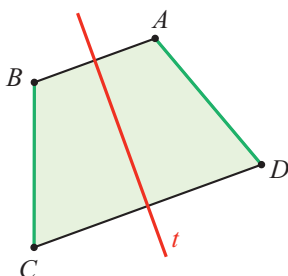
A rombusz átlói felezik a rombusz szögeit, és merőlegesen felezik egymást.



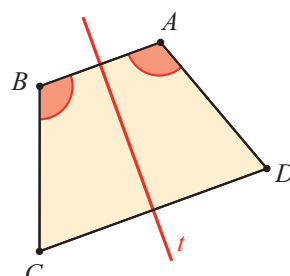
3. példa

Keressünk egyenlő szakaszokat és egyenlő szögeket a húrtrapéz ábráján!

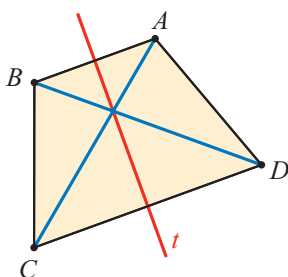
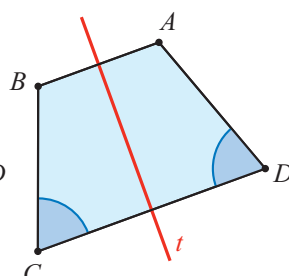
Megoldás



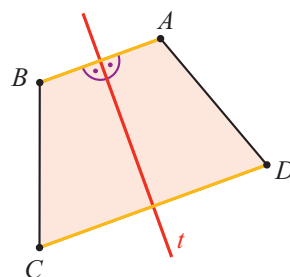
A húrtrapéz szárai egyenlőek, mert tükörképei egymásnak.



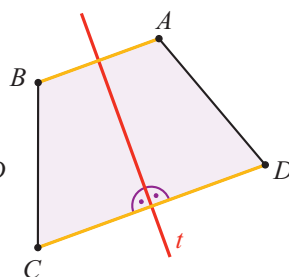
A húrtrapéz azonos alapon lévő szögei egymás tükörképei, tehát egyenlőek.



A húrtrapéz szárai egyenlőek, mert tükörképei egymásnak.



A húrtrapéz azonos alapon lévő szögei egymás tükörképei, tehát egyenlőek.



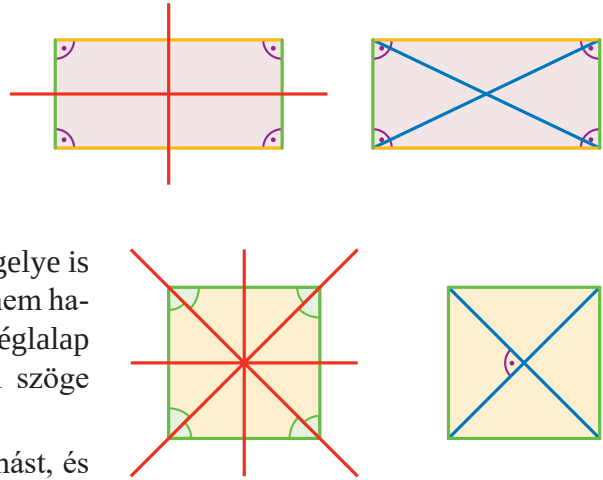


Ha a húrtrapéz szárainak felezőmerőlegese is közös, akkor az is szimmetriatengely. Így bármely két szomszédos szög tükörképe egymásnak, tehát minden szöge egyenlő.

A téglalap minden szöge egyenlő, átlói egyenlő hosszúak, és felezik egymást.

Lehet, hogy egy négyszögnek négy szimmetriatengelye is van, kettő szimmetriaátló, és kettő olyan, amelyik nem halad át csúcsokon. Az ilyen négyszög rombusz és téglalap is egyszerre. Minden oldala egyenlő, és minden szöge egyenlő, tehát négyzet.

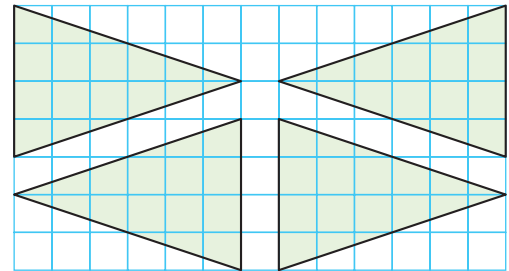
Átlói egyenlő hosszúak, merőlegesen felezik egymást, és felezik a csúcsoknál levő szögeket.



Feladatok

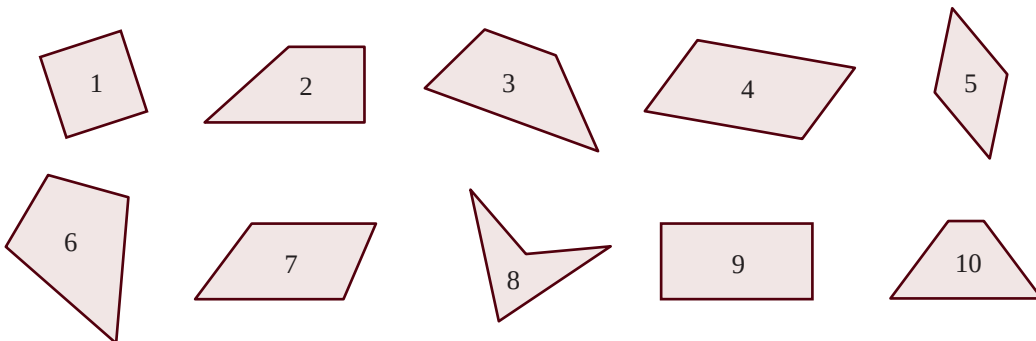
1. Egybevágó háromszögek láthatók az ábrán. Ugyanilyen háromszögek egy-egy teljes oldalát egymáshoz illesztve rajzolj négyszögeket négyzetrácsos lapra

- 2 db,
- 3 db,
- 4 db egyenlő szárú háromszögből!



2. Válaszd ki az ábrán látható négyszögek közül azokat, amelyeknek

- van párhuzamos oldalpárja,
- két párhuzamos oldalpárja van,
- van derékszöge,
- van két egyenlő hosszú oldala!



3. Vágj ki két-két 1 cm, illetve 2 cm széles papírcsíkot! Illessz egymásra közülük két csíkot! Milyen négyszögeket alkothat a két csík közös része?

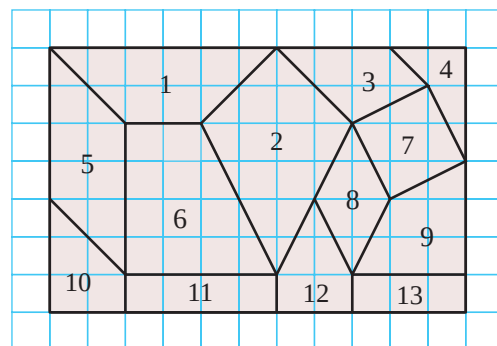
4. Rajzolj a füzetedbe két párhuzamos egyenest egymástól 2 cm távolságban! Rajzolj olyan négyszögeket, amelyeknek csúcsai az egyeneseken vannak, és a négyszögnek

- van derékszöge,
- van két egyenlő oldala,
- van két szimmetriatengelye,
- két szomszédos szöge tompaszög,
- két szemközti szöge hegyesszög,
- van homorú szöge!

5. Válaszd ki a négyzetrácson levő ábráról azokat a négyszögeket,

- amelyeknek van párhuzamos oldalpárja,
- amelyek tengelyesen szimmetrikusak,
- amelyek az a) és a b) csoportba is beletartoznak,
- amelyeknek van csúcsokon átmenő szimmetriatengelye!

Igaz-e, hogy amelyik síkidom nem négyszög ezen az ábrán, az tengelyesen szimmetrikus?



6. Ábrázold a megadott pontokat egy-egy derékszögű koordináta-rendszerben!

- $A(1; 1), B(7; 1), C(5; 5), D(3; 5)$
- $A(4; 4), B(2; -3), C(8; -7), D(10; -4)$
- $A(1; 1), B(7; 1), C(8; 3), D(2; 3)$
- $A(-2; 1), B(-4; -3), C(-2; -7), D(0; -3)$
- $A(-2; 7), B(-4; 7), C(-4; 5), D(-2; 5)$

Van-e szimmetriatengelye az $ABCD$ négyszögeknek?

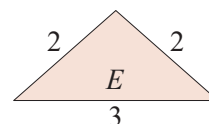
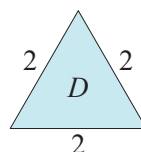
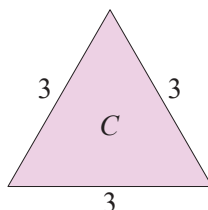
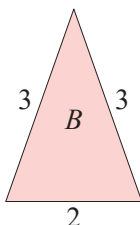
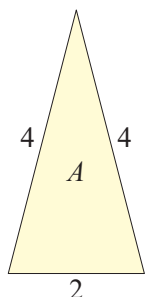
7. Rajzolj egy 2 cm sugarú körbe olyan négyszöget, amelynek csúcsai a körön vannak, és

- van derékszöge,
- van két egyenlő oldala,
- van két szimmetriatengelye,
- két szomszédos szöge tompaszög,
- két szemkötti szöge hegyesszög,
- van homorú szöge,
- van párhuzamos oldalpárja,
- van szimmetriatengelye!

Melyik esetben lehet a négyszög négyzet vagy téglalap?



8. Vágj ki az ábrán látható háromszögekkel azonos méretű háromszögeket, és építs belőlük tengelyesen szimmetrikus négyszögeket! Az ábrákon lévő számok a háromszögek oldalhosszainak mérőszámai.



9. Párban dolgozzatok!

Vágjatok ki két egymásra illesztett papírból két azonos méretű hegyesszögű, két azonos méretű tompaszögű és két azonos méretű derékszögű háromszöget! Az egymásnak megfelelő csúcsokat jelöljétek azonos betűvel!

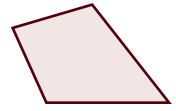
Válasszátok ki valamelyik párt, és illesszétek össze valamelyik azonos méretű oldala mentén a két háromszöget! Rajzoljátok körül a füzetekben a keletkezett alakzatot!

- Melyik háromszögpárból lehet háromszöget készíteni? Milyenfajta háromszög lesz ez?
- Lehet-e bármelyik párból tengelyesen tükrös négyszöget készíteni?
- Lehet-e bármelyik párból olyan négyszöget készíteni, amelyik nem tengelyesen tükrös?
- Melyik párból lehet téglalapot készíteni?
- Milyen háromszögpárból lehet egyenlő oldalú négyszöget készíteni?



- 10.** Vágj ki két egymásra illesztett papírból négyszögpárokat! Legyen közöttük olyan négyszög is, amelyben van két szomszédos derékszög! A megfelelő csúcsokat jelöld azonos betűvel!

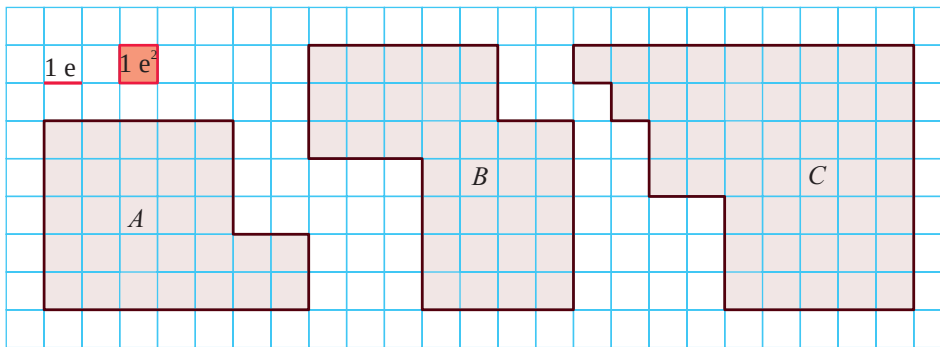
Például ilyen négyszögeket vághatsz ki:



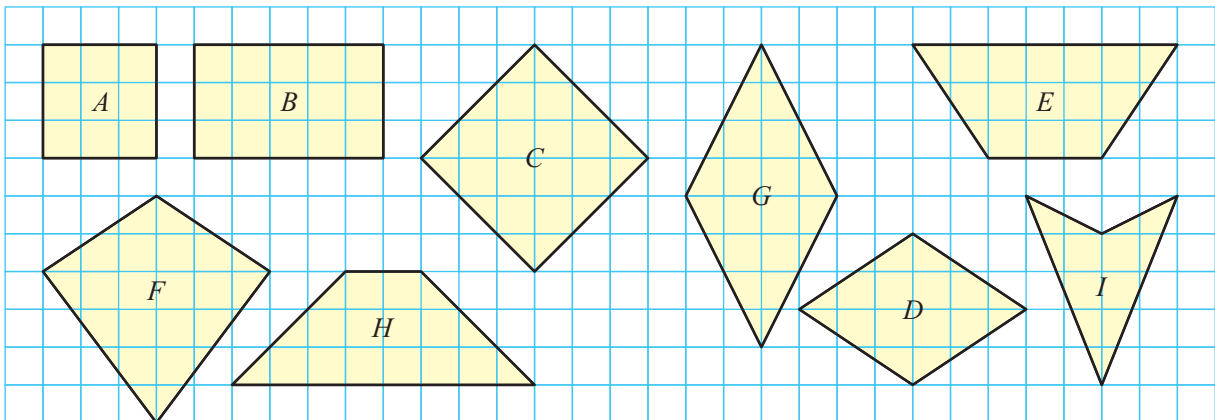
Válaszd ki valamelyik párt, és illeszd össze valamelyik azonos méretű oldala mentén a két négyszöget! Rajzold körül a füzetedben a keletkezett alakzatot!

- Milyen fajta sokszögeket kaphatsz ezzel a módszerrel?
- Melyik párból lehet négyszöget készíteni?
- Kaphatunk-e szimmetrikus négyszöget?

- 11.** a) Határozd meg a sokszögek kerületét! Egy rácsnégyzet oldala az egység.
b) Határozd meg a sokszögek területét! Egy rácsnégyzet területe az egység.

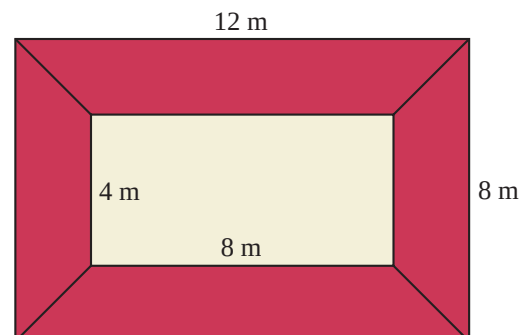


- 12.** Határozd meg a négyszögek területét! Egy rácsnégyzet területe a területegység.

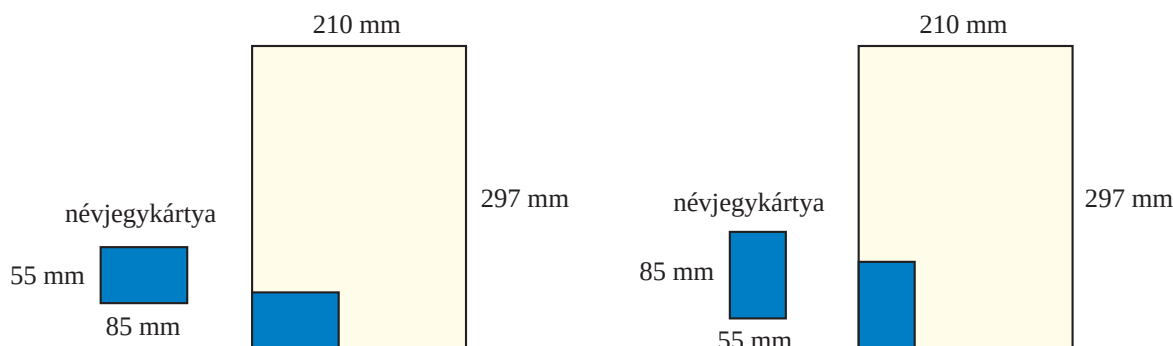


- 13.** Egy múzeum körfolyosóját 2 méter szélességű futószőnyeggel borították be. Ennek felülnézetét látod az ábrán. Mekkora területű a szőnyeg?

Hány liter folyékony szőnyegtisztító szert kell használni a takarításához, ha 1 dl folyadék 4 m^2 területű szőnyeg tisztítására elég?



14. Péter névjegykártyát szeretne nyomtatni A4-es méretű (210 mm × 297 mm) lapra. A névjegykártya szokásos mérete 55 mm × 85 mm, ezt az A4-es méretű lapon kétféleképpen lehet elhelyezni: vagy mindet vízszintes, vagy mindet függőleges elrendezésben, a következő ábrán látható módon. Maximum hány névjegykártyát tud nyomtatni Péter 10 db A4-es méretű lapra?



(Országos kompetenciamérés, 2012)

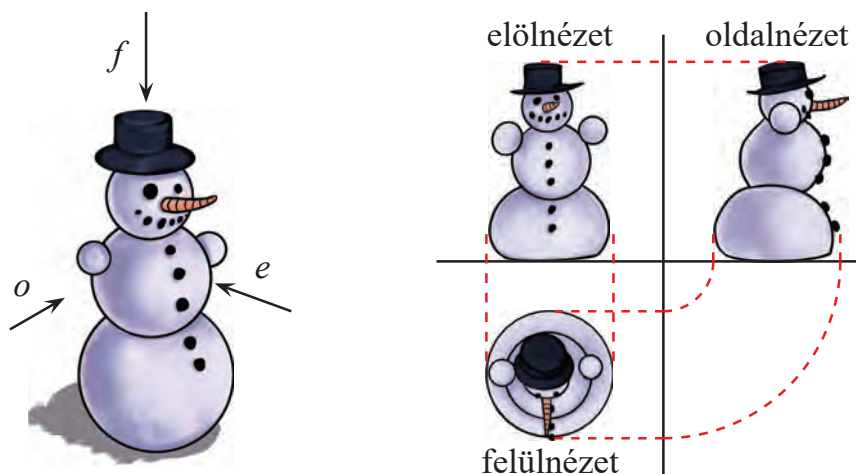
Téglatestek

Testek nézetei

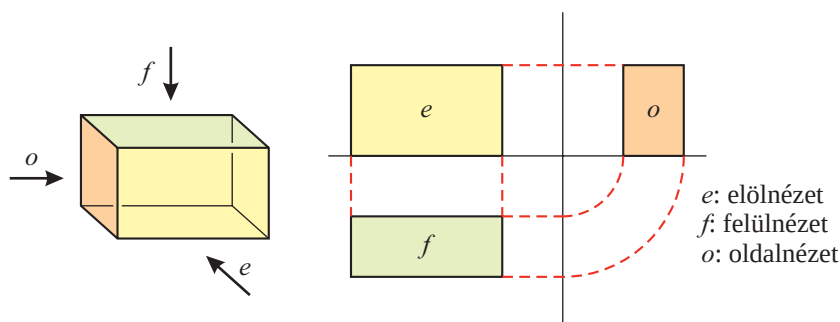
1. példa

A mértani testeket három nézetükkel is szemléltethetjük. A következő ábrák olyan testekről készültek, amelyek egy-egy síklapon állnak. A szemből, az oldalról és a felülről látható képet a test előlnézete, oldalnézete és felülnézete nevezik.

Például az ábrán a hóember térbeli rajza, három nézete és az egymásnak megfelelő méretek láthatók.



Egy téglatest térbeli rajza, három nézete és az egymásnak megfelelő méretek:



2. példa

Ugyanakkora kockákból állnak az alábbi építmények. Alaprajzukon számok jelölik az egymás tetejére rakott kockák számát. Az ilyen alaprajzokat kótás, vagy más néven kódolt alaprajznak nevezzük. Rajzoljuk le az építmények elől- és oldalnézetét!

a)

1	1
2	0

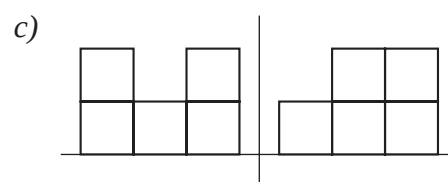
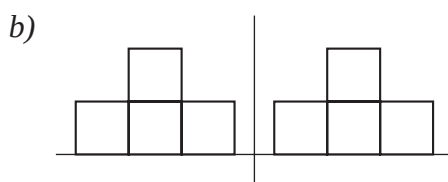
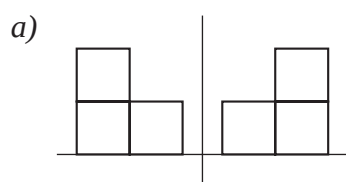
b)

1	1	1
1	2	1
1	1	1

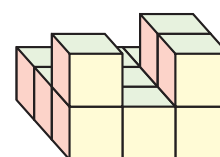
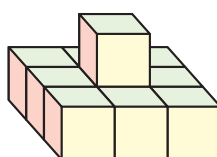
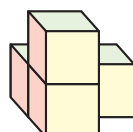
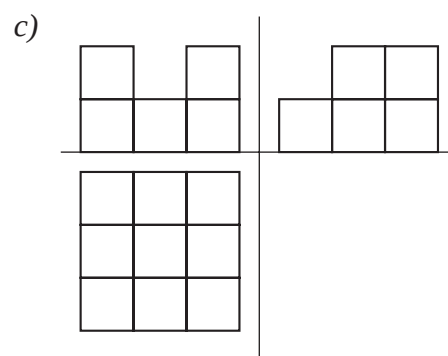
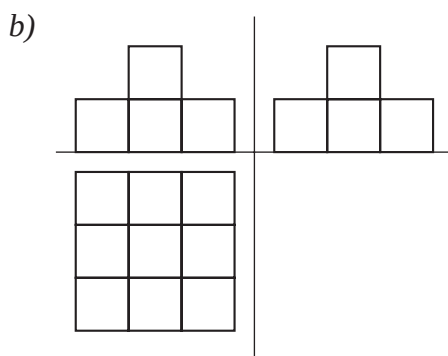
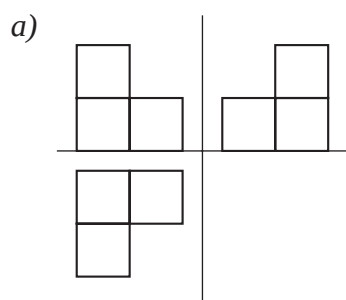
c)

1	1	1
1	1	2
2	1	2

Megoldás



Megjegyzés: A kótás alaprajzokból az építmények felülnézetére és térbeli rajzára is következtethetünk.

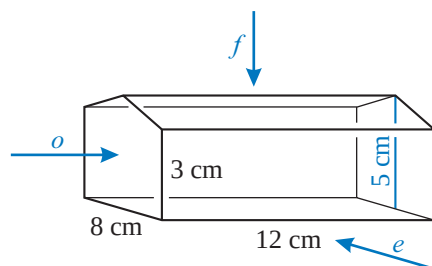
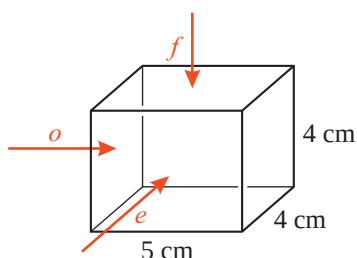


Feladatok



1. a) Rajzold le a téglatest három nézetét!

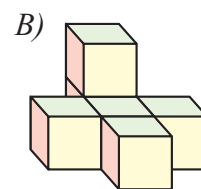
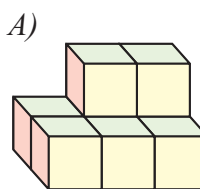
b) Rajzold le a „ház” három nézetét!



2. Egységkockákból készült az ábrán látható A) és B) építmény.

I. Készítsd el az építmények kótás alaprajzát!

II. Rajzold le az építmények három nézetét!

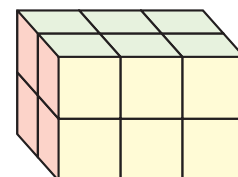


3. a) Hány darab egybevágó kockából készülhetett az ábrán látható tömör téglatest?

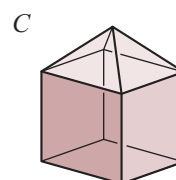
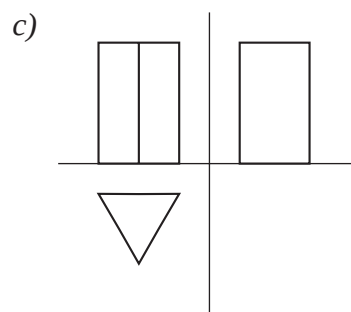
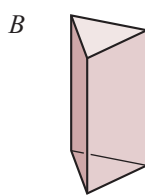
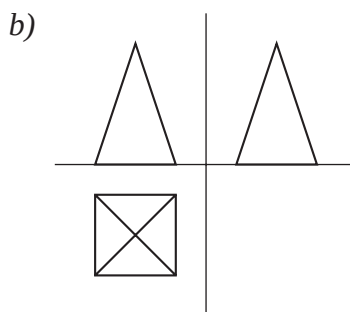
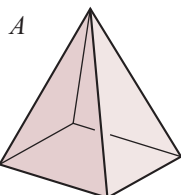
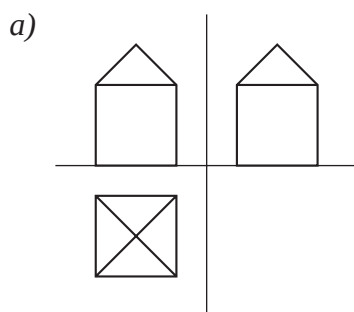
b) Milyen téglatest épülhet még ugyanennyi egybevágó kocka felhasználásával? Készítsd el a lehetséges testek közül az egyik alaprajzát, az alaprajzon jelöld az egymás felett lévő kockák számát!

c) Négyzethálós lapon rajzold le a lehetséges testek közül az egyik hálóját!

d) Négyzethálós lapon rajzold le a lehetséges testek közül az egyik három nézetét!

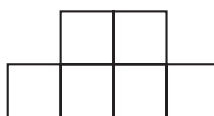


4. Melyik test három nézetét szemlélteti az a), b), c) ábra?

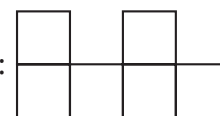


5. Az asztalra tettünk néhány egyenlő méretű kockát.

Ha ezeket előlről nézzük, ezt látjuk:



oldalról pedig ezt:

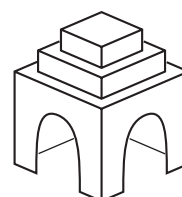
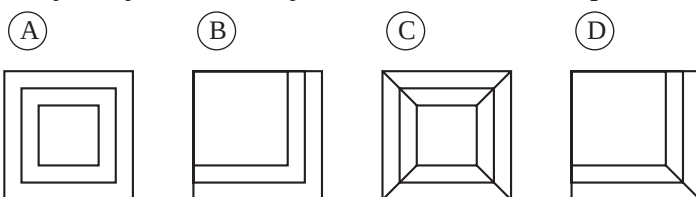


a) Legkevesebb hány kocka lehet az asztalon? Készíts alaprajzot!

b) Legfeljebb hány kockából áll az építmény?

6. Az ábrán egy őskohó vázlatos rajza látható.

Melyik rajz ábrázolhatja a kohó felülnézeti képét?



(Országos kompetenciamérés, 2010)

Nézz utána, hogy mire használják a kohót!

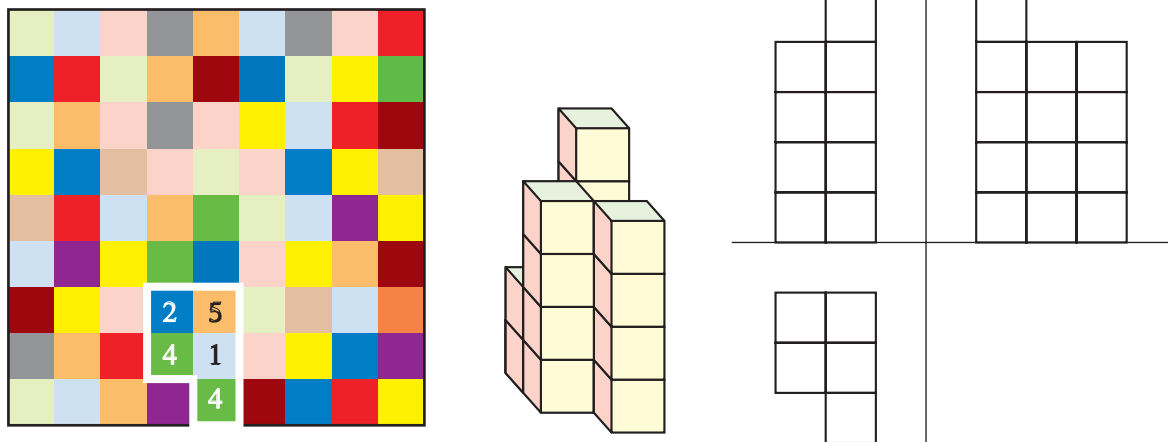
7. Egy gömb sugara 2 cm. Rajzold le a test három nézetét!

8. A tankönyv hátsó borítóján látható játékmezőn a színeknek számokat feleltettünk meg az alábbiak szerint:

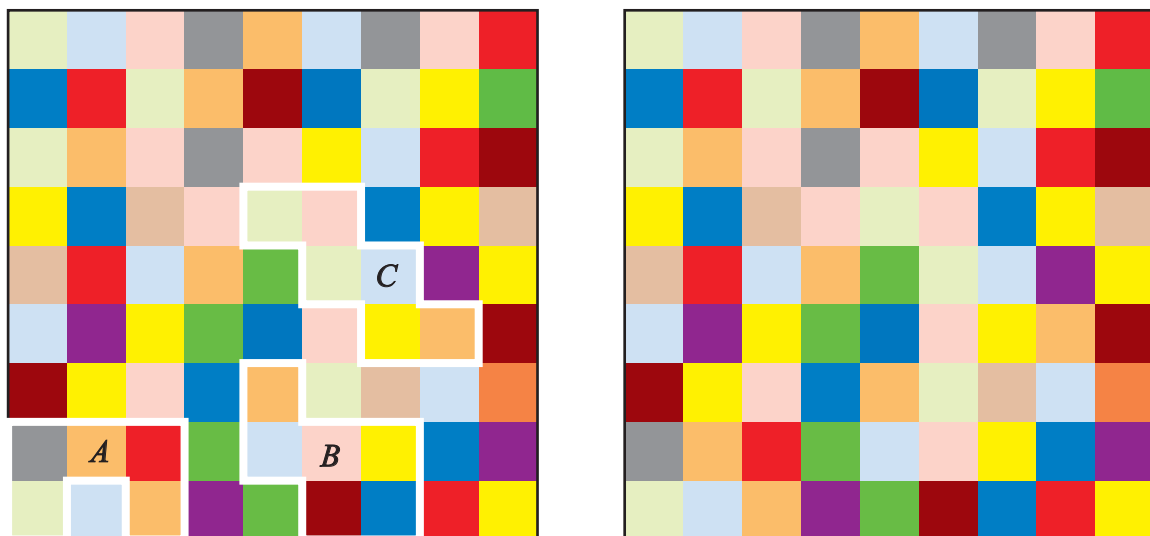


A színes rácsra rajzolt sokszög legyen egy olyan test alaprajza, amelyet egybevágo kockákból építünk fel. A színekhez tartozó számok az építmény magasságát jelzik az adott helyen.

Példa: A színes rácsra lerajzoltunk egy alaprajzot, és beírtuk a négyzetekbe a színekhez tartozó számokat. A rács mellett látható az ennek megfelelő építmény térbeli rajza és három nézete.

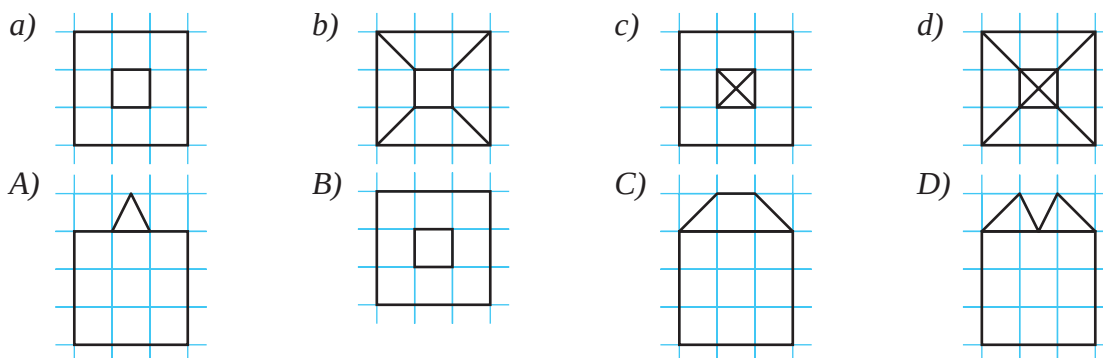


I. Egészítsd ki a bal oldali játékmező A, B és C alaprajzát a fenti színkód alapján az egymásra rakott kockák számával! Készítsd el az alaprajznak megfelelő építmény előlnézeti és oldalnézeti rajzát!

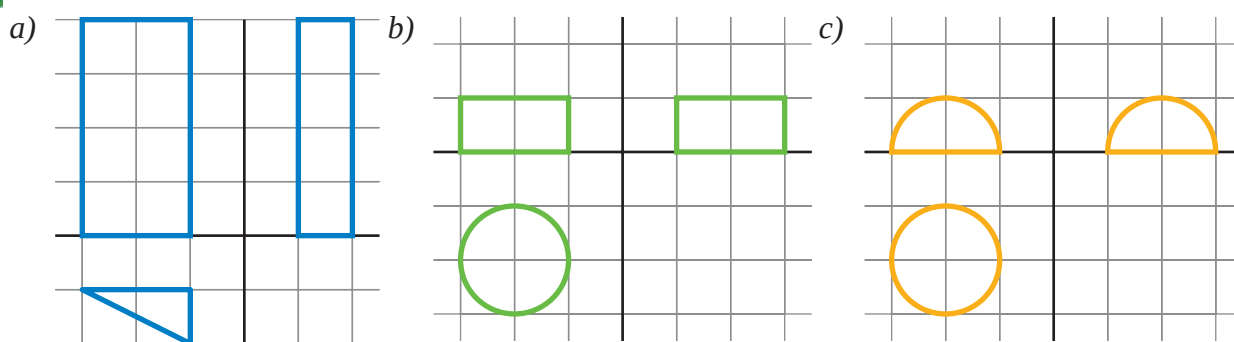


II. Átlátszó papírból vágjátok ki a B alakzatot! Helyezzétek el úgy a jobb oldali játékmezőn, hogy minél több egységkockából álló építmény alaprajza legyen!

9. Melyik két-két ábra lehet ugyanannak a testnek a felülnézete és az előlnézete? Add meg az összetartozó ábrák betűjelét!



10. Rajzold le a test térbeli rajzát, ha az ábrán a három nézetét látod!

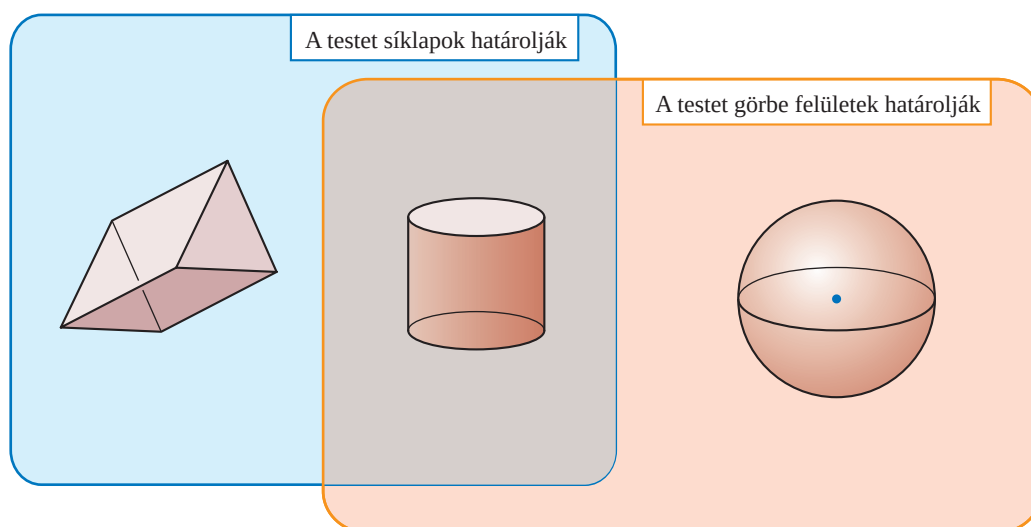


Testek hálója

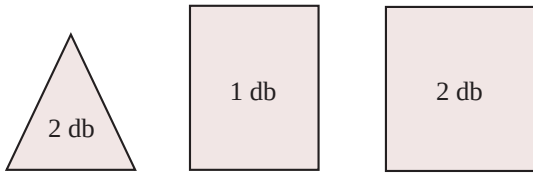


A testek külső felületei lehetnek síklapok vagy görbe felületek.

Például:

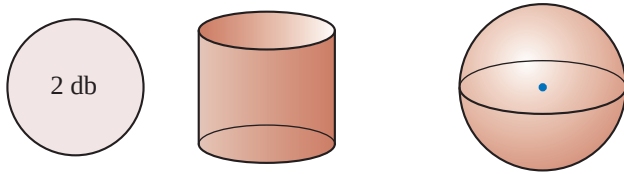


A testet határoló síklapok közül megismertük például a sokszögeket, a körlapot és a kör néhány részét.



A hasáb minden lapja sokszög.

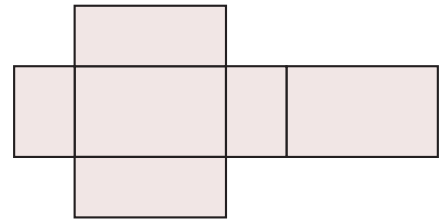
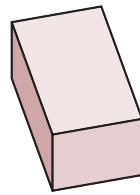
A sokszögek határvonalai szakaszok.



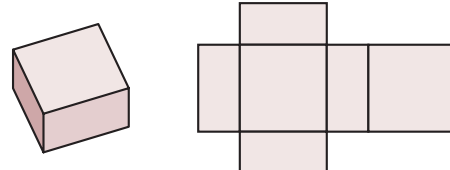
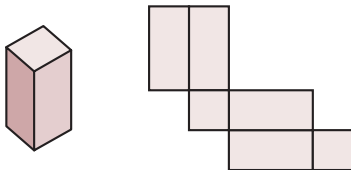
A hengert körlap és görbe felület, a gömböt görbe felület határolja.

Az ábrán egy téglatest és egyik hálójá látható.

A téglatestet hat téglalap határolja. Két-két szemközti lapja párhuzamos. Ha a háló elkészítésekor ezeket a lapokat egymásra helyezzük, akkor kölcsönösen fednék egymást. Az egymást kölcsönösen fedő síkidomokat egybevágóknak is szoktuk nevezni. A téglatest szomszédos lapjai merőlegesek egymásra.



Két négyzetes oszlop és egy-egy hálójuk látható a képeken.

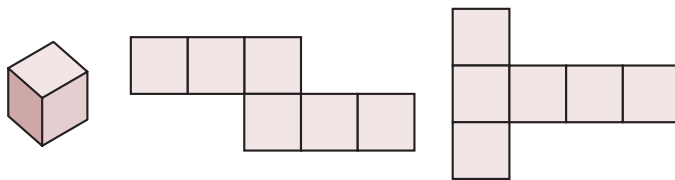


A négyzetes oszlop olyan téglatest, amelynek van négyzetlapja.

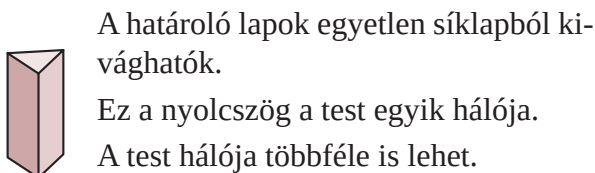
A négyzetes oszlopot kétféle téglalap határolhatja: két egybevágó négyzetlap és négy egybevágó téglalap.

A kocka olyan téglatest, amelynek minden lapja négyzet. A kocka élei egyenlő hosszúak. A kocka hálóját hat négyzetlap alkotja.

Például:



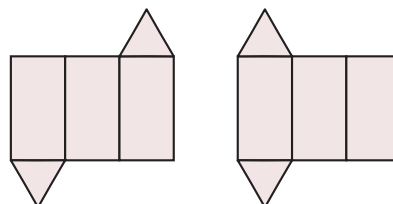
A képen látható testet két háromszög és három téglalap határolja.



A határoló lapok egyetlen síklapból kivághatók.

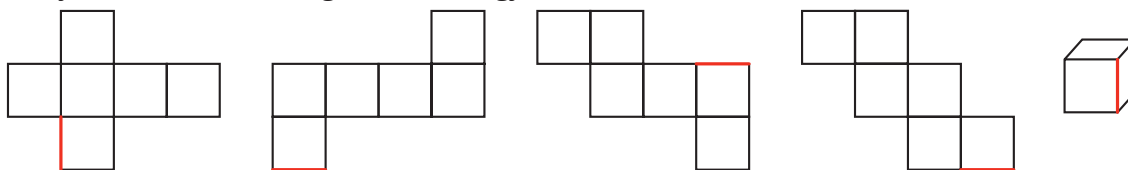
Ez a nyolcszög a test egyik hálójá.

A test hálójá többféle is lehet.

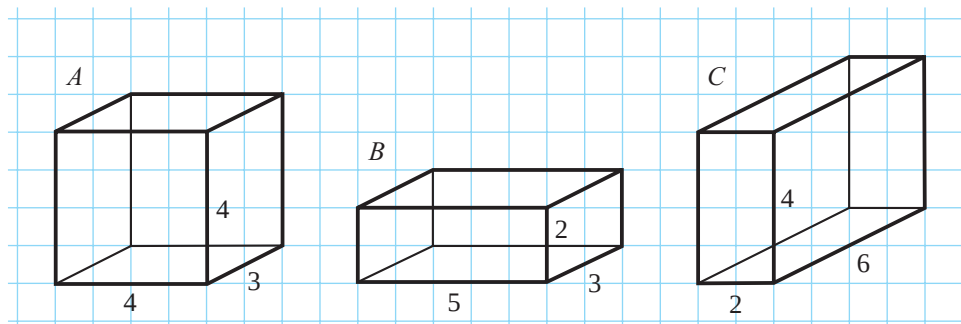


Feladatok

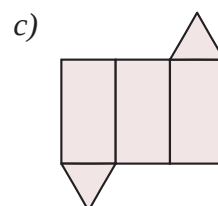
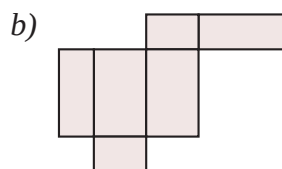
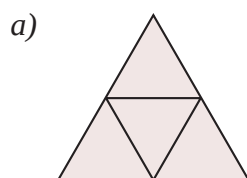
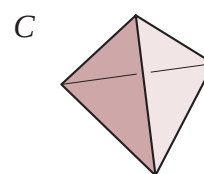
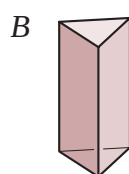
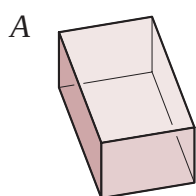
1. Melyik éllel kell összeragasztani a megjelölt szakaszt a kocka összeállításakor?



2. Négyzethálós lapon téglatesteket szemléltettünk. Az élek hosszát jelöltük az ábrákon. Mindhárom esetben rajzold meg a test két-két különböző testhálóját! A hosszúságegység legyen a rácsnégyzet oldala!

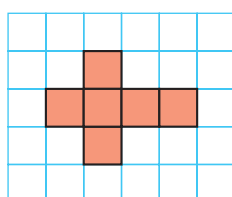


3. Melyik testnek melyik a hálója?

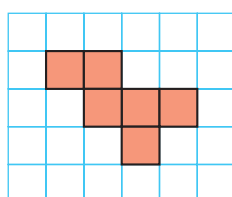


4. a) Melyik testhálót tudod egy vonallal megrajzolni úgy, hogy közben nem emeled fel a ceruzát, és a testháló ábráján látható minden vonalon pontosan egyszer haladsz át?
b) Vágd ki négyzethálós lapból a test hálóját, és állítsd össze a testet! Érdeemes felnagyítani az ábrát, legyen az egység 2 cm!

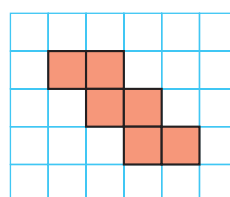
I.



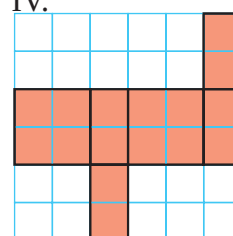
II.



III.



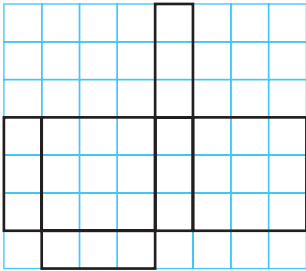
IV.



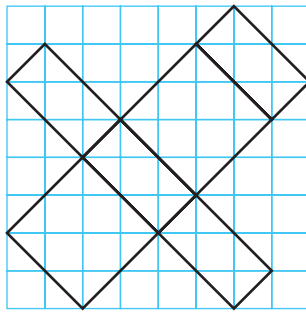


5. a) Melyik testhálót tudod egy vonallal megrajzolni úgy, hogy közben nem emeled fel a ceruzát, és a testháló ábráján látható minden vonalon pontosan egyszer haladsz át?
b) Vágd ki négyzethálós lapból a test hálóját, és állítsd össze a testet! Érdeemes felnagyítani az ábrát, legyen az egység 2 cm!

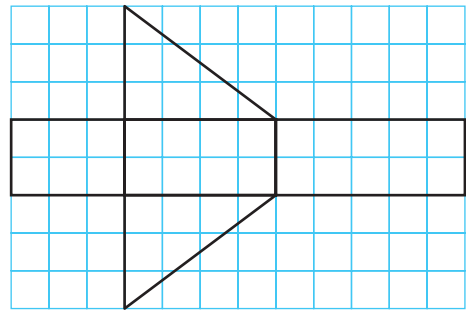
I.



II.

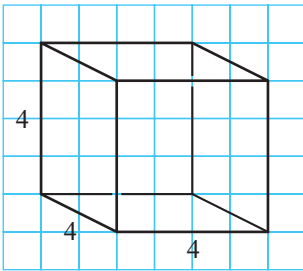


III.

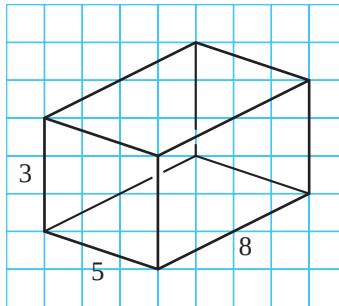


6. Négyzethálós lapon rajzold meg a felülről nyitott téglatest határoló lapjait!

a)

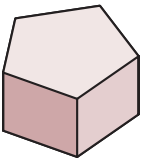


b)

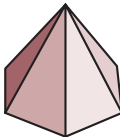


7. Melyik testnek melyik a hálója?

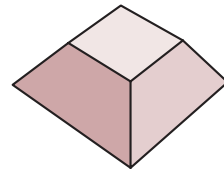
A



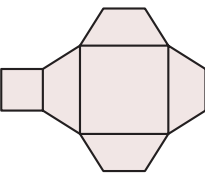
B



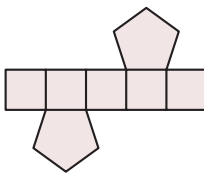
C



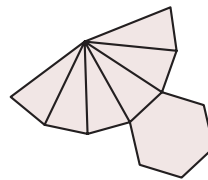
a)



b)

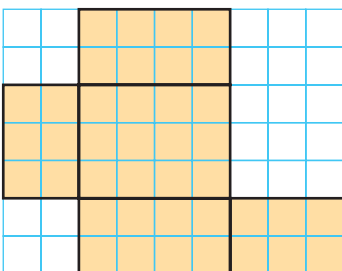


c)



8. a) Mely sokszögekből hajtogatható felülről nyitott téglatest? Négyzethálós lapból vágd ki, és állítsd össze a határoló lapokat!

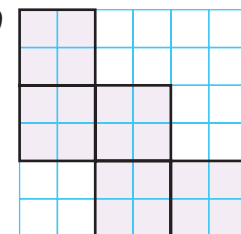
A)



B)

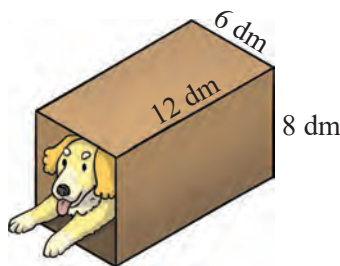


C)

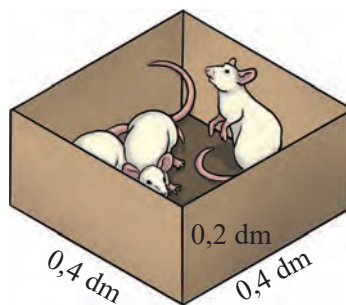


9. a) Rajzold le vázlatosan a doboz határoló lapjait! Jelöld az oldalak hosszát!

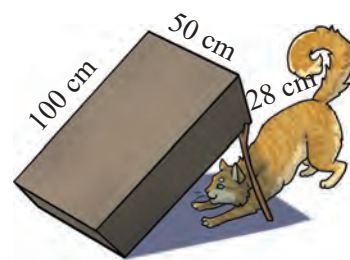
I.



II.



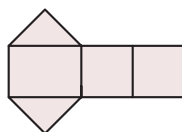
III.



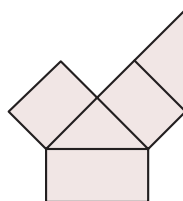
b) Számítsd ki, legalább hány m^2 kartonlap kell az egyik oldalán nyitott doboz elkészítéséhez! Az eredményt tizedre kerekítve add meg!

10. Melyik hálóból tudsz ilyen ajándékdobozkát hajtogatni? (A lapokat nem lehet elvágni, csak hajtogatni!)

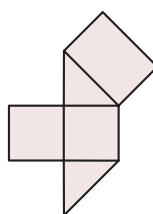
A



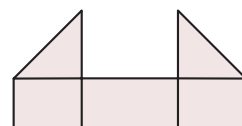
B



C



D



Testek felszíne

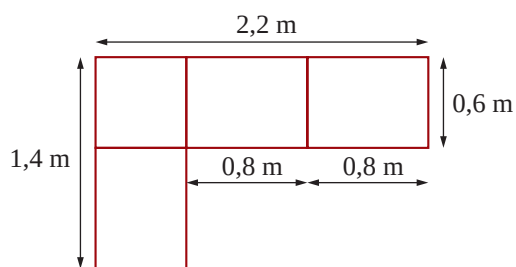
1. példa

Négy szekrényelemből egy 85 cm magas konyhapult készült. A pult alaprajzának méretei leolvashatók a rajzról.

a) Adjuk meg az egyes szekrények egy csúcsba futó három élének hosszát!

b) Hány négyzetméter munkalapból készülhet a pult teteje, ha nincs sehol sem pereme?

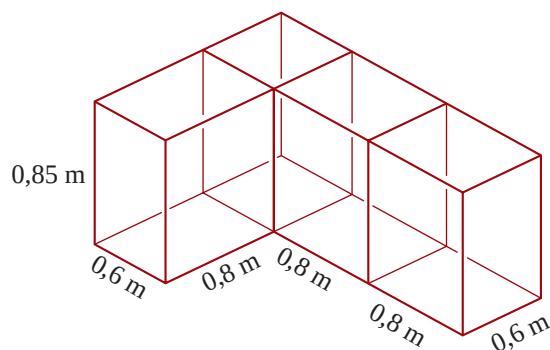
c) Határozzuk meg az összeépített test felszínét!



Megoldás

a) Kétféle téglatestből áll a pult. A sarokszekrény felső lapjának egyik oldala 60 cm, másik oldala $220 \text{ cm} - 2 \cdot 80 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$. A sarokba kerülő szekrény tehát négyzetes oszlop alakú, egy csúcsba futó élének hossza 60 cm, 60 cm és 85 cm.

A rövidebb oldalon levő szekrényt fedő téglalap egyik oldala szintén 60 cm, a másik oldala $140 \text{ cm} - 60 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$. A másik három téglatest egybevágó, élük hossza 60 cm, 80 cm és 85 cm.



b) A pult teteje $(3 \cdot 0,8 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,6) \text{ m}^2 = 1,8 \text{ m}^2$ területű munkalapból készülhet.

c) A pult alapja és teteje $2 \cdot 1,8 \text{ m}^2 = 3,6 \text{ m}^2$ területű. Az összeépített test oldalait hat darab 80 cm széles, 85 cm magas téglalap, illetve négy darab 60 cm széles, 85 cm magas téglalap alkotja. Ezek összterülete $(6 \cdot 0,8 \cdot 0,85 + 4 \cdot 0,6 \cdot 0,85) \text{ m}^2 = 6,12 \text{ m}^2$.

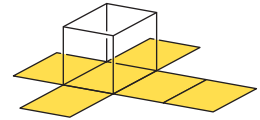
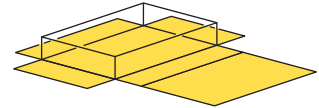
A test felszíne a határoló lapok területének összege: $A = 9,72 \text{ m}^2$.

A **test felszíne** a test határoló felületének a területe.

A felszín jele A , a latin *area* (terület) szó kezdőbetűje.

A felszín mérésekor területet mérünk, ezért a felszín mértékegységei azonosak a terület mértékegységeivel.

A **téglatest felszíne** egyenlő a határoló lapok területének összegével.

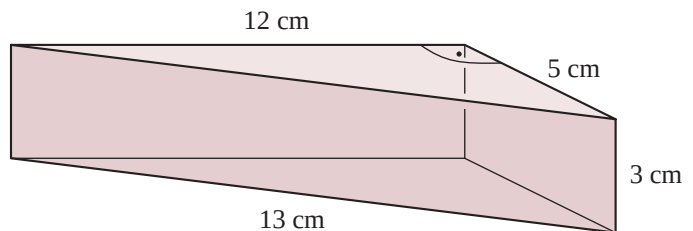


2. példa

Egy „fél téglatest” éleinek hosszát jelöltük a test térbeli rajzán.

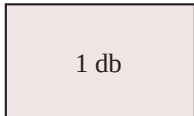
Számítsuk ki a test felszínét!

Az eredményt dm^2 egységben adjuk meg!

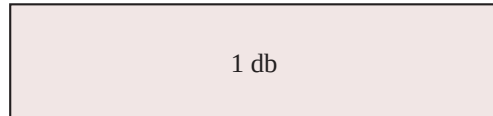


Megoldás

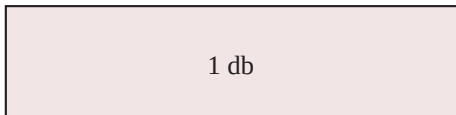
A test felszíne egyenlő a határoló lapok területének összegével. Ezt a testet öt síklap határolja:



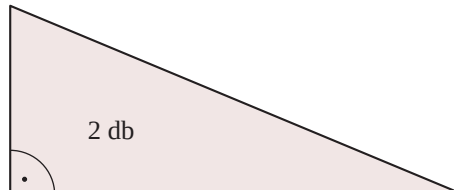
$$T = 5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$$



$$T = 13 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 39 \text{ cm}^2$$



$$T = 12 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 36 \text{ cm}^2$$



$$T = (12 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}) : 2 = 30 \text{ cm}^2$$

A lapok területének összege, $A = 15 \text{ cm}^2 + 39 \text{ cm}^2 + 36 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 30 \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$.

A test felszíne $1,5 \text{ dm}^2$.

3. példa

Adjuk meg a 4736 cm^2 területet mm^2 , dm^2 , illetve m^2 egységben!

Megoldás

A területegységek között 100 a váltószám. A táblázatban két helyi értékenként következik egy újabb egység. A piros vonalak a tizedesvessző helyét jelölik a keresett egységhez igazítva.

A mértékegységek közötti átváltás leolvasható a táblázatból.

m^2		dm^2		cm^2		mm^2		mérőszám	egység	terület
		4	7	3	6			4736	cm^2	4736 cm^2
		4	7	3	6	0	0	473600	mm^2	473600 mm^2
		4	7	3	6			47,36	dm^2	$47,36\text{ dm}^2$
	0	4	7	3	6			0,4736	m^2	$0,4736\text{ mm}^2$

Feladatok

1. Írd fel a helyi értékes táblázatban megadott mennyiségeket I. cm^2 , II. m^2 egységben!

I.	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
a)	2	7	4	
b)			5	1
c)				7
d)	8	9	0	6

II.	km^2	ha	ár	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
a)				9	2	6	7
b)					4	3	2
c)				8	0	0	6
d)	6	2	3	4			

2. Váltsd át dm^2 -re!

a) 3 m^2 ; b) $14,7\text{ m}^2$; c) 297 cm^2 ; d) 987654 mm^2 ; e) 222 mm^2 ; f) $3\text{ m}^2\text{ }47\text{ cm}^2$

3. Váltsd át mm^2 -re!

a) $\frac{1}{4}\text{ m}^2$; b) $3\text{ dm}^2\text{ }54\text{ cm}^2$; c) $28\text{ dm}^2\text{ }5\text{ cm}^2$; d) $7\frac{3}{5}\text{ cm}^2$; e) $23\text{ }000\text{ cm}^2$; f) $2,637\text{ m}^2$

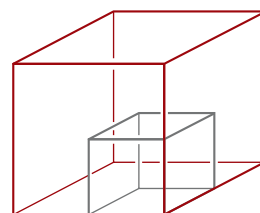
4. Egy felülről nyitott téglatest alakú kartondoboz élei 4 dm, 8 dm és 10 dm hosszúak. Tudjuk, hogy a két legnagyobb területű lapja közül az egyik hiányzik.

- a) Rajzold le kicsinyítve a testhálót úgy, hogy 1 dm-nek 5 mm feleljen meg!
b) Számítsd ki, hány m^2 a doboz felszíne!

5. a) Egy kocka éleinek hossza 1,6 dm.

Számítsd ki, hány cm^2 a kocka felszíne!

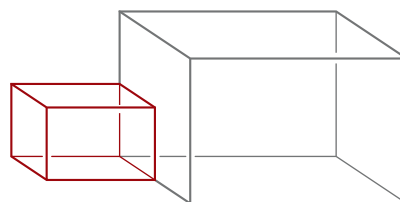
- b) Ezután vizsgálj az kockát, amelynek minden éle feleolyan hosszú!
Határozd meg az újabb kocka felszínét!



6. a) Egy téglatest egy csúcsba futó éleinek hossza 3 dm, 45 cm és $2\frac{3}{4}\text{ dm}$.

Számítsd ki, hány cm^2 a téglatest felszíne!

- b) Ezután vizsgálj az téglatestet, amelynek minden éle kétszer olyan hosszú! Határozd meg az újabb téglatest felszínét!



7. Az építőkészletben olyan négyzetes oszlopok vannak, amelyeknek magassága hatszorosa az alapéleknek. Egy ilyen oszlop felszíne 416 cm^2 .

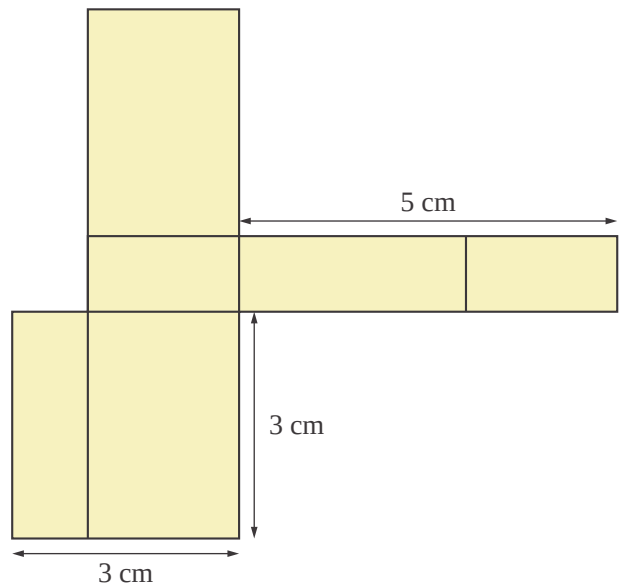
a) Mekkora a test élei?

- b) Két ilyen építőelemet nagyobb lapjuk mentén egymáshoz illesztünk. Készíts vázlatrajzot, jelöld az élek hosszát! Számítsd ki a test felszínét!

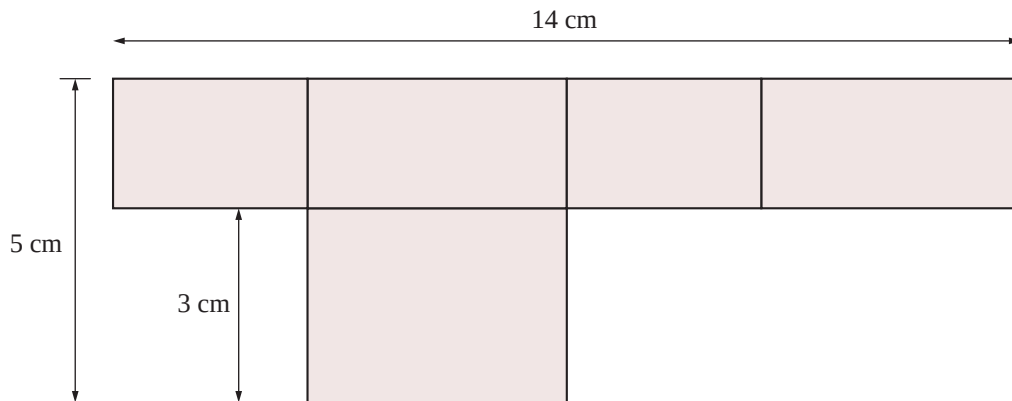


8. Az alábbi rajz egy téglatest hálóját ábrázolja. Mekkorák a téglatest élei?

(Országos kompetenciamérés, 2004)



9. Az ábrán egy téglatest hálójából hiányzik egy lap.



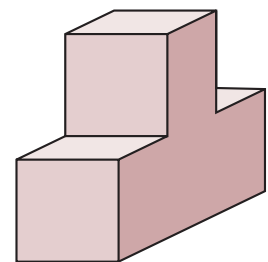
- Add meg a téglatest egy csúcsból induló három élének hosszát deciméterben!
- Hány négyzetdeciméter a hiányzó lap területe?
- Hány négyzetdeciméter a test felszíne? Add meg a felszínt négyzetcentiméter egységben is!

10. Egy kocka egy négyzetlapjának kerülete 32 cm. Két ilyen kockát teljes lapjukkal érintkezve egymáshoz ragasztottunk, így egy téglatestet kaptunk.

- Hány centiméter az eredeti kocka egy élének hossza?
- Hány centiméter a kapott téglatest egy csúcsba futó három élének hossza?
- Hány négyzetcentiméter a kapott téglatest felszíne?

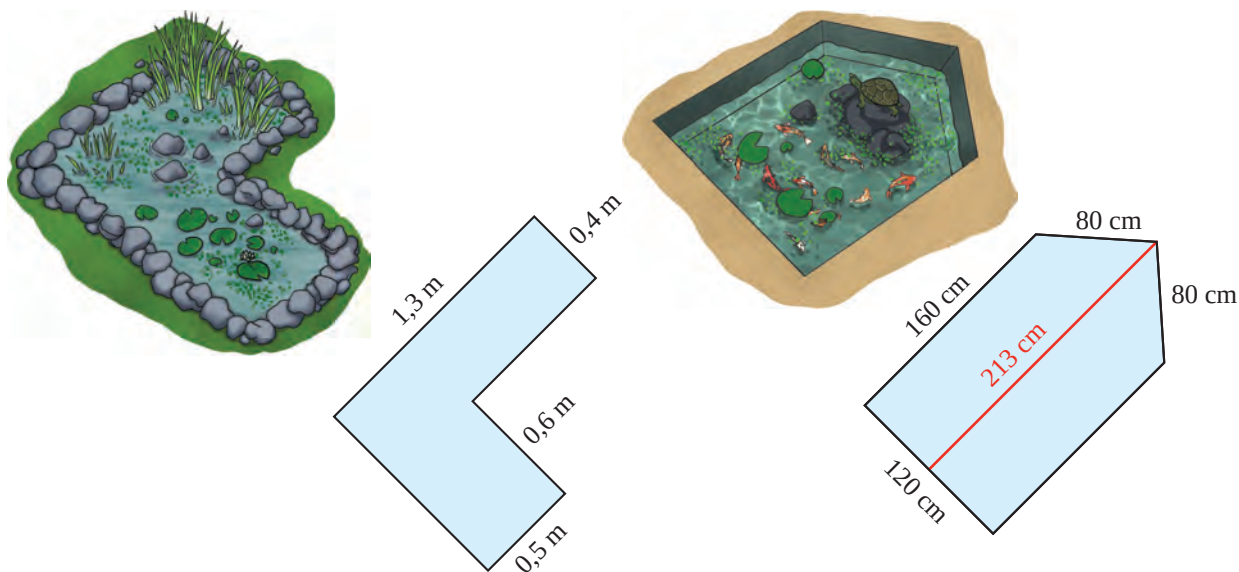
11. Egy kiállításra emelvényt készítettek, hogy annak vízszintes lapjaira helyezzék el a tárgyakat. Az ábra szerint négy egyforma kockát ragasztottak össze, amelyeknek éle 30 cm hosszú, anyaguk tömör fa. A kapott test körüljárható. Látható lapjait befestették.

- Hány négyzetcentiméter felületet kellett befesteni?
- Tíz ugyanilyen emelvény befestéséhez hány liter festék szükséges, ha a festékesdoboz címkéje szerint 1 liter festékkal 10 m^2 felületet lehet egyszer lekenni?



12. Kerti tavak felülnézeti rajzán megadtuk a méreteket. A tavak alját és belső oldalait vízzáró réteggel kenték át. Hány m^2 felületet kellett bekenni, ha a kerti tavak mélysége

a) 1 m, b) 60 cm?



Testek térfogata

1. példa



Gyűjtsetek különböző méretű, téglatest alakú csomagolódobozokat! Mérjétek meg egynek-egynek az éleit, és számítsátok ki a térfogatát! Ha szerepel a dobozon az űrmérték, akkor hasonlítsátok össze a kiszámított eredménnyel!

Például egy sűrített paradicsom dobozának külső méretei 8,5 cm, 6 cm és 9,5 cm. Térfogata a külső méretek alapján $(6 \cdot 8,5 \cdot 9,5) \text{ cm}^3 = 484,5 \text{ cm}^3$, ami körülbelül 4,8 dl.

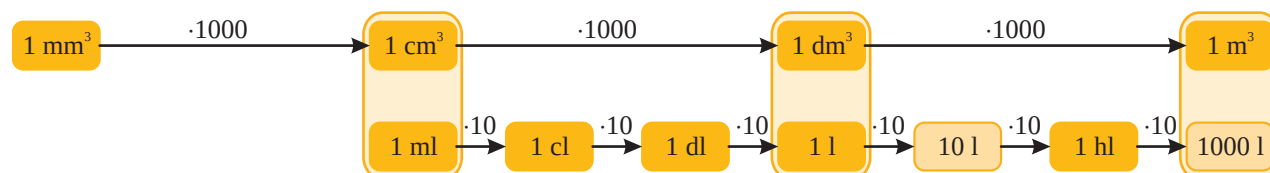
Az étkezési keményítő dobozának éleit 4,3 cm, 11 cm, 16,5 cm-nek mértük. Térfogata ez alapján $(4,3 \cdot 11 \cdot 16,5) \text{ cm}^3 = 780,45 \text{ cm}^3 \approx 7,8 \text{ dl}$.



A **testek térfogatát** úgy határozzuk meg, hogy összehasonlítjuk az egységnek választott térfogattal. A térfogat jele: V (V a latin volumen – térfogat – szó kezdőbetűje).

Folyadékok, önthető anyagok, belül üres testek térfogatának mérésekor **űrtartalomról** beszélünk. A testek űrtartalmát úgy határozzuk meg, hogy összehasonlítjuk az egységnek választott űrtartalommal.

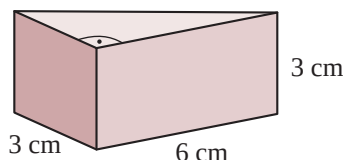
A térfogat és az űrtartalom mértékegységei közötti összefüggéseket szemlélteti az ábra:



A **téglatest térfogatát** meghatározhatjuk úgy, hogy az azonos egységben adott három él mérőszámát összeszorozzuk.

2. példa

Határozzuk meg a test térfogatát!

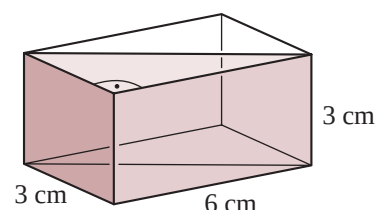
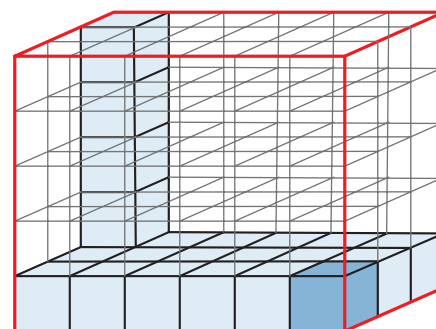


Megoldás

A test éppen fele egy 6 cm, 3 cm, 3 cm élű téglatestnek.

A téglatest térfogata $6 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 54 \text{ cm}^3$.

A test térfogata ennek fele, azaz 27 cm^3 .



3. példa

a) Adjuk meg a $73\,640 \text{ dm}^3$ térfogatot mm^3 , cm^3 és m^3 egységben!

b) A $73\,648 \text{ dm}^3$ mennyiséget fejezzük ki liter, cl, dl, hl űrmértékekkel!

Megoldás

a) A térfogategységek között 1000 a váltószám. A táblázatban három helyi értékenként következik egy újabb egység. Színes vonallal jelöltük a tizedesvessző helyét a keresett egységhez igazítva. A mértékegységek közötti átváltás leolvasható a táblázatból.

m^3	dm^3	cm^3	mm^3	mérőszám	egység	mennyiség
7 3 6 4 0				73 640	dm^3	$73\,640 \text{ dm}^3$
7 3 6 4 0 0 0 0 0 0 0 0				73 640 000 000	mm^3	$73\,640\,000\,000 \text{ mm}^3$
7 3 6 4 0 0 0 0				73 640 000	cm^3	$73\,640\,000 \text{ cm}^3$
7 3 6 4				73,64	m^3	$73,64 \text{ m}^3$

b) Az űrtartalom egységei között 10 a váltószám. A táblázatban helyi értékenként következik egy újabb egység. Színes vonallal jelöltük a tizedesvessző helyét a keresett egységhez igazítva. A mértékegységek közötti átváltás leolvasható a táblázatból.

m^3	dm^3	cm^3		mérőszám	egység	mennyiség
	hl	l	dl	cl	ml	
7 3 6 4 0						$73\,640 \text{ dm}^3 =$
7 3 6 4 0						$= 73\,640 \text{ l}$
7 3 6 4 0 0 0						$7\,364\,000 \text{ cl}$
7 3 6 4 0 0						$736\,400 \text{ dl}$
7 3 6 4						$736,4 \text{ hl}$
7 3 6 4 0 0 0 0 0						$73\,640\,000 \text{ ml}$

Feladatok

1. Írd fel a helyi értékes táblázatban megadott mennyiségeket I. cm^3 , II. dl egységben!

I.	m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
a)				9	7	5	3	1				
b)		5	2									
c)								8	6	4	2	
d)						6	0	3	9	0	8	

II.	hl	l	dl	cl	ml
a)		5	0	2	
b)	4	9	3	5	6
c)			7	3	6
d)	8	0	7		

2. Váltsd át cm^3 -re!

- a) 6 dm^3 b) 3 m^3 c) $520\,000 \text{ mm}^3$ d) $45\,000 \text{ mm}^3$ e) 120 dm^3
 f) $2 \text{ dm}^3 \, 78 \text{ cm}^3$ g) 1800 mm^3 h) 26 dm^3 i) $7,2 \text{ dm}^3$ j) $\frac{5}{8} \text{ m}^3$

3. Váltsd át dm^3 -re!

- a) 4 m^3 b) 23 m^3 c) $71\,000 \text{ cm}^3$ d) $170\,000 \text{ mm}^3$ e) $412\,000 \text{ cm}^3$
 f) $\frac{1}{4} \text{ m}^3$ g) $28 \text{ m}^3 \, 5 \text{ cm}^3$ h) $2765,1 \text{ cm}^3$ i) $2\frac{1}{5} \text{ m}^3$

4. Számítsd ki a kocka térfogatát, ha éleinek hossza

- a) $4 \text{ dm} \, 5 \text{ cm}$; b) $3,5 \text{ mm}$; c) $\frac{7}{8} \text{ m}$!

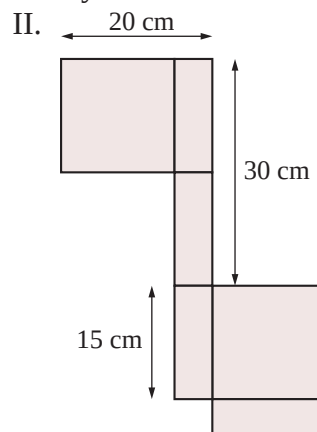
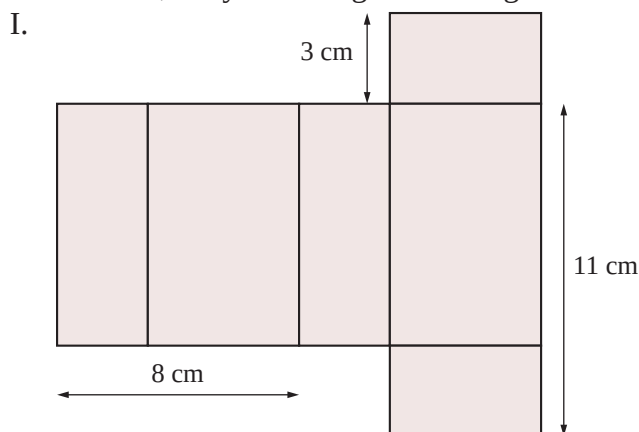
5. Hány liter a térfogata annak a kockának, amelynek élei

- a) 9 dm ; b) 2 m ; c) $1,6 \text{ m}$; d) 32 cm ; e) $\frac{4}{5} \text{ dm}$ hosszúak?

6. Számítsd ki a téglatest térfogatát, ha adott az egy csúcsba futó három élének hossza!

- a) 8 dm ; 63 cm ; 9 cm b) $1,2 \text{ dm}$; 5 dm ; $0,4 \text{ dm}$ c) $6\frac{2}{3} \text{ m}$; $4,05 \text{ m}$; $\frac{7}{5} \text{ m}$

7. a) A téglatestek hálóján megadott szakaszok alapján határozd meg a téglatest éleinek hosszát!
 b) Számítsd ki, hány dm^3 a téglatest térfogata! Az eredményt kerekítsd tizedekre!

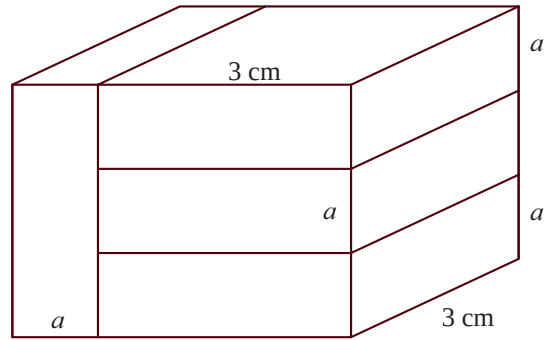


8. Az ábrán látható test négy egyforma négyzetes oszlop összeragasztásával készült.

- a) Számítsd ki az a -val jelölt szakasz hosszát!
b) Számítsd ki az összeragasztott test térfogatát!

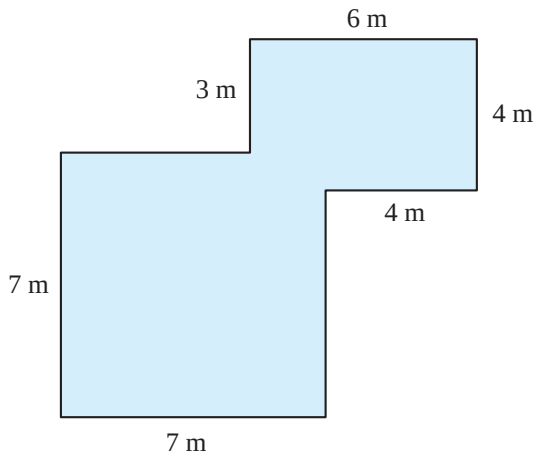
9. Egy téglatest élleinek hossza centiméterben mérve egész szám. Az összes élének hosszát összeadva 24 cm-t kapunk.

- a) Mekkora lehetnek a téglatest élei?
b) Hány cm^3 az egyes téglatestek térfogata?

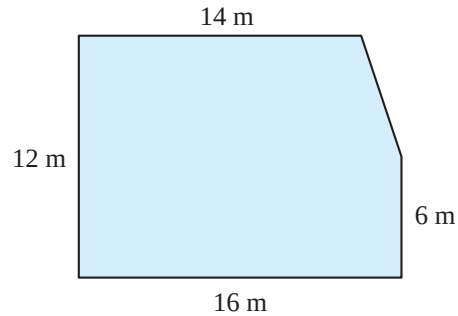


10. A medencék mindenütt egyforma mélységűek, az alapjuk vízszintes. Felülnézetükön jelöltük az oldalaik méretét.

I.



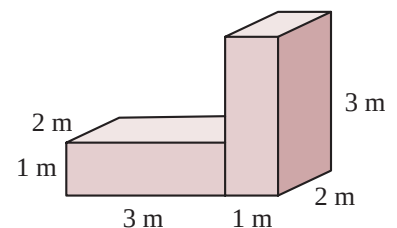
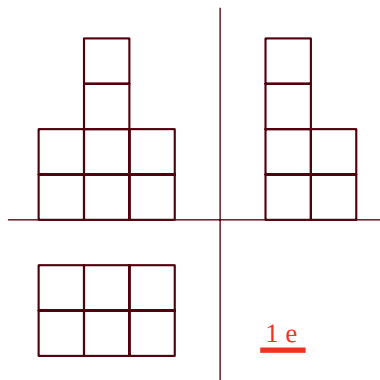
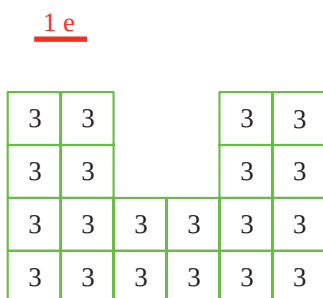
II.



- a) Számítsd ki, hány liter vízre van szükség, ha 80 cm magasan töltik fel!
b) Hány forintba kerül egy alkalommal a medence feltöltése azon a településen, ahol 1 m^3 víz díja 419 Ft?
Kerekítsd az összeget tízezer forintra!
- a) Számítsd ki, hány liter vízre van szükség, ha 150 cm magasan töltik fel!
b) Hány forintba kerül egy alkalommal a medence feltöltése és majdani leeresztése egy másik községben, ha a víz- és csatornadíj összesen 954 Ft köbméterenként?

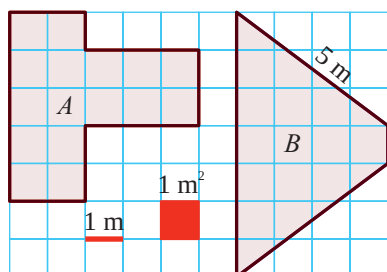
11. Az a) és b) feladatban a testek egységkockákból állnak, a c) feladatban egybevágó téglatestekből. Számítsd ki a testek felszínét és térfogatát, ha adott a test

- a) alaprajza és a hosszúság-egység, b) három nézete és a hosszúság-egység, c) térbeli rajza és az élék hossza!



Tudáspróba

1. Számítsd ki az A, B és C sokszögek kerületét és területét a megadott egységekben!

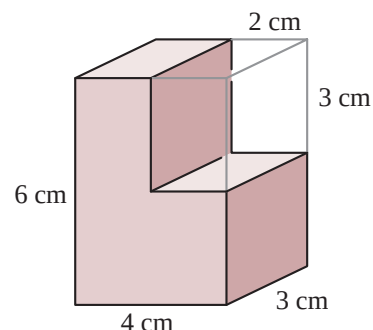


2. Döntsd el, melyik mennyiség a nagyobb! Számolással, átváltással indokold a döntésed!

- A = egy téglalap területe, melynek oldalai 11 m és 7 m hosszúak
 B = egy téglatest felszíne, ha egy csúcsba futó élei 6 m, 12 m és 2,5 m hosszúak
- C = egy 720 literes tartály űrtartalma
 D = egy 9 dm élű kocka térfogata
- E = egy négyzetes oszlop térfogata, ha élei 23 mm, 28 mm és 2,1 cm hosszúak
 F = 14 ml űrtartalom

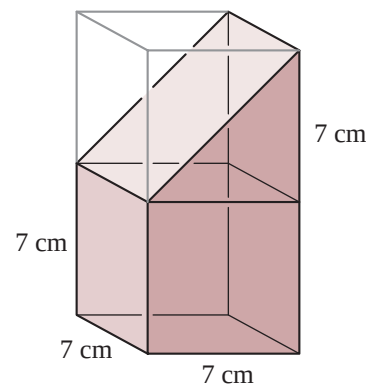
3. Egy téglatestből kivágtunk egy kisebb téglatestet, így a színessel rajzolt testet kaptuk.

- Rajzold le az így keletkezett színes test három nézetét!
- Számítsd ki a színes test felszínét!
- Számítsd ki a színes test térfogatát!
- Hány liter a színes test űrtartalma?



4. Egy kockát és egy átlósan kettévágott „fél kockát” az ábra szerint egymásra helyezünk.

- Rajzold le az így keletkezett test három nézetét!
- Határozd meg, hány liter a test térfogata, ha a kocka élei 7 cm hosszúak!



Nyitott mondatok

1. példa

Igazak-e az alábbi mondatok?

- Az egri vár védői 1552-ben diadalt arattak a törökök fölött.
- az Egre csillagok írója.
- Cecey Éva végül nem lett Bornemissza Gergő felesége.
- Jumurdzsák talizmánja egy volt.
- neve szerepel az egri vár ismert védőinek névsorában.



Megoldás

Az a) állítás igaz.

A c) állítás hamis. (Kétszer is házasságot kötöttek a regényben.)

A b), d) és e) mondatról nem tudjuk eldönteni, hogy igaz, vagy sem.

A b) állítás igaz lesz, ha Gárdonyi Gézárt írunk a mondatba, ha mást, akkor hamis lesz.

A d) mondat igaz lesz, ha a gyűrű szót írjuk be.

Az e) mondatot sokféleképpen ki lehet egészíteni úgy, hogy igaz legyen. Például: Dobó István, Varsányi Imre, Mekcsey István, Balázs diák, Szörné Katalin asszony...



A hiányos kijelentő mondatok igazsága függ attól, hogy milyen szót vagy szavakat írunk a mondatba. Az ilyen mondatokat **nyitott mondatoknak** nevezzük.

Ha a **számokról szóló nyitott mondat** két oldalát „=” jel kapcsolja össze, akkor a nyitott mondatot **egyenlőségnek** nevezzük. Ha a számokról szóló nyitott mondat két oldalát összekapcsoló jel: <, >, ≤, ≥, akkor a nyitott mondatot **egyenlőtlenségnek** nevezzük.

2. példa

Melyik az a szám, amelyik a harmadával osztva 3-at ad eredményül?

- „Lefordítottuk” a szöveget a matematika nyelvére. Melyik a szövegnek megfelelő egyenlőség?

A) $\text{?} : 3 = 3$ B) $\text{?} : \frac{\text{?}}{3} = 3$ C) $\text{?} : (\text{?} : 3) = 3$

- A 6. a osztályban a gyerekek a feltett kérdésre a következő válaszokat adták. Melyik gyerek válasza helyes?

Marci: Csak a 9 jó.

Sári: Szerintem meg az összes olyan szám jó, amelyik osztható 3-mal.

Andris: Szerintem is, de a nulla kivételével. A nulla osztható 3-mal, de nullával nem.

Csilla: Andrisnak igaza van abban, hogy a nulla nem jó. Én úgy gondolom, hogy a nulla kivételével minden szám jó.

Megoldás

a) Az A) egyenlőség nem helyes. Ehhez az egyenlőséghez például ez a kérdés tartozhatna: Melyik az a szám, amelyik 3-mal osztva 3-at ad eredményül?

Ebben az esetben valóban csak a 9 lenne az egyetlen megfelelő szám.

A B) és a C) egyenlőségek helyesek.

b) Erre a kérdésre csak akkor tudnánk megadni a választ, ha a feladat szövegéből kiderülne, hogy milyen számok közül kell kiválasztanunk a feltételnek megfelelőt.

Ha a szövegből ez nem derül ki, akkor az összes eddig tanult szám közül kell kiválasztani a megfelelőt (pozitív és negatív egészek és törtek, valamint a nulla)!

Ez a feladat is ilyen. Ezért Csilla válasza helyes.

Azt a halmazt, amelynek az elemei között a megoldást keressük, alaphalmaznak nevezzük. Az alaphalmaz elemeit a feladat szövegébe vagy a nyitott mondatba behelyettesítve megtudhatjuk, hogy annak hány eleme teszi azt igazzá. Ezek az elemek alkotják a szöveges feladat vagy a nyitott mondat igazsághalmazát. Előfordul, hogy az alaphalmaz megegyezik az igazsághalmazzal. Az is lehet, hogy nincs olyan szám az alaphalmazban, amely igazzá teszi a nyitott mondatot.

3. példa

a) A keresett szám nem kisebb a kétszeresénél.

Melyik állítás mondja ugyanezt?

A) A keresett szám 2-szerese kisebb a számnál.

B) A keresett szám legalább akkora, mint a 2-szerese.

C) A keresett szám vagy nagyobb mint a 2-szerese, vagy egyenlő azzal.

Megoldás

A B) és a C) állítás mondja ugyanazt.

b) Melyik állításhoz tartoznak a nyitott mondatok? Kössük össze az egymásnak megfelelőket!

A) A keresett szám 2-szerese kisebb a számnál.

a) $\square \leq \square \cdot 2$

B) A keresett szám legalább akkora, mint a 2-szerese.

b) $\square < \square \cdot 2$

C) A keresett szám vagy nagyobb, mint a 2-szerese, vagy egyenlő azzal.

c) $\square \geq \square \cdot 2$

d) $\square > \square \cdot 2$

Megoldás

A) A keresett szám 2-szerese kisebb a számnál.

a) $\square \leq \square \cdot 2$

B) A keresett szám legalább akkora, mint a 2-szerese.

b) $\square < \square \cdot 2$

C) A keresett szám vagy nagyobb, mint a 2-szerese, vagy egyenlő azzal.

c) $\square \geq \square \cdot 2$

d) $\square > \square \cdot 2$

4. példa

Az alábbi alaphalmazokban hány olyan szám van, amelyre igaz ez az állítás:

A szám nem kisebb a kétszeresénél.

Alaphalmaz	0, 2, 4, 6, 8	-3, -2, -1, 0, 1	Negatív egészek	A 4 pozitív többszöröse
Az alaphalmazból ennyi szám teszi igazzá az állítást				

Megoldás

Alaphalmaz	0, 2, 4, 6, 8	-3, -2, -1, 0, 1	Negatív egészek	A 4 pozitív többszöröse
Az alaphalmazból ennyi szám teszi igazzá az állítást	egy szám teszi igazzá: a nulla	négy szám teszi igazzá: -3, -2, -1, 0	végtesen sok szám teszi igazzá: az összes szám	egyik szám sem teszi igazzá

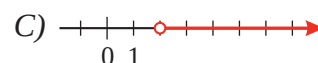
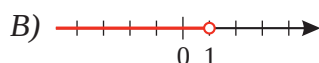
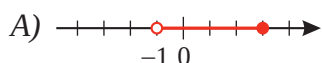
5. példa

Mely egyenlőtlenségek tartoznak a száme egyenesek piros színnel megjelölt pontjaihoz?

a) $\blacksquare < 1$

b) $\blacksquare > 2$

c) $-1 < \blacksquare \leq 3$

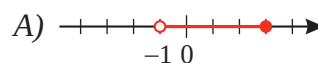
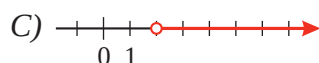
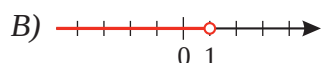


Megoldás

a) $\blacksquare < 1$

b) $\blacksquare > 2$

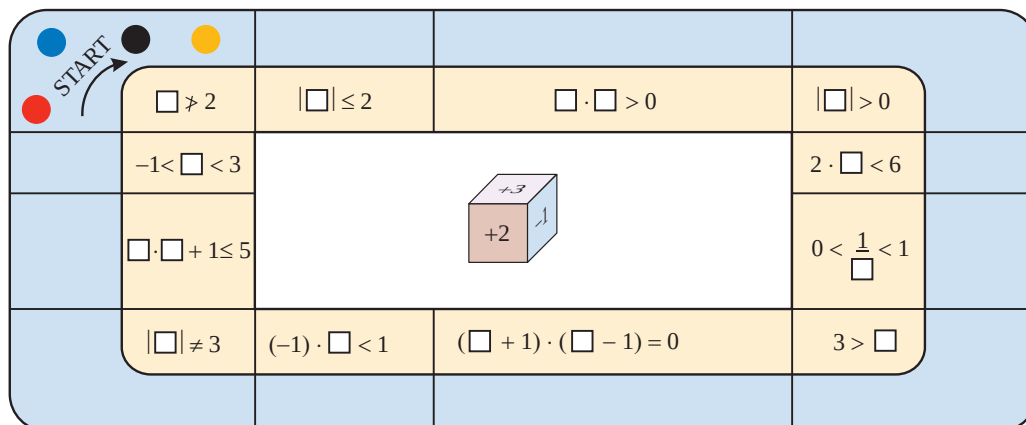
c) $-1 < \blacksquare \leq 3$



A nyitott mondatok hiányos kijelentő mondatok. A hiányzó szavakat, számokat stb. ismeretleneknek nevezzük. Azt a halmazt, amelyből az ismeretlent kiválasztjuk, a nyitott mondat alaphalmazának nevezzük.

A nyitott mondatokat úgy oldjuk meg, hogy az alaphalmaz minden eleméről eldöntjük, hogy igazzá teszi-e a nyitott mondatot, vagy sem. A nyitott mondat igazsághalmazát az alaphalmaznak azok az elemei alkotják, amelyek igazzá teszik a nyitott mondatot.

Játék



Játékszabály: A játékot legfeljebb négyen játszhatja. Kell hozzá egy dobókocka, amelynek lapjaira a +3, +2, +1, -1, -2, -3 számok legyenek ráírva! A **START** mezőről induljatok! Felváltva dobjatok a kockával! A játéktáblán a dobott számot így jelöltük: □.

A dobott számot a soron következő játékos helyettesítse be annak a mezőnek a nyitott mondatába, amelyen a bábuja áll! Ha az így kapott állítás igaz, akkor ráléphet a következő mezőre, ha nem, akkor újra próbálkozhat a következő körben. Az a játékos győz, aki legelsőnek ér vissza a **START** mezőre.

Feladatok

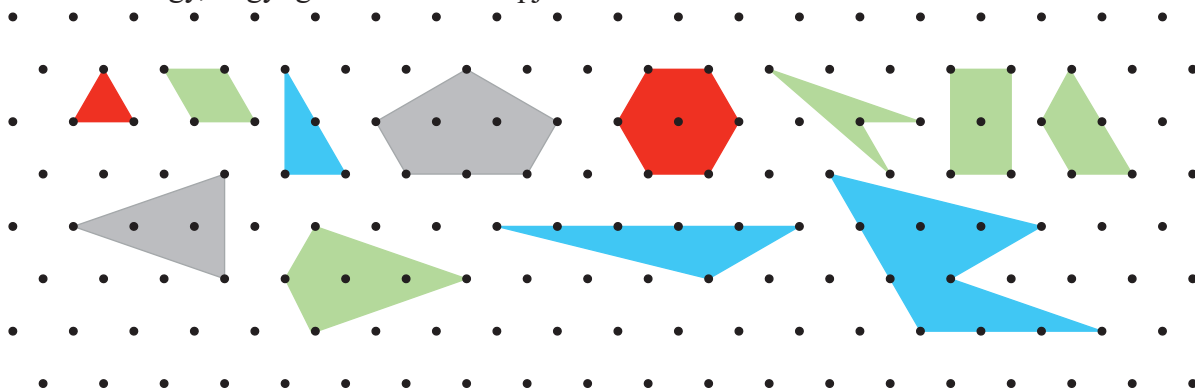
1. Az 1, 3, 4 és 6 számkártyákat helyezd el a nyitott mondatokba úgy, hogy igaz állításokat kapj!

a) $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = 1$

b) A(z) $\square \cdot \square + \square \cdot \square$ összeg osztható 3-mal.

c) Adj meg másik négy számkártyát úgy, hogy azokkal is igazzá lehessen tenni mindkét nyitott mondatot!

2. Ezekről a sokszögekről írtunk nyitott mondatokat. Helyezd el a cédulákon lévő szavakat a nyitott mondatokba úgy, hogy igaz állításokat kapj!

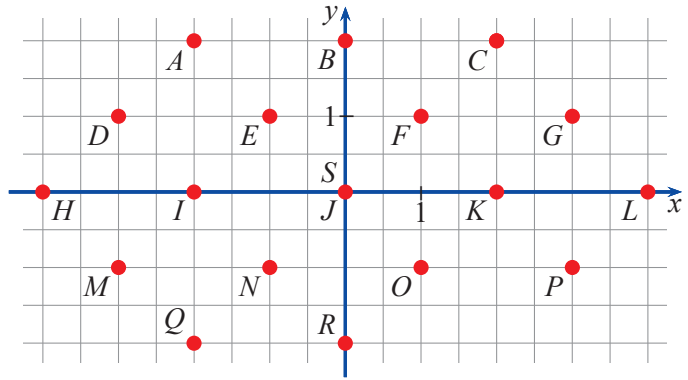


- Minden zöld.
- Amelyik háromszög tengelyesen szimmetrikus, az .
- Minden szabályos sokszög .
- Van olyan , amelynek nincs csúcson átmenő szimmetriatengelye.



3. Válaszd ki azokat a nyitott mondatokat, amelyek a pirossal jelölt pontok x és y koordinátáira igazak!

- a) $x \cdot y$ páros szám
- b) $x + y$ páros szám
- c) $x > y$
- d) $x \geq y$



4. a) Hány szám teszi igazzá a következő nyitott mondatokat az egyes alaphalmazokon?
b) Melyiket teszi igazzá az alaphalmaz minden eleme?

Alaphalmaz	0, 2, 4, 6, 8	Természetes számok	Egész számok	A 3 pozitív többszörösei
Nyitott mondat				
$2 - \square = -4$				
$\square - 8 \leq 0$				
$-4 < \frac{\square}{2} < 4$				

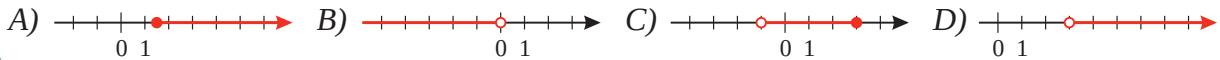
5. Mely egyenlőtlenségek tartoznak a számegyenesek piros színnel megjelölt pontjaihoz? Add meg a párok betűjelét!

a) $\blacksquare < 0$

b) $\blacksquare > 3$

c) $\blacksquare \geq \frac{3}{2}$

d) $-1 < \blacksquare \leq 3$



6. Ábrázold számegyeneseken azokat a számokat, amelyek igazzá teszik az egyenlőtlenségeket!

a) $-4 \leq \blacksquare \leq 4$

b) $-4 \leq 4 \cdot \blacksquare \leq 4$

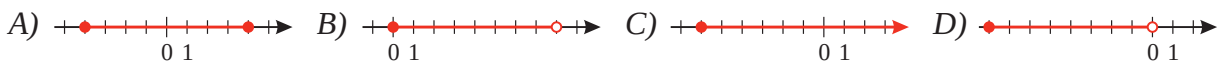
c) $-4 < \frac{\blacksquare}{4} < 4$

7. Mely egyenlőtlenségek tartoznak a számegyenesek színessel megjelölt pontjaihoz? Add meg a párok betűjelét! Melyik számegyenesnek nincs párja?

a) $-4 \leq \blacksquare + 4 < 4$

b) $-4 \leq \blacksquare - 4 < 4$

c) $4 \geq |\blacksquare|$



8. Füllentő elhatározta, hogy ezentúl hétfőn, szerdán, pénteken mindig igazat mond, más napokon mindig hazudik. Egyik este így szólt: „Holnap igazat fogok mondani!”
A hét mely napján mondhatta ezt?

9. Írj nyitott mondatot az 1, 3, 5, 7, 9 számokból álló alaphalmazhoz úgy, hogy

- a) egyik se tegye igazzá,
- b) egy tegye igazzá,
- c) három tegye igazzá,
- d) mind igazzá tegye!

Nyitott mondatok megoldása lebontogatással, fordítás a matematika nyelvére



Az összeadásnak két kivonás a megfordítása:

$$7 + 5 = 12 \begin{cases} 12 - 5 = 7 \\ 12 - 7 = 5 \end{cases}$$

$$\square + 5 = 12 \begin{cases} 12 - 5 = \square \\ 12 - \square = 5 \end{cases}$$

$$7 + \triangle = 12 \begin{cases} 12 - 7 = \triangle \\ 12 - \triangle = 7 \end{cases}$$

A szorzásnak két osztás a megfordítása:

$$7 \cdot 5 = 35 \begin{cases} 7 = 35 : 5 \\ 5 = 35 : 7 \end{cases}$$

$$\square \cdot 5 = 35 \begin{cases} \square = 35 : 5 \\ 5 = 35 : \square \end{cases}$$

$$7 \cdot \triangle = 35 \begin{cases} 7 = 35 : \triangle \\ \triangle = 35 : 7 \end{cases}$$

Összeget, különbséget tagonként szorozhatunk és osztunk:

$$(8 + 5) \cdot 4 = 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4$$

$$(8 + \square) \cdot 4 = 8 \cdot 4 + \square \cdot 4$$

$$(\triangle + 5) \cdot 4 = \triangle \cdot 4 + 5 \cdot 4$$

$$(10 + 4) : 2 = 10 : 2 + 4 : 2$$

$$(10 + \square) : 2 = 10 : 2 + \square : 2$$

$$(\triangle + 4) : 2 = \triangle : 2 + 4 : 2$$

$$(15 - 7) \cdot 4 = 15 \cdot 4 - 7 \cdot 4$$

$$(15 - \square) \cdot 4 = 15 \cdot 4 - \square \cdot 4$$

$$(\triangle - 7) \cdot 4 = \triangle \cdot 4 - 7 \cdot 4$$

$$(30 - 15) : 5 = 30 : 5 - 15 : 5$$

$$(30 - \square) : 5 = 30 : 5 - \square : 5$$

$$(\triangle - 15) : 5 = \triangle : 5 - 15 : 5$$

1. példa

Tamás bácsi számkitalálós feladványokkal szórakoztatta a gyerekeket. Gondolt egy számra, és a gyerekeknek kellett kitalálniuk, hogy melyik szám az.

Az egyik feladvány így szólt:

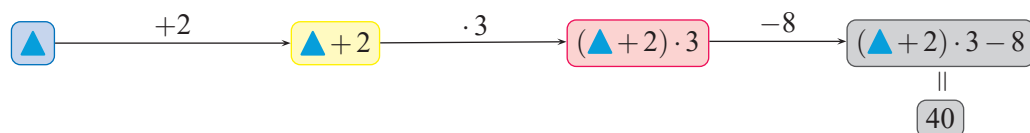
Gondoltam egy számot, hozzáadtam 2-t, a kapott szám 3-szorosát vettem, a szorzatot 8-cal csökkentve 40-et kaptam.

Melyik ez a szám?

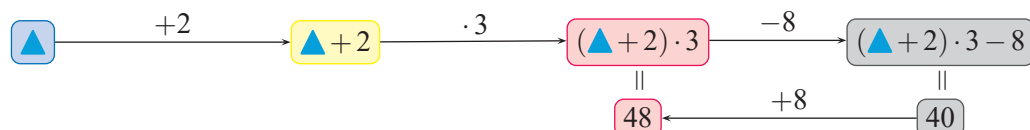


Megoldás

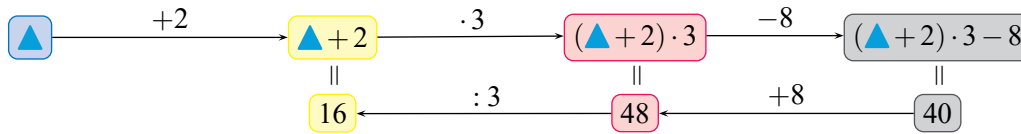
Jelöljük a gondolt számot $\triangle$ -gel! Jegyezzük le a feladványt egy folyamat-ábrával, majd **viisszafelé göngyölgetéssel**, vagy más szóval **lebontogatással** oldjuk meg!



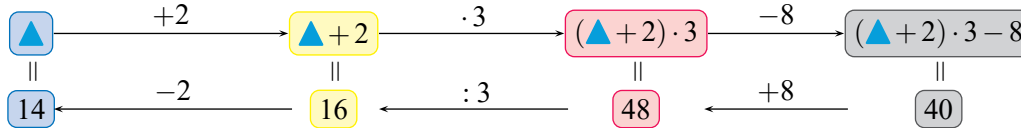
1. lépés: Ha nem vontunk volna ki 8-at, akkor $40 + 8 = 48$ -at kaptunk volna.



2. lépés: Ha nem szoroztunk volna 3-mal, akkor $48 : 3 = 16$ -ot kaptunk volna.



3. lépés: Ha nem adtunk volna hozzá 2-t, akkor $16 - 2 = 14$ -et kaptunk volna.



A 14-re gondolt Tamás bácsi. Nézzük meg, valóban jó megoldás-e a 14!

$(14 + 2) \cdot 3 - 8 = 16 \cdot 3 - 8 = 48 - 8 = 40$, tehát jól számoltunk.

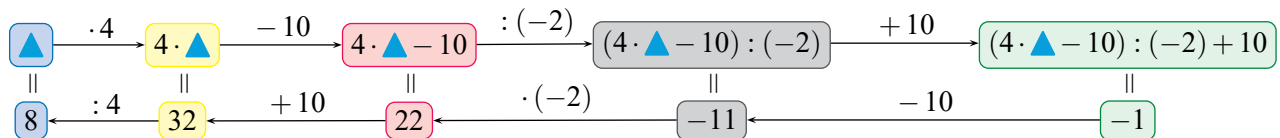
2. példa

Tamás bácsi másik feladványa így szólt:

Gondoltam egy számot, a 4-szeresét vettem, a kapott számból kivontam 10-et, a különbséget elosztottam (-2) -vel, majd a hányadoshoz 10-et adva (-1) -et kaptam.

Melyik ez a szám?

Megoldás



8-ra gondolt Tamás bácsi. Nézzük meg, valóban jó-e a 8!

$(4 \cdot 8 - 10) : (-2) + 10 = (32 - 10) : (-2) + 10 = 22 : (-2) + 10 = -11 + 10 = -1$, tehát jól számoltunk.

Játék – Szóegyenlőségek

A játék lényege, hogy szavakkal végzünk matematikai műveleteket, és így új szavakat kapunk. A feladvány szavainak olyan megfelelőit kell megtalálnunk, amelyekkel úgy végezhetők el a kért műveletek, hogy ugyanazt a szót vagy szókapcsolatot kapjuk eredményül az egyenlőségjel két oldalán. Többnyire összeadás szerepel a feladványokban, de előfordulhat kivonás, szorzás és osztás is.

Példa összeadásra:

Feladvány:	lombos növény	+	könnyeit hullatta	=	vagdalt hús
Megoldás	FA	+	SÍRT	=	FASÍRT

Példa összeadásra és osztásra:

Feladvány:	cipésszámszám	+	apuka/2	=	gabona
Megoldás	ÁR	+	PAPA/2	=	ÁRPA

Mi a megoldása ezeknek a szóegyenlőségeknek?

- adagol + földet mozgat = matematikai művelet
- a kört két pontban metsző egyenes – fegyvert elsüt + kunyerál = jármű
- épületmaradvány + személyszállító jármű = egyenlő oldalú deltoid
- római ötvenegy $\cdot 2$ + a többes szám jele = madárféle

Játsszatok csoportban!

Minden csoport készítsen négy szóegyenlőséget, és írja le azokat egy papírra! A játékvezető jelére adják át a csoportok a papírjukat a szomszédos csoportnak! Közös megbeszélés után a megoldások visszakerülnek a küldő csoportokhoz, akik értékelik azokat. Az a csapat lesz a győztes, amelyik a legtöbb szóegyenlőséget megoldotta. Holtverseny esetén a játékvezető által kitalált szóegyenlőség megoldása dönt. Az a csapat lesz a győztes, aki elsőként hangosan kimondja a megfejtést.

Feladatok

1. A sor elején lévő műveletsort írtuk le többféle alakban. Lehet, hogy az egyik hibás közülük. Ha hibás alakot találsz, add meg a betűjelét!

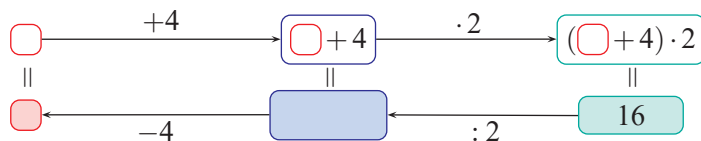
- | | | | |
|------------------------------|------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $(8 + 5) \cdot 4$ | A) $8 + 5 \cdot 4$ | B) $8 \cdot 4 + 5 \cdot 4$ | C) $5 \cdot 4 + 4 \cdot 8$ |
| b) $\frac{15 + 9}{3}$ | A) $15 : 3 + 9 : 3$ | B) $(15 + 9) : 3$ | C) $3 + \frac{15}{3}$ |
| c) $5 \cdot (7 - 2)$ | A) $5 \cdot 7 - 2 \cdot 5$ | B) $5 \cdot 7 - 5 \cdot 2$ | C) $5 \cdot (2 - 7)$ |
| d) $3 \cdot (2 \cdot 4 + 5)$ | A) $3 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5$ | B) $3 \cdot 8 + 3 \cdot 5$ | C) $3 \cdot 2 \cdot 4 + 5$ |

2. A sor elején lévő műveletsort írtuk le többféle alakban. Lehet, hogy az egyik hibás közülük. Keressd meg! Add meg a betűjelét!

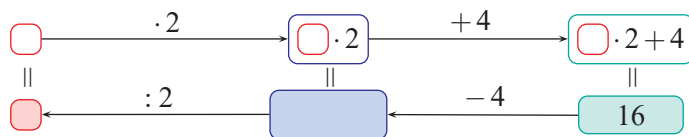
- | | | | |
|---|---|---|---|
| a) $(\blacktriangle + 9) \cdot 6$ | A) $\blacktriangle \cdot 6 + 9 \cdot 6$ | B) $\blacktriangle + 9 \cdot 6$ | C) $6 \cdot 9 + \blacktriangle \cdot 6$ |
| b) $6 \cdot 3 - \blacktriangle \cdot 3$ | A) $(6 - \blacktriangle) \cdot 3$ | B) $3 \cdot (\blacktriangle - 6)$ | C) $18 - 3 \cdot \blacktriangle$ |
| c) $\frac{8 + \blacktriangle}{4}$ | A) $\frac{8}{4} + \frac{\blacktriangle}{4}$ | B) $\blacktriangle : 4 + 2$ | C) $(\blacktriangle + 8) : 4$ |
| d) $6 \cdot (3 \cdot \blacktriangle + 5)$ | A) $6 \cdot 3 \cdot \blacktriangle + 5$ | B) $6 \cdot 3 \cdot \blacktriangle + 6 \cdot 5$ | C) $18 \cdot \blacktriangle + 30$ |

3. Melyik számra gondoltam? Segíthet a folyamatábra.

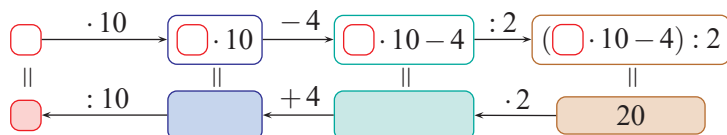
A) Gondoltam egy számra, a nála 4-gyel nagyobb szám 2-szerese 16.



B) Gondoltam egy számra, a dupláját vettem, a kapott számhoz 4-et adva 16-ot kaptam.

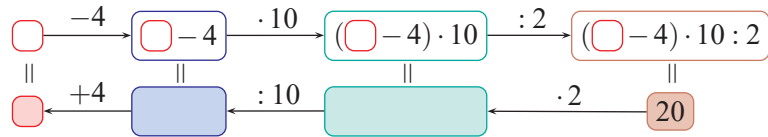


C) Gondoltam egy számra, a tízszeresét 4-gyel csökkentettem, az így kapott számot megfelezve 20-at kaptam.

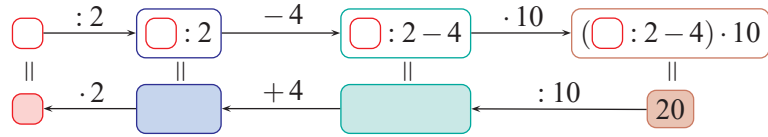


4. Add meg azt a számot, amelyre teljesül az egyenlőség! Segíthet a folyamatábra.

A) $(\square - 4) \cdot 10 : 2 = 20$



B) $(\square : 2 - 4) \cdot 10 = 20$



5. Készíts folyamatábrát az egyenlőségekhez! Válaszd ki a zárójelben lévő számok közül azt, amelyik igazgá teszi az egyenlőséget!

a) $\square \cdot 4 + 5 = 27$ {0; 2; 5; 4; 5; 5; 8}

b) $\square + 3 \cdot \square - 4 = 16$ {-2; 0; 4; 5; 10}

c) $(\square + 3) : 6 + 3 = 15$ {24; 36; 69; 96}

d) $[(\square - 5) \cdot 8 + 10] : 4 = 2,5$ {-10; 0; 5; 10; 15}

6. Készíts folyamatábrát az egyenlőségekhez, és oldd meg azokat!

a) $\square \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{2} = 11\frac{1}{2}$

b) $(\square \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{5}) \cdot 10 = 16$

c) $[(\square - 3,5) \cdot 0,5 + 7,5] : 0,5 = 20$

d) $(\square \cdot 0,15 + 4,25) : \frac{1}{4} - 1,6 = 3,4$

7. Egészítsd ki a nyitott mondatokat úgy, hogy igazak legyenek!

a) A háromszög belső szögeinek összege .

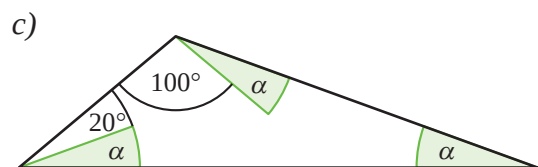
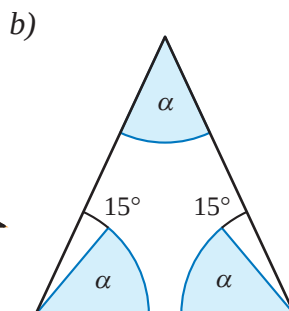
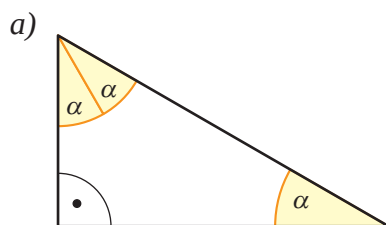
b) Az egyenlő szárú háromszögnek legalább két szöge van.

c) Az egyenlő szárú háromszög fekvő szögei egyenlők.

d) A derékszögű háromszögnek két szöge van.

e) Minden háromszögnek legalább hegyesszöge van.

8. Mekkora a háromszögek szögei?



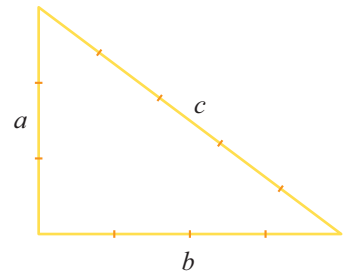
9. Egy könyvsorozat kötetei 7 évenként jelennek meg. Amikor a 7. kötet megjelent, akkor a megjelenési évszámok összege 13 993 volt. Melyik évben jelent meg a sorozat első kötete?

Szöveges feladatok megoldása szakaszos ábrázolással

1. példa

Az ábrán látható derékszögű háromszöget ugyanakkora sárga pálcikákból raktuk ki. Tudjuk, hogy a háromszög kerülete 36 cm. Mekkora az oldalai?

Megoldás



Az ábráról leolvasható, hogy a háromszöget $3 + 4 + 5 = 12$ darab megegyező hosszúságú pálcikából raktuk ki. Ezek hossza összesen 36 cm.

Egy pálcika hossza: = $36 \text{ cm} : 12 = 3 \text{ cm}$.

Válasz:

A háromszög oldalainak hossza:

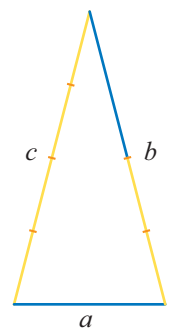
	$a = 3 \text{ cm} \cdot 3 = \mathbf{9 \text{ cm}}$
	$b = 3 \text{ cm} \cdot 4 = \mathbf{12 \text{ cm}}$
	$c = 3 \text{ cm} \cdot 5 = \mathbf{15 \text{ cm}}$

Ellenőrzés: $K = 9 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 15 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$. Helyes a megoldásunk.

2. példa

Az ábrán látható egyenlő szárú háromszöget pálcikákból raktuk ki úgy, hogy a megegyező színűek ugyanakkorák. Tudjuk, hogy a háromszög kerülete 60 cm. Mekkora az oldalai?

Megoldás



Mivel a háromszög egyenlő szárú, ezért $b = c$. Az ábráról leolvasható, hogy a sárga pálcikának kétszerese a kék. Ezért a háromszög kerülete megadható csupa egyforma sárga pálcikával: $a = 2$ sárga; $b = 4$ sárga.

$K = a + b + c = (2 + 4 + 4)$ sárga = 10 sárga = 60 cm .

Válasz:

Egy = $60 \text{ cm} : 10 = \mathbf{6 \text{ cm}}$

Egy = $2 \cdot 6 \text{ cm} = \mathbf{12 \text{ cm}}$

A háromszög három oldala: **12 cm, 24 cm, 24 cm**

Ellenőrzés:

$K = (12 + 24 + 24) \text{ cm} = 60 \text{ cm}$. Helyes a megoldásunk.

3. Példa

Ugyanazt a feladatot oldjuk meg kétféleképpen, szakaszos ábrázolással és visszafelé gondolkodással is!

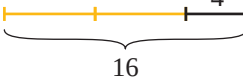
Marci nagymamája palacsintával kedveskedett unokáinak. Marci húga később érkezett meg, és izgatottan kérdezte bátyját, hogy hány palacsintát evett már meg. Marci ravaszul így válaszolt: „16-ot terveztem megenni, mielőtt hazaérsz. De ha kétszer annyit ettem volna, mint amennyit eddig meg tudtam enni, akkor is 4-gyel kevesebbet ettem volna meg annál, mint amennyit akartam.”

Hány palacsintát evett meg Marci?



1. megoldás

Oldjuk meg a feladatot szakaszos ábrázolással!

Ennyi palacsintát evett meg Marci: 
Ennyit tervezett megenni Marci: 

Az ábráról leolvasható, hogy a megevett palacsinták száma: $(16 - 4) : 2 = 6$.

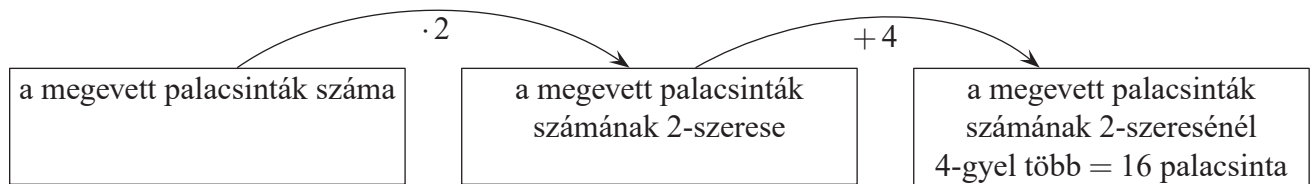
Válasz: Hat palacsintát evett meg Marci.

2. megoldás

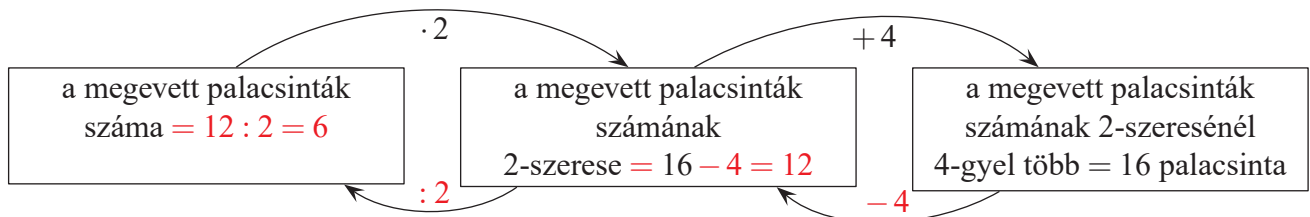
Oldjuk meg a feladatot visszafelé gondolkodással!

Készítsünk a feladat szövegének megfelelő folyamatábrát!

A megevett palacsinták száma kerül az első téglalapba, a kétszerese a másodikba, ezek számát még nem ismerjük. A harmadikba 16 kerül, ennyi palacsinta megevését tervezte Marci.



Gondolkodjunk visszafelé!

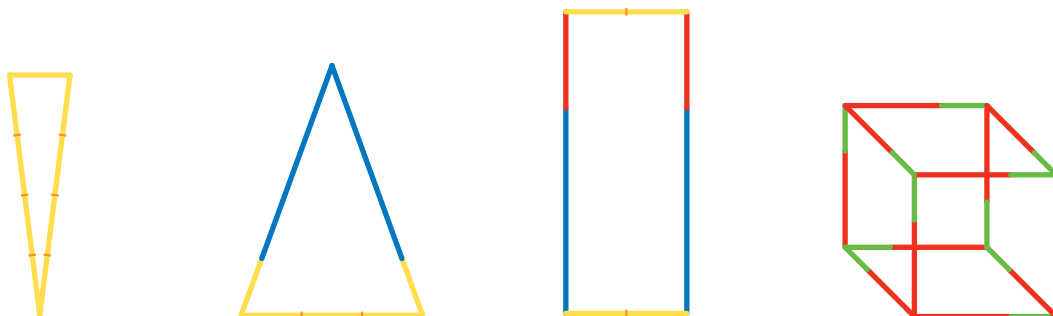


Válasz: Az ábráról leolvasható, hogy az elfogyasztott palacsinták száma 6.

Feladatok

1. Az asztalosnak 120 cm-es deszkákat kell elfűrészelnie. Hogyan fűrészelve ketté, ha a megrendelők azt kérik, hogy
 - a) az egyik ötször olyan hosszú legyen, mint a másik;
 - b) az egyik rész 5 cm-rel legyen hosszabb, mint a másik;
 - c) az egyik rész 12 cm-rel legyen hosszabb a másik kétszeresénél?

2. Sokszögeket és egy kocka élvázát színes szívószáldarabokból raktuk ki úgy, hogy a megegyező színűek mind a négy ábrán ugyanakkorák. Írj egyenlőségeket az egyes síkidomok kerületéről, illetve a kocka élvázának hosszáról! Számítsd ki a különböző színű szívószáldarabkák hosszát!
- a) A kerülete 36 cm. b) A kerülete 38 cm. c) A kerülete 49 cm. d) Az élváz hossza 120 cm.



3. Ádámék falujában nincs iskola, ezért reggel iskolabusz viszi a gyerekeket a közeli városba. A középiskolások száma az általános iskolások számának harmadánál 4-gyel több. Ha teljes a létszám, megtelik a 40 férőhelyes busz.



Hány általános iskolás és mennyi középiskolás tanuló utazik a buszon?

4. a) Az iskolai kosárlabda-bajnokságon a 6. osztályosok 5 fős csapatokat szerveztek. A 6. a-ból csak 2 tanuló nem jelentkezett, a 6. b-ből 8 tanuló kivételével mindenki jelentkezett. A 6. c-ből az összes gyerek részt vett a versenyen. Így összesen 15 csapat mérkőzött meg egymással. Hány 6. osztályos tanuló van az iskolában?
- b) Hány tanuló van az egyes osztályokban, ha a 6. a létszáma 9 többszöröse, a 6. b létszáma 4 és 7 többszöröse, a 6. c létszáma osztható 10-zel és 15-tel?

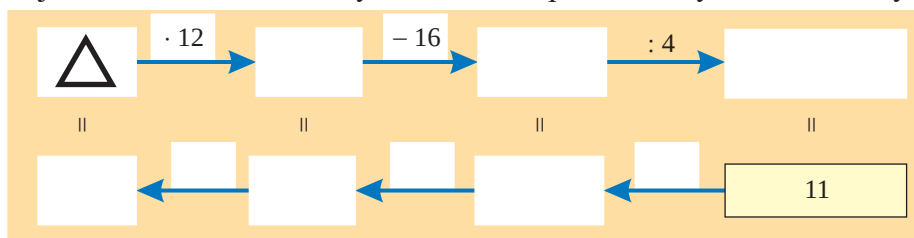


@ A kosárlabda mai formáját a 19. század végén alakította ki egy kanadai tanár, dr. James Naismith. Célja az volt, hogy felkeltse rakoncátlan tanítványai érdeklődését a sport iránt. A véletlen segített neki ebben. Egy alkalommal a tanterem sarkában álló gyümölcsös kosárba dobta a labdát, amikor hívták. Visszatérve látta, hogy tanítványai az általa kijelölt gyakorlatok helyett a kosárba való dobálással próbálkoznak. Megtetszett neki az ötlet, és rövid időn belül megalkotta a máig nagy népszerűségnek örvendő játék tervezetét.

Kik játszották a kosárlabda egyik ősenek tekinthető labdajátékot?

A) amerikai bennszülött maják és azték indiánok B) hinduk C) ausztrál őslakosok

5. a) Rajzold le a füzetedbe a folyamatábrát, és pótolj a folyamatábra hiányzó részleteit!



- b) Írj olyan szöveges feladatot, amelyhez ez a folyamatábra készülhetne!

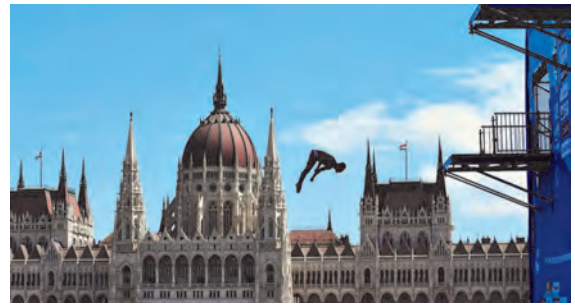
6. Száz embert megkérdeztek, hogy mi a kedvenc itala. A lehetséges válaszok a következők voltak: **víz**, **gyümölcslé**, **kóla**, **tea**, **valami más**.

A megkérdezettek közül feleannyian választották a vizet, mint a kólát, de kétszer annyian a gyümölcslevet, mint a kólát. A teát háromszor annyian választották kedvenc italnak, mint a vizet. A száz megkérdezettből tíz a lehetséges válaszok közül a „valami más”-t választotta.

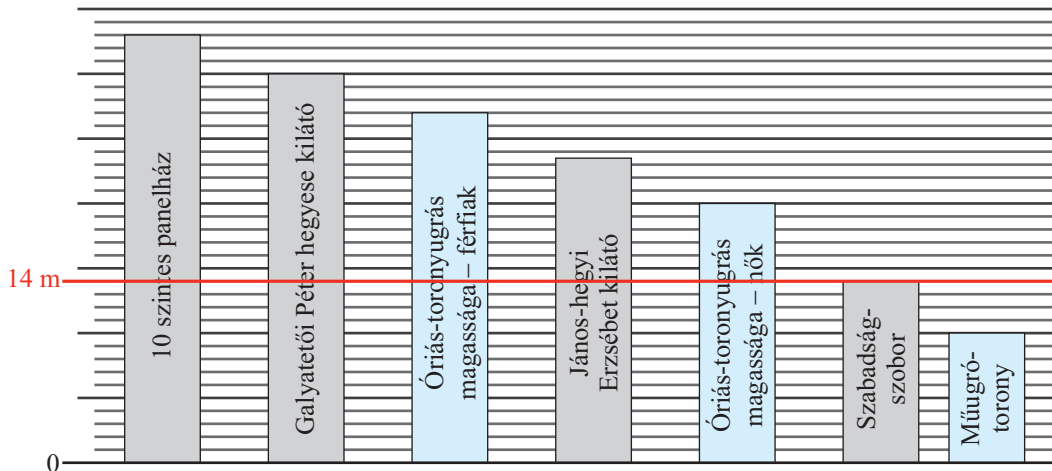


- a) A 100 megkérdezettből melyik italt választották legtöbben a kedvenc italuknak, melyiket a legkevesebben?
b) Hányan választották a vizet?
c) Hányan választották a kólát?
d) Hányan választották a teát?
e) Hányan választották a gyümölcslevet?

7. 2017-ben hazánk rendezte a vizes világbajnokságot. A fotó jobb szélén az a kék óriás torony látható, amelyről a versenyzők egy erre a célra kialakított medencébe ugrottak. Az ilyen versenyeken a férfiak magasabbról ugranak, mint a nők. A férfiak közel 3 másodperc alatt érnek lábbal a vízbe. A zuhanás végén közel óránkénti 90 km-es sebességgel érik el a vízfelszínt.



- a) Az oszlopdiaagramon ábrázoltuk, hogy a férfiak és a nők milyen magasságból ugranak le a toronyról. Ezt az értéket az ugrófelületek magasságának nevezzük. A Szabadság-szobor magassága 14 m. Az oszlopdiaagram segítségével határozd meg a férfiak, illetve a nők ugrófelületének magasságát!



- b) A 10 szintes panelház hányadik szintje van olyan magasan, mint a férfiak ugrófelülete, ha a szintek magassága megegyező?

Páros munka

Padtársaddal mondjatok egymásnak olyan állításokat, amelyek igazságát a grafikon alapján el lehet dönteni! *Például:* A műugrótorony magasabb, mint a Szabadság-szobor magasságának $\frac{2}{3}$ -a.

8. Melyik egyenlőség írja le helyesen a szöveges feladatot? Válaszolj a kérdésre is! „Péter elköltötte zsebpénzének $\frac{3}{8}$ részét, 450 Ft-ot. Mennyi pénze volt Péternek?”

a) $\triangle - \frac{3}{8} = 450$ b) $\triangle - \frac{3}{8} \cdot \triangle = 450$ c) $\triangle : \frac{3}{8} = 450$ d) $\triangle \cdot \frac{3}{8} = 450$

9. Oldd meg az alábbi egyenlőségeket!

a) $3 \cdot \triangle = 10$ b) $\frac{1}{3} \cdot \triangle = 8$ c) $1,5 \cdot \triangle = 24$

d) $\frac{2}{3} \cdot \triangle = 4$ e) $\frac{3}{2} \cdot \triangle = 0,9$

10. Oldd meg az egyenlőségeket!

a) $\frac{2 \cdot \square - 2}{4} = -6$ b) $\square \cdot 1,1 = 7,5$ c) $0,2 \cdot \square - 2 = 8$

d) $\frac{-2 \cdot \square + 3}{5} = 8$ e) $7,5 : \square = 75$

11. Mi a közös ezekben a feladatokban? Válaszolj a feltett kérdésekre!

- Gondoltam egy számot, kivontam belőle 2-t, a különbséget megszoroztam 0,2-del, így 6-ot kaptam. Milyen számra gondoltam?
- A gyalogtúránk első napján a nagy zuhé miatt csak 2 km-t tettünk meg. A második napon a megmaradt út $\frac{2}{10}$ részét, 6 km-t. Hány km-es utat terveztünk?
- A 6. a osztály minden tagja az osztálykiránduláson 2 dl-es joghurtot kapott tízóráira. Ketten nem kértek, így összesen 6 liter joghurt fogyott el. Mennyi az osztály létszáma?



12. Áronék 5 napos kerékpártúrát terveztek a Duna mentén. Elhatározták, hogy az 1. napon, még frissen, megteszik az egész távolság felét. A 2. napon a maradék felét, a 3. napon a maradék felét, a 4. napon a maradék felét. Azt szerették volna, ha az utolsó napra az egész út tizedénél kevesebb maradna. Milyen hosszú volt az 5 napos út, ha a tervük sikerült?

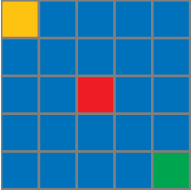


Szöveges feladatok megoldása, fordítás a matematika nyelvére

1. példa

- a) Ennek a táblának a négyzeteibe 0-tól 99-ig írtuk be a számokat az ábrán látható módon.

Egy-egy négyzetet sárgára, pirosra és zöldre festettünk. Számítsuk ki a rajtuk álló számok összegét!

- b)  A táblából kivágtunk egy 5×5 -ös négyzetet. Letöröltük a számokat, majd ezen is befestettünk három négyzetet az ábrán látható módon.

Eláruljuk, hogy a három szám összege 189.

Melyik számok álltak a befestett négyzeteken?

 = ?  = ?  = ?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Megoldás

- a) Válasz: A három szám összege $45 \cdot 3 = 135$

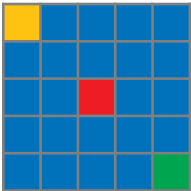
Indoklás: a **45** a **23**-nál 22-vel nagyobb, a **67**-nél 22-vel kisebb.

A három szám összege éppen a 45 háromszorosa, azaz 135.

- b) Válasz: A sárga négyzeten 41, a piros négyzeten 63, a zöld négyzeten 85 állt.

Indoklás:

A középső szám segítségével adjuk meg a kisebb és a nagyobb számot is!

$$\begin{array}{c} \text{yellow} = \text{red} - 22 \\ \text{green} = \text{red} + 22 \end{array}$$


Írjuk fel a szövegnek megfelelő egyenlőséget!

$$\begin{array}{rcl} \text{yellow} & + & \text{green} & + & \text{red} & = & 189 \\ \text{red} - 22 & + & \text{red} + 22 & + & \text{red} & = & 189 \end{array}$$

A bal oldalon csoportosítsuk a jeleket és a számokat!

$$\text{red} + \text{red} + \text{red} - 22 + 22 = 189$$

A műveletek elvégzése után így alakul az egyenlőség:

$$\text{red} \cdot 3 = 189$$

Osszuk el a 189-et 3-mal!

$$\text{red} = 63$$

A zöld négyzeten 22-vel nagyobb szám állt:

$$\text{green} = \text{red} + 22 = 85$$

A sárga négyzeten 22-vel kisebb szám állt:

$$\text{yellow} = \text{red} - 22 = 41$$

Ellenőrizzük a megoldást!

$41 + 63 + 85 = 189$. Helyes az eredményünk.

2. példa

A négy napig tartó karácsonyi „cipősdoboz” akcióban a mi osztályunk is részt vett. Az akció első napján, hétfőn még csak 5, ajándékokkal megtöltött dobozt hoztak a gyerekek. Kedden kétszer annyit hoztak, mint szerdán. Csütörtökön újabb 7 doboz érkezett. Így összesen 27 doboz gyűlt össze. Melyik napon hozták a gyerekek a legtöbb ajándékdobozt? Hány darabot?



Megoldás

Gyűjtsük össze a feladat megoldásához szükséges adatokat!

Jelöljük a szerdán hozott ajándékdobozok számát így: ■!

Hétfő: 5 doboz, kedd: ■ · 2 doboz, szerda: ■ doboz, csütörtök: 7 doboz.

Írjuk fel a feladat szövegének megfelelő egyenlőséget!

$$5 + \blacksquare \cdot 2 + \blacksquare + 7 = 27$$

Csoportosítsuk a számokat és a jeleket!

$$5 + 7 + \blacksquare \cdot 2 + \blacksquare = 27$$

Írjuk fel az egyenlőség bal oldalát egyszerűbb alakban!

$$12 + \blacksquare \cdot 3 = 27$$

Lebontogatással oldjuk meg az egyenlőséget!

$$\blacksquare = (27 - 12) : 3 = 15 : 3$$

$$\blacksquare = 5$$

Szerdán 5 dobozt, kedden 10 dobozt hoztak be a gyerekek.

Válasz: A gyerekek kedden hozták a legtöbb ajándékdobozt, 10 darabot.

Ellenőrzés: Vessük össze a szöveggel az eredményünket!

Hétfőn 5, kedden 10, szerdán 5, csütörtökön 7 doboz érkezett. Ezek összege éppen 27.

Más módon megoldva a feladatot ugyanerre az eredményre juthatunk.

Feladatok

1. Írj egyenlőségeket a megkezdett folyamatábrákról, és oldd is meg azokat! Megoldásodat ellenőrizd!

a) $\square \xrightarrow{+4} \square + 4 \xrightarrow{\cdot 2} \square \xrightarrow{-8} \square = 7$

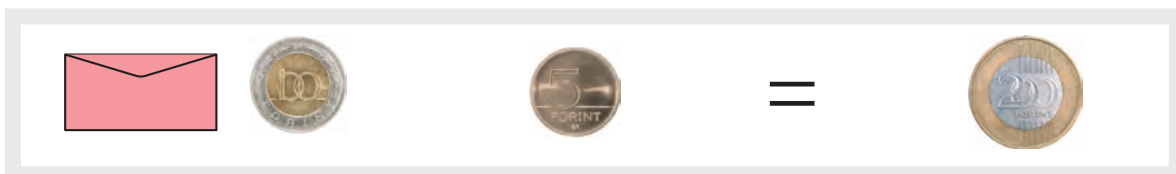
b) $\square \xrightarrow{\cdot 2} \square \cdot 2 \xrightarrow{+4} \square \xrightarrow{-8} \square = 7$

c) $\square \xrightarrow{\cdot 10} \square \xrightarrow{-5} \square \xrightarrow{:2} \square \xrightarrow{+10} \square = 10$

d) $\square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{-0,5} \square \xrightarrow{\cdot 4} \square \xrightarrow{:10} \square = \frac{2}{5}$

2. Mennyi pénz lehet egy borítékban, ha egy-egy feladatban az ugyanolyan színűekben ugyanannyi pénz van? Minden képről írd meg az egyenlőséget, és oldd is meg azt!

a)



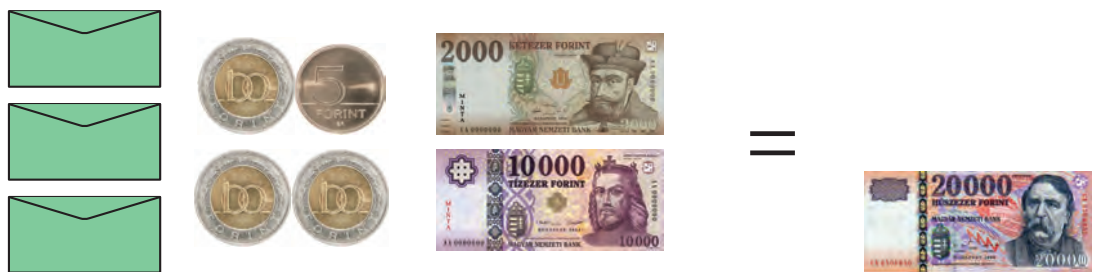
b)



c)



d)



3. Három egymást követő természetes szám összege 57. Melyek ezek a számok?

4. Oldd meg az egyenlőségeket!

a) $\blacksquare + \blacksquare + \blacksquare + 2 = 3,5$

b) $(9 - \blacksquare) \cdot 4 + 6 = 42$

c) $10 + 3 \cdot (\blacksquare + 4) = 46$

d) $(8 \cdot \blacksquare + 4) : 4 - 6 = 3$

e) $(2 \cdot \blacksquare - 1) \cdot 9 + 7 = 70$

f) $(4 + \blacksquare) : 3 - 1 = 2$

g) $\frac{7 + \blacksquare}{5} + 4 = 5$

h) $\left(\frac{4 \cdot \blacksquare - 2}{3} + 1 \right) \cdot 2 = 0,5$

5. Oldd meg az egyenlőségeket!

a) $5 \cdot \blacksquare + 1 = \frac{10}{3}$

b) $\blacksquare \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

c) $\blacksquare \cdot \frac{3}{4} = 15$

d) $\blacksquare : \frac{3}{4} = 9$

e) $\blacksquare : 0,2 = 1$

f) $\blacksquare : \frac{3}{2} = 0,5$

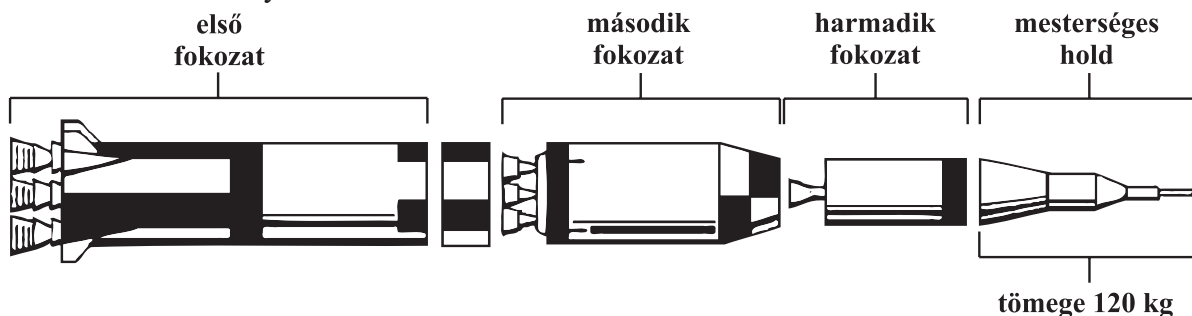
g) $\frac{\blacksquare}{2} + 5 = -8$

h) $\frac{\blacksquare + 5}{2} = -8$

i) $\frac{\blacksquare + 5}{2} - 3 = -8$

j) $\frac{2 \cdot \blacksquare + 5}{2} - 3 = -8$

6. A képen egy háromfokozatú hordozórakéta vázlatos rajzát látjuk. Ilyen rakétákkal szállítják a mesterséges holdakat is Föld körüli pályára. Mesterséges hold (műhold) segítségével jutnak el hozzánk bizonyos tévécsatornák adásai is.



A hordozórakéták a röppálya meghatározott részén leválnak, és visszahullanak a Föld felszínére.

- a) Az ábrán látható mesterséges hold tömege mindössze 120 kg. A második fokozat 9-szer, az első fokozat 50-szer nehezebb a harmadik fokozat tömegénél. A rakéta tömege 120 tonna.

Hány kg-osak a rakéta egyes fokozatai?

- b) Milyen céllal juttat az emberiség mesterséges holdakat az űrbe?



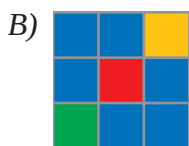
Mi a neve és mekkora a tömege az első magyar műholdnak?



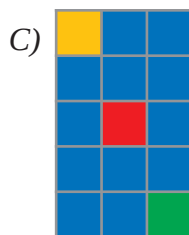
7. a) Az 1. példában szereplő táblából vágtuk ki ezeket a téglalapokat. Ezekről is letöröltük a számokat. Eláruljuk a sárga, a piros és a zöld mezőkön álló számok összegét. Találd ki, hogy mi állt rajtuk!



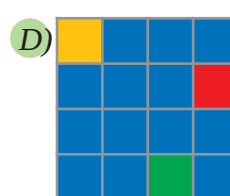
Összegük: 69



Összegük: 126



Összegük: 159



Összegük: 195

- b) **Páros munka**

Készítetek a párotoknak ezekhez hasonló feladatot! Beszéljétek meg egymással a megoldásokat!



8. Gondoltam egy természetes számra. Ha a végéhez hozzáírok egy nullát, és ezt hozzáadom a gondolt számhoz, 1551-et kapok. Melyik számra gondoltam?



9. Mekkora a háromszög szögei, ha a legnagyobb 8° -kal nagyobb a legkisebbnél, és 7° -kal nagyobb a középsőnél?



10. a) Gondolj egy számra, adj hozzá háromszor annyit, és még 10-et! Dobd a felét és még 5-öt a Dunába! A gondolt szám kétszeresét kaptad, ugye? Miért?

Te is írd hasonló feladványt!

- b) Gondolj egy számot, adj hozzá 3-at! A kapott számot szorozd meg 4-gyel, az eredményből vond ki a gondolt szám kétszeresét és még 6-ot! Amit kaptál, felezd meg, és vond ki belőle a gondolt számot! Ha nem mondd meg, hogy mire gondoltál, akkor is meg tudom mondani, hogy mit kaptál eredményül. Hogyan?

Páros munka

Készítsetek a párotoknak ezekhez hasonló feladatot! Cseréljétek ki a párotokkal, és oldjátok meg egymás feladatát! Beszéljétek meg a megoldást!

11. Tamás bácsi ezt a trükköt találta ki: Gondolj egy számot! Én adok még egyszer annyit, és még 6-ot. A felét és még 1-et dobod a Dunába! Ha megmondod, mit kaptál eredményül, én megmondom, hogy milyen számra gondoltál.

Hogyan tudja Tamás bácsi kitalálni, milyen számra gondoltak a gyerekek?

12. Egy gúnyolódó férfi szamarakat látott legelni a réten. Így szólt hozzájuk:

– Jó napot, száz számár!

Az egyik számár azonban így válaszolt:

– Mi már régen nem vagyunk százan. De ha még kétszer annyian volnánk, mint amennyien vagyunk, és Te lennél közöttünk a vezérszámár, éppen 100-an lennénk.

Hányan voltak a szamarak?



13.



Az idei horgásztáborban Kristóf az első és a második nap ugyanannyi halat fogott, a harmadik napon 8-at. Az utolsó napon az első három napi fogás felénél 1-gyel kevesebbet, éppen 3 pontyocskát.

- a) Melyik egyenlőség nem írja le helyesen a feladatot, ha az első napon fogott halak számát ☞ -al jelöltük?

A) $\frac{\text{☞} + \text{☞} + 8}{2} - 1 = 3$ B) $2 \cdot \text{☞} + 8 : 2 - 1 = 3$ C) $(2 \cdot \text{☞} + 8) : 2 - 1 = 3$

- b) Mennyi halat fogott Kristóf az első két napon?

14.

Ádám, Bori és Gergő egyenként mérlegre álltak. Gergő Ádámnál 3 kg-mal könnyebb volt, Borinál viszont 3 kg-mal nehezebb. Ha mindhárman ráálltak a mérlegre, egy kg híján 100 kg-ot nyomtak.

Hány kg a három gyerek külön-külön?



15. A mi városi kórusunkban 2-vel több tenor van, mint basszus. A szoprán és az alt éppen háromszor annyi sorban fér el, mint a két férfiszólam. A kórus egy 50 fős busszal utazik a fellépésekre. Ha a karvezető és a felesége is velük utazik, akkor éppen tele van a busz.



Melyik egyenlőség nem írja le helyesen a feladatot? Hány tagja van a tenor szólamnak?

A) $(\blacksquare + \blacksquare + 2) + (\blacksquare + \blacksquare + 2) \cdot 3 + 2 = 50$

B) $\blacksquare + \blacksquare + 2 + \blacksquare + \blacksquare + 2 \cdot 3 + 2 = 50$

C) $2 \cdot \blacksquare + 2 + (2 \cdot \blacksquare + 2) \cdot 3 = 48$

D) $8 \cdot \blacksquare + 8 = 48$



16.



Egy piaci árus reggel 8-tól 10-ig eladta dinnyéinek a felét és még egy dinnyét. Tíz órától délig a maradék felét és még egy dinnyét. Összesen hat dinnyéje maradt.

Hány dinnyéje volt eredetileg?

17. Egy négyfős család négynapos evezős túrát tervezett a Tiszán. Az első három nap alatt összesen 81 km-t tettek meg. Hétfőn 1 kilométerrel többet tettek meg, mint kedden. Kedden feleannyi utat tettek meg, mint szerdán. Így a teljes út harmada jutott csütörtökre.

- Melyik napon tették meg a legkisebb távolságot?
- Hány kilométert tettek meg az egyes napokon?
- Hány kilométert tettek meg a négy nap alatt?



„Zöld” szöveges feladatok

Mottó: „Ezt a világot nem őseinktől örököltük, hanem utódainktól kaptuk kölcsön.”
(Indián mondás)

Példa

Az emberi test több mint felét víz alkotja, azonban a szervezet nem képes tárolni a folyadékot. Ahhoz, hogy testünk megfelelően működjön, folyamatosan gondoskodnunk kell a víz pótlásáról, amit a szervezet kiizzad, elpárologtat és kiürít.

A megadott mennyiségek az ételekkel bevitt folyadékmennyiségen felül értendők. Például a levessel a szervezetbe juttatott folyadék nem számít bele az értékekbe.

Naponta ennyi vizet kellene innia a ti korosztályotokhoz tartozó gyerekeknek:

- 9–13 éves lányok: 1,3–1,5 liter
- 9–13 éves fiúk: 1,5–1,7 liter

a) Zsófi egy 12 éves lány. Ha mindennap 1,5 liter vizet inná, akkor egy 365 napos évben hány liter vizet fogyasztana el?

b) Az olimpiai játékok és a vizes világbajnokságok egyik versenyszáma a szinkronúszás. A verseny lebonyolítására csak olyan medencék alkalmasak, amelyek szélessége 250 dm, hosszúsága 500 dm, vízmélysége 30 dm. Mennyi víz kell egy ilyen medence feltöltéséhez?

c) Körülbelül hány évi ivóvízfogyasztását fedezné Zsófinak a medence egyszeri feltöltésére felhasznált víz mennyisége? Tippelj és számolj!

A) 1 év B) 15 év C) 100 év D) 6850 év E) 1000 év



Megoldás

a) Válasz: 547,5 liter vizet fogyasztana el Zsófi 1 év alatt.

Számítás: 365 nappal számolva $1,5 \text{ liter} \cdot 365 = 547,5 \text{ liter}$.

b) Válasz: 3 750 000 liter víz kell a medence feltöltéséhez.

Számítás: $V = 250 \cdot 500 \cdot 30 \text{ dm}^3 = 3\,750\,000 \text{ liter}$.

c) Válasz: Körülbelül 6850 évig fedezné Zsófi napi ivóvízfogyasztását.

Számítás: $3\,750\,000 \text{ liter} : 547,5 \text{ liter} \approx 6850$.

Feladatok

1. Sajnos egyre több műanyag kerül a környezetbe. A világ megannyi pontján szerveződnek hulladékmentesítő akciók, így hazánkban is. A PET Kupa egy környezetvédelmi civil szervezet, amely 2013 óta épít hulladékgyűjtő hajókat – műanyag hulladékból.

Az „Építsünk Szemétevé Szeméthajót” mozgalom keretében elsősorban a PET-palackoktól mentesítik a Tiszát és árterét a pillepalackokból épített hajóik segítségével. Így írnak magukról: „PET Kalóznak hívjuk magunkat, mert harcban állunk. Annak a hatalmas PET-palack-áradatnak üzentünk hadat, amely évről évre elárasztja a Tisza folyót.”

2019 júliusában 1,5 tonna hulladéktól szabadították meg a folyót. Szeptember 27-én ennek több mint $\frac{1}{5}$ részével nagyobb mennyiséget gyűjtöttek össze.

- a) Legalább hány tonna hulladékot gyűjtöttek össze a két hónap alatt?
 b) Egy félliteres pillepalack tömege 10 gramm. Hány ilyen palack együttes tömege 1,5 tonna?
 A) 1500 db B) 15 000 db C) 150 000 db



2. Marcus Eriksen amerikai veterán katona már korábban igyekezett felhívni a figyelmet a folyami műanyagszennyezésre. 2003-ban épített egy pillepalack hajót. A Palackrakétának keresztelt hajójával az észak-amerikai Itasca-tótól indulva a Mexikói-öbölbe jutott el. Öt hónap alatt csorgott le a Mississippi folyón a 232 db 2 literes palackból épített tutaján. 1 óra alatt átlagosan 0,9 km-t tett meg.



Körülbelül mekkora utat tett meg pillehajójával az Itasca-tótól a Mexikói-öbölbe, ha 30 napos hónapokkal számolunk? Becsülj és számolj!

- A) ≈ 6722 km B) ≈ 2570 km C) ≈ 3240 km D) $\approx 10\,500$ km
 (A képen maláj gyerekek láthatók pillepalackból épített csónakban.)



Nézz utána! Melyik a Föld leghosszabb folyója?

3. Észak-Amerikában a távolságot mérföldben adják meg: $1\text{ km} = 0,62$ mérföld.

- a) Hány km 1 mérföld? Melyik válasz helyes, ha két tizedesjegy pontossággal adtuk meg a távolságokat?
 A) 0,84 km B) 1,25 km C) 2,14 km D) 1,61 km
 b) Egészekre kerekítve hány mérföld 3218 km?

4. Guatemalában eddig már 71 iskolát építettek műanyag-hulladékból. A képen egy thaiföldi, színes használt pillepalackokból épült pihenőpark látható. Magyarországon Mezőberényben épült fel egy PET-falu. Robert Bezeau kanadai vállalkozó egy panamai szigeten épített fel PET-palackokból egy falut és egy várat. A falu egyik 100 m²-es házának építése során körülbelül 14 ezer műanyag palackot használtak fel. A faluban évente több mint 100 ezer látogató fordul meg, átlagosan 5 napot töltve ott. Ez évi 500 ezer látogatónap.



- a) Ha minden látogató mindössze két műanyag palackos italt fogyaszt naponta, akkor évente hány műanyagpalack-hulladék keletkezik a kis szigeten?
- b) A látogatók műanyagpalack-hulladékából hány 100 m²-es házat tudnának felépíteni?

5. „Zöld” hír

A szakemberek szerint a műanyag bankjegyek használata szinte minden szempontból kedvezőbb, mint a papír- vagy gyapotalapú pénzek használata. Biztonságosabbak, tartósabbak és tisztábbak is, ráadásul a gyártásuk is kevésbé terheli a környezetet.

Előnyei közé sorolhatók még:

- a nadrárgzsebben felejtett pénz nem mállik szét apró darabokra 90 °C-os mosás közben sem;
- 120 fok hőmérsékletig tartja az alakját, nem formátlanodik el;
- nem lehet eltépni.

Először Ausztrália cserélte le a fizetőeszközét műanyagra 1988-ban. Az utóbbi években sok európai ország is fokozatosan hozzájárult a cseréhez, többek között az Egyesült Királyság is.

- a) A műanyag bankjegyek előállításához kevesebb energia és jelentősen kevesebb víz szükséges. 1 kg műanyag bankjegyhez 70 liter víz, az ugyanolyan címletű 1 kg papírpénzhez 1000 liter-nél is több víz kell.

Becsüld meg, körülbelül hányszor több vizet használnak fel a hagyományos papír- vagy gyapotalapú pénzek gyártásához!

A) 10-szer annyit

B) 12-szer annyit

C) 14-szer annyit

- b) Az Egyesült Királyságban a hivatalos fizetőeszköz a font. A font jele: £. A képen műanyag angol bankjegyek láthatók.

A gyapot- vagy papíralapú 5 £ és 10 £ címletű papírpénzek átlagosan 24 hónapig voltak használhatók, forgalomképesek. Az új, műanyag alapú bankjegyek élettartama várhatóan 5,5 év.

Számítsd ki, hányszorosa az új bankjegyek élettartama a hagyományosnak!



- c) Tippeld meg, majd nézz utána, hogy a felsorolt tulajdonságok közül melyikkel rendelkezik az új, műanyag alapú bankjegy!

A) marhafaggyút is tartalmaz

B) ki lehet vasalni

C) csúszik

D) nem éghető

6.



A pápa testőrségének számító Svájci Gárda hivatalos, ünnepi egyenruhájának rendkívül fontos eleme a sárga-kék csíkos ruházat mellett a piros tollal díszített sisak. A sisakok 2018 elejéig acéllemezből készültek. Két oldalukon II. Gyula pápa családjának jelképe, a tölgyfa volt látható.

A pápát védő Svájci Gárda szakított a több évszázados hagyománnyal, és a korábban fémből készült sisakját 3D nyomtatottra cserélte. A mintázatot egy eredeti 16. századi fémsisakról vették le. Az új eljárással készült PVC (kemény műanyag) sisakok tömege felére csökkent, kinézetre viszont megkülönböztethetetlenek. A sisak ára majdnem 300 000 Ft, de még így is csak feleannyiba kerül, mint a fémből készült társa. Az igazi előny a gyártás sebességében mérhető. Amíg egy fémsisakot 4,5 nap alatt lehetett elkészíteni, addig az új eljárással 16 óra elegendő egy műanyag fejfedő előállításához.

- Mennyibe kerül egy fémsisak?
- Hány dkg az új sisak tömege, ha a régi tömege 1,95 kg?
- Hányszorosa a fémből készült sisak előállításának ideje a műanyag sisakénak?

7.

Már kapható a magyar fejlesztésű, úgynevezett szolárcserép. Nagy sikere van itthon és külföldön is.

- A szakemberek szerint egy nagyobb konyhai hűtőgép üzemeltetése 9 tetőcseréppel megoldható.

Mennyibe került a hűtőszekrény folyamatos üzemeltetéséhez szükséges 9 db cserép 2020-ban, ha 1 db cserép ára 19 500 Ft volt?

- Tegyük fel, hogy egy átlagos család évi villanyszámlája 180 000 Ft, és a napelemes rendszer költsége 1 800 000 Ft. Ha a pénzromlást nem vesszük figyelembe, hány éven belül térülhet meg a napelemes rendszer?

- Ha ilyen cseréppel borítják a családok háztetőik egy részét, akkor a napelemekkel biztosítható a fenntartáshoz szükséges teljes energiamennyiség. Egy átlagos családi ház esetén a tető területe 200 m². Ennek az $\frac{1}{5}$ részét kell szolárcseréppel fedni ahhoz, hogy a családok teljes energiaszükséglete biztosítható legyen. Egy ilyen cserép fényt érzékelő felületének mérete 33 cm × 42 cm. Száz darabra kerekítve hány cserép kell a szükséges felület lefedéséhez?

A) 100 db

B) 200 db

C) 300 db

D) 400 db



Tudtad-e?



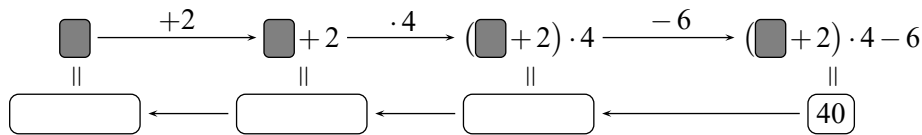
A hagyományos mongol jurták lakói is élnek a napelemek adta lehetőségekkel.



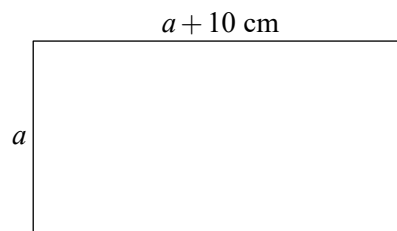
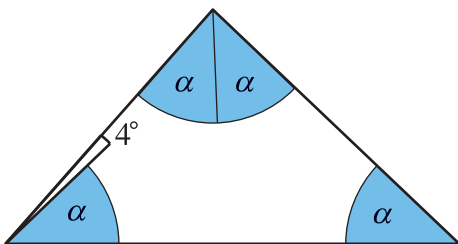
A gazdik és kutyáik nagy örömeire már kapható napelemmel fűthető kutyaház is.

Tudáspróba

1. A folyamatábra segítségével oldd meg a $(\blacksquare + 2) \cdot 4 - 6 = 40$ nyitott mondatot!



2. A feladatokról írd egyenlőségeket, és oldd is meg azokat! Az ellenőrzésről ne feledkezz meg!
- Gondoltam egy számot, hozzáadtam 4-et, a kapott szám kétszeresét vettem, így 20-at kaptam eredményül. Milyen számra gondoltam?
 - Gondoltam egy számot. Az ennél 5-tel kisebb szám 2-szereséhez 3-at adva 20-at kaptam eredményül. Milyen számra gondoltam?
 - Egy szám kétszereséhez a háromszorosát hozzáadva 3-mal kisebb számot kapunk, mint 12. Melyik ez a szám?
3. Oldd meg az egyenlőségeket! A megoldásod lépéseit is írd le! Ellenőrizd!
- $\blacksquare \cdot 5 + 4 = 27$
 - $\frac{\blacksquare - 4}{8} + 5 = 10$
 - $(\blacksquare + 3) : 6 + 8 = 20$
4. a) Mekkora a háromszög szögei? b) Mekkora a téglalap oldalai, ha a kerülete 46 cm?



- Mekkora a háromszög szögei, ha a legnagyobb 40° -kal nagyobb a középsőnél, és kétszerese a legkisebbnek?
 - Mekkora a téglalap oldalai, ha az egyik oldala a másik oldal kétszeresénél 3 cm-rel kisebb, és a kerülete 12,6 cm?
5. Marci nyáron evezőtáborba készült. A részvételi díj $\frac{1}{5}$ részét a nagyszüleitől, a $\frac{2}{3}$ részét a szüleitől kapta. A fennmaradó 7600 Ft-ot a zsebpénzéből fizette ki.
- A részvételi díj mekkora részét fizette ki Marci a zsebpénzéből?
 - Hány forint volt a részvételi díj?
 - Hány forintot kapott a nagyszüleitől?
 - Hány forintot kapott a szüleitől?

Arányosság, százalék, statisztika

1. mérés párban

Mérjétek meg párokot pulzusszámát 20 másodpercig a mobiltelefonokban működő stopperóra segítségével! A csukló hüvelykujj felé eső részén kell kitapintani az itt futó ütőeret, és annak ütésszámát kell számolni.

A pulzus szó jelentése: az ütőér ütemes kitágulása és összehúzódása a szív működésének hatására.

Feltételezve, hogy társatok pulzusa egyenletes, számítsátok ki a táblázat 2. és 3. oszlopában kért adatokat! (A táblázatot a füzetbe másolva töltsétek ki!)



Nézzetek utána az interneten, hogy mennyi egy egészséges ember nyugalmi pulzusszáma percenként, és mennyi egy aktív sportolóé!

	A tanuló pulzusszáma	B tanuló pulzusszáma
20 másodperc alatt		
60 másodperc alatt		
150 másodperc alatt		

2. mérés párban

- a) Mérjétek meg mindketten saját araszotokkal a padotok hosszát! Hasonlítsátok össze a mért adatokat, és számítsátok ki azok átlagát! (Átlag: a két hosszúság összegének fele.)

Arasz: kinyújtott hüvelykujjunk hegyétől a kinyújtott kisujjunk hegyéig terjedő távolság.

- b) Ha a tanári asztal másfélszer hosszabb a padotoknál, akkor számoljátok ki, az hány „átlagarasz” lehet! Indokoljátok meg az elvégzett műveletet! A kapott adatokkal töltsétek ki a táblázatot a füzetetekben!



A pad hossza az A tanuló araszával mérve	A pad hossza a B tanuló araszával mérve	A és B tanuló mérésének átlaga	A tanári asztal hossza
		(átlagarasz)	(átlagarasz)

Az arányosság fogalma szinte egyidős az emberi kultúrával, tartalma azonban folyamatosan változik.

Az ókori Görögországban arányosnak mondták azt, ami egyenletes, méltányos, mértékletes volt. **Arisztotelész** (i. e. 384–i. e. 322) és **Platón** (i. e. 427–i. e. 347) azt tanította, hogy az arányosság maga a szépség, az erkölcsi jószág. Az arányok helyes megválasztása jelenti a test és a lélek teljes harmóniáját.

A középkorban élt matematikus és művész, **Luca Pacioli** (ejtsd: lúka pacsóli; 1445–1514) *Az isteni arány* című munkájában azt vallja, hogy az arány nem embertől való.

Mit jelent az arányosság a matematikában?

1. példa

Az iskolai hagyományörző szakkörön a gyerekek tojásokat festenek. 18 db tojásból Réka 3-at pirosra festett, Juli kétszer annyit kékre. A maradék tojásokat Zsófi sárgára festette.

A tojások hányadrészét festette kékre Juli, és hányadrészét sárgára Zsófi?

Hányszor több festékre volt szüksége Julinak, és hányszor többre Zsófinak, mint Rékának?



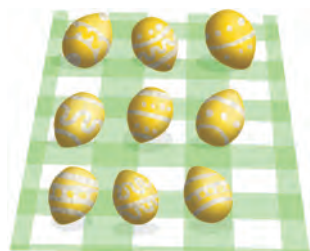
Megoldás



Réka 3 db festett tojása a 18 db tojás $\frac{1}{6}$ része.



Juli 3 db $\cdot 2 = 6$ db tojást festett kékre. A 6 db tojás az összes tojás $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ része.



Zsófinak $18 - (3 + 6) = 9$ tojás marad. Zsófi az összes tojás $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ részét festette sárgára.

Juli az összes tojás $\frac{1}{3}$ részét, Zsófi pedig az $\frac{1}{2}$ részét festette be.

Juli **kétszer** annyi tojást festett, mint Réka, neki **kétszer** annyi festékre volt szüksége.

Zsófi **háromszor** annyi tojást festett, mint Réka, így neki **háromszor** annyi festékre volt szüksége, mint Rékának.

2. példa

Panni az orosz matrjoska babákat rakja nagyság szerint sorba. A legkisebb baba 2 cm magas. Azt követően mindegyik 2 cm-rel magasabb az azt megelőzőnél. Az utolsó a sorban 12 cm-es.

a) Hány baba áll a sorban, és milyen magasak?

b) Állapítsuk meg, hogy a sorban

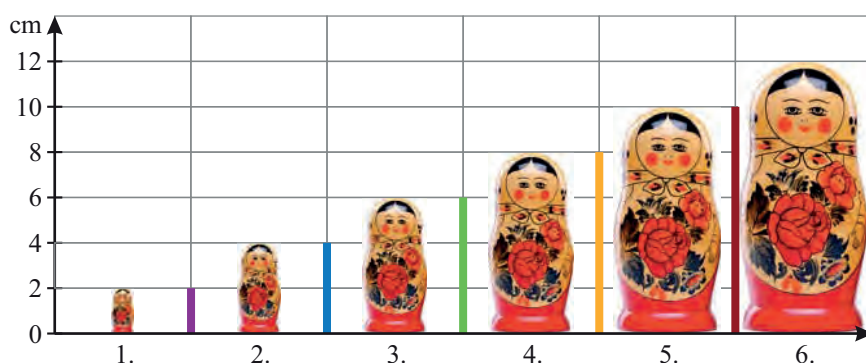
1. a harmadik, a negyedik és az utolsó baba magassága hányszorosa a legkisebb baba magasságának,
2. az első, a második és a harmadik baba magassága hányadrésze a legnagyobb baba magasságának,
3. az ötödik baba magassága hányszorosa a második baba magasságának,
4. a második baba magassága hányadrésze az ötödik baba magasságának!



Megoldás

a) A babák magassága rendre: 2 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm, 10 cm, 12 cm.

Összesen 6 baba van a sorban.



b) 1. A 2 cm-es magasságnak

- háromszorosa a harmadik baba 6 cm-es magassága,
- négyszerese a negyedik baba 8 cm-es magassága,
- hatszorosa a hatodik baba 12 cm-es magassága.

2. A 12 cm-es magasságnak

- az első baba 2 cm-es magassága az $\frac{1}{6}$ része,
- a második baba 4 cm-es magassága az $\frac{1}{3}$ része,
- a harmadik baba 6 cm-es magassága az $\frac{1}{2}$ része.

3–4. A második és az ötödik baba magasságának összehasonlítása:

$$\left. \begin{array}{l} 2. \text{ baba } 4 \text{ cm} \\ 1. \text{ baba } 2 \text{ cm} \\ 5. \text{ baba } 10 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} : 2 \\ \\ \cdot 5 \end{array}$$

Az 5. baba magassága:

$$(4 \text{ cm} : 2) \cdot 5 = \frac{4 \text{ cm}}{2} \cdot 5 = 4 \text{ cm} \cdot \frac{5}{2} = 10 \text{ cm}$$

Az 5. baba mérete $\frac{5}{2}$ -e a 2. méretének.

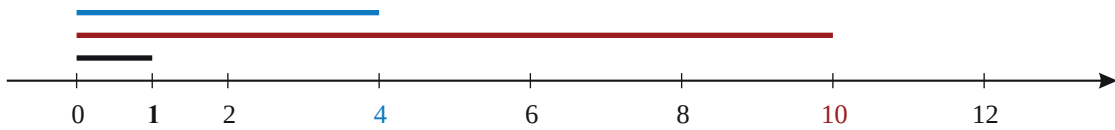
$$\left. \begin{array}{l} 5. \text{ baba } 10 \text{ cm} \\ 1. \text{ baba } 2 \text{ cm} \\ 2. \text{ baba } 4 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} : 5 \\ \\ \cdot 2 \end{array}$$

A 2. baba magassága:

$$(10 \text{ cm} : 5) \cdot 2 = \frac{10 \text{ cm}}{5} \cdot 2 = 10 \text{ cm} \cdot \frac{2}{5} = 4 \text{ cm}$$

A 2. baba mérete $\frac{2}{5}$ -e az 5. méretének.

A számegyenesen felvett egység segítségével azt is láthatjuk, hogy 10 a 4-nek $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ része, és 4 a 10-nek $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ része.



3. példa

A 6. a osztályban a törtekkel való műveletekből két dolgozatot íratott a matematikatanár.



- Viki az I. dolgozat, a „kisfelmérő” 21 pontjából 3 pontot veszített. A II. dolgozat, a „nagyfelmérő” összpontszáma 60 pont volt. Erre is 3 ponttal kevesebbet kapott. Melyik dolgozata sikerült jobban?
- Hány pontot kaphattak a dolgozatukra azok a tanulók, akiknek ugyanúgy sikerült mind a kettő, vagyis az elérhető pontszámnak ugyanannyiadrészét kapták mindkét dolgozatukra?

Megoldás

a) Viki dolgozatainak pontszáma az alábbi táblázat szerint alakult:

Dolgozat	Összes pont	Levont pont	Kapott pont	Kapott és összes pont hányadosa
I.	21	3	18	$\frac{18}{21} = \frac{6}{7}$
II.	60	3	57	$\frac{57}{60} = \frac{19}{20}$

Viki az I. dolgozatnak a $\frac{6}{7}$ részét, a II. dolgozatnak a $\frac{19}{20}$ részét tudta jól megoldani. Az a dolgozat a jobb, amelyik rész nagyobb: $\frac{19}{20} = \frac{133}{140}$, $\frac{6}{7} = \frac{120}{140}$, tehát $\frac{19}{20} > \frac{6}{7}$, ezért a II. (nagyfelmérő) sikerült jobban.

b) A két dolgozat akkor sikerült volna ugyanúgy, ha mindkettőnek ugyanannyiadrésze jó. Mivel 60 és 21 legnagyobb közös osztója 3, és a dolgozatok pontszáma csak egész szám lehet, ezért a táblázatban felsorolt dolgozatok sikerültek egyformán.

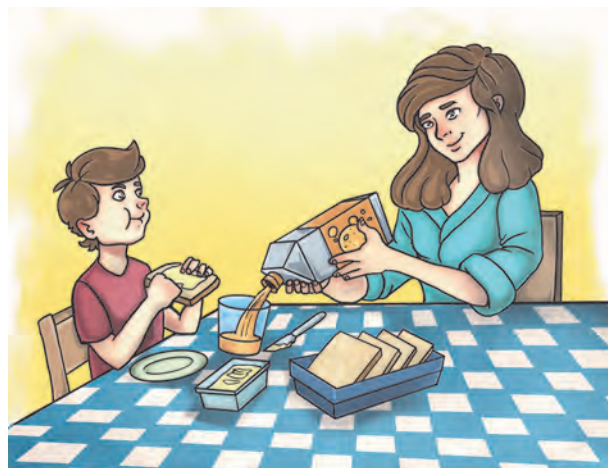
	$\frac{3}{3}$ rész jó	$\frac{2}{3}$ rész jó	$\frac{1}{3}$ rész jó	$\frac{0}{3}$ rész jó
I. dolgozat	21 pont	14 pont	7 pont	0 pont
II. dolgozat	60 pont	40 pont	20 pont	0 pont

Feladatok

1. a) 5 kg alma 2200 Ft. Mennyibe kerül ebből az almából 2 kg?
b) 15 kg burgonya ára 3450 Ft. Mennyibe kerül 4 kg ugyanilyen burgonya?
c) 2 csomag narancs 1100 Ft. Mennyi az ára 7 ilyen csomag narancsnak?
2. Jocó a könyvespolcát takarítja. Nagyon lassan halad a munkával. Egy könyvről 2 perc alatt törli le a port. Hány óra alatt végez 124 könyvvel, ha egyenletesen ilyen lassú tempóban dolgozik?
3. 15 db egyforma ceruzát veszünk 1725 Ft-ért. Számítsd ki, mennyit fizetünk ugyanebből a ceruzából 7 darabért!
4. 84 m² falfelületre 5,6 kg festéket vásároltunk. Hány kg festék szükséges 90 m² felületre?
5. Egy recept szerint 250 ml banánturmixhoz 200 g banán szükséges.
a) Mennyi banán szükséges 600 ml turmixhoz?
b) Hány ml turmixot készíthetünk 700 g banánból?
6. Egy személyautó 100 km megtétele közben átlagosan 8,6 l benzint fogyaszt. Mennyi az autó fogyasztása, ha Budapestről Debrecenbe utazunk vele? (A Budapest–Debrecen távolság 226 km.)
7. Egy valódi narancslé dobozán a táblázatban látható adatokat olvashatjuk. Mennyi energiát, fehérjét, szénhidrátot és zsírt tartalmaz egy 2,5 dl-es pohárnyi narancslé?

Tápérték	100 ml termékben
Energia	185 kJ*
Fehérje	0,7 g
Szénhidrát	9,0 g
Zsír	0,2 g

* kilojoule (kJ): energia-mértékegység.



„Az alap anyagcsere azt a legkisebb energiatermelést jelenti, amely az ébren lévő ember életfolyamatainak fenntartásához szükséges. Ebbe beletartozik a légzés, a szívizom mozgása, a bélrendszer működése, a gondolkodás, a testhő termelése. Ennyi kalória szükséges ahhoz, hogy egy ágyon fekvő tökéletesen mozdulatlanul életben maradjunk. Meghatározása éber, szellemi és testi nyugalmi állapotban, 12–24 órás éhezést követően, gyógyszerhatástól mentesen, semleges külső hőmérsékleten történik.” (Egészségünkör)



További információkat találsz erről az interneten. Nézz utána!

8. Egy 15 m hosszú, 10 m széles és 1,5 m mély fürdőmedencébe egyenletes erősséggel folyik a víz, mégpedig 3 perc alatt 20 hl. Mennyi idő alatt telik meg a medence?
9. Egy személyautó 3 m³ kipufogógázával 4,5 mg korom kerül a levegőbe. Hány mg korommal szennyezi a levegőt 10 m³ kipufogógáz?



- 10.** A túrógombóc elkészítéséhez 4 személy részére a következő alapanyagok szükségesek: 50 dkg tehéntúró, 4 egész tojás, 2 dl búzadara, egy csipet só, 2 evőkanál olaj, 10 dkg zsemlemorzsa, 10 dkg porcukor, 2 dl tejföl.

Határozd meg az egyes alapanyagok mennyiségét, ha ugyanezt a gombócot 6 személyre szeretnéd elkészíteni!



- 11.** Egy 200 m-es síkfutóversenyen öt fiú állt rajthoz. Amikor felharsant a társak buzdítása, Péter már megtette a táv $\frac{7}{10}$ -ét, Zoli a felét, Zsolt a $\frac{3}{4}$ -ét, Laci az $\frac{5}{8}$ -át és Feri a $\frac{3}{5}$ -ét.

- Hány méter volt még hátra a fiúknak?
- Milyen sorrendben érkeztek a célba a fiúk, ha a verseny végéig ez a sorrend nem változott?
- Ha mindegyikük gratulált az összes előtte befutónak, akkor ki hány társának gratulált?

- 12.** Lili két polcon helyezte el a könyveit. A felső polcra rakta könyveinek $\frac{11}{24}$ részét, az alsóra a többit. Hány könyve volt Lilinek, ha így az egyik polcra 6-tal több könyv került, mint a másikra?

Egyenes arányosság

Ha vásárolni megyünk egy üzletbe vagy a piacra, gyakran használjuk az arányosság egyik fajtáját, az **egyes arányosságot**.

1. példa

Ha 1 liter tejet veszünk, az 210 Ft-ba kerül, ha kétszer, háromszor, ... annyi veszünk, akkor az kétszer, háromszor, ... annyi-ba kerül.

A tej mennyisége **egyenesen arányos** az árával.

A tej mennyisége (l)	1	2	3	4
A tej ára (Ft)	210	420	630	840

A táblázatban szereplő számpárok:

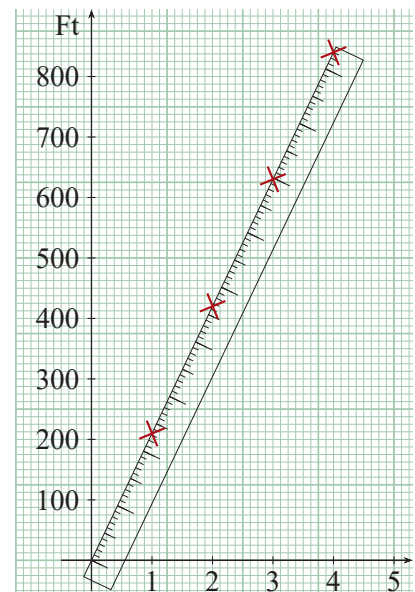
(1; 210), (2; 420), (3; 630), (4; 840).

Ezeket ábrázoljuk koordináta-rendszerben.

$$\frac{\text{A tej ára}}{\text{A tej mennyisége}} = \frac{840}{4} = \frac{630}{3} = \frac{420}{2} = \frac{210}{1} = 210$$

A megfelelő értékek hányadosa minden esetben ugyanannyi: éppen az 1 l tej árával egyenlő.

A megjelölt pontok az origóból kiinduló félegyenesen vannak.



A feladat tapasztalatait általánosítjuk:

Ha két mennyiség olyan, hogy ahányszorosára nő az egyik, ugyanannyiszorosára nő a másik, vagy ahányadrészt csökken az egyik, ugyanannyiadrészt csökken a másik, akkor azok **egyenesen arányosak**. Az egyenes arányosság esetén a nullától különböző, összetartozó értékek **hányadosa állandó**.

2. példa

Karesz délután edzésre megy, és sietségében olyan hanyagul zárja el a csapot, hogy abból percenként 0,3 dl víz csöpög ki. Anyuka este elmondja fiának, hogy az alatt a másfél óra alatt, amíg senki nem volt otthon, majdnem 3 liter víz kifolyt. Mivel Karesz ezt nem akarja elhinni, ezért anyukával méréseket végeznek.



A 10 percenként kifolyt víz mennyiségéről az alábbi jegyzőkönyvet készítik:

Az eltelt idő (perc)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
A kifolyt víz mennyisége (dl)	3	6	9	12	15	18	21	24	27

Tehát 90 perc = 1,5 óra alatt 27 dl = 2,7 l víz folyik el.

Vegyük észre, hogy ha kétszer, háromszor, négyszer, ... több idő telik el, akkor kétszer, háromszor, négyszer, ... több a kifolyt víz mennyisége.

A megfelelő értékek hányadosa:

$$\frac{\text{a kifolyt víz mennyisége}}{\text{az eltelt idő}} = \frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{9}{30} = \dots = \frac{27}{90} = 0,3 \left(\frac{\text{dl}}{\text{perc}} \right)$$

mindig ugyanannyi. Ez az állandó érték az egységnyi idő alatt kifolyt víz mennyiségét adja.

3. példa

Panni szülei négyzet alakú konyhaasztalt vásárolnak, amelyre Panni készíti el a terítőt. Határozzuk meg, hogy az asztal méretétől függően mennyi anyagra van szüksége! A terítőt körbe akarja szegni csipkével, ezért adjuk meg azt is, hogy a csipkéből hány métert kell vennie!

Megoldás

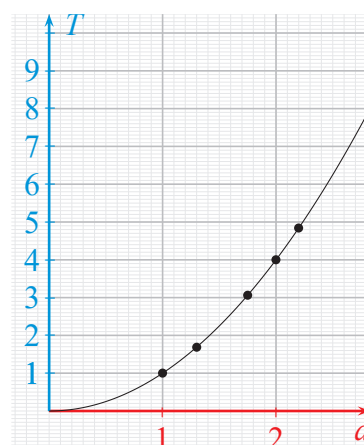
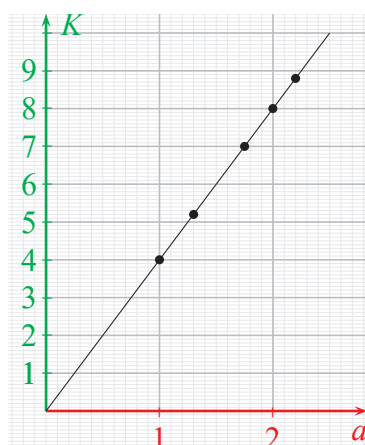
Megállapítjuk, hogy a négyzet alakú asztalterítőhöz szükséges anyag mennyiségét a négyzet területének kiszámításával, a csipke hosszát a négyzet kerületének kiszámításával adhatjuk meg. Mindkét esetben a négyzet oldalának hosszára van szükségünk.

Az a oldalú négyzet kerülete (K) az oldal hosszúságának 4-szerese, területe (T) az oldalhosszúság önmagával vett szorzata.



Készítsünk értéktáblázatot!

a (m)	K (m)	T (m ²)
1	4	1
1,3	5,2	1,69
1,75	7	$\approx 3,06$
2	8	4
2,2	8,8	4,84



Az **első** esetben, ha valahányszorosára változik a négyzet oldala, ugyanannyiszorosára változik a négyzet területe. Tehát ez **egyenés arányosság**. A négyzet oldala bármilyen pozitív szám lehet, és megállapodunk abban, hogy a nullához nulla tartozik, ezért a grafikon egy origóból kiinduló félegyenes.

A **második** esetben, ha a négyzet oldalának hossza nő, akkor a terület is növekszik, de például kétszer olyan hosszú oldalú négyzet területe nem kétszerese az eredetinek, ezért ez **nem egyenés arányosság**. Az összefüggéshez tartozó grafikon egy görbe vonal.

Feladatok

1. Egy áruházban 4 pár sportzokni 1800 Ft-ba került. Mennyit kell fizetni 1; 2; 3; 5; 6; 7; 8 pár ilyen zokniért?

2. Egy kerékpáros egyenletesen haladva 1 óra alatt 18 km-t tesz meg.

Hány km utat tesz meg 1; 2; 3; 4; 5; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{9}{2}$; 1,5 óra alatt?

A kapott értékpároknak megfelelő pontokat ábrázold a koordináta-rendszerben! Hogyan helyezkednek el ezek a pontok?



Eszter 158 db fényképet készített az osztálykiránduláson. Átmásolta azokat a számítógépére, majd feltöltötte egy felhőalapú tárhelyre, hogy meg tudja osztani a képeket barátaival. Hány MB (megabájt) terjedelmű helyet foglal el a gépen és a tárhelyen a 158 db fénykép, ha egy fénykép átlagosan 3900 kB (kilobájt) méretű? (1 MB = 1000 kB)

4. a) 600 kg cukorrépából körülbelül 100 kg cukrot állítanak elő.

Másold le a táblázatot a füzetedbe, és pótold a táblázat hiányzó adatait!

Cukorrépa (kg)	100	150	300	600	850	900	1200
Cukor (kg)				100			

- b) Hány kg cukrot vonhatunk ki

A) 7500 kg, B) 11,3 t, C) 23 t, D) 24,5 kg cukorrépából?

- c) Hány kg cukorrépa szükséges

A) 59 t, B) 7000 kg, C) 2500 kg, D) 40,3 t cukorhoz?

5. 12 kg lisztből 15 kg kenyeret süt a pék. Hány ugyanilyen kenyeret tud sütni 20 kg, 27 kg, 7,5 kg, 3,65 kg lisztből? Készíts táblázatot!

6. Egy pohár joghurt 100 grammja a táblázatban leírt tápanyagmennyiségeket tartalmazza.

Energia	440 kJ*
Fehérje	4,0 g
Szénhidrát	15,0 g
Zsír	2,8 g

*kilojoule (kJ): energia-mértékegység

Számítsd ki, hogy hány gramm van az egyes tápanyagokból

- a) 500 g, b) 260 g ilyen joghurtban!

7. Válaszd ki az alábbi példák közül az egyenes arányosságokat!

- a) egy futópálya területe és a beterítéséhez szükséges vörös salak mennyisége
b) egy kocka élének hossza és a kocka felszínének nagysága
c) egy kocka élének hossza és a kocka térfogatának nagysága
d) a fejlődő gyermek életkora és magassága
e) az adott idő alatt elvégzett munka és az érte fizetett órabér
f) egy téglalap alakú telek területe és a bekerítéséhez szükséges kerítés hossza

8. a) A következő táblázat alapján számítsd ki, hogy egységnyi idő alatt mekkora a megtett út (a sebesség)!

	Gyalogos	Kerékpár	Gyors- vonat	Személy- autó	Hang	Repülő	Fény
Út	15 km	30 km	280 km	210 km	666 m	600 km	1 500 000 km
Idő	3 óra	1,5 óra	4 óra	3,5 óra	2 másodperc	55 perc	5 másodperc

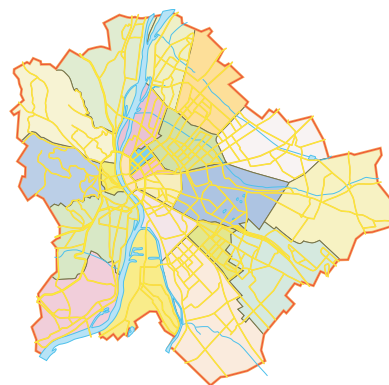
- b) Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben a kerékpáros és a személyautó hely-idő grafikonját 1 órától 5 óráig!

9. A 16 m^2 alapterületű ebédlő négyzet alakú padlóját 10 cm oldalú, négyzet alakú mozaiklapokkal borítják be. Hány darab mozaiklapra lesz szükség? Hány ilyen lapot kell vásárolni, ha az ebédlő alapterülete 9 m^2 , 25 m^2 , 36 m^2 , 64 m^2 ? Készíts táblázatot!



10. Budapesten évente megközelítőleg 800 000 tonna hulladék keletkezik.

- Számítsd ki, átlagosan hány tonna hulladékot jelent ez naponta!
- Számítsd ki, átlagosan hány kg hulladékot jelent ez egy budapesti lakosra nézve! Budapest lakossága 1,75 millió fő.



Nézz utána az interneten, hogyan viszonyulnak a feladatban kiszámított budapesti adatok az európai nagyvárosok hulladékadataihoz!

11. A következő összefüggések közül melyek egyenes arányosságok?

- ha egy edényben lévő vizet egyenletesen melegítünk, akkor a melegítésre fordított idő és a víz hőmérséklete
- a téglalap területének nagysága és egyik oldalának hossza, ha a másik oldalának hossza állandó
- egy mozielőadásra ugyanolyan árú jegyet váltó emberek száma és az e jegyekért fizetendő összeg
- a növekedő gyermek magassága és tömege
- a télire eltett alma tárolási ideje és nedvességtartalma



12. Egy 1 m hosszú, henger alakú hasábfát 20 cm-es darabokra kell elfűrészelni. 2 vágás $2\frac{2}{3}$ percig tart. Mennyi ideig tart 15 ilyen hasábfát elfűrészélése?

13. Egy óra 5 másodperc alatt üti el a 6 órát. Hány másodperc alatt üti el a 12 órát?

Százalékszámítás

Mindennapi életünkben lépten-nyomon találkozunk a százalék fogalmával és a % jelével. Üzletekben (áremelés, árcsökkenés), bankban (kamatok), statisztikákban (arányok), fizetéseknél (bruttó, nettó) gyakran előfordul.



Korábban tanultuk, hogy egy törtet sokféle alakban felírhatunk. Például:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \dots = \frac{25}{100} = \frac{50}{200} = \dots$$



A $\frac{25}{100}$ rész azt jelenti, hogy valaminek a $\frac{25}{100}$ részét, más néven az egynegyedét vesszük. A századrészt röviden **százaléknak** nevezzük, és **% jellel** jelöljük.

Például: $1\% = \frac{1}{100}$ $15\% = \frac{15}{100}$

Így az $\frac{1}{4}$ része valaminek ugyanazt jelenti, mint a $\frac{25}{100}$ része, vagy az új jelöléssel: 25%-a. Ez a jelölés burkoltan tartalmazza a 100 minden jelét, csak kicsit „fursán” van leírva: %. A százalékjel valójában a *per cento* olasz kifejezés rövidítésének gyors leírásából származik: *per cento* → *cto* → %.

A törtrész és a százalék

1. példa

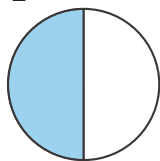
A teljes kör jelentse az egész mennyiséget! Színezzük ki ennek a(z)

- a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{3}{4}$, c) $\frac{2}{5}$, d) $\frac{1}{3}$ részét!

Adjuk meg ezeket a törtrészeket százalék alakban is!

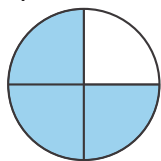
Megoldás

- a) $\frac{1}{2}$ része



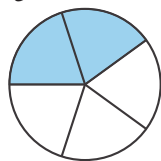
50%-a

- b) $\frac{3}{4}$ része



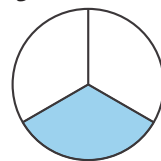
75%-a

- c) $\frac{2}{5}$ része



40%-a

- d) $\frac{1}{3}$ része



$\left(33\frac{1}{3}\right)\%$ -a

A kiszínezett rész az egész mennyiség

a) $\frac{1}{2}$ része = $\frac{50}{100}$ része = 50%-a,

b) $\frac{3}{4}$ része = $\frac{75}{100}$ része = 75%-a,

c) $\frac{2}{5}$ része = $\frac{40}{100}$ része = 40%-a,

d) $\frac{1}{3}$ része = $\frac{33\frac{1}{3}}{100}$ része = $\left(33\frac{1}{3}\right)\%$ -a.

Azt is megfigyelhetjük, hogy a kör fehérén maradt része rendre a kör

a) $\frac{1}{2}$ része = 50% -a, b) $\frac{1}{4}$ része = 25% -a, c) $\frac{3}{5}$ része = 60% -a, d) $\frac{2}{3}$ része = $\left(66\frac{2}{3}\right)\%$ -a.

Minden esetben igaz, hogy a fehér és a színes részek összege:

törtrészekkel kifejezve éppen 1 egész,

százalékkal kifejezve éppen 100%.

2. példa



Nyári táborozásra 160 tanuló jelentkezett. $\frac{1}{2}$ részük evezős-, $\frac{1}{10}$ részük környezetvédő-, $\frac{2}{5}$ részük kézművestáborba kíván menni.

Hány tanuló megy az egyes táborokba külön-külön? Fejezzük ki a tanulók számát százalékokban is!

Megoldás

$$\begin{aligned} \text{A 160 gyerek } \frac{1}{2} \text{ része: } 160 \cdot \frac{1}{2} &= 80. \\ \frac{1}{10} \text{ része: } 160 \cdot \frac{1}{10} &= 16. \\ \frac{2}{5} \text{ része: } 160 \cdot \frac{2}{5} &= 64. \end{aligned}$$

A törtreszeket századrészekre váltva százalékban is kifejezzük:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{ rész} &= \frac{50}{100} \text{ rész} = 50\%, \text{ tehát 160 tanuló } \frac{50}{100} \text{ része, vagyis 160 tanuló } 50\text{-a } 80 \text{ tanuló.} \\ \frac{1}{10} \text{ rész} &= \frac{10}{100} \text{ rész} = 10\%, \text{ tehát 160 tanuló } \frac{10}{100} \text{ része, vagyis 160 tanuló } 10\text{-a } 16 \text{ tanuló.} \\ \frac{2}{5} \text{ rész} &= \frac{40}{100} \text{ rész} = 40\%, \text{ tehát 160 tanuló } \frac{40}{100} \text{ része, vagyis 160 tanuló } 40\text{-a } 64 \text{ tanuló.} \end{aligned}$$

3. példa

A görögdinnye húsának 84%-a víz. Számítsuk ki, hogy mennyi a víztartalma annak a görögdinnyének, amelynek húsa 23 kg!

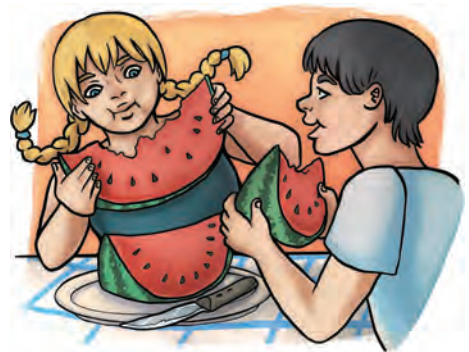
Megoldás

Az egységnyi rész (1%) segítségével, következtetéssel oldjuk meg a feladatot.

A feladat kérdése: Mennyi a 23 kg 84%-a? Most az egésznek, a 100%-nak a 23 kg felel meg.

100%	1%	84%
23 kg	0,23 kg	19,32 kg

$\overset{\text{red}}{\curvearrowright} : 100 \quad \overset{\text{red}}{\curvearrowright} \cdot 84$
 $\underset{\text{blue}}{\curvearrowleft} : 100 \quad \underset{\text{blue}}{\curvearrowleft} \cdot 84$



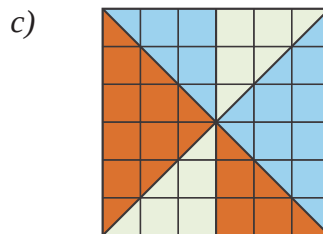
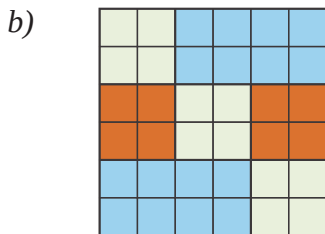
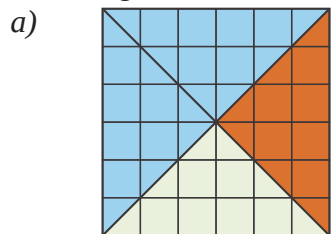
Ahogy a törtresz számításánál tanultuk, a fenti eredményt egyetlen művelettel is megkaphatjuk.

$$\text{Mivel } 84\% = \frac{84}{100} = 0,84, \text{ ezért } 23 \text{ kg} \cdot 0,84 = 19,32 \text{ kg}.$$

A 23 kg-os görögdinnye víztartalma 19,32 kg.

Feladatok

1. Hányadrésze a négyzet egész területének a zöld, a kék és a barna színű rész? A törtrészeket add meg százalék alakban is!



2. Írd fel százalék alakban a törtrészeket!

$$\frac{3}{10} \quad \frac{7}{20} \quad \frac{9}{25} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{12}{15} \quad \frac{24}{40} \quad \frac{15}{60} \quad \frac{18}{24} \quad \frac{150}{75} \quad \frac{99}{66}$$

3. Írd fel százalék alakban a tizedes törtekkel megadott törtrészeket!

$$0,26 \quad 0,70 \quad 0,05 \quad 0,124 \quad 2,45 \quad 1,25 \quad 1,00 \quad 3,84$$

4. Írd fel a százalék alakban felírt részeket tört alakban!

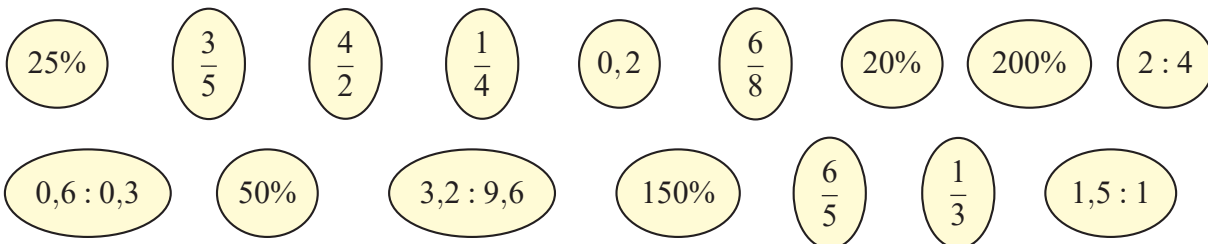
$$40\% \quad 75\% \quad 5\% \quad 4\% \quad 150\% \quad 1,2\% \quad 33\frac{1}{3}\% \quad 45\frac{1}{2}\%$$

5. Az ábrán látható mobiltelefon kijelzőjéről leolvasható, hogy akkumulátorának hányadrésze van feltöltve. A piros rész az „elfogyasztott” töltést jelzi.

Hány százalékos a telefon feltöltöttsége?



6. Válaszd ki az egyenlőket!



7. Hány dkg meggyet és hány dkg cukrot tartalmaz 1 kg meggyes joghurt, ha 20% a gyümölcs- és 8% a cukortartalma?

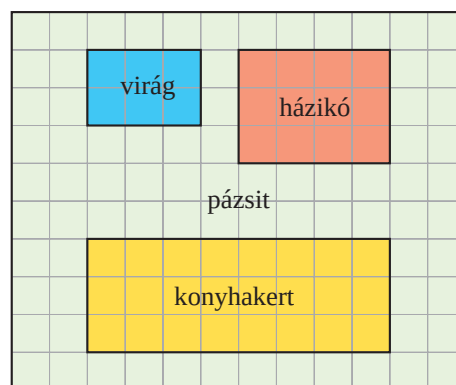
8. Egy szörp üvegén ez áll: 9-szeres hígításban ajánlott.

- a) Hány liter hígított szörpöt tudunk egy liter tömény szörpből készíteni?
b) A hígított szörp hány %-a víz?

9. Határozd meg, hogy a teljes kert hányadrésze

- a) a virág;
- b) a konyhakert;
- c) a házikó;
- d) a pázsit!

A kapott részeket minden esetben add meg százalékban is!



10. A felsorolt növények víztartalma:

Fejes saláta: 95% Érett paradicsom: 94%
 Retek: 92% Alma: 84%
 Burgonya: 78% Földimogyoró: 5%

Számítsd ki, mennyi víz van a) 2 kg, b) $\frac{1}{2}$ kg ilyen növényben!

11. Hány liter 2 hl

- a) 20%-a; b) 75%-a; c) 90%-a; d) 0,1%-a?

12. Hány gramm 4 kg

- a) 10%-a; b) 50%-a; c) 60%-a; d) 90%-a?

13. Hány perc 1 óra

- a) 20%-a; b) 60%-a; c) 125%-a; d) 5%-a?

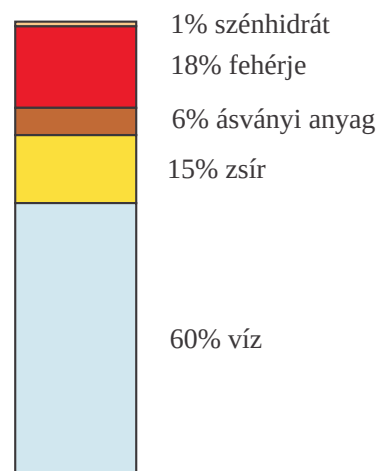
14. Hány fok a derékszög

- a) 10%-a; b) 30%-a; c) 80%-a; d) 120%-a; e) 150%-a; f) $33\frac{1}{3}\%$ -a?

Szerkeszd meg ezek közül azokat a szögeket, amelyek vonalzóval és körzővel megszerkeszthetők!

15. Az ember szervezetének 60%-a víz, 15%-a zsír, 6%-a ásványi anyag, 18%-a fehérje, 1%-a szénhidrát.

- a) Írd át a százalékokat törtrészekre!
- b) Hány kg víz és hány kg zsír van egy 65 kg-os ember szervezetében?
- c) Számítsd ki, hogy a te szervezetedben körülbelül hány kg víz és hány kg fehérje van!



@ Nézz utána az interneten, hogyan változik a korral az emberi szervezet víztartalma!



16. Hány óra van most, ha a nap hátralévő része az elmúlt időnek 140%-a?
(A nap 0 órától 24 óráig tart.)

17. Lóci mindennap ugyanazon az úton gyalog jár iskolába. Egyik alkalommal odafelé menet csak akkor vette észre, hogy otthon hagyta az uzsonnáját, amikor már megtette az egész út $\frac{3}{4}$ -ének a 60%-át, így onnan kellett visszafordulnia. Másik alkalommal pedig a tolltartójáért kellett visszamennie akkor, amikor már megtette az egész út $\frac{2}{3}$ -ának a 80%-át. Mikor kellett többet gyalogolnia?



Gazdálkodj okosan!

Több mint 7000 évvel ezelőtt a cserekereskedelem kialakulása az emberiség történetében nagy előrelépést jelentett. Ha egyes emberek az általuk készített termékből többet állítottak elő, mint amennyit fel tudtak használni, kerestek olyan „partnert”, akinek éppen erre a termékre volt szüksége. Így a fölösleget elcserélték olyan „árura”, amiből viszont nekik volt hiányuk. Az áru olyan emberi szükségletek kielégítésére alkalmas termék, amelyet cserére termelnek. Az árucseré nehézsége az volt, hogy a felkínált áruk értéke legtöbbször nem volt összemérhető. Például fonott kosarakért hogyan lehetett marhával fizetni? Ezért szükség volt közvetítő eszközre, ilyen volt a só, a kagyló, a gyöngy, a gabona stb. Később áttértek értékálló közvetítőeszközök használatára. Erre szolgált az ezüst, illetve az arany. Ezekből a nemesfémekből pénzürmeket készítettek. A mai kereskedelemben a pénz az alapvető eszköz, amely alkalmas az áruk cseréjének lebonyolítására.



1. példa

Karesz és Pisti jó barátok. Mindketten egy nagyon népszerű film játékfiguráit gyűjtik. Egy alkalommal elhatározzák, hogy néhány figurát kicserélnek, mert éppen a társuk gyűjteményében lévő szeretnék megkapni. Karesz a saját gyűjteményéből egy rohamosztagos katonát elcserélne Pisti gyűjteményéből három Skywalker-figurára. Ebben meg is egyeznek. Karesz rohamosztagos katonája 2400 Ft-ot ér. Ennél 10%-kal több Pisti három Skywalker-figurájának értéke.

a) Mennyi a három Skywalker-figura értéke?

Karesz katonája

Pisti katonái

b) Mennyit ér egy Skywalker-figura?

c) Ki járt jobban ezzel a cserével?

Megoldás

a) Ha 2400 Ft-hoz hozzáadjuk annak 10%-át, akkor annak 110 %-át kapjuk. Ezt az értéket kétféleképpen is kiszámolhatjuk.



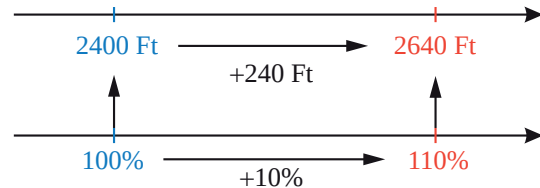
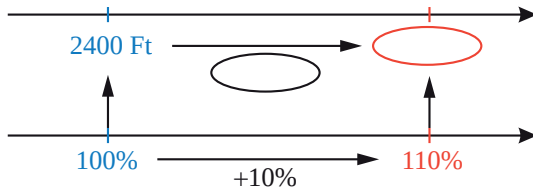
2400 Ft 10 %-át hozzáadjuk a 2400 Ft-hoz.

$$2400 \text{ Ft} \cdot \frac{10}{100} = 2400 \text{ Ft} \cdot 0,10 = 240 \text{ Ft}$$

és $2400 \text{ Ft} + 240 \text{ Ft} = 2640 \text{ Ft}$

A három Skywalker-figura értéke 2640 Ft.

A feladat megoldását számegyenesen szemléltetjük.



b) Egy Skywalker-figura $2640 \text{ Ft} : 3 = 880 \text{ Ft}$ -ot ér.

c) A katonák értékét tekintve a csere Karesznek volt kedvezőbb.

A családi pénzgazdálkodás minden ember életében alapvető fontosságú. Szerencsés esetben a családi összbevételek fedezik a szükséges kiadásokat.

A lehetséges bevételek:

Rendszeres:

munkabér,
társadalmi juttatások (pl.: családi pótlék, szociális segélyek),
természetbeni juttatások (pl.: megtermelt áruk)
stb.

Rendkívüli:

jutalom, prémium,
örökség,
ajándék
stb.

A szükséges kiadások

- Lakhatási költségek: fűtés, világítás, vízhasználat, állagmegőrzés illetve -javítás, telefon, média, internet.
- Háztartási költségek: élelmiszerek, tisztító-, illetve tisztálkodószerek.
- Eltartottakra fordított költségek (gyermekekre, illetve gondozott személyekre): utazás, közétkeztetés (menza), ruházat, iskolaszerek, sportszerek, különórák, zsebpénz, mobiltelefon, gyógyszerek, orvosi ellátás.
- Szülők állandó szükségleteinek költségei.
- Rendkívüli költségek: ajándékok, rendezvények, kulturális események stb.
- Hiteltörlesztés.
- Számlavezetési díj.
- Biztosítási díjak (ingatlanbiztosítás, gépjármű-felelősségbiztosítás, casco stb.).
- Ingatlanadó, gépjárműadó.

2. példa

Vitassátok meg egymás között, hogy az alábbiak közül melyek lehetnek a nélkülözhetetlen kiadások! A felsorolt kiadásoknak hányadrésze nélkülözhetetlen? A kapott törtrészt írjuk fel százalék alakban is!

Villanyszámla	Fűtésszámla	Vízdíj	Szükséges élelem beszerzése
Személyautó költségei	Tönkrement, illetve kinőtt ruhaneműk cseréje	Csőtörés megjavítása	
Hiányzó taneszközök beszerzése	Kerékpár megjavítása	Mobiltelefon-egyenleg feltöltése	

Megoldás

Nélkülözhetetlen kiadások például

Fűtésszámla
Vízdíj
Csőtörés megjavítása
Szükséges élelem beszerzése
Villanyszámla
Tönkrement, illetve kinőtt ruhaneműk cseréje

Átmenetileg nélkülözhető kiadások például

Hiányzó taneszközök beszerzése
Mobiltelefon-egyenleg feltöltése
Kerékpár megjavítása
Személyautó költségei

A felsorolt 10-féle kiadás $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ része nélkülözhetetlen.

Százalék alakban: $\frac{6}{10}$ rész = $\frac{60}{100}$ rész = 60%.

Játék

4 fős csoportokban írjatok fel fejenként két olyan családi kiadást külön-külön cédulára, amely az előző példában nem szerepel! A nyolc cédulát tegyétek egy papírdobozba! Sorban mindenki húzzon egy cédulát, és döntse el, hogy az azon lévő kiadás halaszthatatlan, vagy halasztható! A döntéseiteket minden esetben indokoljátok meg! Vitás esetekben érveljeteك saját döntésetek mellett!

3. példa

A hattagú Gedeon családban Lilla egy esti, teli kádas fürdés alkalmával 1,5 hl vizet használ el. Mennyi víz fogy el fürdéskor egy-egy este, ha a család minden tagja ugyanennyi vizet fogyaszt? Mennyibe kerül ez a családnak, ha 10 hl meleg víz ára körülbelül 760 Ft?

Megoldás

1 fürdés 1,5 hl víz

A hattagú család hatszor ennyi vizet használ:

6 fürdés 1,5 hl · 6 = 9 hl víz

Az egész család egy-egy este 9 hl vizet fogyaszt el.

Ha 10 hl meleg víz 760 Ft, akkor 1 hl ára 10-szer kevesebb, azaz $760 \text{ Ft} : 10 = 76 \text{ Ft}$.

A 9 hl ára pedig 9-szer több, mint az 1 hl ára: $76 \text{ Ft} \cdot 9 = 684 \text{ Ft}$.

A Gedeon család egy esti fürdése tehát körülbelül 684 Ft-ba kerül.

A megoldás menetét táblázatba foglaljuk.

		: 10		· 9	
Meleg víz (hl)	10	↔	1	↔	9
Ár (Ft)	760	↔	76	↔	684
		: 10		· 9	



Tudod-e?

Ha Lilla nem lubickolna a teli kádban, hanem zuhanyozna, akkor a fenti vízmennyiségnek körülbelül csak a harmadát használná el. Ha mindenki így tenne a családban, akkor a napi fürdés csak 228 Ft-ba kerülne.

A világ különböző tájain élőknek más-más lehetőségük van a vízhez jutásra. Az 1 főre eső napi átlagos vízfogyasztás az Egyesült Államokban a legmagasabb: 575 liter = 5,75 hl. Ugyanakkor például a délkelet-afrikai Mozambikban egy ember átlagos napi vízfogyasztása mindössze 4 liter = 0,04 hl.



Az internetes keresőbe a *valós idejű világstatisztika* kifejezést írva olyan oldalakat találhatsz, amelyeken többek között a Föld népességének vízfogyasztását is nyomon követheted.

4. példa

Egy ruhaboltban a farmerek kifutó modelljeinek árát leszállították 20%-kal.

Mennyit kell fizetni így egy nadrágért, ami eredetileg 4500 Ft-ba került?



Megoldás

Ha 4500 Ft-ból elvesszük annak 20%-át, akkor megmarad az ár 80%-a. A csökkentett árat kétféleképpen is kiszámolhatjuk.

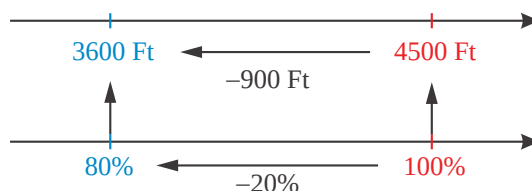
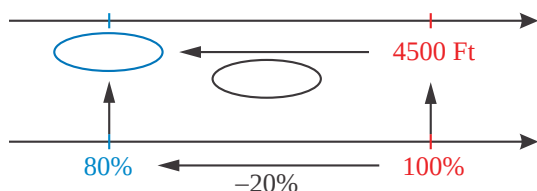
4500 Ft 20%-át kivonjuk a 4500 Ft-ból.

$$4500 \text{ Ft} \cdot \frac{20}{100} = 4500 \text{ Ft} \cdot 0,20 = 900 \text{ Ft}$$

és $4500 \text{ Ft} - 900 \text{ Ft} = 3600 \text{ Ft}$

A farmernadrág ára a leárazás után 3600 Ft.

A feladat megoldását számegyenesen szemléltetjük.



Csoportmunka

Gyűjtsetek az internetről olyan weboldalakat, amelyeken megadott százalékkal történő árleszállítást hirdetnek! A csoport minden tagja válasszon egy terméket, és számítsa ki, mennyi annak a csökkentett ára! Végül adjátok meg együtt, hogy összesen mennyi pénzt takarítanak meg, ha a csökkentett áron vásárolnátok meg a kiválasztott termékeket!

Feladatok

1. Gyöngyvér havonta 6000 Ft zsebpénzt kap szüleitől, amit a tanítási napokon hiányzó tanszereinek megvásárlására, illetve tízóraijának kiegészítésére használhat fel. Mennyi pénzt költhet naponta átlagosan? (Egy hónap 4 hét, egy hét 5 tanítási nap legyen!)

2. Egy számítástechnikai tanfolyamon nyolc óráért 48 000 Ft-ot kell fizetni fejenként. Mennyibe kerül a tanfolyam annak a résztvevőnek, aki négy órával többet szeretne tanulni?

3. A 6. a osztály 35 tanulója színházba készül. 12 db jegy ára 36 000 Ft. Mennyibe kerül a színházlátogatás az egész osztálynak?

4. Egy angolnyelv-tanár óradíja 6500 Ft. Mennyit fizet a tanítvány 1,5; 3; 5; 9; 21 óráért?

5.



Az egyik mobiltelefon-szolgáltató percenként 46 forintot számít fel ügyfeleinek egy-egy belföldi hívás esetén. A számlázás másodpercalapú, tehát mindenki annyi másodpercért fizet, amennyit telefonált.

Hány forintot kell fizetnie egy belföldi hívás után annak az ügyfélnek, aki 5 perc 24 másodpercet telefonált?

6. Szorgos Gizi néni kenyeret és sajtot vásárol a családjának. Mindkettőből a legolcsóbbat szeretné megvenni. A csomagokon csak a csomag ára szerepel, az egységár nem. (Egységár: 1 kg termék ára.) Határozd meg a táblázatban feltüntetett árak alapján az egységárakat! Döntsd el, hogy Gizi néni melyik kenyeret és melyik sajtot válassza a kínálatból!



Kenyérfélék

75 dkg-os fehér	330 Ft
1,5 kg-os rozsos	720 Ft
0,5 kg-os teljes kiőrlésű	200 Ft
2 kg-os félbarna	600 Ft

Sajtok

100 g-os csomag	280 Ft
60 dkg-os csomag	3240 Ft
25 dkg-os csomag	520 Ft
1,2 kg-os csomag	5520 Ft

7. A háromtagú Kiss család havi összjövedelme 600 000 Ft. Élelmiszerekre és tisztítószerre a család ennek a 30 %-át költi el. A lakhatás költségeinek havi átlaga a jövedelmük 15 %-a. A gyermekekre jutó kiadások közül az utazásra, a menzára és a szükséges ruházatra fordított összeg havonta átlagosan a jövedelem 3%-a. A havi jövedelmük 8%-át félreteszik egy megtakarítási számlán. A fennmaradó összeget egyéb kiadások fedezésére használják fel.

Számítsd ki, hogy havonta

- hány Ft-ot kell fordítani az otthoni élelmiszerekre és tisztítószerekre,
- mennyi a lakhatás költsége,
- hány Ft a gyermek elengedhetetlen szükségleteinek költsége,
- hány Ft a havi megtakarításuk,
- az összjövedelem hány százaléka marad egyebekre!



8. Az öttagú Nagy család havi összjövedelme 950 000 Ft. Élelmiszerekre és tisztítószerre a család ennek a 35 %-át költi el. A lakhatás költségeinek havi átlaga a jövedelmük 15 %-a. Az egy gyermekekre jutó kiadások közül az utazásra, a különórákra és a szükséges ruházatra fordított összeg havonta átlagosan a jövedelem 3%-a. Három gyermek esetén az átlagköltség ennek a háromszorosa. A jövedelemből fennmaradó összeget egyéb kiadások fedezésére használják fel. Számítsd ki, hogy havonta

- hány Ft-ot kell fordítani az otthoni élelmiszerekre és tisztítószerekre,
- mennyi a lakhatás költsége,
- hány Ft a három gyermek elengedhetetlen szükségleteinek költsége,
- az összjövedelem hány százaléka marad egyebekre!



9. Mézga Géza telhetetlen családja a havi 850 000 Ft összjövedelem 115%-át költi el. Hány forint adósságot jelent ez a családnak havonta?

10. Egy kerékpárokat forgalmazó üzletben az 53 000 Ft-os kerékpár árát 40%-kal csökkentették. Mennyibe kerül így a kerékpár? Ha megvesszük, hány Ft-tal olcsóbban kapjuk meg?

11. Egy 35 000 Ft-os tanulói tablet árát 20%-kal növelték. Mivel így nagyon lecsökkent a kereslet, a megemelt árat 20%-kal csökkentették. Visszakapták-e a tablet eredeti árát?

12. A Kelemen családban tönkrement az automata mosógép. Az új mosógép ára 128 000 Ft. Az apuka a családi összjövedelem rendkívüli kiadásokra félretett összegéből a mosógép árának csak a 62,5%-át tudta kifizetni. A fennmaradó összeget a család 12 hónap alatt, azonos összegű törlesztéssel fizeti ki. A forgalmazó cég az ilyen esetekben a tartozás összegére 25%-os kamatot számít fel. (Ez azt jelenti, hogy a valódi tartozásnál 25%-kal többet kell 12 hónap alatt kifizetni.)

- Mennyit fizetett Kelemen apuka a mosógép vásárlásakor?
- Mennyi a tartozás 25%-os kamattal megemelve?
- Mennyit kell havonta törlesztenie a családnak?



Bevezetés a statisztikába

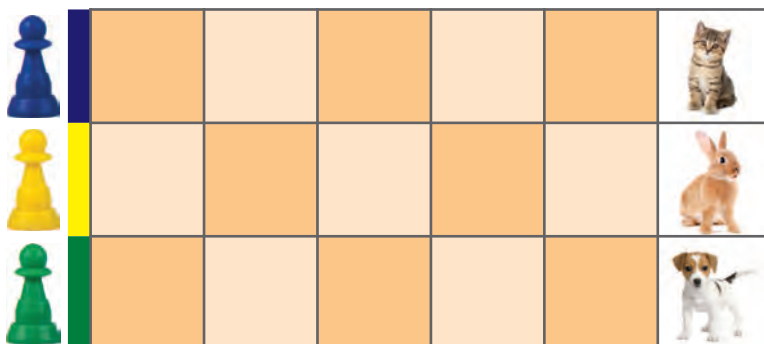
1. játék

A csoport három tagja a 3×6 -os táblán játszik egy-egy játékbábuval. A negyedik tanuló a játékvezető. A három játékos kiválasztja valamelyik állat képét a tábla utolsó oszlopában lévők közül. A játékvezető feldob két különböző pénzérmét, a játékosok pedig az alábbi szabály szerint lépnek egyet-egyet jobbra, a kiválasztott állat sorában:

Ha két fejet dob, akkor a kék játékos lép.

Ha két írást dob, akkor a sárga lép.

Ha az egyikkel fejet, a másikkal írást dob, akkor a zöld lép.



Az a játékos nyer, aki legelőször célba ér.

A játékot többször ismételjétek meg más-más „szereposztással”! Minden játék után jegyezzétek fel, ki ért el legelőször a kiválasztott állat képéhez! Beszéljétek meg, milyen színű bábunak volt a legnagyobb esélye arra, hogy legelőször érjen célba!

1. példa

Egy szabályos dobókockával 20-szor dobtunk, és a dobott számokat (pöttyök számát a kocka lapjain) táblázatba foglaltuk.

Sorszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Dobott szám	2	1	6	5	1	2	3	1	5	4	2	5	1	1	4	1	2	5	6	2

Számoljuk össze, hogy a 20 dobásból hányszor fordultak elő a kockán lévő különböző számok!

Pöttyök száma a kockán	1	2	3	4	5	6
Hányszor fordult elő?						

A táblázat második sorában lévő pálcikák mutatják a dobott számok előfordulásának gyakoriságát.



Ha a gyakorisági számot a 20 dobáshoz viszonyítjuk, akkor a dobott szám előfordulásának relatív (viszonylagos) gyakoriságát kapjuk meg.

Például kettes számot 5-ször dobtunk, ez a 20 dobás $\frac{5}{20}$ része, vagyis a kettes dobásának gyakorisága 5, relatív gyakorisága $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. A relatív gyakoriságot felírhatjuk százalék alakban is:

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%.$$

Pöttyök száma a kockán	1	2	3	4	5	6
Gyakoriság	6	5	1	2	4	2
Relatív gyakoriság tört alakban	$\frac{6}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$
Relatív gyakoriság százalék alakban	30%	25%	5%	10%	20%	10%

2. játék

A játék előtt másoljátok be a füzetetekbe az alábbi táblázatot!

Húzások sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.
A kihúzott számhármasok						

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

A játék menete: A csoport minden tagja kap 6 db 16 számot tartalmazó lottószelvényt. A játékvezető ezt a 16 számot felírja 16 különböző cédulára, és beteszi azokat egy kartondobozba. A játékosok megjelölnék három számot egy üres szelvényükön.

A játékvezető egymás után kihúzza a dobozból három cédulát. A játékosok a húzás után beírják a kihúzott számokat a füzetben lévő táblázatba, és feljegyzik, hogy hány találatuk volt. A játékvezető visszateszi a kihúzott három számot a dobozba, majd keverés után megint kihúzza hármat. A sorsolást 6-szor végzi el egymás után. A telitalálatos szelvények tulajdonosai jutalmat kapnak.

(Ez a lottózás úgy is eljátszható, hogy a játékosok nem kapnak szelvényeket, a tippelt három számot a húzás előtt a füzetükbe írják föl.)

Feladat

A játék után másoljátok be a füzetetekbe az alábbi táblázatot! A hat sorsolás alkalmával kihúzott 18 db szám alapján számítsátok ki az egyes számok gyakoriságát és relatív gyakoriságát!

A kihúzható számok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Gyakoriságok (db)																
Relatív gyakoriságok																

Egy példa a táblázat kitöltésére négy egymás utáni sorsolás esetén (a négy sorsolás alatt összesen $4 \cdot 3 = 12$ cédulát húzhatunk ki):

Húzások sorszáma	1.				2.				3.				4.			
A kihúzott számhármasok	4, 7, 15				2, 4, 9				1, 2, 15				2, 5, 6			
A kihúzható számok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Gyakoriságok (db)	1	3	0	2	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	2	0
Relatív gyakoriságok	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{0}{12}$

A hat sorsolás után válaszoljatok a kérdésekre!

1. Melyik szám kihúzásának volt a legnagyobb és melyiknek a legkisebb a gyakorisága?
2. Igaz-e, hogy ha például a 2-es szám ötször egymás után volt nyerőszám, akkor a hatodik húzásnál kisebb az esélye annak, hogy 2-est húzunk, mint annak, hogy olyan számot, ami előtte még nem szerepelt?
3. Igaz-e, hogy ha öt sorsolás alatt például a 10-est egyszer sem húztuk ki, akkor a hatodik húzásnál nagyobb az esélye a 10-esnek, mint olyan számnak, ami előtte már többször volt a kihúzottak között?
4. Előfordulhat-e, hogy ugyanaz a szám mind az öt húzásban nyerőszám lesz?
5. Igaz-e, hogy egy sorsolásnál az első, második és a harmadik szám kihúzásának ugyanakkora az esélye?

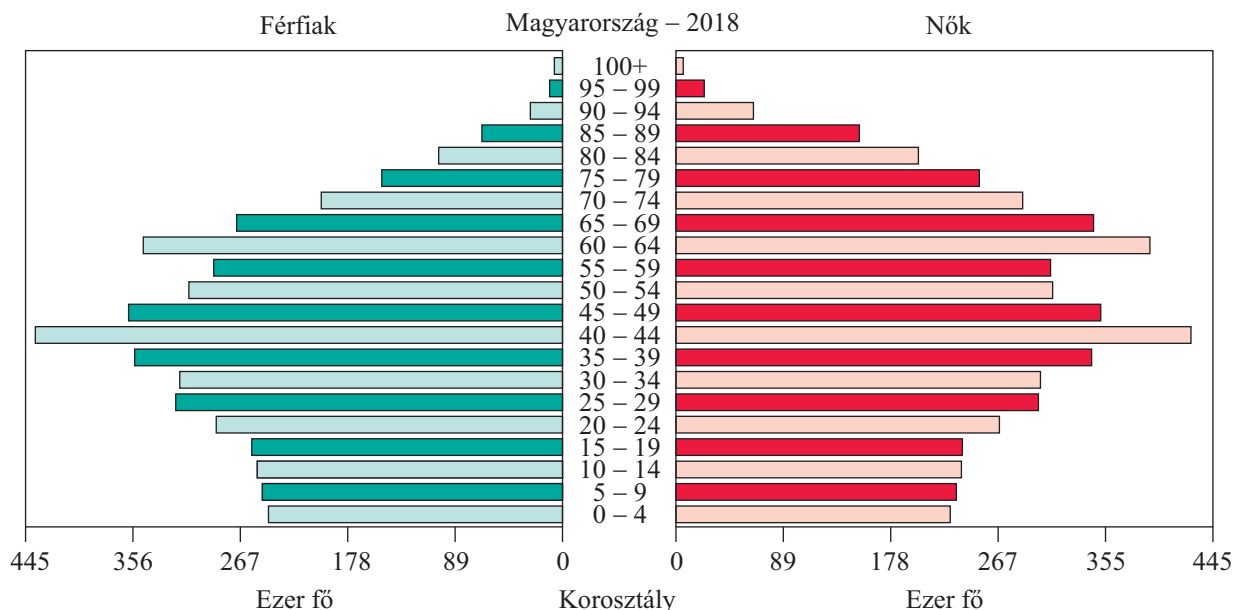


Adatok ábrázolása

Ahhoz, hogy a lottózás után feltett 5 kérdésre pontosabban tudjunk válaszolni, nagyon sok fordulót kellene eljátszani, és a tapasztalatokat összegyűjteni. Az előző játékokban csak kevés tapasztalatot szerezhettünk. A statisztika tudománya több ezer, több millió... megfigyelt és lejegyzett adat ismeretében tud törvényszerűségeket megállapítani.

Az adatsokaságokat, meghatározott szempontok alapján, diagramokon is ábrázolhatjuk. A szemléltetés segíti a kívánt tulajdonság megfigyelését, az összehasonlítások elvégzését.

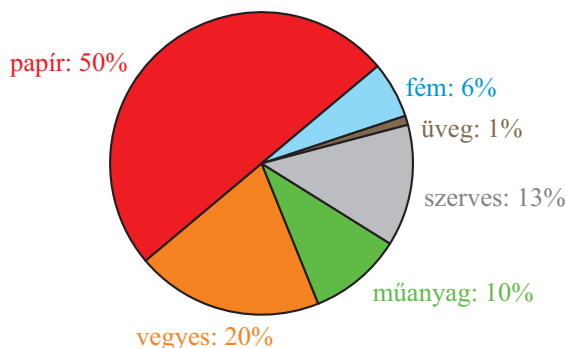
Ilyen diagram például a korfa, ami Magyarország lakosságának életkori megoszlását mutatja a férfiak és a nők létszámának összehasonlításával.



Az interneten megtalálható interaktív korfa naprakészen mutatja a népesség számának alakulását Magyarországon 1870-től napjainkig, és még a jövőre vonatkozó előrejelzéseket is megfigyelhetjük: <http://www.ksh.hu/interaktiv/korfak/ország.html?lang=hu>

Ezen a honlapon Magyarország megyéinek és régióinak interaktív korfáját tanulmányozhatjuk: <http://www.ksh.hu/interaktiv/korfak/terulet.html?lang=hu>.

Egy másik példa, ami jól szemlélteti egy város lakossága által hátrahagyott hulladékok százalékos arányát. A képen feltüntetett adatok alapján elkészítettük a **kördiagramot**.



2. példa

Szabó Lőrinc *A magas Millió* című versében megszámoljuk az egyes betűk előfordulásának gyakoriságát.

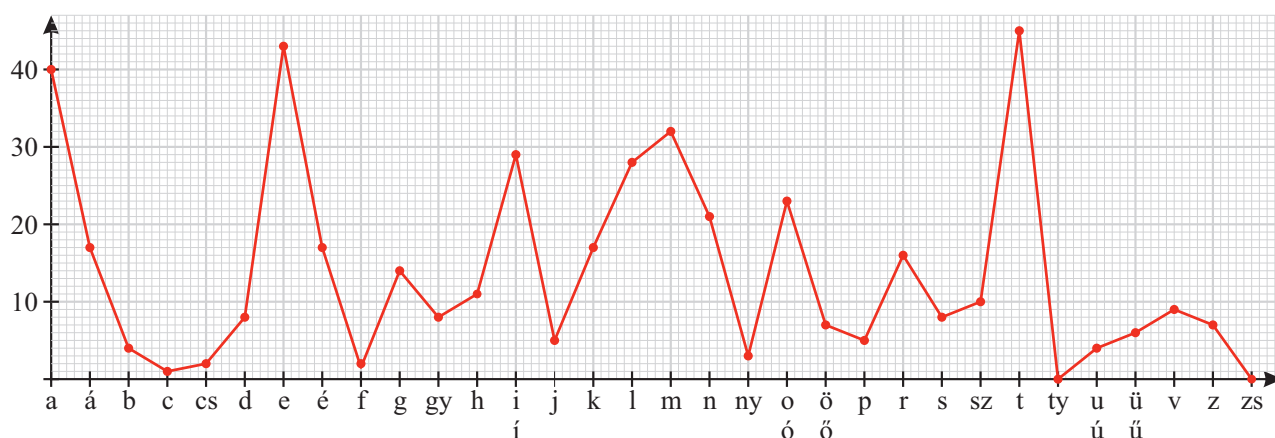
A magas Millió

Húszig már számoltam. Egy nap apám
elővett, és mialatt a dívány
hosszában hevertünk, megtanított
a titokra, tízesek, százaskok
hogy nőnek föl egymáson ezerig.
„De a millió! Ezek még kicsik!”,
mondta; aztán – ígérve, újra, hogy,
ha majd a millióig eljutok,
megkapom a biciklit, (azt, amit
annyit kértem, a háromkerekűt!) –
ment, fát vágni. Hogy történt, mint, ma se
tudom, de a számok épülete,
ahogy tovább tűnődtem, hirtelen
csak elém állt, tisztán, értelmesen,
elém szépen tagolva, az egész,
tündérek élő üvegvara, és
tetejéről a magas Millió
leszállt értem, mint egy nagy léghajó.



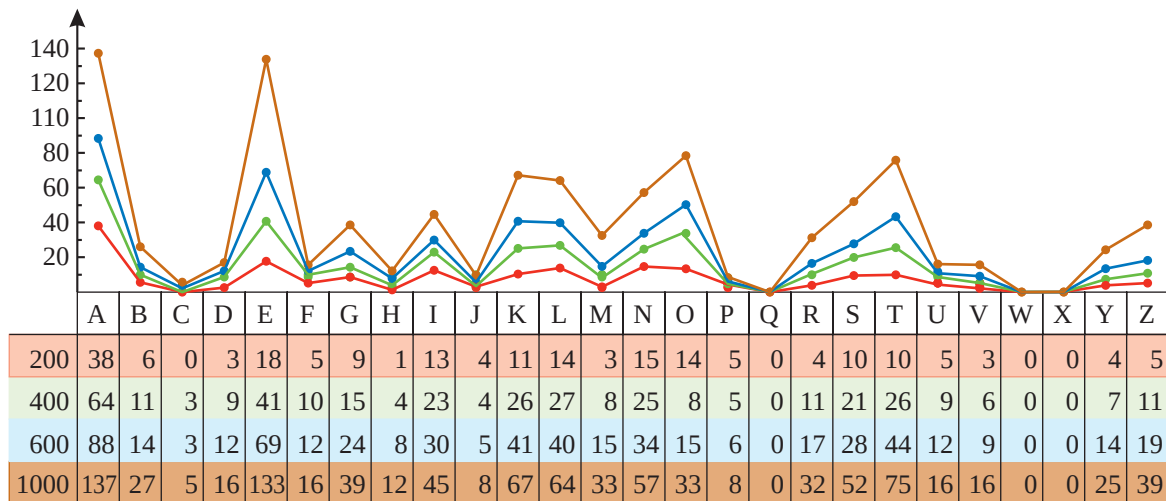
Megoldás

a	á	b	c	cs	d	e	é	f	g	gy	h	i,í	j	k	l	m	n	ny	o,ó	ö,ő	p	r	s	sz	t	ty	u,ú	ü,ű	v	z	zs
40	17	4	1	2	8	43	17	2	14	8	11	29	5	17	28	32	21	3	23	7	5	16	8	10	45	0	4	6	9	7	0



Ez a betűgyakorisági grafikon. A versben 442 darab betű van, a leggyakrabban előforduló betű a t, ezt követi az e, majd az a. Más szövegrészletet vizsgálva gyakran más eredményre jutunk.

A következő grafikonon 200, 400, 600 és 1000 betűből álló mintát vizsgáltak. Ezekben a leggyakoribb betű az a és az e. Ezt tapasztaltuk *A magas Millió* című versben is, de ott a t betű is „kiugrik”. Ennek elsősorban az az oka, hogy a versben a legtöbb ige múlt idejű alakban van.



Adatok átlaga

3. példa

Egy 28 fős osztályban megírt matematikadolgozat osztályzatainak számát táblázatba foglaltuk:

Osztályzat	1	2	3	4	5
Darabszám					

Ábrázoljuk az adatokat, és számítsuk ki a dolgozat osztályzatainak átlagát!

Megoldás

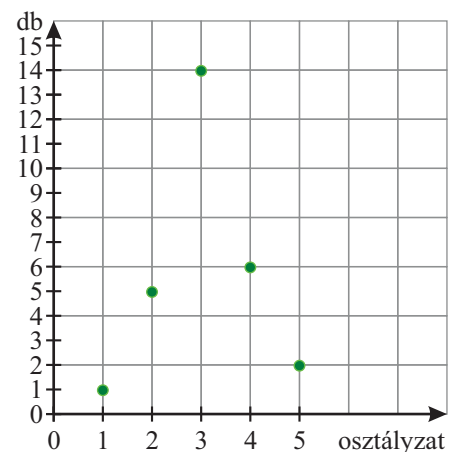
A táblázat adatait **pontdiagramon** ábrázoljuk. Az osztályzatok átlaga, más néven számtani közepe:

1 db egyes	1·1
5 db kettes	5·2
14 db hármas	14·3
6 db négyes	6·4
2 db ötös	2·5

Ez összesen: $1 + 5 + 14 + 6 + 2 = 28$ db jegy.

$$\frac{1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{28} \approx 3,1$$

A dolgozat osztályzatainak átlaga körülbelül 3,1.



4. példa

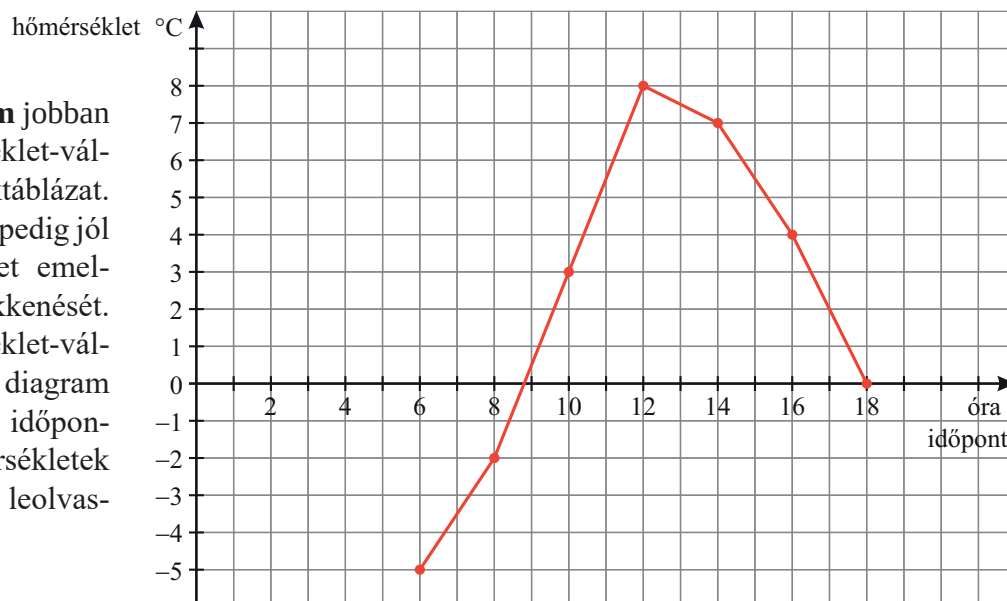
Február 13-án reggel 6 órától este 6 óráig kétóránként megmértük a levegő hőmérsékletét. A mért adatokat táblázatba foglaltuk.

Időpont (óra)	6	8	10	12	14	16	18
Hőmérséklet (°C)	-5	-2	3	8	7	4	0

- Ábrázoljuk az értékeket grafikonon is!
- Határozzuk meg a mért hőmérsékletek átlagát!

Megoldás

a) Ez a **vonaldiagram** jobban szemlélteti a hőmérséklet-változást, mint az értéktáblázat. A pontok összekötése pedig jól mutatja a hőmérséklet emelkedését, illetve csökkenését. Egyenletes hőmérséklet-változást feltételezve a diagram segítségével a mérési időpontokon kívüli hőmérsékletek körülbelüli értékét is leolvashatjuk.



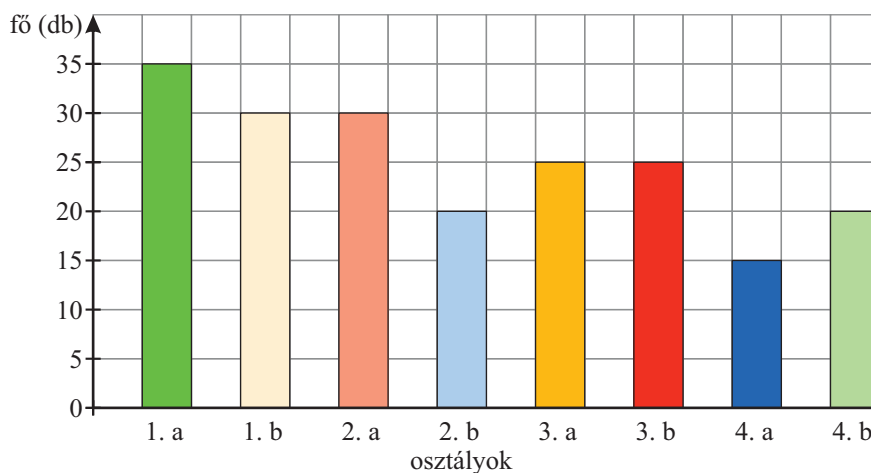
b) A mért hőmérsékletek átlaga: $\frac{(-5) + (-2) + 3 + 8 + 7 + 4 + 0}{7} \approx 2,14$.

A február 13-i nappali átlaghőmérséklet a mért adatok alapján körülbelül 2,14 °C.

5. példa

A Dombi Általános Iskola alsó tagozatos osztályainak létszámaival készült a mellékelt **oszlopdiagram**.

- A leolvasott adatok alapján készítsünk táblázatot!
- A leolvasott osztálylétszámok alapján készítsünk kördiagramot!
- Számítsuk ki az alsó tagozatos osztályok létszámának átlagát!

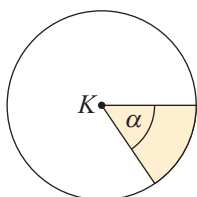


Megoldás

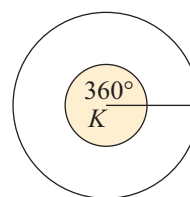
a)

Osztály	1. a	1. b	2. a	2. b	3. a	3. b	4. a	4. b
Létszám	35	30	30	20	25	25	15	20

b) A kördiagram megrajzolásához meg kell határoznunk a létszámoknak megfelelő körcikk középponti szögét. Ilyen az α -val jelölt szög az ábrán.



Ebben az iskolában az alsó tagozatra összesen 200 diák jár. A kördiagramon az összlétszámot a teljes szög szemlélteti.



Az osztálylétszámoknak megfelelő középponti szöget egyenes arányos következtetéssel számítjuk ki.

$$200 \text{ fő} \quad 360^\circ$$

$$1 \text{ fő} \quad 360^\circ : 200 = 1,8^\circ$$

Például 35 fő esetén a középponti szög $35 \cdot 1,8^\circ = 63^\circ$.

Ehhez hasonlóan számítjuk ki az osztálylétszámokat szemléltető többi körcikk középponti szögeit is.

Osztály	1. a	1. b	2. a	2. b	3. a	3. b	4. a	4. b
Létszám	35	30	30	20	25	25	15	20
Középponti szög	63°	54°	54°	36°	45°	45°	27°	36°

A kördiagram:

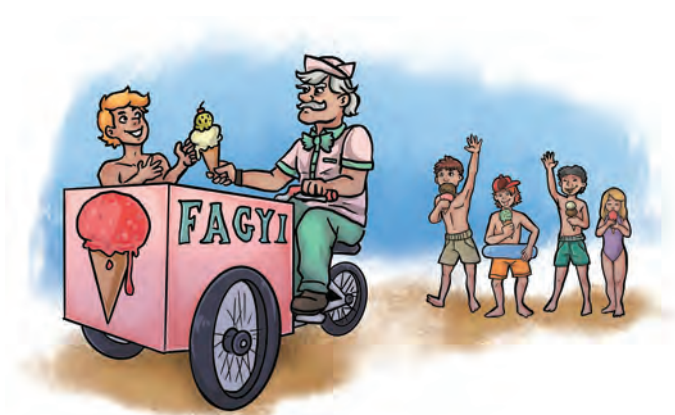


- 1. a
- 1. b
- 2. a
- 2. b
- 3. a
- 3. b
- 4. a
- 4. b

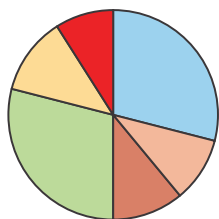
c) Az osztálylétszámok átlaga: $\frac{35 + 30 + 30 + 20 + 25 + 25 + 15 + 20}{8} = \frac{200}{8} = 25$

6. példa

Egy nyári táborban a fagyiarus megkérdezte a gyerekeket, hogy a csokoládé-, vanília-, mogyoró-, oroszkrém-, kivi- és pisztáciafagylalt közül melyiket szeretik a legjobban. A választokat először táblázatban adjuk meg, majd a százalékos arányok segítségével elkészítjük a kapott adatok **kördiagramját**.



Fagyalt	Csokoládé	Pisztácia	Mogyoró	Orosz krém	Kivi	Vanília
Szavazat %-ban	29	10	11	29	12	9



Ebben a mintavételben két kiugró érték szerepel: a csokoládé- és az oroszkrém-fagyaltot kedvelők száma. Itt nem tudjuk, hogy hány gyerek van a táborban, de ez a mintavétel megmutatja az egyes fagyifajták népszerűségének arányát. A fagyalt-árusnak ez a statisztika segít abban, hogy a tábor fagyizójában milyenfajta fagyikat készítsen, és melyikből a legtöbbet.

Itt a **fagyaltok fajtáinak** megadása volt a felmérés tárgya. Ilyenkor a begyűjtött adatoknak **nem tudjuk meghatározni az átlagát**.

A fentiekben különböző szempontok szerint választott adatokat vizsgáltunk. A vizsgálatra kiválasztott adatok összességét a statisztikában **adatsokaságnak** vagy egyszerűen **sokaságnak** nevezik. E fejezet példáiban különféle adatokat, adatsokaságokat rendeztünk táblázatba vagy ábrázoltunk diagramokon: pontdiagramon, vonaldiagramon, kördiagramon, oszlopdiagramon. Ezenkívül még többféle lehetőség létezik egy adatsokaság elemeinek ábrázolására. Minden esetben igaz, hogy a diagram segít az adatsokaság jellemzésében, láthatóvá teszi a növekedési, csökkenési viszonyokat, megmutatja az adatok többségétől kiugróan eltérő értékeket. Ezért választják a statisztikusok gyakran ezeket a nagyon szemléletes ábrázolási módokat.

Feladatok

- Budapest belvárosában a Nemzeti Összetartozás Emlékhelyen olvasható annak a 12 485 településnek a neve, amelyek az 1913. évi összeírás szerint a történelmi Magyarországhoz tartoztak. A képen az emlékfal egy kis részlete látható.

A falon felsorolt településnevek közül kiválasztottunk hatot. Készíts betűstatisztikát táblázatos és grafikus formában a hat településnévben szereplő betűk gyakorisága alapján!



MAGYARRÉGEN

KUNOSVÁGÁSA

GARAMSZENTMIKLÓS

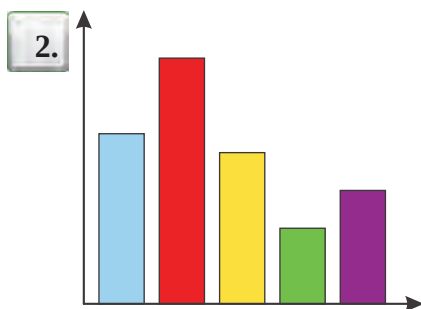
NAGYBÁNYA

PERECSENYSZABADI

SZILÁGYSOLYMOS



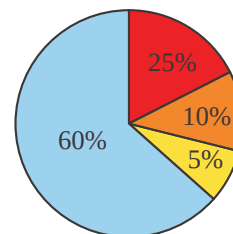
Nézz utána az interneten, mi volt az a trianoni békeszerződés, és mit kell tudni a 2020-ban készült Nemzeti Összetartozás Emlékhelyről! Az emlékhely weblapján a 12 485 település helyét térképen is megkeresheted.



Készíts olyan szöveges feladatot, amelyben erről az oszlopdiagramról leolvasható értékek szerepelnek!

Adj nevet a tengelyeknek és az oszlopoknak! A függőleges tengelyen adj meg olyan egységet, amelyikkel a téglalapok magassága kényelmesen megadható!

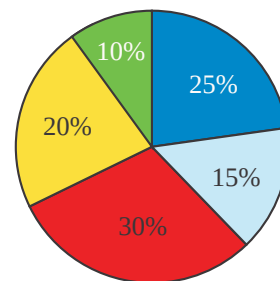
3. A kördiagramon megadott százalékos értékek alapján számítsd ki, hány fokok a különböző színű körcikkek középponti szögei! Mi a hiba a képen? Körző, vonalzó és szögmérő segítségével rajzold fel jól a kördiagramot!



4. Az ábrán látható termékek létrejöttéhez szükséges átlagos vízmennyiséget jelzik az alattuk lévő vízcseppek. 1 vízcsepp 100 liter vizet jelent. Számítsd ki, átlagosan hány hl víz szükséges a felfajzott termékek előállításához! Készíts oszlopdiagramot az adatokból!



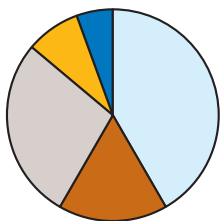
5. Az általános iskolák 4., 5., 6., 7. és 8. osztályos tanulói számára meghirdetett országos matematikaverseny döntőjébe 80 tanuló jutott. A kördiagram a résztvevők számának évfolyamonkénti százalékos eloszlását mutatja.



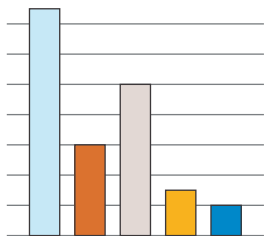
- Számítsd ki, hány tanuló vett részt a döntőben a különböző évfolyamokon!
- Készíts az adatokból oszlopdiagramot!
- A megadott százalékarányok alapján határozd meg a kördiagram középponti szögeit!

6. Válaszd ki azokat az oszlopdiagramokat, amelyek ugyanazt az adatsokaságot jellemzik, mint a kördiagram!

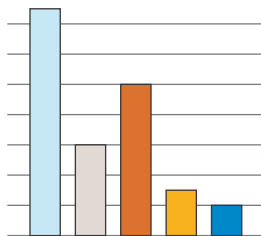
A)



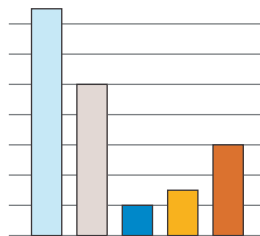
a)



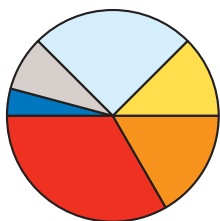
b)



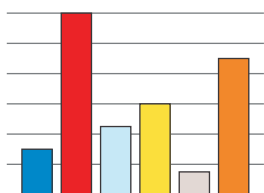
c)



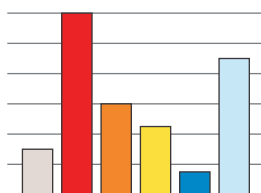
B)



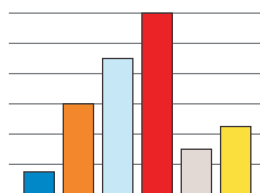
a)



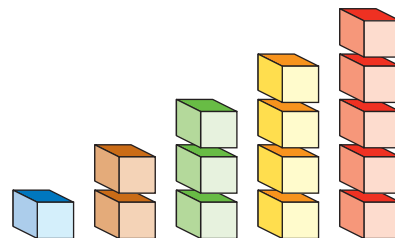
b)



c)



7. A kördiagram és az egybevágó kis kockák-ból kirakott oszlopdiagram egy ugyanolyan szempont szerint vizsgált adatsokaság alapján készült. Hány fokosak a kördiagram körcikkeinek középponti szögei?



8. Készítsetek felmérést osztálytársaitok vagy iskolatársaitok között a következő témákról!

- Melyik fagyaltot kedvelik legjobban az átlatok választott 6-féle közül?
- Az előző héten a menzán melyik volt a kedvenc ételük?
- Hányas cipőt hordanak?
- Ki a kedvenc zeneszerzőjük?
- Átlatok megjelölt tetszőleges témában kérdezzetek!

Az adatokat foglaljátok táblázatba, és ábrázoljátok olyan grafikonon, amely a kapott adatsokaságot a legjobban szemlélteti!

9.

Osztály	5.	6.	7.	8.
Létszám	22	31	18	20

A kerekdombi általános iskola felső tagozatán minden évfolyamban egyetlen osztály van. Az osztálylétszámokat tartalmazza a táblázat. Mennyi az osztálylétszámok átlaga ebben az iskolában?

10.

A 6. évfolyam tanulói közül az *a* osztályban 4-en, a *b*-ben 9-en, a *c*-ben 11-en, a *d*-ben 7-en tanulnak valamilyen hangszeres zenét. Mennyi a zenei különórákra járó tanulók számának átlaga?



11. A táblázat egy 40 fős osztály év végi matematikajegyeinek százalékos megoszlását tartalmazza.

Osztályzat	Százalékos arány
5	10%
4	45%
3	40%
2	5%

Mennyi lett az osztály átlaga matematikából az év végén?

12. A diákszínjátók iskolai rendezvényén nyolc osztály bemutatója szerepelt. Az osztályonkénti résztvevők számát a táblázatból olvashatjuk le.

- a) Készítsd el a táblázat adatainak megfelelő oszlopdiagramot!
b) Mennyi az egyes évfolyamokon az osztályonként résztvevők számának átlaga?

Osztály	5. a	5. b	6. a	6. b	7. a	7. b	8. a	8. b
Résztvevők	11	5	23	7	19	0	5	9

13. A táblázatban a 6.-os tanulók év végi természettudomány- és történelemosztályzatai láthatók. A színes-szel kiemelt szám például azt jelenti, hogy 3 olyan tanuló volt, akinek természettudományból hármasa, történelemből kettese volt.

	Történelemosztályzat					
		1	2	3	4	5
Természettudományosztályzat	1	0	1	4	3	0
	2	0	2	3	1	2
	3	0	3	9	8	2
	4	0	4	6	7	6
	5	0	3	1	6	9

- a) Az évfolyam tanulóinak hányadrésze történelemből legalább 4-est?
b) Hányan kaptak mindkét tárgyból legalább 3-ast?
c) Az évfolyam tanulóinak hányadrésze kapott mindkét tárgyból 3-asnál rosszabb osztályzatot?

14. Az ebédlőben 200 tanulót kérdeztünk meg arról, hogy a menüben előforduló ételek közül melyiket eszi a legszívesebben. A válaszokat tartalmazza az alábbi táblázat.

Étel	Sült csirke	Krumpli-főzelék	Tejbe-gríz	Spenót	Milánói tészta	Hús-leves	Rizses hús	Rántott hal	Borsó-leves
Fiúk szavazata	28	10	13	0	10	9	4	12	14
Lányok szavazata	24	14	17	5	8	5	4	8	15

- a) Ábrázoljátok a megadott értékeket kettős oszlopdiagramon! A kettős oszlopdiagramot úgy készítsétek el, hogy egyféle ételhez két összeillesztett, különböző színű, a lányok és a fiúk szavazatának megfelelő magasságú oszlopot rajzoljatok!
b) Ha a 200 tanuló közül találomra kiválasztunk valakit, mekkora annak az esélye, hogy ő a borsólevest szereti a legjobban?
c) **Párban vagy csoportban** készítsétek ti is hasonló felmérést saját ételfelsorolás alapján!

15. Az emberi szervezetben lévő 5 liter vér eloszlása: 10%-a a szívbe, 15%-a az agyba, 25%-a a vesébe, 20%-a a májba és a bélrendszerbe, 30%-a a bőrbe és az izmokba kerül.

- a) Számítsd ki, hány liter vér kerül az egyes szervekhez!
b) Határozd meg a százalékarányokhoz tartozó középponti szögeket! Szerkeszd meg az adatokat szemléltető kördiagramot!

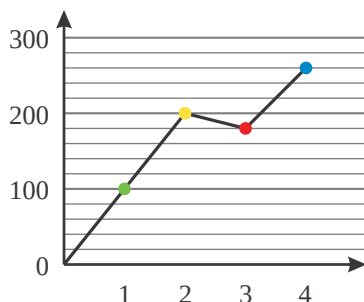


- 16.** Egy röplabdacsapat tagjainak életkora 20, 21, 17, 30, 32, 18 év.
Egyvalaki átigazolt egy másik egyesülethez, így az öt játékos átlagéletkora 21,6-re változott.
Hány éves játékos távozott?
Hány éves játékost kell hívni a csapatba, hogy az átlagéletkor 22 év legyen?

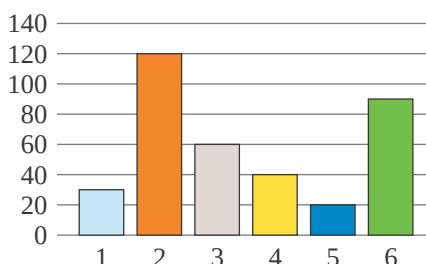
Tudáspróba

- 15 db kis méretű csokoládé 1800 Ft-ba kerül. Mennyit fizetünk
a) 10 db, b) 18 db, c) 24 db, d) 42 db, e) 50 db ilyen csokiért?
- Írd át a törtet százalék alakba!
 $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{100}$ $\frac{5}{4}$ 0,2 0,183 2,12
- Írd át a százalék alakban megadott számokat a lehető legegyszerűbb tört alakú számokká!
12% 50% 75% 3% 24% 132% 0,3%
- Olvasd le a diagramokról az adatokat! Mindháromhoz készíts táblázatot, és írd be a leolvasott értékeket! A c) feladatnál mérd meg szögmérővel a középponti szögeket! Írj mindháromhoz szöveges feladatot!

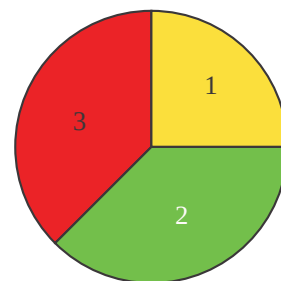
a)



b)



c)



- A pulzusszám az egy perc alatti szívösszehúzódások számát jelenti. Rékának reggel, ébredés után a pulzusszáma három egymást követő napon 73, 60 és 71 volt.
a) Mennyi Réka reggeli pulzusszámátlaga a három egymás utáni nap mérése alapján?
b) A következő három napon Réka reggeli pulzusszámátlaga 15%-kal kisebb volt. Mennyi volt ez az átlag?
- Az ásványvizet a gyártók 1,5 literes palackokba töltik. Egy ládába 9 db ilyen palack fér el. A közeli áruháznak 250 db láda ásványvizet szállítottak.
a) Hány üveg ásványvizet hoztak a szállítók?
b) Összesen hány liter ásványvíz érkezett ebben a szállítmányban az áruházhoz?

Tartalom

Előszó.....	3
HÁNY ESET VAN?	4
MŰVELETEK EGÉSZ SZÁMOKKAL.....	8
Mit tudunk az egész számokról?	8
Egész számok összeadása és kivonása.....	11
Több tag összege, különbsége	17
Szorzás és osztás egész számokkal	21
Több egész szám szorzása, osztása	25
Műveletek sorrendje.....	27
Tudáspróba.....	29
ALAKZATOK TÁVOLSÁGA, TENGELYES TÜKRÖZÉS	30
Alakzatok távolsága.....	30
Két alakzat távolsága	31
Pont és egyenes távolsága	34
Kör és gömb.....	38
Alakzatok rajzolása szerkesztőeszközökkel.....	42
A sík pontjainak jellemzése	45
Tudáspróba.....	52
Képek és tükörképek	53
Tükrözés mozgatással	57
A tengelyes tükrözés tulajdonságai	59
Alakzatok pontjainak tükrözése.....	63
Szimmetrikus alakzatok	66
Szerkesztések körzővel és egyenes vonalzóval	72
Tükörkép szerkesztése	72
Szimmetriatengelyek szerkesztése.....	76
Tudáspróba.....	82
SZÁMELEMÉLET	84
Ritmusok, periódusok	84
A számok maradékaival számolunk.....	89
Keressünk osztókat!	93
Milyen oszthatóságokat árulnak el a számok utolsó számjegyei?.....	98
Milyen oszthatóságokról árulkodik a szám számjegyeinek összege?	102
Számok osztói, közös osztók	107
Számok többszörösei, közös többszörösök	110
Tudáspróba.....	112
HÁROMSZÖGEK, SZABÁLYOS SOKSZÖGEK	114
A háromszögek fajtái	114

A háromszögek belső szögei	120
Szögek összehasonlítása, szerkesztése	124
Szerkesztések körzővel és egyenes vonalzóval	126
Háromszögek szerkesztése	132
Szabályos sokszögek	139
Derékszögű háromszögek kerülete, területe	143
Tengelyesen szimmetrikus háromszögek kerülete, területe	146
Tudáspróba	148
MŰVELETEK TÖRTEKKEL	149
A tört értelmezése	149
Törtek különböző alakban	150
Tört alakban írt szám tizedes tört alakja	153
Törtek összeadása és kivonása	156
Törttel való szorzás	161
Tizedes törttel való szorzás	167
Számok reciproka	170
Osztás tört alakú számmal	171
Osztás tizedes tört alakú számmal	175
Minek van nagyobb esélye?	179
Tudáspróba	180
NÉGYSZÖGEK, TÉGLATESTEK	181
Négyszögek fajtái	181
Tengelyesen szimmetrikus négyszögek	182
Téglatestek	188
Testek felszíne	196
Testek térfogata	200
Tudáspróba	204
NYITOTT MONDATOK	205
Nyitott mondatok megoldása lebontogatással, fordítás a matematika nyelvére	210
Szöveges feladatok megoldása szakaszos ábrázolással	214
Szöveges feladatok megoldása, fordítás a matematika nyelvére	219
„Zöld” szöveges feladatok	225
Tudáspróba	229
ARÁNYOSSÁG, SZÁZALÉK, STATISZTIKA	230
Egyenes arányosság	235
Százalékszámítás	239
Gazdálkodj okosan!	244
Bevezetés a statisztikába	250
Tudáspróba	262

Magyarország
1 : 2 000 000
1 cm-nek 20 km felel meg

